ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITORA RESPONSÁVEL:
Lilian Aparecida Teixeira

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.

Código da coleção:
0197P21202
Código da obra:
0197P21202137

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MODERNA

MODERNA

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37387 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

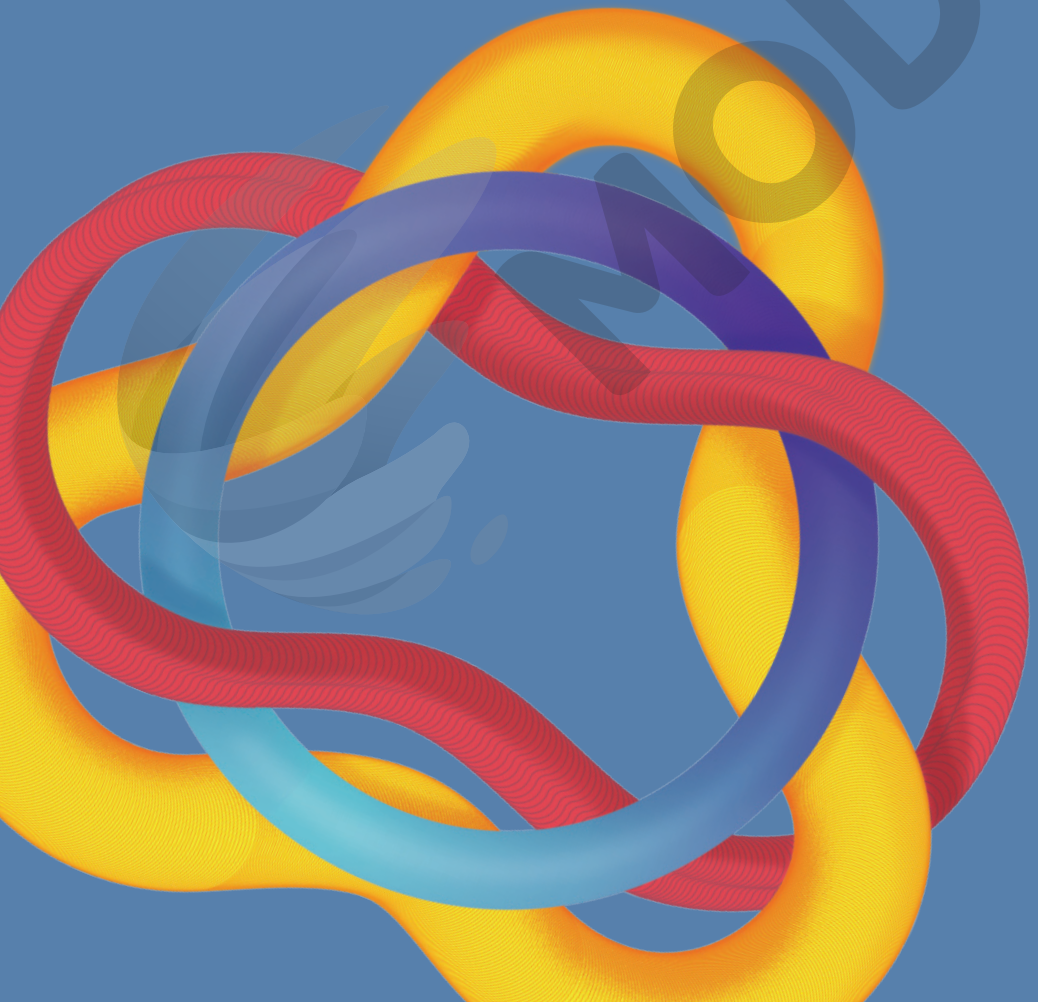
Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Suplemento para o professor



MODERNA

Apresentação

Um meio de inclusão e democratização de oportunidades é a educação. O Ensino Médio representa um momento decisivo na vida de qualquer indivíduo. Assim, cabe ao livro didático auxiliar professores e alunos nessa fase, oferecendo-lhes ferramentas úteis no processo de ensino e aprendizagem. Pensando nisso, esta coleção procurou tratar a Matemática e suas Tecnologias como parte integrante do cotidiano dos alunos, além de estabelecer associação com outros componentes curriculares e com outras áreas do conhecimento.

Tomando diversos documentos oficiais como diretrizes, esta coleção contempla os conteúdos essenciais para esse nível de ensino, apresentando-os de maneira contextualizada e empregando uma linguagem clara e objetiva, em uma sequência que favorece a aprendizagem.

O objetivo é possibilitar aos alunos o desenvolvimento das competências gerais, competências específicas e habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referentes ao Ensino Médio. Porém, é importante que o professor tenha autonomia e consciência de que pode selecionar os conteúdos que serão abordados em sala de aula adotando uma ordem diferente da sugerida no livro do aluno, de acordo com a proposta didático-pedagógica da escola.

Este **Suplemento para o professor** busca oferecer aos docentes subsídios teórico-metodológicos, de maneira a auxiliar seu trabalho na utilização desta coleção em sala de aula e em suas demais atribuições.

MODERNA

Sumário

A estrutura da coleção VI

Livro do aluno VI

Suplemento para o professor X

O Ensino Médio XII

O aluno do Ensino Médio XII

O professor XIII

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos XIV

O convívio social em sala de aula XV

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio XVI

As áreas do conhecimento XVII

Temas contemporâneos transversais XVIII

Orientações didáticas e metodológicas XIX

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção XIX

O computador e o ensino da Matemática XXII

O pensamento computacional XXIII

O aluno no centro do processo de aprendizagem XXIV

Estratégias XXV

Avaliação XXVII

A BNCC e a coleção XXIX

Sugestão de cronograma XXIX

Objetivos, comentários e sugestões XXXII

Tema 1 Os conjuntos XXXII

Tema 2 Princípio aditivo, multiplicativo e arranjos XXXV

Tema 3 Permutações XL

Tema 4 Combinação simples e Binômio de Newton XLII

Tema 5 Probabilidade XLV

Tema 6 Probabilidade condicional XLVIII

Tema 7 Probabilidade e a produção de resíduos L

Tema 8 Estatística LI

Tema 9 Gráficos e tabelas LII

Tema 10 Medidas de tendência central LV

Tema 11 Medidas separatrizes LVIII

Tema 12 Medidas de dispersão LX

Tema 13 Estatística e probabilidade LXIV

Resolução dos exercícios e problemas LXVI

Sugestões ao professor CI

Leituras sobre o ensino de Matemática CI

Leituras sobre a História da Matemática CIII

Leituras sobre os conteúdos deste volume CV

Sugestões de *sites* para o professor CVI

Referências bibliográficas CVII

MODERNA

A estrutura da coleção

Esta coleção de Matemática e suas Tecnologias, destinada ao Ensino Médio, é composta de seis volumes, cujos conteúdos estão organizados por temas. Esses temas, por sua vez, foram elaborados com base nas competências gerais, competências específicas e habilidades elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como nos temas contemporâneos transversais.

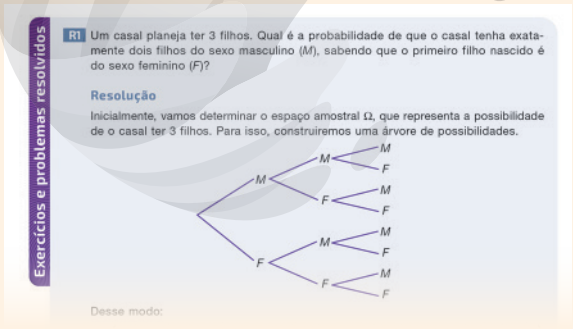
A seguir, são apresentadas as características das seções e de outros elementos que compõem esta coleção.

Livro do aluno

Páginas de abertura do tema

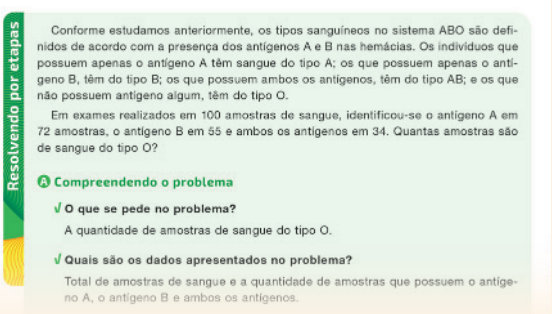
As páginas de abertura apresentam uma temática cujas características permitem estabelecer relações com os conteúdos que serão trabalhados naquele tema. Nessas páginas, há informações que se referem a outras áreas do conhecimento ou à própria Matemática, apresentadas por meio de diferentes recursos, como textos, fotografias, gráficos, infográficos e esquemas. Esses recursos são acompanhados por questões que buscam levantar os conhecimentos prévios dos alunos com relação a diversas situações de âmbito geral, bem como estabelecer intuitivamente relações entre o assunto abordado e alguns conteúdos matemáticos. Essas questões propiciam um momento de interação e troca de ideias entre os alunos, auxiliando no desenvolvimento de sua capacidade argumentativa, além de proporcionar momentos nos quais eles devem ouvir e lidar com pensamentos que possam ser divergentes dos seus. Neste **Suplemento para o professor**, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, são apresentadas informações complementares sobre as páginas de abertura referentes a cada tema, além de sugestões para trabalhá-las em sala de aula, dicas de avaliação dos alunos e outros assuntos que podem ser propostos como ideia para a realização de pesquisas extraclasse. Também são sugeridos outros questionamentos, a fim de atingir os objetivos daquele tema específico.

Exercícios e problemas resolvidos



O objetivo dessa seção é complementar a teoria abordada e os exemplos apresentados com o auxílio de tarefas cujas resoluções são apresentadas aos alunos de maneira detalhada, facilitando-lhes compreender a aplicação prática do conteúdo em questão. Essa seção também tem por finalidade auxiliar os alunos a exercitar suas habilidades e estratégias na resolução de tarefas que serão propostas em outras seções, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

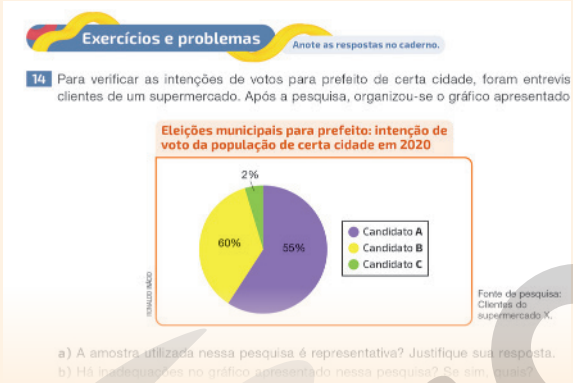
Resolvendo por etapas



MODELO

A seção **Resolvendo por etapas** apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Tais problemas, além de contar com o auxílio do recurso textual, também podem apresentar imagens, gráficos, tabelas, esquemas e outros recursos necessários à compreensão dos alunos. O processo de resolução dos problemas é feito em quatro etapas, denominadas **Compreendendo o problema**, **Organizando as ideias e elaborando um plano**, **Executando o plano** e **Verificando a solução obtida**. Em cada uma dessas etapas, os alunos são orientados a analisar as informações fornecidas no enunciado do problema, separar e organizar os dados apresentados, elaborar e executar um plano que resolva o problema e, por fim, verificar se os procedimentos efetuados estão de acordo com o que foi solicitado. No boxe **Agora é você quem resolve!**, outro problema é apresentado aos alunos. Com isso, eles são levados a analisar se a resolução desse novo problema pode ser obtida seguindo os mesmos procedimentos utilizados na resolução do problema anterior.

Exercícios e problemas


Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

14 Para verificar as intenções de votos para prefeito de certa cidade, foram entrevis clientes de um supermercado. Após a pesquisa, organizou-se o gráfico apresentado

Eleições municipais para prefeito: intenção de voto da população de certa cidade em 2020

2%
60%
55%
Candidato A
Candidato B
Candidato C

Fonte da pesquisa: Clientes do supermercado X.

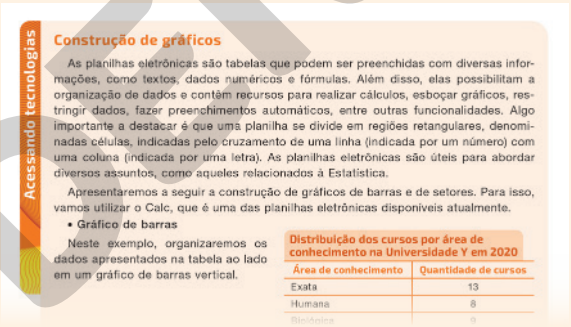
a) A amostra utilizada nessa pesquisa é representativa? Justifique sua resposta.
b) Há inadequações no gráfico apresentado nessa pesquisa? Se sim, quais?

Essa seção traz tarefas relacionadas ao conteúdo estudado em um ou mais tópicos do tema. Dispostas em nível gradual de complexidade, elas podem ser exploradas, em sua maioria, em sala de aula. Aquelas cuja resolução for indicada para ser realizada fora do ambiente escolar devem ser corrigidas, se possível, em aula imediatamente posterior, a fim de promover uma discussão acerca das diferentes maneiras de resolução que vierem a ser apresentadas pelos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, estão indicadas sugestões de condução para algumas das tarefas apresentadas no livro do aluno, que são propostas por meio de questionamentos adicionais, pesquisas complementares e trabalhos interdisciplinares e transdisciplinares a serem desenvolvidos com base no conteúdo ou na temática tratada, visando desenvolver a autonomia e o pensamento crítico dos alunos.

Nos exercícios, a tarefa solicitada está explícita, ou seja, os alunos deverão aplicar de imediato um conceito ou procedimento-padrão estabelecido anteriormente. Já nos problemas, é esperado que os alunos mobilizem conhecimentos, competências e habilidades a fim de conceber estratégias para resolvê-los.

Acessando tecnologias

A seção **Acessando tecnologias** apresenta propostas de tarefas cujos contextos permitem desenvolver os conceitos estudados com o auxílio de recursos tecnológicos, oferecendo, assim, uma estratégia complementar àquela apresentada no livro do aluno. Tais recursos tratam-se, principalmente, de *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, uso de linguagem de programação, indicações de *sites*, entre outras ferramentas tecnológicas que permitem aprofundar os conteúdos matemáticos trabalhados até então. Essa abordagem contribui para que os alunos visualizem e verifiquem, por meio dessas ferramentas, as propriedades estudadas, auxiliando-os, posteriormente, na resolução de problemas. O principal objetivo dessa seção é estimular o aluno a utilizar ferramentas tecnológicas computacionais com o intuito de agilizar diversas atividades práticas de seu dia a dia. É importante enfatizar que os recursos sugeridos nessa seção são disponibilizados gratuitamente na internet, estando, portanto, ao alcance de todos.


Acessando tecnologias

Construção de gráficos

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Além disso, elas possibilitam a organização de dados e contêm recursos para realizar cálculos, esboçar gráficos, restringir dados, fazer preenchimentos automáticos, entre outras funcionalidades. Algo importante a destacar é que uma planilha se divide em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (indicada por um número) com uma coluna (indicada por uma letra). As planilhas eletrônicas são úteis para abordar diversos assuntos, como aqueles relacionados à Estatística.

Apresentaremos a seguir a construção de gráficos de barras e de setores. Para isso, vamos utilizar o Calc, que é uma das planilhas eletrônicas disponíveis atualmente.

• Gráfico de barras

Neste exemplo, organizaremos os dados apresentados na tabela ao lado em um gráfico de barras vertical.

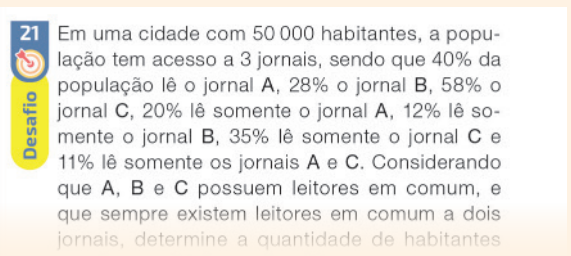
Distribuição dos cursos por área de conhecimento na Universidade Y em 2020

Área de conhecimento	Quantidade de cursos
Exata	13
Humana	8
Biológica	9

Algumas tarefas, por apresentarem certas características, recebem destaques diferentes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Desafio

O destaque **Desafio** indica tarefas que apresentam maior nível de dificuldade e cuja resolução vai além da aplicação imediata do conteúdo trabalhado. De modo geral, o aluno é levado a desenvolver as próprias estratégias de resolução e a aprimorar seu raciocínio lógico.

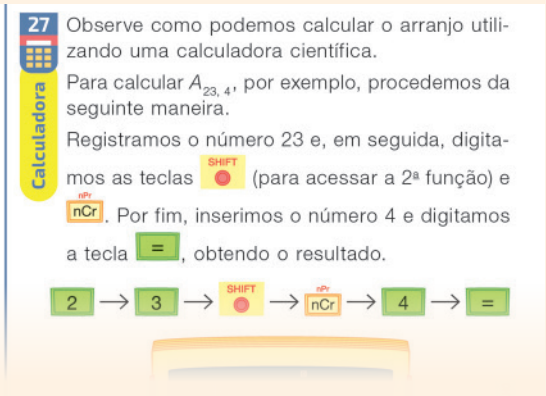

Desafio

21 Em uma cidade com 50 000 habitantes, a população tem acesso a 3 jornais, sendo que 40% da população lê o jornal A, 28% o jornal B, 58% o jornal C, 20% lê somente o jornal A, 12% lê somente o jornal B, 35% lê somente o jornal C e 11% lê somente os jornais A e C. Considerando que A, B e C possuem leitores em comum, e que sempre existem leitores em comum a dois jornais, determine a quantidade de habitantes

EDITORIA

Calculadora

O destaque **Calculadora** é utilizado em tarefas cuja execução dos cálculos deve ser realizada com o auxílio de calculadoras, comuns ou científicas. Em alguns casos, esse instrumento possibilitará ao aluno criar as próprias estratégias de resolução, verificando resultados e regularidades.


27 Calculadora

Observe como podemos calcular o arranjo utilizando uma calculadora científica.

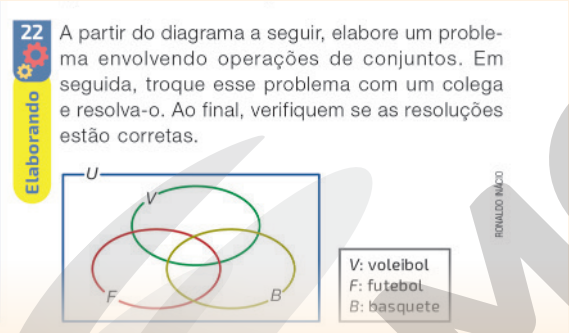
Para calcular $A_{23,4}$, por exemplo, procedemos da seguinte maneira.

Registramos o número 23 e, em seguida, digitamos as teclas SHIFT (para acessar a 2ª função) e nPr nCr. Por fim, inserimos o número 4 e digitamos a tecla =, obtendo o resultado.

2 → 3 → SHIFT → nPr nCr → 4 → =

Elaborando

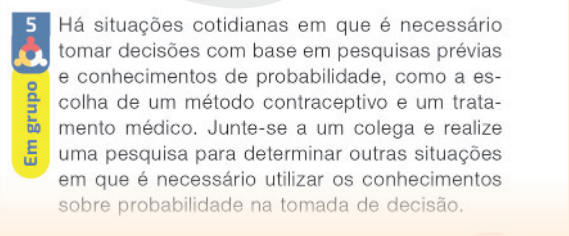
O destaque **Elaborando** indica tarefas que exploram o desenvolvimento da escrita, nas quais os alunos são levados a elaborar problemas, relatórios ou outros tipos de textos tomando como base imagens ou informações previamente apresentadas.


22 Elaborando

A partir do diagrama a seguir, elabore um problema envolvendo operações de conjuntos. Em seguida, troque esse problema com um colega e resolva-o. Ao final, verifiquem se as resoluções estão corretas.

Em grupo

O destaque **Em grupo** é aplicado às tarefas cuja resolução será mais proveitosa aos alunos caso tenham o auxílio de um ou mais colegas, promovendo, assim, um momento de interação e permitindo que eles investiguem, expliquem e justifiquem os problemas resolvidos.


5 Em grupo

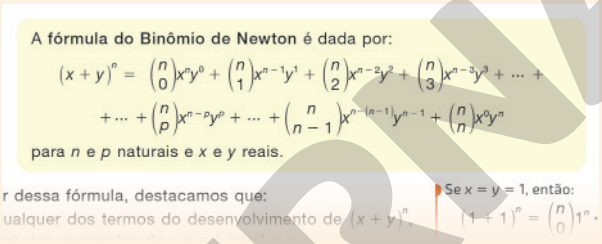
Há situações cotidianas em que é necessário tomar decisões com base em pesquisas prévias e conhecimentos de probabilidade, como a escolha de um método contraceptivo e um tratamento médico. Junte-se a um colega e realize uma pesquisa para determinar outras situações em que é necessário utilizar os conhecimentos sobre probabilidade na tomada de decisão.

Elementos das teorias e das seções especiais

No decorrer do livro do aluno, alguns elementos, por possuírem certas características, serão apresentados com algum destaque. Os elementos visuais que caracterizam esses destaques estão descritos logo a seguir.

Quadro-teoria

Localizado junto à parte teórica, o **Quadro-teoria** tem o objetivo de formalizar alguns conceitos, apresentando propriedades, definições e relações importantes acerca do conteúdo estudado.


A fórmula do Binômio de Newton é dada por:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots + \dots + \binom{n}{p}x^{n-p}y^p + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

para n e p naturais e x e y reais.

r dessa fórmula, destacamos que:

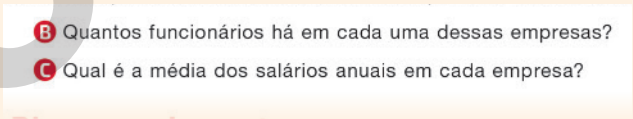
ualquer dos termos do desenvolvimento de $(x+y)^n$.

Se $x = y = 1$, então:

$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n$.

Questão intervenção

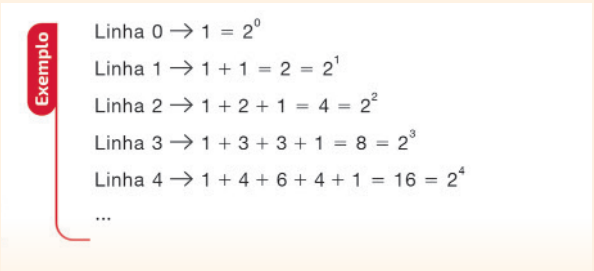
Localizada junto à parte teórica, a **Questão intervenção**, que pode apresentar cunho matemático ou de caráter pessoal, leva os alunos a refletir a respeito das aplicações práticas que envolvem o conteúdo apresentado.


B Quantos funcionários há em cada uma dessas empresas?

C Qual é a média dos salários anuais em cada empresa?

Exemplo

O destaque **Exemplo** tem o objetivo de apresentar aos alunos alguns exemplos práticos que retratam a teoria abordada.


Exemplo

Linha 0 → $1 = 2^0$

Linha 1 → $1 + 1 = 2 = 2^1$

Linha 2 → $1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

Linha 3 → $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

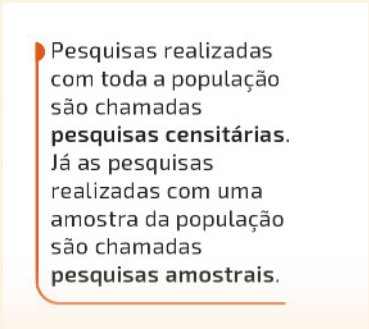
Linha 4 → $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

...

MODERNA

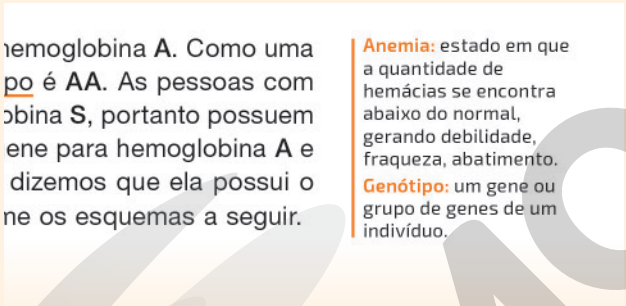
Boxe info

O destaque **Boxe info** apresenta lembretes, dicas ou informações complementares, cujo objetivo é fornecer subsídios que auxiliem os alunos na resolução de algumas tarefas ou na compreensão de determinadas teorias.


Pesquisas realizadas com toda a população são chamadas **pesquisas censitárias**. Já as pesquisas realizadas com uma amostra da população são chamadas **pesquisas amostrais**.

Vocabulário

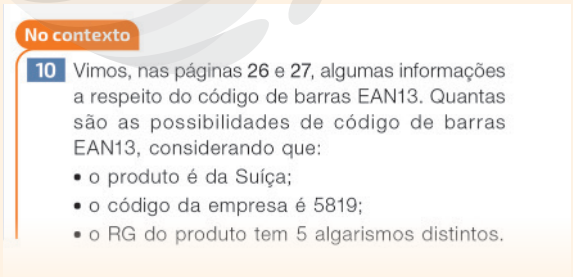
O quadro **Vocabulário** traz o significado de algumas palavras em destaque no texto, geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos alunos, a fim de auxiliar na compreensão das informações apresentadas.


…emoglobina **A**. Como uma …po é **AA**. As pessoas com …obina **S**, portanto possuem …ene para hemoglobina **A** e …dizemos que ela possui o …ne os esquemas a seguir.

Anemia: estado em que a quantidade de hemácias se encontra abaixo do normal, gerando debilidade, fraqueza, abatimento.
Genótipo: um gene ou grupo de genes de um indivíduo.

No contexto

O destaque **No contexto** indica tarefas que estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.


No contexto

10 Vimos, nas páginas 26 e 27, algumas informações a respeito do código de barras EAN13. Quantas são as possibilidades de código de barras EAN13, considerando que:

- o produto é da Suíça;
- o código da empresa é 5819;
- o RG do produto tem 5 algarismos distintos.

Ser consciente

O destaque **Ser consciente** tem o objetivo de abordar assuntos que podem, inclusive, ser relacionados aos temas contemporâneos transversais descritos na BNCC. Geralmente, os contextos que apresentam esse destaque procuram levar os alunos a refletir a respeito de questões que impactam diretamente em alguns aspectos da nossa sociedade, com o intuito de envolvê-los em uma avaliação cidadã e social da situação proposta.

Ser consciente

A No município em que você mora há algum tipo de coleta sele
B Você tem o hábito de separar o lixo por tipo? Relate como voc
C Pesquise e escreva uma lista de iniciativas que podem ser a… para contribuir com o processo de reciclagem do lixo.

Ícones

Em certos momentos desta coleção, alguns ícones serão utilizados para indicar informações importantes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Proporcionalidade

Indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

Cor

Indica que as cores dos objetos retratados não correspondem à realidade.

para o futuro d…

Os glóbulos vermelh… o sangue. Eles são el… passar pelos vasos sa… hemoglobina **A**, que … transporte de oxigênio…

Existem outras varia… hemoglobina **S**. Esta, …maneira satisfatória, lo…

Ampliando seus conhecimentos

Encontrada no fim de cada volume, essa seção traz sugestões de livros, *sites* e *podcasts* para complementar o estudo dos conteúdos trabalhados nos temas. É essencial que os alunos sejam incentivados a consultar essas fontes de informação.

MODERNA

Suplemento para o professor

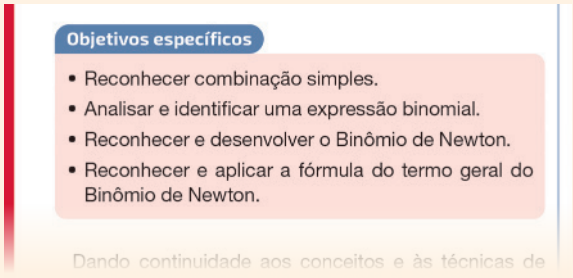
O livro do professor impresso é composto do livro do aluno, com comentários e respostas das tarefas apresentadas, e do **Suplemento para o professor**, constituído de parte geral, parte específica, resoluções dos exercícios e problemas e sugestões de leitura e de *sites*. A parte geral é composta dos pressupostos teóricos e metodológicos que fundamentam esta coleção, da descrição e das orientações acerca das seções e da estrutura de conteúdos, bem como de suas relações com a BNCC e do quadro de distribuição dos conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Já a parte específica, desenvolvida no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, apresenta ao professor orientações específicas dos conteúdos apresentados página a página.

Além do livro impresso, também é disponibilizado um videotutorial de caráter complementar, que tem o objetivo de destacar elementos-chave da obra em linguagem audiovisual atrativa e simplificada para o professor.

Conheça, a seguir, as características da parte específica deste **Suplemento para o professor**.

Objetivos específicos

No início de cada tema são apresentados os principais objetivos que se almejam atingir no trabalho com aqueles conteúdos.

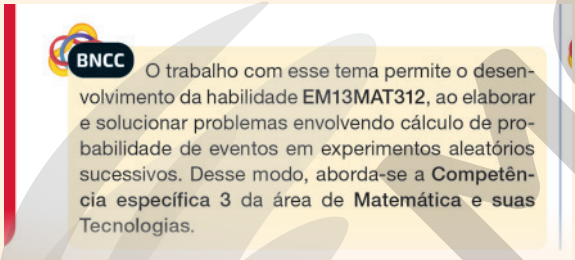

Objetivos específicos

- Reconhecer combinação simples.
- Analisar e identificar uma expressão binomial.
- Reconhecer e desenvolver o Binômio de Newton.
- Reconhecer e aplicar a fórmula do termo geral do Binômio de Newton.

Dando continuidade aos conceitos e às técnicas de

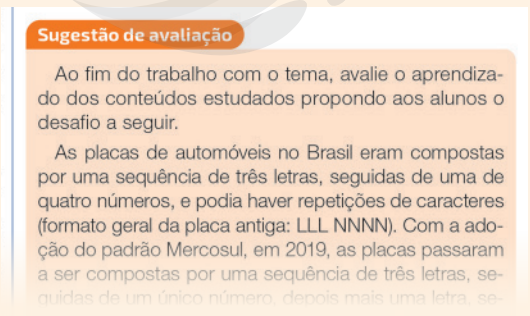
BNCC

No decorrer dos temas são destacadas e comentadas algumas relações entre o que está sendo abordado no livro do aluno e o que é proposto na BNCC.


BNCC O trabalho com esse tema permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312**, ao elaborar e solucionar problemas envolvendo cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Sugestão de avaliação

Apresenta sugestões e estratégias de avaliação para que o professor verifique a aprendizagem dos alunos em momentos oportunos.

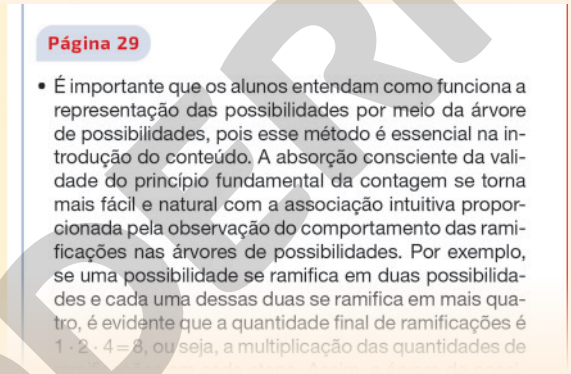

Sugestão de avaliação

Ao fim do trabalho com o tema, avalie o aprendizado dos conteúdos estudados propondo aos alunos o desafio a seguir.

As placas de automóveis no Brasil eram compostas por uma sequência de três letras, seguidas de uma de quatro números, e podia haver repetições de caracteres (formato geral da placa antiga: LLL NNNN). Com a adoção do padrão Mercosul, em 2019, as placas passaram a ser compostas por uma sequência de três letras, se-

Orientações página a página

As orientações e informações complementares importantes para o desenvolvimento dos conteúdos, das tarefas e das seções especiais encontram-se indicadas em tópicos, separadas de acordo com as páginas do livro do aluno.

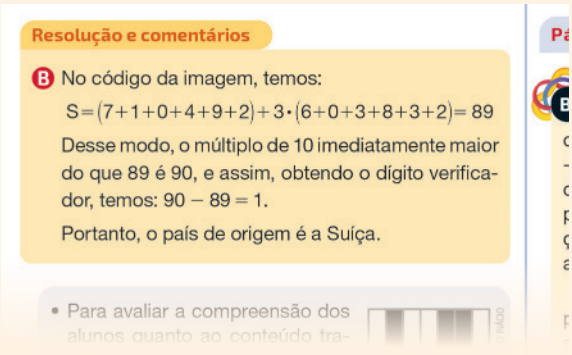

Página 29

- É importante que os alunos entendam como funciona a representação das possibilidades por meio da árvore de possibilidades, pois esse método é essencial na introdução do conteúdo. A absorção consciente da validade do princípio fundamental da contagem se torna mais fácil e natural com a associação intuitiva proporcionada pela observação do comportamento das ramificações nas árvores de possibilidades. Por exemplo, se uma possibilidade se ramifica em duas possibilidades e cada uma dessas duas se ramifica em mais quatro, é evidente que a quantidade final de ramificações é $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$, ou seja, a multiplicação das quantidades de

Resolução e comentários

As resoluções das questões das páginas de abertura, das questões intervenção e de algumas tarefas específicas encontram-se em boxes como esse.

No decorrer do desenvolvimento dos temas, sempre que for oportuno, são apresentadas citações que enriquecem e fundamentam o trabalho com o conteúdo proposto.


Resolução e comentários

B No código da imagem, temos:

$S = (7+1+0+4+9+2)+3\cdot(6+0+3+8+3+2) = 89$

Desse modo, o múltiplo de 10 imediatamente maior do que 89 é 90, e assim, obtendo o dígito verificador, temos: $90 - 89 = 1$.

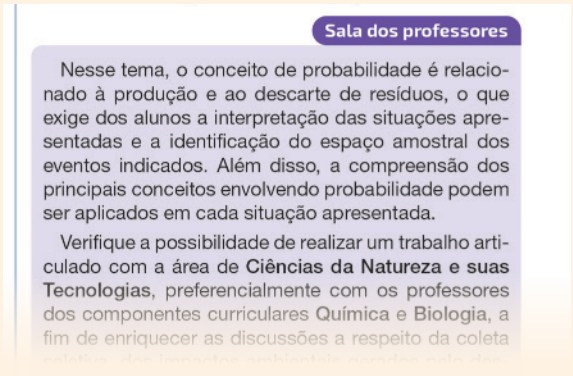
Portanto, o país de origem é a Suíça.

- Para avaliar a compreensão dos

TODA RNA

Sala dos professores

Esse boxe estará presente em abordagens e tarefas que permitam relacionar o conteúdo com outras áreas do conhecimento, apresentando sugestões e subsídios para a construção de aulas em conjunto com professores de outros componentes curriculares.



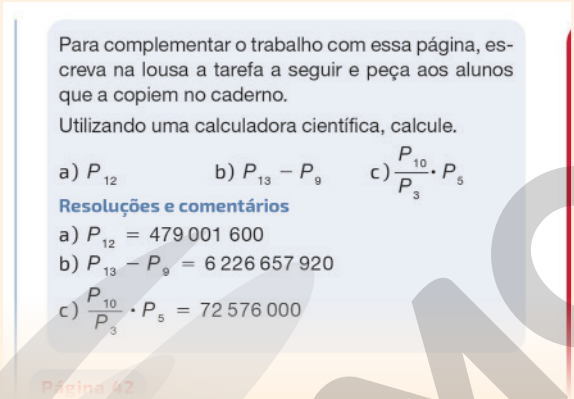
Sala dos professores

Nesse tema, o conceito de probabilidade é relacionado à produção e ao descarte de resíduos, o que exige dos alunos a interpretação das situações apresentadas e a identificação do espaço amostral dos eventos indicados. Além disso, a compreensão dos principais conceitos envolvendo probabilidade podem ser aplicados em cada situação apresentada.

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho articulado com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares Química e Biologia, a fim de enriquecer as discussões a respeito da coleta

Tarefas extras

Apresenta sugestões de tarefas extras com o objetivo de complementar o trabalho com o conteúdo do respectivo tema.



Para complementar o trabalho com essa página, escreva na lousa a tarefa a seguir e peça aos alunos que a copiem no caderno.

Utilizando uma calculadora científica, calcule.

a) P_{12} b) $P_{13} - P_9$ c) $\frac{P_{10}}{P_3} \cdot P_5$

Resoluções e comentários

a) $P_{12} = 479\,001\,600$

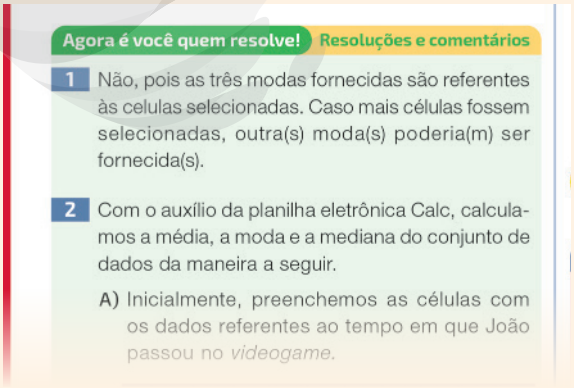
b) $P_{13} - P_9 = 6\,226\,657\,920$

c) $\frac{P_{10}}{P_3} \cdot P_5 = 72\,576\,000$

Página 42

Agora é você quem resolve! **Resolução**

Apresenta as respostas da seção **Resolvendo por etapas**.



Agora é você quem resolve! **Resoluções e comentários**

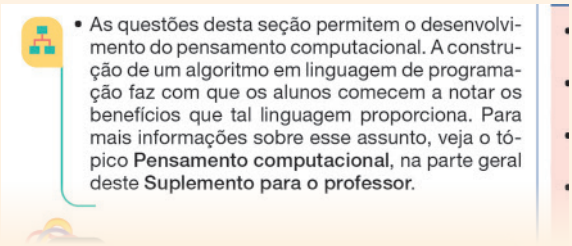
1 Não, pois as três modas fornecidas são referentes às celulas selecionadas. Caso mais células fossem selecionadas, outra(s) moda(s) poderia(m) ser fornecida(s).

2 Com o auxílio da planilha eletrônica Calc, calculamos a média, a moda e a mediana do conjunto de dados da maneira a seguir.

A) Inicialmente, preenchemos as células com os dados referentes ao tempo em que João passou no *videogame*.

Pensamento computacional

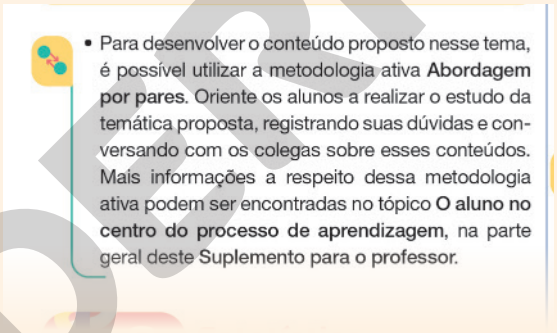
Selo utilizado para indicar que o texto apresenta informações a respeito do pensamento computacional.



- As questões desta seção permitem o desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um algoritmo em linguagem de programação faz com que os alunos comecem a notar os benefícios que tal linguagem proporciona. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Metodologia ativa

Selo utilizado para sinalizar que o texto apresenta indicações quanto ao uso das metodologias ativas.



- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta, registrando suas dúvidas e conversando com os colegas sobre esses conteúdos. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste Suplemento para o professor.

Agora é com você! **Resolução**

Apresenta as respostas da seção **Acessando tecnologias**.

Agora é com você! **Resoluções**

1 Gráfico de barras verticais:

Pontos mais elevados do Brasil em 2015

Fonte de pesquisa: ABDALA, Vitor. IBGE revê altitude de sete picos brasileiros: o da Neblina fica mais alto. *Agência Brasil*, Rio de Janeiro, 29 fev. 2016. Disponível em:

MODELO

O Ensino Médio

Nos últimos anos, o Ensino Médio no Brasil passou por uma reforma que instituiu novos parâmetros e diretrizes para esse segmento. O objetivo dessas mudanças foi combater índices de evasão escolar, promovendo um ensino que atendesse às expectativas dos jovens em relação ao seu projeto de vida pessoal e profissional e que estivesse alinhado com as necessidades e os anseios desse público. Além disso, almejava-se também ampliar o engajamento desses alunos, para que pudessem desenvolver maneiras autônomas de lidar com os desafios do mundo contemporâneo.

Com base nessas novas perspectivas educacionais, é necessário compreender o Ensino Médio como uma etapa de grande importância política e social, aspecto que supera o conceito de apenas ser uma fase passageira na vida dos jovens. Na verdade, o Ensino Médio constitui-se um momento fundamental de protagonismo e de desenvolvimento pessoal. É nessa fase que os alunos ampliam suas perspectivas culturais, convivendo em um espaço de ampla diversidade de ideias e de opiniões. Também desenvolvem suas capacidades de tomada de decisão, cujo maior desafio é aprender a fazer escolhas coerentes e alinhadas com seu projeto de vida.

Assim, é fundamental que a escola do Ensino Médio desenvolva uma atitude acolhedora das juventudes, estando preparada para os desafios que essa fase exige, principalmente no que se refere à formação profissional e à construção da cidadania dos jovens. Isso requer condutas que priorizem a construção da autonomia dos alunos, que em breve estarão atuando na vida pública sem o acompanhamento de adultos. Desse modo, como podemos preparar os jovens para participar da sociedade de forma responsável?

> A experiência participativa representa uma das formas de os jovens vivenciarem processos de construção de pautas, projetos e ações coletivas. Além disso, a experiência participativa também é importante por permitir a vivência de valores, como os da solidariedade e da democracia, e o aprendizado da alteridade. O que significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças. O exercício da participação pode ser, então, uma experiência decisiva para a vida dos jovens um efetivo contraponto – em uma sociedade que, ao se individualizar, enfraquece ideias, valores e práticas relacionadas à dimensão coletiva da vida social.
>
> BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 46.

É no Ensino Médio também que ocorre a preparação mais intensa e aprofundada dos alunos para os vestibulares e os exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Algumas instituições, inclusive, aceitam alunos que não tenham completado o Ensino Médio como uma espécie de "treineiros", para testar suas habilidades e seus conhecimentos antes da prova efetiva ao final desse ciclo. Esses exames têm como objetivo verificar o desempenho e avaliar o preparo dos jovens para os desafios da vida adulta, seja no âmbito profissional, seja no social. Além disso, as avaliações em larga escala contribuem para monitorar as redes de ensino de modo a oferecer soluções educacionais viáveis por meio de políticas públicas.

Esta coleção apresenta diversos subsídios para auxiliar os alunos na preparação para esses exames, entre eles o Enem. Nas seções **Exercícios e problemas resolvidos** e **Exercícios e problemas**, por exemplo, sempre que possível, apresentamos questões extraídas diretamente do Enem e de vestibulares atuais para que os alunos possam se familiarizar com o formato das provas fornecidas por essas instituições. Além disso, há propostas de elaboração de problemas e articulações interdisciplinares e transdisciplinares, com abordagens que podem contribuir para o desempenho dos alunos em futuras avaliações.

O aluno do Ensino Médio

Existem diversas maneiras de conceituar a fase da juventude. Época de incertezas e de definição identitária, por muito tempo a juventude foi compreendida como um período de passagem, uma etapa prévia da vida adulta, marcada por uma faixa etária delimitada. Porém, de acordo com o estudioso Juarez Dayrell (2016), as pesquisas mais atuais têm demonstrado que a juventude deve ser compreendida como uma categoria socialmente construída na qual os jovens se assumem como verdadeiros sujeitos, ou seja, possuem determinada origem familiar, estão inseridos em relações sociais, apresentam uma historicidade específica, movem-se por desejos e se constituem como seres ativos e produtores de conhecimento.

> A juventude constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social, no qual o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe, por exemplo), a diversidade cultural (a cor da pele, as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero e

MODELO

> de orientação afetiva e até mesmo as diferenças territoriais se articulam para a constituição das diferentes modalidades de se vivenciar a juventude.
>
> DAYRELL, Juarez. (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016, p. 27.

Para que as relações possam ser fecundas e mutuamente respeitosas no ambiente escolar, uma opção interessante é investir no trabalho com as diversas manifestações culturais juvenis, ou seja, fazer da escola um território de produção cultural da juventude e não apenas um local de aprendizado de uma cultura externa ou "adulta". Nesse contexto, o jovem deve se identificar com as produções culturais com as quais convive, deve se sentir incluído e, principalmente, valorizado.

> Os jovens sujeitos do Ensino Médio nos trazem cotidianamente desafios para o aprimoramento de nosso ofício de educar. Entre esses desafios, encontra-se a difícil tarefa de compreensão dos sentidos os quais os jovens elaboram no agir coletivo, em seus grupos de estilo e identidades culturais e territoriais que, em grande medida, nos são apenas "estranhos" (no sentido de estrangeiros) e diferem de muitas de nossas concepções (adultas) de educação (escolar ou não), de autoridade, de respeito, de sociabilidade "adequada" e produção de valores e conhecimentos.
>
> BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I - caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 20.

Realizar esse trabalho de aproximação e de valorização das culturas juvenis exige muito mais do professor. A primeira etapa é passar a compreender o jovem como um sujeito de interlocução, com o qual podemos aprender e expandir nossos horizontes culturais. Essa aproximação requer uma flexibilidade por parte dos professores, que muitas vezes terão de superar visões estereotipadas e superficiais sobre a juventude atual. Assim, deve-se considerar que os jovens não estão inseridos em uma cultura única. A juventude se constitui como categoria socialmente construída, que deve ser analisada com base no contexto de cada comunidade. Existem jovens, por exemplo, que já estão inseridos no mercado de trabalho e que vivenciam a juventude de um modo muito diferente daqueles que têm mais tempo de lazer ou de estudo.

Compreender essas múltiplas culturas juvenis que permeiam o contexto escolar faz parte do processo de inovação que tem marcado o curso educativo nos últimos anos. Em vez de "transmitirmos os saberes" aos jovens, por que não trocarmos e compartilharmos conhecimento, abrindo espaços e criando condições para que as culturas juvenis se expressem no ambiente escolar? Essas novas práticas compõem um caminho de construção coletiva do conhecimento. Sob esse ponto de vista, a aprendizagem passa a ser encarada como uma via de mão dupla, como uma troca e, assim, tende a criar um clima mais saudável e menos impositivo, sendo menos propício ao desenvolvimento de problemas indisciplinares e de relações conflituosas.

O professor

Diante desses novos desafios educacionais, que envolvem inclusive o trabalho com metodologias ativas e tecnologias, o professor assume cada vez mais o papel de mediador das relações entre os alunos e o conhecimento, orientando o caminho a ser adotado no processo de ensino e aprendizagem. Essa mediação ocorre de acordo com um planejamento bem definido das aulas, no qual são explicitadas as estratégias de engajamento e protagonismo dos alunos. Supera-se a postura de um profissional meramente transmissor de informações e almeja-se uma conduta mais interativa, que toma como base a colaboração.

> O papel do professor é mais o de curador e de orientador. Curador, que escolhe o que é relevante entre tanta informação disponível e ajuda a que os alunos encontrem sentido no mosaico de materiais e atividades disponíveis. Curador, no sentido também de cuidador: ele cuida de cada um, dá apoio, acolhe, estimula, valoriza, orienta e inspira. Orienta a classe, os grupos e cada aluno.
>
> MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Orgs.). Coleção Mídias Contemporâneas. *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. v. II. Ponta Grossa: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. p. 24.

Sabe-se que no Brasil as turmas de Ensino Médio são diversificadas e são formadas por grupos de alunos que possuem diferenças nos modos de aprender. O processo de ensino e aprendizagem é complexo e envolve diversas dimensões da vida dos sujeitos. Knud Illeris (2013), por exemplo, descreve a aprendizagem em três dimensões: a de conteúdo, a de incentivo e a de interação. A dimensão de **conteúdo** envolve a aprendizagem cognitiva, relacionada aos conhecimentos que são internalizados. Já a dimensão de **incentivo** se relaciona às sensibilidades, ao equilíbrio mental e às motivações que instigam as pessoas no aprendizado. Por fim, a dimensão de **interação** é aquela que está ligada à sociabilidade e à comunicação do indivíduo.

Desse modo, uma maneira de o professor lidar com a diversidade em sala de aula é identificar em qual dimensão de aprendizagem estão as defasagens dos alunos. Com esse diagnóstico, pode-se, então, desenvolver estratégias adequadas ao tipo de dificuldade específica apresentada por eles. Por exemplo, em casos de defasa-

EM MODERNIZAÇÃO

gem na dimensão de interação, o professor poderá desenvolver estratégias de trabalho em grupo e dinâmicas que exijam a troca de ideias. Quando o problema for em relação à dimensão de incentivo, o professor poderá repensar as maneiras pelas quais aquele conteúdo instiga os alunos e se relaciona com o cotidiano deles.

Nesse sentido, sabe-se que não é fácil a adequação aos novos parâmetros que têm sido delimitados na educação no século XXI. Muitos professores vão precisar de um período de adaptação para renovar e implementar suas práticas. Para contribuir com esse processo, sugerimos a seguir algumas condutas que podem ser utilizadas durante o planejamento e durante as aulas com turmas do Ensino Médio.

- Observar os alunos de modo personalizado, adequando os desafios e as propostas às características de cada um e procurando colocar a diferença como um agregador e um ponto positivo em relação ao coletivo.
- Organizar planejamentos coletivos e individuais para lidar com as turmas como um todo e também de modo personalizado.
- Relacionar os temas e conteúdos à realidade próxima dos alunos, problematizando as experiências vivenciadas e alinhando os conteúdos aos interesses da turma.
- Dar importância à significação dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula.
- Propor constantemente diferentes maneiras de autoavaliação, permitindo aos alunos um momento de reflexão a respeito de suas atividades e seu aprendizado e, também, permitindo ao professor avaliar suas práticas em sala de aula.
- Desenvolver flexibilidade para improvisar, quando necessário, e para adequar as propostas metodológicas à realidade de cada turma.
- Acompanhar a evolução de cada grupo ou aluno, avaliando-a sob uma perspectiva processual.
- Evitar propostas que abordem capacidades meramente interpretativas e que não desafiem os alunos a desenvolver sua criatividade e seu pensamento crítico.
- Inserir opiniões e sugestões dos alunos no planejamento das tarefas, considerando suas dificuldades e preferências.
- Capacitar os alunos em determinadas atividades com as quais eles possam não estar acostumados, como a realização de uma pesquisa bem fundamentada ou a produção de um texto-síntese.
- Gerir o tempo de modo personalizado, observando os ritmos de aprendizagem específicos das turmas.
- Aderir a dinâmicas que alterem o posicionamento tradicional das carteiras em sala de aula, promovendo atividades em grupo e explorando os diversos ambientes da escola.
- Propor trabalhos em grupos, para que os alunos desenvolvam suas capacidades de expressão e de socialização.

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a adolescência é o período de 10 a 19 anos de idade (BRASIL, 2018d). Nessa etapa da vida, o indivíduo ainda se encontra em desenvolvimento e vários fatores podem interferir em seu comportamento e em sua saúde mental. Trata-se de um período de mudanças e descobertas, no qual o jovem constrói e reconstrói sua identidade. Fatores emocionais associados à realidade social, econômica, histórica e cultural tornam essa parcela da população muito vulnerável mental e emocionalmente.

Entre os problemas relacionados à saúde mental que mais afetam os jovens, de acordo com entidades internacionais, está a violência familiar, o *bullying*, a depressão, a ansiedade e a dependência química.

Os casos de *bullying*, por exemplo, envolvem relações de poder e dominação que provocam violência psicológica e, muitas vezes, física, sem motivos aparentes. Em alguns casos, os indivíduos agressores recebem punição, mas é necessário promover um trabalho de conscientização para que esses jovens possam refletir sobre suas ações e analisar os impactos emocionais que elas acarretam para as vítimas. Os jovens que praticam *bullying* geralmente são atraídos por um imaginário preestabelecido de padrões de beleza, comportamento, consumo e configurações sociais. Por isso, as ações de combate a essa prática devem contribuir para a desconstrução desses padrões e para o respeito à diversidade.

Além disso, é preciso analisar o contexto familiar desses jovens, que, muitas vezes, vivem em ambientes onde há violência e/ou negligência. Por essas razões, é imprescindível o papel da escola no cuidado com a saúde mental dos alunos, combatendo ativamente todos os modos de discriminação e violência.

Para isso, são necessários programas para prevenir o *bullying* e qualquer outro tipo de violência, além do abuso de substâncias nocivas. Esses programas devem ter a participação da escola, dos familiares, da comunidade e de profissionais, como psicólogos e psicopedagogos. Tal união pode contribuir para detectar os sinais de problemas envolvendo a saúde mental dos alunos e para

MODERNA

tomar as medidas necessárias antes que esse tipo de comportamento resulte em alguma consequência grave.

Como a escola pode contribuir na promoção da saúde mental dos alunos?

A escola deve ser um espaço de disseminação do respeito e da proteção social dos jovens, atuando com a participação ativa das famílias. Nela, os alunos podem ser organizados em grupos a fim de possibilitar a troca de experiências em debates mediados por um psicólogo. Assim, os jovens tendem a se sentir mais à vontade para discutir e relatar sua realidade, compartilhando suas emoções e descobrindo os gatilhos que os fazem reagir com violência, ansiedade ou tristeza, por exemplo. Trata-se de uma oportunidade para trabalhar o autoconceito, a autoimagem e a autoestima dos jovens.

Averigue a possibilidade de a escola oferecer espaços em horários alternativos para que os alunos desenvolvam atividades extracurriculares, como esportes, oficinas de teatro, atividades de cuidado com a escola e com os colegas, oficinas de dança, gincanas, competições e simulados. Nesses momentos, é importante incluir alunos de diferentes perfis. A convivência é essencial para o desenvolvimento do respeito mútuo e da empatia, colaborando com a saúde mental deles.

Atividades envolvendo atitudes solidárias podem contribuir para que os alunos se coloquem no lugar de outras pessoas, desenvolvendo a empatia. Uma sugestão é promover campanhas de coleta de produtos com o intuito de disponibilizá-los às pessoas vulneráveis e em situação de necessidade assistidas por instituições sociais do município.

Outras atividades podem envolver o futuro dos alunos, identificando os potenciais de cada um a fim de construir um projeto de vida. Mostrar que suas atitudes hoje influenciam o futuro incentiva-os a refletir sobre suas escolhas e opções. A escola, então, tem o papel de ajudá-los a ultrapassar as barreiras com atividades que envolvam a autoestima, o autoconhecimento e o autocuidado.

O professor deve ficar atento aos sinais que denotem mudança de comportamento dos alunos e que demandem o encaminhamento para avaliação da equipe formada pelos profissionais que cuidam da saúde mental, ações que contribuem para prevenir transtornos. Para isso, é muito importante que o professor converse com a administração da escola sobre a possibilidade de promover eventos de formação continuada relacionada à saúde mental.

O convívio social em sala de aula

A convivência social é um aspecto importante na vida de qualquer indivíduo. Vivemos constantemente em interação com outras pessoas e dependemos delas em muitas atividades do dia a dia. Por isso, é necessário ter harmonia no convívio social, com proveito mútuo e respeito constante. Não ter preconceitos, compreender as necessidades do outro, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para criar um ambiente propício para o crescimento em conjunto exige, além de boa vontade, ações de inclusão e integração comunitária.

Na socialização humana, em especial no ambiente escolar, lidamos com indivíduos de diferentes perfis, com diversas crenças e opiniões. Respeitar essas diferenças é dever de cada um e a palavra-chave, em todos os casos, é empatia.

Comumente, a escola é um dos primeiros lugares onde boa parte dos jovens tem contato com outras pessoas. Assim, entre as tarefas do professor, está a necessidade de orientar e instruir os alunos a ser empáticos, desenvolvendo a tolerância, a sensibilidade e, principalmente, o respeito para com os demais. Por meio de práticas saudáveis e bons exemplos, é possível que o professor consiga influenciar seus alunos em um sentido positivo de comportamento socialmente responsável, o qual poderá vir a ter impactos benéficos na sociedade como um todo.

Ações que podem facilitar a construção de um ambiente com essas características incluem, por exemplo, conversas amistosas nas quais, um a um, os alunos possam expressar suas opiniões e compartilhar suas emoções sobre os mais variados assuntos. Tal prática pode ser incrementada com atividades complementares, como a solicitação de pesquisas extraclasse, para posterior debate construtivo, a respeito de temas como as relações familiares, a importância dos vínculos de amizade, a aceitação de ideias contrárias às nossas e o respectivo respeito, o pluralismo cultural na escola e no ambiente de trabalho, a promoção da paz na comunidade escolar, entre outros.

A Matemática, nesse contexto, pode ser uma ferramenta para analisar dados acerca da distribuição de renda ou das discriminações em razão de etnia, sexo ou crença, investigando e interpretando as porcentagens de cada grupo sociocultural em diferentes estudos estatísticos. Com base em análises quantitativas, é possível discutir os desafios que a sociedade enfrenta rumo à efetividade da justiça social, que pode ser um ponto de partida para a troca de ideias e o autoconhecimento por parte dos alunos, inclusive com o envolvimento do professor. Para isso, noções de proporcionalidade, de causas e consequências lógicas e até mesmo da objetividade dos números na descrição dos fenômenos naturais, incluindo os socioeconômicos, são fatores importantes para a compreensão da realidade e, também, para aumentar a consciência dos jovens de modo a auxiliá-los no embasamento de argumentos.

Ademais, sempre que julgar conveniente, o professor pode conversar com os alunos, dispondo-se a ouvi-los e incentivando-os a expressar suas ideias. Atitudes desse tipo favorecem o respeito e a admiração mútuos, contribuindo para o engajamento saudável e natural em sala de aula.

MODERNA

Além disso, é importante conversar com os alunos sobre traçar planos em busca de sonhos e alcançar os meios necessários para consolidá-los pelo próprio esforço. Justamente por essa razão, também estão entre seus maiores desafios.

Nesse processo dinâmico, muitas vezes sem fim, a educação assume um papel importantíssimo, em especial nas peculiares etapas de transição entre a infância e a vida adulta. Ao lado da família, da sociedade e da autodeterminação do próprio sujeito, a escola é o fator mais importante na produção desse despertar de consciência e de responsabilidade no jovem, instruindo-o, tanto quanto possível, na estruturação gradativa e na viabilização sensata de um projeto de vida tão necessário. Tal projeto, constituindo o alicerce em que o futuro do jovem será edificado, deve levar em consideração os múltiplos âmbitos interconectados em que a vida se manifesta: pessoal, educacional, profissional, social, político, moral, intelectual e emocional.

O anseio por objetivos de vida maiores e mais realistas do que aqueles dos primeiros sonhos da infância costumam despontar com ímpeto durante a juventude, e normalmente o fazem de maneira desordenada, cheia de agitação, ingenuidades, inseguranças e receios. Assim, a escola deve se preocupar com a formação integral dos alunos e assumir o compromisso de lidar adequadamente com essas questões, elegendo a construção da autonomia como o eixo central em torno do qual organizar suas atividades.

Sendo a última etapa da Educação Básica, no Ensino Médio tais questões devem ser trabalhadas pelo professor com maior atenção e de maneira mais explícita, ora no contexto das tarefas do componente curricular, ora em conversas com a turma, mas sempre por meio de exemplos e de aconselhamentos que fomentem o delineamento de planos de vida e o recrudescimento do caráter.

Nesse sentido, a trajetória escolar deve ser capaz de dialogar com os jovens, desenvolvendo neles habilidades e conhecimentos que incentivem atitudes efetivas para lidar com os desafios da sociedade, promovendo a maturação de valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida. Além de prepará-los para o mercado de trabalho, fornecer orientação vocacional e capacitá-los para eventuais estudos mais complexos no ensino superior ou para aperfeiçoamento técnico em cursos profissionalizantes, conforme as circunstâncias de cada caso.

O estabelecimento do projeto de vida, como já frisado, é um processo dinâmico que conta com diálogos entre jovens, família, amigos, escola e sociedade. Contudo, a liberdade e o protagonismo são exclusivos do indivíduo: é ele que escolherá sua profissão, decidirá constituir família ou não, e vai direcionar sua atenção e seus esforços para a área de seu interesse. Desse modo, o projeto de vida que os alunos almejam, projetam e redefinem para si ao longo de suas trajetórias, praticamente coincidindo com o desenvolvimento da própria identidade, é apenas motivado e instruído pela escola, nunca imposto forçosamente por ela. As escolhas devem ocorrer naturalmente em uma multiplicidade de influências, experiências e aprendizagens que enriquecem à medida que se tornam plurais, de tal modo que os alunos de diferentes perfis aprendem uns com os outros por interação mútua e convívio constante, mediados – e não determinados – pela família, pelo professor, pela escola como um todo e, ainda mais amplamente, pelas conjunturas socioculturais nas quais o jovem está inserido.

É, enfim, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de modo controlado, as interações com o outro e com o mundo, vislumbrando, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e futuro. É nessa riqueza de motivação que o jovem deve traçar o próprio caminho, explorando seus talentos e potencialidades, assumindo deveres e responsabilidades, aprendendo a fruir e a conter desejos, a dosar razão com emoção, a harmonizar lazer com labor, a mesclar estudos com diversão, disciplina com curiosidade. Com isso, ele estará apto a constituir-se um ser humano íntegro, seguro de si, cônscio de quem é, dos próprios méritos e limitações, atento ao seu papel no mundo e ativo quanto às necessidades de seu tempo e de sua comunidade.

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Com o intuito de substituir o currículo do Ensino Médio isolado em componentes curriculares, a BNCC apresenta, para essa etapa, as aprendizagens essenciais distribuídas por áreas do conhecimento. Assim, para cada área são definidas competências específicas que se relacionam diretamente com as habilidades da área. Essa estrutura constitui a formação geral básica que, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), "[...] é composta por competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e articuladas como um todo indissociável, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social [...]" (BRASIL, 2018b).

Além de estabelecer que os conteúdos sejam apresentados por área (formação geral básica), a BNCC prevê, tendo como documento orientador as DCNEM, os itinerários formativos, em que os alunos poderão escolher, por exemplo, a formação técnica como maneira de complementar sua formação escolar. Veja o esquema a seguir.

PROVISÓRIA

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 469. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Com essa estruturação, a BNCC do Ensino Médio articula-se às habilidades e competências do Ensino Fundamental, com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral dos alunos, possibilitando, assim, a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

As áreas do conhecimento

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área e supõe um trabalho interdisciplinar e transdisciplinar. Isso requer um currículo que integre não só os conteúdos dos componentes de determinada área (interdisciplinaridade), mas também os componentes de outras áreas, estabelecendo relações transdisciplinares. As áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares são divididos na BNCC conforme apresenta o quadro a seguir.

ÁREAS DO CONHECIMENTO	COMPONENTES CURRICULARES
Linguagens e suas Tecnologias	- Arte - Educação Física - Língua Inglesa - Língua Portuguesa
Matemática e suas Tecnologias	- Matemática
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	- Biologia - Física - Química
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	- Filosofia - Geografia - História - Sociologia

As dez competências gerais da Educação Básica, previstas na BNCC, têm como principal objetivo formar cidadãos conscientes do seu papel na sociedade e que saibam agir de maneira justa. Essas competências se desdobram na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes.

1 – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 – Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 – Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 – Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

MODERNA

5 – Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 – Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 – Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 – Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 – Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para que os alunos desenvolvam as competências gerais é preciso, primeiramente, adquirirem as aprendizagens essenciais de cada área, por meio das habilidades, desenvolvendo, também, os princípios das competências específicas.

Esta coleção foi organizada de maneira a contemplar as habilidades e as competências específicas relacionadas à área do conhecimento **Matemática e suas Tecnologias**, bem como contemplar as competências gerais propostas na BNCC. Essas relações estão presentes nas abordagens dos conteúdos, nas teorias, nas seções especiais e nas tarefas apresentadas. O livro do aluno aborda as relações entre as habilidades e/ou competências, de maneira que os conteúdos de Matemática estão destacados, permitindo que tanto os alunos quanto o professor confiram como esses elementos são desenvolvidos. Já o **Suplemento para o professor** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências e os conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**, assim como as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, auxiliando o professor a verificar como esses itens podem ser desenvolvidos, a fim de contribuir com a formação integral dos alunos.

As diferentes maneiras de trabalhar com esses elementos serão explicitadas no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**. Além disso, no tópico **A BNCC e a coleção** há um mapeamento em que são apresentados os elementos da BNCC desenvolvidos em cada tema deste volume.

Temas contemporâneos transversais

Os temas contemporâneos transversais não são novidade nos documentos oficiais para a Educação Básica. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997, eram chamados **temas transversais** e pressupunha-se que fossem incluídos nos currículos das escolas. Contudo, como os PCNs não tinham caráter obrigatório e os seis temas listados não eram pautados em nenhuma legislação ou norma específica, nem sempre essa inclusão acontecia no contexto escolar.

Com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) de 2013, os Temas transversais receberam o nome de **eixos temáticos** ou **eixos norteadores**, e pressupunham que os professores e os alunos escolhessem temas/assuntos afeitos ao componente curricular que desejassem estudar, contextualizando-os com outros. O trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, por meio de eixos temáticos, tornou-se obrigatório a fim de conduzir os alunos na reflexão sobre a vida em sociedade.

Com a homologação da BNCC, em 2018, eles passaram a ser chamados **temas contemporâneos** e tornaram-se uma referência obrigatória para a elaboração dos currículos. Em 2019, com a publicação do documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC*, passaram a ser chamados **temas contemporâneos transversais** (TCTs). Essa mudança de nomenclatura é pautada na BNCC, que afirma: "[...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma **transversal** e integradora." (BRASIL, 2018a, grifo nosso).

Na BNCC, os TCTs foram distribuídos em seis áreas temáticas, conforme apresentado no quadro a seguir.

MODERNA

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS					
CIÊNCIA E TECNOLOGIA • Ciência e tecnologia	**MEIO AMBIENTE** • Educação ambiental • Educação para o consumo	**ECONOMIA** • Trabalho • Educação financeira • Educação fiscal	**MULTICULTURALISMO** • Diversidade cultural • Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	**CIDADANIA E CIVISMO** • Vida familiar e social • Educação para o trânsito • Educação em direitos humanos • Direitos da criança e do adolescente • Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso	**SAÚDE** • Saúde • Educação alimentar e nutricional

Os TCTs não pertencem a nenhuma área específica do conhecimento e devem ser abordados por todas elas de maneira integrada e complementar, possibilitando aos alunos a melhor compreensão da sociedade em que vivem. Seguindo essa premissa, e com o objetivo de orientar o professor no trabalho com os TCTs, esta coleção aborda esses temas por meio de recursos e tarefas, tanto no livro do aluno quanto neste **Suplemento para o professor**. Essas abordagens percorrem as áreas do conhecimento e proporcionam aos alunos a reflexão sobre seu papel na sociedade, contribuindo para sua formação cidadã.

Orientações didáticas e metodológicas

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção

Esta coleção propõe a contextualização sociocultural do aluno, tornando-o protagonista de seu processo de aprendizagem. Embora a Matemática seja, "[...] por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados [...]" (BRASIL, 2018, p. 265), o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática tem importância considerável e deve fazer parte, sempre que possível, das tarefas discentes, a fim de produzir questionamentos saudáveis, levantar conjecturas e buscar contra-exemplos, entre outras situações. Nesse sentido, em diversos momentos desta coleção a condução dos conceitos busca ferramentas da tendência socioetnocultural, amparada na Etnomatemática, que propõe troca de conhecimento entre professor e aluno, incentivando sua autonomia crítica, criativa e transformadora na aprendizagem de um saber prático e dinâmico. Além disso, a realidade do aluno é, muitas vezes, problematizada e tomada como contexto para explorar novos conceitos e ampliar os conhecimentos prévios deles.

O ponto de partida da tendência socioetnocultural está pautado nos "problemas oriundos do meio cultural, das práticas cotidianas. Professor e alunos trocariam seus conhecimentos [...]. Isso se evidencia pelo trabalho pedagógico a partir da abordagem de temas envolvendo o conhecimento cotidiano dos alunos." (ZIMER, 2008, p. 86-87).

Dessa maneira, a Matemática é uma ciência prática e dinâmica, produzida histórica e culturalmente em diversos contextos sociais, em que sua história desmitifica a realidade e estabelece estratégias que incentivam e facilitam as ações dos alunos, contribuindo para a construção de uma consciência cidadã e democrática. Além disso, as trocas de conhecimentos entre o professor e os alunos por meio de metodologias ativas objetivam a formação crítica, pessoal e social.

Ademais, os recursos tecnológicos são ferramentas potenciais de ensino ao apoiar a autoprodução de conhecimentos por parte dos alunos.

Sabe-se que os resultados matemáticos são obtidos por meio de deduções pautadas em axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados ou proposições. Grande parte do ensino atual está relacionada à mera reprodução de algoritmos. No entanto, não podemos reduzir a Matemática à simples aplicação de fórmulas e à resolução de exercícios, pois são procedimentos mecânicos, que não possibilitam o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno. Com o objetivo de mudar essa abordagem em sala de aula, algumas concepções no ensino de Matemática podem ser adotadas, visando tornar o aluno protagonista do próprio processo de aprendizagem. Entre elas, temos a Etnomatemática, a História da Matemática, a Investigação matemática, a Resolução de problemas e a Modelagem matemática.

No Brasil, o precursor da Etnomatemática é o professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio. Etimologicamente, Etnomatemática significa a maneira, a técnica ou a arte (*tica*) de explicar, conhecer e entender (*mathema*) a realidade natural e sociocultural em que o indivíduo está inserido (*etno*). Nesse sentido, o autor a concebe como "o reconhecimento que as ideias matemáticas, substanciadas nos processos de comparar, classificar, quantificar, medir, organizar e de inferir e de concluir, são próprias da natureza humana. Em todo ser humano, cérebro e mente se organizam para execução desses processos" (D'AMBROSIO, 2008, p. 164). Para D'Ambrosio, a Matemática é espontânea e individual, motivada e desenvolvida de acordo com o ambiente social e cultural em que o indivíduo se encontra. Ao sugerir um vínculo entre a Etnomatemática e a sala de aula, D'Ambrosio argumenta que "a proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. E através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos

CONTEMPORÂNEA

nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural" (D'AMBROSIO, 2015, p. 46-47).

Nesta coleção, a Etnomatemática é trabalhada em alguns contextos e tarefas que apresentam o conhecimento matemático atrelado a diversas culturas, oportunizando momentos de reflexão quanto ao papel social que a Matemática representa nas relações humanas. Por meio dessa abordagem, é esperado que os alunos descubram métodos úteis para resolver, de maneira eficaz, problemas em contextos não tão comuns à própria realidade. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, são apresentadas diversas situações que permitem ao professor promover, junto aos alunos, um debate acerca da importância da Etnomatemática.

A História da Matemática, como uma tendência de ensino, excede a descrição de fatos históricos ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. Esse ramo envolve a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático, favorecendo a contextualização dos objetos de conhecimento. Segundo Lopes e Ferreira (2013), uma dinâmica interessante para introduzir um novo conteúdo em sala de aula é proporcionar aos alunos o contato com o desenvolvimento histórico desse conceito, apontando, sempre que possível, quais eram as condições sociais, econômicas e políticas que, possivelmente, levaram ao surgimento daquela ideia. Para Miguel e Miorim (2011), o professor pode buscar na História da Matemática o apoio de que necessita para atingir os objetivos pedagógicos que levem os alunos a perceber:

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.
>
> MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. p. 53.

Nesta coleção, a História da Matemática é abordada, sempre que oportuno, por meio de situações motivadoras, que propiciam o trabalho com os aspectos históricos dos conceitos envolvidos. Tais situações podem ser encontradas tanto no decorrer das teorias quanto nos enunciados das tarefas propostas.

A Investigação matemática, por sua vez, consiste no trabalho com situações abertas, isto é, situações em que a questão principal não está bem definida. Visto que os alunos podem tomar diferentes pontos de partida, é provável que os resultados obtidos também sejam diferentes ao final do processo de investigação. Para Ponte, Brocado e Oliveira (2016), a Investigação matemática pode ser concebida como uma atividade de ensino e aprendizagem que favorece "o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016, p. 23). O desenvolvimento de atividades de investigação envolve quatro momentos distintos: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016). Em um primeiro momento, os alunos devem reconhecer e explorar a situação-problema proposta, além de formular questões que serão investigadas no decorrer desse processo. Em um segundo momento, eles são levados a organizar os dados coletados e propor conjecturas com base nas informações obtidas até então. Depois, eles devem testar tais conjecturas, verificando sua validade e reformulando-as, caso necessário. Por fim, devem justificar essas conjecturas, avaliando o raciocínio desenvolvido e os resultados obtidos.

Nesta coleção, a Investigação matemática é trabalhada em contextos nos quais os alunos são levados a: investigar algoritmos e representá-los por meio de um fluxograma; elaborar enunciados de problemas, nos quais eles devem investigar problemas parecidos que envolvam os conceitos estudados, tomando-os como base para criar uma nova situação; investigar propriedades matemáticas e estabelecer relações entre diferentes conceitos, de modo a formular conjecturas e validá-las sempre que necessário; entre outros casos.

Outra tendência no ensino de Matemática é a Resolução de problemas, que consiste em trabalhar com situações cujos procedimentos que permitem sua resolução não estão predefinidos. Em primeiro lugar, é preciso definir o conceito de problema. Para Onuchic (1999), problemas são situações nas quais não se sabe o que fazer, mas há interesse em solucioná-las. Em outras palavras, são situações que levam o aluno a pensar em algum procedimento de resolução que ainda não está bem definido. A autora ainda destaca que, na abordagem da Resolução de problemas, o aluno, por um lado, aprende Matemática para resolver problemas e, por outro, aprende Matemática resolvendo problemas. Polya (1999), ao tratar da Resolução de problemas no ensino de Matemática, propõe uma heurística de resolução, isto é, resolver um problema consiste em seguir determinadas etapas. O primeiro passo é compreender o problema interpretando o enunciado. Em seguida, elabora-se um plano de resolução, no qual é possível identificar procedimentos mate-

COPEIA

máticos que podem ser úteis. Definido o plano, deve-se colocá-lo em execução, encontrando uma solução para o problema. Por fim, a última etapa consiste na comparação dos resultados obtidos com o enunciado do problema, verificando todos os procedimentos utilizados e analisando se a solução é consistente com o que foi solicitado.

De acordo com a BNCC:

> [...]
>
> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.
>
> No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.
>
> Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 535. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Nesta coleção, a Resolução de problemas é abordada na seção **Resolvendo por etapas**, em que são apresentadas situações que complementam os conteúdos trabalhados no livro do aluno. Por meio de orientações específicas detalhadas em algumas etapas, os alunos são levados a determinar a resposta do problema proposto. Dependendo do que o professor julgar conveniente, o trabalho com essa seção poderá ser desenvolvido individualmente ou em grupos.

As atividades de cunho predominantemente investigativo, que não possuem procedimentos de resolução previamente determinados, não se restringem apenas à Resolução de problemas ou à Investigação matemática. A Modelagem matemática, enquanto tendência de ensino, também tem como base as atividades investigativas. Porém, o que a diferencia das outras tendências é o fato de que as atividades abordam situações do mundo real, em contextos próximos à realidade dos alunos. A Modelagem matemática pode ser considerada uma alternativa pedagógica, que aborda situações não matemáticas, isto é, reais, por meio da Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nesse sentido, ao trabalhar com uma atividade na perspectiva da Modelagem matemática, os alunos têm como ponto de partida uma situação-problema cujo contexto está relacionado ao mundo real e cujos dados só serão conhecidos por meio da coleta de informações. Essa etapa leva os alunos a elaborar problemas que serão investigados por meio da Matemática, resultando em um modelo formado por um sistema conceitual expresso em linguagem matemática. A construção desse modelo matemático requer que os alunos criem estratégias que os auxiliem na resolução do problema, mesmo que tais estratégias não sejam determinadas *a priori*. Por fim, é necessário que eles determinem a resolução do problema por meio do modelo matemático elaborado, cuja resposta será confrontada com o enunciado, buscando possíveis divergências de valores. Essa interpretação do resultado pode resultar em uma solução que satisfaça o problema ou, então, em uma solução que não seja condizente com as informações previamente apresentadas. Nesse último caso, é necessário orientar o aluno para que retome os procedimentos a fim de encontrar o erro cometido e, assim, executar novamente os procedimentos com o intuito de encontrar a solução correta. Esse tipo de atividade, além de proporcionar uma aprendizagem significativa, pode causar motivação nos alunos, visto que são estudadas situações de seu cotidiano. O desenvolvimento de atividades sob a luz da Modelagem matemática exige que o professor desempenhe o papel de orientador, tornando o aluno o próprio protagonista de seu processo de aprendizagem.

Apesar das diferentes características entre as tendências citadas, todas elas destacam o papel do professor distinto do modelo usual de ensino. Quando inserido em atividades com as características descritas, ele deve se tornar um mediador do ensino, no sentido de fazer com que os alunos utilizem suas habilidades e técnicas na resolução dos problemas e/ou situações que surgirem. Nesse sentido, há dois caminhos que podem ser percorridos: primeiro, o professor encaminha os alunos na resolução do problema por meio de dicas e orientações que, na verdade, não os auxiliam no desenvolvimento do raciocínio crítico; segundo, o professor, por meio de questionamentos, auxilia os alunos na resolução da situação proposta sem revelar a solução do problema inicial. Em qualquer caso, cabe ao professor utilizar todo o conhecimento relacionado à sua prática pedagógica para refletir acerca do caminho mais adequado para aquela situação, de acordo com o trabalho que estiver sendo desenvolvido.

MODERNA

O computador e o ensino da Matemática

O advento da tecnologia beneficiou diversos setores importantes da nossa sociedade, um deles foi a educação. Os computadores, celulares, *tablets* e outros dispositivos eletrônicos estão presentes em qualquer ambiente, inclusive na sala de aula. Assim, é de se esperar que tais equipamentos passem a fazer parte do cotidiano escolar dos alunos, contrariando grande parte da população que considera instrumentos escolares apenas a lousa, o giz e o livro didático.

Apesar da constante presença em diversos setores e do comprovado auxílio de um computador a um ambiente escolar, muitos professores ainda apresentam certa resistência à sua implementação na sala de aula. Enquanto alguns encaram os equipamentos tecnológicos como eficazes transmissores de conhecimento (informática na educação), outros ainda acreditam que deveria ser criado um componente curricular específico no currículo escolar dos alunos com o intuito de auxiliá-los a manipular tais equipamentos (educação informática). Mas qual seria a diferença entre esses dois conceitos?

De maneira geral, o objetivo da educação informática é preparar o indivíduo para o mercado de trabalho, ensinando-lhe alguns conceitos computacionais, os fundamentos sobre como um computador funciona e a utilização de alguns *softwares* para trabalhos específicos. Contudo, esse tipo de serviço ainda é ofertado pelas escolas de informática em algumas localidades. Já em relação à informática na educação, o computador assume outro papel: sua inserção na rotina escolar tem participação no processo de ensino e aprendizagem. Nesse caso, é possível obter e trocar informações, desenvolver conceitos, entre outras possibilidades.

Focando no segundo conceito, informática na educação, podem surgir algumas perguntas que merecem reflexão.

- De quais maneiras é possível inserir o computador no ambiente escolar?
- Que tipo de contribuição esse instrumento pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem?
- Quais são os *softwares* mais adequados para o trabalho em sala de aula?
- Que cuidados devemos ter para que o computador seja uma ferramenta efetiva utilizada para fins educativos?

As respostas para essas e outras perguntas devem surgir de acordo com o planejamento do projeto pedagógico da escola, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

O uso de um computador como recurso didático requer muito mais do que a simples instalação desse equipamento e de como os professores farão uso dele. É necessário que eles sejam capazes de extrair todo o potencial desse equipamento no ambiente escolar. Com o objetivo de alcançar resultados cada vez mais satisfatórios, ao trabalhar com o auxílio da tecnologia, o professor deve explorá-la como uma ferramenta pedagógica capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. É importante enfatizar que, diante de todas essas transformações, o professor em sala de aula deixa de ser apenas um transmissor de informações para ser mediador do processo de ensino e aprendizagem.

> Os recursos computacionais em si mesmos, quando amplamente dominados pelo professor, não são suficientes para garantir uma ação educacional diferenciada, se não estiverem claras e fundamentadas as teorias. Assim, além da necessidade de saber lidar com o computador, o professor deve entregar-se ao processo de construir para si mesmo um novo conhecimento, incorporando não somente os princípios que estão sendo atualmente desenvolvidos sobre informática e educação, mas acima de tudo, passando pelas considerações teóricas sobre a aprendizagem que melhor explicam a aquisição do conhecimento e o desenvolvimento cognitivo. Trata-se de dominar o conhecimento científico de uma maneira ampla e necessária para o seu próprio aprimoramento intelectual.

OLIVEIRA, 2007, p. 59, apud FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Ponta Grossa. *Anais* [...]. Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1023.

Em certos momentos, especificamente nas aulas de Matemática, a utilização de alguns *softwares* pode facilitar algumas dinâmicas em sala de aula ou propiciar a exploração de algo que seria inviável sem esses recursos. Os *softwares* contribuem de maneira significativa no processo de ensino e aprendizagem, pois são interativos, promovem maior abertura para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, estimulam a pesquisa e auxiliam na construção de um saber coletivo. Portanto, quanto maior a gama de *softwares* distintos conhecidos pelo professor, mais rica, dinâmica e produtiva será a aula ministrada.

> [...] Inovações didáticas resultantes da utilização do computador podem ser ilustradas por *softwares* destinados ao ensino da geometria, incorporando o recurso do movimento e da simulação na representação de conceitos. Essa é uma novidade, uma vez que o movimento é um recurso mais próximo da flexibilidade da representação por imagens mentais, restritas ao cérebro humano.
>
> [...]

PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 40-41.

MODERNA

Nesta coleção, alguns temas relacionados ao uso do computador em sala de aula são abordados em diversos momentos. Por exemplo, na seção **Acessando tecnologias** são apresentados *softwares* e outros recursos tecnológicos que complementam o ensino dos conteúdos abordados no livro do aluno. O trabalho com essa seção poderá ser realizado no laboratório de informática da escola ou, ainda, proposto como atividade extraclasse.

O pensamento computacional

Vivemos em uma sociedade na qual a presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) provoca importantes transformações em diversos setores, como na economia, na cultura e na educação. Diante disso, pesquisadores de campos relacionados às políticas educacionais enfatizam a importância da implantação da programação e de conceitos oriundos da ciência da computação no currículo escolar, uma vez que o trabalho realizado no âmbito dessa ciência desenvolve capacidades relacionadas ao pensamento computacional, que, junto à leitura, à escrita e à aritmética, deveria ser uma das habilidades analíticas inerentes a cada indivíduo (RAABE, 2017).

Mas o que é o pensamento computacional?

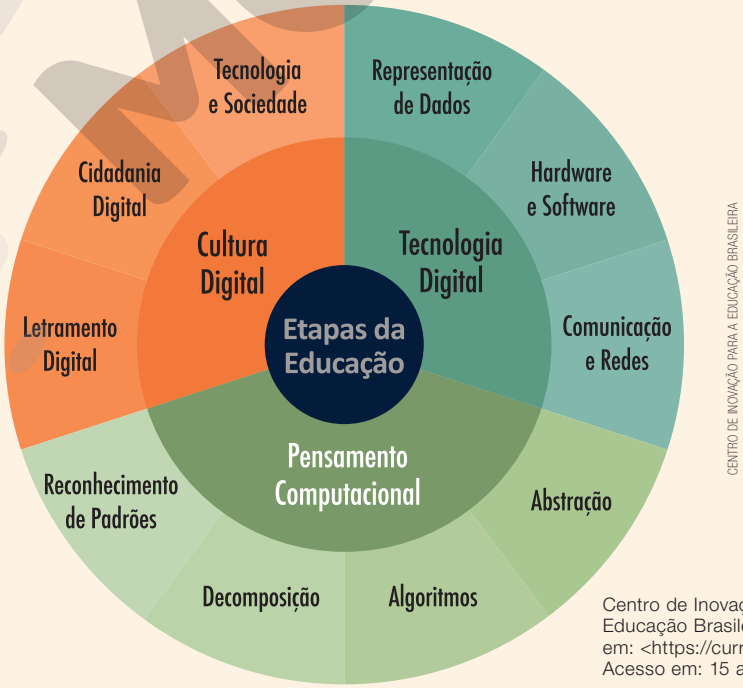
> [...]
>
> Pensamento computacional é uma forma para seres humanos resolverem problemas; não é tentar fazer com que seres humanos pensem como computadores. Computadores são tediosos e enfadonhos; humanos são espertos e imaginativos. Nós humanos tornamos a computação empolgante. Equipados com aparelhos computacionais, usamos nossa inteligência para resolver problemas que não ousaríamos sequer tentar antes da era da computação e construir sistemas com funcionalidades limitadas apenas pela nossa imaginação.
>
> [...]

WING, Jeannette. *Computational Thinking*. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, n. 3, p. 4, 2006. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Um dos eixos do currículo de referência em tecnologia e computação, do Centro de Inovação para a Educação Brasileira, é o pensamento computacional, o qual dissera sobre a resolução de problemas que envolvem tecnologias digitais considerando quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo (CIEB, 2018; BRACKMANN, 2017).

- **Decomposição:** decompor o problema em problemas menores, conhecidos como subproblemas, mais fáceis de serem resolvidos.
- **Reconhecimento de padrões:** analisar os subproblemas individualmente, com o objetivo de reconhecer padrões e identificar características comuns que ajudam na sua resolução.
- **Abstração:** filtrar, classificar e organizar as informações relevantes ao considerar apenas os dados essenciais para a resolução do problema e ignorar as informações irrelevantes, atingindo uma generalização dos padrões identificados.
- **Algoritmo:** construção de estratégias ou instruções claras e ordenadas que auxiliam a resolução dos subproblemas e, consequentemente, a obter a solução do problema principal.

Para mais informações a respeito do currículo de referência em tecnologia e computação, acesse o *site* do CIEB. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.



Centro de Inovação para a Educação Brasileira. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

MODELO

Como estratégia didática para o desenvolvimento do pensamento computacional, os conceitos relacionados à linguagem de programação, quando o contexto assim solicitar, podem ser utilizados de modo contextualizado a fim de que os alunos exercitem sua aprendizagem e autonomia para estabelecer relações com situações de seu cotidiano. O uso de simulações, *softwares* ou equipamentos específicos, por exemplo, pode levar os alunos a estudar determinados fenômenos reais que dificilmente seriam possíveis sem o auxílio desses recursos.

No Ensino Médio, ao trabalhar com abordagens que desenvolvem o pensamento computacional, deve-se planejar a maneira como as atividades propostas serão efetuadas, considerando diferentes perfis de alunos, bem como as características de cada turma, além de fazer uso dos recursos disponíveis no ambiente escolar e de perseguir os objetivos a serem alcançados.

Sabe-se que as escolas públicas brasileiras, muitas vezes, não possuem o aparato tecnológico e computacional necessário para o desenvolvimento de atividades com essas tecnologias. Nesses casos, o professor deve recorrer ao trabalho com o pensamento computacional sem o auxílio de recursos tecnológicos, conhecido como pensamento computacional desplugado, ou *unplugged*. Segundo Brackmann (2017), essa alternativa, por ser de fácil aplicação em diferentes realidades, foi pensada justamente com o intuito de atender às escolas públicas que não possuem condições socioeconômicas de ter acesso a computadores ou outras tecnologias. Desse modo, o professor pode aplicar abordagens lúdicas, como truques de mágica e competições entre os alunos ou, ainda, usar objetos manipuláveis, como jogos (de tabuleiro, de cartas, de peças), livros, fichas, figuras e, até mesmo, o próprio material escolar dos alunos.

Além disso, de acordo com a BNCC (2018, p. 474), o pensamento computacional "envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, nesta coleção, o pensamento computacional é incentivado eventualmente: em tarefas que envolvem a organização do pensamento; no registro e na análise de resultados e dados por meio de planilhas e gráficos; no uso de *softwares* de geometria dinâmica; nas construções de algoritmos e fluxogramas; por meio de linguagem de programação usando o *software* VisualG – programa que possibilita a criação, edição, interpretação e execução de algoritmos, bastante utilizado para o ensino da lógica de programação por ser de fácil manipulação.

No trabalho com o VisualG, os alunos são levados a interpretar as informações do problema proposto e organizá-las em uma sequência de instruções que devem ser transformadas em um algoritmo. Então, essas instruções são transcritas no *software*, realizando a codificação do problema, apresentado em linguagem materna, para uma linguagem de programação. Com isso, os alunos desenvolvem os quatro pilares do pensamento computacional. O VisualG é livre e seu *download* pode ser feito por meio do *site* disponível em: <https://visualg3.com.br/>. Acesso em: 14 maio 2020.

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 271. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para auxiliar nas práticas que propiciam o desenvolvimento do pensamento computacional em sala de aula, veja algumas referências no tópico **Sugestões ao professor** deste **Suplemento para o professor.**

O aluno no centro do processo de aprendizagem

Metodologias ativas

Nas últimas décadas, o advento da tecnologia e as discussões envolvendo novos métodos de ensino têm gerado grandes desafios aos professores e às escolas. Estruturas de ensino tradicionais, nas quais professores transmitem conhecimentos aos alunos, têm sido cada vez mais questionadas quanto ao seu papel efetivo no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, as metodologias ativas são uma maneira de transformar essa realidade, engajando o aluno e tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo. As estratégias de metodologias ativas são um processo de ensino e aprendizagem em que o aluno é o protagonista da construção do conhecimento, tendo o professor como mediador para atingir um objetivo de aprendizagem de modo interativo, dinâmico, reflexivo e colaborativo.

Nesse tipo de abordagem, o professor deixa de ser o transmissor do conhecimento, passando a ser um mediador ao planejar as aulas com foco em orientar e incentivar os alunos.

> As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as eta-

MODERNA

pas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor [...].

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, L; MORAN, J. (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 02-25.

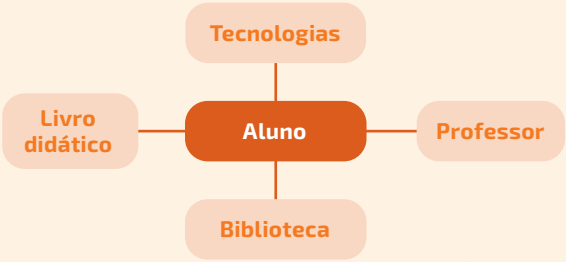
As dez competências gerais propostas pela BNCC estão alinhadas às situações de aprendizagem que podem ser conduzidas por meio da aplicação de estratégias de metodologias ativas, incentivando o protagonismo do aluno.

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 14. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

As competências gerais da BNCC centralizam no aluno o processo de ensino e aprendizagem, colocando-o como produtor efetivo de conhecimento. Assim, as competências visam à mobilização de conhecimentos com o intuito de atender às demandas cotidianas e também aos problemas sociais mais complexos, sempre conferindo ao aluno um papel central e ativo nesse processo.

Ao empregar estratégias de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, os alunos são incentivados a construir o conhecimento de modo integrado às necessidades de seu cotidiano. Nesse processo, é possível agregar o uso de recursos diversos, como o livro didático usado em sala de aula, os livros disponíveis na biblioteca e os recursos provenientes da tecnologia, como o computador, o celular, a internet e as plataformas digitais.



Considerando esse contexto, esta coleção busca explorar diferentes estratégias de metodologias ativas por meio de tarefas que incentivam o protagonismo dos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, encontra-se o destaque **Metodologia ativa,** que explica, de maneira geral, como algumas estratégias podem ser aplicadas em determinados momentos, orientando o professor, sempre que conveniente, sobre a metodologia ativa mais adequada para ser adotada naquele contexto específico.

Estratégias

Design thinking (Pensamento de *design*)

Design thinking (DT) é uma estratégia baseada em empatia, colaboração, criatividade e otimismo, que busca soluções para determinada necessidade por meio de um processo estruturado.

Inspirado na maneira como os *designers* resolvem problemas, o processo do Design thinking parte da compreensão de um problema para um *brainstorming* e, por fim, segue para a criação de soluções inovadoras. Veja a seguir as principais etapas do DT.

EMPATIZAR

Conhecer e compreender a realidade do problema. Podem ocorrer por meio de pesquisas em diversas fontes ou de diálogos com as pessoas envolvidas.

DEFINIR

O grupo deve se unir para compartilhar o que percebeu na etapa da empatia e analisar todos os dados coletados para definir sobre qual aspecto do problema vai se debruçar. Recomenda-se expressar esse desafio por meio de uma pergunta iniciada com "Como podemos...?".

Exemplo: Como podemos conscientizar os moradores do bairro sobre o problema da dengue?

IDEAR

Momento de *brainstorming*. Todos devem se sentir à vontade para sugerir. Após esse processo, o grupo deve refinar as opções, escolhendo as que podem ser aplicadas. Em seguida, devem antecipar as dificuldades de cada uma, até chegar à que será executada. Nessa etapa, o *feedback* do público envolvido é importante.

PROTOTIPAR

Fazer um protótipo é tornar uma ideia tangível, como a primeira versão de algo. Um protótipo pode ser um produto, um processo ou uma experiência. É a proposta do grupo para a solução do problema.

TESTAR

O teste é a parte da implementação e execução da proposta feita pelo grupo. É necessário um plano de ação para aplicá-la. É importante que o grupo acompanhe e esteja atento a possíveis necessidades de modificações no protótipo.

Fonte de pesquisa: ROCHA, Julciane. Design thinking na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Orgs.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

MODELO

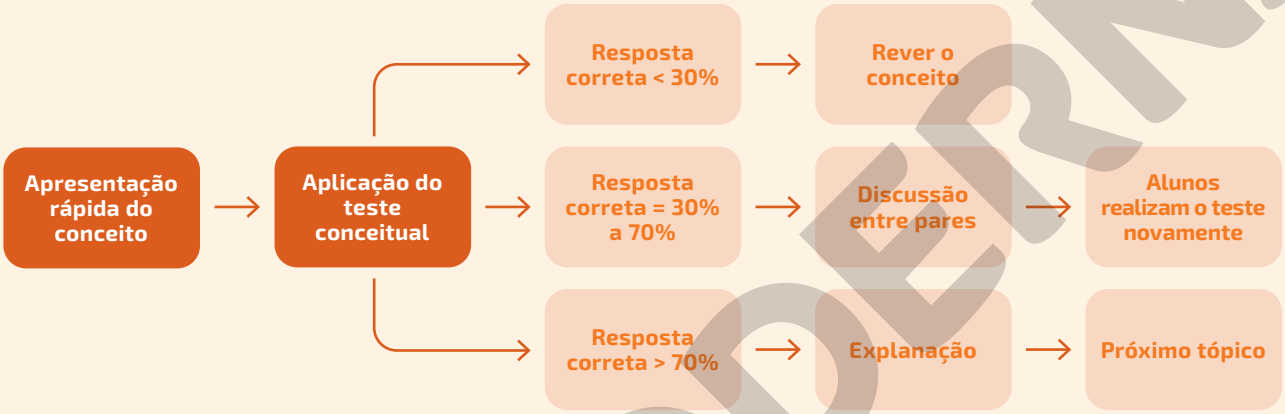
Na educação, a estratégia DT pode ser aplicada tanto em atividades que levem horas para serem resolvidas, como as problematizações de conteúdos em aulas expositivas, quanto em atividades que podem levar semanas ou meses, como as campanhas na escola. Essa metodologia ativa contribui para o desenvolvimento da empatia, da criatividade e da colaboração entre os alunos.

Peer instruction (Abordagem por pares)

A estratégia Peer instruction ou abordagem por pares consiste em uma dinâmica na qual a aprendizagem dos alunos não se baseia somente no estudo individual e na explicação do professor, mas também em auxiliar e ser auxiliado pelos colegas para compreender conceitos.

A estratégia é organizada da seguinte maneira.

- O aluno estuda os conteúdos antes da aula.
- Em sala de aula, o professor faz uma breve exposição do assunto e aplica um teste, preferencialmente oral e com respostas de múltipla escolha.
- Ao fazer a primeira pergunta, o professor deve avaliar as respostas da turma: se mais de 70% dos alunos acertarem a resposta, o professor faz uma breve explanação da resposta correta e dos motivos pelos quais as outras estão erradas e prossegue com o teste. Se menos de 30% dos alunos responderem corretamente, é necessário voltar aos conteúdos e revisá-los de maneira aprofundada. Se a porcentagem de acertos ficar entre 30% e 70%, o professor deve pedir aos alunos que se reúnam em duplas ou grupos para conversar sobre a questão, explicando ao colega o que foi entendido e chegando a um consenso. Ao terminarem a conversa, o professor faz a pergunta novamente, e segue nesse ciclo.



Fonte de pesquisa: FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa*. São Paulo: Saraiva Educação, 2018. p. 46.

Há diversas maneiras de aplicar o teste para os alunos: pode-se indicar alternativas e pedir que levantem as mãos; distribuir cartões coloridos e pedir que os levantem conforme a resposta; registrar em papel ou utilizar aplicativos.

Essa estratégia é válida, por exemplo, para iniciar os estudos sobre o tema e para revisar os conteúdos estudados. A abordagem por pares contribui com a interação, a colaboração e o diálogo entre os alunos.

Gallery walk (Caminhada na galeria)

Gallery walk é uma estratégia que desenvolve a habilidade de síntese e estimula a interação, o trabalho em equipe e a socialização do conhecimento. Nela, os alunos exibem seus trabalhos em cartazes que devem ser afixados em paredes, como obras de arte em uma galeria. Em seguida, a turma circula pela sala, observando os cartazes afixados, debatendo e refletindo sobre o tema proposto.

Há diversas possibilidades de condução dessa estratégia: trabalhos individuais apresentados enquanto a turma percorre a "galeria" em conjunto; circulação livre dos alunos pela "galeria", colando notas adesivas nos cartazes com dúvidas ou sugestões; entre outras.

Essa dinâmica pode ser aplicada na apresentação, revisão ou mesmo na avaliação de conteúdos. Cabe ao professor definir os objetivos e o tema a serem trabalhados, orientando a turma em relação à atividade. Durante o processo, o docente assume o papel de observador, permitindo que os alunos se organizem e intervindo somente se for necessário. Ao final, é importante promover um debate geral com a turma ou fazer uma breve explanação sobre os trabalhos e o processo da Gallery walk.

Sorting strips (Tiras de classificação)

Na estratégia Sorting strips, trechos de informações ou conteúdos são separados em tiras de papel para serem organizados em sequência ou classificados em categorias.

Essa dinâmica auxilia a sistematização da aprendizagem de modo colaborativo, incentivando a troca de ideias entre os alunos e possibilitando a discussão de ideias opostas, complementares ou sequenciais ao conteúdo das tiras.

A estratégia pode ser aplicada para explorar a compreensão de processos, o encadeamento de ideias e o exercício de classificações.

MODERNA

Think-pair-share (Pensar-conversar-compartilhar)

Think-pair-share é uma estratégia de aprendizagem cooperativa que consiste em pensar, individualmente, sobre uma questão ou um problema levantado pelo professor, compartilhar o raciocínio individual com um colega e, em seguida, socializar com um grupo maior os pensamentos e as conclusões aos quais a dupla chegou.

Essa estratégia favorece os alunos que não se sentem à vontade em compartilhar suas opiniões ou seus conhecimentos com a turma ou com um grupo, mas são capazes de conversar com um colega sobre determinada situação antes de se posicionar diante de um grupo maior.

Think

O professor expõe o problema e o aluno reflete individualmente sobre a situação.

Pair

O aluno reúne-se com um colega para trocar percepções sobre a situação.

É interessante que as duplas sejam definidas antes de a questão ser exposta, a fim de que as reflexões dos alunos não sejam interrompidas para que eles encontrem um par.

Share

As duplas se unem em grupos maiores para compartilhar as conclusões a que chegaram após a discussão conjunta. O grupo discute todas as percepções e chega a uma nova síntese das ideias com base na discussão coletiva.

Em outro modelo de socialização, o professor pode pedir a algumas duplas que compartilhem suas conclusões com toda a turma.

ILUSTRAÇÕES: LAÍS GARBELINI

Essa estratégia desenvolve habilidades de oralidade e argumentação, além de incentivar os alunos a ouvir e respeitar diferentes opiniões.

Quick writing (Escrita rápida)

Quick writing é uma estratégia que consiste em escrever uma resposta relacionada a um conteúdo em, no máximo, cinco minutos.

Essa dinâmica desenvolve a fluência na escrita e a capacidade de síntese. A pergunta é feita pelo professor e pode se relacionar tanto aos assuntos estudados quanto à vivência dos alunos. É possível aplicar essa estratégia baseando-se em abordagens como: explicação de conceitos ou vocabulários de um texto; formulação de hipóteses; ou inferências e explanação de conhecimentos prévios.

Avaliação

A etapa escolar do Ensino Médio busca o desenvolvimento **integral** dos jovens alunos. Os objetivos pedagógicos, portanto, de acordo com as orientações da BNCC, devem propiciar o desenvolvimento de **competências** nesses jovens, não apenas no sentido de **saber**, mas principalmente de **saber fazer**. Desse modo, nesta coleção, os alunos são envolvidos em situações de estudo que perpassam suas necessidades e seus interesses, ampliam seus conhecimentos e permitem a mobilização desses conhecimentos visando atender às demandas do mundo onde vivem.

Portanto, a **avaliação das aprendizagens** desses alunos, como parte indissociável do processo de ensino e aprendizagem, deve estar alinhada a esses objetivos na atividade escolar.

A prática avaliativa tem sido cada vez mais reconhecida por sua importância, pois auxilia o trabalho do professor, e por seu caráter legítimo na validação da condução didático-pedagógica. Desse modo, faz-se necessário compreender a essência de algumas modalidades de avaliação e implementá-las de acordo com os objetivos definidos para cada momento do processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação diagnóstica

Toda avaliação tem caráter diagnóstico, pois tende a obter informações sobre a aprendizagem dos alunos. Essa é uma prática muito importante ao iniciar um conteúdo, pois, por meio dela, é possível identificar os conhecimentos prévios de cada um. Desse modo, é possível tomar decisões sobre seu planejamento de ensino, caso seja necessário complementá-lo ou resumi-lo.

Avaliação somativa

Em geral, é aplicada ao final do estudo de um conteúdo e pode valer-se de diferentes tipos de instrumentos. Fornece dados ou informações que sintetizam os avanços das aprendizagens dos alunos em relação a tal conteúdo. Busca, de maneira pontual e conclusiva, sintetizar e registrar os resultados verificados, com finalidade informativa ou classificatória.

Avaliação formativa

É parte integrante de todo o processo de ensino e aprendizagem, pois busca melhorias na atividade em curso. Oferece subsídios que respaldam a interferência no processo de atuação do professor e de aprendizagem dos alunos, com vistas ao seu aprimoramento. Desse modo, permite a retomada e a revisão de conceitos e temas, além do ajuste da prática pedagógica.

A avaliação e o trabalho do professor

Alguns fatores são fundamentais para que a prática avaliativa possa contribuir de modo efetivo com o professor em seu trabalho diário.

A avaliação e a prática pedagógica

É possível observar casos de práticas avaliativas que se limitam, na maioria das vezes, a uma verificação resumida de notas, seguida de progressão e certificação. Essas práticas, em geral, estão relacionadas a encaminha-

MOD PNA

mentos pedagógicos em que o professor é um transmissor de conhecimento e os alunos, meros receptores. Por outro lado, em algumas metodologias, nas quais o aluno assume parte importante no processo de construção e ampliação de seu conhecimento, a avaliação preocupa-se mais com "como" o aluno aprende e menos com "o que" ele aprende. Portanto, o acompanhamento das aprendizagens dos alunos está intrinsicamente relacionado à **opção teórico-metodológica** escolhida, ou seja, o modo como se avalia diz muito sobre o modo como se ensina, e vice-versa.

Uma prática constante

A avaliação não deve ser estanque ou limitada a determinados momentos. Uma prova ao final do estudo de um conteúdo não é suficiente para obter todas as informações necessárias sobre a aprendizagem de cada aluno. Desse modo, a **diversificação** de dinâmicas e instrumentos de avaliação, assim como o registro das informações que elas fornecem sobre o processo de aprendizagem, devem ser analisados e confrontados constantemente, a fim de embasar o prosseguimento do trabalho do professor.

Há diferentes maneiras de **registrar** a trajetória dos alunos em relação à sua aprendizagem. Muitos professores fazem relatórios de observação diária, constroem um portfólio ou anotam comentários em um diário de aulas. Esses registros podem conter descrições ou conceitos que indiquem o progresso ou as dificuldades dos alunos de maneira individual, em pequenos grupos ou de toda a turma. Com base neles, é possível decidir sobre a retomada de explicações, sugestões de leituras ou atividades paralelas, que auxiliem o acompanhamento dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Esse **aspecto qualitativo** da prática avaliativa exige do professor uma postura ativa, reflexiva e reguladora em relação ao processo de ensino e aprendizagem. E, portanto, é inevitável que a avaliação seja **constante**, estando inserida em diversos momentos desse processo.

A seguir, apresentamos um modelo de **relatório** que pode auxiliar no acompanhamento da aprendizagem dos alunos. O modelo traz itens de acompanhamento diferentes em cada linha a fim de exemplificar a variação a ser aplicada nesse documento. É possível considerar os objetivos de aprendizagem do estudo de cada tema ou outros objetivos propostos em seus planejamentos. Também é possível acompanhar o desempenho dos alunos em relação às habilidades a serem desenvolvidas. Outra alternativa é registrar os indicadores de aprendizagem dos alunos obtidos por meio de uma determinada tarefa que pode ser desenvolvida individualmente ou em grupos. O campo de observações é muito importante para que comentários e lembretes de detalhes sejam registrados, auxiliando nas futuras tomadas de decisões com base nesses relatórios.

Lembramos que esse relatório figura como modelo que pode (e deve) ser adaptado de acordo com as necessidades e realidade de trabalho de cada turma ou escola.

Modelo de relatório de acompanhamento da aprendizagem

MODELO

NOME DO ALUNO					
Componente curricular		Ano		Turma	
Objetivos/habilidades ou atividades propostas	Período letivo do registro			Apresentou progressos durante o período letivo indicado?	
	NÃO consegue executar	Executa com DIFICULDADE	Executa com FACILIDADE	SIM	NÃO
Reconhecer algumas unidades de medida de base do Sistema Internacional de Unidades (SI).					
(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.					
Síntese conclusiva da utilização de diferentes unidades de medida de base pertencentes ou não ao Sistema Internacional de Unidades (SI).					
Observações					

Instrumentos de avaliação diversificados

Independentemente do instrumento de avaliação que o professor decida utilizar, é fundamental que os objetivos a serem atingidos estejam bem definidos. Obter **indicadores** da aprendizagem dos alunos deve ser a essência de cada instrumento de avaliação elaborado pelo professor. Portanto, provas objetivas ou discursivas, seminários, produções de textos, sínteses de pesquisas, debates, dramatizações, produção de esquemas ou desenhos e trabalhos em grupo ou individuais estão entre as variações possíveis.

Quanto ao professor, é preciso esclarecer os **objetivos** de ensino a serem investigados em relação à aprendizagem dos alunos. Já os alunos devem receber, por parte do professor, toda e qualquer **orientação** possível sobre a dinâmica proposta, de modo que estejam conscientes a respeito de como e quando serão avaliados.

Mas, por que a avaliação deve ter essa **diversificação**? Porque os alunos são diferentes, aprendem de maneiras distintas e expressam-se também de modos diversos. Alguns têm mais facilidade em aprender ouvindo explicações, enquanto outros precisam ler textos, resumos ou esquemas. Há aqueles que demonstram o que sabem por meio de conversas ou debates, mas apresentam dificuldade para se expressar por meio da escrita. Enquanto alguns têm facilidade em compreender raciocínios lógico-matemáticos, outros têm destreza na produção de textos.

A variedade de estratégias, como dinâmicas em grupo ou individuais, ou de participação anônima, por exemplo, também são recursos que auxiliam no trabalho com grupos de **diferentes perfis**. O incentivo à socialização e à junção de grupos heterogêneos, a relevância dos temas de estudos e o envolvimento dos jovens também são fatores que podem tornar eficaz o trabalho de professores e alunos no processo de ensinar, aprender e avaliar.

A avaliação nesta coleção

Nesta coleção, a opção por um trabalho que destaque o protagonismo dos alunos do Ensino Médio apresenta **oportunidades constantes** de avaliação do processo de ensino e aprendizagem, privilegiando **dinâmicas diversificadas**, em especial aquelas fundamentadas em **metodologias ativas**. Para tanto, no trabalho com as diferentes unidades temáticas, são propostas dinâmicas e atividades variadas, com a exploração de diversos recursos (textuais e imagéticos), ocasiões que permitem o acompanhamento do professor em relação à aprendizagem dos alunos.

Também são disponibilizadas, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, diversas orientações com dicas pontuais, alinhadas aos objetivos de ensino e a uma avaliação formativa. Destacamos o boxe **Sugestão de avaliação**, que apresenta, em geral, orientações específicas para os momentos de avaliação, com sugestões de como obter informações a respeito da aprendizagem dos alunos, e as possibilidades de escolher o melhor procedimento a ser tomado.

A **autoavaliação** também é uma ferramenta que colabora coerentemente com o propósito de que os alunos assumam o protagonismo no processo de formação do seu conhecimento. Essa proposta de reflexão a respeito de sua aprendizagem, participação, limitações e potencialidades deve ser mediada pelo professor como um processo construtivo e positivo, para que não se encaminhe de modo depreciativo e interfira na autoestima dos alunos. Ao contrário, deve ser encarada e assimilada como um procedimento de verificação dos caminhos possíveis para superar os diferentes desafios que a vida lhes colocará.

Em se tratando de desafios, esta coleção também se preocupa em preparar os alunos para os **exames de larga escala**. Para isso, a condução dos estudos é norteada pelo objetivo de desenvolver **habilidades** e **competências** que permitam o embasamento em conhecimentos científicos, o exercício da criatividade, a resolução de problemas com base em saberes interdisciplinares e transdisciplinares, a valorização da cultura em suas diversas expressões, expressar-se e argumentar por meio de diferentes linguagens, inclusive a tecnológica e a digital, agindo com respeito a si mesmo e aos outros, sempre com responsabilidade.

A BNCC e a coleção

Cada volume desta coleção foi organizado e desenvolvido de maneira a contemplar as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais elencados na BNCC, estabelecendo, sempre que possível, conexões com outras áreas do conhecimento. É possível perceber tais relações na maneira como os temas foram estruturados e abordados, nas questões-teoria ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, nas seções especiais e nas tarefas propostas no decorrer do livro do aluno. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor** há o aporte para o desenvolvimento do trabalho com esses objetos.

Sugestão de cronograma

Apresentamos, a seguir, uma proposta de cronograma para elaborar o planejamento deste volume. No entanto, cabe ao professor a decisão de como utilizar o livro didático como apoio pedagógico, seguindo critérios de seleção dos temas e levando em consideração diversos fatores, como o projeto pedagógico da escola, as condições da turma, a carga horária e a grade

MODERNA

curricular. Da maneira como está estruturada, esta coleção permite que o professor tenha autonomia pedagógica para decidir sobre quais temas abordar ou deixar de abordar, no todo ou em partes; sobre seguir a ordem apresentada ou reagrupar os temas de acordo com os critérios organizacionais escolhidos e, com isso, estabelecer as conexões entre os temas dentro desses critérios.

No caso de um cronograma bimestral, considerando que a duração do curso seja de 12 bimestres, este volume pode ser trabalhado, em sua totalidade, em 2 bimestres, ou seja, aproximadamente 16 semanas.

Sugestão de cronograma bimestral			
1º bimestre		**2º bimestre**	
1ª semana	Tema 1	9ª semana	Temas 8 e 9
2ª semana	Tema 2	10ª semana	
3ª semana	Temas 3 e 4	11ª semana	
4ª semana		12ª semana	Temas 10, 11 e 12
5ª semana	Temas 5, 6 e 7	13ª semana	
6ª semana		14ª semana	
7ª semana		15ª semana	
8ª semana		16ª semana	Tema 13

O quadro a seguir apresenta os principais conceitos, as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais trabalhados neste volume, organizados de acordo com cada tema, especificando, também, as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, quando essas forem abordadas.

Neste quadro, por exemplo:
CG1 indica a **Competência geral 1**.
CE2MAT indica a **Competência específica 2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.
CE3CNT indica a **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Tema	Principais conceitos	Habilidades	Competências gerais; competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Temas contemporâneos transversais
1	• Noção de conjuntos • Conjuntos unitário, vazio e universo • Relação de inclusão • Operações com conjuntos • Problemas envolvendo conjuntos	• EM13MAT315 • EM13MAT405	• CG4 • CE3MAT • CE4MAT	• Direitos da criança e do adolescente • Educação para o trânsito • Saúde
2	• Métodos de contagem: princípio aditivo e princípio multiplicativo • Fatorial • Arranjo simples	• EM13MAT310	• CG3; CG4; CG5 • CE1MAT • CE3MAT	

3	• Permutação simples e com repetição		• CE3MAT	
4	• Combinação simples • Binômio de Newton • Triângulo de Pascal • Fórmula e termo geral do Binômio de Newton	• EM13MAT310	• CE3MAT	
5	• Estudando probabilidade • Experimento aleatório, espaço amostral e evento • Calculando probabilidades • Probabilidade da união de dois eventos	• EM13MAT106 • EM13MAT311 • EM13MAT511	• CG1 • CG2 • CG3 • CG4 • CE1MAT • CE3MAT • CE5MAT	• Direitos da criança e do adolescente
6	• Probabilidade condicional • Eventos dependentes e eventos independentes • Experimentos binomiais	• EM13MAT312	• CE3MAT • CE2CNT	• Direitos da criança e do adolescente • Saúde • Vida familiar e social
7	• Probabilidade e a produção de resíduos		• CG7 • CG10 • CE1CNT	• Educação ambiental • Educação para o consumo
8	• Estudando estatística • Variáveis estatísticas • População e amostra estatística		• CE1MAT	• Educação para o trânsito
9	• Gráficos • Tabelas • Inadequações em gráficos e tabelas	• EM13MAT102	• CG4 • CG5 • CG9 • CG10 • CE4MAT • CE3CNT	• Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras • Saúde
10	• Medidas de tendência central	• EM13MAT316	• CE3MAT	
11	• Medidas separatrizes		• CG6	
12	• Medidas de dispersão • Distribuição de frequência • Intervalo de classe • Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes • Outros gráficos e representações	• EM13MAT202 • EM13MAT316 • EM13MAT406 • EM13MAT407	• CG1 • CG8 • CE2MAT • CE3MAT • CE4MAT	• Saúde
13	• Estatística e probabilidade	• EM13MAT106	• CE1MAT • CE2CNT	• Educação ambiental • Educação para o consumo • Saúde

MODERNA

Objetivos, comentários e sugestões

Nesta seção do **Suplemento para o professor**, para cada tema que compõe o livro do aluno, são apresentados objetivos, comentários e sugestões, oferecendo ao professor subsídios para seu trabalho em sala de aula. Nos comentários de cada tema, são abordados, inicialmente, os objetivos específicos e questões relativas à organização do conteúdo. Há sugestões de condução e tarefas para a abordagem inicial, resgatando os conhecimentos prévios dos alunos. Essas sugestões estão relacionadas às páginas iniciais do tema, complementando a situação nelas tratada. No entanto, existem casos em que é sugerida outra abordagem inicial para o conteúdo, oferecendo a você, professor, novos elementos, de modo que possa escolher essas situações e adaptá-las segundo sua realidade.

Na sequência, encontram-se comentários e sugestões a respeito de algumas seções e tarefas que envolvem o tema. Por exemplo, há comentários adicionais sobre as páginas de abertura, sugestões de condução, tarefas que podem ser desenvolvidas em sala de aula e informações complementares às apresentadas no livro do aluno. Também há demonstrações, sugestões de condução para a resolução de algumas tarefas, comentários e informações, entre outros recursos.

1 Os conjuntos

Objetivos específicos

- Compreender e consolidar o conceito de conjunto.
- Identificar e representar conjuntos utilizando diferentes maneiras, como chaves, diagramas e lei de formação.
- Estabelecer relações de pertinência e de contingência envolvendo conjuntos e seus elementos.
- Realizar as operações de união, interseção e diferença de conjuntos.

Esse tema aborda os conjuntos, os subconjuntos e as operações com conjuntos, além da proposição de problemas provenientes de contextos diversos e que exigem o emprego desses conceitos em sua interpretação e resolução.

Nesse sentido, podem ser propostos questionamentos relacionados ao que os alunos entendem pela palavra conjunto, os tipos de elemento que podem ser considerados na construção de um conjunto e os significados das palavras união, interseção, conjunto finito e conjunto infinito, solicitando exemplos que permitam identificar seus conhecimentos prévios e as possíveis lacunas de aprendizagem sobre o tema.

Uma alternativa para a introdução desse assunto é trabalhar com a ideia de coleção. Verifique a possibilidade de levar para a sala de aula um colecionador (podendo ser inclusive um dos alunos), para que explique como são organizados os itens de sua coleção.

Páginas 10 e 11 Sistema ABO

- Nessas páginas de abertura, o conceito matemático de conjunto, principalmente o de diagrama de Venn, é associado ao estudo dos grupos sanguíneos (sistema ABO) e suas incompatibilidades. Nessa abordagem, o diagrama de Venn é utilizado para representar a relação entre os antígenos no sistema ABO, evidenciando as incompatibilidades nas transfusões sanguíneas por meio de um esquema.
- Explique aos alunos que, para doar sangue, é necessário apresentar boas condições de saúde, ter entre 16 e 67 anos e pelo menos 50 kg, não estar tomando medicamento, não ter feito cirurgia recentemente, não ter feito tatuagem nos últimos 12 meses e estar descansado e bem alimentado, entre outras condições. Mais informações podem ser encontradas no *site* da Fundação Pró-Sangue, hemocentro de São Paulo. Disponível em: <http://prosangue.sp.gov.br/duvidas/Default.html>. Acesso em: 17 jul. 2020.

Sala dos professores

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho articulado com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Biologia**, visando enriquecer as discussões a respeito da doação de sangue. Verifique com o professor desse componente a viabilidade de propor aos alunos que conversem com seus familiares para saber o tipo sanguíneo deles em relação ao sistema ABO. Depois, em aula, eles podem identificar de tipos podem receber sangue no caso de uma transfusão e os tipos sanguíneos das pessoas para as quais podem doar sangue, com base nas informações do livro e das conversas com os colegas e o professor.

Aproveite a oportunidade para discutir com os alunos a importância das doações de sangue e de órgãos, propondo uma pesquisa sobre o banco de sangue ou hemocentro da região em que a escola está localizada, quais são as situações em que é necessário fazer transfusão de sangue e outros temas que julgar pertinentes.

Enfatize também que a doação de sangue é mais necessária em época de pandemia, como a da Covid-19 que afetou o mundo em 2020, pois geralmente ocorre um aumento na quantidade de pacientes que necessitam do sangue doado.

BNCC O trabalho com essas páginas permite o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Saúde** ao incentivar os alunos a identificar a importância da doação de sangue para a sociedade, com vistas

MODERNA

à manutenção da saúde, auxiliando pessoas que precisam de transfusão de sangue (em decorrência de doenças, acidentes, cirurgias, entre outras), contribuindo para a construção de atitudes baseadas na empatia, no respeito e na preocupação com o outro.

- Para desenvolver o assunto proposto nessas páginas de abertura, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta, registrando suas dúvidas e conversando com os colegas sobre esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem as conclusões para a turma. Além disso, durante o desenvolvimento das questões do **Ser consciente**, na página **11**, avalie a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Gallery walk**. Essa metodologia favorece a aprendizagem social, cognitiva e construtivista, além de destacar as opiniões, ideias e experiências dos alunos.

  Mais informações a respeito dessas metodologias ativas podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 12 e 13

- Durante as discussões sobre as relações de pertinência e de continência, ou inclusão, é importante questionar os alunos sobre a diferença entre essas relações, reforçando que a pertinência envolve a comparação entre elemento e conjunto, enquanto a continência ou inclusão permite a comparação entre conjuntos.

Página 14

- A tarefa **2** da seção **Exercícios e problemas** aborda, além dos conceitos envolvendo conjuntos, as características dos quadriláteros relativas ao contexto da geometria plana. Nesse sentido, para o trabalho com esse exercício, verifique os conhecimentos prévios dos alunos a respeito das figuras geométricas presentes nesse estudo, questionando-os sobre as propriedades que são verificadas em cada uma delas, comparando-as entre si, para que possam aplicar corretamente em sua resolução os conhecimentos envolvendo conjuntos.
- Após os alunos resolverem, em grupos, a tarefa **6** da seção **Exercícios e problemas**, discuta com toda a turma os silogismos construídos pelos grupos, compartilhando as ideias e sanando possíveis incoerências nos silogismos elaborados. Durante essa discussão, se julgar adequado, proponha aos alunos outro tipo de diagrama de Venn para que, adaptando os silogismos construídos por eles, possam atender a essa nova estrutura, observando as diferenças e as semelhanças entre os dois casos.
- Aproveite a oportunidade para conversar com os alunos sobre a importância de ter harmonia e empatia no convívio social, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 18 e 19

- O problema **R1** da seção **Exercícios e problemas resolvidos** permite o desenvolvimento do pensamento computacional ao propor a construção de um algoritmo e de um fluxograma associado à identificação da quantidade de elementos de um conjunto resultante da interseção de conjuntos finitos, pois permite aos alunos refletir a respeito do funcionamento de um algoritmo e de sua representação em fluxograma, considerando o tema em discussão. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O problema **R1** da **seção Exercícios e problemas resolvidos** aborda a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e a habilidade **EM13MAT315** da BNCC ao trabalhar a construção de um algoritmo e de seu respectivo fluxograma, associados à interseção de conjuntos finitos, exigindo dos alunos a compreensão da estrutura de um algoritmo e dos procedimentos necessários para organizá-lo segundo um fluxograma. Ao desenvolver aspectos do pensamento computacional no trabalho com a linguagem algorítmica e, posteriormente, solicitar a organização de informações em um fluxograma, esse problema também mobiliza aspectos da **Competência geral 4** da BNCC.

- Se achar conveniente, explique aos alunos que, segundo a normativa ISO 5807, em um fluxograma podem ser utilizados vários outros símbolos cujos significados podem ser consultados no *site* disponível em: <http://www.cantareira.br/thesis2/ed_1/1_navarro.pdf>. Acesso em: 31 jul. 2020.
- Ao trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MOFRIA

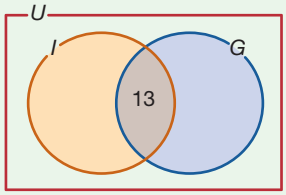
Páginas 20 e 21 Resolvendo por etapas

- Para desenvolver o trabalho com essa seção, é possível utilizar a metodologia ativa **Design thinking**. Para isso, antes de apresentá-la, oriente os alunos a resolver, em grupos, o problema proposto na seção, a fim de que possam obter a solução de alguns problemas semelhantes expostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

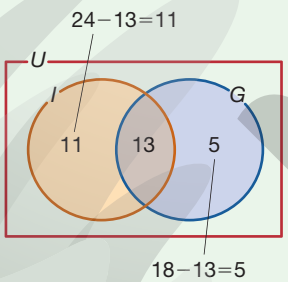
Agora é você quem resolve! Resolução

2 Inicialmente, chamamos *I* o conjunto dos alunos que leram Iracema, *G* o conjunto dos alunos que leram O Guarani, e *U* o conjunto dos alunos que leram ambas as obras.

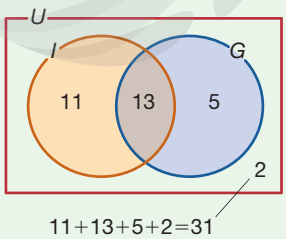
Em seguida, construímos o diagrama de Venn e indicamos a quantidade de alunos que leram ambas as obras.



Depois, calculamos a quantidade de alunos que leram apenas uma das obras.



Por fim, como 2 alunos não leram nenhuma das obras, calculamos quantos alunos há na turma.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Portanto, nessa turma há 31 alunos.

Páginas 22 e 23

BNCC A tarefa **14** da seção **Exercícios e problemas** permite o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Educação para o trânsito**, visto que trata das categorias das habilitações para a condução de veículos, promovendo um debate sobre os procedimentos referentes à solicitação de cada uma das habilitações e das condições necessárias para que uma pessoa possa conduzir um veículo.

- Aproveite o assunto da tarefa **19**, que trata do oferecimento de oficinas em uma escola, para abordar o tema contemporâneo transversal **Direitos da criança e do adolescente**. Converse com os alunos explicando que seus direitos e deveres aliam-se diretamente à construção da paz e da cidadania no espaço escolar.

- Ao trabalhar com os exercícios **21** e **22** da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicá-los sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 24 e 25 Acessando tecnologias

- O trabalho com a seção **Acessando tecnologias** pode ser desenvolvido no laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se de que todos os computadores possuam o *software* VisualG instalado, por meio do qual a tarefa será realizada. O *download* pode ser feito gratuitamente no *site* a seguir. Disponível em: <http://visualg3.com.br>. Acesso em: 19 jun. 2020.
- Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e garanta que, no decorrer da tarefa, todos tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

> A fim de que os alunos trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitar as instruções correspondentes no *software* e a atribuir valores às variáveis definidas.

- Esse tipo de abordagem possibilita aos alunos que entrem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Ao trabalhar com a resolução do item **2**, verifique a possibilidade de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Para isso, utilize o algoritmo apresentado na

MODERNA

seção ou proponha outro problema, caso julgue conveniente. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- As questões desta seção permitem o desenvolvimento do pensamento computacional. A construção de um algoritmo em linguagem de programação faz com que os alunos comecem a notar os benefícios que tal linguagem proporciona. Para mais informações sobre esse assunto, veja o tópico **Pensamento computacional**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC A seção **Acessando tecnologias** aborda a **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e a habilidade **EM13MAT405** da BNCC, por envolver tarefas cujas resoluções abordam conceitos iniciais de uma linguagem de programação, os quais são utilizados para a implementação de um algoritmo que permita determinar a quantidade de elementos da interseção de dois conjuntos, A e B, dadas a quantidade de elementos de A, a quantidade de elementos de B e a quantidade de elementos da união de A e B.

Agora é com você! **Resoluções**

1 A quantidade de elementos do conjunto B.

2 Algoritmo em VisualG:

```
1  Algoritmo "Quantidade_de_elementos_da_
   intersecao_de_dois_conjuntos"
2  Var
3  a, b, c, d: inteiro
4  Inicio
5  escreva ("Digite a quantidade de elementos
   de A: ")
6  leia (a)
7  escreva ("Digite a quantidade de elementos
   de B: ")
8  leia (b)
9  escreva ("Digite a quantidade de elementos
   da união de A e B: ")
10 leia (d)
11 c <- a+b-d
12 escreva ("A quantidade de elementos da
   interseção de A e B é: ", c)
13 Fimalgoritmo
```

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

2 Princípio aditivo, multiplicativo e arranjos

Objetivos específicos

- Reconhecer o princípio aditivo da contagem e o princípio multiplicativo da contagem.
- Identificar a técnica adequada de contagem para cada tipo de problema.
- Conhecer e aplicar a função fatorial de um número natural, deduzindo algumas de suas propriedades.
- Compreender o conceito de arranjo simples e deduzir a expressão geral para o cálculo da quantidade total de agrupamentos possíveis em um arranjo simples.
- Exercitar cálculos e reconhecer situações envolvendo arranjos simples.

Esse tema apresenta as noções introdutórias fundamentais da análise combinatória. Nele, iniciam-se os estudos a partir de uma visão intuitiva de métodos de contagem para, em seguida, formalizar conceitos e técnicas matemáticas de grande utilidade para facilitar contagens mais complexas ou trabalhosas. Durante todo o estudo, dá-se atenção às conveniências de utilizar aplicações dos métodos de contagem para descobrir a quantidade de decisões que podem ser tomadas na execução de tarefas ou na realização de procedimentos dos mais diversos, sobretudo em situações cotidianas, familiares aos alunos, como a escolha de ingredientes para uma refeição ou a seleção de integrantes de um time ou partido.

Em um primeiro momento, são trabalhadas as percepções mais elementares da contagem, exercitando nos alunos a capacidade de identificar quando utilizar os princípios aditivo e multiplicativo, este último também conhecido como "princípio fundamental da contagem". Em seguida, introduz-se o conceito de fatorial de um número natural, o qual é de extrema relevância em toda a análise combinatória, uma vez que se vale de uma notação sucinta para registrar cálculos um tanto longos e que são recorrentes em procedimentos de contagem. Para reforçar as habilidades dos alunos nesse sentido, os exercícios resolvidos e os problemas propostos levam-nos a notar certas propriedades que facilitam as operações envolvendo fatoriais.

Na sequência, é dada a introdução do conceito de arranjo simples. Assim, os alunos podem reconhecer uma série de fenômenos e situações que se comportam como arranjos, de modo que podem ter a quantidade total de seus elementos calculados por uma expressão geral que será adequadamente deduzida.

BNCC Esse tema contempla a habilidade **EM13MAT310** da BNCC ao levar os alunos a resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos

MODERNA

ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos sobre o tema, proponha-lhes tarefas de contagens em níveis progressivos de dificuldade e verifique quais métodos são empregados para realizar essas contagens. Verifique também se eles contam os elementos um a um ou realizam cálculos com notações ou diagramas. Veja a seguir uma possibilidade de tarefa.

Paula quer presentear um amigo com uma coleção que contém um livro, um filme e uma peça de vestuário. Contudo, ela está em dúvida entre os seguintes itens: um livro de suspense, um livro de terror, um livro de fantasia e um livro de não ficção; um filme de comédia e um filme de ação; uma camiseta azul, uma camiseta preta e uma camiseta estampada. Considerando essas opções, quantas são as possibilidades diferentes de *kits* que Paula pode formar para presentear o amigo?

Resolução e comentários

$$4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Portanto, Paula tem 24 possibilidades diferentes de *kits*.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 26 e 27 Zebras no supermercado?

- As páginas de abertura trazem informações sobre o funcionamento dos códigos de barras para despertar a atenção quanto a procedimentos de contagem. Eles foram criados para facilitar registros de produtos e tornar mais rápidas, seguras e eficientes suas classificações e identificações. Existem vários tipos de código de barras e, dependendo do tipo de produto, da região em que ele é comercializado e das necessidades de controle de cada segmento empresarial, adota-se um ou outro sistema de código. O mais famoso deles é o EAN, no qual os códigos de barras são compostos por uma sequência de 13 dígitos, cada qual com um significado específico para a identificação do produto.

  O total de números possíveis no sistema EAN é de 10^{13} (10 bilhões), já que existem 10 possibilidades para cada posição (os algarismos de 0 a 9). Essa quantidade alta de possibilidades é necessária porque, no sistema EAN, cada código deve identificar o exato produto que está sendo comercializado, verificando todas as particularidades. Assim, uma garrafa de suco de laranja de 2 ℓ de certa marca tem um código diferente de uma garrafa também de suco de laranja, mas de 1 ℓ, o qual, por sua vez, tem código diferente do suco de uva dessa marca. Dessa maneira, o código EAN é único e individual, não sendo aceita a reutilização de um mesmo código, mesmo em caso de descontinuidade do produto. Até mesmo pequenas alterações na embalagem (em edições comemorativas, por exemplo) na cor ou na quantidade de seu conteúdo implicam a adoção de um código diferente, devendo o fabricante solicitar uma nova numeração ao órgão competente. Todas essas regras trazem benefícios à estocagem e às questões fiscais envolvidas na enorme cadeia, desde a fabricação até o consumo e descarte de bens de consumo, padronizando e automatizando coletas de dados e tornando praticamente nula a chance de erros.

  Nos últimos anos, com a disseminação das tecnologias digitais, está se tornando cada vez mais popular um formato bidimensional de códigos de barras conhecidos como *QR Code* (sigla para Quick Response Code – "código de resposta rápida", em português). Esses códigos, que podem ser compartilhados em imagens nas redes sociais ou mesmo impressos em cartões e cartazes, são escaneados com facilidade pela maior parte dos computadores e celulares equipados com câmeras, fornecendo textos, endereços de *sites*, informações de contatos, localização de um estabelecimento em aplicativos de GPS, cupons de desconto em lojas virtuais, ou seja, uma ampla variedade de conteúdo digital. Até mesmo a geração de um *QR Code* é simples para qualquer comerciante, profissional liberal ou produtor de conteúdo que necessite da versatilidade dessa funcionalidade.

  A questão central a ser observada nos códigos de barras é a necessidade de que em cada sistema seja possível criar, sem repetição, uma quantidade muito grande de códigos diferentes, de modo a não poder acontecer de dois produtos diferentes virem a ter a mesma codificação, o que causaria confusões potencialmente trágicas, a ponto de inviabilizar atividades econômicas, sobretudo no comércio. Para tanto, os desenvolvedores desses sistemas levam em conta ferramentas matemáticas de contagem que fazem parte da análise combinatória.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Para complementar as tarefas com essas páginas, promova trabalhos em conjunto com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do componente curricular **História**. Incentive os alunos a investigar com mais detalhes

EM MODERNA

como se davam as catalogações de produtos no passado, antes da invenção dos códigos de barras, e como ocorria a gestão de tributação fiscal dos produtos comercializados antes de ser padronizado o modo de identificação dos bens de consumo. Se possível, peça ao professor de **História** que comente o crescimento comercial e mercantil no mundo nos últimos séculos, relacionando-o a causas tecnológicas, como a implementação de codificações mais seguras e eficazes.

BNCC O contexto trabalhado nessas páginas de abertura permite explorar a **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. A adoção de princípios de contagem próprios da análise combinatória está na base da criação de sistemas de codificação que classificam e identificam produtos na indústria e no comércio. Por isso, conceitos e procedimentos matemáticos de contagem são empregados para interpretar questões tecnológicas e socioeconômicas, contribuindo para a formação geral dos alunos. Também nesse sentido, desenvolve-se a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, já que essas estratégias matemáticas permitem a análise consciente de modelos destinados à solução de problemas práticos, promovendo a capacidade de argumentação racional e consistente sobre tais temas.

Resolução e comentários

B No código da imagem, temos:

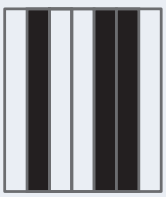
$$S = (7+1+0+4+9+2) + 3 \cdot (6+0+3+8+3+2) = 89$$

Desse modo, o múltiplo de 10 imediatamente maior do que 89 é 90, e assim, obtendo o dígito verificador, temos: $90 - 89 = 1$.

Portanto, o país de origem é a Suíça.

- Para avaliar a compreensão dos alunos quanto ao conteúdo trabalhado nessa tarefa, proponha a seguinte questão.

  O código de barras ao lado é formado por 7 linhas pretas ou brancas de mesmo tamanho.


RONALDO INÁCIO

  Ao passar por um leitor óptico, cada linha preta é convertida para o algarismo 1 e cada linha branca, para 0. Nesse caso, a leitura da esquerda para a direita do código apresentado é 0100110 e da direita para a esquerda, 0110010. Nesse sistema, quantos códigos têm a leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando os casos em que todas as linhas são pretas ou todas são brancas?

  Resolução e comentários

  A 1ª e a 7ª faixa devem ter a mesma cor, a 2ª e a 6ª faixa devem ter a mesma cor, a 3ª e a 5ª faixa devem ter a mesma cor e a 4ª faixa pode ter qualquer cor (com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda). Desconsiderando os códigos com todas as barras de mesma cor (dois códigos), temos:

$$2^3 + 2^3 - 2 = 14$$

  Portanto, há 14 códigos iguais.

Página 29

- É importante que os alunos entendam como funciona a representação das possibilidades por meio da árvore de possibilidades, pois esse método é essencial na introdução do conteúdo. A absorção consciente da validade do princípio fundamental da contagem se torna mais fácil e natural com a associação intuitiva proporcionada pela observação do comportamento das ramificações nas árvores de possibilidades. Por exemplo, se uma possibilidade se ramifica em duas possibilidades e cada uma dessas duas se ramifica em mais quatro, é evidente que a quantidade final de ramificações é $1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$, ou seja, a multiplicação das quantidades de ramificações em cada etapa. Assim, a árvore de possibilidades pode ser compreendida como uma visualização geométrica do princípio fundamental da contagem.

Páginas 30 e 31

BNCC Ao solicitar aos alunos que elaborem o enunciado de um problema para, posteriormente, resolvê-lo, a tarefa **3** busca explorar o desenvolvimento das capacidades de escrita e argumentação, contribuindo para que eles se expressem e compartilhem informações por meio da linguagem verbal, contemplando, assim, a **Competência geral 4** da BNCC.

A tarefa **4** aborda o futebol, um esporte admirado pela grande maioria da população, fazendo uso dessa manifestação cultural para o trabalho com os conteúdos vistos em sala de aula, indo ao encontro do que dita a **Competência geral 3** da BNCC.

- A fim de expandir a tarefa **8**, pergunte aos alunos se seria possível resolver a questão caso o enunciado afirmasse que foram realizadas 70 partidas, pedindo a eles que justifiquem suas respostas. Desafie-os, ainda, a encontrar algum critério para dizer quando o número de partidas é possível ou não nas condições dadas pelo enunciado, isto é, como determinar se um número pode ou não ser a quantidade de partidas jogadas em um campeonato de xadrez, em que todo

MODELO

participante jogue uma vez, mas apenas uma vez, como cada um dos demais.

Se nenhum critério for espontaneamente descoberto pela sala, leve os alunos a perceber que, sendo n o número de participantes e m o número de partidas travadas entre eles, esses valores devem satisfazer a equação $\frac{n \cdot (n-1)}{2} = m \Rightarrow n \cdot (n-1) = 2m$, de modo que o dobro do número de partidas deve ser o produto de dois números naturais consecutivos.

- Complemente as informações da tarefa **11** explicando à turma que o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) foi criado em 1998, com o objetivo de avaliar o desempenho dos alunos que estavam concluindo essa etapa de ensino, e contou com cerca de 157,2 mil inscritos – em 2018, esse número foi 5,5 milhões. O Enem ganhou mais destaque a partir de 2004, quando o Ministério da Educação instituiu o Programa Universidade para Todos (ProUni), que oferece bolsas em instituições de Ensino Superior privadas com base na nota obtida no exame nacional. A partir de 2009, o Enem passou a ser também um mecanismo utilizado para o ingresso em instituições públicas de Ensino Superior.

  Aproveite a oportunidade para comentar com os alunos mais detalhes a respeito da prova e sobre a importância de uma formação no Ensino Superior.
- No item **d** da tarefa **13**, lembre aos alunos que um número natural é múltiplo de 5 quando o algarismo da unidade é 0 ou 5.

Página 32

- Em geral, os alunos aceitam sem dificuldades a definição $1! = 1$, mas é comum que surjam desconfortos com a definição $0! = 1$. Uma maneira de fazê-los entender o motivo de a definição ser assim, e não $0! = 0$, é explicar a propriedade segundo a qual $n! = n \cdot (n-1)!$ e, a partir daí, mostrar que, para preservar a propriedade para todos os números naturais, incluindo 1 e 0, devemos ter:

  $$2! = 2 \cdot (2-1)! = 2 \cdot 1! \Rightarrow 2 \cdot 1 = 2 \cdot 1! \Rightarrow 1! = 1$$

  Assim, como $1! = 1$, devemos ter, para preservar a propriedade:

  $$1 = 1! = 1 \cdot (1-1)! = 1 \cdot 0! = 0! \Rightarrow 0! = 1$$

  Outra observação que pode ser esclarecedora para os alunos é mencionar que, como o fatorial é definido por meio de multiplicações, e não por meio de somas, é natural que $0! = 1$, já que 1 é o elemento neutro da multiplicação (uma interpretação possível é que 0! representa a ausência de multiplicações, devendo manter-se em seu elemento neutro). Para estabelecer uma útil analogia, convém mencionar que o mesmo ocorre nas potências (também definidas por meio de multiplicações), em que temos $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$.
- Após o trabalho com a tarefa **R1**, faça mais perguntas aos alunos, com o objetivo de levá-los a perceber que, em geral, $a! + b! \neq (a+b)!$ e $a! \cdot b! \neq (a \cdot b)!$.
- Finalizando as tarefas **R1** e **R2**, faça mais perguntas aos alunos, com o objetivo de levá-los a perceber a propriedade de que $\frac{n!}{m!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (m+1)$, para todo $n, m \in \mathbb{N}$ com $n > m$. Para tanto, peça a eles que calculem divisões envolvendo fatoriais de números grandes, como $\frac{100!}{98!}$.
- Concluída a tarefa **R3**, destaque o fato de que nem todas as equações envolvendo fatoriais têm solução, uma vez que fatoriais são definidos apenas para números naturais. Assim, por exemplo, $n! = 25$ não tem solução, já que $4! = 24$ é menor do que 25, ao passo que $5! = 120$ é maior do que 25. Informe, contudo, que os exercícios de provas e concursos, em geral, são elaborados de modo a haver uma solução.
- Após a resolução da tarefa **18**, faça algumas perguntas aos alunos, com o objetivo de levá-los a perceber que geralmente $a! + b! \neq (a+b)!$. Mostre alguns exemplos, como $2! + 3! \neq 5!$, $2! + 1! \neq 3!$ e $1! + 1! = 2!$.

Página 33 Acessando tecnologias

- O trabalho com a seção **Acessando tecnologias** poderá ser realizado no laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se de que todos os computadores possuam o *software* VisualG instalado, por meio do qual a tarefa será realizada. O *download* pode ser feito gratuitamente no *site*. Disponível em: <http://visualg3.com.br>. Acesso em: 21 jul. 2020.

  Caso não haja computadores suficientes para todos os alunos, organize-os em grupos e garanta que, no decorrer da tarefa, todos eles tenham a oportunidade de manipular o *software* em questão.

BNCC Ao propor o desenvolvimento de um trabalho com uma linguagem de programação, nesse caso, o VisualG, os alunos são levados a compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação, além de diferentes tipos de linguagem, como a digital, para partilhar informações e divulgar conhecimentos, abordando, assim, as **Competências Gerais 4** e **5** da BNCC.

A fim de que os alunos trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitar as instruções correspondentes no *software* e atribuir valores às variáveis definidas.

Agora é com você! Resoluções

1 Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que a instrução da linha 11 será executada apenas uma vez, fornecendo a multiplicação $1 \cdot 1 = 1$; consequentemente, o valor do fatorial será igual a 1.

MODERNA

2

```
1 Algoritmo “soma”
2 Var
3 numero, i: inteiro
4 soma: real
5 Inicio
6 escreva(“Digite o número: ”)
7 leia(numero)
8 i <– 1
9 soma <– 0
10 enquanto (i<=numero) faca
11 soma <– soma+i
12 i <– i+1
13 fimenquanto
14 escreva(“A soma é: ”,soma)
15 Fimalgoritmo
```

- Ao trabalhar na construção de um algoritmo e na utilização do VisualG para criar o programa indicado, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Para isso, utilize o algoritmo apresentado na seção ou até mesmo proponha outro problema. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Esse tipo de abordagem possibilita aos alunos que entrem em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- As tarefas da seção **Acessando tecnologias** exercitam a habilidade de manipular linguagens da informática a fim de resolver problemas matemáticos, promovendo nos alunos a capacidade de realizar traduções de um mesmo problema em mais de uma linguagem, isto é, de encontrar maneiras diferentes de expressar uma mesma situação e abordá-la, buscando para isso os meios mais eficazes. Além disso, desenvolve nos alunos a aptidão de organizar ideias em um encadeamento lógico rigoroso, valendo-se dos conectivos adequados e da escrita correta na programação, o que os leva a compreender melhor o que estão trabalhando, visto que não há como programar um algoritmo funcional sem antes ter ciência de cada etapa do procedimento a ser por ele desempenhado.

Página 35

- Para que os alunos não tenham dificuldades na dedução da expressão geral para o arranjo simples, faça-lhes a observação de que $n-(p-1)=n-p+1$. Por mais que isso seja trivial, é algo que torna mais claro o motivo pelo qual, na dedução da expressão desejada, faz-se a multiplicação por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, já que $(n-p)$ é o antecessor de $(n-p+1)$.

Páginas 36 e 37

BNCC Ao utilizar o Senado Federal do Brasil como contexto, a tarefa **30** busca valorizar a diversidade de saberes relacionados não apenas ao ambiente escolar, mas também a questões da vida cívica, levando os alunos a absorver conhecimentos que possibilitem a tomada de decisões alinhadas ao exercício da cidadania, como o voto, e mobilizando aspectos da **Competência geral 4** da BNCC.

- Ao desenvolver o trabalho com o item **c** da tarefa **30**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sugestão de avaliação

Ao fim do trabalho com o tema, avalie o aprendizado dos conteúdos estudados propondo aos alunos o desafio a seguir.

As placas de automóveis no Brasil eram compostas por uma sequência de três letras, seguidas de uma de quatro números, e podia haver repetições de caracteres (formato geral da placa antiga: LLL NNNN). Com a adoção do padrão Mercosul, em 2019, as placas passaram a ser compostas por uma sequência de três letras, seguidas de um único número, depois mais uma letra, seguida de três números (formato geral da nova placa: LLLNLNN). Sabendo disso, determine quantas possibilidades a mais de placas podem ser feitas com o novo padrão, em relação ao padrão antigo. Determine, ainda, quantas vezes o número de possibilidades de placas no novo padrão é maior do que no padrão antigo.

Resolução e comentários

A quantidade de placas possíveis no padrão antigo é $26^3 \cdot 10^4$, enquanto no novo padrão é $26^4 \cdot 10^3$.

Temos, portanto, que a quantidade a mais de placas no novo padrão em relação ao padrão antigo é:

$$26^4 \cdot 10^3 - 26^3 \cdot 10^4 = 26^3 \cdot 10^3 \cdot (26-10) =$$
$$= 26^3 \cdot 10^3 \cdot 16 = 281\,216\,000$$

MODERNA

Em proporção, temos $\frac{26^4 \cdot 10^3}{26^3 \cdot 10^4} = \frac{26}{10} = 2{,}6$, de modo que o novo padrão de placas tem um total de possibilidades equivalente a 2,6 vezes a quantidade de possibilidades do padrão antigo.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Ao fim do trabalho com o tema, avalie a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

3 Permutações

Objetivos específicos

- Reconhecer permutações (com e sem repetições) e desenvolver métodos para determinar as quantidades possíveis de permutações dos elementos de certos conjuntos.
- Compreender permutações como arranjos simples de n elementos tomados n a n.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo permutações com ou sem repetições.

Esse tema aborda permutações com ou sem repetições. Nele, são estudados o conceito de permutação e os métodos tradicionais para se calcular a quantidade de permutações de elementos de certos conjuntos, exercitando-se tais habilidades por meio de tarefas envolvendo anagramas e a formação de números com determinados algarismos e quantidades prefixadas de dígitos. Nos métodos de contagem trabalhados no tema, abrangem-se também casos de permutações em que se impõem restrições, por exemplo, na determinação da quantidade de anagramas de uma palavra que comece e termine com letras específicas. Esse tipo de problema incentiva o desenvolvimento de processos cognitivos diversos, tais quais as capacidades de observação, compreensão, organização, sistematização, análise, síntese e desenvolvimento do raciocínio lógico, além da necessidade de uma comunicação bem articulada das ideias.

Problemas de contagem, ainda que à primeira vista possam parecer abstratos, possuem aplicações práticas em várias situações da vida cotidiana. Os conceitos, técnicas, métodos e raciocínios desenvolvidos em questões básicas de anagramas são o alicerce para as teorias de probabilidade e estatística – essenciais em boa parte das ciências modernas – e para a resolução de problemas técnicos em áreas profissionais da indústria e da informática, entre outras. Em nível mais próximo à realidade imediata dos alunos de Ensino Médio, esses temas introdutórios (e fundamentais) da Análise Combinatória promovem a maior capacidade de compreender padrões e estruturas organizacionais e até mesmo de interpretar, por exemplo, notícias jornalísticas e textos veiculados pela mídia, favorecendo a maturação do senso de proporção e, consequentemente, de apreciação crítica de informações. Ainda assim, os maiores méritos desse tipo de aprendizado relacionam-se ao exercício das habilidades de observação, organização e desbravamento lógico em caráter geral – habilidades úteis em âmbitos muito mais amplos e que importam benefícios para a formação educacional dos alunos como um todo.

Páginas 38 e 39 Superpermutações

- As páginas de abertura buscam despertar a atenção dos alunos para o tema das permutações trazendo curiosidades sobre as chamadas "superpermutações", as quais, apesar de serem fáceis de entender, representam problemas ainda em aberto na Matemática.

  O problema das superpermutações atrai a atenção dos matemáticos desde pelo menos 1993, quando foram levantadas certas perguntas sobre elas que ficaram por muito tempo sem respostas. Curiosamente, um progresso significativo na resolução do problema surgiu não entre pesquisadores nos bancos acadêmicos, mas em uma comunidade de fãs de anime, de uma dúvida inocente e, a princípio, de aparência simples referente às maneiras possíveis de assistir a uma série animada japonesa de estrutura muito peculiar. Tal série, tendo por tema viagens no tempo, foi criada de maneira que o espectador pudesse assistir a seus 14 episódios na ordem desejada, sem que isso interferisse nos acontecimentos da trama. Assim, cada uma dessas ordens ao acompanhar a história proporcionaria uma experiência diferente ao expectador. A dúvida natural que emergiu entre os fãs da série foi: se alguém quisesse ver a série de todas as maneiras possíveis, qual seria a sequência mais curta de episódios que essa pessoa precisaria assistir?

  O problema matemático análogo já havia sido resolvido para séries com 1, 2, 3, 4 ou 5 episódios, e a resolução parecia sugerir um padrão válido em todos os casos. Contudo, descobriu-se que, para 6 ou mais episódios, o padrão não funcionava, e o problema se tornou complexo a ponto de ninguém ter conseguido encontrar um padrão para os valores mínimos e de não ser possível determinar sequer quais eram esses valores mínimos.

  O assunto das superpermutações é interessante por fazer com que os alunos passem a compreender a

MODERNA

Matemática não como algo pronto e acabado, feito por pessoas do passado e que deve ser apenas aprendido e nada mais, mas como um estudo dinâmico e passível dos excitamentos da investigação e das empolgações da descoberta. Por isso, tanto as superpermutações quanto as permutações simples, com ou sem repetições, podem e devem ser abordadas com o ânimo do espírito investigativo e como algo que exige grande criatividade e raciocínio lógico aguçado.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O tema também explora a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, uma vez que exige que os alunos utilizem definições e conceitos matemáticos envolvendo permutações simples e com repetição para aplicar modelos a fim de resolver problemas de contagem e agrupamentos de elementos em conjuntos específicos.

Página 41

- Caso os alunos apresentem dúvidas ao resolver a tarefa **7**, peça a eles que calculem quantos anagramas começam com a letra A; em seguida, quantos anagramas começam com a letra E; depois, quantos começam com a letra M, até que finalmente pensem nos que começam com a letra P, com o objetivo de que obtenham a palavra PERMUTA.
- Ao final do trabalho com as tarefas dessa página, em especial depois da tarefa **7**, os alunos devem perceber que $n!$ cresce demasiadamente rápido com o crescimento de n, atingindo valores muito elevados para valores de n consideravelmente baixos.

  Para aumentar essa percepção, proponha a eles que determinem de quantas maneiras diferentes um baralho com 52 cartas distintas pode ser organizado. A resposta correta seria $52!$ maneiras diferentes. Curiosamente, isso significa que, em toda a história da humanidade, é praticamente impossível que dois baralhos que tenham sido embaralhados de modo completamente aleatório tenham apresentado a mesma ordenação das cartas. Isso porque $52!$ é um número tão grande que, se uma pessoa pudesse contar um número a cada segundo, começando do 1, e a cada um bilhão de anos retirasse um litro de água do oceano, então essa pessoa secaria todos os mares do planeta muito antes de alcançar o valor correspondente a $52!$. A representação decimal de $52!$ possui 68 dígitos, não sendo possível calculá-lo na maior parte das calculadoras científicas.

Para complementar o trabalho com essa página, escreva na lousa a tarefa a seguir e peça aos alunos que a copiem no caderno.

Utilizando uma calculadora científica, calcule.

a) P_{12} b) $P_{13} - P_9$ c) $\frac{P_{10}}{P_3} \cdot P_5$

Resoluções e comentários

a) $P_{12} = 479\,001\,600$

b) $P_{13} - P_9 = 6\,226\,657\,920$

c) $\frac{P_{10}}{P_3} \cdot P_5 = 72\,576\,000$

Página 42

- A fim de tornar mais "palpável" a validade do método de cálculo para permutações com repetição, apresentado nessa página ao abordar o exemplo **1**, registre na lousa, ou peça aos alunos que o façam no caderno, todos os possíveis anagramas da palavra TATU.
- Pode ser conveniente enfatizar o fato de que, nos cálculos envolvendo permutações com repetições sem o uso de calculadora, a propriedade de divisão de fatoriais é de grande utilidade para evitar expressões muito extensas. Por exemplo, para calcular a quantidade de anagramas da palavra ARARAQUARA é mais fácil fazer

$$\frac{10!}{5! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3!}} = 5\,040$$

do que $\frac{10!}{5! \cdot 3!} = \frac{3\,628\,800}{120 \cdot 6} = 5\,040$.

Página 43

- Caso os alunos apresentem dificuldades para realizar a tarefa **13**, proceda de maneira similar à sugerida na tarefa **7** da página **41**, ou seja, peça que, primeiro, calculem quantos anagramas começam com a letra A; depois, com a letra E; e assim por diante, até que a soma dessas quantidades chegue o mais próximo possível do número 301, sem, contudo, ultrapassá-lo.
- Ao resolver a tarefa **14**, comente com os alunos algumas curiosidades sobre o sistema Braille. Em razão de um acidente na infância, o francês Louis Braille (1809-1852) perdeu a visão, mas, mesmo assim, frequentou a escola por dois anos, tornando-se um aluno brilhante, o que lhe proporcionou uma bolsa de estudos do Instituto Nacional para Jovens Cegos de Paris. Para conseguir ler e escrever, Braille desenvolveu um sistema que toma como base um método conhecido como "escrita noturna". O método de escrita noturna foi inventado pelo oficial do exército francês Charles Barbier de la Serre (1767-1841) e era constituído de pontos e traços em relevo, sendo destinado a enviar mensagens cifradas a sentinelas, os quais eram treinados para decodificar as mensagens até mesmo no escuro, usando o tato. Braille, por sua vez, eliminou os

EM MODERNA

traços e simplificou o método a fim de atender a suas próprias necessidades, criando uma célula de seis pontos divididos em duas colunas de igual tamanho, com pontos lisos ou em alto-relevo, e cada combinação de pontos corresponde a uma letra ou a um símbolo de pontuação. O sistema Braille foi finalizado em 1824 e até os dias atuais é um dos sistemas de leitura e escrita mais utilizados entre pessoas cegas ou com baixa visão de todo o mundo.

Outras informações sobre o sistema Braille podem ser encontradas no *site* da Sociedade de Assistência aos Cegos. Disponível em: <http://www.sac.org.br/>. Acesso em: 2 jul. 2020.

- Ao fim do trabalho com o tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, levando-os a refletir sobre os conteúdos estudados. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

4 Combinação simples e Binômio de Newton

Objetivos específicos

- Reconhecer combinação simples.
- Analisar e identificar uma expressão binomial.
- Reconhecer e desenvolver o Binômio de Newton.
- Reconhecer e aplicar a fórmula do termo geral do Binômio de Newton.

Dando continuidade aos conceitos e às técnicas de análise combinatória estudados anteriormente, esse tema aborda combinações simples e o Binômio de Newton. Nele, os alunos analisam problemas práticos e abstratos que motivam a apresentação desses conceitos, dando-lhes noção intuitiva e, também, a necessária dedução matemática dos resultados.

A combinação simples é apresentada em comparação ao arranjo simples, uma vez que, assim como os arranjos, as combinações são agrupamentos de elementos tomados em quantidades delimitadas. Porém, a diferença principal é que, no caso das combinações, esses agrupamentos não são ordenados, ou seja, a ordem não importa, de modo que agrupamentos com os mesmos elementos são contados uma única vez. Essa diferença faz com que a expressão geral para a combinação simples seja a divisão da expressão para o arranjo dividida pela quantidade de permutações dos elementos de cada agrupamento (ou seja, o fatorial do número desses elementos).

Além disso, com a explicitação das propriedades mais importantes, a expressão geral do Binômio de Newton é apresentada e associada ao Triângulo de Pascal, identificando as inter-relações entre eles. Com o desenvolvimento da teoria e a resolução das tarefas, os alunos se tornam aptos tanto a identificar as utilidades dessas ferramentas matemáticas quanto a desenvolver o Binômio de Newton e a aplicar a fórmula de seu termo geral em diversas ocorrências, exercitando, assim, o raciocínio lógico.

Os conteúdos são trabalhados de modo que os alunos adquiram conhecimentos sobre possíveis levantamentos de possibilidades, presentes nas mais variadas áreas do conhecimento, como fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca de combinação simples, proponha a tarefa a seguir.

Peça a eles que determinem o total de cumprimentos com apertos de mão que seis pessoas podem trocar entre si, sem que haja repetição, ou seja, se *A* apertou a mão de *B*, logo *B* não precisará apertar a mão de *A* novamente, pois já o fez. Disponibilize um tempo da aula para que os alunos conversem entre si e façam os cálculos. Em seguida, anote na lousa os valores determinados por eles. Solicite a seis alunos que se voluntariem para realizar a experiência na prática. Leve-os a perceber que, escolhido o primeiro, esse cumprimentará todos os outros. Portanto, serão 5 apertos de mão. O segundo aluno cumprimentará apenas 4, visto que não deve haver repetição de cumprimentos. O terceiro cumprimentará 3. O quarto, 2. E o quinto cumprimentará apenas o último, que, por sua vez, já terá sido cumprimentado por todos os demais colegas. Assim, o total de cumprimentos será:

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

Logo, o total de cumprimentos é 15 apertos de mão.

Pergunte aos alunos como calculariam o total de cumprimentos se fossem 10 alunos. Porém, dessa vez, sem verificação prática. Espera-se que eles concluam que o total pode ser calculado pela soma dos inteiros de 1 a 9, ou seja, um total de 45 apertos de mão.

Depois, questione o total de comprimentos caso fossem considerados todos os alunos da escola. Desse modo, leve-os a perceber que os cálculos, apesar de simples, podem ser trabalhosos em alguns casos.

Informe aos alunos que essa tarefa é um exemplo de combinação simples, um dos conteúdos que será estudado ao longo desse tema. Esclareça também que, quando determinaram o total de cumprimentos possíveis entre 6 participantes, eles calcularam o total de combinações possíveis de 6 alunos escolhidos 2 a 2; nos outros casos, 10 alunos, 2 a 2; ou, ainda, o total de alunos da escola escolhidos 2 a 2. Diga-lhes que nem sempre as combinações são feitas tomando-se os elementos 2 a 2, mas que existem conceitos matemáticos que permitem a realização desses cálculos de maneira mais prática e eficiente.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

EDITORIA

Páginas 44 e 45 É preciso muita sorte!

- Nas páginas de abertura desse tema, as ideias de análise combinatória são associadas, de maneira intuitiva, aos cálculos da probabilidade de ganhar em loterias; que, de modo geral, oferecem prêmios altos em dinheiro aos vencedores de um sorteio aleatório entre todos aqueles que pagaram para participar. Na modalidade mais comum de loteria, os prêmios são distribuídos mediante a correspondência entre os números dos bilhetes dos compradores e aqueles tirados à sorte por algum dispositivo mecânico (como urnas giratórias, por exemplo) ou por programas de computador capazes de gerar números aleatoriamente.

  Não se sabe exatamente qual foi a primeira loteria que surgiu no mundo, mas jogos muito similares às loterias atuais eram praticados por hebreus, hindus, romanos e chineses desde a Idade Antiga. Nessa época, contudo, não existia uma regulamentação oficial para a prática de apostas e sorteios. Foi somente entre os séculos XVI e XVII, em regiões da Itália, Inglaterra e França, que esse tipo de jogo foi oficializado, instituindo-se normas claras para que as apostas fossem realizadas dentro da lei.

> [...]
>
> A atração das loterias não é novidade. A prática data da Gênova do século XVII, onde parece ter evoluído por acaso, a partir do sistema eleitoral. A cada seis meses, dois dos *governatori* da cidade eram escolhidos entre os membros do Pequeno Conselho. Em vez de realizar uma eleição, Gênova fazia um sorteio, tirando dois gravetos de uma pilha contendo os nomes dos 120 conselheiros. Não demorou muito para os jogadores da cidade passarem a fazer extravagantes apostas paralelas sobre o resultado da eleição. As apostas tornaram-se tão populares que os jogadores começaram a se irritar por ter de esperar até o dia da eleição para seu prazeroso jogo de azar, e logo perceberam que, se quisessem apostar em pedacinhos de papel tirados de uma pilha, não haveria necessidade da eleição. Números substituíram os nomes dos políticos e, por volta de 1700, havia uma loteria em Gênova que parecia muito familiar aos modernos apostadores. Eles apostavam em cinco números tirados ao acaso, com melhor retorno para a maior quantidade de números acertados.
>
> As loterias se espalharam rapidamente pela Europa e dali para os Estados Unidos. Durante a Guerra da Independência, tanto o Congresso Continental quanto os governos estaduais estabeleceram loterias para financiar a luta contra os britânicos. [...] Nem todo mundo aplaudiu a forma como isso se desenvolveu. Os moralistas achavam, e não estavam errados, que loterias equivaliam a jogatina. [...]
>
> ELLENBERG, Jordan. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Trad. George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2015. p. 223-224.

Muitas pessoas já pensaram (ou ouviram falar) se não existe alguma maneira – matemática ou não – de, sem trapacear, garantir vitória no jogo. Atualmente, isso não é possível, pois as loterias são salvaguardadas por modelos estatísticos sólidos que garantem que um jogador não possa ter vantagem sobre os demais. Contudo, no início da popularização das loterias na França do século XVIII, um matemático chamado Charles-Marie de La Condamine encontrou um método de maximizar as probabilidades de ganhar na loteria e, reunindo-se com um grupo de amigos (entre os quais estava o escritor e filósofo Voltaire), pôs em prática um esquema de compra de bilhetes que lhes rendeu uma boa fortuna. O esquema, por mais que possa parecer imoral, não era ilegal, de modo que nem o matemático nem o filósofo burlaram nenhuma lei. Pela simples argúcia matemática, Condamine, Voltaire e seus amigos tornaram-se homens ricos pelo resto da vida (o que, no caso de Voltaire, possibilitou dedicação em tempo integral a seus escritos e pensamentos, possibilitando o surgimento de sua prestigiada obra).

- Para complementar as informações apresentadas nas páginas de abertura, explique aos alunos que as Loterias Federais – Mega-Sena, Quina, Lotofácil, entre outras – são administradas pela Caixa Econômica Federal. Comente que essas loterias, além de distribuir prêmios, permitem investimentos visando o desenvolvimento social do país, uma vez que destina parte da quantia arrecadada a setores de investimentos públicos, como esporte, cultura e educação.

- Ao trabalhar as questões do **Ser consciente** da página **45**, verifique a conveniência de usar a metodologia ativa **Gallery Walk**. Mais informações a respeito dessa estratégia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O contexto trabalhado nessas páginas de abertura permite explorar a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Além disso, o tema contempla a habilidade **EM13MAT310**, pois traz considerações sobre os desafios de solucionar problemas de contagem, em situações práticas, envolvendo conjuntos muito grandes. No caso analisado, as contagens são em relação ao número de apostas possíveis em jogos de loteria. As reflexões

MODERNA

quanto a esse problema prático induzem à descoberta gradativa de novos métodos de contagem, motivando os conceitos que serão trabalhados ao longo do tema, principalmente o de combinação simples. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Página 46

- Quanto à dedução lógica da expressão para o cálculo do número de combinações de um conjunto de n elementos tomados p a p, a maneira mais simples e natural é calcular primeiro o número de arranjos possíveis (ou seja, agrupamentos levando em conta a ordem dos elementos) e, depois, dividir o resultado obtido pelo número de agrupamentos contados em repetição (ou seja, as $p!$ permutações dos elementos de cada arranjo). Comente com os alunos que esse raciocínio é similar ao empregado nos casos de permutações com repetição, em que também é feita a divisão para compensar as contagens repetidas.

Páginas 48 e 49 Resolvendo por etapas

- No trabalho com essas páginas, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Design thinking**. Para tanto, antes de iniciar o tema, apresente o problema da seção **Resolvendo por etapas** como um desafio, ou proponha o problema do boxe **Agora é você quem resolve!**, ou ainda outra tarefa similar para que os alunos resolvam seguindo os passos da metodologia usada nessa seção.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é você quem resolve! Resolução

2 Resposta pessoal. Denotando por A a quantidade de equipes que Arlindo faz parte e Beatriz não; B a quantidade de equipes que Beatriz faz parte e Arlindo não; e AB a quantidade de equipes em que tanto Arlindo quanto Beatriz estão presentes, temos:

- $A = C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot (13-3)!} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286$
- $B = C_{13,3} = \frac{13!}{3! \cdot (13-3)!} = \frac{13!}{3! \cdot 10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 286$
- $AB = C_{13,2} = \frac{13!}{2! \cdot (13-2)!} = \frac{13!}{2! \cdot 11!} = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$

Desse modo, temos:

$$286 + 286 + 78 = 650$$

Portanto, é possível escolher os membros da equipe de 650 maneiras diferentes.

Outra maneira de calcular a quantidade de possibilidades seria resolver o problema contando todas as equipes, independentemente da participação ou não de Arlindo ou Beatriz e, em seguida, subtrair desse valor a quantidade de equipes das quais nenhum dos dois é membro. Assim:

$$C_{15,4} - C_{13,4} = \frac{15!}{4! \cdot (15-4!)} - \frac{13!}{4! \cdot (13-4!)} = 1\,365 - 715 = 650$$

Página 52

- A tarefa **23** indica como conceitos de análise combinatória podem ser aplicados na constituição de códigos de transmissão de mensagens. Em certo sentido, todas as linguagens são combinações de um número limitado de símbolos. As palavras em língua portuguesa, por exemplo, são uma combinação das 27 letras do alfabeto. O número de símbolos ou caracteres de uma linguagem vai depender da finalidade para a qual ela foi criada: menos símbolos induzem linguagens mais simples, mas com menor abrangência, enquanto linguagens com mais símbolos fornecem um leque maior de possibilidades de mensagens a ser transmitidas, tornando-as mais dinâmicas.

Páginas 53 e 54

- Se julgar pertinente, mencione que, apesar do que esses nomes sugerem, nem o Binômio de Newton nem o Triângulo de Pascal são descobertas originais de Newton ou de Pascal. Nomes de teoremas e propriedades matemáticas algumas vezes provêm de seus descobridores, mas nem sempre é o que acontece. Na maior parte das vezes, os nomes surgem com base nos matemáticos que popularizaram a ferramenta, utilizando-a diversas vezes em problemas maiores, ou então que realizaram contribuições significativas com relação a ela. Um exemplo é o Teorema de Pitágoras, que já era conhecido muito tempo antes da demonstração formal promovida por Pitágoras.

  No caso específico do Binômio de Newton e do Triângulo de Pascal, historiadores identificaram seus empregos em trabalhos matemáticos chineses anteriores à Idade Média e até mesmo em obras indianas de antes de Cristo. Em uma obra literária que analisava permutações em versos de poemas sânscritos, o indiano

MODERNA

Pingala já empregava, dois séculos antes de Cristo, métodos combinatórios análogos ao que atualmente chamamos Binômio de Newton e Triângulo de Pascal.

Páginas 57 a 59

- Ao fim do trabalho com o tema, verifique a conveniência de empregar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, a fim de que possam refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule sucintamente as fórmulas e os conceitos, bem como as ideias mais interessantes aplicadas em uma demonstração ou em uma tarefa. Em seguida, peça aos alunos que comentem situações práticas em que eles visualizem oportunidade de utilizar as ferramentas matemáticas desenvolvidas no tema.
- Mais informações sobre essa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

5 Probabilidade

Objetivos específicos

- Compreender que uma das características da probabilidade é a previsão de resultados em relação a eventos aleatórios.
- Usar as técnicas de contagem em cálculos de probabilidade.
- Distinguir casos possíveis de casos prováveis e casos favoráveis.
- Identificar, de acordo com a situação, se determinados eventos são independentes, condicionais ou mutuamente exclusivos.
- Compreender o conceito de probabilidade da união de dois eventos e realizar cálculos nesses contextos.
- Analisar as possibilidades em uma situação-problema e tomar decisões baseadas nas probabilidades de ocorrência de um evento.

O tema trata de conceitos matemáticos relacionados à probabilidade. Os principais conteúdos abordados são: espaços amostrais finitos e infinitos; experimentos aleatórios; cálculo de probabilidades; interpretação de dados probabilísticos; probabilidade de união de dois eventos; conceitos de evento certo, evento impossível e evento provável.

Apesar de o foco principal ser a realização de cálculos de probabilidade em contextos cada vez mais elaborados, a abordagem do tema se destina ainda à correta interpretação dos resultados dos cálculos e à compreensão das vantagens de empregar raciocínios probabilísticos em situações cotidianas, principalmente no que tange à tomada de decisões e ao gerenciamento de riscos.

A Teoria da Probabilidade permite a criação de ferramentas capazes de fazer considerações sobre previsibilidade de eventos, ajudando-nos a lidar com a incerteza. Muitos fenômenos da natureza e situações da vida são aleatórios (ou, com algumas restrições, podem ser considerados aleatórios, já que não temos conhecimento seguro sobre suas causas ou as leis que os governam). Sendo assim, sempre há aleatoriedades que devem ser consideradas mesmo em situações bem arquitetadas, como em projetos de engenharia. A aplicação da Teoria da Probabilidade nesses casos, portanto, também pode ser entendida tanto como uma das facetas do gerenciamento de riscos quanto como base para tomadas das decisões mais seguras possíveis, dentro dos limites de nossos conhecimentos.

O fundamento de grande parte das ciências modernas é, quase sempre, essencialmente probabilístico: decisões de economia e decisões de políticas públicas são feitas com base em estatísticas e probabilidade. Mesmo áreas avançadas, como Física Quântica, não trabalham com valores absolutamente precisos, mas sim com estimativas probabilísticas.

Páginas 60 e 61 **Jogando com a sorte!**

- As páginas de abertura trazem curiosidades sobre geração artificial de números aleatórios em jogos eletrônicos. Por exemplo, a fim de garantir uma dinamicidade maior nos desafios dos jogos, evitando a monotonia de fases sempre iguais, os jogos precisam de um elemento de aleatoriedade em suas configurações. Contudo, jogos eletrônicos são construídos com base em códigos computacionais, de modo que os detalhes de suas programações são predeterminados por esses códigos, a princípio não havendo espaço para elementos randômicos (isto é, computadores não têm vontade própria, não podem, portanto, decidir dentre *A* ou *B* ao acaso, sem uma instrução precisa que o leve a uma decisão ou a outra). Para superar essa dificuldade, os programadores desenvolvem algoritmos RNG, que se valem de funções complexas, as quais simulam aleatoriedade. Embora a aleatoriedade não seja perfeita, ela é boa o bastante para que seja praticamente impossível a qualquer ser humano (ou mesmo máquina) reconhecer um padrão na geração dos números.

  Como esses algoritmos são aplicados inclusive em jogos envolvendo apostas, o RNG é controlado por autoridades responsáveis por sua regulamentação e supervisão, de modo a garantir que esses jogos sejam justos e transparentes.
- O assunto dessas páginas relaciona-se com ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Com base nas informações dessas páginas sobre o jogo de Tetris e imaginando cada tipo de peça do jogo numerada de 1 a 7, peça aos alunos que pensem em qual seria a probabilidade de que, ao ligar o jogo, a primeira peça seja exatamente igual ao tipo 1. Depois, qual seria a probabilidade de tanto a primeira quanto a segunda peça serem iguais ao tipo 1.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O trabalho com o tema explora os aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Nele, os conceitos e as ferramentas para cálculos de probabilidades, associados às técnicas de análise combinatória, permitem aos alunos construir modelos e resolver problemas em vários contextos, verificando a razoabilidade dos resultados e embasando interpretações mais bem fundamentadas de eventos práticos, a fim de sustentar argumentações racionais.

Nas tarefas em geral, os alunos devem lidar com espaços amostrais e eventos aleatórios, resolvendo e elaborando problemas de probabilidade por meio de técnicas de contagem e do emprego adequado dos conceitos matemáticos pertinentes, bem como verificar situações da vida cotidiana nas quais é necessário fazer escolhas levando em conta os riscos probabilísticos, abordando, assim, as habilidades **EM13MAT106**, **EM13MAT311** e **EM13MAT511** e as **Competências específicas 1** e **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Durante o trabalho com essas páginas, pergunte aos alunos se eles conhecem os jogos mencionados e se já os jogaram em momentos de lazer. Deixe que comentem suas experiências e aproveite o momento para explicar que o direito à diversão é estabelecido pelo Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA), contemplando o tema contemporâneo transversal **Direitos da Criança e do Adolescente**.

Páginas 62 e 63

- Ao trabalhar com os alunos o desenvolvimento histórico dos estudos sobre probabilidade, mencione que, mesmo sendo necessário realizar vários cálculos para determinar probabilidades, nos primeiros estudos sobre o assunto, alguns pensadores relutaram em aceitar que a probabilidade fosse um ramo da Matemática, já que, para eles, os resultados de probabilidade não eram exatos, ao contrário das demais.

BNCC Citar grandes estudiosos da área da Matemática e apresentar suas contribuições para o campo das ciências em geral são modos de valorizar os conhecimentos historicamente construídos e enfatizar os benefícios de seus esforços para o desenvolvimento do mundo atual, indo ao encontro do que está previsto na **Competência geral 1** da BNCC.

Páginas 64 e 65

- Ao trabalhar com o conceito de espaços amostrais infinitos, verifique a viabilidade de aprofundar o assunto com os alunos, apresentando, ainda que de maneira apenas intuitiva, a distinção entre espaço amostral infinito enumerável e espaço amostral infinito não enumerável. Uma sugestão é mencionar o que segue abaixo.

  No primeiro exemplo de espaço amostral infinito apresentado, considerando o sorteio aleatório de um número natural, apesar de o espaço ser infinito, foi possível estabelecer uma ordem e realizar a enumeração de seus elementos. Quando isso ocorre, dizemos que o conjunto infinito é **enumerável**, pois seus elementos podem ser associados um a um aos números naturais.

  Quando não há possibilidade de enumeração, dizemos que o conjunto infinito é **não enumerável**. É o caso, por exemplo, do espaço amostral da escolha aleatória de um número real pertencente ao intervalo $I = [0, 1]$, pois entre o número 0 e o número 1 existe uma infinidade não enumerável de números reais.

  Nos conjuntos infinitos não enumeráveis, é impossível escrever o espaço amostral na forma $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$. Nesses casos, a descrição do espaço amostral e a descrição dos eventos vão depender da natureza do problema e do contexto em que ele aparece. No caso de números reais, a notação normalmente mais conveniente é a de intervalo, mas em problemas geométricos, por exemplo, o espaço amostral e os eventos de interesse podem ser descritos, em certas circunstâncias, por meio das áreas das figuras envolvidas.

  Espaços amostrais infinitos podem ser enumeráveis ou não enumeráveis. Chamamos **espaços amostrais infinitos enumeráveis** aqueles cujos elementos, por mais que sejam ilimitados, podem ser postos em associação um a um com os números naturais. Quando isso não ocorre, dizemos tratar-se de **espaços amostrais infinitos não enumeráveis** (também chamados **espaços amostrais contínuos**).

Páginas 66 a 68

- Ao trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações

sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 69 e 70

- Ao tratar da probabilidade de ocorrência de um evento em um espaço amostral não equiprovável, verifique a viabilidade de explorar com os alunos o conceito usando uma linguagem mais formal, como no exemplo abaixo.

  Em um espaço amostral $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_p\}$ com p elementos, em que o elemento e_1 ocorre m_1 vezes, o elemento e_2 ocorre m_2 vezes, e assim sucessivamente, dado um evento $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_q\}$ com q elementos, em que o elemento a_1 ocorre n_1 vezes, o elemento a_2 ocorre n_2 vezes, e assim sucessivamente, então a probabilidade $P(A)$ de o evento A ocorrer é:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_q}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p}$$

  Sendo A um evento do espaço amostral Ω, temos $A \subseteq \Omega$ e, portanto, $q \leqslant p$.

Página 71

BNCC O contexto trabalhado na tarefa **R6** – que trata das diferentes manifestações artísticas, nesse caso, dos diversos gêneros musicais – enfatiza a grande variedade do cenário musical nacional e sua utilização no ensino e aprendizagem de Matemática em sala de aula, abordando, assim, aspectos da **Competência geral 3** da BNCC.

Páginas 72 a 74

BNCC O contexto apresentado na tarefa **18** da página **73**, abordando o cortisol e a adrenalina – hormônios associados à ocorrência do infarto –, permite despertar a curiosidade intelectual dos alunos ao tomar como base o conhecimento de diferentes áreas, adotando, assim, uma abordagem científica na investigação de causas e na elaboração e resolução de problemas, preceitos da **Competência geral 2** da BNCC.

- A tarefa **25** da página **74** – em que os alunos devem elaborar o enunciado de um problema para, posteriormente, resolvê-lo – busca explorar o desenvolvimento da capacidade de escrita e de argumentação, contribuindo para que expressem e partilhem informações por meio da linguagem verbal, contemplando, assim, a **Competência geral 4** da BNCC.

- A fim de complementar as tarefas dessa seção, leia para os alunos a curiosa história da origem de um problema sobre probabilidade e desafie-os a solucioná-lo.

  O escritor inglês Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) ficou mais conhecido por seu pseudônimo Lewis Carroll, sob o qual publicou suas duas obras-primas: Alice no País das Maravilhas (Alice in Wonderland) e Alice Através do Espelho (Through the Looking-Glass). Além de escritor, Dodgson também foi matemático, tendo composto uma série de desafios de lógica que ficaram conhecidos como Pillow Problems (Problemas no travesseiro) por terem sido publicados no livro Pillow Problems Thought Out During Wakeful Hours (Problemas no travesseiro pensados durante horas acordado, tradução livre).

  O problema a seguir, de número **5**, envolve um resultado contraintuitivo abordando probabilidade e é particularmente interessante.

  Uma bolsa não transparente contém uma bola, sobre a qual se sabe que, com igual probabilidade, pode ser preta ou branca, mas de nenhuma outra cor. Uma pessoa, sem olhar no interior da bolsa, insere uma bola branca e, em seguida, chacoalha a bolsa de modo a não saber mais qual bola é de que cor. Em seguida, uma das bolas é retirada, e essa bola tem a cor branca. Nesse cenário, qual é a probabilidade de que a bola que sobrou no interior da bolsa seja branca?

Resoluções e comentários

A princípio, pode-se pensar que a probabilidade é de 50%, já que a bola restante pode ser ou preta ou branca. Contudo, essa resposta está errada, pois não sabemos se a bola que foi retirada da bolsa é a bola que já estava lá desde o começo ou se é a que foi introduzida depois, e esse detalhe traz informações que afetam a probabilidade.

Uma maneira de resolver o problema é listando todas as possibilidades, em todos os cenários possíveis.

Configuração inicial	Casos	Bola retirada	Bola que sobrou
Branca (primeira bola) Branca (segunda bola)	1	Branca (primeira bola)	Branca (segunda bola)
	2	Branca (segunda bola)	Branca (primeira bola)
Preta (primeira bola) Branca (segunda bola)	3	Preta (primeira bola)	Branca (segunda bola)
	4	Branca (segunda bola)	Preta (primeira bola)

Todos os casos são igualmente prováveis. Contudo, o caso 3 com certeza não ocorreu, já que a bola retirada foi uma bola branca, e não preta. Desse modo, restaram 3 casos possíveis (casos 1, 2 e 4), e esses casos são

MODERNA

equiprováveis. Como em dois desses casos a bola que sobrou na bolsa é branca (casos 1 e 2), a probabilidade de que a bola que sobrou no interior da bolsa seja branca é 2 em 3, ou seja, $\frac{2}{3} = 66,\overline{6}\%$.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, levando-os a refletir sobre os conteúdos estudados. De modo breve, relembre as principais ideias trabalhadas ao longo da aula e, em conversa ampla, peça que comentem os benefícios do estudo das probabilidades, mencionando exemplos práticos de aplicações possíveis em suas vidas.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

6 Probabilidade condicional

Objetivos específicos

- Compreender o conceito de probabilidade condicional.
- Lidar com probabilidades em situações rotineiras, diferenciando os eventos independentes dos eventos dependentes.
- Reconhecer as características dos eventos em estudo, identificando os conceitos relacionados a probabilidades que podem ser aplicados em cada situação.

Esse tema discute o conceito de probabilidade condicional e de experimentos binomiais e as situações em que eles podem ser aplicados e as estratégias de cálculo correspondentes. Porém, para explorar essa temática, é importante que os alunos disponham de conhecimentos prévios acerca de alguns conceitos que são essenciais ao conteúdo abordado, como evento, espaço amostral, probabilidade e probabilidade da união.

BNCC O trabalho com esse tema permite o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT312**, ao elaborar e solucionar problemas envolvendo cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. Desse modo, aborda-se a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Páginas 78 e 79 Teste do pezinho: um primeiro passo para o futuro dos recém-nascidos

Sala dos professores

Com o intuito de abordar o conceito de probabilidade e sua associação com a genética, verifique a possibilidade de realizar uma aula articulada com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Biologia**. Nessa aula interdisciplinar, podem ser discutidas questões diversas tomando por base contextos relacionados a assuntos de genética para aplicação de cálculos envolvendo probabilidade. Converse com o professor de **Biologia** a respeito de exemplos em que seja possível aplicar a definição de probabilidade, sem que haja a necessidade de recorrer a probabilidades condicionais, visto que o objetivo é realizar um trabalho introdutório com enfoque na relação que pode ser estabelecida entre esses componentes curriculares.

- É possível enriquecer as discussões iniciadas no estudo dessas páginas apresentando questionamentos que envolvam o cálculo de probabilidades, com base na temática proposta. Assim, podem ser propostas questões, como: Qual é a probabilidade de um casal, em que apenas um possui o traço falciforme, ter dois filhos sem a doença e sem o traço falciforme? Nesse caso, podem ser listadas todas as possibilidades, levando os alunos a constatar que a probabilidade de que ambos os filhos não apresentem a doença ou traços dela é $\frac{1}{4}$ ou 25%. É possível orientar os alunos a interpretar a situação com base em uma listagem de todas as possibilidades desse evento, de modo a aplicar o emprego da definição de probabilidade.
- Durante o trabalho com essas páginas de abertura, proponha aos alunos pesquisas sobre o teste do pezinho e sua importância para o acompanhamento da saúde dos recém-nascidos, elencando exemplos de doenças que podem ser detectadas por esse teste e compreendendo como se dá a cobertura pelo Sistema Único de Saúde (SUS). Mais informações a respeito desse tema podem ser acessadas no *site* do Ministério da Saúde. Disponível em: <https://www.saude.gov.br/>. Acesso em: 6 jul. 2020.

BNCC O trabalho com essas páginas permite o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Saúde**, **Vida familiar e social** e **Direitos da criança e do adolescente**, permitindo aos alunos refletir sobre a importância de conhecer algumas das principais doenças que podem afetar a saúde das pessoas; identificar as características e a importância de testes de saúde, que são realizados em períodos

MODERNA

específicos ao longo de nossa vida, para identificar possíveis doenças; conhecer os direitos que todos têm de acesso a ferramentas para a manutenção da saúde, como é o caso do teste do pezinho para os recém-nascidos. Desse modo, aborda-se aspectos da **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, ao:

"Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo com seus pares esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem as conclusões para a turma. Além disso, verifique a possibilidade de os alunos usarem a metodologia ativa **Gallery walk** para responder à questão com destaque **Ser consciente** da página **79**.

  Mais informações a respeito dessas metodologias ativas podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 82

- Verifique a possibilidade de propor aos alunos o problema **R1**, da seção **Exercícios e problemas resolvidos**, antes de apresentar a resolução desse problema. Para isso, organize-os em duplas, ou em pequenos grupos, apresente o enunciado do problema e proponha que o resolvam sem olhar a resolução do livro. Desse modo, eles podem empregar diferentes estratégias, como recorrer a diagramas com base nos conhecimentos prévios sobre probabilidade. Em seguida, promova uma conversa a fim de que todos possam compartilhar suas soluções.

  Para tanto, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento em conjunto, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula** na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 83 e 84

- Ao trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC

A tarefa **10** da seção **Exercícios e problemas** aborda a habilidade **EM13MAT312**, uma vez que a proposta incentiva os alunos a elaborar e resolver problemas que envolvam o conceito de probabilidade condicional, permitindo a eles tanto identificar que conhecimentos e informações são necessários para realizar o estudo de um problema, com base no conceito de probabilidade, quanto reconhecer situações em que a probabilidade condicional pode estar presente.

Página 86

- Durante as discussões acerca do problema **R3** da seção **Exercícios e problemas resolvidos**, verifique a possibilidade de levar para a sala de aula diferentes modelos de calculadoras científicas. Inclusive, na aula anterior, solicite aos alunos que tiverem esse equipamento em casa que o tragam, para que possam conhecer as principais funções relacionadas aos conteúdos de probabilidade. Para isso, explore as funções da calculadora que permitam o cálculo, por exemplo, de combinações simples, destacando a importância da ordem na inserção dos valores, conforme as funções de cada equipamento, para a obtenção de resultados corretos.

  Uma segunda opção é, caso os alunos disponham de *smartphones*, solicitar a eles a instalação de aplicativos que simulem as funções de uma calculadora científica. Outra possibilidade ainda é realizar um trabalho no laboratório de informática, utilizando programas que simulam calculadoras científicas, de modo que os alunos possam conhecer as características desses equipamentos e aprender a empregar corretamente as funções que auxiliam no cálculo das probabilidades envolvendo, principalmente, os experimentos binomiais.

Página 87

- Ao trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar alguns dos problemas propostos sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Aproveite os contextos das tarefas **13**, **14** e **15** da seção **Exercícios e problemas** para conversar com os alunos a respeito das culturas juvenis. Nesse sentido, explore as preferências da turma em relação a diferentes mo-

EM OBRA

dalidades esportivas propondo reflexões sobre a importância da probabilidade, por exemplo, nos cálculos da probabilidade de vitória de determinadas equipes com base nos desempenhos históricos. Com isso, procure evidenciar outras situações do cotidiano em que a probabilidade é importante.

Sala dos professores

Diante do contexto abordado na tarefa **16** da seção **Exercícios e problemas**, verifique com o professor da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Biologia**, a possibilidade de discutir previamente com os alunos os aspectos relacionados ao desenvolvimento, por exemplo, da síndrome de Down, a fim de enriquecer o aprendizado das informações presentes nessa tarefa.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em conversa, solicite a eles, se possível, que comentem quais eles pensam ser as vantagens dos estudos matemáticos relacionados a conceitos envolvendo probabilidade condicional, de modo que possam refletir a respeito da aplicabilidade dela na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

7 Probabilidade e a produção de resíduos

Objetivo específico

- Resolver problemas envolvendo probabilidade e a produção de resíduos.

Esse tema trata da probabilidade e sua aplicação na interpretação e resolução de problemas relacionados à produção e descarte de resíduos. Nessas páginas, são aplicados conceitos envolvendo probabilidade para a análise de determinados eventos, o que exige dos alunos conhecimentos relativos a esse conteúdo.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema é possível usar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 88 e 89 **Acerte a lixeira**

Sala dos professores

Nesse tema, o conceito de probabilidade é relacionado à produção e ao descarte de resíduos, o que exige dos alunos a interpretação das situações apresentadas e a identificação do espaço amostral dos eventos indicados. Além disso, a compreensão dos principais conceitos envolvendo probabilidade podem ser aplicados em cada situação apresentada.

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho articulado com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares **Química** e **Biologia**, a fim de enriquecer as discussões a respeito da coleta seletiva, dos impactos ambientais gerados pelo descarte incorreto do lixo, da situação da coleta de lixo no país e das doenças que podem ser geradas pelo descarte incorreto do lixo, entre outros temas. Podem ser realizados trabalhos em grupos em que os alunos elaborem cartazes ou panfletos, para ser distribuídos em locais estratégicos da escola, com o objetivo de conscientizar os demais alunos a respeito da importância do consumo consciente e do descarte adequado dos resíduos produzidos por eles diariamente. Além disso, podem ser realizadas pesquisas sobre a situação do descarte do lixo no Brasil ou da coleta seletiva, por exemplo.

BNCC

O trabalho com essas páginas permite o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Educação ambiental** e **Educação para o consumo**, ao permitir reflexões a respeito da produção e do descarte de resíduos que resultam em sérios impactos ambientais, os quais podem ser minimizados mediante a adoção do consumo consciente. Nesse sentido, também são abordados aspectos da **Competência específica 1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que define:

"Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global."

Ao apresentar informações a respeito da produção de resíduos em nível nacional, essas páginas possibilitam a promoção de discussões relacionadas ao meio ambiente, levando os alunos a elaborar argumentos significativos para defender ideias que promovam a consciência socioambiental, conforme prevê a **Competência geral 7** da BNCC. Com isso, espera-se que eles desenvolvam atitudes que levem em consideração não apenas os interesses pessoais, mas também os coletivos, com responsabilidade em relação ao meio que os cerca, de modo a contemplar a **Competência geral 10** da BNCC.

MODELO

Resoluções e comentários

A Como 83% dos municípios brasileiros possuem coleta seletiva, temos:

$$1 - \frac{83}{100} = \frac{17}{100}$$

Portanto, a probabilidade de um município brasileiro ter coleta seletiva é $\frac{17}{100}$ ou 17%.

B Como existem cinco tipos de lixeiras, temos:

$$\underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Probabilidade de jogar a embalagem de papel na lixeira para papel}} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{Probabilidade de jogar a lata metálica na lixeira para metal}} - \underbrace{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}}_{\text{Probabilidade de jogar os materiais nas lixeiras corretas}} = \frac{2}{5} - \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$$

Portanto, a probabilidade de jogar os materiais na lixeira correta é $\frac{7}{20}$ ou 35%.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta, registrando suas dúvidas e conversando com os colegas sobre esses conteúdos. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

8 Estatística

Objetivos específicos

- Distinguir variáveis quantitativas de variáveis qualitativas.
- Ler e interpretar informações nas mais diversas linguagens e representações.
- Identificar as características dos levantamentos amostrais, analisando situações em que a amostragem pode ser empregada.

Os principais conteúdos abordados nesse tema são variáveis estatísticas, população e amostra estatística, bem como levantamentos amostrais, por meio do estudo de diferentes tipos de amostragem. Esses conteúdos estabelecem relações com o estudo de conjuntos, análise combinatória, probabilidade, entre outros.

Páginas 90 e 91 Quantos somos?

Sala dos professores

Nessas páginas, o conceito de estatística é associado a informações do censo demográfico realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), bem como as informações a respeito da importância dos censos ao longo da história e da implantação do IBGE como instituto responsável pela realização desse levantamento de dados. O objetivo é levar os alunos a perceber que a estatística está ligada às mais diversas áreas do conhecimento e que, por meio dela, é possível realizar previsões e divulgar informações de maneira eficiente. Se achar conveniente, verifique a possibilidade de realizar um trabalho em associação com a área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Geografia,** a fim de aprofundar as discussões acerca da importância dos censos populacionais realizados pelo IBGE. Nesse sentido, podem ser desenvolvidas propostas como a realização, no laboratório de informática, de um levantamento das pesquisas desenvolvidas pelo instituto, principalmente em relação à Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD). As informações podem ser coletadas no *site* do IBGE. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/pesquisa/pnad>. Acesso em: 7 jul. 2020.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e conversando com os colegas sobre esses conteúdos. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 93

- Durante os estudos a respeito de população e amostra, proponha aos alunos uma discussão sobre as vantagens e desvantagens da realização de pesquisas censitárias e pesquisas amostrais em relação à população brasileira. Compare os dois tipos de pesquisas, elencando situações em que uma é mais vantajosa do que a outra. Por exemplo, discuta a viabilidade de realizar uma pesquisa com toda a população a respeito das intenções de voto, considerando o tempo disponível e os recursos para a realização desse tipo de pesquisa.

BNCC Essas discussões envolvendo os conceitos de população e amostra podem contribuir para o desenvolvimento da **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, por permitir aos alunos compreender e refletir a respeito de informações transmitidas pela mídia relacionadas às pesquisas estatísticas, sobretudo as amostrais, e que fazem parte do cotidiano deles.

MODERNA

Página 95

- Ao trabalhar com a seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas usando a metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O trabalho com a tarefa 5 possibilita o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Educação para o trânsito** por envolver reflexões sobre a aplicação de conceitos estatísticos para a segurança veicular, visando reduzir os danos com base na ocorrência de acidentes.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, levando-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite aos alunos, se possível, que comentem quais eles pensam ser as vantagens dos estudos matemáticos relacionados aos conceitos envolvendo estatística, de modo que possam refletir a respeito da aplicabilidade deles na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

9 Gráficos e tabelas

Objetivos específicos

- Reconhecer os tipos mais comuns de gráficos e tabelas, identificando suas características, vantagens e desvantagens.
- Decidir qual tipo de gráfico é o mais adequado para representar melhor a situação em questão.
- Construir gráficos e compor tabelas a fim de facilitar e tornar mais eficaz a visualização e a interpretação rápida de um conjunto de dados.
- Perceber inadequações em gráficos e tabelas por omitir informações ou confundir a leitura dos dados.

Os conteúdos abordados nesse tema são gráficos e tabelas, ferramentas de grande utilidade na organização de informações nos mais diversos contextos. Nele, são apresentados os tipos mais utilizados de gráficos e tabelas, assim como a indicação de seus elementos, suas características e as situações em que podem ser mais úteis. Ao longo do tema, será exposto de modo esquemático as características de gráficos de barras, gráficos de linha, gráficos de setores, pictogramas e pirâmides etárias.

O estudo de gráficos e tabelas é importante para a formação dos alunos, uma vez que estão presentes em diversas situações do cotidiano. Por exemplo: no âmbito da ciência e da tecnologia, os conjuntos de dados devem ser organizados e analisados para fornecer conhecimentos na construção de uma tese ou na validação de uma teoria; já no campo da divulgação de notícias, principalmente pelas chamadas mídias (impressa, digital), há uma multiplicidade de informações que são compiladas em um esquema gráfico de fácil visualização e compreensão para todos; outra situação em que tabelas e gráficos são utilizados é no campo empresarial, em que valores devem ser comparados de modo rápido e efetivo. Assim, compreender a função desses gráficos e tabelas é um dos requisitos fundamentais para que os alunos se tornem membros de uma sociedade consciente e produtiva, desenvolvendo a capacidade interpretativa e o senso crítico.

BNCC No desenvolvimento dos conteúdos propostos nesse tema, os alunos têm a oportunidade de trabalhar com diversos tipos de gráfico, utilizando diferentes linguagens, como as linguagens visual e matemática, na interpretação e na disseminação de informações em variados contextos, conforme prevê a **Competência geral 4** da BNCC.

Além disso, o tema contempla a **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e a habilidade **EM13MAT102** ao trabalhar com a análise de tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

Páginas 96 e 97 **Sopa de letrinhas: gerações X, Y, Z, BB...**

- As páginas de abertura abordam a divisão das gerações de pessoas segundo a época em que nasceram, as chamadas gerações X, Y, Z e *Baby-Boomer* (BB). O choque entre gerações (isto é, as divergências de opiniões, valores, modo de viver e maneiras de interpretar a realidade) é algo presente na vida de todos. Conhecer as características de cada geração é uma boa oportunidade para entender as origens das diferenças de pensamento e, assim, encontrar meios de pacificar opiniões e aprender com as variadas experiências, aproveitando a diversidade positivamente.

MODERNA

- A classificação de pessoas por gerações é uma prática que vem se tornando cada vez mais comum em Estudos Sociais e de Ciências Humanas em geral. Trata-se de uma classificação que, em contraste com as definições por renda, orientação sexual, credo religioso ou nível de escolaridade, não varia com o tempo, já que o ano de nascimento de uma pessoa permanece o mesmo, independentemente das escolhas pessoais. Mencione aos alunos que essas categorizações são amplas e abstratas, de modo que uma pessoa nascida na geração Y, por exemplo, não necessariamente possui todas as características típicas de sua época. O que as gerações indicam são as características mais recorrentes na média dos indivíduos nascidos em determinada época, e não requisitos fixos para pertencer a uma ou outra geração.

  Não é possível definir valores exatos para a delimitação dessas gerações, sendo as classificações um tanto vagas e generalistas. Ainda assim, elas são utilizadas por vários ramos do conhecimento, como a Sociologia, a História e a Antropologia, pois facilitam a comunicação e conseguem reunir em um mesmo termo um conjunto complexo de transformações sociais, políticas, artísticas e culturais de um período histórico. A esse respeito, não é demais comentar que a conjuntura sociocultural de determinada época recebe o nome *zeitgeist* (ou "espírito da época"), que é uma síntese do clima intelectual e cultural do mundo naquele período.
- Se possível, incentive os alunos a refletir sobre o fato de que as transições entre as gerações não se dão de maneira abrupta, mas sim em evoluções gradativas ao longo dos anos.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Para complementar o trabalho com essas páginas, promova trabalhos em conjunto com algum professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do componente curricular **Geografia**. Converse com o professor desse componente e, juntos, verifiquem a possibilidade de comentar com mais detalhes as características das gerações X, Y, Z e BB, apontando aspectos históricos e socioculturais que marcaram essas gerações.

Aproveite para levantar reflexões a respeito dessas gerações estabelecendo relações com as culturas juvenis. Nesse sentido, avalie a possibilidade de ler para os alunos o texto a seguir, a respeito da geração Z.

> [...]
>
> Os indivíduos que fazem parte desta geração dificilmente concentram-se em uma única atividade e fazem várias coisas ao mesmo tempo. Ouvem música, veem televisão e jogam *on-line* com parceiros virtuais de várias partes do mundo.
>
> [...]
>
> Esses adolescentes nunca conceberam o mundo sem computador, *chats* e telefone celular e, em decorrência disso, são menos deslumbrados que os da geração Y com *chips* e *joysticks*. Sua maneira de pensar foi influenciada pela tecnologia. (CERETTA; FROEMMING, 2011).
>
> [...]

MENEZES, Nayra; MORAIS, Marizangela; RASSI, Werianny. Influência da Geração "Z" na relação de consumo. *Anais...* XII Congresso Nacional de excelência em gestão & III Inovarse – Responsabilidade social aplicada. 2016. p. 10-11. Disponível em: <https://www.inovarse.org/sites/default/files/T16_245.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2020.

BNCC O trabalho proposto no item **A** da página **97** solicita aos alunos que conversem com os pais ou responsáveis com o intuito de levantar informações sobre os costumes da geração Y. Tal proposta permite o exercício da empatia e do diálogo, respeitando o conhecimento e as opiniões de terceiros e valorizando as especificidades das diferentes gerações, contemplando, assim, a **Competência geral 9** da BNCC.

Páginas 98 a 101

- Ao trabalhar com as características de tabelas e gráficos, converse com os alunos a respeito da importância de apresentar as fontes utilizadas nas pesquisas. Na atualidade, com a popularização de meios de comunicação, como redes sociais e aplicativos de conversa, a transmissão de informações se tornou veloz, mas pouco criteriosa, favorecendo o fenômeno das chamadas *fake news* (notícias falsas). Explique por que a indicação de uma fonte de pesquisa confiável é um elemento essencial na credibilidade das informações.

Páginas 102 e 103 **Acessando tecnologias**

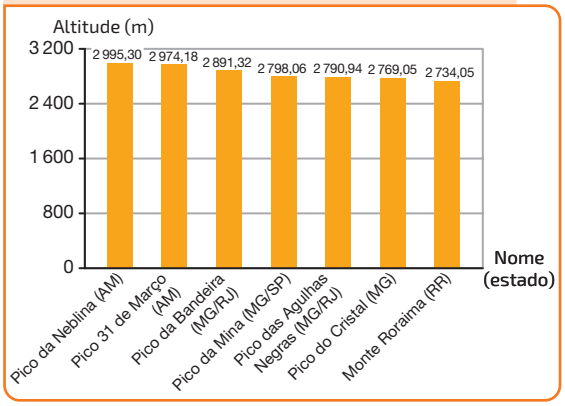
- Ao trabalhar o conteúdo dessas páginas, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips.**

  Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

NÃO OFICIAL

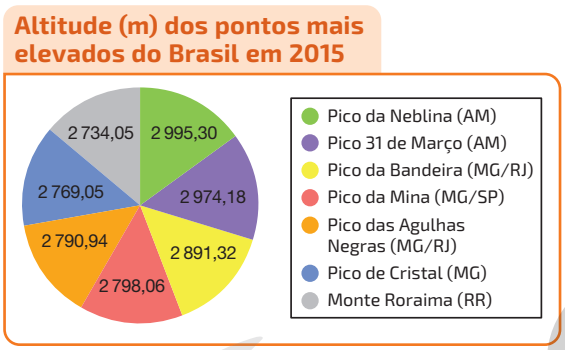
Agora é com você! **Resoluções**

1 Gráfico de barras verticais:



Fonte de pesquisa: ABDALA, Vitor. IBGE revê altitude de sete picos brasileiros: o da Neblina fica mais alto. *Agência Brasil*, Rio de Janeiro, 29 fev. 2016. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2016-02/ibge-reve-altitudes-de-sete-picos-brasileiros-pico-da-neblina-fica-mais-alto>. Acesso em: 29 jul. 2020.

- Gráfico de setores:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: ABDALA, Vitor. IBGE revê altitude de sete picos brasileiros: o da Neblina fica mais alto. *Agência Brasil*, Rio de Janeiro, 29 fev. 2016. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2016-02/ibge-reve-altitudes-de-sete-picos-brasileiros-pico-da-neblina-fica-mais-alto>. Acesso em: 29 jul. 2020.

Espera-se que os alunos respondam que o gráfico mais adequado para representar essas informações é o gráfico com barras verticais, pois ele possibilita uma noção visual imediata sobre a proporção entre as altitudes dos picos, permitindo uma rápida comparação. O gráfico de setores não é adequado, neste caso, porque não se trata de comparar as partes de um mesmo todo.

2 Resposta pessoal.

BNCC Ao propor o desenvolvimento de um trabalho que requer o uso de planilhas eletrônicas, nesse caso, o Calc, ou outros recursos tecnológicos para a construção de gráficos, os alunos são levados a compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação, além de diferentes tipos de linguagem, como a digital, para partilhar informações e divulgar conhecimentos, conforme preveem as **Competências gerais 4** e **5** da BNCC.

Esse tipo de abordagem possibilita aos alunos ter contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 104 a 107

- Na tarefa **4**, avalie a possibilidade de utilizar a metodologia ativa **Gallery walk** para desenvolver o trabalho com a questão apresentada com o destaque **Ser consciente**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Ao tratar da doação de sangue, contexto abordado na tarefa **2** da página **104**, espera-se despertar nos alunos um senso de coletividade, solidariedade e responsabilidade, enfatizando a característica altruísta desse ato, conforme aspectos da **Competência geral 10** da BNCC.

A tarefa **6** da página **106** contempla o tema contemporâneo transversal **Educação para a valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**. Nela, comenta-se a pluralidade de etnias indígenas no Brasil, destacando a proporção entre as mais populosas. Conhecer a diversidade da riqueza cultural brasileira é importante para uma formação cidadã plena e consciente, promovendo o respeito a todas as etnias e culturas.

A tarefa **8** da página **106**, ao tratar da evolução do número de casos confirmados de Covid-19 em alguns países entre a 20ª e 30ª semana epidemiológica, permite abordar o tema contemporâneo transversal **Saúde**. Converse com os alunos sobre o papel da ciência em épocas de pandemias, como a de Covid-19, ressaltando a necessidade de desenvolvimento de vacinas e tratamentos médicos eficientes para a população. Assim, contempla-se aspectos da **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor

MODERNA

soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

Converse também com os alunos sobre como as ferramentas matemáticas ajudam na construção de modelos que possibilitam compreender a evolução dos números de casos e, assim, fazer previsões e tomar decisões com relação a ações que possam ser implementadas a fim de reduzir a evolução dos casos. Mais informações podem ser encontradas no *site* do Ministério da Saúde. Disponível em: <https://www.saude.gov.br/boletins-epidemiologicos>. Acesso em: 7 ago. 2020.

Páginas 108 e 109

- As inadequações em gráficos e tabelas podem ser acidentais ou propositais. Isso significa que podem ocorrer casos em que pessoas apresentem dados corretos, mas intencionalmente dispostos de modo impreciso, com o intuito de confundir quem os utiliza, simplesmente para satisfazer seus interesses.

  Enfatize esse fato aos alunos, promovendo uma conversa e destacando a importância da objetividade, da lisura e da transparência no compartilhamento de informações, principalmente por parte das mídias e de órgãos oficiais, os quais são responsáveis pela formação de opinião e pela instrução de milhões de pessoas.

  Aproveite a oportunidade para perguntar aos alunos se eles já se depararam com pesquisas enviesadas, isto é, visivelmente tendenciosas ou com resultados apresentados de maneira inadequada ou ambígua, induzindo a interpretações não condizentes com a realidade.
- No trabalho com as tarefas do tópico **Exercícios e problemas**, oriente os alunos a identificar incoerências, carências de dados e até mesmo informações não confiáveis. Se julgar conveniente, peça a eles que, em grupos, pesquisem os dados apresentados em algumas dessas tarefas em outras fontes e comparem os dados obtidos.

- Ao fim do trabalho com o tema, verifique a conveniência de usar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

10 Medidas de tendência central

Objetivos específicos

- Reconhecer as medidas de tendência central: média aritmética, média aritmética ponderada, moda e mediana.
- Compreender as medidas de tendência central como valores que sintetizam um conjunto de dados em um único número.
- Interpretar os valores indicados pelas medidas de tendência central, identificando o significado de cada uma delas e em que elas diferem umas das outras.
- Reconhecer a importância das medidas de tendência central para facilitar a apreensão de um conjunto muito grande de dados.
- Identificar a melhor medida de tendência central a ser utilizada para representar uma amostra.

O tema trata das medidas de tendência central, nomeadamente a média aritmética simples, a média aritmética ponderada, a moda e a mediana. Tais medidas, muito utilizadas em situações do cotidiano e também em contextos técnicos e científicos dos mais diversos, são mecanismos práticos para, com base em alguma regra bem definida, resumir ou sintetizar um conjunto de dados. Cada uma dessas medidas se vale de determinado enfoque para realizar a síntese pretendida, de modo a conseguir caracterizar o conjunto por meio de um único valor representativo.

Compreendendo em que sentido as medidas de posições resumem um conjunto de dados, os alunos podem comparar as diferenças entre elas, inclusive identificando suas limitações, para, então, poder determinar qual delas é melhor em um caso ou em outro. Ao final do tema, deve ficar evidente para os alunos que, ao passo que as medidas de tendência central (também chamadas "medidas de posição") têm a praticidade de substituir até mesmo uma enorme quantidade de informações e de reunir em um único número informações de grande utilidade, essas mesmas medidas, por serem sínteses, e não representações completas, também podem acarretar chances de confusão na interpretação.

O registro matemático adequado de média, moda e mediana, bem como o cálculo dessas medidas em várias circunstâncias, pode tornar a percepção dos alunos aguçada o suficiente para as principais situações com as quais eles podem se deparar.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos quanto às medidas de tendência central, proponha a dinâmica descrita a seguir.

MODERNA

Com alguns dias de antecedência, peça aos alunos que levem para a sala de aula uma fatura de energia elétrica. Se preferir, apresente a eles dados hipotéticos. Observando o histórico da quantidade de quilowatts consumidos em cada mês, oriente-os a calcular a média de consumo e, em seguida, construir um gráfico de linhas. Pergunte a eles se em algum mês o consumo de energia foi muito acima ou muito abaixo da média e o que pode ter ocasionado esse fato.

É importante também que os alunos percebam que não necessariamente a média aritmética corresponde a algum dos valores que a gerou. Instrua-os a fazer comentários sobre as possíveis interpretações que eles consigam extrair da relação entre os dados e o valor da média. Alguns questionamentos que podem auxiliá-los nesse momento são: Houve discrepância entre os valores? A média é um bom representativo para o consumo geral de energia elétrica naquela residência?

Mais informações podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 110 e 111 Reduzindo distâncias

- As páginas de abertura tratam do acelerado processo de interconexão entre todos os povos por meio de tecnologias como rádio, televisão, telefone e internet, bem como de meios de transporte cada vez mais rápidos e disseminados por todas as regiões. Essas tendências do mundo contemporâneo são analisadas com base no pensamento do filósofo Herbert Marshall McLuhan, um dos pioneiros do pensamento crítico acerca de possíveis revoluções no modo de vida da humanidade em razão de computadores e telecomunicações. No cerne do pensamento de McLuhan, está a máxima "o meio é a mensagem", querendo com isso denotar que o meio é um elemento importante da comunicação, e não apenas um canal de passagem ou um mero veículo de transmissão, como até então os estudos de sua época faziam parecer, desconsiderando o efeito do meio sobre o conteúdo. Assim, para McLuhan, cada meio de comunicação ou difusão tem características próprias que afetam ou até mesmo determinam o conteúdo das mensagens que por ele se propagam (dizia ele que "nós nos tornamos aquilo para o que olhamos; nós modelamos nossas ferramentas e, depois, nossas ferramentas nos modelam").

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Mais informações a respeito dessa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro da Aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Para complementar o assunto dessas páginas, promova trabalhos em conjunto com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente dos componentes curriculares **Geografia, Filosofia** e **Sociologia**. Verifique a possibilidade de apresentar trechos de textos de Marshall McLuhan para realizar uma leitura crítica coletiva, com posteriores debates entre alunos e professores. Também pode ser construtivo apresentar documentários e vídeos sobre os desafios e os problemas da comunicação na vida contemporânea, bem como sobre o "encurtamento das distâncias" nos tempos atuais, refletindo sobre as novas configurações que as sociedades estão adotando, apontando as consequências desse processo nas relações humanas em geral.

BNCC O tema abrange a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e a habilidade **EM13MAT316**, exercitando nos alunos a resolução de problemas que envolvem tanto o cálculo matemático quanto a interpretação correta das medidas de tendência central média, moda e mediana. Tais abordagens têm a finalidade de capacitar os alunos a utilizar estratégias e conceitos matemáticos em situações práticas, promovendo a análise de dados, a plausibilidade de resultados, as adequações de soluções propostas e o incremento de uma argumentação lógica e racional cada vez mais consistente.

Resoluções e comentários

C $\frac{50\,000\,000}{16} = 3\,125\,000$

Esse valor representa 3 125 000 usuários por ano. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos relacionem esse valor à média aritmética anual de novos usuários ou que esse resultado representa a quantidade de novos usuários de computador a cada ano, caso fosse considera uma taxa de crescimento constante.

D Indicando os valores, temos: 2%, 5%, 3%, 2%, 4%, 3%, 3%, 6%, 3%. Desse modo:

$$\frac{2+5+3+2+4+3+3+6+3}{9} = \frac{31}{9} \simeq 3{,}44$$

Ou seja, aproximadamente 3,44%.

Espera-se que os alunos relacionem esse valor à média de crescimento anual de usuários de internet no Brasil, ou seja, a cada ano, houve, em média, um aumento aproximado de 3,4% em relação aos usuários de internet.

EM ABERTURA

Páginas 112 a 115

- Ao abordar o conceito de média, é importante destacar para os alunos que nem sempre é adequado tomar a média como um representativo seguro de todos os dados de um conjunto. Quando existem discrepâncias muito grandes entre os elementos, a média pode ser severamente influenciada por valores extremos. Para ilustrar esse fato, peça a eles que considerem as informações sobre os salários de cinco funcionários de certa empresa conforme o quadro a seguir.

Funcionário	Salário mensal
A	R$ 1 100,00
B	R$ 1 600,00
C	R$ 1 840,00
D	R$ 3 700,00
E	R$ 24 000,00

Calculando a média salarial, temos:

$$\bar{x} = \frac{1\,100 + 1\,600 + 1\,840 + 3\,700 + 24\,000}{5} = 6\,448$$

Assim, é possível afirmar que esses cinco funcionários recebem, em média, R$ 6 448,00. Porém, ao fazer essa afirmação, uma pessoa sem conhecimentos de Estatística e medidas de tendência central poderá supor que os cinco funcionários recebem salários que chegam a R$ 6 448,00, o que não é verdade.

Embora os cálculos matemáticos estejam corretos, a média não representa a realidade salarial desses funcionários, pois a maioria deles recebe um ordenado bem abaixo da média, que é elevada por causa de um único funcionário que recebe um valor muito elevado em relação aos demais.

Aproveite a oportunidade e diga aos alunos que valores muito diferentes dos demais são denominados "valores discrepantes". Proponha, ainda, que eles calculem a média desconsiderando o valor discrepante, para que em seguida comparem a substancial diferença entre elas.

- Verifique se os alunos compreendem a diferença entre média, moda e mediana, apresentando situações em que é mais conveniente utilizar uma ou outra medida.

A média aritmética é a medida de tendência central mais utilizada por ser aplicada em cálculos posteriores, como o das medidas de dispersão. Além disso, a média pode ser calculada por meio dos dados "brutos", sem que haja necessidade de qualquer tipo de ordenação ou agrupamento, e leva em consideração todos os dados obtidos.

A mediana é preferível quando se pretende conhecer o ponto médio da distribuição ou quando os valores extremos diferem de maneira drástica dos outros dados da amostra, podendo afetar sensivelmente a média.

A moda é utilizada quando queremos determinar o valor predominante em um conjunto de dados.

Sugestão de avaliação

Para avaliar como os alunos estão lidando com os conteúdos estudados até o momento, apresente a eles o conjunto de dados a seguir, que representa a altura, em metros, dos atletas de uma equipe de basquetebol e peça que calculem a média aritmética e a mediana dos dados apresentados.

2,11	1,98	2,11	2,11	2,10
2,00	2,09	2,10	2,10	1,86

Resoluções e comentários

Calculando a média aritmética, temos:

$$\bar{x} = \frac{2{,}11 + 1{,}98 + 2{,}11 + 2{,}11 + 2{,}10 + 2{,}00 + 2{,}09 + 2{,}10 + 2{,}10 + 1{,}86}{10} \Rightarrow \bar{x} = \frac{20{,}56}{10} \Rightarrow \bar{x} = 2{,}056$$

Para calcular a mediana, inicialmente, organizamos os valores do conjunto em rol:

1,86	1,98	2,00	2,09	2,10	2,10	2,10	2,11	2,11	2,11

Nesse caso, apesar de a quantidade de valores do conjunto ser par, $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$ são iguais. Assim:

$$Md = 2{,}10$$

Portanto, a média é 2,056 e a mediana é 2,10.

Explique que, nesse caso, é mais interessante utilizar o valor da mediana para representar esse conjunto de dados, visto que a maioria dos dados (altura dos atletas) é maior ou igual a 2,056. A média, nesse caso, foi influenciada pelo valor extremo 1,86.

MODERNA

Página 117 Acessando tecnologias

- No trabalho com essa página, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Design thinking**. Para tanto, apresente aos alunos o problema da seção **Resolvendo por etapas** ou o problema do boxe **Agora é você quem resolve!** como um desafio antes do início do tema.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.
- Esse tipo de abordagem possibilita aos alunos entrar em contato com o conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Agora é você quem resolve! Resoluções e comentários

1 Não, pois as três modas fornecidas são referentes às celulas selecionadas. Caso mais células fossem selecionadas, outra(s) moda(s) poderia(m) ser fornecida(s).

2 Com o auxílio da planilha eletrônica Calc, calculamos a média, a moda e a mediana do conjunto de dados da maneira a seguir.

A) Inicialmente, preenchemos as células com os dados referentes ao tempo em que João passou no *videogame*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	62	55	0	20	80	0	20	55	68	95
2	30	55	0	0	120	55	60	49	32	30
3	88	57	65	45	36	38	42	100	25	37

B) Em seguida, digitamos "Média", "Moda" e "Mediana" nas células **A5**, **B5** e **C5**, respectivamente.

C) Para calcular a média do conjunto de dados, digitamos = MÉDIA(A1:J3) na célula **A6** e pressionamos a tecla *Enter*.

D) Para calcular a moda do conjunto de dados, selecionamos um intervalo com uma quantidade de células igual à quantidade de modas que desejamos localizar no conjunto de dados. Nesse caso, selecionamos o intervalo **B6:B8**, contendo três células. Em seguida, digitamos = MODO.MULT(A1:J3) e pressionamos *Ctrl*+*Shift*+*Enter*.

E) Para calcular a mediana do conjunto de dados, digitamos = MED(A1:J3) na célula **C6** e pressionamos a tecla *Enter*.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	62	55	0	20	80	0	20	55	68	95
2	30	55	0	0	120	55	60	49	32	30
3	88	57	65	45	36	38	42	100	25	37
4										
5	Média	Moda	Mediana							
6	47,3	55	47							
7		0								
8		#N/DISP								

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Para isso, recapitule brevemente o significado das medidas de tendência central, pedindo que comentem as características dessas medidas e as diferenças entre elas, mencionando contextos em que podem ser empregadas ou situações em que eles já tenham se deparado com alguma delas.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

11 Medidas separatrizes

Objetivos específicos

- Reconhecer as medidas separatrizes, em especial a mediana, os quartis, os decis e os percentis.
- Identificar a posição das medidas separatrizes em um conjunto ordenado de dados e calcular seus valores exatos.
- Entender as medidas separatrizes como parâmetros de agrupamento de dados.
- Interpretar o significado de determinado valor e se este pertence ou não a uma posição específica de quartis, decis e percentis.

O tema aborda as medidas separatrizes, nomeadamente a mediana, os quartis, os decis e os percentis. Essas medidas são de grande importância na estatística descritiva, pois oferecem maneiras práticas e eficazes para organizar dados.

O estudo das medidas separatrizes se justifica pelo fato de essas medidas conferirem informações extras na análise de um conjunto de dados, principalmente quando são trabalhados conjuntos muito grandes. As medidas de tendência central já estudadas (média, moda e mediana), em certas ocasiões, podem ser insuficientes

MODERNA

para representar adequadamente um conjunto de dados. Isso acontece porque essas medidas, em especial a média, podem ser afetadas de maneira exagerada por alguns poucos valores extremos. Além disso, nenhuma dessas medidas é capaz de dar sequer uma ideia quanto à simetria ou à assimetria da distribuição dos dados, podendo induzir ao erro. Para sanar essas dificuldades, utilizam-se as medidas separatrizes, que conseguem ordenar e agrupar dados e servir de parâmetros muito úteis para que haja conhecimento quanto à proporção com que os valores estão distribuídos.

O tema trabalha não só a identificação e o cálculo da posição de um quartil em um grupo, mas também o significado que existe no fato de um dado elemento fazer parte de determinado quartil. Por isso, conhecendo os valores dos quartis de um conjunto, pode-se ter uma boa noção quanto à distribuição de seus elementos, isso sem necessidade de acesso à totalidade dos dados (que, em muitos casos, pode ser extremamente numerosa).

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos sobre as medidas separatrizes, apresente-lhes um conjunto de dados com alguns valores discrepantes e mostre que apenas o valor da média desse conjunto é um número inapropriado para representar todo o conjunto. Em seguida, peça a eles que deem sugestões de como fornecer, resumidamente, informações mais completas a respeito do conjunto, sem que para isso seja preciso indicar a totalidade dos dados. Sugira a eles que disponham os dados em ordem crescente e os dividam em quatro subconjuntos de igual tamanho, anotando os pontos intermediários entre um subconjunto e outro. Em seguida, incentive os alunos a apresentar interpretações para esses valores, explicitando o que significa o fato de certo dado pertencer a um subconjunto ou a outro, e quais conclusões podem ser tiradas dessas informações.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 120 e 121 Direito ao voto no Brasil

- As páginas de abertura tratam do direito ao voto no Brasil. O direito ao voto livre e secreto, sem restrições de gênero, raça, classe ou credo, é uma conquista historicamente recente em nosso país, consubstanciando um dos pilares mais importantes para a efetivação da democracia. Após um longo histórico de restrições ao voto a alguns setores da sociedade em detrimento de outros e à prática dos chamados "votos de cabresto" nos anos iniciais da República – ou seja, o acesso a cargos eletivos por meio do abuso do poder econômico –, foi apenas com o advento da Constituição da República Federativa do Brasil, de 1988, que se consolidou o voto nos moldes da atualidade. A Constituição Federal como lei máxima de um país, destinada a estruturar a forma do Estado e de seu governo, organizar suas normas jurídicas, impor limites aos poderes e estabelecer os direitos fundamentais do ser humano, explicitou em seu art. 14 que "a soberania popular será exercida pelo sufrágio universal e pelo voto direto e secreto, com valor igual para todos". Isso significa que nenhum poder político pode emanar senão da vontade do povo, devendo ser exercido pelo povo e para o povo, sem que a importância do voto de um cidadão possa ser maior do que a de outro cidadão, independentemente de suas posições sociais e níveis econômicos.

  Importante passo para a conquista do direito social ao voto foi o de 1984 denominado Diretas Já, um movimento civil de reivindicação por eleições presidenciais diretas no Brasil, buscando acabar com o sistema indireto, que não necessariamente representava a vontade do povo. Outros movimentos de grande relevância foram as lutas sociais que culminaram no direito ao voto por parte das mulheres, formalizado no Brasil em 1932, seguindo a tendência global de estender o sufrágio (direito de votar) às mulheres, de acordo com um movimento que ficou conhecido como sufrágio feminino.

  > [...]
  >
  > No Brasil, as discussões sobre o papel da mulher se intensificam a partir do final do século XIX. O panorama mundial era outro: os Estados nacionais começavam a se estabelecer, o individualismo político e filosófico vicejava. Numa sociedade que passa a se ver formada por cidadãos, não por grupos, uma questão se coloca: por que excluir metade dos indivíduos do processo eleitoral?
  >
  > [...]
  >
  > Contudo, não só mulheres participaram da luta pelo sufrágio feminino. Intelectuais, políticos, religiosos atuaram no movimento que desembocou no direito ao voto da mulher em 1932.

  CAJADO, Ane Ferrari Ramos; DORNELLES, Thiago; PEREIRA, Amanda Camylla. *Eleições no Brasil*: uma história de 500 anos. Brasília: Tribunal Superior Eleitoral, 2014. p. 72-73. Disponível em: <http://www.tse.jus.br/hotsites/catalogo-publicacoes/pdf/tse-eleicoes-no-brasil-uma-historia-de-500-anos-2014.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2020.

- Sobre o voto feminino, é importante salientar que ainda nos dias atuais é discutido se os direitos políticos das mulheres estão de fato cristalizados materialmente ou se apenas são assegurados de modo formal, "no papel", sem concretização prática. Um dos fundamentos dessa discussão reside no fato de que os direitos políticos – não apenas o de votar, mas também de ser votado e vir a exercer poderes políticos representativos – não se distribuem de modo equitativo entre homens e mulheres, havendo grande desproporção de representatividade entre os gêneros em praticamente todos os setores da política, o que contrasta com a proporção mais homogênea de homens e mulheres do eleitorado.

  Toda a análise de processos eleitorais suscita a neces-

MODELO

sidade prática de organizar dados, avaliar o escrutínio de votos, averiguar as proporções entre os conjuntos de eleitores e realizar sensos estatísticos que mensurem informações de grande importância para o governo e para o povo. Essa análise de dados não pode ocorrer pela simples obtenção de médias e outras medidas de tendência central, as quais possuem limitações inerentes. Portanto, faz-se necessário o estudo das chamadas medidas separatrizes, que fornecem valores que proporcionam informações mais completas sobre a distribuição dos dados de um conjunto.

BNCC No trabalho com o direito ao voto, os alunos são levados a apropriar-se de conhecimentos relativos a outras áreas, no caso, o sistema eleitoral brasileiro, por meio do qual eles desenvolvem uma visão crítica desse processo e discutem, com o auxílio dos colegas e do professor, o papel da mulher na política, conforme orienta a **Competência geral 6** da BNCC.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Para isso, peça antecipadamente aos alunos que coletem dados quanto à altura das pessoas na escola ou mesmo da comunidade onde vivem. Obtidos esses dados, reúna-os em duplas e oriente-os a buscar maneiras convenientes de organizar esses dados em grupos com a mesma quantidade de elementos.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Sala dos professores

Para complementar as tarefas dessas páginas, promova uma aula em conjunto com algum professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente dos componentes curriculares **História** e **Geografia.** Para tanto, promova apresentações e debates, com a participação dos alunos, a respeito de assuntos como: a necessidade do voto para a efetivação da democracia; a importância de o voto – como direito e dever do cidadão – ser levado a sério e praticado com consciência; os motivos que justificam a obrigatoriedade do voto, inclusive para questionar se é melhor ser obrigatório ou facultativo; e a representatividade de minorias sociais em processos eleitorais.

Resolução e comentários

C $\frac{15\,218\,308}{77\,184\,764} \simeq 0{,}197 = 19{,}7\%$

Portanto, a porcentagem de mulheres votantes na faixa etária de 60 anos ou mais é 19,7%.

Página 125

- A fim de complementar as tarefas propostas nesse tema, verifique a possibilidade de desafiar os alunos a encontrar uma fórmula geral para identificar a posição de um p-quantil qualquer, isto é, um agrupamento dos dados em p partes com igual quantidade de elementos. Utilizando quartis, decis e percentis como passos de indução, eles podem, ainda, realizar divisões em quintis (que dividem os dados em 5 partes iguais), octis (que dividem os dados em 8 partes iguais) e assim por diante, até encontrarem uma generalização.

  Assim procedendo, espera-se que os alunos descubram uma fórmula equivalente a $P(p)_i = \frac{i \cdot n}{p}$, em que p é a quantidade de divisões do quantil (por exemplo, $p = 4$ para os quartis e $p = 10$ para os decis), i é a posição do quantil, n é a quantidade de elementos do conjunto e $P(p)_i$ representa a i-ésima posição do p-quantil.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule as motivações para o estudo das medidas separatrizes, destacando suas vantagens para a organização dos dados e na aquisição de informações complementares às fornecidas pelas medidas de tendência central. Assim, peça a eles que comentem os pontos mais interessantes do tema, discutindo as situações práticas em que o agrupamento de dados em quantis possa vir a ser conveniente.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

12 Medidas de dispersão

Objetivos específicos

- Reconhecer e calcular as medidas de dispersão: amplitude, desvio médio, variância e desvio padrão.
- Compreender distribuição de frequência e intervalos de classes, relacionando-os às medidas de tendência central.
- Calcular medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes.
- Compreender e construir tabelas de distribuição de frequência e histogramas.
- Resolver problemas envolvendo histograma, distribuição de frequência, medidas de dispersão e medidas de tendência central.
- Reconhecer outras formas de gráficos e diagramas para representar um conjunto de dados, como o *box-plot* e suas características.

MODERNA

O tema trata das medidas de dispersão, que sumarizam a variedade de dados em um conjunto, apresentando informações mais completas e permitindo comparações mais criteriosas do que aquelas feitas com base apenas nas medidas de tendência central. Para tanto, são estudados a amplitude, o desvio médio, a variância e o desvio padrão, a fim de que os alunos possam conhecer o significado de cada uma dessas medidas, bem como exercitar o cálculo e a interpretação por meio de vários exemplos e problemas práticos.

A utilidade das medidas de dispersão surge, por exemplo, quando se observa que conjuntos muito diferentes entre si podem, por coincidência, ter a mesma média ou a mesma mediana. Em casos assim, fica evidente que, sozinhas, as medidas de tendência central não são capazes de fornecer informações quanto à variedade dos dados. Verifica-se, portanto, a necessidade de medidas que, por algum critério bem definido, sintetizem a variedade (isto é, a dispersão) dos dados de um conjunto.

BNCC Nesse tema, ao trabalhar a construção e a interpretação de tabelas e gráficos de frequências, com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, contempla-se a habilidade **EM13MAT406** da BNCC. Desse modo, são abordados aspectos da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Páginas 126 e 127 A participação feminina na Ciência

- As páginas de abertura trazem informações estatísticas sobre o acesso das mulheres ao Ensino Superior e a participação delas na Ciência, a fim de promover uma discussão acerca dos motivos pelos quais existe disparidade entre a proporção de homens e de mulheres em atividades de pesquisa científica.

  Apesar de haver nos últimos anos um aumento na quantidade de pesquisadoras do sexo feminino, ainda existem entraves sociais e culturais que dificultam a plena igualdade de direitos e oportunidades entre os gêneros nos mais variados aspectos da vida, inclusive no que tange ao incentivo à educação.

  Embora na atualidade a invisibilidade feminina, em contextos científicos e profissionais, seja menos acentuada, em um passado recente eram raríssimas as oportunidades de desenvolvimento educacional para mulheres na maior parte do mundo.

  Por essa razão, é importante lutar pelo reconhecimento do protagonismo feminino, pela igualdade real (e não apenas formal) entre os gêneros e pela conscientização das pessoas, a fim de contribuir para uma sociedade verdadeiramente justa e igualitária.

- Sobre esse assunto, uma história que pode inspirar os alunos é a de Sophie Germain.

  Nascida em Paris em 1776, Sophie mostrou interesse pela Matemática ao ler a obra Histoire des Mathematiques (História da Matemática), de Jean-Étienne Montucla, e conhecer detalhes sobre a vida e a obra de Arquimedes. Contudo, na época, as mulheres não eram incentivadas a estudar, e sim a se casar, ter filhos e cuidar da casa, deixando em menor importância os estudos ou o protagonismo em uma carreira profissional remunerada. Apesar de Sophie demonstrar, desde cedo, talento para a Matemática e passar dias e noites estudando, conta-se que, a princípio, os pais desestimulavam a jovem, a ponto de nem mesmo fornecer velas para que ela pudesse estudar à noite. Após alguns anos, contudo, eles perceberam que Sophie devotaria sua vida à Matemática custando o que custasse, e, então, deram-lhe apoio financeiro e até contrataram professores particulares.

  Aos 28 anos, demonstrando um talento notável e uma perseverança surpreendente, Sophie decidiu frequentar a École Polytechnique de Paris, prestigiada instituição de ensino e pesquisa que, no entanto, só aceitava o ingresso de pessoas do gênero masculino. Apesar dessa restrição, ela descobriu que a universidade incentivava colaborações, via correspondência, de pessoas de fora. Foi então que Sophie Germain adotou um pseudônimo masculino – Monsieur LeBlanc – e passou a enviar observações para alguns professores.

  Escondendo o fato de ser mulher, ela manteve correspondência com grandes nomes da Matemática, como Joseph-Louis Lagrange e Carl Friedrich Gauss. Quando as correspondências começaram a se tornar insuficientes para o progresso das conversas matemáticas, Lagrange ficou tão impressionado com a inteligência do "Monsieur LeBlanc" que fez questão de conhecer pessoalmente o tão extraordinário estudante.

  Sophie temia que o respeitável matemático ficasse com raiva dela, mas ele ficou feliz em descobrir que Monsieur LeBlanc, na verdade, era uma *mademoiselle* (isto é, uma mulher). E Gauss, demonstrando também um espírito muito a frente de seu tempo, ficou entusiasmado com a descoberta.

  Fonte de pesquisa: SINGH, Simon. *Os segredos matemáticos dos Simpsons*. Trad. Catharina Pinheiro. Rio de Janeiro: Record, 2016. p. 97-98.

  Sophie tornou-se uma importante figura na história da Matemática, havendo inclusive uma classe de números primos denominados em sua homenagem: os primos de Germain, que são primos p tais que $2p + 1$ também é primo (5, por exemplo, é um primo de Germain, já que $2 \cdot 5 + 1 = 11$ também é primo, mas 7 não é um primo de Germain, pois $2 \cdot 7 + 1 = 15$ não é primo).

EM MODERNA

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Peça aos alunos que se reúnam em duplas e façam uma pesquisa, na própria escola ou na comunidade em que moram, pedindo às pessoas que citem nomes de cientistas famosos, de qualquer área. Em seguida, oriente-os a organizar esses dados de maneira a evidenciar as proporções entre nomes masculinos e nomes femininos citados nas respostas, destacando as frequências relativas entre essas duas classes.

  Além disso, durante o desenvolvimento das questões do **Ser consciente**, da página **127**, avalie a possibilidade de usar a metodologia ativa **Gallery walk**. Essa metodologia favorece a aprendizagem social, cognitiva e construtivista, bem como a expressão de opiniões, ideias e experiências dos alunos.

  Mais informações a respeito dessas metodologias ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Ao abordar a luta pelo protagonismo feminino em diversos setores, recorrendo à exposição de fatos históricos do mundo social para explicar problemas atuais, como a desigualdade de gênero, aborda-se a **Competência geral 1** da BNCC.

Páginas 128 a 130

- Ao trabalhar com o conceito de desvio médio, enfatize aos alunos a diferença entre "desvios" e "desvio médio": o desvio é uma medida relativa para cada um dos dados do conjunto, variando de elemento para elemento, ao passo que o desvio médio é uma medida para o conjunto como um todo.
- Caso julgue pertinente, instrua os alunos a verificar se, de fato, a soma dos desvios é sempre igual a zero. Após apresentar alguns exemplos numéricos, leve-os a perceber algebricamente que, tomando um conjunto $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ com n elementos, sendo $\bar{x}$ a média aritmética dos elementos desse conjunto, tem-se que a soma dos desvios é dada por:

$$\underbrace{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + ... + (x_n - \bar{x})}_{n \text{ parcelas}} =$$

$$= x_1 + x_2 + ... + x_n - n \cdot \bar{x} =$$

$$= (x_1 + x_2 + ... + x_n) - n \cdot \left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) =$$

$$= (x_1 + x_2 + ... + x_n) - (x_1 + x_2 + ... + x_n) = 0$$

- Além disso, indique aos alunos a relação intuitiva existente entre o módulo de um número real com a distância desse número na reta real, de modo que $|x_n - \bar{x}|$ pode ser entendido como a distância de x_n a $\bar{x}$. Desse modo, é possível interpretar o desvio médio como a média das distâncias entre os elementos de um conjunto com a média aritmética desse mesmo conjunto. Assim, se o desvio médio de um conjunto das alturas, em metros, de um grupo de pessoas é 0,13, entende-se que, em média, os indivíduos desse grupo têm alturas 0,13 maiores ou menores do que a altura média.
- Tanto o desvio médio quanto a variância são medidas que estimam a dispersão dos dados em um conjunto. Quanto maior o desvio médio ou a variância, maior é a dispersão dos dados, isto é, menos homogêneo é o conjunto de dados. Contudo, em razão da diferença nas opções de cálculo, pode ocorrer, na comparação entre dois conjuntos, de uma das medidas indicar diferença de homogeneidade enquanto a outra, equivalência de homogeneidades. Para ilustrar esse fenômeno, se julgar pertinente, apresente aos alunos o exemplo a seguir.

  Considere os conjuntos $A = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ e $B = \{3, 5, 5, 7\}$, cujas médias são, ambas, iguais a 5. Assim, temos:

- $Dm(A) = \frac{|3-5| + |4-5| + |5-5| + |6-5| + |7-5|}{5} = \frac{6}{5} = 1{,}2$
- $Dm(B) = \frac{|3-5| + |5-5| + |5-5| + |7-5|}{4} = \frac{4}{4} = 1$

  Assim, pelo critério do desvio médio, B é mais homogêneo do que A. Por outro lado:

- $V(A) = \frac{(3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$
- $V(A) = \frac{(3-5)^2 + (5-5)^2 + (5-5)^2 + (7-5)^2}{4} = \frac{8}{4} = 2$

  Isso indica que, pelo critério da variância, ambos os conjuntos, A e B, são igualmente homogêneos.
- Ao abordar a relação entre variância e desvio padrão $\left(Dp = \sqrt{V}\right)$, explique aos alunos que variância é uma medida correspondente ao quadrado da dimensão dos dados a que ela se refere. Portanto, se os dados são expressos em m, por exemplo, a variância é expressa em m^2. Esse fato pode causar problemas de interpretação, razão pela qual, na prática, é mais comum usar a medida desvio padrão, que preserva a mesma dimensão (isto é, a mesma unidade de medida) dos dados aos quais se refere.

Fonte de pesquisa: MORETTIN, Pedro Alberto; BUSSAB, Wilton de Oliveira. *Estatística Básica*. 8 ed. São Paulo: Saraiva, 2013. p. 40.

MODERNA

Páginas 131 e 132

BNCC A tarefa **9** da página **132** propõe uma dinâmica ativa de coleta, análise e divulgação de dados com o intuito de aplicar os conhecimentos matemáticos em ações relevantes à sociedade. Dessa maneira, promove-se o planejamento e a execução de pesquisas amostrais, além da comunicação de resultados estatísticos por meio dos conceitos estudados, contemplando a habilidade **EM13MAT202** da BNCC e aspectos da **Competência específica 2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Por se tratar de uma tarefa em grupo, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

As tarefas da seção **Exercícios e problemas** abordam a habilidade **EM13MAT316** da BNCC, ao levar os alunos a resolver e a elaborar problemas envolvendo cálculos e interpretação das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão). Assim, são abordados aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Páginas 134 a 138

BNCC Na tarefa **12** da página **134**, ao abordar o efeito do uso de aparelhos eletrônicos na qualidade do sono, destaque aos alunos a importância de se ter boas noites de sono, com pelo menos oito horas ininterruptas de descanso, contemplando o tema contemporâneo transversal **Saúde**.

Explique aos alunos que dormir bem é fundamental para o bem-estar do corpo e da mente, sobretudo na adolescência, época de crescimento que exige mais horas de sono do que a média recomendada. Por isso, é natural (e até benéfico) que os adolescentes durmam em média 10 horas diárias, considerando as especificidades de cada indivíduo. Destaque ainda que tanto o excesso quanto a falta de sono podem fazer mal à saúde como um todo.

Sugestão de avaliação

Para avaliar como os alunos estão lidando com os conteúdos estudados, elabore mais questões relacionadas às tarefas dessa página. Escreva-as na lousa e peça que as copiem no caderno. Depois, oriente-os a comentar com os colegas as respostas obtidas.

Uma sugestão é complementar a tarefa **12** perguntando qual é a quantidade de alunos de 14 a 17 anos do grupo de estudo em questão. Verifique se todos obtêm a resposta 32 e, caso algum deles apresente uma resposta diferente, peça que explique os procedimentos usados, identificando as dificuldades encontradas.

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O trabalho com contextos relacionados à saúde, como o cálculo do Índice de Massa Corporal (IMC) na tarefa **18**, permite a conscientização dos alunos quanto à necessidade de conhecer e cuidar da própria saúde física, conforme orienta a **Competência geral 8** da BNCC.

Páginas 141 a 145

BNCC Ao trabalhar com a interpretação e a comparação de conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma e *box-plot* de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para a análise, contempla-se a habilidade **EM13MAT407** da BNCC. Desse modo, são abordados aspectos da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de usar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, levando-os a refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule os principais pontos do tema e peça-lhes que comentem as aprendizagens que consideram mais relevantes, expressando, com base nos estudos, se sentem maior confiança para interpretar dados estatísticos conscientemente. Solicite aos alunos que relatem situações práticas nas quais eles enxergam possibilidades de aplicação dos conhecimentos construídos ao longo desse tema enquanto receptores de informações estatísticas por parte da mídia. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MANUAL DO PROFESSOR

13 Estatística e probabilidade

Objetivos específicos

- Compreender a relação que pode ser estabelecida entre cálculo de probabilidade e cálculos estatísticos.
- Interpretar situações relacionadas à realização de experimentos com base no conceito de probabilidade.
- Empregar o conceito de probabilidade para a tomada de decisões em situações diversas.

Ao longo do tema, são discutidas as relações existentes entre conceitos estatísticos e probabilidade, especificamente em relação ao emprego da frequência relativa de ocorrência de experimentos para o cálculo de probabilidades. Assim, por meio desse estudo e das atividades propostas, espera-se que os alunos compreendam a relação entre o conceito de probabilidade e os cálculos estatísticos.

Páginas 146 e 147 — Tomada de decisões na prevenção de doenças e de gravidez não planejada

- As páginas de abertura abordam a eficácia dos métodos contraceptivos, possibilitando uma aproximação entre os componentes curriculares **Matemática** e **Biologia**. Diante desse tema, os alunos são incentivados a refletir sobre a importância de se informar a respeito do funcionamento do próprio corpo, sobretudo no que se refere à sexualidade, de modo a identificar informações que podem contribuir para a tomada de decisões em relação à escolha do método contraceptivo mais adequado, levando em consideração os benefícios associados a seu uso, inclusive em relação à transmissão de infecções.

Sala dos professores

Considerando a temática abordada, se julgar conveniente, proponha uma aula em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Biologia**, para propor a elaboração de pesquisas sobre diferentes métodos contraceptivos disponíveis, dando enfoque às múltiplas infecções que podem ser transmitidas sexualmente.

Peça ao professor do componente curricular **Biologia** para explicar que a escolha do método contraceptivo mais adequado é feita não somente com base em dados estatísticos. Portanto, ela deve ser feita considerando também as necessidades de cada pessoa, de que modo ela se sente mais confortável e segura, sempre com orientação médica e após a realização de exames. Além disso, ao falar sobre os preservativos masculinos e femininos, o professor deve explicar que, além de evitar a fecundação por impedir o contato dos espermatozoides com o ovócito (não é óvulo, pois só se torna óvulo após a fecundação), eles são os únicos métodos contraceptivos capazes de proteger contra ISTs.

BNCC

O assunto abordado nessa seção propicia o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106** da BNCC por instigar reflexões sobre o uso da probabilidade, em associação a conceitos estatísticos, para a tomada de decisões relacionadas a situações da vida cotidiana, mais especificamente em relação a métodos contraceptivos. Desse modo, contempla-se a **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e a **Competência específica 2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis."

- Além disso, as discussões realizadas com base nesse assunto favorecem o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Saúde**, contribuindo para a percepção da importância de adotar métodos contraceptivos a fim de evitar gravidez não planejada e a transmissão de infecções.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível usar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta, registrando suas dúvidas, discutindo, em pares, esses conteúdos e, posteriormente, apresentando as conclusões aos colegas.

  Ademais, durante o desenvolvimento da questão do **Ser consciente**, na página **147**, avalie a possibilidade de usar a metodologia ativa **Gallery walk**. Essa metodologia favorece a aprendizagem social, cognitiva e construtivista, além de permitir aos alunos expressar opiniões, ideias e experiências.

  Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 148

- O exemplo em discussão apresenta dados a respeito da quantidade aproximada de domicílios com geladeira. Destaque aos alunos que o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) realiza diferentes tipos de levantamentos de dados em relação à população brasileira, inclusive a respeito de alguns itens presentes nos domicílios. Se julgar conveniente, proponha aos alunos a coleta de informações referentes a outros

MANOBRA

tipos de pesquisas realizadas com a população brasileira, no *site* do instituto. Disponível em: <https://sidra.ibge.gov.br/home/ipca/brasil>. Acesso em: 20 jul. 2020.

Páginas 149 e 150

BNCC O problema resolvido **R1**, apresentado na seção **Exercícios e problemas resolvidos**, pode contribuir para o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação para o consumo**, na medida em que destaca a eficiência energética de produtos, ressaltando informações que estão presentes no cotidiano, a fim de contribuir para que os alunos compreendam essas informações e possam, com base nelas, tomar as melhores decisões no momento de adquirir eletrodomésticos. Além disso, considerando que o consumo de energia elétrica tem relação direta com a produção de energia e com o uso de fontes renováveis e não renováveis, as discussões sobre esse assunto promovem ainda a construção de um espaço para a reflexão acerca da importância de economizar energia, não apenas para adotar o consumo consciente e reduzir os gastos, mas também para manter as reservas naturais e minimizar os impactos ambientais causados pela geração de energia elétrica, contribuindo, assim, para o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**.

- Durante o trabalho com o problema **R2** da seção **Exercícios e problemas resolvidos**, é importante destacar que o IMC (Índice de Massa Corporal) não é o único fator utilizado para avaliar se uma pessoa está obesa ou não. Comente que uma pessoa pode ter um valor alto de IMC e não ser considerada obesa quando, por exemplo, apresenta uma grande porcentagem de massa magra.
- Além disso, aproveite as discussões propiciadas pelo assunto abordado no problema **R2** da seção **Exercícios e problemas resolvidos** para conversar com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, sobretudo em relação ao *bullying* motivado por excesso de massa corporal, uma vez que ele pode ser uma evidência de problemas de saúde; bem como de compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com nossas limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar. Esse tipo de abordagem contribui para a saúde mental dos alunos.

  Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O problema **R2**, apresentado na seção **Exercícios e problemas resolvidos**, pode contribuir para o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Saúde**, ao possibilitar discussões e reflexões a respeito do IMC e outros fatores que devem ser considerados na avaliação da saúde de um indivíduo, principalmente quanto à obesidade, contribuindo, assim, para que os alunos conheçam estratégias de promoção da saúde individual.

Página 151

- Ao trabalhar com os exercícios da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Após a resolução desse problema, os alunos podem apresentar para toda a turma as soluções encontradas, a fim de que possam discuti-las coletivamente.

  Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC A tarefa **5** da seção **Exercícios e problemas** contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT106** ao promover reflexões sobre o uso da probabilidade na tomada de decisões em diferentes situações, sobretudo nas cotidianas.

Por se tratar de uma tarefa em grupo, converse com os alunos acerca da importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para um ambiente propício ao crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de usar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, levando-os a refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite aos alunos, se possível, que comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos que envolvem a estatística e a probabilidade, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

1 Os conjuntos

1. alternativa **b**

Conforme o diagrama de Venn do problema, o conjunto A contém os conjuntos B e C e o conjunto B não contém o conjunto C, logo a alternativa **b** está correta.

2. **a)** Verdadeira, pois todo paralelogramo é um quadrilátero, logo o conjunto dos paralelogramos está contido no conjunto dos quadriláteros.

b) Falsa, pois o conjunto vazio não contém nenhum elemento, logo o conjunto dos quadriláteros não pode estar contido no conjunto vazio.

c) Verdadeira, pois nem todo losango é um retângulo, logo o conjunto dos losangos não está contido no conjunto dos retângulos.

d) Falsa, pois nem todo paralelogramo é um retângulo, logo o conjunto dos paralelogramos não está contido no conjunto dos retângulos.

e) Verdadeira, pois nem todo paralelogramo é um losango, logo o conjunto dos paralelogramos é diferente do conjunto dos losangos.

f) Verdadeira, pois nem todo paralelogramo é um losango, logo o conjunto dos paralelogramos não está contido no conjunto dos losangos.

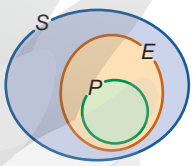
3. alternativa **c**

Conforme o diagrama de Venn apresentado no problema, o conjunto de pessoas que falam francês está contido no conjunto de pessoas que falam inglês e as pessoas que falam espanhol que também falam inglês. Logo, a alternativa **c** está correta.

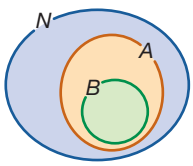
4. alternativa **b**

Segundo a propriedade transitiva, se o conjunto B está contido em C, e A está contido em B, logo A também está contido em C, assim a alternativa **b** está correta.

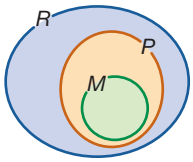
5. **a)** Indicando por S, E e P, respectivamente, o conjunto das atividades saudáveis, o conjunto dos esportes e o conjunto praticar atletismo, temos:



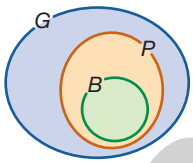
b) Indicando por N, A e B, respectivamente, o conjunto dos animais, o conjunto das aves e o conjunto dos beija-flores, temos:



c) Indicando por R, P e M, respectivamente, o conjunto de quem nasceu no Rio Grande do Norte, o conjunto dos potiguares e o conjunto de Marcos, temos:



d) Indicando por P, B e G, respectivamente, o conjunto dos poliedros, o conjunto das pirâmides e o conjunto das formas geométricas espaciais, temos:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

6. Resposta pessoal.

7. Note que $A = \{1, 2, 5, 10\}$ e, consequentemente, os subconjuntos de A de apenas três elementos são: $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 10\}$, $\{1, 5, 10\}$, $\{2, 5, 10\}$.

8. Conforme os dados do problema, temos:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A \cup C = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

c) $B \cup C = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

d) $A \cap B = \{1, 4\}$

e) $A \cap C = \varnothing$ ou $A \cap C = \{\ \}$

f) $B \cap C = \{5\}$

g) $(A \cup B) \cap C = \{5\}$

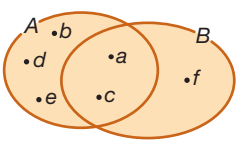
h) $(A \cap C) \cup B = \{1, 3, 4, 5\}$

9. Temos $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $n(B) = 5$ e $n(A \cap B) = 3$, então:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(A \cup B) = 6 + 5 - 3 \Rightarrow n(A \cup B) = 8$$

Portanto, o conjunto $A \cup B$ possui 8 elementos.

10. Conforme os dados dos problemas, podemos montar o seguinte esquema:



RONALDO INÁCIO

Assim:

- $A = \{a, b, c, d, e\} \Rightarrow n(A) = 5$
- $B = \{a, c, f\} \Rightarrow n(B) = 3$

Portanto, o conjunto A possui 5 elementos e o conjunto B possui 3 elementos.

11. **a)** $\complement_U^A = \{x \mid x \text{ é um número par}\}$

b) $\complement_U^B = \{x \mid x \text{ é um número negativo ou } x = 0\}$

MODERNA

12. Resposta pessoal.

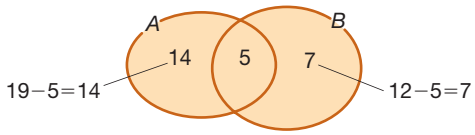
13. alternativa **b**

Observe que a parte destacada no diagrama representa $(R \cap M) - P$, ou seja, os termos indicados na pesquisa foram: reciclagem metal – papel.

Portanto, foi indicado na ferramenta de busca o termo reciclagem metal – papel.

14. Indicando por A e B, respectivamente, os funcionários que têm habilitação na categoria A e os que têm habilitação na categoria B, obtemos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 26 = 19 + 12 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 5$$



RONALDO INÁCIO

a) $n(A) = 19$

Assim, 19 funcionários possuem habilitação na categoria A.

b) $n(B) = 12$

Assim, 12 funcionários possuem habilitação na categoria B.

c) $n(A \cap B) = 5$

Assim, 5 funcionários possuem habilitação nas categorias A e B.

d) $n(A) - n(A \cap B) = 19 - 5 \Rightarrow n(A) - n(A \cap B) = 14$

Assim, 14 funcionários possuem habilitação somente na categoria A.

e) $n(B) - n(A \cap B) = 12 - 5 \Rightarrow n(A) - n(A \cap B) = 7$

Assim, 7 funcionários possuem habilitação somente na categoria B.

15. Indicando por F, M e U, respectivamente, as quantidades de alunos que acessam a internet nos fins de semana, que acessam a internet no meio da semana e que participaram da pesquisa.

Como 5 alunos não acessam a internet, então:

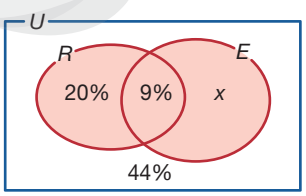
$$n(F \cup M) = n(U) - 5 \Rightarrow n(F \cup M) = 36 - 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(F \cup M) = 31$$

Logo:

$$n(F \cup M) = n(F) + n(M) - n(F \cap M) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 31 = 25 - 12 - n(F \cap M) \Rightarrow n(F \cap M) = 6$$

Portanto, 6 alunos acessam a internet todos os dias da semana.

16. **a)** Indicando por R, E e U, respectivamente, pacientes que fizeram a cirurgia plástica reparadora, que fizeram a cirurgia plástica estética e o total de pacientes entrevistados, temos o seguinte esquema:



RONALDO INÁCIO

$$x + 20\% + 9\% + 44\% = 100\% \Rightarrow x = 27\%$$

Logo, 54 pacientes correspondem a 27% do total de pacientes entrevistados.

Assim, o total de pacientes entrevistados é dado por:

$$\frac{54}{\underbrace{0{,}27}_{27\%}} = 200$$

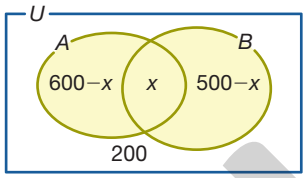
Portanto, foram entrevistados 200 pacientes.

b) Como apenas 44% dos pacientes nunca fizeram qualquer tipo de cirurgia plástica, então:

$$200 \cdot 0{,}44 = 88$$

Assim, 88 pacientes nunca fizeram qualquer tipo de cirurgia plástica.

17. alternativa **d**

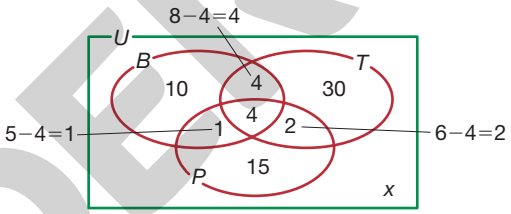


RONALDO INÁCIO

$$1\,000 = 600 - x + x + 500 - x + 200 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\,000 = 1\,300 - x \Rightarrow x = 300$$

Portanto, 300 pessoas rejeitavam os dois partidos.

18.



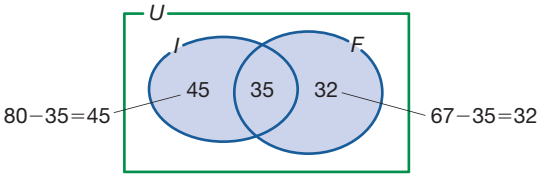
RONALDO INÁCIO

Note que a quantidade de clientes x que não preferem nenhum dos três doces é dada por:

$$x = 100 - (10 + 4 + 4 + 1 + 2 + 30 + 15)$$
$$= 100 - 66$$
$$= 34$$

Portanto, 34 clientes não preferem nenhum dos três doces.

19. Indicando por I e F, respectivamente, os alunos matriculados em Informática e os alunos matriculados em Fotografia, temos:



RONALDO INÁCIO

a) Conforme os dados do problema, 35 alunos optaram por participar de duas oficinas.

b) Com base no esquema, 45 alunos se matricularam apenas na oficina de Informática e 32 apenas na oficina de Fotografia, logo:

$$45 + 32 = 77$$

Portanto, 77 alunos estão matriculados em apenas uma oficina.

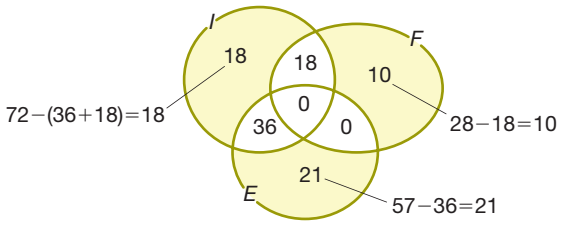
c) Como a pesquisa foi feita com 175 alunos, temos:

$$175 - (45 + 35 + 32) = 63$$

Portanto, 63 alunos não estão matriculados em nenhuma oficina.

MODERNA

20. Indicando por *F*, *I* e *E*, respectivamente, os alunos matriculados em Francês, em Inglês e em Espanhol, temos:



RONALDO INÁCIO

a) Calculando os alunos matriculados em apenas uma matéria, temos:

$$18 + 10 + 21 = 49$$

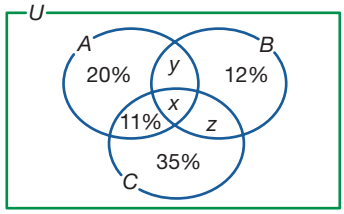
Portanto, existem 49 alunos matriculados em apenas um idioma.

b) Calculando o total de alunos matriculados, temos:

$$18 + 18 + 10 + 36 + 21 = 103$$

Portanto, 103 alunos estão matriculados nessa escola de idiomas.

21.



RONALDO INÁCIO

Pelo diagrama de Venn, podemos observar que $x + y + z + 11\%$ representam os habitantes que leem mais do que um jornal. Então, utilizando os dados dos habitantes que leem o jornal **B**, temos:

$$x + y + z + 12\% = 28\% \Rightarrow x + y + z = 16\%$$

Assim:

$$x + y + z + 11\% \Rightarrow 16\% + 11\% = 27\%$$

Ou seja, 27% da população representam os habitantes que leem mais de um jornal. Logo:

$$50\,000 \cdot \underbrace{0{,}27}_{27\%} = 13\,500$$

Portanto, 13 500 habitantes leem mais de um jornal.

22. Resposta pessoal.

2 Princípio aditivo, multiplicativo e arranjos

1. Conforme os dados do problema, temos:

$$3 + 2 + 1 = 6$$

Portanto, um cliente pode assistir 6 opções de filme naquele dia.

2. a) Como a escolha de personagens distintos não depende da escolha de outro personagem, temos:

$$1 + 2 + 1 + 3 = 7$$

Portanto, com base no princípio aditivo da contagem, a quantidade de personagens que Maria pode escolher é 7.

b) Observe que, para cada escolha de calça, existem duas opções de pares de sapatos e quatro de camisas. Logo, as escolhas são dependentes. Assim, temos:

$$3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

Portanto, Renato pode se vestir de 24 maneiras diferentes.

c) Como a escolha de Maurício é independente uma da outra, temos:

$$1 + 1 = 2$$

Portanto, Maurício pode escolher 2 opções de camisa.

3. Resposta pessoal.

4. Conforme os dados do problema, temos:

$$4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

Portanto, essa equipe pode compor o uniforme de 24 maneiras.

5. Calculando as maneiras distintas que uma pessoa pode entrar e sair do *shopping*, temos:

$$7 \cdot 7 = 49$$

Calculando as maneiras distintas que uma pessoa pode entrar e sair do *shopping*, mas usando portões diferentes para entrada e saída, temos:

$$7 \cdot 6 = 42$$

Portanto, uma pessoa pode entrar e sair desse *shopping* de 49 maneiras e entrar por um portão e sair por outro diferente ao da entrada de 42 maneiras.

6. Conforme os dados da página **28**, determinamos a quantidade de senhas distintas que podem ser registradas:

$$26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 258\,336\,000$$

Portanto, é possível cadastrar 258 336 000 senhas distintas nesse *site*.

7. Indicando por x a quantidade de trajetos entre **B** e **C**, temos:

$$3x = 15 \Rightarrow x = 5$$

Portanto, existem 5 trajetos entre **B** e **C**.

8. Indicando por x a quantidade de participantes do campeonato de xadrez, temos:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 66 \Rightarrow x^2 - x = 132 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 132 = 0 \begin{cases} x_1 = -11 \\ x_2 = 12 \end{cases}$$

Portanto, como -11 não é uma resposta viável, concluímos que 12 pessoas participaram desse campeonato.

9. Conforme os dados do problema, calculamos as possibilidades de fantasia com a máscara:

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

Calculando as possibilidades de fantasia sem a máscara, temos:

$$3 \cdot 2 = 6$$

Logo:

$$18 + 6 = 24$$

Portanto, existem 24 maneiras de compor essa fantasia.

10. Como o produto é da Suíça, temos 10 possibilidades para os três primeiros dígitos, do 760 até o 769 e como a identificação da empresa está fixada, temos:

$$10 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 302\,400$$

Portanto, existem 302 400 possibilidades de códigos de barra.

MODERNA

11. alternativa **d**

Como o Enem tinha 4 provas, cada prova com 45 questões e cada questão com 5 alternativas, temos:

$$5^{4 \cdot 45} = 5^{180}$$

Portanto, existem 5^{180} possibilidades de responder às questões.

12. **a)** Como o pacote é composto de transporte, hospedagem e tempo de permanência, temos:

$$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$$

Portanto, existem 36 maneiras distintas de compor o pacote turístico.

b) Nesse caso, temos duas possibilidades de transporte aéreo (1ª e 2ª classe), duas possibilidades de hotel (3 e 4 estrelas) e três possibilidades de períodos (4, 7 e 10 dias). Assim:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Portanto, existem 12 maneiras distintas de compor o pacote turístico satisfazendo as condições do enunciado.

13. **a)** Como o número 0 não pode estar na unidade de milhar e os algarismos precisam ser distintos, temos:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9\,000$$

Portanto, podem ser formados 9 000 números.

b) Como o número 0 não pode estar na dezena de milhar, temos:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$$

Portanto, podem ser formados 27 216 números.

c) Como são 5 números ímpares entre 0 e 9, e observando que o 0 não pode ocupar a casa das centenas, temos:

$$9 \cdot 10 \cdot 5 = 450$$

Portanto, podem ser formados 450 números.

d) Para ser um múltiplo de 5, o algarismo da unidade pode ser 0 ou 5, ou seja, temos 2 possibilidades. Além disso, o número 0 não pode ocupar a casa das centenas de milhar. Assim:

$$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 180\,000$$

Portanto, podem ser formados 180 000 números.

14. Como o gráfico tem de ser pintado de cores distintas, temos:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$$

Portanto, o gráfico pode ser colorido de 15 120 maneiras distintas.

15. Como a senha de Saulo é formada por 5 algarismos e todos eles são pares e distintos, então:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Sabendo que para realizar três tentativas é necessário um minuto, para realizar 120 tentativas Saulo vai levar 40 minutos. E como a cada três tentativas erradas Saulo tem de esperar 5 minutos, ele terá de esperar no máximo 39 intervalos de 5 minutos, ou seja, 195 minutos. Desse modo, Saulo vai levar, no máximo:

$$40 + 195 = 235$$

Portanto, Saulo conseguirá acessar seu e-mail em, no máximo, 235 min ou 3 h 55 min.

16. **a)** Não, pois o 4º dígito deve ser 5 ou 7.

b) Para o 5º digito há apenas duas possibilidades (5 ou 7). Então:

$$2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 20\,000$$

Portanto, essa companhia pode compor 20 000 números distintos de telefone.

c) Aumentando em dois dígitos as possibilidades para o 4º digito, então:

$$4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 40\,000$$

Portanto, o total de números distintos vai para 40 000, um aumento de 20 000 números distintos de telefone.

17. Resposta pessoal.

18. **a)** $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

b) $4 \cdot 2! = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8$

c) $0! + 4! = 1 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 25$

d) $5! - 4! = 5 \cdot 4! - 4! = (5 - 1) \cdot 4! = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

e) $\frac{10!}{3!\,7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$

f) $\frac{15!\,13!}{14!\,12!} = \frac{15 \cdot 14! \cdot 13 \cdot 12!}{14!\,12!} = 195$

g) $\frac{12!\,3!}{15!} = \frac{12! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!} = \frac{1}{455}$

h) $\frac{(3! - 0!)!}{3!\,2!} = \frac{(3 \cdot 2 \cdot 1 - 1)!}{3!\,2!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10$

19. **a)** $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

b) $\frac{(n+4)!}{(n+2)! + (n+3)!} =$

$= \frac{(n+4) \cdot (n+3) \cdot (n+2)!}{(n+2)! + (n+3) \cdot (n+2)!} =$

$= \frac{(n+4)(n+3)}{n+4} = n + 3$

20. **a)** $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12 \Rightarrow \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + n - 12 = 0 \begin{cases} n_1 = -4 \text{ (não convém)} \\ n_2 = 3 \end{cases}$

b) $n! = 1 \begin{cases} n = 1 \\ \text{ou} \\ n = 0 \end{cases}$

c) $\frac{(n+10)!}{(n+8)!} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(n+10) \cdot (n+9) \cdot (n+8)!}{(n+8)!} = 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 + 19n + 60 = 0 \begin{cases} n_1 = -15 \text{ (não convém)} \\ n_2 = -4 \end{cases}$

21. **a)** $A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 30$

b) $A_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 504$

c) $A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840$

d) $A_{8,6} = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 20\,160$

MODERNA

e) $A_{5,4} - A_{9,2} = \frac{5!}{(5-4)!} - \frac{9!}{(9-2)!} =$

$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{7!} = 48$

f) $A_{20,3} + A_{40,1} = \frac{20!}{(20-3)!} + \frac{40!}{(40-1)!} =$

$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17!} + \frac{40 \cdot 39!}{39!} = 6\,880$

22. a) $\frac{A_{n-1,2}}{A_{n-3,1}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(n-3)!}}{\frac{(n-3)!}{(n-4)!}} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!}}{\frac{(n-3) \cdot (n-4)!}{(n-4)!}} =$

$= \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{(n-3)}$

b) $\frac{A_{n+1,n}}{A_{n,n-1}} = \frac{\frac{(n+1)!}{1!}}{\frac{n!}{1!}} = \frac{(n+1) \cdot n!}{n!} = n + 1$

c) $\frac{A_{n-1,n-3}}{A_{n+1,n}} = \frac{\frac{(n-1)!}{2!}}{\frac{(n+1)!}{1!}} = \frac{(n-1)!}{2 \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1)!} =$

$= \frac{1}{2n^2 + 2n}$

23. Devemos calcular o arranjo de 12 produtos em 3 meios de divulgação diferentes (*outdoor*, revista e televisão). Assim:

$$A_{12,3} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 1\,320$$

Portanto, essa empresa pode compor a campanha de 1 320 maneiras.

24. Como são 6 continentes no total e 12 cores disponíveis, temos:

$$A_{12,6} = \frac{12!}{(12-6)!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 665\,280$$

Portanto, esse mapa pode ser pintado de 665 280 maneiras.

25. Como a senha deverá ter 5 dígitos e há 32 caracteres disponíveis, temos:

$$A_{32,5} = \frac{32!}{(32-5)!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27!}{27!} =$$

$$= 24\,165\,120$$

Assim, essa pessoa pode cadastrar a senha de 24 165 120 maneiras diferentes.

26. Inicialmente, calculamos a quantidade de maneiras possíveis de arranjar 26 letras duas a duas:

$$A_{26,2} = \frac{26!}{(26-2)!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot 24!}{24!} = 650$$

Analogamente, calculamos a quantidade de maneiras possíveis de arranjar 10 letras agrupadas de 5 em 5:

$$A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 30\,240$$

Assim:

$$A_{26,2} \cdot A_{10,5} = 650 \cdot 30\,240 = 19\,656\,000$$

Portanto, essa biblioteca pode cadastrar 19 656 000 livros.

27. a) $A_{20,6} = 27\,907\,200$

b) $A_{13,11} = 3\,113\,510\,400$

c) $A_{40,5} + A_{0,0} = 78\,960\,961$

d) $A_{12,8} - A_{0,0} = 19\,958\,399$

e) $A_{11,8} \cdot A_{0,0} = 6\,652\,800$

f) $\frac{A_{22,5}}{A_{0,0}} = 3\,160\,080$

28. Conforme os dados do problema, temos:

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot = 625$

Assim, podem ser formados 625 números.

b) $A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} \Rightarrow A_{5,4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} \Rightarrow A_{5,4} = 120$

Assim, podem ser formados 120 números.

c) Nesse caso, os múltiplos de 4 são aqueles que terminam em 12, 24, 28, 32, 48 e 84 (6 possibilidades). Como para as ordens da centena e da unidade de milhar restam 3 algarismos, a quantidade de números é dada por:

$$6 \cdot A_{3,2} = 6 \cdot \frac{3!}{(3-2)!} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 36$$

Portanto, podem ser formados 36 números.

d) O último algarismo só pode ser 1 ou 3 e o restante pode ser arranjado de qualquer maneira. Assim:

$$2 \cdot A_{4,3} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1!}{1!} = 48$$

Portanto, podem ser formados 48 números.

29. O primeiro algarismo só pode ser 1, 2, 3 ou 5 e o restante pode ser arranjado de qualquer maneira. Assim:

$$4 \cdot A_{6,4} = 4 \cdot \frac{6!}{(6-4)!} = 4 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 1\,440$$

Portanto, podem ser formados 1 440 números.

30. a) Como a quantidade de senadores é igual em cada unidade da federação, temos:

$$\frac{81}{27} = 3$$

Portanto, cada unidade da federação é representada por 3 senadores.

b) Inicialmente, observamos que são 7 cargos a serem preenchidos: um presidente, dois vice-presidentes e quatro secretários. Assim, uma expressão que representa a quantidade de maneiras distintas de compor a mesa diretora é:

$$A_{81,7} = \frac{81!}{(81-7)!} = \frac{81!}{74!}$$

c) Resposta pessoal.

31. $A_{3n+3,n+2} = 15 \cdot A_{3n+2,n+1} \Rightarrow \frac{(3n+3)!}{(2n+1)!} = 15 \cdot \frac{(3n+2)!}{(2n+1)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow (3n+3) \cdot (3n+2)! = 15 \cdot (3n+2)! \Rightarrow$

$\Rightarrow 3n + 3 = 15 \Rightarrow n = 4$

Portanto, a solução da equação é $n = 4$.

MODERNA

32. De acordo com o enunciado do problema, temos:

$$A_{3,1} \cdot A_{4,1} \cdot A_{5,2} \cdot A_{2,1} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 480$$

Portanto, a banda pode ser formada de 480 maneiras diferentes.

33. **a)** Sabemos que há 20 pilotos no total (10 equipes com 2 pilotos cada). Então:

$$A_{20,6} = \frac{20!}{(20-6)!} =$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14!}{14!} = 27\,907\,200$$

Portanto, a pontuação pode ser distribuída de 27 907 200 maneiras diferentes em uma dessas provas.

b) A quantidade de maneiras distintas que os pilotos da equipe A podem pontuar é dada por:

$$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = 6 \cdot 5 = 30$$

Agora, considerando os 18 pilotos restantes e sabendo que ainda há 4 pontuações a serem distribuídas, temos:

$$A_{18,4} = \frac{18!}{(18-4)!} = 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 = 73\,440$$

Assim:

$$A_{6,2} \cdot A_{18,4} = 30 \cdot 73\,440 = 2\,203\,200$$

Portanto, a pontuação dessa prova pode ter ocorrido de 2 203 200 maneiras distintas.

34. **a)** Seja n a quantidade total de equipes desse campeonato. Assim:

$$A_{n,2} = 240 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = 240 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 240 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau, obtemos $n = -15$ ou $n = 16$. Como a quantidade de equipes representada por um número natural, o total de equipes desse torneio é 16.

b) Como o campeonato contou com a participação de 16 equipes, então cada equipe jogou duas vezes (em casa e fora de casa) contra 15 adversários. Portanto, cada equipe disputou 30 partidas na fase classificatória.

35. **a)** A quantidade de senhas possíveis é dada por:

$$A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5\,040$$

Como cada tentativa dura 5 s, então:

$$5\,040 \cdot 5 = 25\,200$$

Portanto, o policial desativará o artefato em, no máximo, 25 200 s ou 420 min.

b) • quantidade de posições possíveis para os algarismos 0 e 7:

$$4 \cdot 3 = 12$$

• quantidade de escolhas possíveis para os dois algarismos restantes:

$$8 \cdot 7 = 56$$

Não, pois, nessas condições, a quantidade máxima de senhas a serem digitadas é $12 \cdot 56 = 672$, o que equivale a 56 min.

3 Permutações

1. **a)** $P_7 = 7! = 5\,040$

b) $\frac{A_{8,5}}{P_3} = \frac{\frac{8!}{(8-5)!}}{3!} = \frac{8!}{3!\,3!} = 1\,120$

c) $P_7 - P_5 = 7! - 5! = 5\,040 - 120 = 4\,920$

d) $\frac{P_{12}}{P_{10}} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 132$

e) $P_3 \cdot P_6 = 3!\,6! = 4\,320$

f) $\frac{P_7}{A_{7,3}} = \frac{7!}{\frac{7!}{(7-3)!}} = 4! = 24$

2. **a)** Cada anagrama da palavra é uma permutação de 4 elementos. Assim, a quantidade total de anagramas é dada por:

$$P_4 = 4! \Rightarrow P_4 = 24$$

Portanto, podem ser formados 24 anagramas.

b) Cada anagrama da palavra é uma permutação de 5 elementos. Assim, a quantidade total de anagramas é dada por:

$$P_5 = 5! \Rightarrow P_5 = 120$$

Portanto, podem ser formados 120 anagramas.

c) Cada anagrama da palavra é uma permutação de 9 elementos. Assim, a quantidade total de anagramas é dada por:

$$P_9 = 9! \Rightarrow P_9 = 362\,880$$

Portanto, podem ser formados 362 880 anagramas.

3. Como o restaurante fica aberto durante 6 dias, cada um com um cardápio diferente, e o proprietário quer saber quantos cardápios diferentes do atual ele conseguiria, apenas permutando os itens atuais, temos:

$$P_6 - 1 = 6 - 1 = 720 - 1 = 719$$

Portanto, o dono desse restaurante pode alterar o cardápio de 719 maneiras distintas.

4. **a)** $P_5 = 5! \Rightarrow P_5 = 120$

Assim, podem ser formadas 120 palavras no total.

b) $P_4 = 4! \Rightarrow P_4 = 24$

Assim, 24 palavras começam com a letra R.

c) $2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$

Assim, 48 palavras terminam em vogal.

5. **a)** 875 431; 134 578

b) Os números formados maiores do que 478 135 são aqueles da forma:

• 5 _ _ _ _ _, 7 _ _ _ _ _ ou 8 _ _ _ _ _:

$$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5! = 360$$

• 4 8 _ _ _ _:

$$P_4 = 4! = 24$$

• 4 7 8 3 _ _ ou 4 7 8 5 _ _:

$$2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! = 4$$

• 4 7 8 1 5 _:

$$P_1 = 1! = 1$$

PODERNA

$$360 + 24 + 4 + 1 = 389$$

Portanto, 389 números formados pelas permutações dos algarismos de 714 853 são maiores do que 478 135.

Os números formados menores do que 458 713 são aqueles da forma:

- 1 _ _ _ _ _ ou 3 _ _ _ _ _:

$$2 \cdot P_5 = 2 \cdot 5! = 240$$

- 4 1 _ _ _ _ ou 4 3 _ _ _ _:

$$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$$

- 4 5 1 _ _ _, 4 5 3 _ _ _ ou 4 5 7 _ _ _:

$$3 \cdot P_3 = 3 \cdot 3! = 18$$

- 4 5 8 1 _ _ ou 4 5 8 3 _ _:

$$2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! = 4$$

$$240 + 48 + 18 + 4 = 310$$

Portanto, 310 números formados pelas permutações dos algarismos de 714 853 são menores do que 458 713.

6. Como são inspecionados 4 frigoríferos, temos:

$$P_4 = 4! \Rightarrow P_4 = 24$$

Portanto, os fiscais podem realizar esse procedimento durante 24 meses.

7. Os anagramas que aparecem antes de PERMUTA são aqueles da forma:

- A _ _ _ _ _ _, E _ _ _ _ _ _ ou M _ _ _ _ _ _:

$$3 \cdot P_6 = 3 \cdot 6! = 2\,160$$

- P A _ _ _ _:

$$P_5 = 5! = 120$$

- P E A _ _ _ ou P E M _ _ _:

$$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$$

- P E R A _ _:

$$P_3 = 3! = 6$$

- P E R M A _ ou P E R M T _:

$$2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2! = 4$$

- P E R M U A _:

$$P_1 = 1! = 1$$

$$2\,160 + 120 + 48 + 6 + 4 + 1 = 2\,339$$

Portanto, 2 339 anagramas antecedem PERMUTA. Logo, essa palavra ocupa a 2 340ª posição na lista.

8. Uma possível resposta: considerando V, A e P as cores das caixas vermelhas, amarelas e pretas, respectivamente, a sequência será $\{V, A, P, V, A, V, P, A, V\}$. Portanto, seriam necessárias, no mínimo, 9 caixas para formar essa sequência.

9. a) MONITOR tem duas letras O, então:

$$P_7^{(2)} = \frac{7!}{2!} \Rightarrow P_7^{(2)} = 2\,520$$

Portanto, a palavra MONITOR possui 2 520 anagramas.

b) AMERICANA tem três letras A, então:

$$P_9^{(3)} = \frac{9!}{3!} \Rightarrow P_9^{(3)} = 60\,480$$

Portanto, a palavra AMERICANA possui 60 480 anagramas.

c) LIBERTADOR tem duas letras R. Então:

$$P_{10}^{(2)} = \frac{10!}{2!} \Rightarrow P_{10}^{(2)} = 1\,814\,400$$

Portanto, a palavra LIBERTADOR possui 1 814 400 anagramas.

d) CALCULADORA tem duas letras C, três letras A e duas letras L. Então:

$$P_{11}^{(2,3,2)} = \frac{11!}{2!3!2!} \Rightarrow P_{11}^{(2,3,2)} = 1\,663\,200$$

Portanto, a palavra CALCULADORA possui 1 663 200 anagramas.

10. Resposta pessoal.

11. Sendo x, y, z e w números naturais, podemos considerar que as soluções correspondem às maneiras de separar 6 elementos em 4 partes inteiras. Assim:

$$P_9^{(6,3)} = \frac{9!}{6!3!} \Rightarrow P_9^{(6,3)} = 84$$

Portanto, essa equação possui 84 soluções.

12. O número 125 612 tem dois algarismos 1 e dois algarismos 2.

a) Permutando os algarismos, temos:

$$P_6^{(2,2)} = \frac{6!}{2!2!} \Rightarrow P_6^{(2,2)} = 180$$

Portanto, são obtidos 180 números.

b) Os números obtidos pares são aqueles da forma:

- _ _ _ _ _ 2:

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$$

- _ _ _ _ _ 6:

$$P_5^{(2,2)} = \frac{5!}{2!2!} = 30$$

$$60 + 30 = 90$$

Portanto, são obtidos 90 números pares.

c) Os números obtidos menores do que 400 000 são aqueles da forma:

- 1 _ _ _ _ _:

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$$

- 2 _ _ _ _ _:

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$$

$$60 + 60 = 120$$

Portanto, são obtidos 120 números menores do que 400 000.

13. Considerando-se todas as palavras que começam por A, C, É ou L, tem-se:

- A: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$
- É: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$
- C: $P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60$
- L: $P_5 = 5! = 120$

Quantidade de palavras começadas por A, C, É ou L:

$$60 + 60 + 60 + 120 = 300$$

Assim, a 301ª palavra será UACÉLL.

14. alternativa d

Determinando a quantidade de caracteres que pode ser representada, conforme a quantidade de pontos destacados, temos:

$$P_6^{(5)} + P_6^{(4,2)} + P_6^{(3,3)} + P_6^{(2,4)} + P_6^{(5)} + P_6^{(6)} =$$

$$= \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{6!}{3!3!} + \frac{6!}{2!4!} + \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{6!} =$$

$$= 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$$

Portanto, a quantidade total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é 63.

MODERNA

4 Combinação simples e Binômio de Newton

1. a) $C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 1 \cdot 4!} = 15$

b) $C_{9,5} = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$

c) $C_{15,10} = \frac{15!}{10!(15-10)!} =$

$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3\,003$

d) $C_{12,6} + C_{8,2} = \frac{12!}{6!(12-6)!} + \frac{8!}{2!(8-2)!} =$

$= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 1 \cdot 6!} =$

$= 924 + 28 = 952$

e) $C_{8,4} - C_{8,3} = \frac{8!}{4!(8-4)!} - \frac{8!}{3!(8-3)!} =$

$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} - \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 70 - 56 = 14$

f) $\frac{C_{19,11}}{C_{19,8}} = \frac{C_{19,19-11}}{C_{19,8}} = \frac{C_{19,8}}{C_{19,8}} = 1$

2. a) $\frac{A_{n,p}}{C_{n,p}} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{\frac{n!}{p!(n-p)!}} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{p!(n-p)!}{n!} = p!$

b) $C_{n,n-1} \cdot C_{n-2,n-3} = \frac{n!}{(n-1)!1!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-3)!1!} =$

$= \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{(n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)!} = n(n-2)$

c) $C_{n-1,p-1} \cdot \frac{(n-p)!(p+1)!}{n!} =$

$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \cdot \frac{(n-p)!(p+1)!}{n!} =$

$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!} \cdot \frac{(p+1) \cdot p \cdot (p-1)!}{n \cdot (n-1)!} = \frac{p(p+1)}{n}$

d) $\frac{C_{n-1,p-1}}{C_{n-2,p-2}} = \frac{\frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}}{\frac{(n-2)!}{(p-2)!(n-p)!}} = \frac{(n-1)!(p-2)!}{(p-1)!(n-2)!} =$

$= \frac{(n-1) \cdot (n-2)!(p-2)!}{(p-1) \cdot (p-2)!(n-2)!} = \frac{n-1}{p-1}$

3. a) $C_{25,4} = 12\,650$

b) $C_{25,9} = 2\,042\,975$

c) $C_{32,7} = 3\,365\,856$

d) $C_{29,20} = 10\,015\,005$

e) $C_{80,75} = 24\,040\,016$

f) $C_{100,96} = 3\,921\,225$

4. Por tentativas, segue que $n = 15$.

$$C_{15,3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455$$

5. Na escola, 50 pessoas vão participar do sorteio, mas apenas 5 serão sorteadas. Logo:

$$C_{50,5} = \frac{50!}{5!(50-5)!} \Rightarrow C_{50,5} = 2\,118\,760$$

Portanto, existem 2 118 760 grupos diferentes que podem ser sorteados.

6. Há 8 tipos de cadernos e serão escolhidos 5; há 7 tipos de lápis e serão escolhidos 4; há 5 tipos de caneta e serão escolhidas 2. Então:

$C_{8,5} \cdot C_{7,4} \cdot C_{5,2} =$

$= \frac{8!}{5!(8-5)!} \cdot \frac{7!}{4!(7-4)!} \cdot \frac{5!}{5!(5-2)!} = 19\,600$

Portanto, existem 19 600 maneiras distintas de montar o *kit*.

7. Das 18 moedas, 7 serão escolhidas para formar o conjunto. Logo: $C_{18,7} = \frac{18!}{7!(18-7)!} \Rightarrow C_{18,7} = 31\,824$.

Portanto, Marlene pode formar o conjunto de 31 824 maneiras distintas.

8. alternativa **a**

Inicialmente vamos considerar os modos distintos de escolher a situação **I**. Como é obrigatório conhecer o Estádio do Maracanã, sobram 11 estádios disponíveis, dos quais serão escolhidos 2. Logo: $C_{11,2} = \frac{11!}{2!(11-2)!} \Rightarrow C_{11,2} = 55$.

Na situação **II**, se o turista conhecer o Estágio do Mineirão e a Arena Pantanal, sobrarão 10 estádios disponíveis, dos quais será escolhido 1. Caso contrário, se o turista não conhecer nem o Estádio do Mineirão nem a Arena Pantanal, sobrarão 10 estádios disponíveis, dos quais serão escolhidos 3. Logo:

$C_{10,1} + C_{10,3} = \frac{10!}{1!(10-1)!} + \frac{10!}{3!(10-3)!} =$

$= 10 + 120 = 130$

Assim, a razão entre o número de modos distintos de escolher a situação **I** e o número de maneiras diferentes de escolha para a situação **II** é dada por: $\frac{55}{130} = \frac{11}{26}$.

Portanto, a alternativa correta é a alternativa **a**.

9. alternativa **a**

Como estamos avaliando apenas as questões que compõem a prova, não importando a ordem delas, determinamos a quantidade de maneiras distintas de compor esse simulado com a combinação de 60 questões, tomadas 25 a 25, então:

$$C_{60,25} = \frac{60!}{25!(60-25)!} \Rightarrow C_{60,25} = \frac{1}{25!} \cdot \frac{60!}{(60-25)!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{60,25} = \frac{1}{25!} \cdot A_{60,25} \Rightarrow C_{60,25} = \frac{A_{60,25}}{25!}$$

Portanto, existem $\frac{A_{60,25}}{25!}$ maneiras distintas de compor esse simulado.

10. Das 25 lâmpadas, serão tomadas 16 a 16 para iluminar o corredor, como cada uma é controlada por um interruptor próprio, temos:

$$C_{25,16} = \frac{25!}{16!(25-16)!} \Rightarrow C_{25,16} = 2\,042\,975$$

Assim, esse corredor pode ser iluminado de 2 042 975 maneiras distintas.

MODELNA

11. Podemos contar todos os times possíveis, independentemente da participação ou não de João e Mara, e, em seguida, subtrair desse valor a quantidade de equipes das quais nenhum dos dois é membro. Assim:

$$C_{10,5} - C_{8,5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} - \frac{8!}{5!(8-5)!} = 196$$

Portanto é possível formar 196 times diferentes com a participação de pelo menos um dos amigos citados.

12. Resolvendo a equação, temos:

$$C_{x,2} = 6 \Rightarrow \frac{x!}{2!(x-2)!} = 6 \Rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)!}{2 \cdot 1 \cdot (x-2)!} = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Como $x \in \mathbb{N}$, concluímos que $x = 4$.

13. a) Calculando a quantidade de segmentos de reta que podemos traçar com extremidades nos pontos indicados na circunferência, temos: $C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} \Rightarrow C_{6,2} = 15$.

Portanto, podem ser traçados 15 segmentos.

b) Calculando a quantidade de triângulos que podemos traçar com vértices nos pontos indicados na circunferência, temos: $C_{6,3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} \Rightarrow C_{6,3} = 20$.

Portanto, podem ser formados 20 triângulos.

14. Indicando por n a quantidade de pessoas que formam o grupo, temos:

$$C_{n,2} = 630 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 630 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot 1 \cdot (n-2)!} = 630 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 1\,260 = 0 \begin{cases} n_1 = -35 \text{ (não convém)} \\ n_2 = 36 \end{cases}$$

Logo, 36 pessoas formam esse grupo.

15. A comissão será formada por 3 países de cada América, então:

$$C_{3,3} \cdot C_{20,3} \cdot C_{12,3} =$$

$$= \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot \frac{20!}{3!(20-3)!} \cdot \frac{12!}{3!(12-3)!} =$$

$$= 1 \cdot 1\,140 \cdot 220 = 250\,800$$

Portanto, essa comissão pode ser criada de 250 800 maneiras diferentes.

16. a) Utilizando a fórmula da combinação simples, temos:

$$C_{60,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60!}{6!54!} = 50\,063\,860$$

b) Indicando por c o custo de todas as apostas possíveis e sabendo que o custo de cada aposta é R$ 4,50, temos:

$$c = 4{,}50 \cdot 50\,063\,860 = 225\,287\,370$$

Portanto, essa pessoa gastaria R$ 225 287 370,00.

Uma possível resposta: o procedimento seria vantajoso se o prêmio fosse maior do que esse valor e não existisse outro ganhador.

c) Utilizando a fórmula do custo, temos:

- $V_7 = 4{,}50 \cdot C_{7,6} = 4{,}50 \cdot \frac{7!}{6!1!} = 4{,}50 \cdot 7 = 31{,}50$

  Portanto, uma pessoa pagaria R$ 31,50 por uma aposta com 7 números.

- $V_9 = 4{,}50 \cdot C_{9,6} = 4{,}50 \cdot \frac{9!}{6!3!} = 4{,}50 \cdot 84 = 378{,}00$

  Portanto, uma pessoa pagaria R$ 378,00 por uma aposta com 9 números.

- $V_{12} = 4{,}50 \cdot C_{12,6} = 4{,}50 \cdot \frac{12!}{6!6!} = 4{,}50 \cdot 924 = 4\,158{,}00$

  Portanto, uma pessoa pagaria R$ 4 158,00 por uma aposta com 12 números.

- $V_{15} = 4{,}50 \cdot C_{15,6} = 4{,}50 \cdot \frac{15!}{6!9!} = 4{,}50 \cdot 5\,005 =$
  $= 22\,522{,}50$

  Portanto, uma pessoa pagaria R$ 22 522,50 por uma aposta com 15 números.

17. Indicando por n a quantidade de médicos, temos:

$$C_{n,5} = 15\,504$$

Por tentativas, segue que $n = 20$. Assim, se a junta for composta de 6 médicos, temos:

$$C_{20,6} = \frac{20!}{6!(20-6)!} = 38\,760$$

Portanto, essa junta pode ser formada de 38 760 maneiras distintas.

18. Indicando por n a quantidade de alunos da turma, temos:

$$\underbrace{C_{15,3}}_{\text{moças}} \cdot \underbrace{C_{n-15,2}}_{\text{rapazes}} = 30\,030 \Rightarrow 455 \cdot \frac{(n-15)!}{2!(n-17)!} = 30\,030 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 31n + 108 = 0 \begin{cases} n_1 = 27 \\ n_2 = 4 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Logo, há 27 alunos na turma.

19. Determinando a quantidade de maneiras diferentes que a pessoa pode enviar a mensagens para 10 amigos, temos:

$$C_{12,3} \cdot C_{10,3} \cdot C_{9,3} \cdot C_{15,1} =$$

$$= \frac{12!}{3!(12-3)!} \cdot \frac{10!}{3!(10-3)!} \cdot \frac{9!}{3!(9-3)!} \cdot \frac{15!}{1!(15-1)!} =$$

$$= 220 \cdot 120 \cdot 84 \cdot 15 = 33\,264\,000$$

Portanto, essa pessoa pode enviar a mensagem de 33 264 000 maneiras diferentes.

20. alternativa a

Ao comprar a primeira das 7 passagens, o grupo de amigos tem 9 opções para escolher, ao comprar a segunda, eles têm 8 opções, e assim sucessivamente. Note que 9! e 2! podem ser representados, respectivamente, por:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \text{ e } 2$$

Assim, determinamos a quantidade de maneiras distintas para acomodar esses amigos no ônibus:

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = \frac{9!}{2!}$$

Portanto, existem $\frac{9!}{2!}$ maneiras de acomodar o grupo de amigos nesse ônibus.

MODERNA

21. Como um indivíduo deve ser submetido a tratamento se apresentar 4 sintomas ou mais, ele pode apresentar 4, 5, 6, ou 7 sintomas. Assim temos:

$C_{7,4} + C_{7,5} + C_{7,6} + C_{7,7} =$

$= \frac{7!}{4!(7-4)!} + \frac{7!}{5!(7-5)!} + \frac{7!}{6!(7-6)!} + \frac{7!}{7!(7-7)!} = 64$

Portanto, um indivíduo pode manifestar esses sintomas de 64 maneiras diferentes.

22. • Total de acondicionamentos sem a restrição:

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6!(10-6)!} = 210$$

• Quantidade de acondicionamentos com os dois tipos de peça juntos:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$$

Assim, o total de maneiras de acondicionamento diferentes é dado por:

$$210 - 70 = 140$$

Portanto, pode-se acondicionar essas peças de 140 maneiras distintas.

23. Conforme os dados do problema, temos:

$$C_{8,3} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,1} = 56 \cdot 10 \cdot 3 = 1680$$

Portanto, esse sistema pode emitir 1 680 mensagens distintas.

24. alternativa **c**

Para que a soma de três números naturais seja um número ímpar, devemos ter três números ímpares ou dois números pares e um número ímpar. Como o conjunto C possui 12 elementos, sendo 7 números pares e 5 números ímpares, temos os seguintes casos:

• 1º caso: três números ímpares.

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

Ou seja, existem 10 subconjuntos satisfazendo a condição desejada.

• 2º caso: dois números pares e um número ímpar.

$$C_{7,2} \cdot C_{5,1} = \frac{7!}{2!5!} \cdot \frac{5!}{1!4!} = 21 \cdot 5 = 105$$

Ou seja, existem 105 subconjuntos satisfazendo as condições desejadas.

Portanto, existem $10 + 105 = 115$ subconjuntos de três elementos satisfazendo a condição desejada.

25. alternativa **b**

Como o professor deseja que uma alternativa seja escolha de apenas duas questões, calculamos inicialmente as maneiras distintas de escolher a alternativa A, em seguida, a alternativa B, e assim por diante. Logo:

$$C_{10,2} \cdot C_{8,2} \cdot C_{6,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{2,2} = 45 \cdot 28 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 1 = 113\,400$$

Portanto, esse professor pode elaborar a folha de respostas de 113 400 maneiras diferentes.

26. alternativa **c**

De acordo com o enunciado, temos:

$$C_{9,3} = \frac{9!}{3!(9-3!)} \Rightarrow C_{9,3} = 84$$

Portanto, esse artista pode pintar esse painel de 84 maneiras distintas.

27. Resposta pessoal.

28. **a)** $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5} = \binom{8}{5} + \binom{8}{5} = 2 \cdot \frac{8!}{5!3!} = 112$

b) $\binom{10}{4} + \binom{2}{0} + \binom{8}{3} = \frac{10!}{4!6!} + 1 + \frac{8!}{3!5!} = 267$

c) $\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \ldots + \binom{15}{14} + \binom{15}{15} =$

$= 2^{15} = 32\,768$

d) $\binom{6}{2} + \binom{12}{7} + \binom{7}{0} = \frac{6!}{2!4!} + \frac{12!}{7!5!} + 1 = 808$

29. **a)** $\binom{9}{3} = \binom{x}{6} \Rightarrow \binom{9}{6} = \binom{x}{6} \Rightarrow x = 9$

b) $\binom{24}{x} + \binom{24}{12} = \binom{25}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow \binom{24}{x} + \binom{24}{12} = \binom{24}{12} + \binom{24}{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow \binom{24}{x} = \binom{24}{11} \begin{cases} x = 11 \\ \text{ou} \\ x = 13 \end{cases}$

c) $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \ldots + \binom{x}{x} = 2^{(-x+200)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 2^{(-x+200)} \Rightarrow x = -x + 200 \Rightarrow x = 100$

d) $\binom{10}{x}^x = \binom{20}{14} - \binom{20}{6} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \binom{10}{x}^x = \binom{20}{14} - \binom{20}{14} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \binom{10}{x}^x = 1 \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 10 \end{cases}$

30. 8 elementos; $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \ldots + \binom{8}{8} = 2^8 = 256$

31. alternativa **d**

$$\binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2} = \binom{7}{4} + \binom{7}{3} = \binom{8}{4}$$

32. Inicialmente, note que $256 = 2^8$. Então:

$$\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \ldots + \binom{x}{x-1} + \binom{x}{x} = 256 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x = 256 \Rightarrow x = 8$$

Assim, x é igual a 8.

33. A comissão pode ser formada de no mínimo 1 e no máximo 10 integrantes, escolhidos de um grupo de 10 pessoas. Então:

$$\binom{10}{1} + \binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \ldots + \binom{10}{10} =$$

$$= 2^{10} - \binom{10}{0} = 1\,024 - 1 = 1\,023$$

Portanto, podem ser formadas 1 023 comissões.

34. $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 4\,095 \Rightarrow 2^n - \binom{n}{0} = 4\,905 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n - 1 = 4\,905 \Rightarrow n = 12$

35. **a)** $(x+y)^5 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1} x^5y^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5} x^4y^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} x^3y^2 +$

$+ \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} x^2y^3 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} x^1y^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1} x^0y^5 =$

$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

MODERNA

b) $(2a-b)^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}(2a)^4(-b)^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}(2a)^3(-b)^1 +$

$+\underbrace{\binom{4}{2}}_{6}(2a)^2(-b)^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}(2a)^1(-b)^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}(2a)^0(-b)^4 =$

$= 16a^4 + 4 \cdot 8a^3 \cdot (-b) +$

$+ 6 \cdot 4a^2 \cdot b^2 + 4 \cdot 2a \cdot (-b^3) + b^4 =$

$= 16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$

c) $\left(2x - \frac{y}{4}\right)^6 = \underbrace{\binom{6}{0}}_{1}(2x)^6\left(-\frac{y}{4}\right)^0 + \underbrace{\binom{6}{1}}_{6}(2x)^5\left(-\frac{y}{4}\right)^1 +$

$+\underbrace{\binom{6}{2}}_{15}(2x)^4\left(-\frac{y}{4}\right)^2 + \underbrace{\binom{6}{3}}_{20}(2x)^3\left(-\frac{y}{4}\right)^3 +$

$+\underbrace{\binom{6}{4}}_{15}(2x)^2\left(-\frac{y}{4}\right)^4 + \underbrace{\binom{6}{5}}_{6}(2x)^1\left(-\frac{y}{4}\right)^5 +$

$+\underbrace{\binom{6}{6}}_{1}(2x)^0\left(-\frac{y}{4}\right)^6 = 64x^6 + 6 \cdot 32x^5 \cdot \left(-\frac{y}{4}\right) +$

$+ 15 \cdot 16x^4 \cdot \frac{y^2}{16} + 20 \cdot 8x^3 \cdot \left(-\frac{y^3}{64}\right) + 15 \cdot 4x^2 \cdot \frac{y^4}{256} +$

$+ 6 \cdot 2x \cdot \left(-\frac{y^5}{1\,024}\right) + \frac{y^6}{4\,096} = 64x^6 - 48x^5y +$

$+ 15x^4y^2 - \frac{5x^3y^3}{2} + \frac{15x^2y^4}{64} - \frac{3xy^5}{256} + \frac{y^6}{4\,096}$

d) $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}(\sqrt{x})^4(\sqrt{y})^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}(\sqrt{x})^3(\sqrt{y})^1 +$

$+\underbrace{\binom{4}{2}}_{6}(\sqrt{x})^2(\sqrt{y})^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}(\sqrt{x})^1(\sqrt{y})^3 +$

$+\underbrace{\binom{4}{4}}_{1}(\sqrt{x})^0(\sqrt{y})^4 =$

$= x^2 + 4 \cdot x\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + 6 \cdot x \cdot y + 4 \cdot \sqrt{x} \cdot y\sqrt{y} + y^2 =$

$= x^2 + 4x\sqrt{x}\sqrt{y} + 6xy + 4y\sqrt{x}\sqrt{y} + y^2$

e) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{\sqrt{b}}{3}\right)^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^4\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^0 +$

$+\underbrace{\binom{4}{1}}_{4}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^3\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^2 +$

$+\underbrace{\binom{4}{3}}_{4}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^1\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\right)^0\left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right)^4 =$

$= \frac{a^2}{16} + 4 \cdot \frac{a\sqrt{a}}{8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{b}}{3}\right) + 6 \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{b}{9} +$

$+ 4 \cdot \frac{\sqrt{a}}{2} \cdot \left(-\frac{b\sqrt{b}}{27}\right) + \frac{b^2}{81} =$

$= \frac{a^2}{16} - \frac{a\sqrt{a}\sqrt{b}}{6} + \frac{ab}{6} - \frac{2b\sqrt{a}\sqrt{b}}{27} + \frac{b^2}{81}$

f) $\left(xy + \frac{z}{3}\right)^6 = \underbrace{\binom{6}{0}}_{1}(xy)^6\left(\frac{z}{3}\right)^0 + \underbrace{\binom{6}{1}}_{6}(xy)^5\left(\frac{z}{3}\right)^1 +$

$+\underbrace{\binom{6}{2}}_{15}(xy)^4\left(\frac{z}{3}\right)^2 + \underbrace{\binom{6}{3}}_{20}(xy)^3\left(\frac{z}{3}\right)^3 +$

$+\underbrace{\binom{6}{4}}_{15}(xy)^2\left(\frac{z}{3}\right)^4 + \underbrace{\binom{6}{5}}_{6}(xy)^1\left(\frac{z}{3}\right)^5 +$

$+\underbrace{\binom{6}{6}}_{1}(xy)^0\left(\frac{z}{3}\right)^6 = x^6y^6 + 6 \cdot x^5y^5 \cdot \frac{z}{3} +$

$+ 15 \cdot x^4y^4 \cdot \frac{z^2}{9} + 20 \cdot x^3y^3 \cdot \frac{z^3}{27} + 15 \cdot x^2y^2 \cdot \frac{z^4}{81} +$

$+ 6 \cdot xy \cdot \frac{z^5}{243} + \frac{z^6}{729} = x^6y^6 + 2x^5y^5z +$

$+ \frac{5}{3}x^4y^4z^2 + \frac{20}{27}x^3y^3z^3 + \frac{5}{27}x^2y^2z^4 + \frac{2}{81}xyz^5 + \frac{z^6}{729}$

36. a) $(7 \cdot 1 - 6 \cdot 1)^{14} = 1^{14} = 1$

b) $(3 \cdot 1 - 4 \cdot 1)^7 = (-1)^7 = -1$

c) $\left(\sqrt{1} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right)^9 = 0^9 = 0$

d) $(-7 \cdot 1 + 9 \cdot 1)^8 = 2^8 = 256$

37. a) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^5 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1}\left(\sqrt{5}\right)^5\left(-\sqrt{3}\right)^0 +$

$+\underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\left(\sqrt{5}\right)^4\left(-\sqrt{3}\right)^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}\left(\sqrt{5}\right)^3\left(-\sqrt{3}\right)^2 +$

$+\underbrace{\binom{5}{3}}_{10}\left(\sqrt{5}\right)^2\left(-\sqrt{3}\right)^3 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}\left(\sqrt{5}\right)^1\left(-\sqrt{3}\right)^4 +$

$+\underbrace{\binom{5}{5}}_{1}\left(\sqrt{5}\right)^0\left(-\sqrt{3}\right)^5 = 25\sqrt{5} +$

$+ 5 \cdot 25 \cdot \left(-\sqrt{3}\right) + 10 \cdot 5\sqrt{5} \cdot 3 + 10 \cdot 5 \cdot \left(-3\sqrt{3}\right) +$

$+ 5 \cdot \sqrt{5} \cdot 9 + \left(-9\sqrt{3}\right) = 220\sqrt{5} - 284\sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt{7} + 3\sqrt{5}\right)^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}\left(\sqrt{7}\right)^4\left(3\sqrt{5}\right)^0 +$

$+\underbrace{\binom{4}{1}}_{4}\left(\sqrt{7}\right)^3\left(3\sqrt{5}\right)^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}\left(\sqrt{7}\right)^2\left(3\sqrt{5}\right)^2 +$

$+\underbrace{\binom{4}{3}}_{4}\left(\sqrt{7}\right)^1\left(3\sqrt{5}\right)^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}\left(\sqrt{7}\right)^0\left(3\sqrt{5}\right)^4 =$

$= 49 + 4 \cdot 7\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{5} + 6 \cdot 7 \cdot 45 +$

$+ 4 \cdot \sqrt{7} \cdot 135\sqrt{5} + 2\,025 = 3\,964 + 624\sqrt{35}$

MODERNA

c) $\left(1-\sqrt{2}\right)^5 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1}\cdot 1^5\left(-\sqrt{2}\right)^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\cdot 1^4\left(-\sqrt{2}\right)^1 +$

$+ \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}\cdot 1^3\left(-\sqrt{2}\right)^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}\cdot 1^2\left(-\sqrt{2}\right)^3 +$

$+ \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}\cdot 1^1\left(-\sqrt{2}\right)^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}\cdot 1^0\left(-\sqrt{2}\right)^5 =$

$= 1 + 5\cdot 1\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + 10\cdot 1\cdot 2 + 10\cdot 1\cdot\left(-2\sqrt{2}\right) +$

$+ 5\cdot 1\cdot 4 + \left(-4\sqrt{2}\right) = 41 - 29\sqrt{2}$

Assim:

$\left(1-\sqrt{2}\right)^{10} = \left[\left(1-\sqrt{2}\right)^5\right]^2 = \left[41-29\sqrt{2}\right]^2 =$

$= 1\,681 - 2\,378\sqrt{2} + 1\,682 = 3\,363 - 2\,378\sqrt{2}$

d) $3 + 2\sqrt{\frac{3}{2}} = 3 + 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 3 + 2\frac{\sqrt{6}}{2} = 3 + \sqrt{6}$

Assim:

$\left(3+2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5 = \left(3+\sqrt{6}\right)^5 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1}\cdot 3^5\left(\sqrt{6}\right)^0 +$

$+ \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}\cdot 3^4\left(\sqrt{6}\right)^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}\cdot 3^3\left(\sqrt{6}\right)^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}\cdot 3^2\left(\sqrt{6}\right)^3 +$

$+ \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}\cdot 3^1\left(\sqrt{6}\right)^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}\cdot 3^0\left(\sqrt{6}\right)^5 =$

$= 243 + 5\cdot 81\cdot\sqrt{6} + 10\cdot 27\cdot 6 + 10\cdot 9\cdot 6\sqrt{6} +$

$+ 5\cdot 3\cdot 36 + 36\sqrt{6} = 2\,403 + 981\sqrt{6}$

38. $\left(\frac{2}{1^5}+\frac{\sqrt{1}}{1}\right)^n = 6\,561 \Rightarrow 3^n = 6\,561 \Rightarrow n = 8$

39. a) $T_{p+1} = \binom{7}{p}\cdot 9^{7-p}(-a)^p$

b) $T_{p+1} = \binom{5}{p}\cdot 3^{5-p}\left(\frac{x}{3}\right)^p$

c) $T_{p+1} = \binom{9}{p}(5ab)^{9-p}\left(-\frac{c}{7}\right)^p$

d) $T_{p+1} = \binom{6}{p}\left(\frac{7}{x}\right)^{6-p}\left(\frac{8y}{3}\right)^p$

40. Termo geral: $T_{p+1} = \binom{10}{p}(-2x)^{10-p}\left(\frac{1}{3}\right)^p$

$T_8 = T_{7+1} = \binom{10}{7}(-2x)^{10-7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 =$

$= 120\cdot\left(-8x^3\right)\cdot\frac{1}{2\,187} = -\frac{320x^3}{729}$

41. Termo geral: $T_{p+1} = \binom{20}{p}(2x)^{20-p}(-y)^p$

$T_{17} = T_{16+1} = \binom{20}{16}(2x)^{20-16}(-y)^{16} =$

$= 4\,845\cdot 16x^4\cdot y^{16} = 77\,520x^4y^{16}$

42. a) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{6}{p}\left(y^2\right)^{6-p}\cdot 3^p$

$T_4 = T_{3+1} = \binom{6}{3}\left(y^2\right)^{6-3}\cdot 3^3 = 20\cdot y^6\cdot 27 = 540y^6$

b) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{8}{p}\left(a^2\right)^{8-p}\left(-\frac{b}{a}\right)^p$

$T_5 = T_{4+1} = \binom{8}{4}\left(a^2\right)^{8-4}\left(-\frac{b}{a}\right)^4 = 70\cdot a^8\cdot\frac{b^4}{a^4} = 70a^4b^4$

c) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{12}{p}\left(\frac{2}{xy}\right)^{12-p}\left(\frac{z^3}{5}\right)^p$

$T_7 = T_{6+1} = \binom{12}{6}\left(\frac{2}{xy}\right)^{12-6}\left(\frac{z^3}{5}\right)^6 =$

$= 924\cdot\frac{64}{x^6y^6}\cdot\frac{z^{18}}{15\,625} = \frac{59\,136z^{18}}{15\,625x^6y^6}$

43. a) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{6}{p}\left(x^2\right)^{6-p}\cdot 3^p$

$6 - p = 0 \Rightarrow p = 6$

$T_{6+1} = \binom{6}{6}\left(x^2\right)^{6-6}\cdot 3^6 = 729$

b) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{5}{p}\left(\frac{3}{x}\right)^{5-p}\cdot 4^p$

$5 - p = 0 \Rightarrow p = 5$

$T_{5+1} = \binom{5}{5}\left(\frac{3}{x}\right)^{5-5}\cdot 4^5 = 1\,024$

c) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{8}{p}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-p}\left(-x^3\right)^p =$

$= \binom{8}{p}(-1)^p\frac{x^{3p}}{x^{\frac{1}{2}(8-p)}} = \binom{8}{p}(-1)^p x^{\frac{7}{2}p-4}$

$\frac{7}{2}p - 4 = 0 \Rightarrow p = \frac{8}{7} \notin \mathbb{N}$

Logo, nesse caso não há termo independente de x.

d) Termo geral: $T_{p+1} = \binom{8}{p}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-p}\left(3\sqrt{x}\right)^p =$

$= \binom{8}{p}\cdot 3^p\frac{x^{\frac{p}{2}}}{x^{\frac{1}{2}(8-p)}} = \binom{8}{p}\cdot 3^p x^{p-4}$

$p - 4 = 0 \Rightarrow p = 4$

$T_{4+1} = \binom{8}{4}\cdot 3^4x^{4-4} = 70\cdot 81 = 5\,670$

44. Termo geral: $T_{p+1} = \binom{20}{p}x^{20-p}\left(-\frac{2}{y}\right)^p$

$20 - p = 18 \Rightarrow p = 2$

$T_{2+1} = \binom{20}{2}x^{20-2}\left(-\frac{2}{y}\right)^2 = 190x^{18}\frac{4}{y^2} = \frac{760x^{18}}{y^2}$

45. Termo geral: $T_{p+1} = \binom{12}{p}\left(\frac{x}{2}\right)^{12-p}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^p$

a) $T_{10} = T_{9+1} = \binom{12}{9}\left(\frac{x}{2}\right)^{12-9}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^9 = 220\cdot\frac{x^3}{8}\cdot\frac{1}{y^9} =$

$= \frac{55x^3}{2y^9}$

b) $T_7 = T_{6+1} = \binom{12}{6}\left(\frac{x}{2}\right)^{12-6}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^6 = 924\cdot\frac{x^6}{64}\cdot\frac{1}{y^6} =$

$= \frac{231x^6}{16y^6}$

c) $12 - p = 8 \Rightarrow p = 4$

$T_{4+1} = \binom{12}{4}\left(\frac{x}{2}\right)^{12-4}\cdot\left(\frac{1}{y}\right)^4 = 495\cdot\frac{x^8}{256}\cdot\frac{1}{y^4} = \frac{495x^8}{256y^4}$

MODERNA

5 Probabilidade

1. $\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)\}$

2. a) $\Omega = \{(P, A, T, Q), (P, A, T, C), (P, A, Q, C), (P, A, T, Q)\}$

b) Conforme os valores calóricos (em kcal) das porções de cada ingrediente, temos:

$(P, A, T, Q) = 130 + 10 + 18 + 55 = 213$

$(P, A, T, C) = 130 + 10 + 18 + 110 = 268$

$(P, A, Q, C) = 130 + 10 + 55 + 110 = 305$

$(P, T, Q, C) = 130 + 18 + 55 + 110 = 313$

Portanto, o valor calórico (em kcal) para cada possibilidade de escolha é $\Omega = \{213, 268, 305, 313\}$.

3. a) $\Omega = \{(A, A, V), (A, V, A), (A, V, V), (V, V, A), (V, A, V), (V, A, A)\}$

b) Das 4 bolinhas, 2 são verdes e 2 são amarelas. Então não é possível retirar 3 bolinhas da mesma cor. Logo $E = \varnothing$.

4. Indicando por C, E, O e P, respectivamente, os naipes de copas, espadas, ouros e paus, temos:

a) $A = \{(C, C), (E, E), (O, O), (P, P)\}$

b) $B = \{(O, O), (O, C), (O, E), (O, P)\}$

c) $C = \{(E, E), (E, O), (E, P), (O, O), (O, P), (P, P)\}$

5. a)

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

b) • $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$

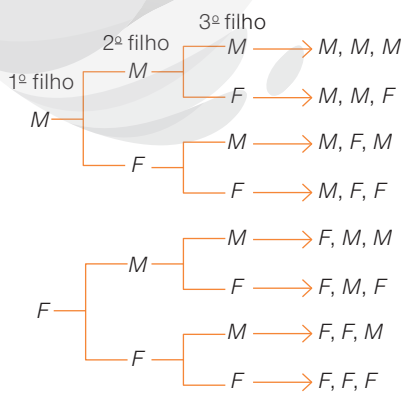
• $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

• $C = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

• $D = \varnothing$

• $E = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

6. a) Em 1970, as mulheres tinham, em média, aproximadamente três filhos. Assim:



b) • $A = \{(M, M, M), (F, F, F)\}$

• $B = \{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M)\}$

• $C = \{(M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$

7. Resposta pessoal.

8. Como a condição desse espaço amostral não limita quantas vezes a moeda será arremessada, o espaço amostral pode ser representado por:

$\Omega = \{(\text{Co}), (\text{Ca, Co}), (\text{Ca, Ca, Co}), (\text{Ca, Ca, Ca, Co})..., (\text{Ca, Ca, Ca, ..., Co}), ...\}$

Portanto, o espaço amostral é infinito, pois não existe um último elemento para ele.

9. a) Nomeando de P as camisas polo, C as camisas de manga curta e L as camisas de manga longa, temos:

$\Omega = \{PP, PC, PL, CC, CL, LL\}$

Portanto, podem ser compradas duas camisas de 6 maneiras diferentes.

b) $\Omega = \{\text{R\$ 120,00; R\$ 130,00; R\$ 140,00; R\$ 150,00; R\$ 160,00; R\$ 180,00}\}$

10. a) As peças do dominó podem ter de 0 a 6 pontos em cada metade, então:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) Para que o resultado das duas metades das peças seja 6, então o espaço amostral deve ser:

$B = \{0, 6; 1, 5; 2, 4; 3\}$

c) Como o maior valor que a metade de uma peça de dominó pode assumir é 6 e o menor valor é 0, não existe um caso no qual a diferença entre as duas metades seja maior do que 6. Assim:

$C = \varnothing$

d) Visto que nenhuma peça representa um valor negativo, o produto das metades de uma peça vão ser sempre não negativos. Logo:

$D = \Omega$

11. Resolução na página XCIII.

12. a) A vida útil da lâmpada não será maior do que 3 anos. Como 1 ano tem 365 dias, então a vida útil dessa lâmpada não será maior do que 1 095 dias. Desse modo:

$\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\,095\}$ ou

$A = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in [0, 1\,095]\}$

b) Como 1 ano é equivalente a 365 dias, 2 anos equivalem a 730 dias. Assim, temos:

$A = \{t \in \mathbb{R} \mid 365 < t < 730\}$ ou

$A = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in]365, 730[\}$

13. Inicialmente, determinamos o espaço amostral da sala e a quantidade de elementos desse espaço amostral:

$\Omega = \{1, 2, 3, ..., 30\} - \{11, 26\}$; $n(\Omega) = 30 - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(\Omega) = 28$

a) Determinando a quantidade de números pares, temos:

$A = \{2, 4, 6, ..., 30\} - \{26\}$; $n(A) = 15 - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow n(A) = 14$

MODERNA

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{14}{28} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser par é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) O evento sorteio de um número menor do que 9 é:

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $n(B) = 8$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \frac{8}{28} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{7}$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser menor do que 9 é $\frac{2}{7}$ ou, aproximadamente, 28,57%.

c) O evento sorteio de um número múltiplo de 4 é:

$C = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28\}$; $n(C) = 7$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(C) = \frac{7}{28} \Rightarrow P(C) = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 4 é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

d) O evento sorteio de um número primo é:

$D = \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29\}$; $n(D) = 9$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(D) = \frac{9}{28}$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser primo é $\frac{9}{28}$ ou, aproximadamente, 32,14%.

e) O evento sorteio de um número maior do que 12 e menor do que 25 é:

$E = \{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$; $n(E) = 12$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(E) = \frac{12}{28} \Rightarrow P(E) = \frac{3}{7}$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser maior do que 12 e menor do que 25 é $\frac{3}{7}$ ou, aproximadamente, 42,86%.

14. O espaço amostral dos números formados a partir dos algarismos 6, 7 e 8 é:

$\Omega = \{678, 687, 768, 786, 867, 876\}$; $n(\Omega) = 6$

a) O evento sorteio de um número ímpar é:

$A = \{687, 867\}$; $n(A) = 2$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{3}$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser ímpar é $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$.

b) A probabilidade de o evento sorteio de um número par ocorrer é a mesma de o evento sorteio de um número ímpar não acontecer. Logo:

$$B = \overline{A}$$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(B) = P(\overline{A}) \Rightarrow P(B) = 1 - P(A) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(B) = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser par é $\frac{2}{3}$ ou $66,\overline{6}\%$.

c) Como todos os elementos do espaço amostral são múltiplos de 3, o evento sorteio de um número múltiplo de 3 será igual ao espaço amostral $C = \Omega$.

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(C) = P(\Omega) \Rightarrow P(C) = 1$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 3 é 1 ou 100%.

d) O evento sorteio de um número maior do que 770 é:

$D = \{786, 867, 876\}$; $n(D) = 3$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser ímpar é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

e) Como nenhum elemento do espaço amostral é múltiplo de 5, o evento sorteio de um número múltiplo de 5 será vazio.

$$E = \varnothing$$

Portanto, a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 5 é 0 ou 0%.

15. alternativa **c**

O evento que representa o sorteio da senha com os números de 1 a 20 é:

$A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$; $n(A) = 20$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{100}$$

Portanto, a probabilidade de a senha sorteada ser um número entre 1 e 20 é $\frac{20}{100}$ ou 20%.

16. Indicando por A o evento em que o aluno acerta a questão, temos:

$$P(A) = \frac{1}{5}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{5} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{4}{5}$$

Portanto, a probabilidade de esse aluno acertar a questão é $\frac{1}{5}$ ou 20% e a probabilidade de esse aluno errar a questão é $\frac{4}{5}$ ou 80%.

17. alternativa **c**

$$n(\Omega) = 10 \cdot 5 = 50$$

Seja A o evento em que a soma é um número ímpar. Isso ocorre quando:

- o primeiro número é par (5 possibilidades) e o segundo é ímpar (3 possibilidades)

ou

- o primeiro é ímpar (5 possibilidades) e o segundo é par (2 possibilidades).

Portanto:

$$n(A) = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 25$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade de a soma dos números ser um número ímpar é $\frac{1}{2}$.

MODERNA

18. a) Na faixa horária das 6 h às 11 h 59 min, pois é nessa faixa horária que ocorre a maior quantidade de infartos.

b) Determinamos a probabilidade de a pessoa infartada dar entrada nesse hospital:

- da 0 h às 5 h 59 min.

$$\frac{14}{21 + 14 + 35} = \frac{1}{5}$$

- da 0 h às 11 h 59 min.

$$\frac{14}{21 + 14 + 35} + \frac{35}{21 + 14 + 35} = \frac{7}{10}$$

Portanto, a probabilidade de uma pessoa enfartada dar entrada nesse hospital da 0 h às 5 h 59 min é $\frac{1}{5}$ ou 20% e, da 0 h às 11 h 59 min, é $\frac{7}{10}$ ou 70%.

19. Conforme os dados do problema, a quantidade de elementos de Ω é 85.

a) O evento que representa o sorteio de um profissional homem é:

$$n(A) = 42$$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{42}{85}$$

Portanto, a probabilidade de o profissional sorteado ser homem é $\frac{42}{85}$ ou, aproximadamente, 49,41%.

b) O evento que representa o sorteio de um profissional ortopedista é:

$$n(B) = 30$$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \frac{30}{85} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{17}$$

Portanto, a probabilidade de o profissional sorteado ser ortopedista é $\frac{6}{17}$ ou, aproximadamente, 35,29%.

c) O evento que representa o sorteio de um profissional mulher e oftalmologista é:

$$n(C) = 14$$

Então, calculando a probabilidade, temos:

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(C) = \frac{14}{85}$$

Portanto, a probabilidade de o profissional sorteado ser mulher e oftalmologista é $\frac{14}{85}$ ou, aproximadamente, 16,47%.

20. a) Calculando a área do Tangram, temos:

$$8 \cdot 8 = 64$$

- Inicialmente, calculamos a área da região alaranjada:

$$\frac{4 \cdot 8}{2} = 16$$

Então, indicando por A o ponto pertencente à região alaranjada, temos:

$$P(A) = \frac{16}{64} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de um ponto pertencer à região alaranjada é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

- Inicialmente, calculamos a área da região roxa:

$$\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$

Então, indicando por B o ponto pertencente à região roxa, temos:

$$P(B) = \frac{4}{64} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{16}$$

Portanto, a probabilidade de um ponto pertencer à região roxa é $\frac{1}{16}$ ou 6,25%.

- Inicialmente, calculamos a área da região azul:

$$\frac{8 \cdot 4}{2} = 16$$

Então, indicando por C o ponto pertencente à região azul, temos:

$$P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) \Rightarrow P\left(\overline{C}\right) = 1 - \frac{16}{64} \Rightarrow P\left(\overline{C}\right) = \frac{3}{4}$$

Portanto, a probabilidade de um ponto não pertencer à região azul é $\frac{3}{4}$ ou 75%.

b) O comprimento do segmento pertencente ao Tangram com abscissa -3 é 8.

- O comprimento do segmento na região vermelha é 1, indicando por D o ponto pertencente à região vermelha, então:

$$P(D) = \frac{1}{8}$$

Portanto, a probabilidade de esse ponto pertencer à região vermelha é $\frac{1}{8}$ ou 12,5%.

- O comprimento do segmento na região verde é 3, indicando por E o ponto pertencente à região verde, então:

$$P(E) = \frac{3}{8}$$

Portanto, a probabilidade de esse ponto pertencer à região verde é $\frac{3}{8}$ ou 37,5%.

c) Calculando a área do Tangram com ordenada positiva, temos:

$$8 \cdot 4 = 32$$

- Calculando a área da região amarela, temos:

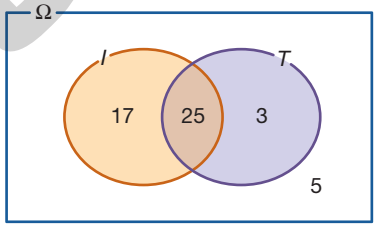
$$4 \cdot 2 = 8$$

Indicando por F o ponto pertencente à região amarela, então:

$$P(F) = \frac{8}{32} \Rightarrow P(F) = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de um ponto pertencer à região amarela é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

21. Para facilitar o entendimento dos alunos, proponha um esquema como o apresentado a seguir.



RONALDO INÁCIO

Indicando por I e T, respectivamente, os moradores que têm internet e os moradores que têm TV por assinatura e sabendo que a quantidade de elementos do espaço amostral é 50, temos:

- A probabilidade de sortear um morador que assine apenas internet é:

$$n(I - T) = 17$$

$$P(I - T) = \frac{n(I - T)}{n(\Omega)} = \frac{17}{50}$$

Portanto, a probabilidade de um morador ter somente internet é $\frac{17}{50}$ ou 34%.

- A probabilidade de sortear um morador que tenha internet e TV por assinatura é:

$$n(I \cap T) = 17$$

$$P(I \cap T) = \frac{n(I \cap T)}{(\Omega)} \Rightarrow P(I \cap T) = \frac{25}{50} \Rightarrow P(I \cap T) = \frac{1}{2}$$

Portanto, a probabilidade de um morador ter internet e TV por assinatura é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

MODERNA

22. Quantidade de seleções possíveis:

$$n(\Omega) = C_{9,2} = \frac{9!}{2!\,(9-2)!} = 36$$

A soma de dois desses números será maior do que seu produto apenas quando um dos dois for 1, pois:

$$x \geq 2 \text{ e } y \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 1 \Rightarrow x + y \leq xy$$

Assim:

$$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), \ldots, (1,9)\};\ n(A) = 8$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

Portanto, a probabilidade de que a soma desses números seja menor do que seu produto é $\frac{2}{9}$ ou $22,\overline{2}\%$.

23. **a)** Observe que a área da região vermelha é igual à metade da área da região total. Para ver isso, basta girar a circunferência de raio $r = 90°$. Portanto, a probabilidade de acertar a região vermelha é $\frac{1}{2}$ ou 50%.

b) Calculando a área total do alvo, temos:

$$A_{total} = \pi \cdot (20)^2 = 400\pi$$

Calculando a área da parte marrom, temos:

$$A_{marrom} = \frac{\pi \cdot (10)^2}{2} = 50\pi$$

Assim:

$$\frac{A_{marrom}}{A_{total}} = \frac{50\pi}{400\pi} = \frac{1}{8}$$

Portanto, a probabilidade de acertar a região marrom é $\frac{1}{8}$ ou 12,5%.

c) Observe que:

$$\frac{A_{azul}}{A_{total}} = \frac{A_{total} - A_{marrom} - A_{vermelha}}{A_{total}} =$$

$$= \frac{(400 - 50 - 200) \cdot \pi}{400\pi} = \frac{3}{8}$$

Portanto, a probabilidade de acertar a região azul é $\frac{3}{8}$ ou 37,5%.

24. Resolução na página XCIII.

25. Resposta pessoal.

26. Resolução na página XCIV.

27. alternativa **e**

A quantidade total de pacientes com problemas respiratórios causados pelas queimadas é:

$$50 + 150 = 200$$

Assim, a probabilidade de que um paciente seja criança é dada por:

$$\frac{150}{200} = 0,75$$

Portanto, a probabilidade de um paciente ser criança é 0,75.

28. **a)** Indicando por A o rei de paus, temos:

- $n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{1}{52}$

Portanto, a probabilidade de ser um rei de paus é aproximadamente 1,92%.

b) Indicando por B uma carta com o número 8, temos:

- $n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{52} \Rightarrow P(B) = \frac{1}{13}$

Portanto, a probabilidade de ser uma carta com o número 8 é aproximadamente 7,69%.

c) Indicando por C e D, respectivamente, um valete e uma carta de ouros, temos:

- $n(C) = 4 \Rightarrow P(C) = \frac{n(C)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(C) = \frac{4}{52}$
  $\Rightarrow P(C) = \frac{1}{13}$
- $n(D) = 13 \Rightarrow P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(D) = \frac{13}{52} \Rightarrow$
  $\Rightarrow P(D) = \frac{1}{4}$
- $n(C \cap D) = 1 \Rightarrow P(C \cap D) = \frac{n(C \cap D)}{n(\Omega)} \Rightarrow$
  $\Rightarrow P(C \cap D) = \frac{1}{52}$

Logo:

$$P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(C \cup D) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

Portanto, a probabilidade de essa carta ser um valete ou uma carta de ouros é aproximadamente 30,77%.

d) Indicando por E e F, respectivamente, uma dama ou uma carta com o número 3, temos:

- $n(E) = 4 \Rightarrow P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(E) = \frac{4}{52}$
  $\Rightarrow P(E) = \frac{1}{13}$
- $n(F) = 4 \Rightarrow P(F) = \frac{n(F)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(F) = \frac{4}{52}$
  $\Rightarrow P(F) = \frac{1}{13}$
- $n(E \cap F) = 0 \Rightarrow P(E \cap F) = 0$

Logo:

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(E \cup F) = \frac{1}{13} + \frac{1}{13} - 0 = \frac{2}{13}$$

Portanto, a probabilidade de essa carta ser uma dama ou o número 3 é aproximadamente 15,38%.

e) Indicando por G e H, respectivamente, cartas de copas e cartas que não sejam figuras, temos:

- $n(G \cap H) = 10 \Rightarrow P(G \cap H) = \frac{n(G \cap H)}{n(\Omega)} \Rightarrow$
  $\Rightarrow P(G \cap H) = \frac{10}{52} \Rightarrow P(G \cap H) = \frac{5}{26}$

Portanto, a probabilidade de essa carta ser de copas e não ser figura é aproximadamente 19,23%.

29. **a)** Indicando por A e B, respectivamente, a aprovação na universidade pública e a aprovação na universidade particular, temos:

$$P(A) = 15\% - 3,45\% = 11,55\%$$

$$P(B) = 23\% - 3,45\% = 19,55\%$$

Então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$$

$$= 11,55\% + 19,55\% - 3,45\% = 27,65\%$$

Portanto, a probabilidade de esse aluno ser aprovado em pelo menos umas das universidades é 27,65%.

MODERNA

b) Dos dados apresentados, temos:

$$P(A) + P(B) = 11{,}55\% + 19{,}55 = 31{,}1\%$$

Portanto, a probabilidade de esse aluno ser aprovado em apenas uma das universidades é 31,1%.

c) Observe que:

$$P\left(\overline{A \cup B}\right) = 100\% - P(A \cup B) = 100\% - 27{,}65\% = 72{,}35\%$$

Portanto, a probabilidade de esse aluno não ser aprovado em nenhuma das universidades é 72,35%.

30. a) • Luana: $L = \{1, 2, 3, 4\}$
- Marcos: $M = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
- Natália: $N = \{1, 3, 4\}$
- Otávio: $O = \{1, 2, 5, 6\}$

Logo, Natália tem a menor probabilidade, pois vence com o menor número de faces. A probabilidade é dada por:

$$P(N) = \frac{n(N)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ ou } 50\%$$

b) • Luana: $L = \{3\}$
- Marcos: $M = \{2, 5\}$
- Natália: $N = \varnothing$
- Otávio: $O = \{1, 2\}$

Logo, Marcos e Otávio têm a maior probabilidade, pois vencem com o maior número de faces. A probabilidade é dada por:

$$P(M) = P(O) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ ou } 33{,}\overline{3}\%$$

31. Indicando por M e G, respectivamente, pessoas que praticam musculação e pessoas que praticam ginástica aeróbica, temos:

$$P(M) = \frac{n(M)}{n(\Omega)} = \frac{62}{120} = \frac{31}{60}$$

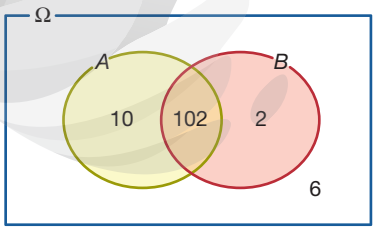
$$P(G) = \frac{n(G)}{n(\Omega)} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$$

$$P(M \cap G) = \frac{n(M \cap G)}{n(\Omega)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

$$P(M \cup G) = P(M) + P(G) - P(M \cap G) = \frac{31}{60} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

Portanto, a probabilidade de esse aluno praticar musculação ou ginástica aeróbica é $\frac{3}{4}$ ou 75%.

32. a) Indicando por A e B, respectivamente, os aprovados no exame médico e os aprovados no exame psicológico, temos:



RONALDO INÁCIO

$$n(A \cup B) = 120 - 6 = 114$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{114}{120} = \frac{19}{20}$$

Portanto, a probabilidade de essa pessoa ser aprovada no exame médico ou no psicológico é $\frac{19}{20}$ ou 95%.

b) $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{112}{120}$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{104}{120}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{114}{120} = \frac{112}{120} + \frac{104}{120} - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{102}{120} = \frac{17}{20}$

Portanto, a probabilidade de essa pessoa ser aprovada em ambos os exames é $\frac{17}{20}$ ou 85%.

c) $P(B) - P(A \cap B) = \frac{104}{120} - \frac{102}{120} = \frac{1}{60}$

Portanto, a probabilidade de essa pessoa ser aprovada somente no exame psicológico é $\frac{1}{60}$ ou $1{,}\overline{6}\%$.

33. Determinando a probabilidade de os alunos A e B serem sorteados, temos:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{17}{20}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{14}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{19}{20}}_{95\%} = \frac{17}{20} + \frac{14}{20} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Portanto, a probabilidade de ser sorteado um problema que foi resolvido por ambos os alunos é 60%.

34. Primeiro, calculamos quantos múltiplos de 4 existem entre 1 e 100:

$$\frac{(100 - 1) + 1}{4} = 25$$

Depois, verificamos a quantidade de números pares entre 1 e 100:

$$\frac{(100 - 1) + 1}{2} = 50$$

Logo, sendo A o evento em que ocorre os números pares de 1 a 100 e B o que ocorre os múltiplos de 4 de 1 a 100, temos:

$$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(B) = \frac{50}{100} - \frac{25}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de um número entre 1 e 100 ser par e não ser múltiplo de 4 é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

35. Calculando a quantidade de filmes que foram dirigidos pelo cineasta B, temos:

$$25 - 15 + 10 = 20$$

Indicando por C o evento em que o filme tenha sido dirigido pelo cineasta B, temos:

$$P(C) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

Portanto, a probabilidade de que o filme escolhido tenha sido dirigido pelo cineasta B é $\frac{2}{5}$ ou 40%.

36. Seja A o evento em que chova em algum momento no dia do aniversário de Camila e B o evento em que faça sol em algum momento desse dia, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) =$$
$$= 79\% + 84\% - 100\% = 163\% - 100\% = 63\%$$

Portanto, a probabilidade de que chova em algum momento e faça sol em outro é 63%.

MODERNA

6 Probabilidade condicional

1. a) Indicando por H e F, respectivamente, homem e físico, temos:

$$P(H|F) = \frac{n(H \cap F)}{n(F)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(H|F) = \frac{35}{35 + 20} \Rightarrow P(H|F) = \frac{7}{11}$$

Portanto, a probabilidade de ser homem e físico é $\frac{7}{11}$ ou $63,\overline{63}\%$.

b) Indicando por Q e M, respectivamente, química e mulher, temos:

$$P(Q|M) = \frac{n(Q \cap M)}{n(M)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(Q|M) = \frac{40}{20 + 40 + 40} \Rightarrow P(Q|M) = \frac{2}{5}$$

Portanto, a probabilidade de ser química e mulher é $\frac{2}{5}$ ou 40%.

c) Indicando por M e B, respectivamente, mulher e bióloga, temos:

$$P(M|B) = \frac{n(M \cap B)}{n(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(M|B) = \frac{40}{45 + 40} \Rightarrow P(M|B) = \frac{8}{17}$$

Portanto, a probabilidade de ser mulher e bióloga é $\frac{8}{17}$ ou, aproximadamente, 47,06%.

d) Indicando por H e Q, respectivamente, homem e químico, temos:

$$P(H|\overline{Q}) = \frac{n(H \cap \overline{Q})}{n(\overline{Q})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(H|\overline{Q}) = \frac{35 + 45}{35 + 20 + 45 + 40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(H|\overline{Q}) = \frac{4}{7}$$

Portanto, a probabilidade de ser homem, mas não ser químico é $\frac{4}{7}$ ou 57,14%.

e) Indicando por M e B, respectivamente, mulher e bióloga, temos:

$$P(\overline{M}|B) = \frac{n(\overline{M} \cap B)}{n(B)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\overline{M}|B) = \frac{45}{45 + 40} \Rightarrow P(\overline{M}|B) = \frac{9}{17}$$

Portanto, a probabilidade de não ser mulher e ser bióloga é $\frac{9}{17}$ ou, aproximadamente, 52,94%.

f) Indicando por H e F, respectivamente, homem e físico, temos:

$$P(\overline{H}|\overline{F}) = \frac{n(\overline{H} \cap \overline{F})}{n(\overline{F})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\overline{H}|\overline{F}) = \frac{40 + 40}{30 + 40 + 45 + 40} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\overline{H}|\overline{F}) = \frac{16}{31}$$

Portanto, a probabilidade de não ser homem nem físico é $\frac{16}{31}$ ou, aproximadamente, 51,61%.

2. a) De acordo com os dados apresentados na página 79, temos:

- Indicando por A e B, respectivamente, o primeiro filho sem a doença e o segundo filho sem a doença, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

Portanto, a probabilidade de o casal ter dois filhos sem a doença é $\frac{9}{16}$.

- Indicando por C e D, respectivamente, os filhos sem a doença e com a doença, temos:

$$P(C \cap D) = P(C) \cdot P(D) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

Portanto, a probabilidade de o casal ter um filho sem a doença e outro com a doença é $\frac{3}{16}$.

- Indicando por E e F, respectivamente, o primeiro e o segundo filhos com traço falciforme, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de o casal ter dois filhos com traço falciforme é $\frac{1}{4}$.

b) Inicialmente, determinamos a possibilidade de o homem ter o traço da doença. Como seu pai não tem a doença (AA), mas sua mãe sim (SS), os possíveis genótipos desse homem são AS, AS, AS ou AS.

Logo, a chance de o homem ter o traço da doença é 100% ou 1.

Determinando a possibilidade de a mulher ter o traço da doença, como o pai a tem (SS), mas desconhecendo o mesmo sobre a mãe, temos três possíveis casos.

- Mãe com a doença (SS). Então, os possíveis genótipos da mulher são SS, SS, SS ou SS.
- Mãe com o traço da doença (AS). Então, os possíveis genótipos da mulher são AS, AS, SS ou SS.
- Mãe sem a doença (AA). Então, os possíveis genótipos da mulher são AS, AS, AS ou AS.

Logo, a mulher pode ter o traço da doença (AS) em 50% dos casos ou ter a doença (SS) em 50% dos casos.

Então, para o filho, como o homem só pode ter genótipo AS, temos dois possíveis casos, com mesma possibilidade.

- Mulher com traço da doença (AS). Então, os possíveis genótipos do filho são AA, AS, AS ou SS.
- Mulher com a doença (SS). Então, os possíveis genótipos do filho são AS, SS, AS ou SS.

Indicando por N e S, respectivamente, o total de combinações possíveis e a quantidade de vezes que o filho apresenta o traço da doença, temos:

$$P(S|N) = \frac{P(S \cap N)}{P(N)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Portanto, a probabilidade de um casal, nessas condições, ter um filho com o traço da doença é 50%.

c) Resposta pessoal.

3. a) Indicando por A e B, respectivamente, a 1ª peça e a 2ª peça perfeitas, temos:

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B \cap A) = \frac{15}{19} \cdot \frac{16}{20} \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{12}{19}$$

Portanto, a probabilidade de ambas serem perfeitas é $\frac{12}{19}$ ou aproximadamente 63,15%.

MODENA

b) Para essa retirada, temos dois possíveis casos.

- Indicando por C e D, respectivamente, a 1ª peça como perfeita e a 2ª peça como defeituosa, temos:

$$P(D \cap C) = P(D \mid C) \cdot P(C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D \cap C) = \frac{4}{19} \cdot \frac{16}{20} \Rightarrow P(D \cap C) = \frac{16}{95}$$

- Indicando por C' e D', respectivamente, a 1ª peça como defeituosa e a 2ª peça como perfeita, temos:

$$P(D' \cap C') = P(D' \mid C') \cdot P(C') \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D' \cap C') = \frac{4}{19} \cdot \frac{16}{20} \Rightarrow P(D' \cap C') = \frac{16}{95}$$

Portanto, a probabilidade de retirar uma peça com defeito e outra perfeita é $\frac{16}{95} + \frac{16}{95} = \frac{32}{95}$ ou aproximadamente 33,68%.

c) Indicando por E e F, respectivamente, a 1ª peça e a 2ª peça como defeituosas, temos:

$$P(F \cap E) = P(F \mid E) \cdot P(E) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(F \cap E) = \frac{3}{19} \cdot \frac{4}{20} \Rightarrow P(F \cap E) = \frac{3}{95}$$

Portanto, a probabilidade de ambas serem defeituosas é $\frac{3}{95}$ ou aproximadamente 3,16%.

4. a) • Indicando por A e B, respectivamente, a 1ª peça e a 2ª peça como vermelhas, temos:

$$P(B \cap A) = P(B \mid A) \cdot P(A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B \cap A) = \frac{15}{47} \cdot \frac{16}{48} \Rightarrow P(B \cap A) = \frac{5}{47}$$

Portanto, a probabilidade de ambas serem vermelhas é $\frac{5}{47}$ ou aproximadamente 10,64%.

- Indicando por C e D, respectivamente, a 1ª peça como qualquer uma e a 2ª peça com o mesmo formato da primeira, temos:

$$P(D \cap C) = P(D \mid C) \cdot P(C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(D \cap C) = \frac{11}{47} \cdot 1 \Rightarrow P(D \cap C) = \frac{11}{47}$$

Portanto, a probabilidade de a 2ª peça ter o mesmo formato da 1ª peça é $\frac{11}{47}$ ou aproximadamente 23,4%.

b) • Indicando por E e F, respectivamente, a peça com formato de triângulo e peças sem formato circular, temos:

$$P(E \mid F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(E \mid F) = \frac{12}{36} \Rightarrow P(E \mid F) = \frac{1}{3}$$

Portanto, a probabilidade de a peça ter formato de triângulo é $\frac{1}{3}$ ou aproximadamente $33,\overline{3}\%$

5. alternativa d

Indicando por A e B, respectivamente, a funcionária com calçado maior do que 36 e a funcionária que calça 38, temos:

$$P(B \mid A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} \Rightarrow P(B \mid A) = \frac{10}{14} \Rightarrow P(B \mid A) = \frac{5}{7}$$

Portanto, a chance de escolher uma funcionária que calça 38 é $\frac{5}{7}$.

6. alternativa c

Oriente os alunos a compor o quadro a seguir para auxiliar na resolução do problema.

	P	M
Lisas	33	26
Estampadas	67	24

Indicando por E e M, respectivamente, as camisetas tamanho M estampadas e as camisetas tamanho M no total, temos:

$$P(E \mid M) = \frac{n(E \cap M)}{n(M)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(E \mid M) = \frac{24}{26 + 24} \Rightarrow P(E \mid M) = \frac{12}{25}$$

Portanto, a probabilidade de tirar uma camiseta estampada tamanho M é $\frac{12}{25}$ ou 48%.

7. Oriente os alunos a compor o quadro a seguir para auxiliar na resolução do problema.

	Placebo	Remédio
Sadias	35	15
Doentes	5	145

Indicando por S e P, respectivamente, as pessoas sadias e as que tomaram placebo, temos:

$$P(\overline{P} \mid S) = \frac{n(\overline{P} \cap S)}{n(S)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\overline{P} \mid S) = \frac{15}{35 + 15} \Rightarrow P(\overline{P} \mid S) = \frac{3}{10}$$

Portanto, a probabilidade de escolher ao acaso uma pessoa que tomou o remédio entre as pessoas sadias é $\frac{3}{10}$ ou 30%.

8. Indicando por H e V, respectivamente, ser homem e ser obrigado a votar, temos:

$$P(H) = 45\%$$

$$P(\overline{V} \mid H) = 100\% - 80\% = 20\%$$

$$P(H \cap \overline{V}) = P(\overline{V} \mid H) \cdot P(H) \Rightarrow P(H \cap \overline{V}) = \frac{20}{100} \cdot \frac{45}{100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(H \cap \overline{V}) = \frac{900}{10\,000} \Rightarrow P(H \cap \overline{V}) = \frac{9}{100}$$

Portanto, a chance de uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, ser homem e não obrigado a votar é $\frac{9}{100}$ ou 9%.

9. Indicando por A e B, respectivamente, o 1º jogador e o 2º jogador, ambos com cartão amarelo, temos:

$$P(B \mid A) = \frac{3}{17}$$

Portanto, a probabilidade de o 2º sorteado para o exame ser um jogador que recebeu cartão amarelo é $\frac{3}{17}$ ou aproximadamente 17,65%.

10. Resposta pessoal.

MODERNA

11. Indicando por A a probabilidade de a compra ser de um sapato com a numeração apresentada, temos:

$$P(A) = \frac{4}{5}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{12}{9} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{12-9} =$$

$$= \binom{12}{9} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \simeq 0{,}2362$$

Portanto, a probabilidade de exatamente 9 mulheres terem comprado sapatos com a numeração apresentada é 0,2362 ou 23,62%.

12. **a)** Indicando por A a probabilidade de sortear o número 3, temos:

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-2} =$$

$$= \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 \simeq 0{,}2637$$

Portanto, a chance de sortear o número 3 duas vezes é, aproximadamente, 0,2637 ou 26,37%.

b) Indicando por B a probabilidade de sortear apenas o número 2, temos:

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(B)]^p \cdot [1 - P(B)]^{n-p} =$$

$$= \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-5} =$$

$$= \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^0 \simeq 0{,}001$$

Portanto, a chance de sortear apenas o número 2 é, aproximadamente, 0,001 ou 0,1%.

c) Indicando por C a probabilidade de sortear o número 4 apenas uma vez, temos:

$$P(C) = \frac{1}{4}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(C)]^p \cdot [1 - P(C)]^{n-p} =$$

$$= \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-1} =$$

$$= \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 \simeq 0{,}3955$$

Portanto, a chance de sortear o número 4 apenas uma vez é aproximadamente 0,3955 ou 39,55%.

d) Indicando por D a probabilidade de o número 1 não ser sorteado, temos:

$$P(D) = \frac{1}{4} \Rightarrow P\left(\overline{D}\right) = 1 - \frac{1}{4} \Rightarrow P\left(\overline{D}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P\left(\overline{D}\right)\right]^p \cdot \left[1 - P\left(\overline{D}\right)\right]^{n-p} =$$

$$= \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right)^{5-5} =$$

$$= \binom{5}{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^0 \simeq 0{,}2373$$

Portanto, a chance de não ser sorteado o número 1 é, aproximadamente, 0,2373 ou 23,73%.

13. Indicando por A a probabilidade de a direção escolhida ser de ataque, temos:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-5} =$$

$$= \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{32}$$

Portanto, a chance de a equipe escolher a direção de ataque, em 5 das 6 partidas, é aproximadamente $\frac{3}{32}$ ou 9,38%.

14. Indicando por A a probabilidade de o atleta saltar 8,5 m, temos:

$$P(A) = \frac{4}{5} = 80\%$$

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{3-2} =$$

$$= \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = \frac{48}{125}$$

Portanto, a chance de o atleta realizar exatamente dois saltos com mais de 8,5 m em uma competição é, aproximadamente, $\frac{48}{125}$ ou 38,4%.

15. Indicando por A os acertos de arremesso, temos:

$$P(A) = \frac{7}{10} = 70\%$$

a) $\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$

$$= \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^5 \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right)^{8-5} =$$

$$= \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \simeq 0{,}2541$$

Portanto, a probabilidade de o jogador ter acertado 5 arremessos é, aproximadamente, 0,2541 ou 25,41%.

b) $\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$

$$= \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right)^{8-0} =$$

$$= \binom{8}{0} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^8 \simeq 0{,}00007$$

Portanto, a probabilidade de o jogador ter errado todos os arremessos é, aproximadamente, 0,00007 ou 0,007%.

c) Para acertar mais que 6 arremessos, o jogador deve acertar 7 ou 8 arremessos.

- 7 arremessos:

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} =$$

$$= \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^7 \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right)^{8-7} =$$

$$= \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) \simeq 0{,}1977$$

MODERNA

- 8 arremessos:

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(A)\right]^{p} \cdot \left[1 - P(A)\right]^{n-p} =$$

$$= \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{8} \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right)^{8-8} =$$

$$= \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^{8} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{0} \simeq 0{,}0576$$

Portanto, a probabilidade de acertar mais do que 6 arremessos é aproximadamente $\underbrace{25{,}53\%}_{19{,}77\% + 5{,}76\%}$.

16. Indicando por A a probabilidade de gerar uma criança com síndrome de Down, temos:

$$P(A) = \frac{1}{2\,500} = 0{,}04\%$$

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(A)\right]^{p} \cdot \left[1 - P(A)\right]^{n-p} =$$

$$= \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2\,500}\right)^{0} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\,500}\right)^{3-0} =$$

$$= \binom{3}{0} \cdot \left(\frac{1}{2\,500}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2\,499}{2\,500}\right)^{3} \simeq 0{,}9988$$

Portanto, a probabilidade de a mulher ter 3 filhos sem síndrome de Down é aproximadamente 0,9988 ou 99,88%.

17. Indicando por A a probabilidade de acertar uma questão, temos:

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Probabilidade de acertar 50% das questões de:

- Matemática:

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(A)\right]^{p} \cdot \left[1 - P(A)\right]^{n-p} =$$

$$= \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{10-5} =$$

$$= \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{5} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5} \simeq 0{,}0584$$

- Conhecimentos gerais:

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(A)\right]^{p} \cdot \left[1 - P(A)\right]^{n-p} =$$

$$= \binom{14}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{7} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{14-7} =$$

$$= \binom{14}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{7} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{7} \simeq 0{,}028$$

Calculando a probabilidade de se classificar com o aproveitamento mínimo, temos:

$$0{,}0584 \cdot 0{,}028 = 0{,}0016$$

Portanto, a probabilidade é 0,0016 ou 0,16%.

18. **a)** Indicando por A a probabilidade de o filho ser menino, temos:

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\binom{n}{p} \cdot \left[P(A)\right]^{p} \cdot \left[1 - P(A)\right]^{n-p} =$$

$$= \binom{13}{13} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{13-13} =$$

$$= \binom{13}{13} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{0} \simeq 0{,}00012$$

Portanto, a probabilidade de essa condição acontecer é, aproximadamente, 0,00012 ou 0,012%.

b) Espera-se que os alunos respondam que qualquer combinação de sexo de 13 filhos tem a mesma probabilidade de ocorrer, pois a probabilidade de uma criança nascer com o sexo masculino ou feminino é 50% cada, e os eventos são independentes.

8 Estatística

1. **a)** Pesquisa censitária.

b) Pesquisa amostral.

2. Quantitativa discreta: idade (em anos) e quantidade de filhos; quantitativa contínua: massa (em kg) e altura (em cm); qualitativa ordinal: grau de instrução; qualitativa nominal: gênero e estado civil.

3. Resposta pessoal. Fica a critério do professor a aplicação dessa tarefa na prática, ou seja, a realização efetiva ou não da pesquisa.

4. Quando todo elemento da população P também é elemento da amostra A, ou seja, quando todos os elementos da população são pesquisados.

5. Espera-se que os alunos respondam que o fabricante utilizará uma amostra, uma vez que é inviável realizar a simulação com todas as 800 unidades produzidas mensalmente desse modelo de automóvel.

6. **a)** Amostragem estratificada.

b) Variável qualitativa nominal.

c) Possível resposta: inicialmente, deveria organizar os elementos da população em determinada ordem ou listagem (possibilitando a identificação de cada um deles). Em seguida, escolher os elementos que compõem a amostra conforme um critério ou fator de repetição.

7. **a)** Calculando o total de peças produzidas diariamente, temos:

$$100 \cdot 500 = 50\,000$$

Logo:

$$\frac{200}{50\,000} = 0{,}004 = 0{,}4\%$$

Portanto, são analisadas diariamente 0,4% da produção.

b) Resposta pessoal.

9 Gráficos e tabelas

1. **a)** Na tabela **I**, é apresentado o consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras, no ano de 2017. Na tabela **II**, é apresentada a quantidade de água necessária para produzir alguns produtos, em 2018.

b) Nordeste; Sudeste

c) Conforme os dados do problema, temos:

$$207 \cdot 10^{6} \cdot 153{,}6 \simeq 3{,}2 \cdot 10^{10}$$

Portanto, $3{,}2 \cdot 10^{10}\ \ell$.

d) açúcar; leite; milho

e) Como a tabela **II** apresenta a quantidade de água para produzir 1 kg de cada produto, então, a fim de calcular a quantidade de água para produzir 500 g de cada produto da tabela **II**, devemos dividir o resultado por 2.

MODERNA

Assim:

$$\frac{9\,980 + 2\,497 + 1\,782 + 1\,020 + 1\,222}{2} = 8\,250{,}5$$

Portanto, são necessários 8 250,5 ℓ de água pra produzir a quantidade desejada.

f) Resposta pessoal.

2. **a)** Norte e Nordeste. Espera-se que os alunos respondam que a intensificação foi bem-sucedida, pois, em 2018, houve um aumento na taxa de doação nessas regiões, quando comparada com 2017.

b) Norte; Nordeste; Centro-Oeste; Sul

3. Resposta pessoal.

4. **a)** Não, pois os dados apresentados nessa tabela são referentes à produção por pessoa. Para fazer uma comparação quantitativa, é necessário conhecer a quantidade de habitantes de cada um dos estados em questão.

b) Conforme os dados do exercício, temos:

$$\frac{568 \cdot 3\,996\,496}{1\,000} \simeq 2\,270\,009{,}7$$

Portanto, serão produzidos, aproximadamente, 2 270 009,7 kg de resíduos.

- Resposta pessoal.

5. **a)** tireoide

b) Determinando as estimativas de casos de câncer de colo e reto, temos:

$$20\,520 + 20\,470 = 40\,990$$

Portanto, a estimativa é de 40 990 casos.

c) Determinando a estimativa de casos diagnosticados em homens, temos:

$$\frac{7\,590}{7\,590 + 3\,050} = \frac{7\,590}{10\,640} \simeq 0{,}713$$

Portanto, a estimativa de casos diagnosticados em homens é, aproximadamente, 71,3%.

6. **a)** Yanomami e Tenetehara

b) Indicando por x a população indígena que declarou pertencer a alguma etnia, temos:

$$\frac{46\,045}{x} = \frac{6{,}8}{100} \Rightarrow x = \frac{46\,045 \cdot 100}{6{,}8} \Rightarrow x \simeq 677\,100$$

Portanto, a população que declarou pertencer a alguma etnia é, aproximadamente, 667,1 mil.

c) Resposta pessoal.

7. Calculando as variações, temos:

$V_{2012-2011} = 245\,179\,231 - 205\,181\,773 = 39\,997\,458$

$V_{2013-2012} = 262\,257\,580 - 245\,179\,231 = 17\,078\,349$

$V_{2014-2013} = 272\,353\,241 - 262\,257\,580 = 10\,095\,661$

$V_{2015-2014} = 281\,720\,211 - 272\,353\,241 = 9\,366\,970$

$V_{2016-2015} = 257\,247\,860 - 281\,720\,211 = -24\,472\,351$

$V_{2017-2016} = 243\,419\,575 - 257\,247\,860 = -13\,828\,285$

$V_{2018-2017} = 236\,229\,867 - 243\,419\,575 = -7\,189\,708$

$V_{2019-2018} = 228\,267\,265 - 236\,229\,867 = -7\,962\,602$

Portanto, entre janeiro de 2011 e janeiro de 2012 ocorreu a maior variação, totalizando 39 997 458 acessos.

8. **a)** Determinando a diferença entre a 20ª e a 30ª semanas, temos:

- Estados Unidos da América

$$464\,814 - 159\,468 = 309\,346$$

- Brasil

$$319\,653 - 77\,203 = 242\,450$$

- Índia

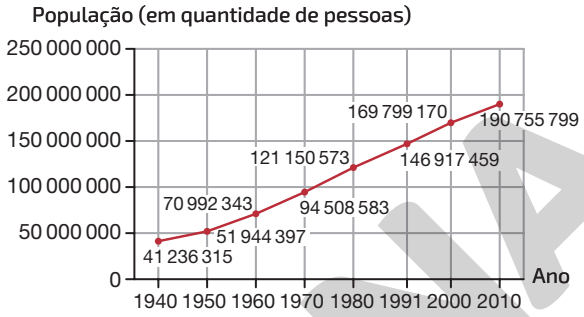
$$298\,145 - 26\,278 = 241\,867$$

Portanto, a diferença entre a quantidade de casos confirmados na 20ª e na 30ª semanas epidemiológicas é: nos Estados Unidos da América, 309 346; no Brasil, 242 450; na Índia, 241 867.

b) Resposta pessoal.

9. Conforme os dados do problema, temos:

População do Brasil de 1940 a 2010



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados54&uf500>. Acesso em: 8 jun. 2020.

10. **a)** As cestas de 2 pontos correspondem a 60% das cestas convertidas pelo time.

b) O gráfico representa as 40 cestas convertidas pela equipe. Então:

- Cestas de 3 pontos:

$$0{,}25 \cdot 40 = 10$$

Portanto, foram convertidas 10 cestas de 3 pontos.

- Cestas de 2 pontos:

$$0{,}60 \cdot 40 = 24$$

Portanto, foram convertidas 24 cestas de 2 pontos.

- Cestas de 1 ponto:

$$0{,}15 \cdot 40 = 6$$

Portanto, foram convertidas 6 cestas de 1 ponto.

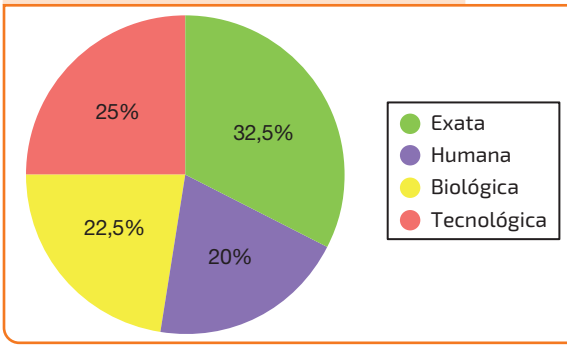
Indicando por T o total de pontos convertidos, temos:

$$T = 3 \cdot 10 + 2 \cdot 24 + 1 \cdot 6 \Rightarrow T = 84$$

Portanto, nessa partida, a equipe converteu 84 pontos.

11. Conforme os dados do problema, temos:

Distribuição dos cursos por área de conhecimento na Universidade *X* em 2020



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: Catálogo da instituição.

12. **a)** 20 a 24 anos e 25 a 29 anos

b) masculino; feminino

c) A resposta depende da idade dos alunos.

MODERNA

13. a) 2016

b) Não. Espera-se que os alunos respondam que entre os anos de 2015 e 2016, por exemplo, a área desmatada foi crescente.

c) Calculando o aumento da área desmatada, temos:

$$\frac{7\,536 - 6\,947}{6\,947} \simeq 0{,}085$$

Portanto, a área desmatada em 2018 foi, aproximadamente, 8,5% maior do que a área desmatada em 2017.

14. a) Não, pois diferentes tipos de pessoa frequentam diferentes tipos de supermercados. A amostra daria unicamente indicações sobre a população constituída pelos clientes desse supermercado.

b) Sim, as porcentagens somam mais do que 100%. Nesse caso, a amostra usada não é representativa e a área do setor correspondente a 55% é maior do que a do setor correspondente a 60%.

15. a) Conforme os dados do problema, temos:

- 1º trimestre

MatSong vendeu 534 guitarras.

Concorrente A vendeu 545 guitarras.

Concorrente B vendeu 500 guitarras.

Portanto, o Concorrente A vendeu a maior quantidade de guitarras no 1º trimestre.

- 3º trimestre

Como os valores da tabela representam os valores acumulados das vendas da *MatSong*, temos:

$$740 - 732 = 8$$

Assim, *MatSong* vendeu 8 guitarras.

Concorrente A vendeu 120 guitarras.

Concorrente B vendeu 210 guitarras.

Portanto, o Concorrente B vendeu a maior quantidade de guitarras no 3º trimestre.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que sim, pois os valores referentes às vendas da loja *MatSong* nos 2º, 3º e 4º trimestres são os acumulados, enquanto os referentes às vendas das outras lojas são trimestrais.

c) Determinando o total de guitarras vendidas em cada loja durante 2020, temos:

MatSong: 800 guitarras

Concorrente A:

$$545 + 200 + 120 + 340 = 1\,205$$

Assim, 1 205 guitarras.

Concorrente B:

$$500 + 160 + 210 + 250 = 1\,120$$

Assim, 1 120 guitarras.

Portanto, o Concorrente A vendeu mais guitarras em 2020.

16. Não, pois foram analisadas apenas as empresas que tiveram os maiores volumes de exportação no último ano, o que, geralmente, não representa a situação financeira de todas as empresas de um estado.

17. Não. Espera-se que os alunos respondam que o eixo "Quantidade (%)" está invertido.

18. a) Espera-se que os alunos respondam que a área do setor correspondente à marca B foi ampliada e a área do setor correspondente a "Outras" foi reduzida.

b) A marca B vendeu menor quantidade de *notebook* do que as marcas D, E e F juntas, pois a marca B vendeu 19% do total de *notebooks*, enquanto as marcas D, E e F venderam juntas 30% do total de *notebooks*.

10 Medidas de tendência central

1. Resolução na página XCIV.

2. Indicando em rol as alturas dos prédios, temos:

554; 599; 601; 632; 828

a) A média aritmética é:

$$\bar{x} = \frac{554 + 599 + 601 + 632 + 828}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{3\,214}{5} \Rightarrow \bar{x} = 642{,}8$$

Portanto, a média das alturas dos prédios é 642,8 m.

Não há uma medida com maior frequência, portanto o conjunto é amodal.

O total de dados é 5 (ímpar). Assim, a posição central é:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

Assim, é a 3ª posição.

Portanto, a média é 642,8 m e o conjunto de dados é amodal. Já a mediana é 601 m.

b) Para que a média das alturas diminua, o prédio a ser desconsiderado deve ser o de maior altura, ou seja, o Burj Khalifa.

Desconsiderando o Burj Khalifa, determinando a média, temos:

$$\bar{x} = \frac{554 + 599 + 601 + 632}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{2\,386}{4} \Rightarrow \bar{x} = 596{,}5$$

Portanto, se o prédio com maior altura for desconsiderado do rol, a média das alturas dos prédios será 596,5 m.

3. Indicando a idade de Felipe por x, a idade do filho de Felipe por $\frac{1}{2}x$ e a idade do pai de Felipe por $2x$, temos:

$$\frac{x + \frac{x}{2} + 2x}{3} = 49 \Rightarrow x = 42$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{42}{2} = 21$$

$$2x = 2 \cdot 42 = 84$$

Logo, a idade de Felipe é 42 anos; a de seu filho, 21 anos; e a de seu pai, 84 anos.

4. Indicando os pesos e as notas das provas A e B no quadro a seguir, temos:

	Peso	Nota
Prova A	7	6,5
Prova B	5	x

Sabendo que a média ponderada das notas das provas A e B deve ser maior ou igual a 7, temos:

$$7 \leqslant \frac{7 \cdot 6{,}5 + 5 \cdot x}{12} \Rightarrow 38{,}5 \leqslant 5x \Rightarrow x \geqslant 7{,}7$$

Portanto, para que seja aprovado, Carlos precisa obter nota igual ou superior a 7,7.

5. A média das turmas A, B e C em Matemática é dada por:

$$\bar{x} = \frac{24 \cdot 77 + 30 \cdot 59 + 26 \cdot 67}{80} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{5\,360}{80} \Rightarrow \bar{x} = 67$$

Portanto, a média das três turmas é 67.

MODERNA

6. **a)** Calculando a média das notas de Amanda, temos:

$$\bar{x} = \frac{5{,}2 + 6{,}3 + 9}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{20{,}5}{3} \Rightarrow \bar{x} \simeq 6{,}83$$

Portanto, mesmo que Amanda tire 9 na prova prática, ela não será aprovada, pois sua média seria aproximadamente 6,83, ou seja, abaixo da média exigida, que é 7.

b) Sabendo que para ser aprovado a média precisa ser igual ou maior do que 7, então:

$$7 \leqslant \frac{6{,}5 + 7{,}2 + x}{3} \Rightarrow x \geqslant 7{,}3$$

Portanto, Pedro deve obter, no mínimo, 7,3 na prova prática.

c) Para não ser eliminada na prova prática, a nota de Fátima deve ser igual ou superior a 5. Assim, temos:

$$\bar{x} = \frac{7{,}8 + 8{,}3 + 5}{3} \Rightarrow \bar{x} = \frac{21{,}1}{3} \Rightarrow \bar{x} \simeq 7{,}03$$

Portanto, se Fátima não for eliminada na prova prática, ela será aprovada, pois sua média final será aproximadamente 7,03, isto é, acima de 7.

7. alternativa **d**

Indicando os dados referentes ao tempo (em segundos) em rol, temos:

20,50; 20,60; 20,60; 20,80; 20,90; 20,90; 20,90; 20,96.

O total de dados no conjunto é 8 (par). Logo, as posições centrais são:

$$\frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 5$$

Logo, são as posições 4ª e 5ª que correspondem, respectivamente, aos números 20,80 e 20,90. Assim, determinando a mediana, temos:

$$Md = \frac{20{,}80 + 20{,}90}{2} \Rightarrow Md = 20{,}85$$

Portanto, o tempo mediano de nado dos atetas é 20,85 segundos.

8. **a)** Para obtermos a média do tempo de cada vídeo, temos:

$$\bar{x} = \frac{31 + 35 + 52 + 38}{13 + 8 + 17 + 14} \Rightarrow \bar{x} = \frac{156}{52} \Rightarrow \bar{x} = 3$$

Portanto, o tempo médio de cada vídeo é 3 minutos.

b) Espera-se que os alunos respondam que não, pois não é dado o tempo de cada vídeo para organizá-los em um rol e analisar esses dados.

9. Resolução na página XCIV.

10. Resposta pessoal.

11. alternativa **a**

Indicando o conjunto de dados, de acordo com os dados do problema, temos:

$$102;\ \underbrace{\_\_\_\_;\_\_\_\_}_{102,\ 103\ \text{ou}\ 104};\ 104;\ \_\_\_\_;\ \_\_\_\_;\ \_\_\_\_$$

Os números que estão entre 102 e 104 podem ser 102, 103 ou 104, o que nos leva a concluir que haverá repetição, ou seja, algum deles deverá aparecer ao menos duas vezes. Como foi dada a informação de que 107 é a única moda, logo esse número deverá aparecer 3 vezes, ou seja, os três últimos termos do conjunto são iguais a 107. Então:

a) Verdadeira. Como os três últimos termos do conjunto são iguais a 107, logo é o maior número do conjunto.

b) Falso. Caso 105 fizesse parte do conjunto de dados, estaria posicionado depois do 104, o que não pode ocorrer, já que os três últimos termos do conjunto são iguais a 107.

c) Falso, pois o maior número é 107.

d) Falso. Não é possível afirmar que 103 é o segundo maior número do conjunto, tendo em vista que 102 pode aparecer mais uma vez.

e) Falso. Não é possível afirmar o valor da média, visto que não se conhece o segundo e o terceiro termo do conjunto.

Portanto, a alternativa correta é **a**.

12. Resolução na página XCV.

13. Resolução na página XCV.

11 Medidas separatrizes

1. Inicialmente, organizamos os 24 elementos em rol.

0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10

a) Para determinar Q_2, calculamos a mediana dos conjuntos de dados.

$$Q_2 = \frac{5 + 5}{2} \Rightarrow Q_2 = 5$$

Portanto, Q_2 é igual a 5.

b) Determinando o oitavo decil do conjunto de valores, temos:

$$8 \cdot \frac{24}{10} = 19{,}2 \simeq 19$$

Portanto, o oitavo decil ocupa a 19ª posição, logo D_8 é igual a 8.

c) A primeira metade dos elementos do conjunto dos dados é:

0, 0, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5

Assim, determinando a mediana desse conjunto de elementos, temos:

$$Q_1 = \frac{2 + 3}{2} \Rightarrow Q_1 = 2{,}5$$

Portanto, Q_1 é igual a 2,5.

d) Determinando o quinto decil do conjunto de valores, temos:

$$5 \cdot \frac{24}{10} = 12$$

Nesse caso, o quinto decil ocupa a 12ª posição. Portanto, D_5 é igual a 5.

e) Determinando o segundo decil do conjunto de valores, temos:

$$2 \cdot \frac{24}{10} = 4{,}8 \simeq 5$$

Nesse caso, o segundo decil ocupa a 5ª posição. Portanto, D_2 é igual a 1.

f) A segunda metade dos elementos do conjunto dos dados é:

5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10

Assim, determinando a mediana desse conjunto de elementos, temos:

$$Q_3 = \frac{8 + 8}{2} \Rightarrow Q_3 = 8$$

Portanto, Q_3 é igual a 8.

2. **a)** Determinando o terceiro decil desses elementos, temos:

$$3 \cdot \frac{20}{10} = 6$$

Nesse caso, o terceiro decil ocupa a 6ª posição. Portanto, D_3 é igual a 101,23.

b) Uma possível resposta: 30% dos pilotos fizeram sua volta mais rápida em 101,23 s ou menos.

3. **a)** Falsa. Aproximadamente 40% dos alunos obtiveram uma nota menor ou igual a 6,5.

b) Verdadeira.

c) Falsa. Um aluno que obteve nota 8 está no 8º decil.

d) Verdadeira.

4. Resolução na página XCV.

5. Resposta pessoal.

MODELNA

12 Medidas de dispersão

1. Resolução na página XCVI.

2. Resolução na página XCVII.

3. a) Inicialmente, organizamos os dados da tabela em rol:

14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 20, 20, 21, 25, 25, 28, 28, 28, 29, 30

Então, determinamos a amplitude:

$$A = 30 - 14 \Rightarrow A = 16$$

Portanto, a amplitude é 16 anos.

b) Caso saia um jogador de 30 anos da guilda e entre um de 42, temos:

$$A = 42 - 14 \Rightarrow A = 28$$

Portanto, a amplitude será 28 anos.

c) A alteração do valor máximo do conjunto de valores altera muito a amplitude.

d) Resposta pessoal.

4. Inicialmente, calculamos a média dessas notas.

$$\bar{x} = \frac{54 + 68 + 61}{3} \Rightarrow \bar{x} = 61$$

Logo:

$$Dp = \sqrt{\frac{(54 - 61)^2 + (68 - 61)^2 + (61 - 61)^2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dp = \sqrt{32{,}67} \Rightarrow Dp \simeq 5{,}72$$

Portanto, a candidata não foi aprovada, pois, apesar de sua média ser superior a 60 pontos, o desvio-padrão foi superior a 5 pontos.

5. Resolução na página XCVIII.

6. Resposta pessoal.

7. Resolução na página XCIX.

8. Resolução na página XCIX.

9. Resposta pessoal.

10. Conforme os dados do problema, temos:

Nascimentos diários em agosto de 2020

Quantidade de nascimentos	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
0	1	1	3,3%	3,3%
1	3	4	10%	13,3%
2	9	13	30%	43,3%
3	6	19	20%	63,3%
4	8	27	26,7%	90%
5	3	30	10%	100%
Total	30		100%	

Fonte de pesquisa: Maternidade.

11. Conforme os dados do problema, temos:

a) Esse condomínio tem 40 apartamentos, e 6 deles têm exatamente 4 moradores.

b)

Quantidade de moradores por apartamento, em um condomínio residencial, em janeiro de 2020

Quantidade de moradores	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
0	4	4	10%	10%
1	5	9	12,5%	22,5%
2	12	21	30%	52,5%
3	11	32	27,5%	80%
4	6	38	15%	95%
5	2	40	5%	100%
Total	40		100%	

Fonte de pesquisa: Administração do condomínio.

c) Dos 40 apartamentos, 21 têm 2 moradores ou menos. Então, determinando a porcentagem que essa quantidade representa, temos:

$$\frac{21}{40} \cdot 100 = 52{,}5$$

Portanto, 52,5% dos apartamentos têm 2 moradores ou menos.

12. a) Conforme os dados do problema, temos:

Quantidade média de horas de sono diário dos alunos de 14 a 17 anos de um grupo de estudos em fevereiro de 2020

Quantidade de horas de sono	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
4	1	1	3,125%	3,125%
5	2	3	6,25%	9,375%
6	6	9	18,75%	28,125%
7	12	21	37,5%	65,625%
8	6	27	18,75%	84,375%
9	3	30	9,375%	93,75%
10	2	32	6,25%	100%
Total	32		100%	

Fonte de pesquisa: Resultado do questionário.

b) A quantidade de alunos entre 14 e 17 anos nesse grupo de estudos é 32 alunos, 6,25% deles dormem as 10 horas recomendadas.

MODERNA

13. a) Conforme os dados apresentados, temos dois grupos que se encaixam nos parâmetros. Assim:

$$6 + 18 = 24$$

Portanto, 24 pacientes têm níveis de triglicérides iguais ou superiores a 70 mg/dℓ e inferiores a 170 mg/dℓ.

b) Determinando a porcentagem dos pacientes com níveis de triglicérides iguais ou superiores a 220 mg/dℓ, temos:

$$20\% + 25\% = 45\%$$

Portanto, 45% dos pacientes têm níveis de triglicérides iguais ou superiores a 220 mg/dℓ.

c) O tratamento é recomendado para pessoas com níveis de triglicérides superiores a 150 mg/dℓ, então pode ser recomendado a 43 pacientes.

14. Conforme os dados da tabela, temos:

a) 20 atletas treinam nessa equipe.

b) A maior quantidade de atletas está concentrada no intervalo $1{,}8 \vdash 1{,}9$.

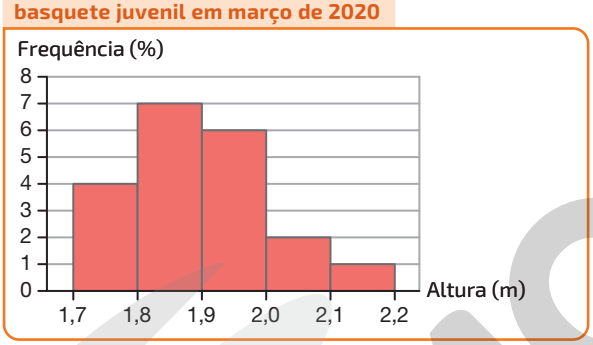
c) Três atletas têm altura igual ou superior a 2 m.

d) 55% dos atletlas têm altura inferior a 1,9 m.

e) Não, pois não conhecemos a altura de nenhum deles; sabemos apenas que existem 7 atletas com alturas entre 1,8 m e 1,9 m.

f)

Altura dos atletas da equipe de basquete juvenil em março de 2020



Fonte de pesquisa: Ficha técnica.

15. Resolução na página C.

16. a) Determinando a população brasileira com menos de 40 anos de idade em:

- 2023, temos:

$$58\,989\,621 + 67\,633\,621 = 126\,623\,242$$

- 2025, temos:

$$58\,428\,570 + 66\,754\,899 = 125\,183\,469$$

Portanto, a população brasileira com menos de 40 anos em 2023 será 126 623 242 habitantes e, em 2025, 125 183 469 habitantes.

b) Determinando o aumento da projeção da população brasileira com idade igual ou maior do que 40 anos e menor do que 60 anos entre 2023 e 2025, obtemos:

$$\frac{57\,761\,550}{55\,981\,041} \cdot 100 \simeq 103{,}2$$

$$103{,}2 - 100 = 3{,}2$$

Portanto, o aumento será aproximadamente 3,2%.

c) As faixas que têm projeção de queda para 2025, comparado a 2023, são as de $0 \vdash 20$ anos e $20 \vdash 40$ anos.

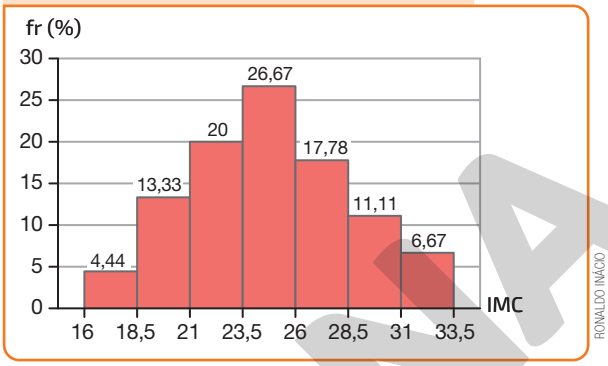
17. Determinando a quantidade de pessoas que pagaram menos de R$ 325,60, temos:

$$12\,330 + 9\,456 + 10\,234 = 32\,020$$

Portanto, 32 020 pessoas pagaram menos de R$ 325,06 no ingresso.

18. a)

IMC de algumas pessoas em março de 2020



Fonte de pesquisa: Pessoas do grupo.

b) Resposta pessoal.

19. Resposta pessoal.

20. a) A amostra é composta de 100 plantas.

b) Inicialmente, obtemos o valor médio de cada intervalo:

Comprimento das plantas da amostra em abril de 2020

Comprimento (cm)	Quantidade de plantas	Valor médio (*vm*)
$3 \vdash 5$	6	$\frac{4}{\frac{3+5}{2}}$
$5 \vdash 7$	18	6
$7 \vdash 9$	47	8
$9 \vdash 11$	21	10
$11 \vdash 13$	8	12

Fonte de pesquisa: Anotações do engenheiro agrônomo.

Assim, podemos calcular a média:

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 4 + 18 \cdot 6 + 47 \cdot 8 + 21 \cdot 10 + 8 \cdot 12}{6 + 18 + 47 + 21 + 8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 8{,}14$$

A amostra que mais se repete é a com 8 cm, logo a moda é 8 cm.

A mediana corresponde à média dos 50º e 51º elementos, ambos dentro do valor médio 8 cm, então:

$$Md = \frac{8 + 8}{2} \Rightarrow Md = 8$$

Portanto, a média é 8,14 cm, a moda é 8 cm e a mediana é 8 cm.

c) Não se pode afirmar uma quantidade exata, mas sabemos que é entre 29% e 76%.

MODERNA

21. a) Inicialmente, obtemos o valor médio de cada intervalo:

Velocidade dos veículos que passaram pelo local em certo período do dia 15 de abril de 2020

Velocidade (km/h)	Frequência (f)	Valor médio (vm)
$50 \vdash 60$	3	55
$60 \vdash 70$	5	65
$70 \vdash 80$	11	75
$80 \vdash 90$	19	85
$90 \vdash 100$	9	95
$100 \vdash 110$	3	105

Fonte de pesquisa: Associação de moradores.

Assim, calculando a média das velocidades registradas, temos:

$$\bar{x} = \frac{55 \cdot 3 + 65 \cdot 5 + 75 \cdot 11 + 85 \cdot 19 + 95 \cdot 9 + 105 \cdot 3}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 82$$

Portanto, a média das velocidades registradas é 82 km/h.

b) A média da velocidade ficou acima do limite do trecho.

22. Resolução na página C.

23. Resolução na página C.

24. Algumas possíveis respostas: dois funcionários levam 5 minutos para ir de suas casas ao trabalho; aproximadamente 40% dos funcionários levam 25 minutos para ir de suas casas ao trabalho; o funcionário que leva mais tempo demora 45 minutos.

25. A quantidade mediana de acertos da turma A foi 11; da turma B foi 9; da turma C foi 10; da turma D foi 11.

26. a) Espera-se que os alunos respondam: diagrama de ramo-e-folhas ou diagrama de pontos.

b) Construindo o diagrama de ramo-e-folhas, temos:

Tempo, em minutos, dedicado diariamente aos estudos em 2020

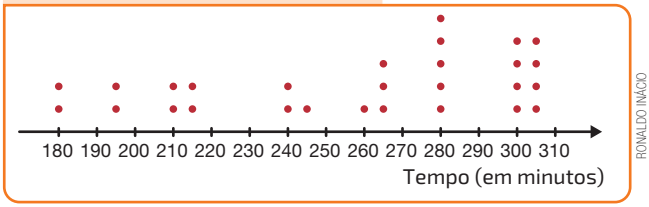
18	0 0
19	5 5
20	
21	0 0 5 5
22	
23	
24	0 0 5
25	
26	0 5 5 5
27	
28	0 0 0 0 0
29	
30	0 0 0 0 5 5 5 5 5

Legenda:
21|0 é igual a 210 minutos
30|5 é igual a 305 minutos

Fonte de pesquisa: Registros de João.

Construindo o diagrama de pontos:

Tempo, em minutos, dedicado diariamente aos estudos em 2020



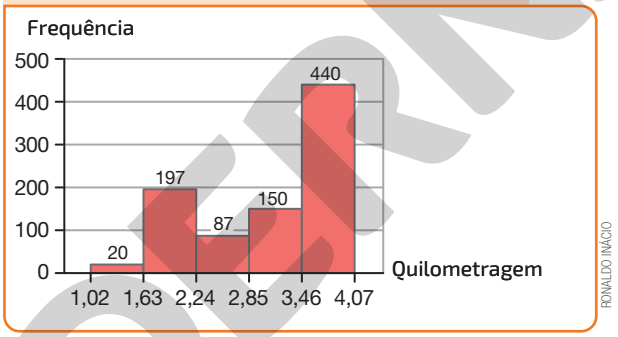
Fonte de pesquisa: Registros de João.

c) Não, pois, dos 28 alunos, apenas 8 estudam mais do que 4 h 30 min, ou 300 min, ou seja, menos da metade.

27. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam histograma, pois a quantidade de valores apresentados é alta.

b) Uma possível resposta:

Quilometragem média por litro de óleo *diesel* dos ônibus de certo município em março de 2020

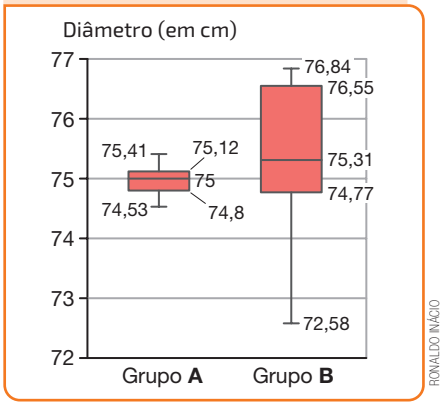


Fonte de pesquisa: Registros da prefeitura do município.

28. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam *box-plot*.

b) Construindo o *box-plot*, temos:

Diâmetro, em centímetros, das peças produzidas pelo grupo A e pelo grupo B no dia 10 de agosto de 2020.



Fonte de pesquisa: Registros da empresa.

Analisando esses gráficos, podemos concluir que o treinamento foi válido. Ao compararmos o grupo A, que participou de um treinamento, com o grupo B, que não participou do treinamento, é possível concluir que a variação do diâmetro das peças no grupo A foi menor do que a do grupo B.

MODERNA

13 Estatística e probabilidade

1. **a)** Indicando por A o evento de um domicílio urbano ter serviço de rede de esgoto em 2012, temos:

$$P(A) = \frac{35\,982}{54\,886} \Rightarrow P(A) \simeq 0{,}656$$

Portanto, a probabilidade de um domicílio urbano no Brasil ter serviço de rede de esgoto em 2012 é aproximadamente 65,6%.

b) Indicando por B o evento de um domicílio urbano ter serviço de rede de esgoto em 2015, temos:

$$P(\overline{B}) = 1 - \frac{39\,671}{58\,245} \Rightarrow P(\overline{B}) \simeq 0{,}321$$

Portanto, a probabilidade de um domicílio urbano no Brasil não ter serviço de rede de esgoto em 2015 é aproximadamente 32,1%.

c) Calculando as probabilidades, temos:

- 2013: $\frac{37\,455}{55\,968} \simeq 0{,}669$
- 2014: $\frac{38\,153}{57\,718} \simeq 0{,}661$

Portanto, a maior probabilidade de um domicílio no Brasil estar ligado à rede coletora de esgoto ocorreu em 2013.

2. Inicialmente, calculamos o total de sorteios realizados:

$$427 + 902 + 271 = 1\,600$$

Então, calculando a porcentagem da probabilidade do sorteio de cada bolinha, temos:

- Branca:
$$\frac{427}{1\,600} \cdot 100 \simeq 26{,}69$$
- Preta:
$$\frac{902}{1\,600} \cdot 100 \simeq 56{,}37$$
- Vermelha:
$$\frac{271}{1\,600} \cdot 100 \simeq 16{,}94$$

Assim, a probabilidade de sortear uma bolinha branca é, aproximadamente, 26,69%, de sortear uma bolinha preta é, aproximadamente, 56,37% e de sortear uma bolinha vermelha é, aproximadamente, 16,94%.

Determinando a quantidade de bolinhas de cada cor, temos:

- Branca:
$$30 \cdot 0{,}2669 \simeq 8$$
- Preta:
$$30 \cdot 0{,}5637 \simeq 17$$
- Vermelha:
$$30 \cdot 0{,}1694 \simeq 5$$

Portanto, a estimava é que essa urna contenha 8 bolinhas brancas, 17 bolinhas pretas e 5 bolinhas vermelhas.

3. Sim. Espera-se que os alunos digam que a probabilidade de se obter cada face deveria ser próxima da probabilidade teórica, que é dada por $\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6}$, ou seja, $16{,}\overline{6}\%$. Existe uma tendência maior de saírem as faces de números 2 e 5. Podemos demonstrar isso indicando por A e B, respectivamente, o evento de ocorrer a face de número 2 e o evento de ocorrer a face de número 5.

$$P(A) = \frac{225}{113 + 225 + 105 + 120 + 202 + 135} = 0{,}25$$

$$P(B) = \frac{202}{113 + 225 + 105 + 120 + 202 + 135} = 0{,}22\overline{4}$$

Nesse caso, a probabilidade de ocorrer as faces de números 2 e 5 são, respectivamente, 25% e $22,\overline{4}\%$. Portanto, pode-se suspeitar desse dado.

4. Como ambos os grupos tomam a pílula anticoncepcional, então o grupo que usou camisinha masculina como segunda medida preventiva teve a redução de aproximadamente 98% nos casos de gravidez não planejada se comparado ao primeiro grupo.

5. Algumas possíveis respostas: abertura de um negócio; destino de uma viagem considerando a possibilidade de chuva.

Resolução do tema **5**

11. **a)** $\Omega = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, B, D), (A, C, D, B), (A, D, B, C), (A, D, C, B)\}$

b) $M = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, D, B), (A, D, C, B)\}$

c) $N = \{(A, C, B, D), (A, D, B, C)\}$

d) $P = \varnothing$

24. **a)** Indicando por x e y, respectivamente, o número da face do dado enumerado de 1 a 6 e o número da face do dado enumerado de 3 a 8, então:

$$\Omega = \{(x, y), x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, y \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}\}, n(\Omega) = 36$$

Além disso, o conjunto A, que representa o evento no qual a soma dos dados é maior do que 9, é dado por:

$$A = \{(6, 4), (5, 5), (6, 5), (4, 6), (5, 6), (6, 6), (3, 7), (4, 7), (5, 7), (6, 7), (2, 8), (3, 8), (4, 8), (5, 8), (6, 8)\}$$

Assim:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \frac{15}{36} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{12}$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer o evento A é $41,\overline{6}\%$.

b) Observe que a menor soma possível que se pode obter nos dados é:

$$1 + 3 = 4$$

Assim, o conjunto que representa o evento no qual a soma dos dados tem de ser maior ou igual a 4 é o espaço amostral Ω.

Portanto, a probabilidade de Pedro ganhar na rodada seguinte é 100%.

MODERNA

26. A quantidade de números distintos que podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5 e 9 é:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Por outro lado, o conjunto dos números formados pelos algarismos 3, 4, 5 e 9 que são maiores do que 4 593 é dado por:

$$A = \{4\,935, 4\,953, 5\,349, 5\,439, 5\,934, 5\,943, 5\,394, 5\,493, 9\,345, 9\,435, 9\,534, 9\,543, 9\,354, 9\,453\}$$

Assim:

$$P(A) = \frac{n(A)}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

Portanto, a probabilidade de escolher um número maior do que 4 593 é $58,\overline{3}\%$.

Resolução do tema **10**

1. a) Indicando os dados em rol, temos:

$$3;\ 3;\ 5;\ 7;\ 8;\ 11;\ 12;\ 15$$

Determinando a média, temos:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 2 + 5 + 7 + 8 + 11 + 12 + 15}{8} \Rightarrow \bar{x} = \frac{64}{8} \Rightarrow \bar{x} = 8$$

O número com maior frequência no conjunto é o 3, portanto a moda é 3.

O total de dados no conjunto é 8 (par). Assim, as posições centrais são:

$$\frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4 \qquad \frac{n}{2} + 1 = \frac{8}{2} + 1 = 5$$

Logo, a 4ª e a 5ª posições correspondem aos números 7 e 8, respectivamente.

Então, determinando a mediana, temos:

$$Md = \frac{7 + 8}{2} \Rightarrow Md = 7,5.$$

Portanto, a média é 8, a moda é 3 e a mediana é 7,5.

b) Indicando os dados em rol, temos:

$$-25;\ -22;\ -20;\ -15;\ -11;\ -10;\ -7;\ -7;\ -6;\ -5;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1;\ 0$$

Determinando a média, temos:

$$\bar{x} = \frac{(-25) + (-22) + (-20) + (-15) + (-11) + (-10) + 2 \cdot (-7) + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{-138}{15} \Rightarrow \bar{x} = -9,2$$

O número com maior frequência no conjunto é o -7. Logo, a moda é -7.

O total de dados no conjunto é 15 (ímpar). Então, a posição central é:

$$\frac{n + 1}{2} = \frac{15 + 1}{2} = 8$$

Assim, é a 8ª posição. Portanto, a mediana é -7.

Logo, a média é $-9,2$, a moda é -7 e a mediana é -7.

c) Indicando os dados em rol, temos:

$$-24;\ -20;\ -8;\ -3;\ -1;\ -1;\ 0;\ 5;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ 16$$

Determinando a média, temos:

$$\bar{x} = \frac{(-24) + (-20) + (-8) + (-3) + 2 \cdot (-1) + 0 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 16}{13} \Rightarrow \bar{x} = \frac{0}{13} \Rightarrow \bar{x} = 0$$

O número com maior frequência no conjunto é o -1. Portanto, a moda é -1.

O total de dados no conjunto é 13 (ímpar), logo a posição central é:

$$\frac{n + 1}{2} = \frac{13 + 1}{2} = 7$$

Assim, é a 7ª posição. Então, a mediana é 0.

Portanto, a média é 0, a moda é -1 e a mediana é 0.

9. Indicando as notas dos alunos em rol, temos:

$$3;\ 3{,}4;\ 5;\ 6{,}8;\ 7;\ 7{,}5;\ 7{,}8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8;\ 8{,}5;\ 9;\ 9;\ 9;\ 9;\ 9{,}5;\ 10;\ 10;\ 10;\ 10;\ 10;\ 10.$$

a) Determinando a média, temos:

$$\bar{x} = \frac{3 + 3{,}4 + 5 + 6{,}8 + 7 + 7{,}5 + 7{,}8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8{,}5 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9{,}5 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{202{,}5}{25} \Rightarrow \bar{x} = 8{,}1$$

MODERNA

Os números com maior frequência no conjunto são 8 e 10. Assim, o conjunto é bimodal com 8 e 10.

O total de notas é 25 (ímpar). Então, a posição central é:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{25+1}{2} = 13$$

Logo, é a 13ª posição. Portanto, a mediana é 8.

Dessa maneira, a média é 8,1, o que significa que a nota média dos alunos é 8,1 pontos; a moda é 8 e 10, ou seja, as notas que mais alunos obtiveram foram 8 e 10; e a mediana é 8. Assim, a nota mediana dos 25 alunos é 8.

b) Resposta pessoal. Espera-se que nesse texto os alunos digam, por exemplo, que 12 alunos, ou seja, 48% deles, obtiveram notas acima da média. Além disso, analisando a mediana, que é um valor alto, é possível concluir que a turma teve um bom desempenho na prova.

12. Indicando a quantidade de pessoas que atribuiu cada nota, temos:

Nota	Porcentagem	Quantidade de pessoas
0	10%	300
1	12%	360
2	16%	480
3	31%	930
4	17%	510
5	14%	420

a) Determinando a média ponderada, temos:

$$\bar{x} = \frac{300 \cdot 0 + 360 \cdot 1 + 480 \cdot 2 + 930 \cdot 3 + 510 \cdot 4 + 420 \cdot 5}{3\,000} \Rightarrow \bar{x} = \frac{8\,250}{3\,000} \Rightarrow \bar{x} = 2{,}75$$

A nota com maior frequência foi 3, portanto a moda é 3.

O total de pessoas é 3 000 (par). Então, as posições centrais são:

$$\frac{n}{2} = \frac{3\,000}{2} = 1\,500$$

$$\frac{n}{2} + 1 = \frac{3\,000}{2} + 1 = 1\,501$$

Assim, são as posições 1 500 e 1 501. As notas nessas posições são, ambas, iguais a 3, logo a mediana é 3.

Portanto, a média é 2,75 e significa que a nota média recebida pelo produto foi 2,75; a moda é 3 e significa que a nota mais atribuída pelos clientes foi 3; e a mediana é 3, pois a nota mediana atribuída pelos 3 000 clientes foi 3.

b) Resposta pessoal. Espera-se que nesse texto os alunos digam, por exemplo, que 62% dos entrevistados deram notas superiores à nota média.

13. Uma possível resposta: $a = 15$, $b = 8$, $c = 7$, $d = 6$, $e = 5$, $f = 4$, $g = 3$, $h = 2$, $i = 1$, pois, calculando a média por meio dessa sugestão de resposta, temos:

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 20 + 8 \cdot 22 + 7 \cdot 25 + 6 \cdot 26 + 5 \cdot 28 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 34 + 2 \cdot 48 + 1 \cdot 55}{51} \Rightarrow \bar{x} = \frac{1\,320}{51} \Rightarrow \bar{x} \simeq 25{,}88$$

Portanto, para esses pesos a média é aproximadamente 25,88, o que é menor do que 26.

Resolução do tema 11

4. Para resolver esse problema, ajude os alunos a montar a tabela de frequência a seguir.

Idade dos eleitores de uma seção eleitoral em 2020

Idade	18	20	21	22	25	31	33	35	39	42	45	48
Frequência	25	43	28	37	26	40	37	18	37	5	19	37
Frequência acumulada	25	68	96	133	159	199	236	254	291	296	315	352

Fonte de pesquisa: Presidente da seção.

a) É possível identificar a idade máxima de 78% dos eleitores. Assim, podemos determinar esse valor calculando o 78º decil:

$$78 \cdot \frac{352}{100} = 274{,}56$$

De acordo com a tabela, o P_{78} é 39.

Portanto, aproximadamente 78% das pessoas que votaram nessa seção têm menos do que 39 anos.

MODERNA

b) Como $P_{25} = Q_1$, $P_{50} = Q_2$ e $P_{75} = Q_3$, temos:

- $25 \cdot \frac{352}{100} = 88$

De acordo com a tabela, Q_1 é igual a 21.

- $50 \cdot \frac{352}{100} = 176$

De acordo com a tabela, Q_2 é igual a 31.

- $75 \cdot \frac{352}{100} = 264$

De acordo com a tabela, Q_3 é igual a 39.

Assim, concluímos que 25% dos eleitores dessa seção tem 21 anos ou menos, metade desses eleitores tem 31 anos ou menos e 75% desses eleitores tem 39 anos ou menos.

Resolução do tema **12**

1. a) Conforme os dados do exercício, temos:

- Determinando a média:

$$\bar{x} = \frac{62 + 58 + 72 + 66 + 53 + 70 + 51 + 64}{8} \Rightarrow \bar{x} = 62$$

- O conjunto é amodal, pois nenhum valor repetiu mais do que os outros.
- Determinando a mediana:

$$Md = \frac{62 + 64}{2} \Rightarrow Md = 63$$

- Determinando a amplitude:

$$A = 72 - 51 \Rightarrow A = 21$$

- Determinando o desvio médio:

$$Dm = \frac{|62 - 62| + |58 - 62| + |72 - 62| + |66 - 62| + |53 - 62| + |70 - 62| + |51 - 62| + |64 - 62|}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dm = \frac{0 + 4 + 10 + 4 + 9 + 8 + 11 + 2}{8} \Rightarrow Dm = 6$$

- Determinando a variância:

$$V = \frac{(62 - 62)^2 + (58 - 62)^2 + (72 - 62)^2 + (66 - 62)^2 + (53 - 62)^2 + (70 - 62)^2 + (51 - 62)^2 + (64 - 62)^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{0 + 16 + 100 + 16 + 81 + 64 + 121 + 4}{8} \Rightarrow V = 50{,}25$$

- Determinando o desvio-padrão:

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{50{,}25} \Rightarrow Dp \simeq 7{,}09$$

Portanto, a média é 62; o conjunto de valores é amodal; a mediana é 63; a amplitude é 21; o desvio médio é 6; a variância é 50,25; e o desvio-padrão é aproximadamente 7,09.

b) Conforme os dados do exercício, temos:

- Determinando a média:

$$\bar{x} = \frac{14 + 18 + 25 + 14 + 39 + 27 + 31}{7} \Rightarrow \bar{x} = 24$$

- A moda é 14.
- Determinando a mediana:

$$\frac{n + 1}{2} = \frac{7 + 1}{2} = 4$$

Desse modo, a mediana corresponde ao valor que ocupa a 4ª posição no rol, ou seja, $Md = 25$.

- Determinando a amplitude:

$$A = 39 - 14 \Rightarrow A = 25$$

- Determinando o desvio médio:

$$Dm = \frac{|14 - 24| + |18 - 24| + |25 - 24| + |14 - 24| + |39 - 24| + |27 - 24| + |31 - 24|}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dm = \frac{10 + 6 + 1 + 10 + 15 + 3 + 7}{7} \Rightarrow Dm \simeq 7{,}43$$

- Determinando a variância:

$$V = \frac{(14 - 24)^2 + (18 - 24)^2 + (25 - 24)^2 + (14 - 24)^2 + (39 - 24)^2 + (27 - 24)^2 + (31 - 24)^2}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{100 + 36 + 1 + 100 + 225 + 9 + 49}{7} \Rightarrow V \simeq 74{,}29$$

MODERNA

- Determinando o desvio-padrão:

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{74{,}29} \Rightarrow Dp \simeq 8{,}62$$

Portanto, a média é 24; a moda é 14; a mediana é 25; a amplitude é 25; o desvio médio é aproximadamente 7,43; a variância é aproximadamente 74,29; e o desvio-padrão é aproximadamente 8,62.

c) Conforme os dados do exercício, temos:

- Determinando a média:

$$\bar{x} = \frac{12 + 4{,}5 + 1{,}2 + 12 + 2{,}7 + 4{,}5}{6} \Rightarrow \bar{x} = 6{,}15$$

- A moda é 4,5 e 12.
- Determinando a mediana:

$$Md = \frac{4{,}5 + 4{,}5}{2} \Rightarrow Md = 4{,}5$$

- Determinando a amplitude:

$$A = 12 - 1{,}2 \Rightarrow A = 10{,}8$$

- Determinando o desvio médio:

$$Dm = \frac{|12 - 6{,}15| + |4{,}5 - 6{,}15| + |1{,}2 - 6{,}15| + |12 - 6{,}15| + |2{,}7 - 6{,}15| + |4{,}5 - 6{,}15|}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dm = \frac{5{,}85 + 1{,}65 + 4{,}95 + 5{,}85 + 3{,}45 + 1{,}65}{6} \Rightarrow Dm = 3{,}9$$

- Determinando a variância:

$$V = \frac{(12 - 6{,}15)^2 + (4{,}5 - 6{,}15)^2 + (1{,}2 - 6{,}15)^2 + (12 - 6{,}15)^2 + (2{,}7 - 6{,}15)^2 + (4{,}5 - 6{,}15)^2}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{34{,}2225 + 2{,}7225 + 24{,}5025 + 34{,}2225 + 11{,}9025 + 2{,}7225}{6} \Rightarrow V \simeq 18{,}38$$

- Determinando o desvio-padrão:

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{18{,}38} \Rightarrow Dp \simeq 4{,}29$$

Portanto, a média é 6,15; a moda é 4,5 e 12; a mediana é 4,5; a amplitude é 10,8; o desvio médio é 3,9; a variância é aproximadamente 18,38; e o desvio-padrão é aproximadamente 4,29.

d) Conforme os dados do exercício, temos:

- Determinando a média:

$$\bar{x} = \frac{13 - 18 + 3 + 8 - 1 + 11 + 1 + 3}{8} \Rightarrow \bar{x} = 2{,}5$$

- A moda é 3.
- Determinando a mediana:

$$Md = \frac{3 + 3}{2} \Rightarrow Md = 3$$

- Determinando a amplitude:

$$A = 13 - (-18) \Rightarrow A = 31$$

- Determinando o desvio médio:

$$Dm = \frac{|13 - 2{,}5| + |-18 - 2{,}5| + |3 - 2{,}5| + |8 - 2{,}5| + |-1 - 2{,}5| + |11 - 2{,}5| + |1 - 2{,}5| + |3 - 2{,}5|}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dm = \frac{10{,}5 + 20{,}5 + 0{,}5 + 5{,}5 + 3{,}5 + 8{,}5 + 1{,}5 + 0{,}5}{8} \Rightarrow Dm = 6{,}375$$

- Determinando a variância:

$$V = \frac{(13 - 2{,}5)^2 + (-18 - 2{,}5)^2 + (3 - 2{,}5)^2 + (8 - 2{,}5)^2 + (-1 - 2{,}5)^2 + (11 - 2{,}5)^2 + (1 - 2{,}5)^2 + (3 - 2{,}5)^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{110{,}25 + 420{,}25 + 0{,}25 + 30{,}25 + 12{,}5 + 72{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25}{8} \Rightarrow V = 81$$

- Determinando o desvio-padrão:

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{81} \Rightarrow Dp = 9$$

Portanto, a média é 2,5; a moda é 3; a mediana é 3; a amplitude é 31; o desvio médio é 6,375; a variância é 81; e o desvio-padrão é 9.

2. a) Vamos determinar a diferença entre o maior e o menor preço, em porcentagem, por semana.

- 1ª semana:

$$\frac{4{,}71 - 4{,}67}{4{,}67} \cdot 100 \simeq 0{,}86$$

MODERNA

- 2ª semana:

$$\frac{4,74 - 4,70}{4,70} \cdot 100 \simeq 0,85$$

Portanto, na 1ª semana, a variação foi aproximadamente 0,86% e, na 2ª semana, aproximadamente 0,85%.

b) Determinando o preço médio da gasolina, temos:

- 1ª semana:

$$\bar{x} = \frac{4,67 + 4,68 + 4,71 + 4,69 + 4,70 + 4,69}{6} \Rightarrow \bar{x} = \frac{28,14}{6} \Rightarrow \bar{x} = 4,69$$

Portanto, o preço médio da gasolina na primeira semana foi R$ 4,69.

- 2ª semana:

$$\bar{x} = \frac{4,70 + 4,73 + 4,74 + 4,71 + 4,73 + 4,71}{6} \Rightarrow \bar{x} = \frac{28,32}{6} \Rightarrow \bar{x} = 4,72$$

Portanto, o preço médio da gasolina na segunda semana foi R$ 4,72.

c) Conforme os dados do problema, temos:

- 1ª semana:

Calculando o desvio médio:

$$Dm = \frac{|4,67 - 4,69| + |4,68 - 4,69| + |4,71 - 4,69| + \ldots + |4,69 - 4,69|}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dm = \frac{0,02 + 0,01 + 0,02 + \ldots + 0}{6} \Rightarrow Dm = 0,01$$

Calculando a variância:

$$V = \frac{(4,67 - 4,69)^2 + (4,68 - 4,69)^2 + (4,71 - 4,69)^2 + \ldots + (4,69 - 4,69)^2}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{0,0004 + 0,0001 + 0,0004 + \ldots + 0}{6} \Rightarrow V \simeq 0,00017$$

Calculando o desvio-padrão:

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{0,00017} \Rightarrow Dp \simeq 0,013$$

Portanto, o desvio médio é 0,01, a variância é aproximadamente 0,00017 e o desvio-padrão é aproximadamente 0,013.

- 2ª semana:

Calculando o desvio médio:

$$Dm = \frac{|4,70 - 4,72| + |4,73 - 4,72| + |4,74 - 4,72| + \ldots + |4,71 - 4,72|}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dm = \frac{0,02 + 0,01 + 0,02 + \ldots + 0,01}{6} \Rightarrow Dm = 0,013$$

Calculando a variância:

$$V = \frac{(4,70 - 4,72)^2 + (4,73 - 4,72)^2 + (4,74 - 4,72)^2 + \ldots + (4,71 - 4,72)^2}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{0,0004 + 0,0001 + 0,0004 + \ldots + 0,0001}{6} \Rightarrow V \simeq 0,0002$$

Calculando o desvio-padrão:

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{0,0002} \Rightarrow Dp \simeq 0,014$$

Portanto, o desvio médio é 0,013, a variância é aproximadamente 0,0002 e o desvio-padrão é aproximadamente 0,014.

5. a) De acordo com os dados do problema, calculamos a média dos tempos nas cinco primeiras voltas:

$$\bar{x}_A = \frac{870 + 848 + 855 + 845 + 852}{5} \Rightarrow \bar{x}_A = 854$$

Logo, o tempo médio do piloto **A** foi 854 s.

$$\bar{x}_B = \frac{866 + 850 + 847 + 845 + 847}{5} \Rightarrow \bar{x}_B = 851$$

Logo, o tempo médio do piloto **B** foi 851 s.

$$\bar{x}_C = \frac{867 + 851 + 843 + 849 + 855}{5} \Rightarrow \bar{x}_C = 853$$

Logo, o tempo médio do piloto **C** foi 853 s.

Portanto, o piloto **A** obteve o pior tempo médio.

MODERNA

b) Calculando o desvio-padrão para os tempos de cada piloto nas cinco primeiras voltas, temos:

- Piloto A

$$Dp_A = \sqrt{\frac{(870 - 854)^2 + (848 - 854)^2 + ... + (852 - 854)^2}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dp_A = \sqrt{\frac{378}{5}} \Rightarrow Dp_A \simeq 8{,}69$$

Assim, houve um desvio-padrão de aproximadamente 8,69 s.

- Piloto B

$$Dp_B = \sqrt{\frac{(866 - 851)^2 + (850 - 851)^2 + ... + (847 - 851)^2}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dp_B = \sqrt{\frac{294}{5}} \Rightarrow Dp_B \simeq 7{,}67$$

Assim, houve um desvio-padrão de aproximadamente 7,67 s.

- Piloto C

$$Dp_C = \sqrt{\frac{(867 - 853)^2 + (851 - 853)^2 + ... + (855 - 853)^2}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Dp_C = \sqrt{\frac{320}{5}} \Rightarrow Dp_C \simeq 8$$

Assim, houve um desvio-padrão de aproximadamente 8 s.
Portanto, o piloto B obteve a maior regularidade no tempo para cada volta.

7. a) Inicialmente, organizamos a pontuação da equipe A em rol:

$$88, 93, 98, 98, 100, 105, 112, 115$$

- Calculando a amplitude, temos:

$$A = 115 - 88 \Rightarrow A = 27$$

- Para calcular a variância, inicialmente calculamos a média:

$$\bar{x} = \frac{88 + 93 + 98 + 98 + 100 + 105 + 112 + 115}{8} \Rightarrow \bar{x} = 101{,}125$$

Assim:

$$V = \frac{(88 - 101{,}125)^2 + (93 - 101{,}125)^2 + (98 - 101{,}125)^2 + ... + (115 - 101{,}125)^2}{8} \Rightarrow V \simeq 73{,}1$$

- Calculando o desvio-padrão, temos:

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{73{,}11} \Rightarrow Dp \simeq 8{,}6$$

Inicialmente, organizamos a pontuação da equipe B em rol:

$$90, 90, 92, 100, 104, 109, 118, 123$$

- Calculando a amplitude, temos:

$$A = 123 - 90 \Rightarrow A = 33$$

- Para calcular a variância, inicialmente calculamos a média.

$$\bar{x} = \frac{90 + 90 + 92 + 100 + 104 + 109 + 118 + 123}{8} \Rightarrow \bar{x} = 103{,}25$$

Assim:

$$V = \frac{(90 - 103{,}25)^2 + (90 - 103{,}25)^2 + (92 - 103{,}25)^2 + ... + (123 - 103{,}25)^2}{8} \Rightarrow V \simeq 141{,}2$$

- Calculando o desvio-padrão, temos:

$$Dp = \sqrt{V} \Rightarrow Dp = \sqrt{141{,}2} \Rightarrow Dp \simeq 11{,}9$$

Portanto, para a equipe A: a amplitude é 27; a variância é aproximadamente 73,1; e o desvio-padrão é aproximadamente 8,6.
Já para a equipe B: a amplitude é 33; a variância é aproximadamente 141,2; e o desvio-padrão é aproximadamente 11,9.

b) As pontuações obtidas nas oito primeiras partidas pela equipe A são menos variáveis do que as obtidas pela equipe B.

8. a) Calculando a média de salário dessa fábrica, temos:

$$\bar{x} = \frac{30 \cdot 1\,720 + 22 \cdot 2\,400 + 11 \cdot 2\,800 + 5 \cdot 4\,000 + 2 \cdot 5\,000}{30 + 22 + 11 + 5 + 2} \Rightarrow \bar{x} = 2\,360$$

Portanto, a média dos salários dessa fábrica é R$ 2 360,00.

b) Calculando o desvio-padrão, temos:

$$Dp = \sqrt{\frac{30 \cdot (1\,720 - 2\,360)^2 + ... + 2 \cdot (5\,000 - 2\,360)^2}{70}} \Rightarrow Dp \simeq 773{,}12$$

Portanto, o desvio-padrão dos salários dessa fábrica é aproximadamente R$ 773,12.

c) Espera-se que os alunos respondam que, como o desvio-padrão não está próximo de zero, os valores estão afastados da média, ou seja, não há uma regularidade na distribuição salarial dessa empresa.

MODERNA

15. **a)** Inicialmente, calculamos o intervalo que será utilizado para construir a tabela:

$$0{,}573 - 0{,}503 = 0{,}07$$

Assim, a amplitude é 0,07.

IDH dos países do continente americano em 2019

IDH	Frequência (*f*)	Frequência acumulada (*fa*)	Frequência relativa (*fr*)	Frequência acumulada relativa (*far*)
0,503 ⊢ 0,573	1	1	2,86%	2,86%
0,573 ⊢ 0,643	1	2	2,86%	5,72%
0,643 ⊢ 0,713	5	7	14,28%	20%
0,713 ⊢ 0,783	18	25	51,43%	71,43%
0,783 ⊢ 0,853	8	33	22,86%	94,29%
0,853 ⊢ 0,923	2	35	5,71%	100%
Total	32		100%	

Fonte de pesquisa: <http://hdr.undp.org/en/content/2019-human-development-index-ranking>. Acesso: 14 jul. 2020.

b) O Brasil está no intervalo de frequência 0,713 ⊢ 0,783.

c) Dos 35 países americanos, apenas 5 deles – Bolívia (0,703), El Salvador (0,667), Guatemala (0,651), Guiana (0,670) e Nicarágua (0,651) – se encaixam nas condições de IDH maior ou igual a 0,643 e menor do que 0,713. Então, determinando a porcentagem que eles representam, temos:

$$\frac{5}{35} \cdot 100 \simeq 14{,}3$$

Portanto, aproximadamente 14,3% dos países americanos têm IDH maior ou igual a 0,643 e menor do que 0,713.

d) 33 países americanos possuem IDH menor do que 0,853.

22. Conforme os dados do problema, calculamos a média:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 2{,}5 + 3 \cdot 3{,}5 + \ldots + 7 \cdot 8{,}5 + 0 \cdot 9{,}5}{50} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} \simeq 6{,}08$$

Portanto, a média das notas obtidas por essa turma é aproximadamente 6,08.

23. Conforme os dados da tabela:

a) Nesse município há 15 produtores.

b) No ano de 2020.

c) Calculando as médias em cada um dos semestres, temos:

- 1º semestre de 2019:

$$\bar{x} = \frac{3 + 3 + 8 + 21 + 21 + 21 + 21 + 29 + 50 + 52 + 52 + 57 + 57 + 91 + 91}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 38{,}5$$

Portanto, cada produtor vendeu, em média, aproximadamente 38,5 toneladas no 1º semestre de 2019.

- 1º semestre de 2020:

$$\bar{x} = \frac{37 + 37 + 37 + 37 + 37 + 39 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 70 + 112 + 112 + 115}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 65{,}5$$

Portanto, cada produtor vendeu, em média, aproximadamente 65,5 toneladas no 1º semestre de 2020.

Sugestões ao professor

- Nesta seção, apresentamos sugestões de livros e *sites* que podem ser consultados com o objetivo de complementar os conteúdos tratados neste volume, bem como obter subsídios teórico-metodológicos para o trabalho em sala de aula. É importante, também, que seja consultada a seção **Ampliando seus conhecimentos**, onde há sugestões de livros e *sites* para os alunos.

Leituras sobre o ensino de Matemática

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; SILVA, Karina Pessoa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

  Este artigo apresenta algumas considerações a respeito da aplicação de uma tarefa sob a ótica da Modelagem matemática para uma turma de 1º ano do Ensino Médio, abordando conceitos de Geometria plana.

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; *et al*. *Práticas de modelagem matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2015.

  Este livro aborda aspectos da Modelagem matemática, apresentando resultados de pesquisas e experiências em sala de aula e destacando a possibilidade de trabalhar com essa metodologia na perspectiva da Educação Matemática.

- ARAÚJO, Jussara de Loiola. *Educação matemática crítica*: reflexões e diálogos. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2007.

  Este livro traz reflexões e diálogos sobre a Educação Matemática crítica, como uma preocupação educacional, incluindo sugestões sobre o que isso pode significar visando à justiça social.

- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.) *Educação matemática*: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

  Nesta obra os autores tratam a respeito da ambiguidade gerada no processo de pesquisa. Embora os textos de vários autores expressem diferentes perspectivas, no geral convergem para o mesmo significado.

- BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

  O livro apresenta explicações sobre modelo matemático e Modelagem matemática. Também traz algumas orientações sobre como o professor pode proceder para utilizar a Modelagem no ensino de Matemática.

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Este livro trata da informática educativa, abordando aspectos que vão desde as políticas governamentais até as questões epistemológicas e pedagógicas. São apresentados exemplos de como usar informática com alunos e professores, bem como questões referentes ao uso de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

  O livro descreve um conjunto de princípios que buscam ajudar os professores a planejar e implementar trabalhos com projetos. Contém, ainda, exemplos de projetos e mostra como desenvolvê-los em sala de aula.

- CAINELLI, Marlene Rosa; TOMAZINI, Elizabete Cristina de Souza. A aula-oficina como campo metodológico para a formação de professores em história: um estudo sobre o Pibid/História/UEL. *História & Ensino*, Londrina, v. 23, n. 2, p. 11-33, 2017.

  Este estudo apresenta a aula-oficina como possibilidade de exercício da docência com base em relatórios e entrevistas concedidas por alunos de iniciação científica do curso de História da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

- CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Na vida dez, na escola zero*. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2015.

  O livro traz considerações sobre o motivo pelo qual muitas pessoas são capazes de utilizar a Matemática para resolver problemas em situações de seu cotidiano, mas, quando se trata da Matemática escolar, elas apresentam dificuldades.

- CURY, Helena Noronha. *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro é apresentada uma visão geral sobre a análise de erros, que, segundo a autora, pode ser encarada como uma abordagem de pesquisa e como uma metodologia de ensino, em ambos os casos, utilizada com o intuito de auxiliar na prática em sala de aula. Também são indicadas pesquisas e sugestões sobre como os erros dos alunos podem ser utilizados nas aulas de Matemática.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

MODERNA

Nesta obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações sobre aspectos da cognição, da natureza da Matemática e das questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

• _____. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, v. 32, n. 94, set./dez. 2018, p. 189-204. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300189>. Acesso em: 13 jun. 2020.

Este artigo discute as contribuições da Etnomatemática para a formação de indivíduos capazes de produzir conhecimentos e de se comunicarem, colaborando para a superação das desigualdades sociais e garantindo dignidade a todos os cidadãos, independentemente das classes sociais nas quais estão inseridos, e voltados à preservação da natureza por meio da adoção de uma postura que defenda a sustentabilidade.

- FERREIRA, Mariana Kawall Leal (Org.). *Ideias matemáticas de povos culturalmente distintos*. São Paulo: Global, 2002. (Série Antropologia e Educação).

  O livro aborda tópicos relacionados à educação e à Matemática do cotidiano. Também trata a respeito da organização social e da Matemática de povos indígenas no Brasil, e da aritmética e da ornamentação geométrica no Brasil e na África.

- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

  Esta obra é destinada a professores e pesquisadores em Educação Matemática, pois orienta esses profissionais sobre como iniciar uma pesquisa nessa área. O livro traz orientações a respeito do processo de investigação na área, além do surgimento e do desenvolvimento desse componente curricular no Brasil.

- GARDNER, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Trad. Maria A. V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

  Neste trabalho, o autor explica as ideias fundamentais que desencadeiam uma revolução na aprendizagem e mostra como elas podem ser aplicadas em toda sala de aula onde se espera que os alunos pensem.

- HUETE, J. C. Sánchez; BRAVO, J. A. Fernández. *O ensino da Matemática*: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2005.

  O livro pode ser usado como uma ferramenta de estudo e análise teórica para a construção do conhecimento matemático e para a resolução de problemas, visando a melhoras nas práticas em sala de aula.

- KNIJNIK, Gelsa et al. *Etnomatemática em movimento*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro apresenta textos, discussões e reflexões sobre a trajetória e os rumos dos estudos e pesquisas no âmbito da Etnomatemática, tendo como principal referência o professor Ubiratan D'Ambrosio.

- LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

  Este livro pode servir de referência aos professores no sentido de propor uma reflexão sobre a avaliação da aprendizagem escolar em termos sociais e pedagógicos.

- MENDES, Iran Abreu. *Investigação histórica no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

  O livro trata do uso de projetos de investigação histórica como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática. As experiências de tarefas investigativas apresentadas no livro evidenciam a relevância dessa abordagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

- MENDES, Iran Abreu. *Matemática e investigação em sala de aula*: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro contém perspectivas didáticas que buscam contribuir para o ensino e aprendizagem mais significativo da Matemática, ampliando o conhecimento a respeito desse campo.

- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria M. M. S. *A formação matemática do professor*: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro aborda questões referentes à formação do professor de Matemática, trazendo aspectos do conhecimento acadêmico e do conhecimento escolar. Para ilustrar sua posição, os autores apresentam como os conjuntos numéricos são trabalhados no nível escolar acadêmico e básico.

- ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa em Educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999.

  Este trabalho busca valorizar a interação tanto entre professor e aluno quanto entre os próprios alunos no processo de ensino e aprendizagem, apontando para a importância de as tarefas matemáticas propostas em sala de aula assumirem uma natureza problemática.

EM ABERTA

Além disso, trata da necessidade de o professor ser capaz de estabelecer um ambiente de trabalho estimulante, que propicie a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

- PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Este livro levanta questões e propõe reflexões sobre aspectos metodológicos do ensino de Matemática, levando em consideração o saber matemático e os desafios de seu ensino e aprendizagem.

- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. e adapt. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

  Neste livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

- _____. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

  Este trabalho tece comentários a respeito das maneiras de resolver um problema, no qual o processo de solução é mais importante do que a própria solução em si. Para tanto, Polya estabelece as quatro fases da resolução de um problema: compreendendo o problema, elaborando um plano, executando o plano e fazendo o retrospecto.

- RIBEIRO, Alessandro J.; CURY, Helena N. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro, os autores discutem a respeito do ensino e da aprendizagem da Álgebra, com enfoque especial aos assuntos relacionados a equações e funções, fazendo uma breve revisão histórica e apresentando pesquisas relacionadas ao tema.

- SADOVSKY, Patricia. *O ensino de matemática hoje*: enfoques, sentidos e desafios. Trad. Antonio de Padua Danesi. São Paulo: Ática, 2007. (Educação em Ação).

  Neste livro são apresentadas propostas para rever e analisar a Matemática e, assim, reformular a relação entre professor e aluno.

- SKOVSMOSE, O. *Educação matemática crítica*: a questão da democracia. Trad. Abgail Lins e Jussara L. Araújo. Campinas: Papirus, 2017.

  O autor aborda a Educação Matemática por meio de uma perspectiva democrática, propondo que trabalhos com projetos de modelagem possam ser encarados como uma possível saída para a questão democrática na sala de aula.

- TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro as autoras esclarecem como lidar com a interdisciplinaridade no ensino de Matemática. São tratadas, ainda, situações com diferentes abordagens interdisciplinares sobre os conteúdos escolares que possibilitam ao professor refletir sobre como a Matemática e os demais componentes curriculares auxiliam na formação do aluno como cidadão.

- VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

  Em textos que aliam teoria e prática em sala de aula, os autores propõem discussões e reflexões sobre as crenças que permeiam o ensino de Matemática e apontam sugestões de como elas podem ser trabalhadas.

- ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf>. Acesso em: 26 maio 2020.

  A tese apresentada neste documento disserta, entre outros assuntos pedagógicos, a respeito da importância do professor como elemento mediador entre as concepções pessoais e a prática pedagógica.

Leituras sobre a História da Matemática

- ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

  Neste livro, o autor relata as expedições – que duraram sete anos – de Pierre François André Méchain e Jean Baptiste Joseph Delambre, que, com o intuito de medir o planeta e estabelecer um padrão comum de medida, seguiram em direções opostas. Nesse contexto foi definida uma nova medida – o metro – como sendo a décima milionésima parte da distância entre o Polo Norte e a linha do Equador.

- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  A História da Matemática é abordada neste livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, e finalmente chegando aos

MODERNA

avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

- CANE, Philip. *Gigantes da ciência*. Rio de Janeiro: Ediouro, [s.d.].

  Biografia de 50 dos grandes nomes da humanidade, incluindo Pitágoras, Aristóteles, Arquimedes, Galileu, Einstein, Leonardo da Vinci, Euclides, bem como alguns inventos relacionados a esses gênios.

- CARVALHO, Luiz Mariano et al. (Org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

  O livro apresenta uma coleção de artigos que relaciona o uso de recursos tecnológicos e a História da Matemática ao ensino de Matemática.

- Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual.

  Nesta coleção, em que os volumes são assinados por autores diferentes, são abordados conteúdos matemáticos, como Geometria, Álgebra e Trigonometria, com base em seus aspectos históricos.

- DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *O sonho de Descartes*: o mundo de acordo com a matemática. Trad. Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

  O livro trata de René Descartes e de quatro séculos de avanço matemático após o sonho desse estudioso francês sobre a matematização do mundo. Nesse contexto, são abordados conteúdos matemáticos presentes no cotidiano, como é o caso da utilização da linguagem computacional.

- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

  O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para a resolução.

- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

  No volume 1, a história dos algarismos é apresentada considerando a origem da representação simbólica dos números em diversas civilizações, como os gregos, os romanos e os maias. Já no volume 2, é explicado por que a civilização indiana é considerada o berço da numeração moderna e são refeitos os caminhos que levaram o homem a inventar o computador.

- _____. *Os números*: a história de uma grande invenção. 11. ed. Trad. Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 2005.

  O livro aborda uma resumida História da Matemática e acompanha a evolução da arte de calcular, contada desde a Pré-História.

- LEAVITT, David. *O homem que sabia demais*: Alan Turing e a invenção do computador. Ribeirão Preto: Novo Conceito, 2011.

  O livro traz a biografia do matemático Alan Turing, que, por meio da proposta de uma máquina ainda imaginária, abriu as portas para a era dos computadores.

- LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. *Um olhar sobre a história nas aulas de matemática*. Abakós, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

  Neste livro, os autores defendem o uso da História da Matemática como metodologia em sala de aula, realizando uma abordagem histórica dos conteúdos como meio de facilitar o entendimento da Matemática.

- MAOR, Eli. *e*: a história de um número. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

  O livro traz em ordem cronológica desde o cálculo com logaritmos até descobertas mais recentes relacionadas ao número *e*.

- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação matemática*: propostas e desafios. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Neste livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

- MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

  O texto apresenta as principais questões e os momentos mais significativos do ensino da Matemática ao longo dos tempos.

- ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  O livro aborda a História da Matemática desde a Mesopotâmia até o século XIX. Um dos objetivos principais da autora é mostrar que a Matemática não é essencialmente abstrata e teórica. O livro também apresenta diferentes práticas matemáticas de povos da Antiguidade para a solução de problemas semelhantes.

MODERNA

- SINGH, Simon. *O livro dos códigos*: a ciência do sigilo: do antigo Egito à criptografia quântica. 7. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2010.

  O texto é uma narrativa sobre códigos e criptografia, bem como sobre os campos onde os códigos são e foram utilizados.

- STEWART, Ian. *Uma história da simetria na Matemática*. Trad. Cláudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  O livro apresenta a busca por soluções de equações algébricas, relatando essa história por meio de uma linha do tempo que vai desde a antiga Babilônia até chegar à Física do século XXI.

Leituras sobre os conteúdos deste volume

- BARBOSA, João Lucas M. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Este livro dá ao professor uma visão ampliada do que ensina em sala de aula, mostrando a Geometria euclidiana plana de um ponto de vista que vai além dos tópicos do Ensino Básico.

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal*: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro apresenta um estudo dos fractais voltado para a sala de aula, além de conter características artísticas sem perder a precisão e o rigor matemático.

- *Coleção Fundamentos de Matemática Elementar*. São Paulo: Atual, 2013.

  Esta coleção abarca uma grande variedade de conteúdos e conceitos, dispostos em dez volumes e direcionados a alunos dos Ensinos Médio e Superior.

- COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). *As ideias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

  Esta obra comenta a prontidão para conceitos, equações, expressões, resolução de problemas, utilização de computadores e calculadoras voltados ao aprendizado da Álgebra, entre outros temas de grande importância.

- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 9.

  Este volume é composto de teorias, exercícios de aplicação e testes de vestibular que envolvem Geometria plana, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, sempre acompanhados de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre a história da Matemática relacionados aos temas abordados.

- GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

  Em meio a uma rede de intrigas envolvendo a máfia, sequestros e enigmas intelectuais, este romance desafia o leitor a compreender e organizar a história do pensamento matemático, desde a Antiguidade até os dias atuais.

- IEZZI, Gelson. *Fundamentos de matemática elementar*: trigonometria. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 3.

  Este volume é composto de teorias e exercícios de aplicação, testes de vestibular referentes a Trigonometria, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Uma coleção de crônicas e comentários em torno de um tema comum: a Matemática estudada nos últimos três anos que antecedem a universidade.

- LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).

  O foco desta obra é o trabalho com as funções de uma variável, estudadas sem o uso do cálculo infinitesimal. Tal abordagem elementar traz noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números, como os naturais, os inteiros, os racionais e os reais. Na segunda parte do livro são apresentadas funções variadas: afins, quadráticas, polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

- LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar P.; GUIMARÃES FILHO, Florêncio F. *Coordenadas no plano*: com as soluções dos exercícios. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).

  O tema abordado no livro é o uso de coordenadas como método para estudar Geometria plana. A primeira parte contém uma simplificação da Geometria analítica plana; a segunda, uma introdução aos vetores; e na terceira parte, as coordenadas e vetores são utilizados com a finalidade de estudar as transformações geométricas simples.

- WAGNER, Eduardo. *Construções geométricas*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).

MODERNA

Este livro visa mostrar que as construções geométricas são um importante instrumento no ensino da Geometria e da Álgebra. O texto explora as propriedades geométricas das figuras e a construção a partir da solução algébrica.

Sugestões de *sites* para o professor

- **Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação**

  Disponível em: <https://anped.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Neste *site* é possível obter informações sobre pós-graduação e pesquisa na área de educação, acessar publicações e consultar datas e locais de eventos sobre o tema.

- **Centro de Informação e Biblioteca em Educação**

  Disponível em: <http://inep.gov.br/pesquisa-ao-acervo>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  O acervo da biblioteca do Cibec é composto de livros, periódicos, teses, dissertações, folhetos e relatórios de pesquisa, materiais de multimídia, além de obras raras e especiais e documentos a respeito da educação brasileira.

- **Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática João Affonso Pascarelli**

  Disponível em: <https://www.ime.usp.br/caem/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* tem por objetivo a prestação de serviços para professores e, por meio dele, é possível se inscrever e participar de cursos de atualização profissional, oficinas, palestras e seminários.

- **Domínio Público – Biblioteca Digital Desenvolvida em *Software* Livre**

  Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Com este *site*, o Governo Federal visa disponibilizar conhecimentos, colocando à disposição de todos uma biblioteca virtual. Alunos e professores podem utilizá-la para estudos, pesquisas e desenvolvimento profissional.

- **Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec)**

  Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/index.php>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* contém *softwares* disponíveis para *download*, artigos e atividades que tratam da tecnologia informática no âmbito da educação matemática escolar.

- **Educação Matemática em Revista**

  Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Esta revista tem como foco o trabalho do professor em sua prática de educador matemático.

- **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE**

  Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Com este *site* o Ministério da Educação busca prover ações para o desenvolvimento da educação, proporcionando ao professor uma fonte de informações sobre os programas gerenciados pelo FNDE, os financiamentos escolares, os projetos e as ações educacionais.

- **Geometria não euclidiana**

  Disponível em: <https://www.deviante.com.br/podcasts/scicast-362/>. Acesso em: 27 jun. 2020.

- **Mathema**

  Disponível em: <https://mathema.com.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Neste *site* o professor encontrará informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação Matemática.

- **Ministério da Educação**

  Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* apresenta informações sobre o órgão governamental responsável pela Educação no Brasil (MEC). Além disso, o professor tem acesso aos projetos desenvolvidos pelo governo para a educação no país.

- **Nova Escola**

  Disponível em: <https://novaescola.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A edição *on-line* da revista Nova Escola proporciona ao leitor o acesso a diversas informações sobre a educação em várias áreas do conhecimento. Neste *site* pode-se ter acesso às edições da revista e pesquisar artigos publicados.

- **Portal do Núcleo de Pesquisas das Novas Tecnologias de Comunicação Aplicadas à Educação – Escola do Futuro USP**

  Disponível em: <https://www.futuro.usp.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* proporciona ao professor acesso a novas tecnologias da informação e comunicação, bem como a projetos de pesquisa e a produções científicas.

MODERNA

- **Revista Brasileira de Educação – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**

  Disponível em: <https://anped.org.br/site/rbe>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  A revista é voltada à publicação de artigos acadêmico-científicos, visando fomentar e facilitar o intercâmbio acadêmico nos âmbitos nacional e internacional. Por meio do *site*, é possível ter acesso às edições da revista, pesquisar, enviar artigos etc.

- **Revista do Professor de Matemática**

  Disponível em: <http://rpm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* abrange informações sobre a publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. A revista é destinada àqueles que ensinam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No *site*, estão disponíveis artigos, edições da revista e informações a respeito da publicação de artigos.

- **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**

  Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Tem como finalidade congregar profissionais (pesquisadores, professores e alunos) da área de Educação Matemática e de áreas afins. No *site*, podem ser encontradas diversas informações sobre a Educação Matemática no Brasil e no exterior.

- **Sociedade Brasileira de Matemática**

  Disponível em: <https://www.sbm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* busca estimular o desenvolvimento da pesquisa e do ensino da Matemática no Brasil. Nele, estão disponíveis ao professor informações sobre eventos e atividades da área.

- **Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência**

  Disponível em: <http://portal.sbpcnet.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* disponibiliza informações, eventos, publicações, vídeos, notícias, entre outras atividades relacionadas à Ciência.

- **Vênus e trigonometria**

  Disponível em: <https://anchor.fm/matematica-multimidia/episodes/Srie-Rdio-Vnus-e-trigonometria-eean6v>. Acesso em: 27 jun. 2020.

Referências bibliográficas

- ABRAMOVAY, Miriam; SILVA, Ana Paula da; FIGUEIREDO, Eleonora. *Guia para diretores e professores*: reflexões e práticas sobre violência e convivência escolar: faça você mesmo. Rio de Janeiro: Flacso Brasil/BID, 2018.

  Guia que apresenta orientações aos professores sobre os principais temas da contemporaneidade, relacionados à violência e à convivência escolar, de maneira reflexiva e prática.

- ACTIVE learning strategies. *Berkeley Center for Teaching & Learning*. Disponível em: <https://teaching.berkeley.edu/active-learning-strategies>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Página elaborada pelo Centro de Ensino e Aprendizagem da Universidade da Califórnia, em Berkeley, nos Estados Unidos, que apresenta definições, organização e exemplos de diversas estratégias associadas às metodologias ativas.

- ARAÚJO, Luciene da Costa; VIEIRA, Kay F. L.; COUTINHO, Maria da Penha de Lima. Ideação suicida na adolescência: um enfoque psicossociológico no contexto do ensino médio. *Psico-USF*, Itatiba, v. 15, n. 1, p. 47-57, jan./abr. 2010.

  Artigo que apresenta um estudo sobre as representações sociais da ideação suicida e a presença desse fenômeno em adolescentes do Ensino Médio.

- BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

  Este livro reúne artigos de professores que apresentam conceitos, reflexões, experiências e possibilidades de implementação do ensino híbrido nas escolas.

- BARCA, Isabel. Aula oficina: do projeto à avaliação. In: *Para uma educação de qualidade*: atas da Quarta Jornada de Educação Histórica. Braga, Centro de Investigação em Educação (CIED) / Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, 2004. p. 131-144.

  Artigo que apresenta, de maneira objetiva e estruturada, as etapas de uma aula-oficina.

- BARCELOS, Thiago Schumacher; SILVEIRA, Ismar Frango. Pensamento computacional e educação matemática: relações para o ensino de computação na educação básica. In: *WORKSHOP* SOBRE EDUCAÇÃO EM COMPUTAÇÃO, 20., 2012, Curitiba. *Anais*... Curitiba: SBC, 2012. p. 1-10. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/256439343_Pensamento_Computacional_e_Educacao_Matematica_Relacoes_para_o_Ensino_de_Computacao_na_Educacao_Basica/link/0deec5228dfbb4d377000000/download>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Artigo que busca discutir as relações entre conhecimento, habilidades e atitudes possíveis de serem estabelecidas entre Matemática e Ciência da Computação.

- _____. Relações entre o pensamento computacional e a matemática através da construção de jogos digitais. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE *GAMES* E ENTRETENIMENTO DIGITAL, 12., 2013, São Paulo. *Anais...* São Paulo: SBC, 2013. p. 52-55. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/wei/article/view/10222>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Esta pesquisa busca estudar a relação entre a Matemática aprendida no Ensino Básico e o sucesso nos cursos de introdução à Ciência da Computação, analisando o modo pelo qual os alunos estimulam as competências matemáticas no processo de desenvolvimento do pensamento computacional, tomando como base as atividades práticas de desenvolvimento de jogos digitais.

- BEFORE, during, or after reading: reflection quick write. *Lakehead University*. Disponível em: <https://teachingcommons.lakeheadu.ca/sites/default/files/inline-files/Quick%20Writes%20explanation.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Texto que apresenta um breve resumo a respeito da metodologia ativa **Quick writing**, publicado na página da Universidade de Lakehead, localizada no Canadá.

- BENINCASA, Miria; REZENDE, Manuel Morgado. Tristeza e suicídio entre adolescentes: fatores de risco e proteção. *Boletim de Psicologia*, São Paulo, v. 55, n. 124, p. 93-110, jun. 2006.

  Artigo que apresenta informações sobre os fatores de risco e proteção relacionados ao suicídio.

- BOUCINHA, Rafael Marimon et al. Construção do pensamento computacional através do desenvolvimento de *games*. *Renote*, v. 15, n. 1, p. 1-10, jul. 2017. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/75146>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo apresenta uma proposta metodológica que busca desenvolver o pensamento computacional nos alunos por meio do desenvolvimento de *games*.

- BRACKMANN, Christian Puhlmann. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Trabalho que busca verificar a possibilidade do desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica por meio de atividades exclusivamente desplugadas, ou seja, sem o uso de aparatos eletrônicos.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018a. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018b. p. 21-24. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/dcnem.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Esta resolução atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicadas em 2012. Nela, são apresentadas as mudanças necessárias para a implementação da proposta do Novo Ensino Médio.

- _____. Ministério da Educação. *Diretrizes para a Educação Básica*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/323-secretarias-112877938/orgaos-vinculados-82187207/12992-diretrizes-para-a-educacao-basica>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Conjunto de pareceres e resoluções que regulamentam a Educação Básica no Brasil.

- _____. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência Enem*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Matriz de referência é um termo utilizado especificamente no contexto das avaliações em larga escala para indicar habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização e orientar a elaboração de itens de testes e provas, bem como a construção de escalas de proficiência que definem o que e o quanto o aluno realiza no contexto da avaliação.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 30 maio 2020.

EM OBRA

As diretrizes reunidas neste documento estabelecem a base nacional comum, que orienta a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino do país.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

  Nesta obra, voltada à formação de professores, são discutidos diversos temas relacionados ao Ensino Médio. Em um primeiro momento, discute-se o conceito de juventude com o objetivo de propor mudanças nas maneiras de conceber essa faixa etária. Esses textos buscam valorizar o papel do jovem como sujeito de sua história. Em seguida, os textos destacam temas como juventude e tecnologia, questão do mercado de trabalho e projeto de vida, além do papel da escola no processo de formação dos jovens.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este documento apresenta o histórico dos Temas Contemporâneos Transversais, sua divisão em seis grandes áreas e a importância desses temas para os currículos da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional.

- _____. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Ações Programáticas e Estratégicas. *Proteger e cuidar da saúde de adolescentes na atenção básica*. 2. ed. Brasília 2018c. Disponível em: <https://bvsms.saude.gov.br/bvspublicacoesproteger_cuidar_adolescentes_atencao_basica_2ed.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2020.

  Este documento do Ministério da Saúde foi elaborado para auxiliar as Equipes de Atenção Básica/Saúde da Família no trabalho com adolescentes, propondo o cuidado com a saúde, a adoção de hábitos saudáveis e a atenção aos principais aspectos clínicos.

- CAJADO, Ane Ferrari Ramos; DORNELLES, Thiago; PEREIRA, Amanda Camylla. *Eleições no Brasil*: uma história de 500 anos. Brasília: Tribunal Superior Eleitoral, 2014. Disponível em: <http://www.tse.jus.br/hotsites/catalogo-publicacoes/pdf/tse-eleicoes-no-brasil-uma-historia-de-500-anos-2014.pdf>. Acesso em: 10 ago. 2020.

  Este documento pretende reconstruir parte da história eleitoral brasileira, destacando os principais marcos relacionados ao voto no país, desde o período do Brasil Colônia até os dias atuais, como a evolução do acesso ao voto no Brasil. Além disso, apresenta imagens do acervo histórico relacionado às cédulas e urnas utilizadas no país.

- CAMARGO, Fausto; DAROS, Thuinie. *A sala de aula inovadora*: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018.

  Este livro é organizado em duas partes: a primeira apresenta reflexões dos autores sobre possibilidades de inovação em sala de aula; a segunda aborda mais de 40 estratégias que contribuem para a aplicação dessas metodologias.

- CAMPOS, Herculano Ricardo; CARDOSO, Samia Dayana J. Violência na escola: uma reflexão sobre o *bullying* e a prática educativa. *Em Aberto*, Brasília, v. 23, n. 83, p. 107-128, mar. 2010.

  Artigo que apresenta informações estatísticas sobre o *bullying* na escola e o papel do professor diante de situações como essa.

- CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  O objetivo deste currículo é oferecer diretrizes e orientações que visam apoiar as escolas a incluir em suas propostas curriculares os temas tecnologia e computação, potencializando o uso da tecnologia na aprendizagem.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

  O autor propicia uma análise do papel da Matemática na cultura ocidental e da noção de que a Matemática é apenas uma forma de Etnomatemática.

- DAYRELL, Juarez (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

  Juarez Dayrell é um pesquisador que investiga ques-

MODERNA

tões sobre a juventude e a educação, analisando a importância das culturas juvenis na construção de um cenário educativo mais democrático e significativo. Nesta obra, ele traz algumas experiências vivenciadas no projeto Observatório da Juventude, da Universidade Federal de Minas Gerais (UGMG), que trabalha desde 2003 com a formação de professores e discussões envolvendo a juventude.

- DRIEU, Didier; PROIA-LELOUEY, Nadine; ZANELLO, Fabrice. Ataques ao corpo e traumatofilia na adolescência. *Ágora*, Rio de Janeiro, v. 14, n. 1, p. 9-20, jan./jun. 2011.

  Artigo que apresenta um estudo sobre a relação entre as mudanças que ocorrem na puberdade e os comportamentos suicidas.

- ELLENBERG, Jordan. *O poder do pensamento matemático*: a ciência de como não estar errado. Trad. George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

  Em linguagem simples, o autor faz uma abordagem a respeito da presença da Matemática em diferentes situações do cotidiano, desde as mais simples até as mais complexas, buscando apresentar ao leitor que essa ciência se faz presente na realidade, destacando suas contribuições para o desenvolvimento do pensamento.

- FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa*. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

  Este livro traz aplicações práticas e estratégias de trabalho com diversos tipos de metodologias que apresentam elementos de inovação nas práticas de ensino e aprendizagem, chamadas pelas autoras de metodologias "inov-ativas".

- FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: *SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009*, Ponta Grossa. *Anais...* Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1013-1026.

  Aborda, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, a utilização de recursos de Tecnologia da Informação e Comunicação como tendência em Educação Matemática.

- FORTES, Isabel; MACEDO, Mônica Medeiros Kother. Automutilação na adolescência: – rasuras na experiência de alteridade. *Psicogente*, Barranquilla, v. 20, n. 38, p. 353-367, jul./dez. 2017. Disponível em: <http://revistas.unisimon.edu.co/index.php/psicogente/article/view/2556>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo de reflexão teórica que aborda aspectos do comportamento de automutilação, propondo-se a analisar o tema com base em algumas narrativas em *blogs* de adolescentes.

- FRANÇA, Rozelma; TEDESCO, Patrícia. Desafios e oportunidades ao ensino do pensamento computacional na educação básica no Brasil. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4., 2015, Maceió. *Anais...* Maceió: SBC, 2015. p. 1464-1473. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/283347058_Desafios_e_oportunidades_ao_ensino_do_pensamento_computacional_na_educacao_basica_no_Brasil>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Este trabalho busca discutir os desafios do ensino do pensamento computacional na Educação Básica, apontando alguns dos principais desafios a serem vencidos, bem como oportunidades de pesquisa na área.

- FRANCISCO, Marcos Vinicius; LIBÓRIO, Renata Maria C. Um estudo sobre *bullying* entre escolares do Ensino Fundamental. *Psicologia*: reflexão e crítica, Porto Alegre, v. 22, n. 2, p. 200-207, 2009.

  Artigo que busca caracterizar o *bullying* em escolas públicas, destacando os efeitos tanto sobre o comportamento quanto sobre o sentimento dos vitimados.

- ILLERIS, Knud (Org.). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Porto Alegre: Penso, 2013.

  Nesta obra, o pesquisador Knud Illeris reúne diferentes autores e teorias da aprendizagem que têm sido desenvolvidas na contemporaneidade e apresenta um conjunto de textos que tratam sobre o tema. Cada pesquisador contribui com suas reflexões, buscando caminhos na compreensão sobre o conceito de educar e sobre como funciona o complexo processo de ensino e aprendizagem na atualidade.

- LEAL, Edvalda Araújo; MIRANDO, Gilberto José; CASA NOVA, Silvia Pereira de Castro. *Revolucionando a sala de aula*: como envolver o estudante aplicando técnicas de metodologias ativas de aprendizagem. São Paulo: Atlas, 2017.

  Este livro aborda algumas metodologias ativas de aprendizagem utilizando tanto estratégias tradicionais quanto estratégias contemporâneas e inovadoras.

- MENEZES, Nayra; MORAIS, Marizangela; RASSI, Werianny. Influência da Geração "Z" na relação de consumo. In: CONGRESSO NACIONAL DE EXCELÊNCIA EM GESTÃO, 12.; INOVARSE – RESPONSABILIDADE SOCIAL APLICADA, 3. 2016, Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro: Firjan, 29-30 set. 2016. p. 10-11. Disponível em: <https://www.inovarse.org/sites/default/files/T16_245.pdf>. Acesso em: 29 jul. 2020.

  Este artigo propõe uma análise da participação da geração Z no cenário econômico com base em um levantamento bibliográfico sobre esse tema, destacando o papel dessa geração em relações de consumo na atualidade e seus impactos no cenário mundial.

MODERNA

- MENTAL healt atlas 2017. Genebra: World Health Organization, 2018.

  Documento que reúne uma compilação de dados sobre a saúde mental da população em nível mundial.

- MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, Lilian; MORAN, José (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 2-25.

  Este artigo apresenta práticas pedagógicas baseadas em metodologias ativas que valorizam o protagonismo dos alunos.

- _____. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Org.). *Convergências midiáticas*, educação e cidadania: aproximações jovens. Ponta Grossa: Foca Foto/Proex/UEPG, 2015. v. 2. (Mídias Contemporâneas).

  Este texto aborda as diferentes facetas das tecnologias educacionais, trazendo reflexões sobre a educação no mundo contemporâneo e as novas concepções de ensino relacionadas às metodologias ativas.

- MORENO, Montserrat et al. *Falemos de sentimentos*: a afetividade como um tema transversal. Trad. Maria Cristina de Oliveira. São Paulo: Moderna, 1999. (Educação em Pauta: Temas Transversais).

  Relacionando aspectos cognitivos e afetivos, este trabalho afirma que é possível aprender em sala de aula características relacionadas à solidariedade, à ajuda mútua e à luta contra a discriminação, com base em ações e reflexões sobre os próprios sentimentos e comportamentos.

- PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Nesta obra é apresentada uma coletânea de ensaios que tratam da inserção da informática na educação escolar, promovendo articulações entre o uso dessa tecnologia e o fenômeno da cognição.

- PARA UMA ABORDAGEM multicultural: o Programa Etnomatemática. Nuno Vieira entrevista Ubiratan D'Ambrosio. *Revista Lusófona de Educação*, Lisboa, n. 11, p. 163-168, 2008.

  Entrevista realizada com o precursor da Etnomatemática, Professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio.

- PAULINO FILHO, Lucival Bento; PELLOSO, João Augusto Grecco; CAETANO, Willyan da Silva. Debates orientados: uma abordagem da aprendizagem ativa no desafio da formação integral. In: ENCONTRO NACIONAL DE JOVENS INVESTIGADORES, 4., 2019, Salvador. *Anais...* Salvador: 2019. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57573> Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo apresentado em evento promovido pela Universidade do Estado da Bahia (Uneb), que aborda a realização de debates sob a perspectiva da aprendizagem ativa.

- PENSAMENTO computacional e programação como ferramentas de aprendizagem. *Instituto Ayrton Senna*, 13 set. 2019. Disponível em: <https://www.institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Neste texto, o pensamento computacional e a programação são indicados como estratégias eficazes na busca por práticas pedagógicas que promovam o desenvolvimento pleno.

- PIVA JUNIOR, Dilermando. *Sala de aula digital*: uma introdução à cultura digital para educadores. São Paulo: Saraiva, 2013.

  Esta obra discute questões relacionadas à utilização de recursos tecnológicos em ambiente escolar, oferecendo ferramentas para que os educadores possam fundamentar e utilizar a cultura digital a serviço de sua principal atividade: a arte de educar.

- PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

  Nesta obra, os autores apresentam os possíveis modos de introduzir em sala de aula as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos, apontando as vantagens e desvantagens no trabalho com essa perspectiva. Também são analisados os papéis dos alunos e professores em sala de aula ao lidar com problemas relacionados às áreas de Geometria, Estatística e Aritmética.

- RAABE, André. Pensamento computacional na educação: para tod*s, por tod*s! *Computação Brasil,* Porto Alegre, Sociedade Brasileira de Computação (SBC), v. 34, n. 2, p. 54-63, jul. 2017. Disponível em: <https://www.sbc.org.br/component/flippingbook/book/35/1?page=54>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Com o intuito de apontar para a grande importância da ampliação do pensamento computacional no Ensino Básico, o autor discorre, neste artigo, a respeito dos esforços e das dificuldades encontradas no processo de valorização da Ciência da Computação como área de conhecimento.

- REIS, Angelina Fatima Moreno Vaz dos; BARRETO, Maria Auxiliadora Motta. *Uma experiência com think pair share no Ensino Fundamental I*. Práxis, Volta Redonda, v. 9, n. 17, p. 55-67, jun. 2017.

  Este artigo apresenta definições e a organização da estratégia **Think-pair-share** por meio da aplicação

MODERNA

dessa abordagem em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental.

- ROCHA, Julciane. *Design thinking* na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

  O objetivo é apresentar aos professores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar e, com isso, trazer benefícios para o dia a dia da sala de aula, como engajamento, maior aproveitamento, personalização, comunicação e outros.

- ROCHA, Ricael Spirandeli; CARDOSO, Iara Maria Dâmaso; MOURA, Monthelli Aparecida Estevão de. O uso da *gallery walk* como metodologia ativa em sala de aula: uma análise sistemática no processo de ensino-aprendizagem. *Revista Sítio Novo*, Palmas, v. 4, n. 1, p. 162-170, jan./mar. 2020.

  Este artigo apresenta possibilidades de aplicação da estratégia **Gallery walk** por meio da análise documental de publicações de sete experiências vivenciadas em salas de aula de Uberaba-MG.

- SOUZA, Maria Helena. 21 *teoremas matemáticos que revolucionaram o mundo*. São Paulo: Planeta do Brasil, 2018.

  Este livro apresenta uma viagem pela história dos teoremas desde os primórdios da humanidade, de modo a estabelecer relações com outras áreas do conhecimento. Nessa viagem, incorpora, por exemplo, a beleza no teorema dos fractais e a possibilidade de obter a medida de distâncias inalcançáveis por meio do Teorema de Tales.

- TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. 17. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

  O livro traz considerações e reflexões sobre os saberes docentes que servem de base para o trabalho dos professores, bem como sobre os fundamentos sociocognitivos do ensino e a análise do trabalho e da formação dos professores.

- TOKARNIA, Mariana. Um em cada dez estudantes no Brasil é vítima frequente de *bullying. Agência Brasil,* 19 abr. 2017. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-04/um-em-cada-dez-estudantes-no-brasil-e-vitima-frequente-de-bullying>. Acesso em: 27 abr. 2020.

  Diante da realidade das escolas brasileiras, esta reportagem apresenta um levantamento de dados a respeito da ocorrência de situações de *bullying* em escolas da Educação Básica, sustentada por informações coletadas do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) de 2015. O texto discute as causas e consequências envolvendo esse tipo de situação e a atuação de pais, professores e demais estudantes no enfrentamento do *bullying*.

- VALENTE, Jonas. Agência Brasil explica: o que é a tecnologia 5G. *Agência Brasil*, 30 mar. 2020. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2020-03/agencia-brasil-explica-o-que-e-tecnologia-5g>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Esta reportagem mostra as principais características da tecnologia 5G, considerando os benefícios que podem ser obtidos com a implantação dessa nova tecnologia, em diversas áreas da sociedade, além de apresentar as perspectivas para seu desenvolvimento em relação à implantação no Brasil.

- VALENTE, José Armando. Integração do pensamento computacional no currículo da educação básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. *e-Curriculum*, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 864-897, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/curriculum/article/view/29051/20655>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Neste artigo, o autor busca analisar as diferentes estratégias de implantação do pensamento computacional no currículo da Educação Básica. Essas estratégias foram classificadas em três categorias: a inclusão de temas relacionados à Ciência da Computação, a inserção de componentes curriculares que exploram os conceitos do pensamento computacional por meio de tecnologias e, por fim, a exploração dos conceitos do pensamento computacional de maneira transversal ao currículo do aluno.

- VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

  Relatório que busca fornecer dados atualizados sobre a violência escolar e *bullying*, destacando sua natureza, abrangência e impactos, assim como apresentar iniciativas para enfrentar esses problemas.

- WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia,* Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/4711/pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo traz uma discussão a respeito do pensamento computacional, enfatizando sua importância como habilidade analítica que deve ser desenvolvida nos alunos do Ensino Básico, auxiliando na resolução de quaisquer tipos de problemas.

MODELO

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37384 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Para conhecer seu livro

Olhar o mundo à nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos de nossa sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações, tomar decisões com base em constatações matemáticas e lidar com os recursos tecnológicos são exemplos da importância da Matemática em nossa vida.

Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a esta etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos, exercícios e problemas resolvidos, seguidos de propostas de exercícios e problemas que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que tratam do uso de *softwares* e de linguagem de programação.

Por fim, desejamos a você, aluno ou aluna, que desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações de seu professor, faça uso deste material com dedicação, protagonismo e entusiasmo.

Bom estudo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6 Probabilidade condicional

Teste do pezinho: um primeiro passo para o futuro dos recém-nascidos

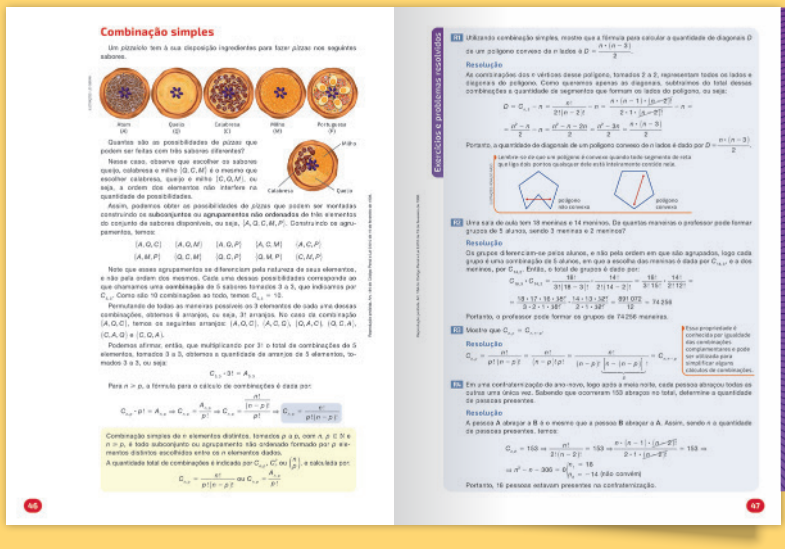
BNCC

Anemia falciforme

Ser consciente

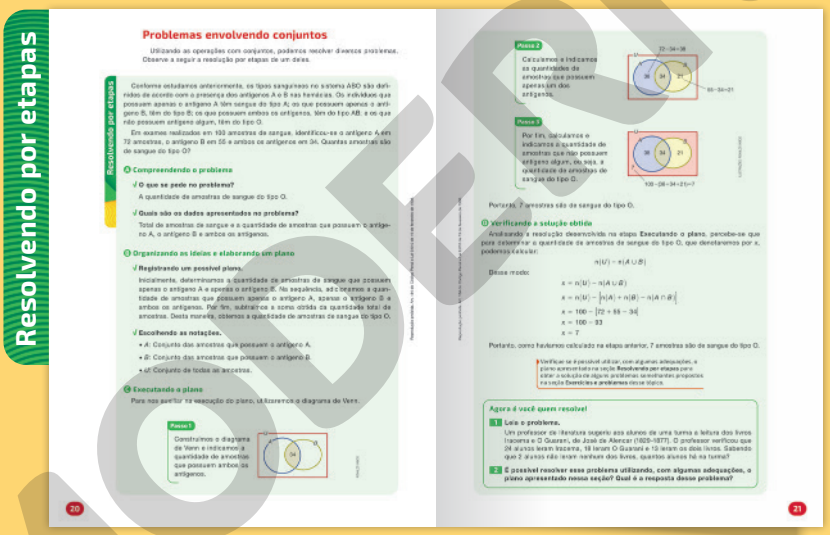
Abertura

Na abertura de cada tema você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversas temáticas.



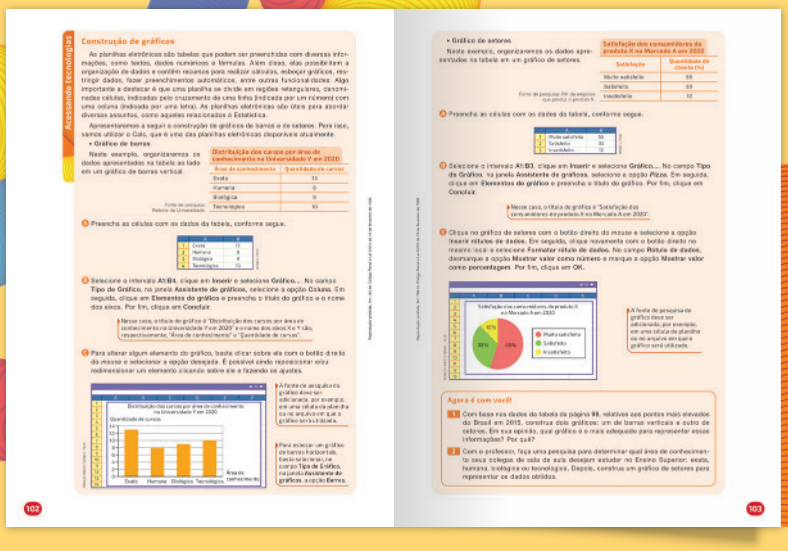
Estes exercícios e problemas auxiliam a exercitar habilidades, competências e estratégias para resolver todas as outras tarefas propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

Esta seção apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Espera-se que, a partir dela, você seja capaz de desenvolver estratégias para resolver diversos problemas, matemáticos ou não.



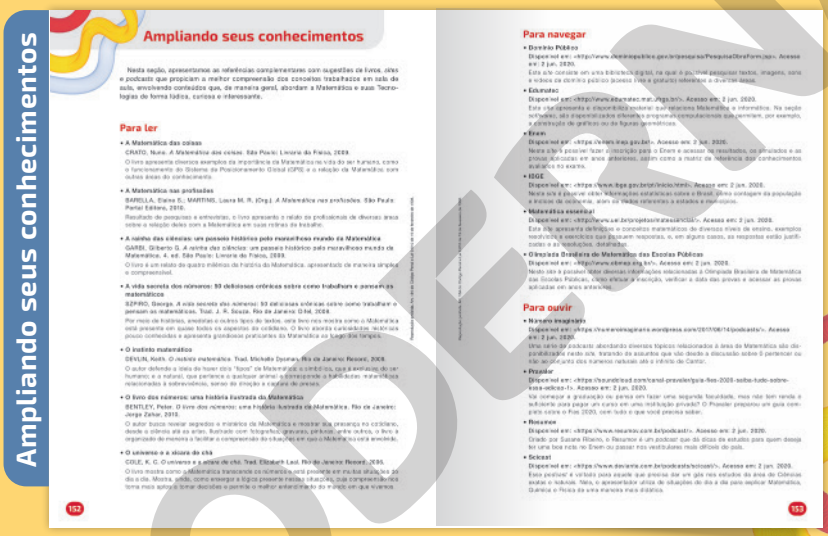
Esta seção apresenta exercícios e problemas diversificados para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Vários deles apresentam relações com outras áreas do conhecimento e outros componentes curriculares, além de questões de provas, como vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Nesta seção, você vai encontrar exemplos e tarefas que complementam o que foi estudado nos temas, utilizando *softwares*, linguagem de programação e aplicativos disponíveis em *sites*.

Esta seção apresenta sugestões de livros, vídeos, *sites* e *podcasts* para você conhecer mais sobre o que foi estudado nos temas e para ampliar seus conhecimentos.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Calculadora As tarefas com destaque **Calculadora** exploram procedimentos para usar os recursos dessa ferramenta.

Desafio As tarefas com destaque **Desafio** possuem caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

No contexto As tarefas com destaque **No contexto** estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.

Este ícone indica que as cores dos objetos retratados não correspondem às reais.

Em grupo As tarefas com destaque **Em grupo** serão mais proveitosas se realizadas com a colaboração de um ou mais colegas.

Elaborando As tarefas com destaque **Elaborando** exploram o desenvolvimento da escrita, da imaginação, da investigação e da reflexão.

Ser consciente Nas tarefas com destaque **Ser consciente** você refletirá a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde, cidadania, entre outros, possibilitando uma avaliação cidadã e social da temática abordada.

Este ícone indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

No final do livro, você vai encontrar as **Referências bibliográficas** usadas neste volume e a seção **Ampliando seus conhecimentos**, contendo referências complementares de livros, *sites* e *podcasts* para ampliar seus conhecimentos sobre os temas estudados.

MODELO

Objetivos

A finalidade deste volume é ampliar seus conhecimentos a respeito de **Probabilidade e Estatística**. Os conteúdos nele abordados são apresentados de maneira simples e precisa, visando seu protagonismo na aprendizagem e a construção de uma visão integrada da Matemática em diversos contextos.

Neste volume, o objetivo é que você amplie sua compreensão sobre experimentos aleatórios, cálculos de probabilidade, análise e representação de dados de estudos ou pesquisas e sua aplicação em outros componentes curriculares e suas aplicações tanto no cotidiano como em publicações de estudos de indicadores socioeconômicos, como a taxa de desemprego, ou indicadores sociais, como as pirâmides etárias.

Além disso, durante o desenvolvimento dos conteúdos você será desafiado a propor estratégias para modelar soluções de determinados problemas e escrevê-las em uma linguagem de programação.

Base Nacional Comum Curricular - BNCC

Em toda a coleção, visando favorecer o desenvolvimento das Competências Gerais da Educação Básica, das Competências Específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades relacionadas a cada uma delas, serão propostas tarefas (problemas, vivências, investigações etc.) para que você as resolva de maneira reflexiva.

A seguir, apresentaremos as competências e as habilidades cujo desenvolvimento é favorecido neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Competências específicas

1. **CE1CNT**: Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 **CE2CNT:** Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

3 **CE3CNT:** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

Matemática e suas Tecnologias: Competências específicas e habilidades

1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

EM13MAT102: Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas.

EM13MAT106: Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

2 Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

EM13MAT202: Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos.

3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

EM13MAT310: Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

EM13MAT311: Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

EM13MAT312: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

EM13MAT315: Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

EM13MAT316: Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).

4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

EM13MAT405: Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

EM13MAT406: Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra.

EM13MAT407: Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

EM13MAT511: Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

O primeiro par de letras indica a etapa do **Ensino Médio**.

O primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio.

A segunda sequência de letras indica a área ou o componente curricular: **MAT** = Matemática e suas Tecnologias.

Os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUMÁRIO

1 Os conjuntos 10

Noção de conjuntos 12
Conjuntos unitário, vazio e universo 12
A relação de inclusão 13
Exercícios e problemas 14
Operações com conjuntos 15
União de conjuntos 15
Interseção de conjuntos 15
Diferença de conjuntos 16
Complementar de um conjunto 17
Exercícios e problemas 19
Problemas envolvendo conjuntos 20
Exercícios e problemas 22
Acessando tecnologias
Programas em VisualG 24

2 Princípio aditivo, multiplicativo e arranjos 26

Métodos de contagem 28
Princípio aditivo da contagem 28
Princípio multiplicativo da contagem 28
Exercícios e problemas 30
Fatorial 32
Exercícios e problemas 32
Acessando tecnologias
Repetições no VisualG 33
Arranjo simples 34
Exercícios e problemas 36

3 Permutações 38

Permutação simples 40
Exercícios e problemas 41
Permutação com repetição 42
Exercícios e problemas 43

4 Combinação simples e Binômio de Newton 44

Combinação simples 46
Exercícios e problemas 50
Binômio de Newton 53
Triângulo de Pascal 53
Exercícios e problemas 56
Fórmula do Binômio de Newton 56
Termo geral do Binômio de Newton 58
Exercícios e problemas 59

5 Probabilidade 60

Estudando probabilidade 62
Experimento aleatório, espaço amostral e evento 63
Exercícios e problemas 66
Calculando probabilidades 69
Exercícios e problemas 72
Probabilidade da união de dois eventos 75
Exercícios e problemas 76

6 Probabilidade condicional 78

Estudando probabilidade condicional 80
Eventos dependentes e eventos independentes 81
Exercícios e problemas 83
Experimentos binomiais 85
Exercícios e problemas 87

7 Probabilidade e a produção de resíduos 88

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

8 Estatística 90

Estudando estatística 92
Variáveis estatísticas 92
População e amostra estatística 93
Levantamentos amostrais 93
Exercícios e problemas 95

9 Gráficos e tabelas 96

Estudando gráficos e tabelas 98
Tabelas 98
Gráfico de barras 99
Gráfico de linhas 100
Gráfico de setores 100
Pirâmide etária 101
Pictograma 101
Acessando tecnologias
Construção de gráficos 102
Exercícios e problemas 104
Inadequações em gráficos e tabelas 108
Exercícios e problemas 108

10 Medidas de tendência central 110

Estudando medidas de tendência central 112
Média aritmética 112
Média aritmética ponderada 113
Moda 113
Mediana 114
Acessando tecnologias
Média, moda e mediana 117
Exercícios e problemas 118

11 Medidas separatrizes 120

Separatrizes 122
Quartis 122
Decis 123
Percentis 124
Exercícios e problemas 125

12 Medidas de dispersão 126

Estudando medidas de dispersão 128
Amplitude 128
Desvio médio 129
Variância 129
Desvio-padrão 130
Exercícios e problemas 131
Distribuição de frequência 133
Exercícios e problemas 134
Intervalo de classe 135
Exercícios e problemas 137
Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes 139
Exercícios e problemas 140
Outros gráficos e representações 141
Diagrama de ramo-e-folhas 141
Diagrama de pontos 142
Box-plot 143
Exercícios e problemas 144

13 Estatística e probabilidade 146

Estudando estatística e probabilidade 148
Exercícios e problemas 151

Ampliando seus conhecimentos 152
Respostas 154
Referências bibliográficas 159
Lista de siglas 160

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 Os conjuntos

Sistema ABO

O sangue desempenha diversas funções importantes em nosso organismo, como o transporte de substâncias e oxigênio, regulação da temperatura corporal e proteção contra infecções. Assim, muitas pessoas, que sofrem de determinadas doenças ou que perderam muito sangue em acidentes ou cirurgias, precisam fazer sua reposição. Por isso, dependem da doação de voluntários.

BNCC

- EM13MAT315
- EM13MAT405

O caminho do sangue doado

Observe algumas etapas, desde a doação até a transfusão de sangue.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

1 Doador

O doador realiza um cadastro no balcão de atendimento. O atendente verifica se ele possui as condições necessárias para realizar a doação.

2 Triagem e coleta

A triagem consiste basicamente na análise de uma pequena amostra de sangue, na verificação dos sinais vitais e da medida da massa e em uma entrevista confidencial. São coletados cerca de 450 mℓ de sangue e amostras para testes.

3 Fracionamento

O sangue coletado é separado nos seguintes componentes: hemácias, plasma, plaquetas e crioprecipitado. Simultaneamente, realizam-se exames nas amostras de sangue, dentre os quais é possível determinar a classificação do tipo sanguíneo e identificar doenças infecciosas.

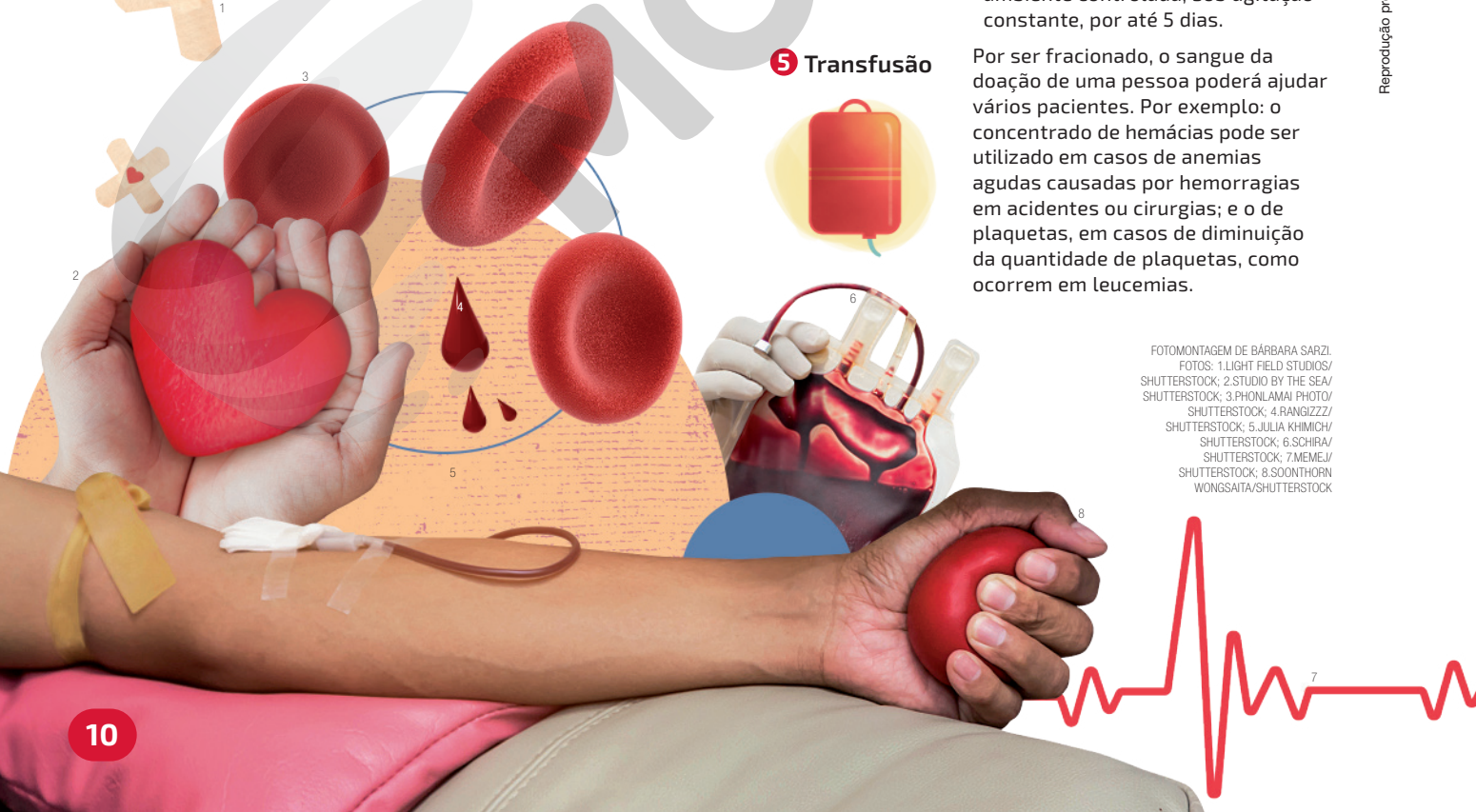
4 Armazenamento

Os componentes são armazenados de diferentes maneiras.

- Hemácias: em geladeira com uma medida de temperatura entre 2 °C e 5 °C, por um período de até 35 dias.
- Plasma e crioprecipitado: em *freezer* com temperatura medindo 18 °C negativos ou menos, por até um ano;
- Plaquetas: em temperatura ambiente controlada, sob agitação constante, por até 5 dias.

5 Transfusão

Por ser fracionado, o sangue da doação de uma pessoa poderá ajudar vários pacientes. Por exemplo: o concentrado de hemácias pode ser utilizado em casos de anemias agudas causadas por hemorragias em acidentes ou cirurgias; e o de plaquetas, em casos de diminuição da quantidade de plaquetas, como ocorrem em leucemias.



FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.LIGHT FIELD STUDIOS/SHUTTERSTOCK; 2.STUDIO BY THE SEA/SHUTTERSTOCK; 3.PHONLAMAI PHOTO/SHUTTERSTOCK; 4.RANGIZZZ/SHUTTERSTOCK; 5.JULIA KHIMICH/SHUTTERSTOCK; 6.SCHIRA/SHUTTERSTOCK; 7.MEMEJ/SHUTTERSTOCK; 8.SOONTHORN WONGSAITA/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

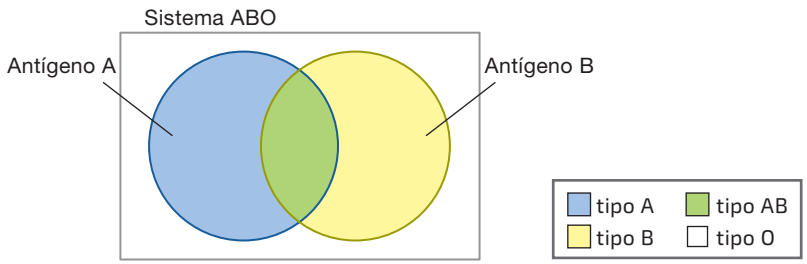
MODELO

Entre os sistemas de grupos sanguíneos que podem ser identificados nos seres humanos, destaca-se o sistema ABO, do qual fazem parte os grupos sanguíneos A, B, AB e O.

A classificação do tipo sanguíneo de um indivíduo em um desses grupos é realizada com base nos antígenos A e B que podem estar presentes em suas hemácias. O indivíduo que possui apenas antígeno A apresenta o tipo sanguíneo A, o que possui apenas antígeno B apresenta o tipo B, aquele que possui antígenos A e B apresenta o tipo AB e o indivíduo que não possui antígeno A nem antígeno B apresenta tipo sanguíneo O.

Esquematicamente, o sistema sanguíneo ABO pode ser representado por meio de um diagrama de Venn, como mostrado a seguir.

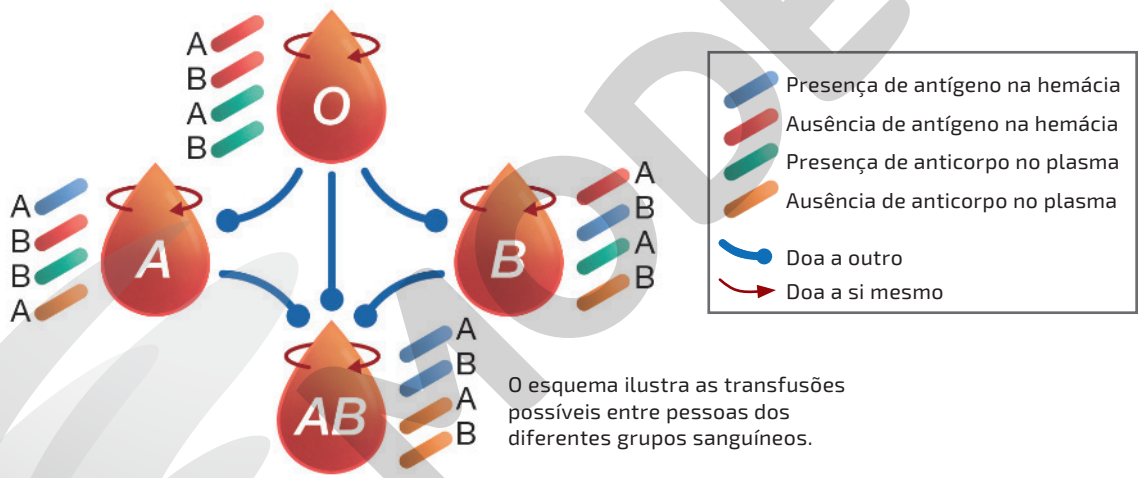
Antígenos: substâncias ou microrganismos que ao penetrar no corpo de um indivíduo desencadeiam a produção de anticorpos.
Hemácias: células sanguíneas cuja função principal é transportar oxigênio dos pulmões aos tecidos.
Anticorpos: proteínas sanguíneas cuja função é reconhecer os antígenos e ligar-se a eles de modo a auxiliar o sistema imunológico do organismo a destruí-los.



Nas próximas páginas, representaremos conjuntos em um diagrama de Venn.

Além de determinar o tipo sanguíneo de um indivíduo, a presença de antígenos em suas hemácias estimula a produção de anticorpos no plasma sanguíneo.

Os anticorpos são produzidos contra os antígenos que o sangue não possui. Portanto, em uma transfusão sanguínea, o indivíduo não pode receber sangue com antígenos diferentes dos que estão presentes em suas hemácias. Observe o esquema abaixo.



O esquema ilustra as transfusões possíveis entre pessoas dos diferentes grupos sanguíneos.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

A O sistema ABO é composto por quais grupos sanguíneos? A, B, AB e O

B Explique por qual motivo os indivíduos do grupo sanguíneo AB são considerados receptores universais e os indivíduos do grupo sanguíneo O, doadores universais?

C Uma pessoa com tipo sanguíneo B pode receber transfusão de que tipo sanguíneo? tipo B ou tipo O

B) Porque aqueles que possuem o tipo sanguíneo AB não têm presença de anticorpos A ou B, o que lhes permite receber qualquer tipo de sangue; já os que possuem o tipo O não têm a presença de antígenos A ou B, o que lhes permite doar para qualquer um.

Ser consciente

> Em sua opinião, por que é importante a doação de sangue? Resposta pessoal.

No diagrama de Venn utilizado para representar o sistema sanguíneo ABO as partes destacadas em verde, azul, amarelo e branco representam, respectivamente, os indivíduos que possuem os antígenos A e B, apenas o antígeno A, apenas o antígeno B e nenhum dos dois antígenos. Essas partes representam algumas das **operações entre conjuntos** que estudaremos a seguir.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Noção de conjuntos

Ao obter coleções quaisquer de objetos distintos, estamos formando **conjuntos**. Os tipos sanguíneos apresentados nas páginas anteriores são exemplos de conjuntos.

Cada objeto de um conjunto é denominado **elemento** do conjunto. De maneira geral, os conjuntos são nomeados por letras maiúsculas.

No conjunto I, as reticências indicam que, entre 9 e 83, há outros elementos. Já em P, as reticências indicam que há no conjunto infinitos outros números maiores do que 14.

Exemplos

- Conjunto das letras da palavra amarelo: $A = \{a, e, l, m, r, o\}$
- Conjunto das estações do ano: $B = \{\text{primavera, verão, outono, inverno}\}$
- Conjunto dos números ímpares positivos menores do que 87:
$$I = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 83, 85\}$$
- Conjunto dos números pares maiores do que 4: $P = \{6, 8, 10, 12, 14, \ldots\}$

Nos exemplos acima, os elementos dos conjuntos são apresentados entre chaves e separados com vírgula. Caso os elementos do conjunto sejam números decimais, usaremos ponto e vírgula para separá-los. Entre os exemplos, A, B e I são **conjuntos finitos**, pois podemos contar seus elementos, ou seja, associá-los aos números naturais de 1 até certo número n. Já o conjunto P é um **conjunto infinito**, pois não é finito.

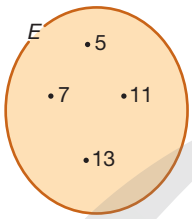
Os elementos de um conjunto também podem ser apresentados pela condição que os define, denominada **lei de formação** do conjunto.

Exemplo

- $E = \{x \mid x \text{ é um número primo maior do que 3 e menor do que 15}\}$

  lê-se: tal que

Lembre os alunos de que o 2 é o único número primo e par.



RONALDO INÁCIO

O diagrama de Venn recebe esse nome em homenagem ao lógico inglês John Venn (1834-1923).

Um conjunto também pode ser indicado por meio de uma figura chamada **diagrama de Venn**. Observe o conjunto E, representado no diagrama de Venn ao lado.

Quando um objeto é elemento de um conjunto, dizemos que ele **pertence** ao conjunto. De maneira semelhante, quando ele não é elemento do conjunto, dizemos que **não pertence** ao conjunto. Em relação ao conjunto E, por exemplo, segue que:

- 7 pertence a E: $7 \in E$ (lê-se: pertence)
- 8 não pertence a E: $8 \notin E$ (lê-se: não pertence)

Em relação ao conjunto E, temos também:
- $5 \in E$
- $11 \in E$
- $13 \in E$

Conjuntos unitário, vazio e universo

A seguir estão apresentados alguns conjuntos que possuem características especiais.

- Conjunto unitário

  Um conjunto A que tem um único elemento é chamado **conjunto unitário**, assim, $n(A) = 1$. Os conjuntos $A = \{7\}$ e $B = \{x \mid x \text{ é um número primo e par}\}$ são exemplos de conjuntos unitários.

Indicamos a quantidade de elementos de um conjunto A por $n(A)$.

- Conjunto vazio

  Dizemos que um conjunto A é **vazio** quando ele não tem elemento algum, assim, $n(A) = 0$. Podemos indicar o conjunto vazio por $\varnothing$ ou $\{\}$. O conjunto $A = \{x \mid x \text{ é um número ímpar divisível por 2}\}$ é vazio $(A = \varnothing \text{ ou } A = \{\})$, pois não existe número ímpar que seja divisível por 2.

Por definição, o conjunto vazio é finito.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- Conjunto universo

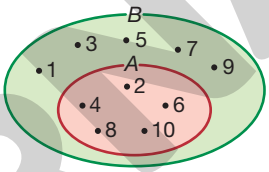
  Chamamos **conjunto universo**, indicado geralmente por U, o conjunto mais amplo que pode ser considerado em determinada situação, ou seja, aquele ao qual pertencem todos os elementos relacionados ao estudo. Mesmo que não expresso, é importante que fique bem estabelecido o conjunto universo em cada situação. A solução da equação $x^2 = 4$, por exemplo, é apenas o número 2, se o conjunto universo considerado for o dos números naturais. Se o conjunto universo considerado for o dos números inteiros, as soluções são 2 e -2.

A relação de inclusão

Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Note que todos os elementos de A são elementos de B e, nesse caso, dizemos que A é **subconjunto** de B, ou que A é **parte** de B, ou que A está **contido** em B. Podemos indicar essa relação das seguintes maneiras.

$A \subset B$ (lê-se: está contido) ou $B \supset A$ (lê-se: contém)

Veja, ao lado, esses conjuntos representados em um diagrama de Venn.



RONALDO INÁCIO

Exemplos

- $A = \{a, b\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$

  $A \subset B$ ou $B \supset A$
- O conjunto F, formado pelos estados da região Sul do Brasil, está contido no conjunto G, formado pelos estados brasileiros.

Quando há pelo menos um elemento de um conjunto C que não é elemento de um conjunto D, dizemos que C **não é subconjunto** de D, ou C **não é parte** de D, ou C **não está contido** em D.

$C \not\subset D$ (lê-se: não está contido) ou $D \not\supset C$ (lê-se: não contém)

Exemplos

- $A = \{a, e\}$ e $B = \{a, b, c, d\}$

  $A \not\subset B$ ou $B \not\supset A$
- $C = \{\text{Argentina, Brasil, Canadá}\}$ e $D = \{x \mid x \text{ é um país da América do Sul}\}$

  $C \not\subset D$ ou $D \not\supset C$

Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C, podemos destacar as seguintes propriedades.

- $\varnothing \subset A$

  O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Essa relação pode ser justificada por redução ao absurdo, ou seja, supondo que $\varnothing \not\subset A$ e obtendo uma contradição na conclusão. Nesse caso, existiria um objeto x pertencente a $\varnothing$ e não pertencente a A. Contudo, isso é um absurdo, pois por definição o conjunto $\varnothing$ não possui elementos. Dessa maneira, $\varnothing \subset A$.
- Propriedade reflexiva: $A \subset A$

  Todo conjunto está contido em si mesmo.
- Propriedade antissimétrica: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$

  A propriedade antissimétrica é muito utilizada quando se quer demonstrar que dois conjuntos A e B são iguais. Para isso, demonstra-se inicialmente que $A \subset B$ e, em seguida, que $B \subset A$.

Dois conjuntos A e B são iguais quando possuem os mesmos elementos. Indicamos essa igualdade por $A = B$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

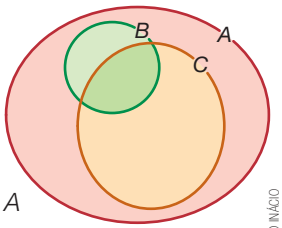
- Propriedade transitiva: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$

A propriedade transitiva também é conhecida por ser um tipo de **silogismo** e é constantemente empregada em deduções lógicas nas quais, em geral, são propostas duas premissas e, por meio do silogismo, obtém-se uma conclusão. O desenvolvimento do silogismo é atribuído a Aristóteles (384-322 a.C.), um dos grandes pensadores da Grécia Antiga. Atualmente, o silogismo é estudado em diversas áreas do conhecimento, como na Filosofia e no Direito.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 De acordo com o diagrama ao lado, qual afirmativa é a correta? alternativa b



RONALDO INÁCIO

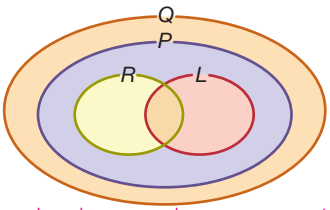
a) $A \subset B$, $B \subset C$ e $C \subset A$

b) $A \supset B$, $B \not\subset C$ e $C \subset A$

c) $A \supset B$, $B \subset C$ e $C \supset A$

d) $A \subset B$, $B \not\subset C$ e $C \supset A$

2 De acordo com o diagrama de Venn, classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.



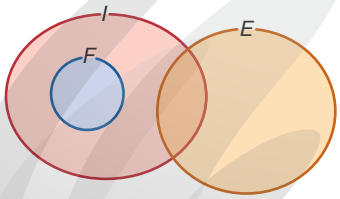
RONALDO INÁCIO

Q: conjunto dos quadriláteros
P: conjunto dos paralelogramos
R: conjunto dos retângulos
L: conjunto dos losangos

Lembre aos alunos as características dos paralelogramos, retângulos e losangos.

a) $P \subset Q$ Verdadeira.
b) $Q \subset \varnothing$ Falsa.
c) $L \not\subset R$ Verdadeira.
d) $R \supset P$ Falsa.
e) $L \neq P$ Verdadeira.
f) $P \not\subset L$ Verdadeira.

3 Observe o diagrama.



RONALDO INÁCIO

I: fala inglês
F: fala francês
E: fala espanhol

Qual das frases a seguir pode ser representada pelo diagrama? alternativa c

a) Em um congresso, todos os palestrantes que falam francês também falam inglês e espanhol.

b) Em uma escola, os alunos podem optar por aprender um único idioma: francês, inglês ou espanhol.

c) Em uma empresa, todo funcionário que fala francês fala inglês, e alguns que falam espanhol também falam inglês.

d) Em uma entrevista de emprego, todos os candidatos que falam espanhol sabem falar ou inglês ou francês.

4 Identifique qual das sentenças a seguir é verdadeira e indique a propriedade que justifica sua resposta. alternativa b; propriedade transitiva

a) $A \subset C$ e $B \subset C$, então $B \subset A$.

b) $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

c) $B \subset A$ e $C \subset A$, então $C \subset B$.

d) $C \subset B$ e $A \subset B$, então $A \subset C$.

5 Escreva na forma de diagrama de Venn os silogismos. Respostas na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

a) Atletismo é um esporte.
Praticar esporte é saudável.
Logo, praticar atletismo é saudável.

b) O beija-flor é uma ave.
Toda ave é um animal.
Então, o beija-flor é um animal.

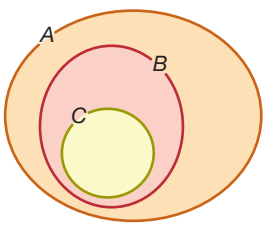
Oriente os alunos a definirem incialmente as letras correspondentes a cada conjunto para compor o diagrama.

c) Potiguar é quem nasce no estado do Rio Grande do Norte.
Marcos é potiguar.
Portanto, Marcos nasceu no estado do Rio Grande do Norte.

d) Todo poliedro é uma figura geométrica espacial.
A pirâmide é um poliedro.
Logo, a pirâmide é uma figura geométrica espacial.

6 Em grupo

Junte-se a um colega e elaborem um silogismo a partir do diagrama. Resposta pessoal.



RONALDO INÁCIO

7 Considere o conjunto:

$$A = \{x \mid x \text{ é um divisor positivo de } 10\}$$

Escreva todos os subconjuntos de A com exatamente três elementos.
$\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 10\}$, $\{1, 5, 10\}$, $\{2, 5, 10\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

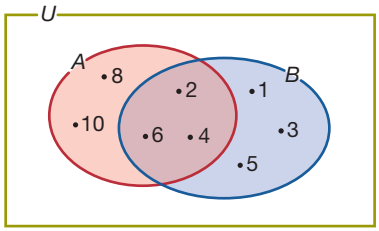
Operações com conjuntos

União de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A união de A e B, que indicamos por $A \cup B$, é o conjunto formado pelos elementos de A ou de B. Nesse caso:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$$

lê-se: união



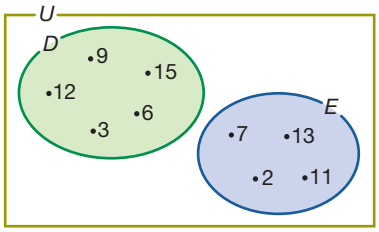
A parte destacada representa a união dos conjuntos A e B, ou seja, $A \cup B$.

Na definição de união de conjuntos, a palavra "ou" não tem o mesmo sentido de exclusão que costuma ser empregado na linguagem habitual (por exemplo: dentro "ou" fora, azul "ou" amarelo). Em união de conjuntos, a palavra "ou" significa que, para um objeto pertencer à união de A e B, ele tem de pertencer apenas a A, apenas a B ou pertencer a A e a B simultaneamente.

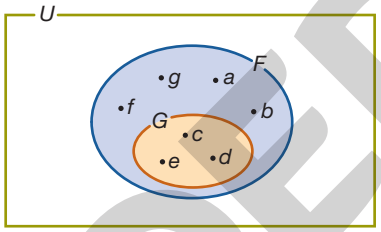
Dados os conjuntos A e B, chamamos união de A e B o conjunto formado pelos elementos de A ou de B, ou seja, $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Exemplos

- $D = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ e $E = \{2, 7, 11, 13\}$



- $F = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e $G = \{c, d, e\}$



Note que os conjuntos D e E não têm elementos comuns. Nesse caso, dizemos que esses conjuntos são **disjuntos**. Note também que o conjunto G é subconjunto de F. Nesse caso, $F \cup G = F$.

Na união de conjuntos, podemos destacar algumas propriedades, para quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C.

- Elemento neutro: $A \cup \varnothing = A$
- Propriedade idempotente: $A \cup A = A$
- Propriedade comutativa: $A \cup B = B \cup A$
- Propriedade associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

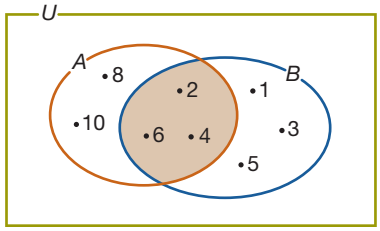
Interseção de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A **interseção** de A e B, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos objetos que são elementos de A e de B simultaneamente. Nesse caso:

$$A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

lê-se: interseção

A parte destacada representa a interseção dos conjuntos A e B, ou seja, $A \cap B$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

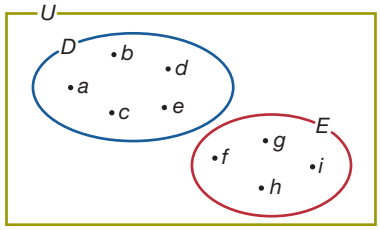
Dados os conjuntos A e B, chamamos interseção de A e B o conjunto formado pelos objetos que são elementos de A e de B simultaneamente, ou seja, $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

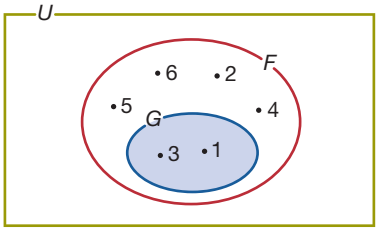
Exemplos

- $D = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{f, g, h, i\}$



$D \cap E = \varnothing$

- $F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $G = \{1, 3\}$



$F \cap G = \{1, 3\}$

Note que os conjuntos D e E são disjuntos. Nesse caso, a interseção de D e E é o conjunto vazio. Note também que o conjunto G é subconjunto de F. Nesse caso, $F \cap G = G$.

Na interseção de conjuntos, podemos destacar algumas propriedades, para quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C.

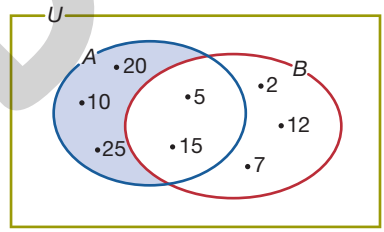
- Elemento neutro: $A \cap U = A$
- Propriedade idempotente: $A \cap A = A$
- Propriedade comutativa: $A \cap B = B \cap A$
- Propriedade associativa: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Diferença de conjuntos

Considere os conjuntos $A = \{5, 10, 15, 20, 25\}$ e $B = \{2, 5, 7, 12, 15\}$. A diferença entre A e B, que indicamos por $A - B$, é o conjunto formado por todos os elementos de A que não são elementos de B. Nesse caso:

$A - B = \{10, 20, 25\}$

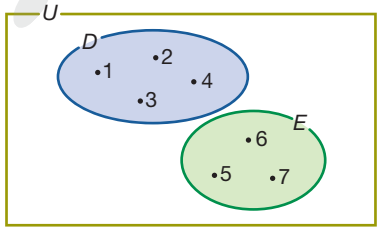
A parte destacada representa a diferença entre os conjuntos A e B, ou seja, $A - B$.



Dados os conjuntos A e B, chamamos diferença de A e B o conjunto formado por todos os elementos de A que não são elementos de B, ou seja, $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

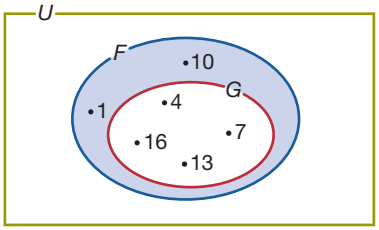
Exemplos

- $D = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E = \{5, 6, 7\}$



$D - E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $E - D = \{5, 6, 7\}$

- $F = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ e $G = \{4, 7, 13, 16\}$



$F - G = \{1, 10\}$ e $G - F = \varnothing$

Note que os conjuntos D e E são disjuntos. Nesse caso, $D - E = D$ e $E - D = E$.

Note que o conjunto G é subconjunto de F, ou seja, todo elemento de G também é elemento de F. Dessa maneira, $G - F = \varnothing$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

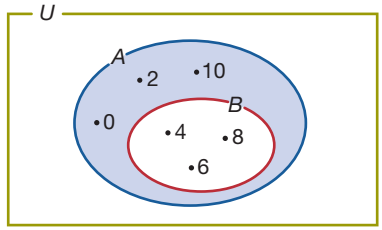
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

MODERNA

Complementar de um conjunto

Considere o conjunto $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ e seu subconjunto $B = \{4, 6, 8\}$. O complementar de B em relação a A, que indicamos por $\complement_A^B$, é o conjunto formado por todos os elementos de A que não são elementos de B. Nesse caso:

$$\complement_A^B = \{0, 2, 10\}$$



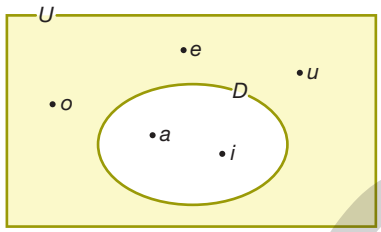
A parte destacada representa o complementar de B em relação a A.

Note que $\complement_A^B = A - B$

Dados os conjuntos A e B, com $B \subset A$, chamamos complementar de B em relação a A o conjunto formado por todos os elementos de A que não são elementos de B, ou seja, $\complement_A^B = A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Exemplo

- $U = \{a, e, i, o, u\}$ e $D = \{a, i\}$



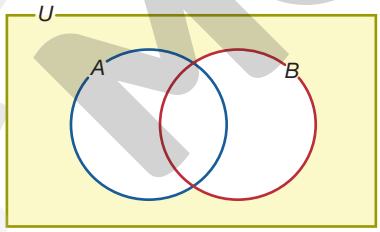
A parte destacada representa o complementar de D em relação a U.

$$\complement_U^D = U - D = \{e, o, u\}$$

No exemplo ao lado, o complementar de D em relação ao conjunto universo U também pode ser indicado por D' ou $\overline{D}$ ou $D^{\complement}$.

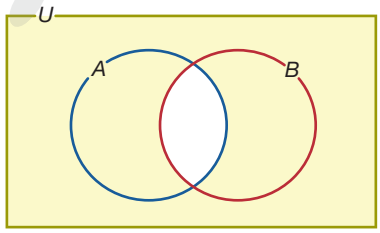
Em relação ao complementar de um conjunto, podemos destacar as seguintes propriedades.

- $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$



A parte destacada corresponde a $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$.

- $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$



A parte destacada corresponde a $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$.

- $\left(A^{\complement}\right)^{\complement} = A$
- $A \subset B \Rightarrow B^{\complement} \subset A^{\complement}$

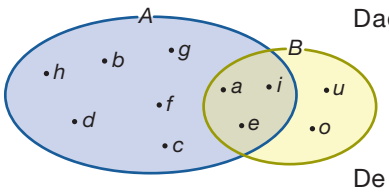
As propriedades $(A \cup B)^{\complement} = A^{\complement} \cap B^{\complement}$ e $(A \cap B)^{\complement} = A^{\complement} \cup B^{\complement}$ também são conhecidas como **leis de De Morgan**, em homenagem ao matemático britânico Augustus De Morgan (1806-1871).

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Quantidade de elementos da união de dois conjuntos



Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ e $B = \{a, e, i, o, u\}$, temos:

- $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, o, u\}$
- $n(A) = 9$
- $n(A \cup B) = 11$
- $A \cap B = \{a, e, i\}$
- $n(B) = 5$
- $n(A \cap B) = 3$

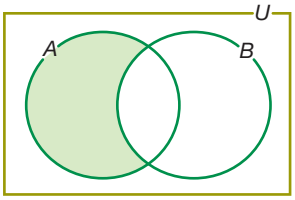
De acordo com as informações acima, note que $\underbrace{n(A \cup B)}_{11} = \underbrace{n(A)}_{9} + \underbrace{n(B)}_{5} - \underbrace{n(A \cap B)}_{3}$.

Agora, vamos mostrar que dados dois conjuntos quaisquer A e B finitos, temos:

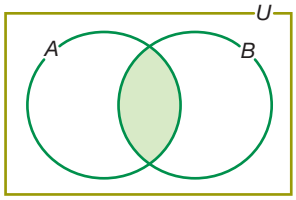
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Para nos auxiliar, vamos utilizar o diagrama de Venn. Inicialmente, representamos a quantidade de elementos de cada uma das partes destacadas.

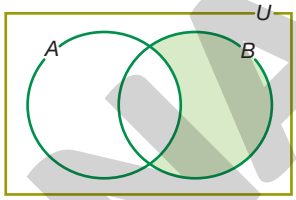
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO



$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$



$n(A \cap B)$



$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$

Para obter a quantidade de elementos da união de A e B, efetuamos:

$$n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

Deste modo:

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$
$$n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(A \cap B) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dados os conjuntos A e B finitos, temos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Quando dois conjuntos A e B são disjuntos, ou seja, $A \cap B = \varnothing$, temos $n(A \cap B) = 0$. Nesse caso, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Escreva um algoritmo que determine a quantidade de elementos da interseção dos conjuntos finitos A e B, dadas as quantidades de elementos de A, de B e da união de A e B. Em seguida, organize esse algoritmo em um fluxograma.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para a construção de um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

Um **algoritmo** é uma sequência finita de passos (instruções) para resolver um determinado problema.

Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Em seguida, é preciso responder às seguintes questões.

1º Quais são os **dados de entrada**, ou seja, os dados fornecidos no problema?

Dados de entrada: quantidade de elementos do conjunto A, do conjunto B e da união de A e B.

2º Quais são os **dados de saída**, ou seja, os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?

Dados de saída: Quantidade de elementos da interseção de A e B.

3º Conhecendo os dados de entrada e saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?

Para responder à questão **3**, vamos utilizar a fórmula da quantidade de elementos da união de dois conjuntos finitos. Nesse caso:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n(A \cap B) = n(A \cup B) - n(A) - n(B)$$

Portanto, para determinar a quantidade de elementos da interseção de A e B, devemos calcular:

$$n(A \cup B) - n(A) - n(B)$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Agora, escrevemos o algoritmo.

Início

1. Leia a quantidade de elementos de A.
2. Leia a quantidade de elementos de B.
3. Leia a quantidade de elementos da união de A e B.
4. Calcule $n(A \cup B) - n(A) - n(B)$.

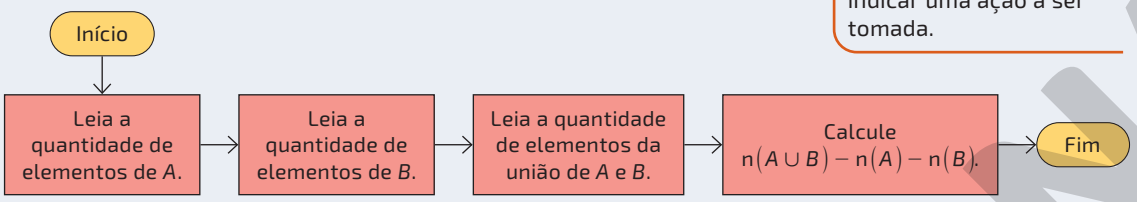
Fim

Em um fluxograma, cada tipo de figura possui um significado. No fluxograma abaixo, por exemplo, foram utilizadas as figuras a seguir.

Figura utilizada para indicar o início e o fim do fluxograma.

Figura utilizada para indicar uma ação a ser tomada.

Finalmente, organizamos o algoritmo em um fluxograma.



Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

8 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 4, 5\}$ e $C = \{5, 6, 7, 8\}$, determine:

a) $A \cup B$. $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A \cup C$. $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$

c) $B \cup C$. $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

d) $A \cap B$. $\{1, 4\}$

e) $A \cap C$. $\varnothing$

f) $B \cap C$. $\{5\}$

g) $(A \cup B) \cap C$. $\{5\}$

h) $(A \cap C) \cup B$. $\{1, 3, 4, 5\}$

9 Se o conjunto A é formado pelos divisores positivos de 18, B possui 5 elementos e $n(A \cap B) = 3$, quantos elementos possui o conjunto $A \cup B$?
8 elementos

10 Sabendo que $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A \cap B = \{a, c\}$ e $A - B = \{b, d, e\}$, quantos elementos o conjunto A tem? E o conjunto B?
5 elementos; 3 elementos

11 Sendo U o conjunto dos números inteiros, determine:

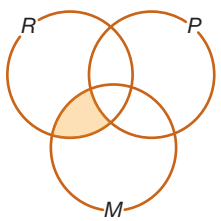
a) $\complement_U^A$, com $A = \{x \mid x \text{ é um número ímpar}\}$. $\complement_U^A = \{x \mid x \text{ é um número par}\}$

b) $\complement_U^B$, com $B = \{x \mid x \text{ é um número positivo}\}$. $\complement_U^B = \{x \mid x \text{ é um número negativo ou } x = 0\}$

12 Dado o conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e\}$, defina dois conjuntos A e B de U e verifique a validade das leis de De Morgan. Resposta pessoal.

13 Devido à grande quantidade de informações disponíveis na internet, as chamadas ferramentas de busca oferecem opções para refinar uma pesquisa. Em uma dessas ferramentas, ao utilizarmos o símbolo "-", por exemplo, e pesquisarmos as palavras **água consumo -mundo**, obteremos como resultados *sites* contendo os termos **água** e **consumo**, sem conter o termo **mundo**.

A parte destacada no diagrama representa os *sites* indicados por essa ferramenta de busca após uma pesquisa.



R: *sites* com o termo **reciclagem**
P: *sites* com o termo **papel**
M: *sites* com o termo **metal**

RONALDO INÁCIO

Qual dos itens a seguir apresenta a maneira como os termos da pesquisa foram indicados na ferramenta de busca? alternativa b

a) reciclagem papel metal

b) reciclagem metal -papel

c) reciclagem papel -metal

d) reciclagem -papel metal

Realize um experimento em uma ferramenta de busca na internet a fim de simular uma pesquisa semelhante à sugerida nessa tarefa.
Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Problemas envolvendo conjuntos

Utilizando as operações com conjuntos, podemos resolver diversos problemas. Observe a seguir a resolução por etapas de um deles.

Resolvendo por etapas

Conforme estudamos anteriormente, os tipos sanguíneos no sistema ABO são definidos de acordo com a presença dos antígenos A e B nas hemácias. Os indivíduos que possuem apenas o antígeno A têm sangue do tipo A; os que possuem apenas o antígeno B, têm do tipo B; os que possuem ambos os antígenos, têm do tipo AB; e os que não possuem antígeno algum, têm do tipo O.

Em exames realizados em 100 amostras de sangue, identificou-se o antígeno A em 72 amostras, o antígeno B em 55 e ambos os antígenos em 34. Quantas amostras são de sangue do tipo O?

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

A quantidade de amostras de sangue do tipo O.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

Total de amostras de sangue e a quantidade de amostras que possuem o antígeno A, o antígeno B e ambos os antígenos.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, determinamos a quantidade de amostras de sangue que possuem apenas o antígeno A e apenas o antígeno B. Na sequência, adicionamos a quantidade de amostras que possuem apenas o antígeno A, apenas o antígeno B e ambos os antígenos. Por fim, subtraímos a soma obtida da quantidade total de amostras. Desta maneira, obtemos a quantidade de amostras de sangue do tipo O.

√ Escolhendo as notações.

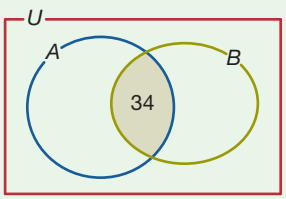
- A: Conjunto das amostras que possuem o antígeno A.
- B: Conjunto das amostras que possuem o antígeno B.
- U: Conjunto de todas as amostras.

C Executando o plano

Para nos auxiliar na execução do plano, utilizaremos o diagrama de Venn.

Passo 1

Construímos o diagrama de Venn e indicamos a quantidade de amostras que possuem ambos os antígenos.



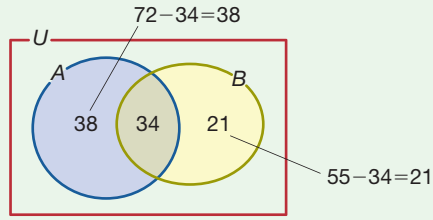
RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

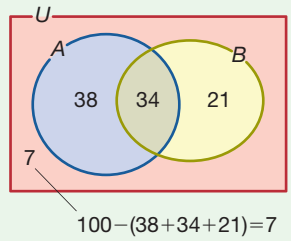
Passo 2

Calculamos e indicamos as quantidades de amostras que possuem apenas um dos antígenos.



Passo 3

Por fim, calculamos e indicamos a quantidade de amostras que não possuem antígeno algum, ou seja, a quantidade de amostras de sangue do tipo O.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Portanto, 7 amostras são de sangue do tipo O.

D Verificando a solução obtida

Analisando a resolução desenvolvida na etapa **Executando o plano**, percebe-se que para determinar a quantidade de amostras de sangue do tipo O, que denotaremos por x, podemos calcular:

$$n(U) - n(A \cup B)$$

Desse modo:

$$x = n(U) - n(A \cup B)$$
$$x = n(U) - \left[n(A) + n(B) - n(A \cap B)\right]$$
$$x = 100 - [72 + 55 - 34]$$
$$x = 100 - 93$$
$$x = 7$$

Portanto, como havíamos calculado na etapa anterior, 7 amostras são de sangue do tipo O.

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tópico.

Agora é você quem resolve! Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema.**

Um professor de literatura sugeriu aos alunos de uma turma a leitura dos livros Iracema e O Guarani, de José de Alencar (1829-1877). O professor verificou que 24 alunos leram Iracema, 18 leram O Guarani e 13 leram os dois livros. Sabendo que 2 alunos não leram nenhum dos livros, quantos alunos há na turma?

2 **É possível resolver esse problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nessa seção? Qual é a resposta desse problema?**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 (Enem, 2004) Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C1, C2 e C3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C1 e C2 terão 10 páginas em comum; C1 e C3 terão 6 páginas em comum; C2 e C3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C1.

Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante conclui que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

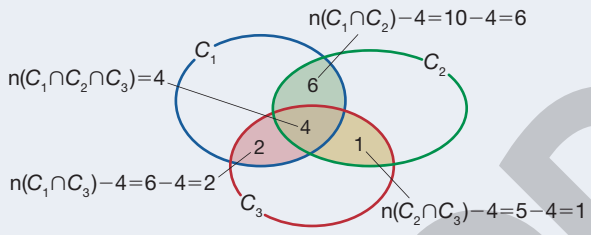
a) 135 b) 126 c) 118 d) 114 e) 110

Resolução

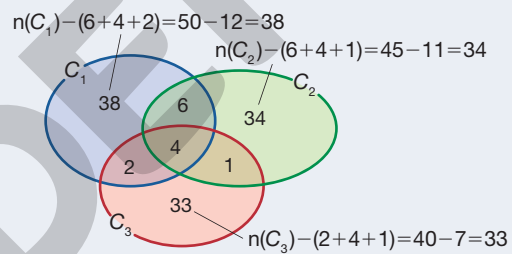
Inicialmente, denominamos C_1, C_2 e C_3 os conjuntos das páginas dos catálogos C1, C2 e C3, respectivamente. Assim:

- $n(C_1) = 50$
- $n(C_2) = 45$
- $n(C_3) = 40$
- $n(C_1 \cap C_2) = 10$
- $n(C_1 \cap C_3) = 6$
- $n(C_2 \cap C_3) = 5$
- $n(C_1 \cap C_2 \cap C_3) = 4$

1º Indicamos no diagrama a quantidade de páginas comuns aos três catálogos e o de páginas comuns a apenas dois catálogos.



2º Por fim, indicamos no diagrama a quantidade de páginas exclusivas de cada catálogo.



Calculamos o total de páginas necessárias para a montagem dos três catálogos:

$$n(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = 38 + 6 + 34 + 2 + 4 + 1 + 33 = 118$$

Portanto, o fabricante necessitará de um total de 118 originais de impressão, ou seja, a alternativa correta é a **c**.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

14 De acordo com as leis brasileiras de trânsito, há uma habilitação específica para cada um dos diferentes tipos de veículos. Por exemplo, uma pessoa que possua habilitação na categoria A pode conduzir um veículo motorizado com até 3 rodas, como motocicletas e triciclos. Já a habilitação na categoria B não permite a condução de veículos descritos para a categoria A, mas permite a condução de veículos motorizados que não excedam 3 500 kg e cuja lotação não ultrapasse 8 passageiros, como os carros de passeio.

Fonte de pesquisa: <http://www.cedes.pr.gov.br/servicos/Motorista/Carteira-de-motorista/Alterar-a-categoria-da-carteira-de-motorista-EpolnL3B>. Acesso em: 20 jul. 2020.

Certa empresa possui 26 funcionários, todos com algum tipo de habilitação: A, B ou AB (possui as duas habilitações A e B). Veja a quantidade de funcionários de acordo com o tipo de habilitação.

Categoria	Quantidade de funcionários
A	19
B	12

Quantos funcionários possuem habilitação na categoria:

a) A? 19 funcionários
b) B? 12 funcionários
c) A e B? 5 funcionários
d) somente A? 14 funcionários
e) somente B? 7 funcionários

15 Um levantamento realizado com 36 alunos de uma turma constatou que 25 deles acessam a internet nos fins de semana, 12 acessam de segunda-feira a sexta-feira e 5 alunos não acessam a internet. Quantos alunos acessam a internet durante toda a semana? 6 alunos

16 Certa clínica realizou uma pesquisa acerca do histórico de cirurgias plásticas de seus pacientes. Nessa pesquisa, constatou-se que 20% haviam feito apenas cirurgia plástica reparadora a fim de corrigir algum problema congênito, 54 pacientes fizeram somente cirurgia plástica para fins estéticos, 9% fizeram cirurgia plástica reparadora e estética e 44% nunca fizeram qualquer tipo de cirurgia plástica.

a) Quantos pacientes foram entrevistados? 200 pacientes
b) Quantos pacientes nunca fizeram qualquer tipo de cirurgia plástica? 88 pacientes

Congênito: que se manifesta desde ou antes do nascimento.

17 (UEL-PR, 2008) Um instituto de pesquisas entrevistou 1 000 indivíduos, perguntando sobre sua rejeição aos partidos A e B. Verificou-se que 600 pessoas rejeitavam o partido A; que 500 pessoas rejeitavam o partido B e que 200 pessoas não rejeitavam nenhum partido. O número de indivíduos que rejeitavam os dois partidos é: alternativa d

a) 120 pessoas
b) 200 pessoas
c) 250 pessoas
d) 300 pessoas
e) 800 pessoas

A tarefa 22 propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

18 Uma pesquisa, sobre doces preferidos, realizada com 100 clientes de uma doceria obteve o resultado mostrado no quadro a seguir.

Preferência	Quantidade de clientes
Somente bolo	10
Somente torta	30
Somente pudim	15
Bolo e torta	8
Bolo e pudim	5
Torta e pudim	6
Bolo, torta e pudim	4

Quantos clientes não preferem nenhum dos três doces? 34 clientes

19 Uma escola oferta quatro oficinas para 175 alunos do Ensino Médio: Informática e Fotografia no primeiro semestre e Artesanato e Culinária no segundo. Ao final do ano, cada aluno deverá ter realizado exatamente duas dessas oficinas. No primeiro semestre, inscreveram-se 80 alunos para Informática e 67 para Fotografia.

Sabendo que no primeiro semestre 35 alunos optaram pelas duas oficinas, quantos alunos deverão, no segundo semestre, participar de:

a) duas oficinas? 35 alunos
b) apenas uma oficina? 77 alunos
c) nenhuma oficina? 63 alunos

20 A quantidade de alunos matriculados em uma escola de idiomas está indicada a seguir.

Idioma	Quantidade de alunos
Inglês	72
Francês	28
Espanhol	57
Inglês e Francês	18
Inglês e Espanhol	36

Sabe-se que nenhum desses alunos estuda francês e espanhol ou os três idiomas simultaneamente.

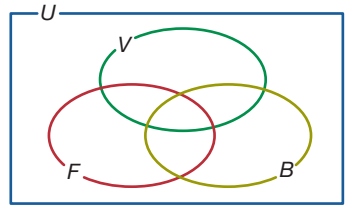
a) Quantos alunos foram matriculados para apenas um idioma? 49 alunos
b) Qual o total de alunos matriculados? 103 alunos

21 Desafio

Em uma cidade com 50 000 habitantes, a população tem acesso a 3 jornais, sendo que 40% da população lê o jornal A, 28% o jornal B, 58% o jornal C, 20% lê somente o jornal A, 12% lê somente o jornal B, 35% lê somente o jornal C e 11% lê somente os jornais A e C. Considerando que A, B e C possuem leitores em comum, e que sempre existem leitores em comum a dois jornais, determine a quantidade de habitantes que leem mais de um jornal. 13 500 habitantes

22 Elaborando

A partir do diagrama a seguir, elabore um problema envolvendo operações de conjuntos. Em seguida, troque esse problema com um colega e resolva-o. Ao final, verifiquem se as resoluções estão corretas.



RONALDO NÁCIO

V: voleibol
F: futebol
B: basquete

22. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Programas em VisualG

Em diversas situações é interessante programar um computador para que ele resolva um determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa que é interpretado e executado pelo computador.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é de difícil compreensão e manipulação. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

Em informática, instrução é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Nesta coleção, usaremos o VisualG, linguagem com comandos em português voltada para iniciantes em programação.

Estrutura de um programa em VisualG

Um programa escrito em VisualG é subdividido em três áreas distintas: o cabeçalho do programa, a área de declarações e o corpo do programa.

Cabeçalho do programa

Esta área é utilizada para indicar o início do programa e, também, seu nome. O cabeçalho do programa é atribuído pela instrução **Algoritmo**, seguida de um nome entre aspas. Veja um exemplo.

Algoritmo "soma"

Área de declarações

Área subdividida em algumas subáreas. Nesta coleção, restringiremos nosso estudo apenas à subárea dedicada à indicação das variáveis que serão utilizadas no programa. A declaração das variáveis é atribuída pela instrução **Var**, seguida da relação de variáveis.

Essas variáveis são identificadas por um rótulo e armazenam um valor ou texto. O rótulo pode conter letras, números ou *underline* (_), porém deve começar com uma letra. Além disso, cada variável deve ter seu tipo definido. Observe no quadro ao lado alguns dos tipos mais comuns de variável.

Tipo	Variável representa
inteiro	números inteiros
real	números reais
caractere	sequência de caracteres

Para definir o tipo da variável, deve-se escrever seu rótulo (ou vários rótulos, separados por vírgula), seguido por dois-pontos (:) e seu tipo. Veja alguns exemplos.

```
Var
x : real          al : caractere          a, b, c, d : inteiro
```

Corpo do programa

Esta área é utilizada para escrever as instruções que devem ser seguidas pelo computador. Seu início é indicado pela instrução **Inicio** e seu fim, pela instrução **Fimalgoritmo**.

```
Inicio
sequência de instruções
Fimalgoritmo
```

Ao utilizar caracteres especiais (como letras acentuadas, sinais de pontuação e espaço), alguns problemas de exibição e execução do programa podem ocorrer. Por isso, é utilizado e recomendado usar termos semelhantes sem caracteres especiais, como em **Inicio** e **Fimalgoritmo**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo de um programa em VisualG

Agora, vamos colocar em prática os conceitos estudados. Para isso, considere o seguinte problema.

> Escrever um programa que determine a quantidade de elementos da união dos conjuntos *A* e *B* dadas a quantidade de elementos de *A*, a quantidade de elementos de *B* e a quantidade de elementos da interseção de *A* e *B*.

Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo que o resolva. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1. Leia a quantidade de elementos de *A*.
2. Leia a quantidade de elementos de *B*.
3. Leia a quantidade de elementos da interseção de *A* e *B*.
4. Adicione a quantidade de elementos de *A* à quantidade de elementos de *B* e subtraia a quantidade de elementos da interseção de *A* e *B*.

Fim

Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "Quantidade_de_elementos_da_uniao_de_dois_conjuntos"
2  Var
3  a, b, c, d: inteiro
4  Inicio
5  escreva ("Digite a quantidade de elementos de A: ")
6  leia (a)
7  escreva ("Digite a quantidade de elementos de B: ")
8  leia (b)
9  escreva ("Digite a quantidade de elementos da interseção de A e B: ")
10 leia (c)
11 d <- a + b – c
12 escreva ("A quantidade de elementos da união de A e B é: ",d)
13 Fimalgoritmo
```

No corpo do programa em VisualG são indicados os comandos que fazem as operações. Veja, a seguir, o que fazem os comandos utilizados no exemplo.

escreva: apresenta na tela o conteúdo inserido entre parênteses.

leia: atribui o valor informado pelo usuário na variável indicada.

<-: atribui o valor da expressão à direita do sinal na variável indicada à esquerda.

Para a expressão, podem ser usados sinais como + (adição), - (subtração), * (multiplicação) e / (divisão), além dos parênteses, que no VisualG podem ser usados junto com outros parênteses, em vez de se usar chaves e colchetes.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Qual informação deve ser inserida pelo usuário quando o programa executar a instrução da linha 7?

2 Escreva um programa em VisualG que determine a quantidade de elementos da interseção dos conjuntos *A* e *B* dadas a quantidade de elementos de *A*, a quantidade de elementos de *B* e a quantidade de elementos da união de *A* e *B*.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 Princípio aditivo, multiplicativo e arranjos

Zebras no supermercado?

Você já imaginou como os comerciantes lidavam com as vendas e a gestão de estoque antes da invenção do **código de barras**? Os produtos eram etiquetados um a um, sendo preciso digitar seus preços manualmente na caixa registradora. Esse registro, que hoje leva alguns minutos, provocava longas filas e muita demora, sem falar nos riscos envolvendo erros de digitação, caso o atendente, por falta de atenção, trocasse ou digitasse um número a mais ou a menos e ninguém percebesse.

BNCC
• EM13MAT310

Um código de barras nada mais é do que a representação gráfica de uma sequência de algarismos (dígitos). As vantagens das linhas verticais pretas e brancas é que elas podem ser identificadas rapidamente, e sem risco de erros, por um tipo de escâner, ao emitir um raio vermelho que percorre todas as linhas. Mas os códigos de barras não ajudam apenas os comerciantes e consumidores. Dentro das empresas ele é utilizado para controlar a fabricação, a movimentação e a distribuição desses produtos, garantindo um alto nível de controle sobre a produção.

O EAN, (em inglês, *European Article Numbering system* – Sistema Europeu de Numeração de Artigos) é um sistema de barras de uso mundial. Adotado na Europa em 1973, ele consiste em uma sequência numérica de 13 (EAN13) dígitos para cada produto. No Brasil, a castanha do caju foi o primeiro item a utilizar o código de barras, em 1985.

Aviso inicial
As três primeiras barras à esquerda (duas pretas e uma branca) indicam o início da leitura do código do produto.

Luz do escâner

Checagem final
Este último dígito é denominado verificador. Ao ler o código, o computador realiza um cálculo e verifica se o resultado é igual a esse dígito.

Registro Nacional
A primeira sequência de dígitos indica o país de origem do produto.

Fabricante
A segunda sequência de dígitos identifica a empresa fabricante. Esse número é fornecido pela EAN para que não sejam distribuídos os mesmos números.

Divisão
Três barras brancas e duas pretas dividem o código em duas partes.

RG do produto
A terceira sequência de dígitos identifica o produto quanto ao tipo, tamanho, massa e embalagem.

MODERNA

Verificação do código de barras

Em alguns casos com rasuras ou falta de legibilidade, o escâner não consegue "ler" o código, emitindo uma mensagem de erro. Diante disso, o atendente deve digitar a sequência numérica do código de barras. Para garantir a identificação do produto correto, existe um cálculo que confirma se o código é válido.

1. Inicialmente, denominamos os 13 dígitos do código de barras por $a_1, a_2, a_3, ..., a_{13}$.
2. Efetuamos o seguinte cálculo:
$$S = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}) + 3 \cdot (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$$
Utilizando como exemplo o código de barras apresentado na página anterior, temos:
$$S = (7 + 9 + 3 + 6 + 9 + 3) + 3 \cdot (8 + 0 + 9 + 7 + 1 + 0) = 112$$
3. Arredondamos o valor obtido para o múltiplo de 10 imediatamente maior. No exemplo, esse múltiplo é o 120.
4. Subtraímos do número múltiplo de 10 o valor obtido de S. O resultado dessa subtração tem de ser igual ao termo a_{13}, ou seja, ao dígito verificador. No exemplo, $120 - 112 = 8$. Note que o 8 é o valor de a_{13}, validando, assim, a leitura do código de barras.

Fonte de pesquisa: MILIES, César Polcino. A matemática dos códigos de barras: detectando erros. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, SBM, n. 68, p. 38-42, 1º quad. 2009.

Se ao final do cálculo o valor encontrado for diferente de a_{13}, significa que há erro na leitura de pelo menos um dígito do código de barras. Se o valor de S for múltiplo de 10, o dígito verificador será zero.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Para que serve o código de barras?

B Qual o país de origem e o dígito verificador do código de barras ao lado?

7 610034 89322X

Suíça; dígito verificador igual a 1

C Em 2020, eram reconhecidos pela Organização das Nações Unidas (ONU) 193 países. Caso o Registro Nacional fosse formado por dois dígitos, seria possível abranger todos esses países? Justifique sua resposta.

D Traga para a sala de aula embalagens de produtos que tenham código de barras e calcule o dígito verificador. Resposta pessoal.

Os 13 dígitos utilizados na composição do código EAN13 parecem poucos se considerarmos a grande variedade de tipos, tamanhos, massas, embalagens, quantidades por pacote, países de origem e de empresas fabricantes no mundo todo. Além do controle rigoroso feito pela EAN para a criação desses códigos, o que garante que não haja duplicidade de números para produtos diferentes são os conceitos matemáticos relacionados ao princípio fundamental da contagem, assunto das próximas páginas. Tais conceitos permitem a realização do cálculo da quantidade máxima de produtos que uma empresa pode cadastrar, por exemplo.

Código de barras natural! A variedade de listras das zebras torna difícil o trabalho dos biólogos para identificar e monitorar esses animais, principalmente de espécies ameaçadas de extinção. Grupos de pesquisadores de universidades americanas criaram um programa que pretende mudar isso. Ele é capaz de distinguir zebras de acordo com suas listras, seguindo o mesmo princípio de um código de barras convencional.

C) Não, pois, caso o Registro Nacional fosse formado por dois dígitos, ele abrangeria, no máximo, apenas 100 países e não os 193 países reconhecidos pela ONU.

Observe as sequências que identificam alguns países.

400 a 440 Alemanha

789 a 790 Brasil

690 a 695 China

800 a 839 Itália

450 a 459 / 490 a 499 Japão

750 México

560 Portugal

760 a 769 Suíça

ILUSTRAÇÕES: CAMILA CARMONA

A) Uma possível resposta: ele melhora a precisão de classificação dos produtos, identificando-os de maneira rápida.

FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.SOLAR SEVEN/SHUTTERSTOCK; 2.PHOTKA/SHUTTERSTOCK; 3.ARINA_B/SHUTTERSTOCK; 4.THOMAS BETHGE/SHUTTERSTOCK; 5.NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK; 6.LUIS CARLOS TORRES/SHUTTERSTOCK; 7.ODUA IMAGES/SHUTTERSTOCK; 8.JON BEARD/SHUTTERSTOCK; 9.VECTOR POUCH/SHUTTERSTOCK; 10.EVZ/SHUTTERSTOCK

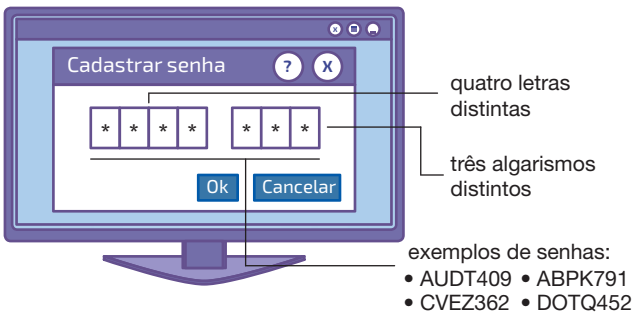
MODERNA

Métodos de contagem

Métodos de contagem são métodos que permitem determinar quantas decisões podem ser tomadas para executar uma tarefa ou um procedimento. Esses métodos possibilitam resolver problemas como os apresentados a seguir.

A Em certo dia no cinema *FilmesMat*, estão disponíveis três títulos de ação, dois de comédia e um de animação. Quantos são os filmes que um cliente pode assistir nesse dia?

O nome do cinema apresentado nesta questão é fictício.



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

B Para acessar determinado *site*, é necessário cadastrar uma senha formada por quatro letras maiúsculas e três algarismos, nessa ordem. Na senha, os caracteres devem ser distintos, ou seja, não podem se repetir.

Sabendo que estão disponíveis 26 letras e 10 algarismos, quantas senhas diferentes podem ser cadastradas nesse *site*?

Nos próximos tópicos estudaremos os métodos de contagem denominados princípio aditivo e princípio multiplicativo, que possibilitam resolver problemas semelhantes aos apresentados.

Princípio aditivo da contagem

Podemos resolver o problema **A** proposto anteriormente utilizando o princípio aditivo da contagem.

Dois acontecimentos são independentes quando a ocorrência de um não afeta a ocorrência do outro.

Considere dois acontecimentos independentes. Se um pode ocorrer de m maneiras distintas e o outro pode ocorrer de n maneiras distintas, então a quantidade de maneiras de ocorrer um acontecimento ou o outro é $n + m$. Este é o **princípio aditivo da contagem**.

Veja a seguir uma situação que pode ser resolvida por esse princípio.

Em certa lanchonete alguns sanduíches são comercializados já montados. Nesse tipo de serviço são oferecidas três opções de sanduíche com carne, duas opções de sanduíche com frango e quatro opções de sanduíches vegetarianos. Nesse tipo de serviço, quantas são as possibilidades de um cliente escolher apenas um sanduíche?

De acordo com as informações apresentadas, o cliente pode escolher qualquer opção de lanche dentre as apresentadas, que totalizam:

$$3 + 2 + 4 = 9$$

Portanto, um cliente possui 9 possibilidades de escolha.

Princípio multiplicativo da contagem

Podemos resolver o problema **B** proposto anteriormente escrevendo todas as possibilidades e realizando a contagem das senhas. No entanto, escrever todas essas senhas pode ser trabalhoso. Uma maneira de resolver esse tipo de problema é por meio do princípio multiplicativo da contagem ou, como também é chamado, princípio fundamental da contagem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

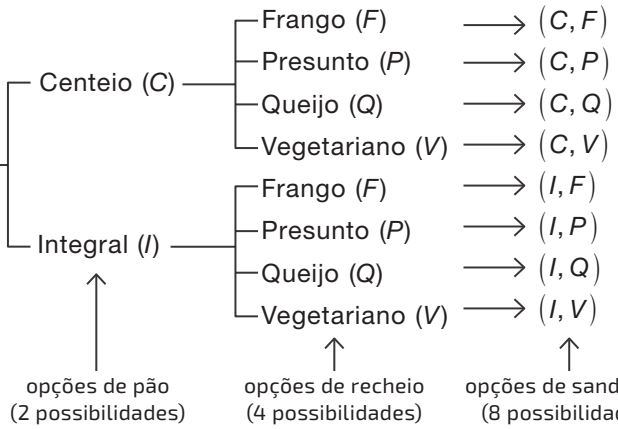
MODERNA

Veja uma situação que pode ser resolvida por esse princípio.

Na lanchonete apresentada na página anterior, o cliente pode optar por montar seu sanduíche. Nesse tipo de serviço, são oferecidas duas opções de pão (centeio e integral) e quatro de recheio (frango, presunto, queijo ou vegetariano). De quantas maneiras distintas um cliente pode montar um sanduíche com um tipo de pão e um de recheio?

MARKUS MAINKA/SHUTTERSTOCK

sanduíche



O diagrama ao lado é chamado **diagrama de árvore** ou **árvore de possibilidades**.

Essas possibilidades também podem ser organizadas em um **quadro de dupla entrada**.

Opção de recheio	Opção de pão	
	Centeio (*C*)	Integral (*I*)
Frango (*F*)	(*C*, *F*)	(*I*, *F*)
Presunto (*P*)	(*C*, *P*)	(*I*, *P*)
Queijo (*Q*)	(*C*, *Q*)	(*I*, *Q*)
Vegetariano (*V*)	(*C*, *V*)	(*I*, *V*)

Observe que a escolha do sanduíche pode ser realizada em duas etapas: a escolha do tipo de pão, com 2 possibilidades, e a escolha do recheio, com 4 possibilidades.

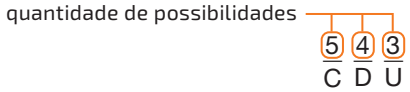
Tanto na árvore de possibilidades quanto no quadro de dupla entrada o total de possibilidades para a montagem de um sanduíche é igual a 8, ou seja, $2 \cdot 4 = 8$.

Se um acontecimento A pode ocorrer de n maneiras distintas e, para cada uma dessas maneiras, um acontecimento B pode ocorrer de m maneiras distintas, então a quantidade de possibilidades de ocorrência dos acontecimentos A e B é dada pelo produto $n \cdot m$. Este é o **princípio fundamental da contagem**.

Exemplo 1

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5, 7 e 9?

O número formado terá três ordens, ou seja, centena (C), dezena (D) e unidade (U). Na ordem das centenas, temos 5 possibilidades. Como os algarismos devem ser distintos, na ordem das dezenas temos 4 possibilidades e na ordem das unidades, 3 possibilidades.



Portanto, a quantidade de números que podemos formar é $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplo 2

Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, podemos formar quantos números de quatro algarismos?

O número formado terá quatro ordens, ou seja, unidade de milhar (UM), centena (C), dezena (D) e unidade (U). Na ordem das unidades de milhar, temos 6 possibilidades, ou seja, os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, pois o 0 não pode ocupar essa ordem. Como os algarismos podem se repetir, na ordem das centenas, das dezenas e das unidades, temos 7 possibilidades.

quantidade de possibilidades

6	7	7	7
UM	C	D	U

Portanto, a quantidade de números que podemos formar é $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2\,058$.

A tarefa **3** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

O nome do cinema apresentado nessa questão é fictício.

1 De acordo com as informações apresentadas na página **28**, determine a quantidade de filmes que um cliente pode assistir no cinema *FilmesMat* naquele dia. 6 filmes

2 Nos itens, determine a solução de cada situação e o princípio de contagem utilizado.

a) Maria está jogando um *videogame*. Nele, há um personagem com poderes da terra, dois com poderes da água, um com poderes do vento e três com poderes do fogo. Quantos são os personagens que Maria pode escolher?
7 personagens; princípio aditivo da contagem.

b) Renato levou em uma viagem três calças, dois pares de sapato e quatro camisas, todos diferentes entre si. De quantas maneiras distintas ele pode se vestir, utilizando uma calça, um par de sapatos e uma camisa?
24 maneiras; princípio multiplicativo da contagem.

c) Maurício tem a opção de comprar uma camisa listrada ou uma camisa xadrez. Quantas são as opções de camisa que Maurício pode escolher?
2 opções; princípio aditivo da contagem.

3 Elabore um problema que seja possível de resolver utilizando o princípio aditivo da contagem. Em seguida, peça para um colega que o resolva.

4 Antes do início de uma partida de futebol, é verificado se as equipes utilizarão uniformes cujas cores os distingam claramente.

Para certa partida de futebol, uma das equipes dispunha de quatro modelos de camisa, dois de calção e três de meião. De quantas maneiras distintas essa equipe pode compor seu uniforme?
24 maneiras

ALIZADA STUDIOS/SHUTTERSTOCK

Seleção brasileira masculina de futebol na Copa do Mundo de 2018, realizada na Rússia, antes da partida entre Brasil e Sérvia, na cidade de Moscou.

5 Em certo *shopping* há sete portões de entrada/saída. De quantas maneiras distintas uma pessoa pode entrar e sair desse *shopping*? E entrar e sair por um portão não utilizado na entrada?
49 maneiras; 42 maneiras

6 A partir das informações apresentadas no início da página **28**, calcule quantas senhas distintas podem ser cadastradas naquele *site*.
258 336 000 senhas

7 Uma companhia de transporte rodoviário intermunicipal estuda as 15 possíveis rotas para fazer viagens do município **A** ao município **C**, com passagem obrigatória pelo município **B**. Sabendo que de **A** a **B** existem três possíveis trajetos, quantos trajetos existem entre **B** e **C**?
5 trajetos

8 Na 1ª fase de um campeonato de xadrez organizado em uma escola, cada participante joga uma única vez contra cada um dos outros. Sabendo que foram realizadas 66 partidas nessa fase, quantas pessoas participaram do campeonato?
12 pessoas

Note que um participante não joga contra si mesmo. Além disso, a partida entre os participantes **A** e **B** e a partida entre **B** e **A** é a mesma.

9 Uma fantasia é composta de vestido, máscara e sapatos, disponíveis nas cores vermelha, amarela e preta. Sabendo que os sapatos e o vestido devem ter cores diferentes e a máscara é opcional, de quantas maneiras distintas pode-se compor a fantasia? 24 maneiras

No contexto

10 Vimos, nas páginas **26** e **27**, algumas informações a respeito do código de barras EAN13. Quantas são as possibilidades de código de barras EAN13, considerando que: 302 400 possibilidades

- o produto é da Suíça;
- o código da empresa é 5819;
- o RG do produto tem 5 algarismos distintos.

3. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

11 O Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), realizado em 2018, era composto por uma redação e 4 provas com 45 questões cada – Linguagens, Códigos e suas Tecnologias; Matemática e suas Tecnologias; Ciências da Natureza e suas Tecnologias; Ciências Humanas e suas Tecnologias. As questões das provas eram de múltipla escolha com 5 alternativas cada.

O item que apresenta o total de possibilidades para responder às questões das provas do Enem nesse ano é: alternativa **d**

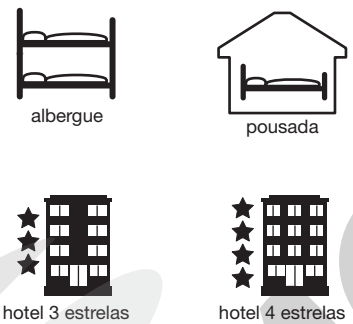
a) $180 \cdot 5$ **c)** 180^5 **e)** $\frac{4^5 \cdot 45}{180}$

b) $4 \cdot 5^{45}$ **d)** 5^{180}

12 A seguir estão apresentadas as opções que uma pessoa tem ao realizar a compra de certo pacote turístico em uma agência de viagens.

Transporte

Hospedagem



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Tempo de permanência

a) De quantas maneiras distintas a pessoa pode compor o pacote turístico? 36 maneiras

b) Se a pessoa optar por transporte aéreo e hospedagem em hotel, de quantas maneiras distintas ela pode compor o pacote turístico? 12 maneiras

13 Com os algarismos de 0 a 9, quantos números:

a) de quatro algarismos podem ser formados? 9 000 números

b) de cinco algarismos distintos podem ser formados? 27 216 números

c) ímpares de três algarismos podem ser formados? 450 números

d) múltiplos de 5 com seis algarismos podem ser formados? 180 000 números

14 Para representar as informações da tabela a seguir em um gráfico de setores, dispõe-se de 9 cores. Sabendo que não deve haver setores com cores iguais, de quantas maneiras distintas o gráfico pode ser colorido? 15 120 maneiras

Produção de cana-de-açúcar em 2018

Região	Produção (milhões de toneladas)
Sudeste	508,9
Nordeste	48,5
Centro-Oeste	144
Sul	41
Norte	4,4

Fonte de pesquisa: <https://sidra.ibge.gov.br/Tabela/1612>. Acesso em: 26 jun. 2020.

15 Saulo esqueceu a senha de sua conta de *e-mail*, mas lembra-se de que ela é formada por cinco algarismos pares distintos. Um dispositivo de segurança do servidor de *e-mail* impede que sejam feitas várias tentativas de acesso a partir de um mesmo local e bloqueia a conta por 5 minutos após 3 tentativas de acesso malsucedidas. Se Saulo tentar todas as possíveis senhas de acordo com o que ele se lembra, sem repeti-las, em quanto tempo, no máximo, ele poderá conseguir acessar sua conta de *e-mail*? Considere que seja necessário 1 minuto para realizar 3 tentativas. 235 min ou 3 h 55 min

16 Em certo município, para compor o número dos telefones de 8 dígitos, certa companhia telefônica tem o 1º, o 2º e o 3º dígitos iniciais fixos, o 4º dígito pode ser 5 ou 7, e os demais dígitos podem ser qualquer algarismo.

a) O número de telefone 1234 - 5678 pode pertencer a essa companhia? Justifique sua resposta. Não, pois o 4º dígito deve ser 5 ou 7.

b) Quantos números distintos de telefone essa companhia pode compor? 20 000 números

c) Se for acrescida ao 4º dígito a possibilidade de ser 3 ou 9, quantos números distintos a mais essa companhia poderá compor? 20 000 números distintos a mais.

17 Elaborando

O sistema de numeração binário é um sistema posicional no qual as quantidades são indicadas a partir de dois números, em geral 0 e 1. Nesse sistema, o número 177, na base decimal, é representado por 10110001. Os computadores digitais utilizam em seus processos internos o sistema binário, sendo denominado cada dígito binário de bite e cada conjunto de 8 dígitos, que forma um caractere, de baite.

A partir das informações, elabore um problema que seja possível de resolver utilizando o princípio multiplicativo da contagem. Em seguida, peça para um colega que o resolva. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

A tarefa **17** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Fatorial

Em algumas situações da análise combinatória, é necessário calcular o produto entre números naturais consecutivos. Para representar esses cálculos, utilizamos a notação $n!$ (lê-se: "fatorial de n").

Informe aos alunos que a notação n fatorial $(n!)$ foi introduzida por Christian Kramp (1760-1826), de Strasburgo, em 1808, para sanar dificuldades gráficas apresentadas pelo símbolo previamente utilizado.

Considere um número natural n, com $n \geqslant 2$. Definimos como fatorial de n, indicado por $n!$, o produto de n por seus antecessores naturais até o 1, ou seja:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 1$$

Também definimos que:

- $1! = 1$
- $0! = 1$

Exemplos

- $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$
- $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
- $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

A partir dos exemplos, podemos notar que: $3! = 3 \cdot 2!$, $4! = 4 \cdot 3!$, $5! = 5 \cdot 4!$ e $6! = 6 \cdot 5!$ De maneira geral: $n! = n \cdot (n-1)!$

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Calcule.

a) $\dfrac{10!}{8!}$

b) $\dfrac{5!}{2! + 3!}$

Resolução

a) $\dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\cancel{8!}} = 10 \cdot 9 = 90$

b) $\dfrac{5!}{2! + 3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! + 3 \cdot 2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}(1+3)} = \dfrac{5 \cdot \cancel{4} \cdot 3}{\cancel{4}} = 15$

R2 Simplifique a expressão $\dfrac{(n+1)!}{(n-2)!}$.

Resolução

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} = \frac{(n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = (n^2 + n) \cdot (n-1) = n^3 - n^2 + n^2 - n = n^3 - n$$

R3 Resolva a equação $\dfrac{(n+2)!}{5 \cdot n!} = 4$.

Resolução

$$\frac{(n+2)!}{5 \cdot n!} = 4 \Rightarrow \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!}}{5 \cdot \cancel{n!}} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 + 3n - 18 = 0 \begin{cases} n_1 = 3 \\ n_2 = -6 \text{ (não convém, pois } n \geqslant 0) \end{cases}$$

Portanto, $n = 3$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

18 Calcule.

a) $6!$ 720

b) $4 \cdot 2!$ 8

c) $0! + 4!$ 25

d) $5! - 4!$ 96

e) $\dfrac{10!}{3!\,7!}$ 120

f) $\dfrac{15!\,13!}{14!\,12!}$ 195

g) $\dfrac{12!\,3!}{15!}$ $\dfrac{1}{455}$

h) $\dfrac{(3! - 0!)!}{3!\,2!}$ 10

19 Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$ n

b) $\dfrac{(n+4)!}{(n+2)! + (n+3)!}$ $n + 3$

20 Resolva as equações.

a) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!} = 12$ $n = 3$

b) $n! = 1$ $n = 1$ ou $n = 0$

c) $\dfrac{(n+10)!}{(n+8)!} = 30$ $n = -4$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Repetições no VisualG

Uma estrutura útil e muitas vezes necessária em programação é o comando de repetição, que indica para o sistema a quantidade de vezes que o programa deve ou não executar certa sequência de instruções, enquanto a condição atribuída for verdadeira. No VisualG, podemos utilizar diversas instruções para indicar um comando de repetição. Nessa seção estudaremos a instrução **enquanto...faca**.

```
enquanto (condição) faca
sequência de instruções
fimenquanto
```

Essa instrução executa a sequência de instruções enquanto a condição for verdadeira.

Para as condições, são utilizados os seguintes operadores relacionais para testar a relação entre dois ou mais termos.

Comando	=	>	>=	<	<=	<>
Significado	igual	maior do que	maior ou igual	menor do que	menor ou igual	diferente

Além disso, é possível utilizar dois ou mais operadores relacionais em uma mesma condição, por meio de operadores lógicos como **e**, **ou** e **nao**.

Exemplo de um programa em VisualG – Fatorial de um número natural

Utilizando os conceitos de programação estudados, vamos resolver o problema a seguir.

Escrever um programa que determine o fatorial de um dado número natural.

Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo que o resolva. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1. Leia o número natural *n*.
2. Multiplique *n* por seus antecessores naturais até o 1.

Fim

No programa em VisualG, a variável "i" é utilizada para "controlar" a quantidade de vezes que queremos que a repetição aconteça. A repetição é inicializada em 1 e deve ser indicada antes da instrução **enquanto**. Note ainda que, na instrução **enquanto**, a cada "rodada", o programa adiciona 1 unidade até que, de um 1 em 1, atinja o valor atribuído à variável "numero".

Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "fatorial"
2  Var
3  i, numero: inteiro
4  fat: real
5  Inicio
6  escreva("Digite um número natural: ")
7  leia(numero)
8  i <- 1
9  fat <- 1
10 enquanto (i <= numero) faca
11 fat <- fat*i
12 i <- i+1
13 fimenquanto
14 escreva("O fatorial de", numero," é: ",fat)
15 Fimalgoritmo
```

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Em sua opinião, o que deve acontecer se o número digitado pelo usuário for 1?

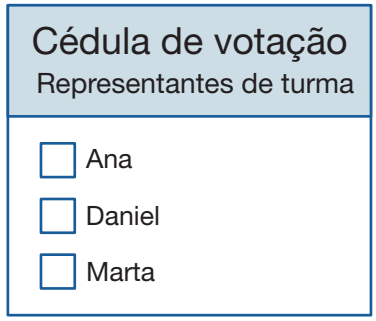
2 Escreva um programa em VisualG que determina a soma $n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1$, dado o número *n*.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Arranjo simples

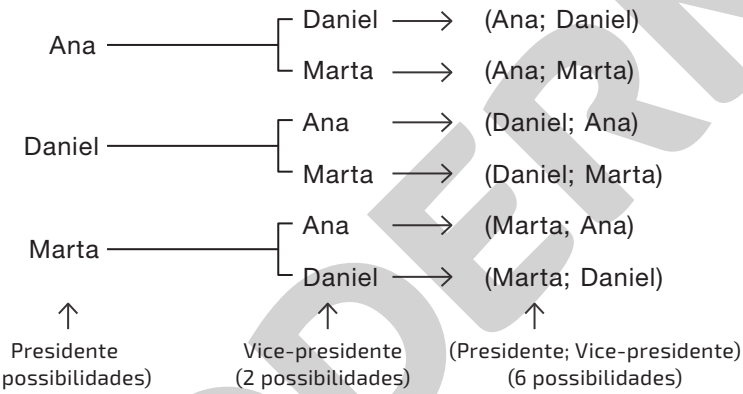
Para a escolha do presidente e do vice-presidente de uma turma do Ensino Médio, candidataram-se três alunos, conforme a cédula de votação abaixo.



RONALDO INÁCIO

Os dois candidatos mais votados serão eleitos, respectivamente, presidente e vice-presidente. Quantas são as possibilidades de resultado dessa eleição?

Obtemos todas as possibilidades de resultado construindo um diagrama de árvore.



Também podemos calcular a quantidade de resultados dessa eleição por meio do princípio fundamental da contagem: $3 \cdot 2 = 6$.

De acordo com o diagrama, são seis as possibilidades de resultado dessa eleição.

Note que, nessa situação, a ordem das colocações interfere no total de possibilidades. Por exemplo, (Ana; Daniel) é diferente de (Daniel; Ana), pois em um dos casos Daniel é presidente e Ana é vice-presidente, e no outro os cargos são invertidos.

Esse tipo de agrupamento é denominado **arranjo simples**. Nesse caso, temos um arranjo de 3 elementos tomados 2 a 2 (três candidatos para dois cargos distintos), e o total de arranjos é indicado por $A_{3,2} = 3 \cdot 2 = 6$.

Um arranjo é chamado simples quando não ocorre repetição de elementos em um agrupamento. Em arranjos simples, os agrupamentos podem diferir entre si tanto pela natureza como pela ordem dos elementos.

Vamos obter agora uma fórmula para calcular o total de agrupamentos no caso de n elementos tomados p a p, com $n \geqslant p$, ou seja, uma fórmula para determinar $A_{n,p}$. Calculando a quantidade de agrupamentos, temos:

- 1ª posição: n possibilidades
- 2ª posição: $(n - 1)$ possibilidades
- 3ª posição: $(n - 2)$ possibilidades
- 4ª posição: $(n - 3)$ possibilidades

...

- p-ésima posição: $[n - (p - 1)]$ possibilidades

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

De acordo com o princípio fundamental da contagem:

$$A_{n,1} = n$$
$$A_{n,2} = n \cdot (n-1)$$
$$A_{n,3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$$
$$A_{n,4} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$$
$$\ldots$$
$$A_{n,p} = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot \left[n-(p-1)\right]}_{p \text{ fatores}}$$

Para escrever $A_{n,p}$ por meio de fatoriais, multiplicamos por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$.

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot \left[n-(p-1)\right] \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot \left[n-(p-1)\right]}^{n!} \cdot (n-p)!}{(n-p)!} \Rightarrow A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Note que: multiplicar por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$ não altera o resultado da expressão, pois: $\frac{(n-p)!}{(n-p)!} = 1$.

Arranjo simples de n elementos distintos tomados p a p, com n e p números naturais e $n \geqslant p$, é todo agrupamento ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

A quantidade total de agrupamentos é indicada por $A_{n,p}$ ou A_n^p, e calculada por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Verifique que:
- $A_{n,0} = 1$
- $A_{0,0} = 1$

Exemplos

- $A_{9,2} = 9 \cdot 8 = 72$ ou $A_{9,2} = \frac{9!}{(9-2)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 9 \cdot 8 = 72$
- $A_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$ ou

$$A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240$$

Exercícios e problemas resolvidos

R4 Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

Resolução

Os números 123 e 213, por exemplo, possuem os mesmos algarismos, porém são diferentes, ou seja, a ordem tem de ser considerada. Nesse caso, cada número corresponde a um arranjo dos 6 algarismos, tomados 3 a 3.

$$A_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 120$$

Também podemos resolver esse problema por meio do princípio fundamental da contagem.

quantidade de possibilidades

6	5	4
C	D	U

$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Portanto, podemos formar 120 números.

As situações que envolvem arranjo simples também podem ser resolvidas utilizando o princípio fundamental da contagem.

Nesses casos, resolva da maneira que preferir.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R5 Uma senha de computador é formada por duas letras maiúsculas distintas (de 26 disponíveis), seguidas de quatro algarismos distintos (de 10 disponíveis). Quantas senhas diferentes é possível formar?

Resolução

As senhas AB1234 e BA1423, por exemplo, possuem as mesmas letras e algarismos, porém são diferentes, ou seja, a ordem tem de ser considerada. Nesse caso, cada senha corresponde ao produto entre o arranjo de 26 letras, tomadas 2 a 2, e o arranjo de 10 algarismos, tomados 4 a 4.

$$A_{26,2} \cdot A_{10,4} = \frac{26!}{(26-2)!} \cdot \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{26 \cdot 25 \cdot \cancel{24!}}{\cancel{24!}} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!}} =$$

$$= 650 \cdot 5\,040 = 3\,276\,000$$

Portanto, é possível formar 3 276 000 senhas diferentes.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

21 Calcule.

a) $A_{6,2}$ 30
b) $A_{9,3}$ 504
c) $A_{7,4}$ 840
d) $A_{8,6}$ 20 160
e) $A_{5,4} - A_{9,2}$ 48
f) $A_{20,3} + A_{40,1}$ 6 880

22 Simplifique as expressões.

a) $\frac{A_{n-1,2}}{A_{n-3,1}}$ $\frac{1}{2n^2 + 2n}$
b) $\frac{A_{n+1,n}}{A_{n,n-1}}$ $n + 1$
c) $\frac{A_{n-1,n-3}}{A_{n+1,n}}$

23 Uma empresa possui uma linha com 12 produtos diferentes. O departamento de *marketing* dessa empresa, em uma campanha publicitária, realizará três tipos de anúncio para divulgação dos produtos: *outdoor*, revista e televisão. Sabendo que em cada tipo de anúncio apenas um dos produtos será divulgado, de quantas maneiras distintas essa empresa pode compor a campanha publicitária? 1 320 maneiras

24 Para colorir um mapa-múndi, cada um dos seis continentes será pintado com uma cor diferente. De quantas maneiras distintas esse mapa pode ser pintado, dispondo-se para isso de 12 cores distintas? 665 280 maneiras

Os continentes

Fonte de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018.

25 Para acessar sua conta bancária via internet, uma pessoa tem de cadastrar uma senha composta por 5 caracteres distintos, dentre 32 disponíveis. De quantas maneiras diferentes essa pessoa pode cadastrar a senha? 24 165 120 maneiras

26 Uma biblioteca utiliza um sistema de cadastramento de livros em que os códigos são compostos por duas partes: uma parte alfabética com 2 letras (de 26 disponíveis), e uma numérica com 5 algarismos (de 10 disponíveis). Sabendo que não há repetição de caracteres nos códigos nem livros com códigos repetidos, quantos livros essa biblioteca pode cadastrar? 19 656 000 livros

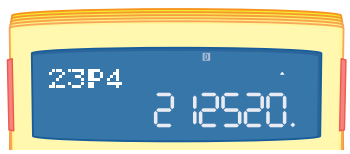
27 Observe como podemos calcular o arranjo utilizando uma calculadora científica.

Calculadora

Para calcular $A_{23,4}$, por exemplo, procedemos da seguinte maneira.

Registramos o número 23 e, em seguida, digitamos as teclas SHIFT (para acessar a 2ª função) e * nPr nCr. Por fim, inserimos o número 4 e digitamos a tecla =, obtendo o resultado.

2 → 3 → SHIFT → nPr nCr → 4 → =



SERGIO L. FILHO

*Explique aos alunos que nPr corresponde ao arranjo de n elementos tomados r a r.

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira semelhante à apresentada, calcule:

a) $A_{20,6}$ 27 907 200
b) $A_{13,11}$ 3 113 510 400
c) $A_{40,5} + A_{0,0}$ 78 960 961
d) $A_{12,8} - A_{0,0}$ 19 958 399
e) $A_{11,8} \cdot A_{0,0}$ 6 652 800
f) $\frac{A_{22,5}}{A_{0,0}}$ 3 160 080

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

28 A partir dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 8, calcule a quantidade de números que podem ser formados:

a) com 4 algarismos. 625 números

b) com 4 algarismos distintos. 120 números

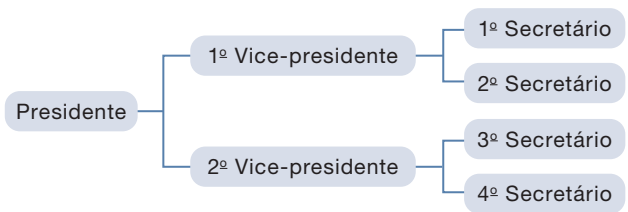
c) múltiplos de 4 com 4 algarismos distintos. 36 números

> Para resolver o item **c** dessa tarefa, lembre-se de que um número inteiro é múltiplo de 4 quando o número formado pelos seus dois últimos algarismos for divisível por 4.

d) ímpares de 4 algarismos distintos. 48 números

29 Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 5, 7 e 9, quantos números de cinco algarismos distintos menores do que 70 000 podem ser formados? 1 440 números

30 O Senado Federal do Brasil é composto por 81 senadores, que representam todas as 27 unidades da federação. A mesa diretora do Senado é eleita internamente e tem a seguinte composição (com exceção dos suplentes):



Fonte de pesquisa: <https://www12.senado.leg.br/institucional/perguntas-frequentes?tagpesquisa5Senado%20Federal>. Acesso em: 22 jul. 2020.

a) Sabendo que cada unidade da federação é representada igualmente no Senado Federal, quantos senadores representam cada uma delas? 3 senadores

b) Escreva uma expressão para representar de quantas maneiras distintas pode ser composta a mesa diretora do Senado Federal em uma eleição interna. $\frac{81!}{74!}$

c) Junte-se a um colega e pesquisem quais são as atribuições do senador e quais são aqueles que representam a unidade da federação onde moram. Depois, apresentem os resultados da pesquisa à turma. Resposta pessoal.

31 Resolva a equação $A_{3n+3,\,n+2} = 15 \cdot A_{3n+2,\,n+1}$. $n = 4$

32 Um concurso promovido por uma emissora de televisão vai formar uma nova banda de *rock*. Classificaram-se para a etapa final três bateristas, quatro baixistas, cinco guitarristas e dois vocalistas. A banda vencedora do concurso será formada por um baterista, um baixista, dois guitarristas e um vocalista.

De quantas maneiras pode-se formar a banda, a partir dos candidatos finalistas, sabendo que os guitarristas possuem funções diferentes nessa banda? 480 maneiras

33 Em certa categoria de corrida automobilística, participam 10 equipes com 2 pilotos cada e, ao final de cada prova, os 6 melhores classificados recebem as respectivas pontuações: 10, 8, 6, 4, 2 e 1.

a) De quantas maneiras distintas pode ser distribuída a pontuação aos pilotos em uma dessas provas? 27 907 200 maneiras

b) Sabendo que em certa prova os pilotos da equipe A pontuaram, de quantas maneiras distintas pode ter ocorrido a pontuação dessa prova? 2 203 200 maneiras

34 Na temporada 2014/2015 da Liga do Novo Basquete Brasil (NBB), cuja equipe campeã foi a do Flamengo, os jogos da fase classificatória foram disputados em turno e returno, de maneira que cada equipe realizasse dois jogos contra cada uma das outras equipes, uma em "casa" e outra na "casa" do adversário. Sabendo que ao todo foram realizados 240 jogos, resolva os itens.

JOÃO MOURA/FOTOARENA

Equipe masculina do Flamengo, campeã do NBB em 2015.

a) Quantas equipes disputaram esse campeonato de basquete? 16 equipes

b) Cada equipe disputou quantas partidas na fase classificatória? 30 partidas

35 Para desativar certo artefato explosivo, um policial treinado deve digitar uma senha composta de 4 algarismos distintos, dentre os 10 disponíveis. Considerando que, ao digitar incorretamente uma possível senha, o artefato não exploda e que, em média, cada tentativa de acertar a senha dure cerca de 5 s, responda aos itens.

a) Se não forem digitadas senhas repetidas, em quantos minutos, no máximo, o policial desativará o artefato explosivo? 420 min

b) Caso o policial saiba que os algarismos 0 e 7 fazem parte da senha correta, na pior das hipóteses ele conseguirá desativar o artefato explosivo em 30 min? Justifique sua resposta. Não, pois, nessas condições, a quantidade máxima de senhas a serem digitadas é 672, o que equivale a 56 min.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MOURA

3 Permutações

Superpermutações

É provável que você deve ter uma ou mais séries ou seriados favoritos. Mas, afinal, você sabe a diferença entre série e seriado? A principal característica de uma série é a relação que ela tem com o próximo episódio a ser exibido, ou seja, a continuidade diferencia uma série de um seriado. Podemos classificar este último como uma história que se conclui em cada episódio.

Contudo, existe pelo menos uma série de animação japonesa cujos episódios em diferentes ordenamentos poderiam ser igualmente interessantes. Como a série envolve viagens no tempo, a ordem cronológica de apresentação dos episódios não é evidente. A primeira temporada foi ao ar originalmente em ordem não cronológica, e uma versão em DVD alterou novamente a ordem dos 14 episódios. Enquanto os fãs discutiam sobre qual seria a melhor ordem, alguém perguntou: quantos episódios no mínimo é preciso assistir para que tenhamos assistido à série em todas as sequências possíveis? Em menos de uma hora um autor anônimo respondeu que era preciso assistir a 93 884 313 611 episódios seguidos, no mínimo. Por vários anos, a questão despertou interesse na comunidade matemática, exigindo muito esforço na tentativa de verificar esse cálculo.

Para simplificar, vamos considerar apenas dois episódios: X e Y. Há duas maneiras de assisti-los: (X, Y) e (Y, X). Se juntarmos as duas maneiras e assistirmos na sequência (X, Y, Y, X) resolveremos o problema. Mas teremos uma redundância: não é preciso assistir ao episódio Y duas vezes seguidas: basta que adotemos a sequência (X, Y, X) para assistir à série em todas as sequências possíveis.

Ordens possíveis para assistir aos episódios

episódio X → episódio Y

episódio Y → episódio X

Compondo uma sequência única:

episódio X → episódio Y → episódio Y → episódio X

Não há necessidade de assistir ao mesmo episódio duas vezes seguidas.

Compondo uma sequência única e simplificada:

episódio X → episódio Y → episódio X

Portanto, para uma série de dois episódios a quantidade mínima de episódios que resolve o problema é 3.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estruturas sequenciais, como essa, que envolvem, em um único bloco, todas as ordens possíveis de um conjunto de elementos, são chamadas **Superpermutação**. Para os cinco primeiros casos, um padrão envolvendo fatorial parece emergir, mas não é válido, e pouco se sabe para valores maiores do que 6.

- Se a série tem apenas um episódio, a solução é $1! = 1$.
- Se a série tem dois episódios, a solução é $2! + 1! = 3$.
- Se a série tem três episódios, a solução é $3! + 2! + 1! = 9$.
- Se a série tem quatro episódios, a solução é $4! + 3! + 2! + 1! = 33$.
- Se a série tem cinco episódios, a solução é $5! + 4! + 3! + 2! + 1! = 153$.

FOTOMONTAGEM DE MARIANA COAN. FOTOS: 1.VITALS/SHUTTERSTOCK; 2.ERMOLAEV ALEXANDER/SHUTTERSTOCK; 3.LUCIOLY/SHUTTERSTOCK; 4.JAVIER BROSCH/SHUTTERSTOCK; 5.ANTOHA713/SHUTTERSTOCK; 6.LJUPCO SMOKOVSKI/SHUTTERSTOCK; 7.PIX11/SHUTTERSTOCK; 8.NEEILA/SHUTTERSTOCK; 9.PROXIMA STUDIO/SHUTTERSTOCK

As superpermutações podem ser aplicadas em outros contextos, como o caso em que seja necessário construir uma sequência para testar todas as senhas possíveis obtidas a partir dos dígitos X, Y, Z e W, sem repetição. As possibilidades a seguir foram determinadas por meio de um diagrama de árvore analisando as possibilidades com esses dígitos.

XYZW		XYWZ		XZYW		XZWY		XWYZ		XWZY													
	YXZW		YXWZ		YZXW		YZWX		YWXZ		YWZX												
ZXYW		ZXWY		ZYXW		ZYWX		ZWXY		ZWYX													
	WXYZ		WXZY		WYXZ		WYZX		WZXY		WZYX												

Ao digitarmos a superpermutação mínima (X, Y, Z, W, X, Y, Z, X, W, Y, Z, X, Y, W, Z, X, Y, X, Z, W, Y, X, Z, Y, W, X, Z, Y, X, W, Z, Y, X) estamos testando todas as 24 senhas simultaneamente. Nesse caso, usando apenas 33 dígitos, podemos reduzir o tempo gasto para descobrir a senha, aumentando a eficiência do procedimento.

Fontes de pesquisa: <http://cienciahoje.org.br/artigo/super-permutacoes/>. Acesso em: 8 jun. 2020. <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160220101>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Há quantas maneiras de assistir aos três episódios X, Y e Z de uma série? Escreva essas possibilidades. 6 possibilidades: (X, Y, Z), (X, Z, Y), (Y, X, Z), (Y, Z, X), (Z, X, Y) e (Z, Y, X).

B Segundo o cálculo apresentado, é preciso assistir no mínimo a 9 episódios para que tenhamos assistido a uma série com três episódios em todas as sequências possíveis. Com base nessa informação e na resposta da questão anterior, verifique se a sequência única (X, Y, Z, X, Y, X, Z, Y, X) é a superpermutação mínima desse problema. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos verifiquem que essa sequência contém todas as 6 possibilidades da questão anterior, considerando três elementos seguidos, na mesma ordem.

Embora o estudo de superpermutações envolva conceitos mais avançados, os quais não fazem parte dos objetivos deste volume, nas próximas páginas vamos estudar **permutações** que não são "super", como as permutações simples e com repetição. É importante conhecer e distinguir diferentes técnicas de contagem para saber aplicá-las, seja com organização e lógica, seja com o uso de fórmulas, nas mais variadas áreas do conhecimento.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERA

Permutação simples

Nos casos de arranjos simples, em que $n = p$, temos uma permutação simples, ou seja, um arranjo de n elementos, tomados n a n. Indicamos a quantidade total de permutações simples de n elementos por P_n e obtemos esse valor da seguinte maneira:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Permutação simples é todo arranjo de n elementos distintos tomados n a n. A quantidade total de permutações simples é indicada por P_n e calculada por:

$$P_n = n!$$

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Considerando os anagramas da palavra **BRASIL**, determine:

a) a quantidade total de anagramas.

b) quantos começam com **B**.

c) quantos terminam com **L**.

d) quantos começam com **B** e terminam com **L**.

e) um diagrama de Venn representando os itens **a**, **b**, **c** e **d**.

f) quantos começam com **B** ou terminam com **L**.

Anagrama: palavra formada pela troca da ordem das letras de outra palavra. A palavra RSIBAL é um anagrama da palavra BRASIL.

Resolução

a) Cada anagrama é uma permutação das 6 letras. Assim, a quantidade total de anagramas é:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Portanto, há, ao todo, 720 anagramas.

b) Fixando a primeira letra, devemos permutar as outras 5 letras.

$$\underline{\text{B}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{5 letras}}$$

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Portanto, 120 anagramas começam com **B**.

c) Fixando a última letra, devemos permutar as outras 5 letras.

$$\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{\text{5 letras}}\ \underline{\text{L}}$$

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Portanto, 120 anagramas terminam com **L**.

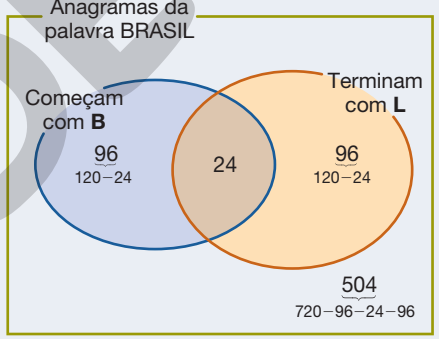
d) Fixando a primeira e a última letras, devemos permutar as outras 4 letras.

$$\underline{\text{B}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{\text{4 letras}}\ \underline{\text{L}}$$

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Portanto, 24 anagramas começam com **B** e terminam com **L**.

e)



RONALDO INACIO

f) Conforme o diagrama do item **e**, o total de anagramas que começam com **B** ou terminam com **L** é:

$$96 + 24 + 96 = 216$$

Portanto, 216 anagramas começam com **B** ou terminam com **L**.

Se nomearmos por X o conjunto dos anagramas começados com **B** e por Y o conjunto dos anagramas terminados com **L**:

- $n(X \cup Y)$ é a quantidade de anagramas começados com **B** ou terminados com **L**.
- $n(X \cap Y)$ é a quantidade de anagramas começados com **B** e terminados com **L**.

Logo:

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) =$$
$$= 120 + 120 - 24 = 216$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R2 (Enem, 2011) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.

Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é:

a) 24 b) 31 c) 32 d) 88 e) 89

Resolução

Como os números gerados têm cinco algarismos, todos ímpares e distintos, esses números correspondem às permutações de 75 913, entre as quais, aquelas que representam números menores do que 75 913 são as que têm as possíveis composições:

$$\underbrace{1****}_{P_4} \quad \underbrace{3****}_{P_4} \quad \underbrace{5****}_{P_4} \quad \underbrace{71***}_{P_3} \quad \underbrace{73***}_{P_3} \quad \underbrace{751**}_{P_2} \quad \underbrace{753**}_{P_2}$$

Segue que: $3 \cdot P_4 + 2 \cdot P_3 + 2 \cdot P_2 = 3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! = 88$

Portanto, 88 números eram menores do que 75 913.

Logo, esse número ocupa a posição 89 entre aqueles gerados pelo computador e a alternativa correta é a **e**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Calcule.

a) P_7 5 040

b) $\frac{A_{8,5}}{P_3}$ 1 120

c) $P_7 - P_5$ 4 920

d) $\frac{P_{12}}{P_{10}}$ 132

e) $P_3^{4\,320} \cdot P_6$

f) $\frac{P_7}{A_{7,3}}$ 24

2 Quantos anagramas tem a palavra:

a) AMOR? 24 anagramas b) LUCRO? 120 anagramas c) TRIÂNGULO? 362 880 anagramas

3 Certo restaurante é aberto de segunda-feira a sábado e, para cada dia da semana, tem um cardápio diferente. O dono do restaurante deseja alterar o cardápio da semana apenas permutando os cardápios já existentes. De quantas maneiras ele pode fazer isso? 719 maneiras

4 Considere todas as palavras de 5 letras, com ou sem significado, que podem ser escritas com A, B, R, O e D, sem que haja repetição de letra.

a) Quantas são essas palavras? 120 palavras

b) Determine quantas dessas palavras começam com a letra R. 24 palavras

c) Quantas dessas palavras terminam em vogal? 48 palavras

5 Considerando todas as permutações dos algarismos do número 714 853, responda às questões.

a) Qual é o maior número obtido? E o menor? 875 431; 134 578

b) Quantos desses números são maiores do que 478 135? E menores do que 458 713? 389 números; 310 números

6 Em um município, a fiscalização sanitária inspeciona mensalmente uma única vez cada um dos quatro frigoríficos locais. A fim de surpreender os frigoríficos, mensalmente os fiscais sanitários alteram a ordem em que as inspeções são realizadas. Durante quantos meses os fiscais podem realizar esse procedimento sem que haja repetição na ordem dos frigoríficos inspecionados? 24 meses

7 Ao ordenar alfabeticamente em uma lista todos os anagramas da palavra PERMUTA, qual é a posição dessa palavra na lista? 2 340ª

No contexto

8 Você estudou nas páginas 38 e 39 as superpermutações, ou seja, grandes sequências que garantem que a ordem desejada ocorra. Em um jogo, temos caixas vermelhas, amarelas e pretas. As letras G, O e L são escritas em fichas, colocadas cada uma em uma das caixas coloridas, sendo que as caixas de mesma cor têm sempre a mesma letra. Em uma partida, um jogador tem que formar a palavra GOL organizando uma sequência de caixas sem saber qual letra a caixa possui. Qual é a menor sequência de caixas que o jogador deve organizar para garantir que a palavra GOL seja formada? Quantas caixas possui essa sequência?

Uma possível resposta: considerando V, A e P as cores das caixas vermelhas, amarelas e pretas, respectivamente, a sequência será (V, A, P, V, A, V, P, A, V); 9 caixas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Permutação com repetição

Estudamos que o total de permutações simples de n elementos distintos é dado por $P_n = n!$. Com esse resultado podemos calcular, por exemplo, a quantidade de anagramas de palavras que não possuem letras repetidas. No caso da palavra HOSPITAL, temos 40 320 anagramas, pois $P_8 = 8! = 40\,320$.

Como podemos calcular a quantidade de permutações de n elementos quando alguns deles se repetem?

Para responder a essa pergunta, vamos calcular a quantidade de anagramas da palavra PESSOAS. Caso essa palavra não tivesse letras repetidas, teríamos 7! anagramas. Porém, ela possui três letras **S** repetidas, que, ao serem permutadas entre si, dão origem a anagramas iguais. Logo, a palavra PESSOAS possui menos de 7! anagramas.

No esquema, note que ao permutar as letras **S** obtém-se um mesmo anagrama.

Na palavra PESSOAS a letra **S** se repete três vezes. Isso faz com que em nossa contagem de 7! tenhamos contado o mesmo anagrama 3! vezes, pois há 3! modos de trocar as letras S entre si. Assim, o total de anagramas dessa palavra é:

$$\frac{7!}{3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 840$$

Portanto, a palavra PESSOAS possui 840 anagramas.

A quantidade de permutações de n elementos com repetições, dos quais n_1, n_2, ⋯, n_k são as quantidades dos diferentes elementos, e $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, é:

$$P_n^{(n_1, n_2, \cdots, n_k)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

Exemplo 1

Quantos anagramas possui a palavra TATU?

Note que nessa palavra a letra **T** se repete duas vezes.

$$P_4^{(2,1,1)} = \frac{4!}{2!1!1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 1 \cdot 1} = 12$$

Portanto, a palavra TATU possui 12 anagramas.

Temos:

$$P_4^{(2,1,1)} = P_4^{(2)} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Exemplo 2

Quantos anagramas possui a palavra CARROSSÉIS?

Note que nessa palavra a letra **R** se repete duas vezes e a letra **S**, três vezes.

$$P_{10}^{(2,3,1,1,1,1,1)} = P_{10}^{(2,3)} = \frac{10!}{2!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 302\,400$$

Portanto, a palavra CARROSSÉIS possui 302 400 anagramas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R3 Considerando os anagramas da palavra MATEMÁTICA, determine:

a) a quantidade total de anagramas.

b) quantos começam com **A**.

Resolução

a) A palavra MATEMÁTICA tem 10 letras, sendo 3 letras **A**, 2 letras **M**, 2 letras **T**, 1 letra **E**, 1 letra **I** e 1 letra **C**.

$$P_{10}^{(3,2,2)} = \frac{10!}{3!2!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{604\,800}{4} = 151\,200$$

Portanto, a quantidade total é de 151 200 anagramas.

b) Fixando a primeira letra, sobram 9 letras para permutar, sendo 2 letras **A**, 2 letras **M**, 2 letras **T**, 1 letra **E**, 1 letra **I** e 1 letra **C**.

$$P_{9}^{(2,2,2)} = \frac{9!}{2!2!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{181\,440}{4} = 45\,360$$

Portanto, 45 360 anagramas começam com **A**.

R4 No conjunto dos números naturais, quantas soluções tem a equação $a + b + c = 7$?

Resolução

Sendo a, b e c números naturais, podemos considerar que as soluções da equação correspondem às maneiras pelas quais podemos separar 7 elementos em 3 partes inteiras. Assim, representando por "bolinhas" esses elementos e separando-os por "barras", temos, por exemplo, que ··|···|·· corresponde à solução $(2, 3, 2)$ e que ||·····, à solução $(0, 0, 7)$.

Dessa maneira, a quantidade de soluções naturais da equação é dada pela quantidade de permutação das 7 "bolinhas" e das 2 "barrinhas", com 7 e 2 repetições.

$$P_{9}^{(7,2)} = \frac{9!}{7!2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{72}{2} = 36$$

Portanto, a equação tem 36 soluções.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

A tarefa **10** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação de seu repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

9 Determine quantos anagramas tem cada palavra.

a) MONITOR 2 520 anagramas

b) AMERICANA 60 480 anagramas

c) LIBERTADOR 1 814 400 anagramas

d) CALCULADORA 1 663 200 anagramas

10 Elabore um problema que, para ser respondido, seja necessário usar a permutação $P_8^{(4,2,2)}$ e o entregue a um colega para que ele o resolva. Em seguida, verifique se a resposta que ele obteve está correta.

11 Sendo x, y, z e w números naturais, quantas soluções possui a equação $x + y + z + w = 6$? 84 soluções

12 Permutando os algarismos do número 125 612, quantos números:

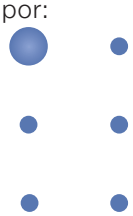
a) são obtidos? 180 números

b) pares são obtidos? 90 números

c) menores do que 400 000 são obtidos? 120 números

13 Ao ordenar alfabeticamente todos os anagramas da palavra CÉLULA, qual deles ocupará a 301ª posição? UACÉLL

14 (Enem, 2005) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais. Por exemplo, a letra **A** é representada por:



RONALDO INÁCIO

A quantidade total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é: alternativa **d**

a) 12 c) 36 e) 720

b) 31 d) 63

10. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 Combinação simples e Binômio de Newton

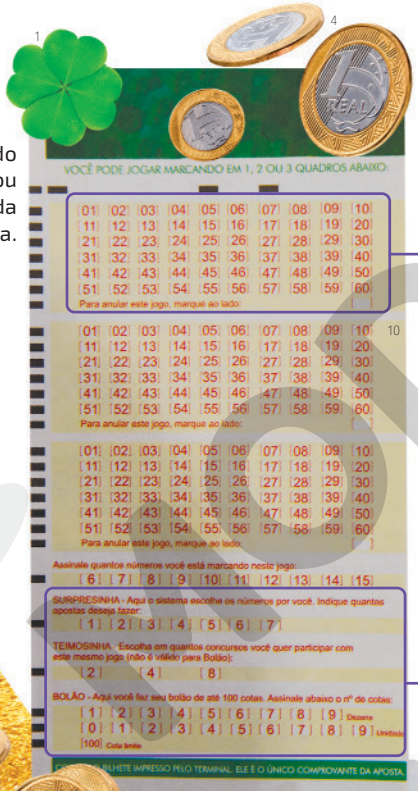
BNCC
- EM13MAT310

É preciso muita sorte!

Você já sonhou em se tornar um milionário? Muitos brasileiros ficam empolgados com essa ideia e arriscam a sorte nas loterias organizadas pela Caixa Econômica Federal. A Mega-Sena, por exemplo, é uma das modalidades de loteria, cujo prêmio varia conforme o sorteio. Para apostar é preciso ter mais de 18 anos e escolher no mínimo 6 e no máximo 15 números, dentre 60 disponíveis. Para ganhar o prêmio máximo (sena), o jogador precisa acertar os 6 números sorteados. Se acertar 5 (quina) ou 4 números (quadra), o apostador também recebe prêmios, porém menores.

Para ganhar na loteria e tornar o sonho de ser milionário uma realidade, é preciso muita sorte. Muita sorte mesmo! Veja algumas informações a respeito da Mega-Sena.

Frente do bilhete ou volante da Mega-Sena.



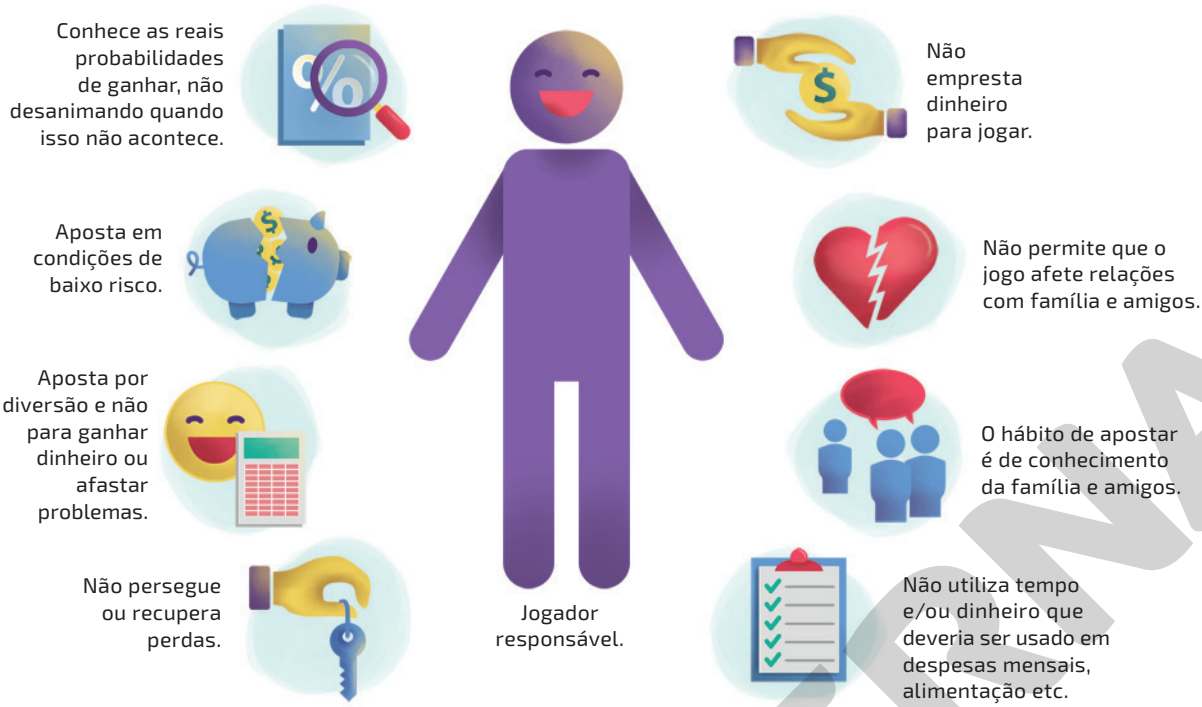
Os bilhetes, também chamados volantes, contém a sequência de números de 1 a 60, dos quais o apostador deve assinalar de 6 a 15. A quantidade de possibilidades de compor uma aposta simples com 6 números é de 50 063 860. Consequentemente, a probabilidade de acertar com uma única aposta mínima é de 1 para 50 063 860, ou, aproximadamente 0,000002%.

Para quem tem dúvidas na hora de apostar, o campo *Surpresinha* permite que os números sejam escolhidos por um computador, de maneira aleatória. O campo *Teimosinha* é para quem deseja repetir a aposta em mais de um concurso sem a necessidade de ir a uma casa lotérica várias vezes. Já no campo *Bolão*, o sistema divide sua aposta com outros jogadores, dividindo também o valor do custo e do prêmio, se houver.

O único documento que comprova o registro da aposta no sistema de loterias e que habilita ao recebimento dos prêmios é o Recibo da aposta, que é entregue ao apostador.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Agora, veja algumas informações importantes a respeito das principais características do jogador responsável.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Fontes de pesquisa: <http://www.caixa.gov.br/loterias/regras-sorteio/Paginas/default.aspx>. Acesso em: 9 jun. 2020. <http://www.caixa.gov.br/jogo-responsavel/Paginas/default.aspx?utm_source=site_caixa&utm_medium=bannercross&utm_campaign=jogo_responsavel>. Acesso em: 9 jun. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Você conhece alguém que já ganhou nas loterias? Se sim, em qual modalidade?
Resposta pessoal.

B Na Mega-Sena, realizando uma aposta com 15 números, a probabilidade de ganhar o prêmio máximo é maior ou menor, quando comparada à aposta mínima?
maior

Ser consciente

A Você conhece alguém que aposta nas loterias federais? Se sim, essa pessoa aparentemente possui as características de um jogador responsável?

B Junte-se a um colega e realizem uma pesquisa a respeito da destinação social dos recursos. Essas e outras informações podem ser encontradas no verso do bilhete. Resposta pessoal.

C Em sua opinião, qual a importância de usar parte da arrecadação para angariar fundos para causas sociais e contribuir com os programas sociais do Governo Federal? Converse com o professor e os colegas a respeito.
Resposta pessoal.

Note que a ordem dos números escolhidos ou sorteados não interfere nos resultados, ou seja, não é relevante. De modo geral, quando os agrupamentos se diferenciam pela natureza e não pela ordem de seleção, cada possibilidade recebe o nome de **combinação simples**, assunto das próximas páginas.

De fato, a probabilidade de ganhar um prêmio na Mega-Sena ou nas demais loterias administradas pelo Governo Federal depende exclusivamente da quantidade de possibilidades de compor uma aposta, e essa quantidade (50 063 860 possibilidades) pode ser verificada por meio de uma fórmula para o cálculo de combinações simples. No caso da Mega-Sena, como ela permite apostas com 6 a 15 números, os preços das apostas também são calculados com base nessa combinação simples, de modo que, com mais números, os preços são significativamente maiores.

A) Resposta pessoal. Se julgar conveniente, explique aos alunos que, em um dos endereços eletrônicos indicados como fonte de pesquisa, há um teste de autoavaliação para o apostador verificar se possui características do Transtorno do jogo compulsivo.

FOTOMONTAGEM DE JULIANA DEL ANHOL AZEVEDO. FOTOS: 1.JAROSLAVA V/SHUTTERSTOCK; 2.PTERWORT/SHUTTERSTOCK; 3.PHATTHANIT/SHUTTERSTOCK; 4.RHJ PHTOTO AND ILUSTRATION/SHUTTERSTOCK – BANCO CENTRAL DO BRASIL; 5.NEDNAPA/SHUTTERSTOCK; 6.RHJ PHTOTO AND ILUSTRATION/SHUTTERSTOCK – BANCO CENTRAL DO BRASIL; 7.VINICIUS TUPINAMBA/SHUTTERSTOCK – BANCO CENTRAL DO BRASIL; 8.ALEX LMX/SHUTTERSTOCK; 9.ALEX ROZ/SHUTTERSTOCK; 10.RODRIGO GAVINI/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

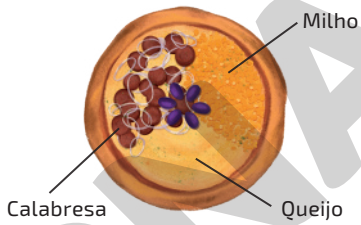
Combinação simples

Um *pizzaiolo* tem à sua disposição ingredientes para fazer *pizzas* nos seguintes sabores.

ILUSTRAÇÕES: LEO GIBRAN

Atum (A) | Queijo (Q) | Calabresa (C) | Milho (M) | Portuguesa (P)

Quantas são as possibilidades de *pizzas* que podem ser feitas com três sabores diferentes?



Nesse caso, observe que escolher os sabores queijo, calabresa e milho $\{Q, C, M\}$ é o mesmo que escolher calabresa, queijo e milho $\{C, Q, M\}$, ou seja, a ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades.

Assim, podemos obter as possibilidades de *pizzas* que podem ser montadas construindo os **subconjuntos** ou **agrupamentos não ordenados** de três elementos do conjunto de sabores disponíveis, ou seja, $\{A, Q, C, M, P\}$. Construindo os agrupamentos, temos:

$$\{A, Q, C\} \quad \{A, Q, M\} \quad \{A, Q, P\} \quad \{A, C, M\} \quad \{A, C, P\}$$
$$\{A, M, P\} \quad \{Q, C, M\} \quad \{Q, C, P\} \quad \{Q, M, P\} \quad \{C, M, P\}$$

Note que esses agrupamentos se diferenciam pela natureza de seus elementos, e não pela ordem em que são combinados. Cada uma dessas possibilidades corresponde ao que chamamos uma **combinação** de 5 sabores tomados 3 a 3, que indicamos por $C_{5,3}$. Como são 10 combinações ao todo, temos $C_{5,3} = 10$.

Permutando de todas as maneiras possíveis os 3 elementos de cada uma dessas combinações, obtemos 6 arranjos, ou seja, 3! arranjos. No caso da combinação $\{A, Q, C\}$, temos os seguintes arranjos: (A, Q, C), (A, C, Q), (Q, A, C), (Q, C, A), (C, A, Q) e (C, Q, A).

Podemos afirmar, então, que multiplicando por 3! o total de combinações de 5 elementos, tomados 3 a 3, obtemos a quantidade de arranjos de 5 elementos, tomados 3 a 3, ou seja:

$$C_{5,3} \cdot 3! = A_{5,3}$$

Para $n \geqslant p$, a fórmula para o cálculo de combinações é dada por:

$$C_{n,p} \cdot p! = A_{n,p} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Combinação simples de n elementos distintos, tomados p a p, com $n, p \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant p$, é todo subconjunto ou agrupamento não ordenado formado por p elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados.

A quantidade total de combinações é indicada por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$, e calculada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ ou } C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R1 Utilizando combinação simples, mostre que a fórmula para calcular a quantidade de diagonais D de um polígono convexo de n lados é $D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

Resolução

As combinações dos n vértices desse polígono, tomados 2 a 2, representam todos os lados e diagonais do polígono. Como queremos apenas as diagonais, subtraímos do total dessas combinações a quantidade de segmentos que formam os lados do polígono, ou seja:

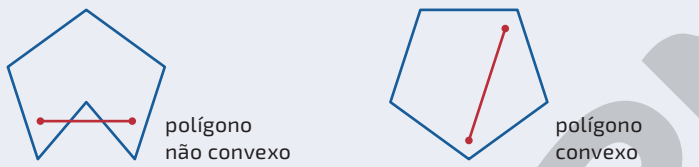
$$D = C_{n,2} - n = \frac{n!}{2!(n-2)!} - n = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{(n-2)!}} - n =$$

$$= \frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n^2 - 3n}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Portanto, a quantidade de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado por $D = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

Lembre-se de que um polígono é convexo quando todo segmento de reta que liga dois pontos quaisquer dele está inteiramente contido nele.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO



R2 Uma sala de aula tem 18 meninas e 14 meninos. De quantas maneiras o professor pode formar grupos de 5 alunos, sendo 3 meninas e 2 meninos?

Resolução

Os grupos diferenciam-se pelos alunos, e não pela ordem em que são agrupados, logo cada grupo é uma combinação de 5 alunos, em que a escolha das meninas é dada por $C_{18,3}$, e a dos meninos, por $C_{14,2}$. Então, o total de grupos é dado por:

$$C_{18,3} \cdot C_{14,2} = \frac{18!}{3!(18-3)!} \cdot \frac{14!}{2!(14-2)!} = \frac{18!}{3!\,15!} \cdot \frac{14!}{2!\,12!} =$$

$$= \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot \cancel{15!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{15!}} \cdot \frac{14 \cdot 13 \cdot \cancel{12!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{12!}} = \frac{891\,072}{12} = 74\,256$$

Portanto, o professor pode formar os grupos de 74 256 maneiras.

R3 Mostre que $C_{n,p} = C_{n,n-p}$.

Resolução

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n!}{(n-p)!\underbrace{\left[n-(n-p)\right]!}_{p}} = C_{n,n-p}$$

Essa propriedade é conhecida por igualdade das combinações complementares e pode ser utilizada para simplificar alguns cálculos de combinações.

R4 Em uma confraternização de Ano-Novo, logo após a meia-noite, cada pessoa abraçou todas as outras uma única vez. Sabendo que ocorreram 153 abraços no total, determine a quantidade de pessoas presentes.

Resolução

A pessoa **A** abraçar a **B** é o mesmo que a pessoa **B** abraçar a **A**. Assim, sendo n a quantidade de pessoas presentes, temos:

$$C_{n,2} = 153 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 153 \Rightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{(n-2)!}} = 153 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 306 = 0 \begin{cases} n_1 = 18 \\ n_2 = -14 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Portanto, 18 pessoas estavam presentes na confraternização.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

Abel e Bianca fazem parte de uma turma com um total de 20 alunos. Para representá-la em uma reunião, a turma precisa selecionar quatro de seus membros para compor uma comissão especial. Quantas comissões diferentes são possíveis de obter com a participação de pelo menos um dos dois alunos citados?

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

A quantidade total de comissões possíveis de obter com a participação de pelo menos um dos dois alunos: Abel e Bianca.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

Quantidade total de alunos da turma; quantidade de pessoas necessárias para compor a comissão; e a necessidade de que Abel e/ou Bianca faça(m) parte da comissão.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Devemos separar a contagem em casos mais simples antes de adicioná-los. Primeiro, calculamos a quantidade de comissões das quais Abel faça parte e Bianca não. Depois, calculamos a quantidade de comissões das quais Bianca faça parte e Abel não. Em seguida, calculamos as comissões das quais tanto Abel quanto Bianca façam parte. Ao fim, adicionamos os resultados obtidos em cada um dos três casos, obtendo, assim, a quantidade total de comissões das quais pelo menos um dos dois alunos, Abel e Bianca, seja membro.

√ Escolhendo as notações.

- A: quantidade de comissões com a participação de Abel, mas não de Bianca.
- B: quantidade de comissões com a participação de Bianca, mas não de Abel.
- AB: quantidade de comissões com a participação tanto de Abel quanto de Bianca.

C Executando o plano

Em todos os casos das contagens que vamos fazer, trata-se de escolher p elementos dentro de um conjunto maior de n elementos, sendo que a ordem dos elementos não importa. Assim, a contagem se dará por meio de uma combinação simples.

Passo 1

Inicialmente, vamos calcular a quantidade de comissões com a participação de Abel, mas não de Bianca.

A sala tem 20 alunos, mas, como a participação de Abel e a não participação de Bianca já estão predeterminadas, a quantidade de alunos que são possíveis integrantes das demais vagas da comissão se reduz para 18. Das quatro vagas disponíveis, uma com certeza já está ocupada por Abel, restando, portanto, três vagas para os demais alunos. Assim:

$$A = C_{18,3} = \frac{18!}{3! \cdot (18-3)!} = \frac{18!}{3! \cdot 15!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 17 \cdot 16 = 816$$

Passo 2

Analogamente ao que foi feito no **Passo 1**, a quantidade de comissões possíveis com a participação de Bianca, mas não de Abel, também é uma combinação de 18 elementos tomados 3 a 3. Logo:

$$B = C_{18,3} = \frac{18!}{3! \cdot (18-3)!} = \frac{18!}{3! \cdot 15!} = 816$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Passo 3

No caso da contagem das comissões das quais tanto Abel quanto Bianca façam parte, o total de candidatos para as demais vagas permanece sendo 18, mas, neste caso, as vagas ainda disponíveis são apenas duas, uma vez que as outras duas já estão ocupadas por Abel e Bianca. Assim:

$$AB = C_{18,2} = \frac{18!}{2! \cdot (18-2)!} = \frac{18!}{2! \cdot 16!} = \frac{18 \cdot 17}{2 \cdot 1} = 9 \cdot 17 = 153$$

Passo 4

Note que, pela maneira com que separamos os casos, nenhuma possibilidade de comissão pode ter sido contada mais de uma vez, isto é, não há como uma possibilidade contada em A ter sido contada também em B ou AB, e vice-versa. Assim, o total de comissões que podem ser formadas é dado por:

$$A + B + AB = 816 + 816 + 153 = 1\,785$$

Portanto, é possível formar exatamente 1 785 comissões diferentes com a participação de ambos ou de apenas um dos dois.

D Verificando a solução obtida

Outra maneira de calcular a quantidade de possibilidades seria primeiro contar todas as comissões possíveis, sem nos preocuparmos se Abel ou Bianca fazem parte delas ou não e, desse total, subtrair a quantidade de comissões das quais nem Abel nem Bianca sejam membros. O valor obtido será a quantidade de comissões em que pelo menos um dos dois faça parte.

O total de comissões, independentemente da participação ou não de Abel ou Bianca, é uma combinação de 20 elementos tomados 4 a 4, ou seja:

$$C_{20,4} = \frac{20!}{4! \cdot (20-4)!} = \frac{20!}{4! \cdot 16!} = 4\,845$$

A quantidade de comissões das quais nem Abel nem Bianca faz parte é uma combinação de 18 elementos tomados 4 a 4, ou seja:

$$C_{18,4} = \frac{18!}{4! \cdot (18-4)!} = \frac{18!}{4! \cdot 14!} = 3\,060$$

Assim, o total de comissões com a participação de Abel e/ou Bianca é, de fato, dado por: $C_{20,4} - C_{18,4} \Rightarrow 4\,845 - 3\,060 = 1\,785$

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de algumas tarefas semelhantes propostas na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Agora é você quem resolve! Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema.**

Em uma sala com 15 alunos, deseja-se formar uma equipe de xadrez constituída de quatro membros, sendo que, necessariamente, pelo menos uma das vagas da equipe deve ser preenchida por um aluno que tirou nota 10 em todas as provas. Sabendo que na sala apenas Arlindo e Beatriz tiraram 10 em todas as provas, de quantas maneiras diferentes é possível escolher os membros dessa equipe?

2 **É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta desse problema?**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Calcule.

a) $C_{6,2}$ 15 c) $C_{15,10}$ 3 003 e) $C_{8,4} - C_{8,3}$ 14

b) $C_{9,5}$ 126 d) $C_{12,6} + C_{8,2}$ 952 f) $\dfrac{C_{19,11}}{C_{19,8}}$ 1

2 Simplifique as expressões.

a) $\dfrac{A_{n,p}}{C_{n,p}}$ $p!$

b) $C_{n,n-1} \cdot C_{n-2,n-3}$ $n(n-2)$

c) $C_{n-1,p-1} \cdot \dfrac{(n-p)!(p+1)!}{n!}$ $\dfrac{p(p+1)}{n}$

d) $\dfrac{C_{n-1,p-1}}{C_{n-2,p-2}}$ $\dfrac{n-1}{p-1}$

3 Observe como podemos calcular o total de combinações utilizando uma calculadora científica.

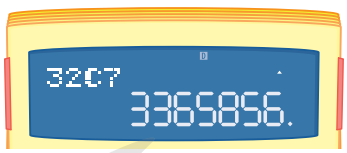
Calculadora

Para calcular $C_{32,7}$, por exemplo, procedemos da seguinte maneira.

Registramos o número 32 e, em seguida, digitamos a tecla nCr. Por fim, inserimos o número 7 e digitamos a tecla =, obtendo o resultado.

3 → 2 → nCr → 7 → =

Diga aos alunos que este procedimento pode variar dependendo do modelo da calculadora.



SERGIO L. FILHO

Utilizando uma calculadora científica e procedendo de maneira semelhante à apresentada, calcule.

a) $C_{25,4}$ 12 650 c) $C_{32,7}$ 3 365 856 e) $C_{80,75}$ 24 040 016

b) $C_{25,9}$ 2 042 975 d) $C_{29,20}$ 10 015 005 f) $C_{100,96}$ 3 921 225

4 Utilizando o método de tentativas, determine o valor de n, tal que $C_{n,3} = 455$. 15

5 Uma escola de inglês vai sortear 5 bolsas de estudos. Sabendo que participarão 50 pessoas desse sorteio, determine quantos grupos diferentes podem ser sorteados.
2 118 760 grupos diferentes.

6 Uma papelaria disponibiliza para venda 8 tipos de caderno, 7 tipos de lápis e 5 tipos de caneta. De quantas maneiras distintas é possível montar um *kit* escolar nessa papelaria composto por 5 tipos de caderno, 4 tipos de lápis e 2 tipos de caneta?
19 600 maneiras.

7 Marlene tem uma coleção de 18 moedas. Ela vai expor 7 dessas moedas em um evento. De quantas maneiras distintas ela pode formar o conjunto de moedas para a exposição? 31 824 maneiras.

*Explique aos alunos que nCr corresponde à combinação de n elementos tomados r a r.

8 (AFA/EPCAr – MG, 2015) Um turista queria conhecer três estádios da Copa do Mundo no Brasil não importando a ordem de escolha. Estava em dúvida em relação às seguintes situações:

I) obrigatoriamente, conhecer o Estádio do Maracanã.

II) se conhecesse o Estádio do Mineirão, também teria que conhecer a Arena Pantanal, caso contrário, não conheceria nenhum dos dois.

Sabendo que a Copa de 2014 se realizaria em 12 estádios brasileiros, a razão entre o número de modos distintos de escolher a situação I e o número de maneiras diferentes de escolha para a situação II, nessa ordem, é: alternativa a

a) $\dfrac{11}{26}$ b) $\dfrac{13}{25}$ c) $\dfrac{13}{24}$ d) $\dfrac{11}{24}$

9 Para a composição de um simulado do Enem, certo professor escolherá 25 questões de um banco de dados contendo 60 questões. O total de maneiras distintas de compor esse simulado, não se diferenciando a ordem das questões, é dado por:
alternativa a

a) $\dfrac{A_{60,25}}{25!}$. c) $\dfrac{A_{60,25}}{C_{60,25}}$. e) $\dfrac{C_{60,25}}{35!}$.

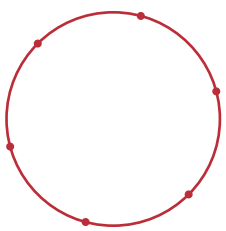
b) $\dfrac{C_{60,25}}{25!}$. d) $\dfrac{A_{60,25}}{35!}$.

10 Em certo corredor de um edifício há 25 lâmpadas com interruptores individuais. De quantas maneiras diferentes esse corredor pode ser iluminado por 16 dessas lâmpadas? 2 042 975 maneiras

11 João, Mara e outros 8 amigos vão participar de um torneio de futsal. Para formar o time que começará jogando a 1ª partida, eles precisam selecionar, entre o grupo de amigos, 5 pessoas. Quantos times diferentes será possível formar com a participação de pelo menos um dos amigos citados?
196 times diferentes.

12 Resolva a equação: $C_{x,2} = 6$. $x = 4$

13 Sobre uma circunferência são indicados 6 pontos distintos, conforme a figura.



RONALDO INÁCIO

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?
15 segmentos

b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?
20 triângulos

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

14 Duas pessoas de um grupo serão escolhidas para representá-lo. Sabendo que essa escolha pode ser feita de 630 maneiras distintas, quantas pessoas formam esse grupo? 36 pessoas

15 Observe.

Quantidade de países que compõem o continente americano em 2014

América	Quantidade de países
América do Norte	3
América Central	20
América do Sul	12

Fonte: *ALMANAQUE Abril*. São Paulo: Abril, 2015.

Certa organização não governamental escolherá 3 países de cada uma das Américas para criar uma comissão representativa para tratar de um assunto de interesse do continente. De quantas maneiras distintas essa comissão pode ser criada? 250 800 maneiras

No contexto

16 Nas páginas 44 e 45 foram apresentadas algumas informações sobre a Mega-Sena, loteria organizada pela Caixa Econômica Federal. Com base nessas informações, resolva as questões.

a) Vimos que a quantidade de possibilidades de compor uma aposta simples de 6 números é uma combinação simples dos 60 números tomados 6 a 6, ou seja, 50 063 860 possibilidades. Utilize a fórmula para verificar esse resultado.

b) Considerando que uma pessoa realize todas as apostas mínimas diferentes possíveis na Mega-Sena, cada uma delas custando R$ 4,50, qual quantia ela gastaria fazendo todas essas apostas? Em sua opinião, seria vantajoso financeiramente a alguém realizar este procedimento? Justifique sua resposta.

c) O valor de uma aposta é calculado da seguinte maneira:

$$V_n = (\text{preço da aposta mínima}) \cdot C_{n,6}$$

em que V_n é o preço da aposta e n é a quantidade de números escolhidos (mínimo de 6 e máximo de 15). Considerando R$ 4,50 o preço de uma aposta mínima, quantos reais uma pessoa pagaria em uma aposta se escolhesse:

- 7 números? R$ 31,50
- 9 números? R$ 378,00
- 12 números? R$ 4 158,00
- 15 números? R$ 22 522,50

16. a) $C_{60,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60!}{6!54!} = 50\,063\,860$

16. b) R$ 225 287 370,00; Uma possível resposta: o procedimento seria vantajoso se o prêmio fosse maior do que esse valor e não existisse outro ganhador.

17 Para tratar de certo paciente, um hospital constituirá uma junta médica a partir dos médicos que lá trabalham. Se essa junta for composta por 5 médicos, o hospital terá 15 504 opções de formação da junta. De quantas maneiras distintas essa junta pode ser formada se ela for composta por 6 médicos? 38 760 maneiras

Diga aos alunos que utilizem o método de tentativas para resolver a tarefa 17.

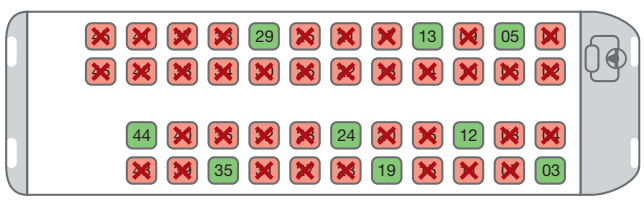
18 Em uma sala de aula do Ensino Médio, há 15 moças. Com o total de alunos dessa turma é possível formar 30 030 comissões distintas, de 5 pessoas cada, sendo que, dessas, exatamente 3 serão moças. Quantos alunos há nessa sala de aula? 27 alunos

19 Observe abaixo como estão agrupados os amigos cadastrados de certa pessoa em uma rede social.

Grupo	Quantidade de amigos
Trabalho	12
Escola	10
Família	9
Outros	15

Sabendo que essa pessoa deseja enviar uma mensagem para 10 amigos, sendo 3 do grupo Trabalho, 3 do grupo Escola, 3 do grupo Família e 1 do grupo Outros, de quantas maneiras diferentes essa pessoa pode enviar a mensagem? 33 264 000 maneiras

20 Um grupo de sete amigos decidiu passar o fim de ano no litoral. Ao consultar um aplicativo que comercializa passagens rodoviárias, eles perceberam que quase não havia mais assentos disponíveis para a data escolhida.



RONALDO NÁCIO

Na figura, disponibilizada pelo aplicativo, os assentos ocupados estão marcados com um X e os disponíveis são os mostrados em verde.

Qual é a quantidade de maneiras distintas para acomodar o grupo de amigos nesse ônibus? alternativa a

a) $\frac{9!}{2!}$

b) $7!$

c) $7! \cdot \frac{9!}{2!}$

d) $5! \cdot 4!$

e) $\frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

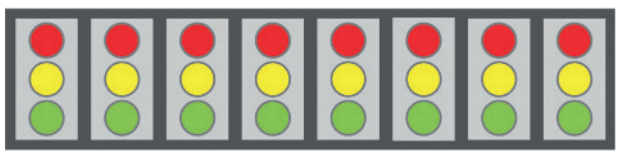
21 Ao ser infectada por certo vírus, uma pessoa pode desencadear 7 tipos de sintomas diferentes. Os órgãos de saúde pública definiram que, se um indivíduo apresentasse 4 ou mais desses sintomas, seria submetido a tratamento médico preliminar enquanto os resultados dos exames não estivessem prontos.

De quantas maneiras diferentes um indivíduo pode manifestar sintomas suficientes para que seja encaminhado a tratamento médico preliminar? 64 maneiras

22 Uma fábrica produz 10 tipos diferentes de peças que, para serem transportadas, são acondicionadas em caixas com 6 peças. Sabendo que, por motivos técnicos, entre os 10 tipos de peças, apenas dois não podem ser acondicionados em uma mesma caixa, de quantas maneiras diferentes pode-se fazer o acondicionamento delas nas caixas? 140 maneiras

23 (UERJ, 2013) Um sistema luminoso, constituído de oito módulos idênticos, foi montado para emitir mensagens em código. Cada módulo possui três lâmpadas de cores diferentes – vermelha, amarela e verde. Observe a figura:

REPRODUÇÃO



Considere as seguintes informações:

- cada módulo pode acender apenas uma lâmpada por vez;
- qualquer mensagem é configurada pelo acendimento simultâneo de três lâmpadas vermelhas, duas verdes e uma amarela, permanecendo dois módulos com as três lâmpadas apagadas;
- duas mensagens são diferentes quando pelo menos uma das posições dessas cores acesas é diferente.

Calcule quantas mensagens distintas que esse sistema pode emitir. 1 680 mensagens

24 (UFSCar-SP, 2008) Considere o conjunto $C = \{2, 8, 18, 20, 53, 124, 157, 224, 286, 345, 419, 527\}$. O número de subconjuntos de três elementos de C que possuem a propriedade "soma dos três elementos é um número ímpar" é alternativa c

a) 94
b) 108
c) 115
d) 132
e) 146

A tarefa **27** propõe aos alunos que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

25 (Unesp, 2014) Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no número de alternativas corretas, a serem assinaladas com X na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa A, duas com a B, e assim por diante, como mostra o modelo.

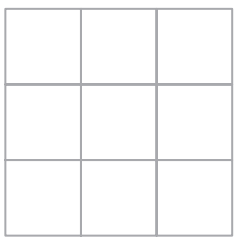
Modelo de folha de resposta (gabarito)

	A	B	C	D	E
01	X				
02			X		
03		X			
04				X	
05	X				
06					X
07				X	
08					X
09		X			
10			X		

Nessas condições, a quantidade de folhas de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será alternativa b

a) 302 400.
b) 113 400.
c) 226 800.
d) 181 440.
e) 604 800.

26 (Furg-RS, 2008) Em um painel fixo em uma parede, representado pela figura abaixo, um artista pinta de amarelo apenas 3 dos 9 quadradinhos. O número de maneiras distintas que esse artista poderá pintar é: alternativa c



SERGIO L. FILHO

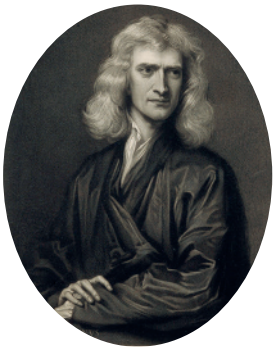
a) 9
b) 27
c) 84
d) 81
e) 243

27 Elabore uma questão em que seja necessário utilizar combinação simples para obter a solução. Depois, dê a questão que você escreveu para um colega resolver e, na sequência, verifiquem se a resposta está correta. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Binômio de Newton



Isaac Newton.

REPRODUÇÃO – WELLCOME COLLECTION. ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL (CC BY 4.0)

Um dos matemáticos mais produtivos e importantes da história é o inglês Isaac Newton (1642-1727). Entre suas diversas contribuições, está o que denominamos **Binômio de Newton**.

Para compreender esse conceito matemático, observe o desenvolvimento de potências da forma $(x + y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, para alguns valores de n. Cada uma dessas potências é chamada Binômio de Newton.

- $n = 0 \rightarrow (x + y)^0 = 1$
- $n = 1 \rightarrow (x + y)^1 = x + y$
- $n = 2 \rightarrow (x + y)^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x^2 + 2xy + y^2$
- $n = 3 \rightarrow (x + y)^3 = (x + y) \cdot (x + y)^2 = (x + y) \cdot (x^2 + 2xy + y^2) = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $n = 4 \rightarrow (x + y)^4 = (x + y) \cdot (x + y)^3 = (x + y) \cdot (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Seguindo esse mesmo raciocínio, para $n = 5$, teríamos $(x + y)^5 = (x + y) \cdot (x + y)^4$. De modo geral, para $n > 0$, temos $(x + y)^n = (x + y) \cdot (x + y)^{n-1}$.

Os símbolos $\mathbb{R}$ e $\mathbb{N}$ indicam, respectivamente, o **conjunto dos números reais** e o **conjunto dos números naturais**.

Dependendo do valor de n, esse método de calcular potências pode ser muito trabalhoso. Iremos estudar uma fórmula que permite desenvolver $(x + y)^n$ de maneira menos trabalhosa, ou obter qualquer de seus termos sem efetuar todo o seu desenvolvimento.

Triângulo de Pascal

Sabemos que, em uma combinação simples, a ordem dos elementos não importa, e a quantidade total de combinações simples pode ser indicada por $C_{n,p}$, C_n^p ou $\binom{n}{p}$, tal que:

$$C_{n,p} = C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ com } n \geqslant p$$

No estudo do Binômio de Newton, para simplificar a escrita, utilizaremos a notação $\binom{n}{p}$ (lê-se: "binomial de n sobre p").

O número $\binom{n}{p}$ é denominado **coeficiente binomial** ou **número binomial**.

Podemos organizar os números binomiais em uma estrutura triangular, conhecida como **Triângulo de Pascal**.

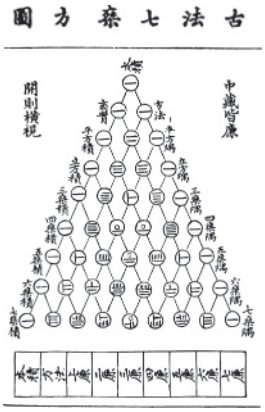
$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$$
$$\ldots$$

Observando parte desse triângulo, notamos que os números binomiais que possuem mesmo:

- n estão dispostos na mesma linha;
- p estão dispostos na mesma coluna.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA



REPRODUÇÃO – BIBLIOTECA NACIONAL DO REINO UNIDO, LONDRES, INGLATERRA

Representação do Triângulo de Pascal publicada na China, em 1303.

O Triângulo de Pascal também pode ser representado pelos valores dos números binomiais. Substituindo os números binomiais por seus valores, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ \multicolumn{7}{c}{\ldots} \end{array}$$

Agora, destacaremos e exemplificaremos algumas propriedades do Triângulo de Pascal.

1ª propriedade: Em uma linha qualquer do Triângulo de Pascal, dois números equidistantes são iguais.

$$C_{n,p} = C_{n,n-p} \Rightarrow \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\underbrace{\binom{5}{0}}_{1} \quad \underbrace{\binom{5}{1}}_{5} \quad \underbrace{\binom{5}{2}}_{10} \quad \underbrace{\binom{5}{3}}_{10} \quad \underbrace{\binom{5}{4}}_{5} \quad \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}$$

Não apresentaremos a demonstração da 2ª propriedade, porém essa pode ser demonstrada. Já a 3ª propriedade será justificada na página **57**.

2ª propriedade: A partir da 3ª linha, e com exceção do primeiro e do último elemento de cada linha, cada elemento do Triângulo de Pascal é igual à soma do elemento imediatamente superior a ele com o elemento anterior a este.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}, \text{ para } n \geqslant 2$$

Exemplo

$$\underbrace{\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}}_{2 = 1 + 1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\ \multicolumn{7}{c}{\ldots} \end{array}$$

$$\underbrace{\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}}_{6 = 3 + 3}$$

$$\underbrace{\binom{5}{4} = \binom{4}{4} + \binom{4}{3}}_{5 = 1 + 4}$$

A igualdade correspondente à 2ª propriedade é conhecida como Relação de Stifel. Ela recebeu esse nome em homenagem a Michael Stifel (1486-1567), comumente apresentado como o maior algebrista alemão do século XVI. Stifel foi um dos vários autores responsáveis por difundir os símbolos + e −.

Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

3ª propriedade: A soma dos elementos de uma linha n qualquer do Triângulo de Pascal é igual a 2^n.

$$\text{Linha } n \rightarrow \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Exemplo

Linha 0 $\rightarrow 1 = 2^0$

Linha 1 $\rightarrow 1 + 1 = 2 = 2^1$

Linha 2 $\rightarrow 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$

Linha 3 $\rightarrow 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$

Linha 4 $\rightarrow 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$

...

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R5 Um professor elaborou o seguinte quebra-cabeça para seus alunos.

55	165	330	462
66			
78			
91			

Dizendo apenas que o quebra-cabeça é parte de um Triângulo de Pascal, o professor pediu aos alunos que o completassem. Explique um procedimento que os alunos poderiam utilizar e complete o quebra-cabeça.

Resolução

Para completar o quebra-cabeça, os alunos poderiam utilizar a Relação de Stifel.

$$\underbrace{\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}}_{2 = 1 + 1}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ & & & \cdots & & & \end{array}$$

Logo, completando o quebra-cabeça, temos:

55	165	330	462
66	$\underbrace{220}_{55+165}$	$\underbrace{495}_{165+330}$	$\underbrace{792}_{330+462}$
78	$\underbrace{286}_{66+220}$	$\underbrace{715}_{220+495}$	$\underbrace{1\,287}_{495+792}$
91	$\underbrace{364}_{78+286}$	$\underbrace{1\,001}_{286+715}$	$\underbrace{2\,002}_{715+1\,287}$

R6 Calcule o valor de $\binom{5}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{8}$.

Resolução

$$\binom{5}{0} + \binom{7}{1} + \binom{8}{8} = \frac{5!}{0!\,(5-0)!} + \frac{7!}{1!\,(7-1)!} + \frac{8!}{8!\,(8-8)!} =$$

$$= \frac{\cancel{5!}}{1 \cdot \cancel{5!}} + \frac{7 \cdot \cancel{6!}}{1 \cdot \cancel{6!}} + \frac{\cancel{8!}}{\cancel{8!} \cdot 1} = 1 + 7 + 1 = 9$$

Verifique que: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ e $\binom{n}{n} = 1$.

R7 Em uma lanchonete, o cliente pode escolher até oito opções de frutas para compor sua vitamina. Quantas opções possíveis de vitamina estão disponíveis para o cliente?

Resolução

A ordem em que as frutas são escolhidas não é importante, ou seja, das oito opções de frutas, cada vitamina representa uma combinação, na qual o cliente pode compor sua vitamina com:

- uma fruta $\rightarrow \binom{8}{1}$ possibilidades
- duas frutas $\rightarrow \binom{8}{2}$ possibilidades
- três frutas $\rightarrow \binom{8}{3}$ possibilidades
- ...
- oito frutas $\rightarrow \binom{8}{8}$ possibilidades

Logo, o total de opções é:

$$\binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \binom{8}{3} + \cdots + \binom{8}{8} = 2^8 - \binom{8}{0} = 256 - 1 = 255$$

Portanto, estão disponíveis 255 opções de vitaminas.

Note que $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{8} = 2^8 \Rightarrow \binom{8}{1} + \binom{8}{2} + \cdots + \binom{8}{8} = 2^8 - \binom{8}{0}$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

28 Calcule.

a) $\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{8}{5}$ 112

b) $\binom{10}{4} + \binom{2}{0} + \binom{8}{3}$ 267

c) $\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \ldots + \binom{15}{14} + \binom{15}{15}$ 32 768

d) $\binom{6}{2} + \binom{12}{7} + \binom{7}{0}$ 808

29 Resolva as equações.

a) $\binom{9}{3} = \binom{x}{6}$ $S = \{9\}$

b) $\binom{24}{x} + \binom{24}{12} = \binom{25}{12}$ $S = \{11, 13\}$

c) $\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \ldots + \binom{x}{x} = 2^{(-x+200)}$ $S = \{100\}$

d) $\binom{10}{x}^x = \binom{20}{14} - \binom{20}{6} + 1$ $S = \{0, 10\}$

30 Quantos elementos a 8ª linha do Triângulo de Pascal tem? Qual é a soma desses elementos? 8 elementos; 256

31 A expressão $\binom{6}{4} + \binom{6}{3} + \binom{6}{3} + \binom{6}{2}$ corresponde a: alternativa d

a) $\binom{7}{6}$ b) $\binom{8}{5}$ c) $\binom{6}{5}$ d) $\binom{8}{4}$

Nesta tarefa, utilize a Relação de Stifel.

32 Resolva a equação.

$\binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3} + \ldots + \binom{x}{x-1} + \binom{x}{x} = 256$

$x = 8$

33 De um grupo de 10 pessoas, deseja-se formar uma comissão com no mínimo 1 e no máximo 10 integrantes. Quantas comissões podem ser formadas? 1 023 comissões

34 Qual o valor de n na expressão $\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 4\,095$? $n = 12$

Fórmula do Binômio de Newton

Anteriormente, vimos que toda potência da forma $(x + y)^n$, com $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, é chamada Binômio de Newton. Observe a seguir o desenvolvimento de alguns Binômios de Newton e como podemos associar os coeficientes de cada termo desses desenvolvimentos com uma das linhas do Triângulo de Pascal.

$(x + y)^0 = 1$	1	$\binom{0}{0}$
$(x + y)^1 = x + y$	1 1	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	1 2 1	$\rightarrow \binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	1 3 3 1	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$
$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$	1 4 6 4 1	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$

Substituindo esses coeficientes pelos números binomiais correspondentes, temos:

$$(x + y)^0 = \binom{0}{0}x^0y^0$$

$$(x + y)^1 = \binom{1}{0}x^1y^0 + \binom{1}{1}x^0y^1$$

$$(x + y)^2 = \binom{2}{0}x^2y^0 + \binom{2}{1}x^1y^1 + \binom{2}{2}x^0y^2$$

$$(x + y)^3 = \binom{3}{0}x^3y^0 + \binom{3}{1}x^2y^1 + \binom{3}{2}x^1y^2 + \binom{3}{3}x^0y^3$$

$$(x + y)^4 = \binom{4}{0}x^4y^0 + \binom{4}{1}x^3y^1 + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}x^1y^3 + \binom{4}{4}x^0y^4$$

Generalizando, obtemos o resultado apresentado na próxima página. Tal resultado pode ser demonstrado, porém não o faremos neste volume.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A **fórmula do Binômio de Newton** é dada por:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \dots +$$
$$+ \dots + \binom{n}{p}x^{n-p}y^p + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n$$

para n e p naturais e x e y reais.

A partir dessa fórmula, destacamos que:

- em qualquer dos termos do desenvolvimento de $(x+y)^n$, a soma dos expoentes de x e y é igual a n.
- o desenvolvimento de $(x+y)^n$ possui $n+1$ termos.
- os expoentes de x decrescem, de 1 em 1, de n até 0.
- os expoentes de y crescem, de 1 em 1, de 0 até n.
- os elementos da linha n do Triângulo de Pascal correspondem aos coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$.

Se $x = y = 1$, então:

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n \cdot 1^0 + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 1^1 + \dots + \binom{n}{n}1^0 \cdot 1^n$$

Ou seja:

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

Desse modo, justificamos a 3ª propriedade apresentada na página **54**.

Exercícios e problemas resolvidos

R8 Efetue o desenvolvimento de:

a) $(-x+5)^4$. b) $(x-2)^5$.

Note que o binômio $(x-y)^n$ pode ser interpretado por $(x+(-y))^n$.

Resolução

a) $(-x+5)^4 = \underbrace{\binom{4}{0}}_{1}(-x)^4 \cdot 5^0 + \underbrace{\binom{4}{1}}_{4}(-x)^3 \cdot 5^1 + \underbrace{\binom{4}{2}}_{6}(-x)^2 \cdot 5^2 + \underbrace{\binom{4}{3}}_{4}(-x)^1 \cdot 5^3 + \underbrace{\binom{4}{4}}_{1}(-x)^0 \cdot 5^4 =$

$= x^4 + 4 \cdot (-x^3) \cdot 5 + 6x^2 \cdot 25 + 4 \cdot (-x) \cdot 125 + 625 = x^4 - 20x^3 + 150x^2 - 500x + 625$

b) $(x-2)^5 = \underbrace{\binom{5}{0}}_{1}x^5(-2)^0 + \underbrace{\binom{5}{1}}_{5}x^4(-2)^1 + \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}x^3(-2)^2 + \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}x^2(-2)^3 + \underbrace{\binom{5}{4}}_{5}x^1(-2)^4 + \underbrace{\binom{5}{5}}_{1}x^0(-2)^5 =$

$= x^5 + 5x^4 \cdot (-2) + 10x^3 \cdot 4 + 10x^2 \cdot (-8) + 5x \cdot 16 + (-32) = x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

R9 Sabendo que $(x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3$, desenvolva $(x+y+z)^3$.

Resolução

Considerando $\alpha = y + z$, temos:

- $\alpha^2 = (y+z)^2 = y^2 + 2yz + z^2$
- $\alpha^3 = (y+z)^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$

Assim:

$(x+y+z)^3 = (x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3 = x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y+z)^2 + (y+z)^3 =$

$= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3x(y^2 + 2yz + z^2) + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 =$

$= x^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3xy^2 + 6xyz + 3xz^2 + y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$

R10 Qual é a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(5x^2 - 2y)^3$?

Resolução

Desenvolvendo o binômio, temos:

$$(5x^2 - 2y)^3 = (5x^2)^3 \cdot (-2y)^0 + 3 \cdot (5x^2)^2 \cdot (-2y) + 3 \cdot 5x^2 \cdot (-2y)^2 + (5x^2)^0 \cdot (-2y)^3$$

Para determinar a soma dos coeficientes dos termos, basta considerarmos $x = y = 1$. Assim, substituindo $x = y = 1$ em $(5x^2 - 2y)^3$, segue que:

$$(5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1)^3 = (5-2)^3 = 3^3 = 27$$

Portanto, a soma dos coeficientes dos termos é 27.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Termo geral do Binômio de Newton

Indicando os termos do desenvolvimento de $(x + y)^n$ por $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n, T_{n+1}$, temos:

$$(x+y)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n y^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}y^1}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}y^2}_{T_3} + \underbrace{\binom{n}{3}x^{n-3}y^3}_{T_4} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{p}x^{n-p}y^p}_{T_{p+1}} + \ldots +$$

$$+ \underbrace{\binom{n}{n-1}x^{n-(n-1)}y^{n-1}}_{T_n} + \underbrace{\binom{n}{n}x^0 y^n}_{T_{n+1}}$$

Observe que, para cada valor de p, com $0 \leq p \leq n$, o termo $\binom{n}{p}x^{n-p}y^p$ ocupa a posição $(p + 1)$, ou seja, $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}y^p$.

O **termo geral** do Binômio de Newton é dado por:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}y^p$$

para n e p naturais, com $0 \leq p \leq n$ e x e y reais.

Exercícios e problemas resolvidos

R11 No desenvolvimento de $(3x + y)^6$, com expoentes decrescentes de x, determine:

a) o 3º termo.

b) o termo médio (ou central).

c) o termo independente de x.

d) o termo em x^6.

Uma vez que $(x + y)^n$ pode ser interpretado como $(y + x)^n$, no desenvolvimento do Binômio de Newton sempre que necessário será informado qual termo deve ter expoentes decrescentes (ou crescentes).

Resolução

a) Para o 3º termo, temos $p + 1 = 3 \Rightarrow p = 2$. Logo:

$$T_{2+1} = \underbrace{\binom{6}{2}}_{15}(3x)^{6-2}y^2 = 15 \cdot (3x)^4 y^2 = 15 \cdot 81x^4y^2 = 1\,215x^4y^2$$

b) Como o binômio tem 7 termos, o 4º termo é o termo central. Assim: $p + 1 = 4 \Rightarrow p = 3$. Logo:

$$T_{3+1} = \underbrace{\binom{6}{3}}_{20}(3x)^{6-3}y^3 = 20 \cdot (3x)^3 y^3 = 20 \cdot 27x^3y^3 = 540x^3y^3$$

No desenvolvimento de $(x + y)^n$, com n ímpar, a quantidade de elementos é par. Nesse caso, o binômio possui dois termos centrais.

c) O termo independente de x é aquele em que x^0, ou seja:

$$x^{6-p} = x^0 \Rightarrow 6 - p = 0 \Rightarrow p = 6$$

Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton, temos:

$$T_{6+1} = \underbrace{\binom{6}{6}}_{1}(3x)^{6-6}y^6 = (3x)^0 y^6 = y^6$$

d) O termo em x^6 ocorre quando $x^{n-p} = x^6$, ou seja:

$$x^{n-p} = x^6 \Rightarrow x^{6-p} = x^6 \Rightarrow 6 - p = 6 \Rightarrow p = 0$$

Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton, temos:

$$T_{0+1} = \underbrace{\binom{6}{0}}_{1}(3x)^{6-0}y^0 = (3x)^6 = 729x^6$$

Desenvolvendo o binômio $(3x + y)^6$, temos:
$(3x + y)^6 = 729x^6 + 1\,458x^5y + 1\,215x^4y^2 + 540x^3y^3 + 135x^2y^4 + 18xy^5 + y^6$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R12 Determine o valor de k, sabendo que 7 é o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(x + k)^8$.

Resolução

O termo em x^5 ocorre quando $x^{n-p} = x^5$, ou seja:

$$x^{n-p} = x^5 \Rightarrow x^{8-p} = x^5 \Rightarrow 8 - p = 5 \Rightarrow p = 3$$

Utilizando a fórmula do termo geral do Binômio de Newton, temos:

$$T_{3+1} = \underbrace{\binom{8}{3}}_{56} x^{8-3}k^3 = 56x^5k^3$$

Como o coeficiente de x^5 é 7, então o termo em x^5 é $7x^5$.

$$7x^5 = 56x^5k^3 \Rightarrow k^3 = \frac{7x^5}{56x^5} \Rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

35 Desenvolva os binômios. Respostas no final do livro.

a) $(x + y)^5$

b) $(2a - b)^4$

c) $\left(2x - \frac{y}{4}\right)^6$

d) $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^4$

e) $\left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{\sqrt{b}}{3}\right)^4$

f) $\left(xy + \frac{z}{3}\right)^6$

36 Determine a soma dos coeficientes dos termos no desenvolvimento dos binômios.

a) $(7a - 6b)^{14}$ 1

b) $(3x - 4y)^7$ -1

c) $\left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^9$ 0

d) $(-7x + 9y)^8$ 256

37 Calcule.

a) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^5$ $220\sqrt{5} - 284\sqrt{3}$

b) $\left(\sqrt{7} + 3\sqrt{5}\right)^4$ $3\,964 + 624\sqrt{35}$

c) $\left(1 - \sqrt{2}\right)^{10}$ $3\,363 - 2\,378\sqrt{2}$

d) $\left(3 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^5$ $2\,403 + 981\sqrt{6}$

38 Sabendo que a soma dos coeficientes dos termos do desenvolvimento do binômio $\left(\frac{2}{a^5} + \frac{\sqrt{b}}{b}\right)^n$ é 6561, determine o valor de n.
$n = 8$

39 Determine a fórmula do termo geral dos binômios. Respostas no final do livro.

a) $(9 - a)^7$

b) $\left(3 + \frac{x}{3}\right)^5$

c) $\left(5ab - \frac{c}{7}\right)^9$

d) $\left(\frac{7}{x} + \frac{8y}{3}\right)^6$

40 Qual é o 8º termo do desenvolvimento do binômio $\left(-2x + \frac{1}{3}\right)^{10}$, com expoentes decrescentes de x? $-\frac{320x^3}{729}$

41 Determine o 17º termo do desenvolvimento do binômio $(2x - y)^{20}$, com expoentes decrescentes de x. $77\,520x^4y^{16}$

42 Determine o termo central no desenvolvimento dos binômios. Respostas no final do livro.

a) $\left(y^2 + 3\right)^6$, com expoentes decrescentes de y.

b) $\left(a^2 - \frac{b}{a}\right)^8$, com expoentes decrescentes de a.

c) $\left(\frac{2}{xy} + \frac{z^3}{5}\right)^{12}$, com expoentes decrescentes de $\frac{1}{xy}$.

43 Calcule, caso exista, o termo independente de x no desenvolvimento de:

a) $\left(x^2 + 3\right)^6$. 729

b) $\left(\frac{3}{x} + 4\right)^5$. 1 024

c) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - x^3\right)^8$.

d) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x}\right)^8$. 5 670

43. c) não possui termo independente de x

44 No desenvolvimento do binômio $\left(x - \frac{2}{y}\right)^{20}$, com expoentes decrescentes de x, qual é o termo em x^{18}? $\frac{760x^{18}}{y^2}$

45 Em relação ao desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{y}\right)^{12}$, com expoentes decrescentes de x, determine:

a) o 10º termo. $\frac{55x^3}{2y^9}$

b) o termo central. $\frac{231x^6}{16y^6}$

c) o termo em x^8. $\frac{495x^8}{256y^4}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5 Probabilidade

Jogando com a sorte!

Você costuma jogar *videogame*? O sucesso em um jogo de *videogame* depende exclusivamente da habilidade ou também da sorte do jogador? A resposta para essa pergunta depende do jogo escolhido.

Muitos jogos de *videogame* buscam adicionar um pouco de aleatoriedade, que acrescenta imprevisibilidade, possibilitando que um jogador menos experiente vença um mais experiente e proporcionando momentos inesperados e interessantes. Assim, os jogos tornam-se mais agradáveis e desafiadores.

A aleatoriedade nos jogos de *videogame* é obtida por meio do RNG – do inglês *Random Number Generator*, que significa Gerador de Números Aleatórios –, método que produz números aleatórios dentro de certo intervalo. O lançamento de um dado honesto, ou não viciado, pode ser utilizado como um gerador de números aleatórios, pois, ao lançarmos esse dado, não é possível prever qual será o número sorteado. Nos jogos de *videogame*, o RNG é gerado por um *software*.

Veja alguns exemplos de como o RNG é utilizado em alguns gêneros de jogos eletrônicos.

BNCC

- EM13MAT106
- EM13MAT311
- EM13MAT511

Estatísticas

Ao variar aleatoriamente os padrões de ataque, defesa, velocidade, dano, entre outros, surgem versões mais fortes ou mais fracas dos inimigos e dos amigos nos jogos de ação ou luta, por exemplo.

Cenários

Ao variar aleatoriamente peças e partes de um cenário e combiná-las nos jogos de aventura ou plataforma, por exemplo, surgem versões imprevisíveis a cada nova jogada.

Personagens e itens

É possível variar aleatoriamente a posição em que surgem os carros, árvores, pedras e outros itens, de modo a tornar um jogo de corrida mais dinâmico, por exemplo.

Inteligência artificial

Os inimigos do jogo podem tomar decisões aleatórias em jogos de nave, por exemplo, deixando a jogabilidade menos previsível.

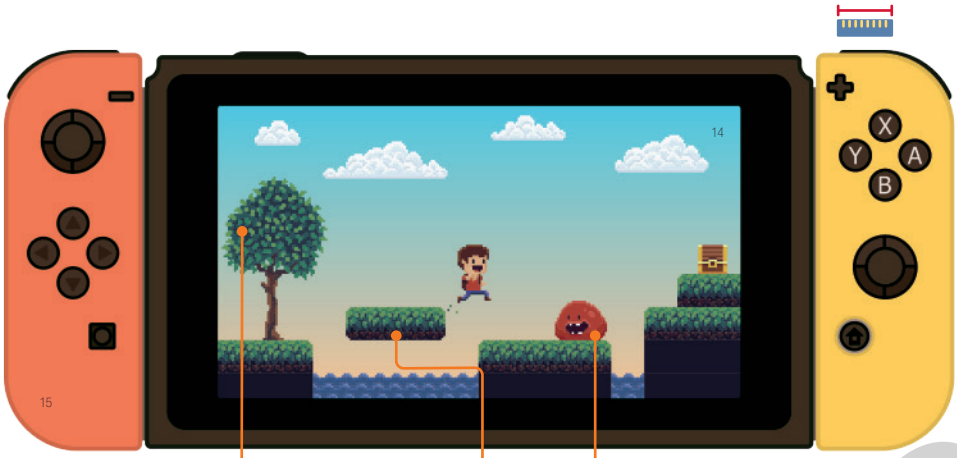
ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Nem todos os jogos de *videogame* usam RNG. Alguns jogos de ritmo – que envolvem dança e instrumentos musicais, por exemplo – são totalmente desprovidos de aleatoriedade. E mesmo quando está presente, ela geralmente passa despercebida, pois são muitos elementos na tela, principalmente nos jogos mais modernos.

As principais características de RNG nos jogos geralmente estão relacionadas ao uso ou não de sequências predeterminadas nos cenários, obstáculos ou inimigos.



Cenário: pode ser fixo, quando o jogo ocorre em uma mesma tela, por exemplo, nos jogos de futebol, basquete e tênis; ou variável, quando o deslocamento do personagem muda conforme ele alcança novas fases. Em ambos os casos, pode haver aleatoriedade se, a cada nova partida, existem cenários que não podem ser predeterminados.

Obstáculos: mesmo em um cenário sem aleatoriedade, a posição dos obstáculos ou demais itens pode variar de acordo com o início de um novo jogo, não seguindo uma sequência predeterminada.

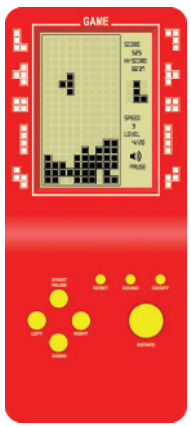
Inimigos: mesmo se não houver aleatoriedade no cenário ou nos obstáculos, geralmente há "inimigos" para dificultar a passagem do personagem. Pode haver aleatoriedade se os inimigos estiverem em posicionamentos diferentes ou se a movimentação deles não segue uma sequência predeterminada.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

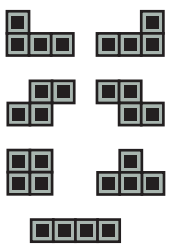
A Você tem costume de jogar *videogame*? Se sim, algum dos seus jogos possui características de aleatoriedade? Resposta pessoal.

B Tetris é um jogo eletrônico muito popular, lançado na década de 1980. O jogo consiste em empilhar 7 tipos de peças denominadas tetraminós, cada uma formada por 4 regiões quadradas idênticas. O jogador pode girar, mover e deixar cair um tetraminó por vez. O objetivo é encaixar os tetraminós para completar linhas horizontais.

Em certa versão de Tetris, o RNG é utilizado para definir a ordem das peças que aparecem. É possível que um jogador receba, de maneira aleatória, 100 tetraminós iguais consecutivamente? Justifique sua resposta.



RUMRUAY/SHUTTERSTOCK



KEITHY MOSTACHI

Representação do jogo Tetris e dos tetraminós em um *videogame* portátil.

Além do RNG nos jogos de *videogame*, existem muitas outras situações em que são utilizadas aleatoriedade. Nas próximas páginas iremos definir formalmente o que é um **experimento aleatório** e estudaremos os principais conceitos envolvidos no cálculo de **probabilidade**, como espaço amostral e evento. Também iremos estudar situações envolvendo o **cálculo da probabilidade de um evento ou da união de dois eventos**.

Fonte de pesquisa: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=170940866>. Acesso em: 10 jun. 2020.

B) Sim. Espera-se que os alunos justifiquem que, apesar de cada peça representar apenas uma opção entre as 7 disponíveis, nada impede que o RNG gere um mesmo número pertencente ao intervalo de 1 a 7, cem vezes consecutivas.

FOTOMONTAGEM DE GUSTAVO PEDROSA. FOTOS: 1.ROBUART/SHUTTERSTOCK; 2.ICONIC BESTIARY/SHUTTERSTOCK; 3.VECTOR PIXEL STAR/SHUTTERSTOCK; 4.TETSUO BUSETERU/SHUTTERSTOCK; 5.JEMASTOCK/SHUTTERSTOCK; 6.V O R T E X/SHUTTERSTOCK; 7.JULIA LEMBA/SHUTTERSTOCK; 8.MICROONE/SHUTTERSTOCK; 9.ELENA VOYNOVA/SHUTTERSTOCK; 10.ROBUART/SHUTTERSTOCK; 11.TOPVECTOR/SHUTTERSTOCK; 12.CHUCKCHEE/SHUTTERSTOCK; 13.MAXIMILIAN LASCHON/SHUTTERSTOCK; 14.CHUCKCHEE/SHUTTERSTOCK; 15.PATCHRA SUTTIVIRAT/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EDITORIA

Estudando probabilidade

Embora as probabilidades já exercessem fascínio há muitos séculos, elas não tiveram um tratamento matemático aprofundado até o século XV e início do século XVI. A primeira obra conhecida que aborda esse assunto é a **Liber de Ludo Aleae** (O livro dos jogos de azar), de Girolamo Cardano (1501-1576), publicada em 1663. De acordo com o que comumente se diz, a teoria das probabilidades originou-se de um problema relacionado a um jogo de azar chamado "problema dos pontos". Ele foi discutido por vários matemáticos famosos, tais como Niccolo Tartaglia (c. 1500-1557), Luca Pacioli (c. 1445-1509), Blaise Pascal (1623-1662), Pierre de Fermat (1601-1665) e Cardano.

Jogo de azar: aquele em que o ganho ou a perda dependem exclusivamente da sorte, ou pelo menos dependem dela mais do que dos cálculos ou da habilidade do jogador.

REPRODUÇÃO – WELLCOME COLLECTION. ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL (CC BY 4.0)

Niccolo Tartaglia.

REPRODUÇÃO – WELLCOME COLLECTION. ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL (CC BY 4.0)

Blaise Pascal.

MARZOLINO/SHUTTERSTOCK

Pierre de Fermat.

Luca Pacioli.

REPRODUÇÃO – MUSEU DE CAPODIMONTE, NÁPOLES, ITÁLIA

MEGAN FROST PHOTOGRAPHY/ SHUTTERSTOCK

Girolamo Cardano.

REPRODUÇÃO – WELLCOME COLLECTION. ATTRIBUTION 4.0 INTERNATIONAL (CC BY 4.0)

No esquema, estão representados alguns matemáticos que se dedicaram ao estudo dos jogos de azar, o que propiciou grande avanço na teoria das probabilidades.

Em nosso cotidiano, é frequente ouvirmos frases como "a probabilidade de chover amanhã é maior do que 25%", "a probabilidade de que ocorram acidentes nas rodovias seria menor se as leis de trânsito fossem respeitadas" ou "a probabilidade de que haja reduções de preço é remota". Além dessas, existem muitas outras situações em que são utilizados cálculos para determinar a probabilidade de que certo acontecimento ocorra.

Um meteorologista, por exemplo, a partir de algumas informações, pode calcular a probabilidade de que ocorram chuvas em determinada região nas próximas horas. Outra situação é a determinação do valor do seguro de um bem, que é calculado levando em consideração a sua probabilidade de perda ou avaria.

A partir dos conteúdos que estudaremos neste tema, você poderá responder a questões como:

- qual é a probabilidade de que, no lançamento de um dado não viciado, sejam obtidos dois pontos?
- qual é a probabilidade de que, em uma ninhada de cinco cães, somente dois sejam fêmeas?
- das 500 peças produzidas diariamente por uma máquina, 3% apresentam defeito. Escolhendo cinco dessas peças, qual é a probabilidade de que nenhuma apresente defeito?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

No lançamento de uma moeda, por exemplo, não é possível prever o resultado, ou seja, se a face voltada para cima será cara ou coroa. Situações como essa, em que não é possível prever o resultado, são chamadas **experimentos aleatórios**. Nesse caso, mesmo repetindo várias vezes o lançamento dessa moeda, sob as mesmas condições, não poderemos prever o resultado do próximo lançamento.

Nos estudos de probabilidade consideramos moedas, dados, roletas etc. honestos (não viciados), ou seja, sem qualquer tipo de modificação que possa influenciar os resultados obtidos.

Chamamos **experimento aleatório** todo experimento (ou fenômeno) cujo resultado depende somente do acaso, ou seja, cujo resultado é imprevisível mesmo quando repetido várias vezes, sob as mesmas condições.

Alguns exemplos de experimentos aleatórios são:

- lançamento de um dado não viciado;
- resultado de uma loteria;
- sorteio de uma ficha de uma urna.

No caso do lançamento de um dado comum, temos seis possíveis resultados, que correspondem às faces dos dados.

A esse conjunto de resultados damos o nome de **espaço amostral**.

Chamamos **espaço amostral**, e geralmente indicamos por Ω (lê-se: ômega), o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

Exemplos

- O espaço amostral do lançamento de uma moeda é:

$$\Omega = \{\text{cara, coroa}\}$$

- O espaço amostral do sorteio ao acaso de um dia da semana é:

$$\Omega = \{\text{domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

Em relação ao espaço amostral do sorteio ao acaso de um dia da semana, destacamos os seguintes **eventos**:

- *A*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja **s**.

$$A = \{\text{segunda-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

- *B*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja diferente de **t**.

$$B = \{\text{domingo, segunda-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

- *C*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja **d**.

$$C = \{\text{domingo}\}$$

O evento *C* é um conjunto unitário. Nesse caso, dizemos que esse evento é **simples** ou **unitário**.

- *D*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja uma consoante.

$$D = \Omega = \{\text{domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado}\}$$

O evento *D* é o próprio espaço amostral, ou seja, $D = \Omega$. Nesse caso, dizemos que esse evento é **certo**.

É muito provável que o evento *B* ocorra. Porém, não podemos afirmar que ele irá ocorrer. Podemos afirmar apenas que ele acontece com frequência alta.

É pouco provável que o evento *C* ocorra. Porém, não podemos afirmar que ele não vai ocorrer. Podemos afirmar apenas que ele acontece com frequência baixa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- *E*: Em um sorteio, ocorrer um dia cuja letra inicial seja uma vogal.

$$E = \varnothing$$

O evento *E* é o conjunto vazio. Nesse caso, dizemos que esse evento é **impossível**.

Chamamos **evento** ou **acontecimento**, e geralmente indicamos por uma letra maiúscula, cada subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório. Cada um dos elementos do espaço amostral é denominado **evento elementar**.

Os casos até aqui analisados foram de conjuntos com uma quantidade limitada de elementos, configurando **espaços amostrais finitos**. Contudo, há espaços amostrais com uma infinidade de elementos.

Exemplos

- O espaço amostral do sorteio aleatório de um número natural qualquer:

$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

- O espaço amostral da escolha aleatória de um número real pertencente ao intervalo $I = [0, 1]$.
- O espaço amostral do sorteio aleatório de um número natural par é:

$$\Omega = \{2, 4, 6, 8, ...\}$$

Esses exemplos configuram **espaços amostrais infinitos**.

Espaços amostrais finitos são aqueles que podemos associar seus elementos aos números naturais de 1 até um número *n* fixo. Já os **espaços amostrais infinitos** são aqueles que não são finitos.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Antônio (*A*), Bento (*B*), Carlos (*C*), Lurdes (*L*), Maria (*M*), Neuza (*N*) e Olinda (*O*) estão em um baile. Para a próxima dança, eles decidiram formar os pares de homens e mulheres por meio de um sorteio. Determine o espaço amostral que representa todas as possibilidades de formar um par de homem e mulher para a próxima dança.

Resolução

Para representar todas as opções de pares de homem e mulher para a próxima dança, podemos construir um quadro.

	Lurdes (*L*)	Maria (*M*)	Neuza (*N*)	Olinda (*O*)
Antônio (*A*)	(A, L)	(A, M)	(A, N)	(A, O)
Bento (*B*)	(B, L)	(B, M)	(B, N)	(B, O)
Carlos (*C*)	(C, L)	(C, M)	(C, N)	(C, O)

Portanto, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{(A, L), (A, M), (A, N), (A, O), (B, L), (B, M), (B, N), (B, O), (C, L), (C, M), (C, N), (C, O)\}$$

R2 Uma concessionária oferece um modelo de automóvel no valor de R$ 38 000,00, na cor sólida (branco ou preto) e com 2 portas. Como opcionais, o cliente pode escolher:

- cor metálica (prata) por R$ 2 000,00.
- 4 portas por R$ 4 000,00.

Um automóvel na cor prata com 4 portas, por exemplo, irá custar R$ $\underbrace{44\,000{,}00}_{38\,000 + 2\,000 + 4\,000}$.

Supondo que um cliente escolha aleatoriamente um automóvel, qual é o espaço amostral com todas as possibilidades de escolha do cliente em relação ao preço?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolução

Para representar todas as opções de escolha do cliente, podemos utilizar o seguinte diagrama.

- branco
  - 2 portas → branco, 2 portas → R$ 38 000,00
  - 4 portas → branco, 4 portas → R$ 42 000,00
- preto
  - 2 portas → preto, 2 portas → R$ 38 000,00
  - 4 portas → preto, 4 portas → R$ 42 000,00
- prata
  - 2 portas → prata, 2 portas → R$ 40 000,00
  - 4 portas → prata, 4 portas → R$ 44 000,00

Assim, em relação ao preço, temos 4 possibilidades:

$$\Omega = \{\text{R\$ 38 000,00; R\$ 40 000,00; R\$ 42 000,00; R\$ 44 000,00}\}$$

R3 Em certo jogo de sinuca são utilizadas 16 bolas: uma branca; as numeradas de 1 a 8 com cores lisas; e as numeradas de 9 a 15 listradas.

RONALDO INÁCIO

Considerando uma tacada aleatória com todas as bolas na mesa, em que a bola branca acerte somente uma delas, resolva os itens a seguir.

a) Escreva o espaço amostral Ω que representa as possíveis bolas que a branca pode acertar.

b) Determine os seguintes eventos para a tacada:

- *A*: acertar a bola 11.
- *B*: acertar uma bola de cor lisa.
- *C*: acertar uma bola listrada.
- *D*: acertar uma bola de número ímpar e cor lisa.

Resolução

a) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

b)
- $A = \{11\}$
- $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- $C = \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- $D = \{1, 3, 5, 7\}$

R4 Os alunos da turma de estudos para as Olimpíadas de Matemática, da qual Gabriel faz parte, propuseram um jogo curioso: nele, cada pessoa escolhe, de modo aleatório, um número par maior do que 2. Em seguida, essa pessoa desafia algum dos colegas a escrever esse número como soma de dois números primos.

Descreva o espaço amostral para a escolha dos números e diga se esse espaço é finito ou infinito.

Resolução

Os números a serem escolhidos são os números pares maiores do que 2, ou seja, 4, 6, 8, 10, e assim por diante. Desse modo, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{4, 6, 8, 10, ...\}$$

Portanto, o espaço amostral é infinito, pois não é possível associar seus elementos aos números naturais de 1 até um número *n* fixo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R5 Para desenvolver um jogo de computador capaz de gerar personagens aleatórios por meio de um RNG, conforme apresentado nas páginas **60** e **61**, Guilherme se deparou com a dificuldade de descrever um espaço amostral com as cores possíveis para os personagens. Isso ocorre porque as possibilidades de cores são ilimitadas, quando levamos em consideração todas as tonalidades e combinações possíveis.

Para resolver o problema, Guilherme organizou o programa da seguinte maneira: em primeiro lugar, notando que todas as cores podem ser obtidas por meio de combinações adequadas das três cores primárias (amarelo, vermelho e azul), definiu que as escolhas aleatórias deveriam levar em consideração cada uma dessas três cores. Em seguida, para cada cor primária, ele programou o computador para associar um número real de 0 a 1 indicando a intensidade da tonalidade com que essa cor primária vai influenciar na cor final. Nessa escala, 0 significa que a cor primária não está presente na constituição da cor final, enquanto 1 significa intensidade máxima.

Assim, por exemplo, o trio $(\text{Amarelo} = 0; \text{Vermelho} = 1; \text{Azul} = 0{,}5)$ representa a tonalidade da cor roxa obtida com a combinação de cada parte de vermelho para meia parte da cor azul; a cor preta, por sua vez, seria a obtida com o trio $(\text{Amarelo} = 0; \text{Vermelho} = 0; \text{Azul} = 0)$, e a cor branca, pelo trio $(\text{Amarelo} = 1; \text{Vermelho} = 1; \text{Azul} = 1)$.

Utilizando a notação da teoria de conjuntos, descreva o espaço amostral com que Guilherme vai trabalhar na programação de seu jogo e indique se esse conjunto é finito ou infinito.

Resolução

$$\Omega = \left\{(\text{Amarelo} = a; \text{Vermelho} = b; \text{Azul} = c) \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ com } a, b, c \in [0,1]\right\}$$

Como as componentes são números reais em um intervalo, o espaço amostral é infinito.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 O time de futebol de certa escola disputará um campeonato escolar. Para isso, foram convocados, dentre outros, 4 alunos que jogam na posição de atacante (alunos *A*, *B*, *C* e *D*). Considerando que a dupla de ataque seja formada por meio de um sorteio, determine o espaço amostral das duplas de ataque que podem ser formadas com esses alunos.

$\Omega = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)\}$

2 Jéssica deseja preparar um lanche com pão de forma e mais três ingredientes, que ela irá escolher entre alface, tomate, queijo e carne. O valor calórico das porções de cada ingrediente que ela pode utilizar está indicado no quadro a seguir.

Ingrediente	Valor calórico (em kcal)
Pão de forma (*P*)	130
Alface (*A*)	10
Tomate (*T*)	18
Queijo (*Q*)	55
Carne (*C*)	110

Supondo que Jéssica prepare aleatoriamente um lanche, qual é o espaço amostral que representa todas as possibilidades de escolha em relação:

a) aos ingredientes.

$\Omega = \{(P, A, T, Q), (P, A, T, C), (P, A, Q, C), (P, T, Q, C)\}$

Uma das possibilidades em relação aos ingredientes é (*P*, *A*, *T*, *Q*).

b) ao valor calórico. $\Omega = \{213, 268, 305, 313\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

3 No bolso da calça de um menino estão quatro bolinhas de gude diferenciadas apenas pela cor, sendo que duas delas são verdes (*V*) e duas são azuis (*A*). Considerando que ele vai retirar aleatoriamente do bolso 3 bolinhas sucessivamente, determine:

a) o espaço amostral Ω, considerando a ordem em que elas serão retiradas. Resposta no final do livro.

b) o evento *E* em que todas as bolinhas de gude retiradas são da mesma cor. $E = \varnothing$

4 Em geral, os baralhos atuais possuem 52 cartas, divididas igualmente em 4 naipes: copas, espadas, ouros e paus. Esses naipes se originaram da fusão entre os baralhos espanhóis e franceses, sendo que os nomes vieram dos espanhóis, e os símbolos que os representam, dos franceses.

7. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

CHUCK RAUSNIY/SHUTTERSTOCK

As quatro damas de um baralho. Da esquerda para a direita: espadas, ouros, paus e copas.

Utilizando as iniciais de cada naipe, escreva os eventos considerando a retirada aleatória de duas cartas de um baralho completo.

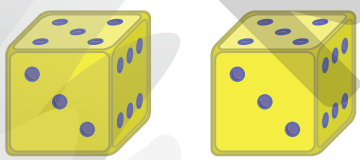
Respostas no final do livro.

a) *A*: as duas cartas serem do mesmo naipe.

b) *B*: pelo menos uma carta ser de ouros.

c) *C*: nenhuma carta ter naipe de copas.

5 Considere o lançamento de dois dados comuns, não viciados.



SERGIO L. FILHO

a) Represente em um quadro o espaço amostral (Ω) dos possíveis resultados obtidos.

Respostas no final do livro.

b) Determine a ocorrência dos seguintes eventos:

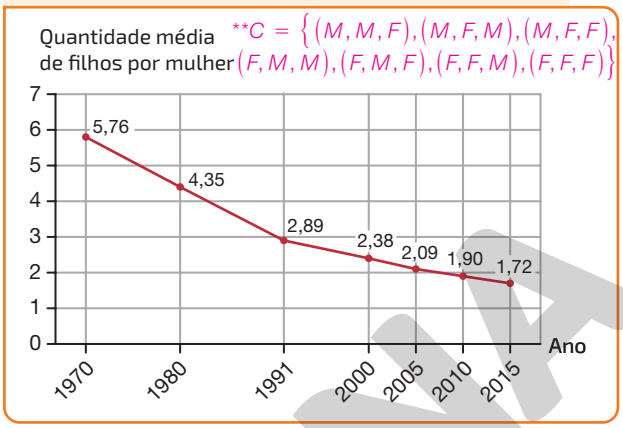
- *A*: duas faces ímpares voltadas para cima.
- *B*: faces iguais voltadas para cima.
- *C*: soma das faces voltadas para baixo igual a 7.
- *D*: soma das faces voltadas para cima maior do que 12.
- *E*: produto das faces voltadas para cima maior do que 16.

A tarefa **7** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

6 A partir de 1970 as mulheres passaram a ter uma quantidade menor de filhos, acarretando a queda da taxa de fecundidade, que é um dos fatores que mais influenciam a taxa de crescimento populacional.

6. a) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

Taxa de fecundidade no Brasil de 1970 a 2015



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <https://cnae.ibge.gov.br/en/component/content/article/95-7a12/7a12-vamos-conhecer-o-brasil/nosso-povo/1472-nupcialidade-e-fecundidade.html?Itemid=6160>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Fonte de pesquisa: <https://brasilemsintese.ibge.gov.br/populacao/taxas-de-fecundidade-total.html>. Acesso em: 12 jun. 2020.

Aproxime ao inteiro mais próximo a quantidade média de filhos que uma mulher tinha em 1991 e, a partir do resultado obtido, resolva as questões.

Em 1991, as mulheres tinham, em média, 3 filhos.

a) Construa um diagrama para representar todas as possibilidades de filhos por mulher, em relação ao sexo masculino (*M*) e feminino (*F*).

b) Escreva os conjuntos que representam os eventos: $A = \{(M, M, M), (F, F, F)\}$

- *A*: todos os filhos terem o mesmo sexo.
- *B*: exatamente 2 filhos do sexo masculino.* $*B = \{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M)\}$
- *C*: pelo menos um filho do sexo feminino.** $**C = \{(M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$

7 Elaborando

Elabore um problema em que alguma pessoa deva escolher aleatoriamente como vai se vestir para uma festa, tendo como opções *p* camisas, *q* calças e *r* sapatos. Em seguida, peça a um colega que resolva o problema elaborado e, depois, verifique se as respostas estão corretas.

8 Observe uma moeda de 1 real.

Face cara (Ca)

Face coroa (Co)

BANCO CENTRAL DO BRASIL

Descreva o espaço amostral do lançamento dessa moeda até que saia a face coroa voltada para cima. Esse espaço amostral é finito ou infinito?

$\Omega = \{(Co), (Ca, Co), (Ca, Ca, Co), (Ca, Ca, Ca, Co), \ldots, (Ca, Ca, Ca, \ldots, Co) \ldots\}$. O espaço amostral é infinito.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

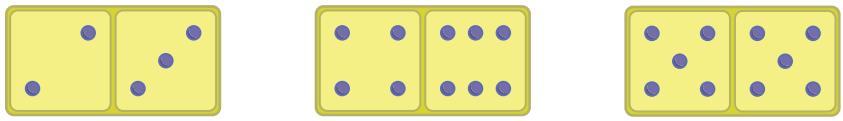
9 Em certa loja, estão à venda camisas polo, camisas de manga curta e de manga longa, cujos preços são R$ 60,00, R$ 70,00 e R$ 90,00, respectivamente.

a) De quantas maneiras diferentes uma pessoa pode comprar duas camisas nessa loja?
6 maneiras

b) Supondo que uma pessoa realize a compra de maneira aleatória, qual é o espaço amostral em relação ao valor pago na compra de duas camisas?
Resposta no final do livro.

10 O dominó é um jogo de 28 peças retangulares, divididas ao meio, combinando os pontos de 0 a 6.

As peças abaixo podem ser representadas, respectivamente, por {2, 3}, {4, 6} e {5, 5}.



SERGIO L. FILHO

Considerando que uma peça seja retirada aleatoriamente de um jogo de dominó e colocada com a face voltada para cima, determine os eventos a seguir. Respostas no final do livro.

a) *A*: peça com a mesma quantidade de pontos em ambos os lados.

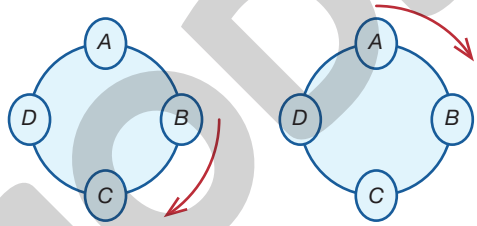
b) *B*: peça cuja soma dos pontos seja 6.

c) *C*: peça em que a diferença dos pontos seja maior do que 6.

d) *D*: peça em que o produto dos pontos seja não negativo.

11 Agnaldo (*A*), Beatriz (*B*), Carolina (*C*) e Dênis (*D*) estão em um parque de diversões e vão entrar em um brinquedo giratório com quatro assentos dispostos em círculo.
Se necessário, represente na lousa possíveis exemplos de posições da permutação circular.

Como o brinquedo tem formato circular, algumas possibilidades de posição são equivalentes umas às outras, de modo que não devem ser contadas em repetição. Por exemplo, a ordenação (B, C, D, A) é equivalente à ordenação (A, B, C, D), pois as posições relativas entre os amigos permanecem as mesmas, conforme ilustra a figura abaixo.



Posição (B, C, D, A) Posição (A, B, C, D)

RONALDO INÁCIO

b) $M = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, D, B), (A, D, C, B)\}$

c) Se necessário, diga aos alunos que no caso (A, C, D, B), por exemplo, Agnaldo está sentado ao lado de Beatriz, já que a disposição dos assentos é circular. Neste caso, a representação gráfica deixa esse fato mais evidente do que a escrita por meio de quádruplas ordenadas.
$N = \{(A, C, B, D), (A, D, B, C)\}$

a) Supondo que a escolha dos assentos seja feita por sorteio, determine o espaço amostral com as posições distintas que essas pessoas podem escolher para se sentar nos assentos sem que haja repetição de posições relativas entre uns e outros.

b) Escreva o conjunto que representa o evento *M*, em que Dênis se senta ao lado de Carolina.

c) Determine o evento *N*, em que Agnaldo não se senta ao lado de Beatriz.

d) Escreva o conjunto que representa o evento *P*, em que Agnaldo não se senta ao lado de Beatriz nem de Carolina. $P = \varnothing$

a) $\Omega = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, B, D), (A, C, D, B), (A, D, B, C), (A, D, C, B)\}$

12 José comprou uma lâmpada nova para seu quarto e está preocupado com o tempo de vida útil dessa lâmpada antes que ela queime.

Para resolver essa tarefa, desconsidere a existência de anos bissextos.

$\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\,095\}$ ou $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in [0, 1\,095]\}$

a) Determine o espaço amostral do tempo de vida útil *t* dessa lâmpada, em dias, sabendo que ela não vai durar mais do que 3 anos.

b) Escreva o conjunto que representa o evento *A*, em que a lâmpada deve durar mais do que 1 ano e menos do que 2 anos.
$A = \{t \in \mathbb{R} \mid 365 < t < 730\}$ ou $A = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in]365, 730[\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Calculando probabilidades

Considerando o sorteio de um número natural de 1 a 10, qual é a probabilidade de esse número ser o 7?

RONALDO INÁCIO

Nesse caso, temos um experimento aleatório cujo espaço amostral é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Estamos considerando nesse experimento o evento simples "o número sorteado ser 7", dado por $A = \{7\}$.

Todos os elementos desse espaço amostral têm a mesma probabilidade de serem sorteados, ou seja, Ω é um **espaço amostral equiprovável**.

Como o 7 aparece uma única vez no espaço amostral, e este possui 10 elementos, então há uma possibilidade em dez de o número 7 ser sorteado.

Assim, a probabilidade de o número 7 ser sorteado é:

$$1 \text{ em } 10 \text{ ou } \frac{1}{10} \text{ ou } \frac{10}{100} = 10\%$$

E qual é a probabilidade de o número sorteado ser menor do que 5?

Nesse caso, temos o mesmo espaço amostral Ω e o evento "o número sorteado ser menor do que 5", dado por $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Assim, há quatro possibilidades em dez de um número menor do que 5 ser sorteado, isto é:

$$4 \text{ em } 10 \text{ ou } \frac{4}{10} \text{ ou } \frac{40}{100} = 40\%$$

Considere um evento A de um espaço amostral Ω finito e equiprovável. A razão entre o número de elementos de A $\left(\text{indicada por } n(A)\right)$ e o número de elementos de Ω $\left(\text{indicada por } n(\Omega)\right)$ é a probabilidade $P(A)$ de o evento A ocorrer.

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Considere A um evento qualquer de certo espaço amostral Ω. Para os conjuntos $\varnothing$, A e Ω, temos:

$$\varnothing \subset A \subset \Omega \Rightarrow n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(\Omega)$$

Dividindo cada membro dessa desigualdade por $n(\Omega) > 0$, obtemos:

$$\frac{\overbrace{n(\varnothing)}^{0}}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

Portanto, a probabilidade de um evento ocorrer é um valor de 0 a 1, ou seja, de 0% a 100%.

Para todo evento A, temos:

$$0 \leq P(A) \leq 1 \text{ ou } 0\% \leq P(A) \leq 100\%$$

- Se A é um evento **impossível**, temos $P(A) = 0$:

$$A = \varnothing \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\overbrace{n(\varnothing)}^{0}}{n(\Omega)} = 0$$

- Se A é um evento **certo**, temos $P(A) = 1$:

$$A = \Omega \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} = 1$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Podemos ainda calcular a probabilidade de um evento não ocorrer. Para isso, considere como espaço amostral os números naturais de 1 a 10 e o evento A, da ocorrência de um número maior do que 7 no sorteio de um desses números.

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $A = \{8, 9, 10\}$

A probabilidade de o evento A não ocorrer é indicada por $P(\overline{A})$.

Seja $\overline{A}$ o conjunto formado pelos elementos de Ω que não pertencem a A, ou seja, $\overline{A} = \Omega - A$. Dizemos que $\overline{A}$ é **complementar** de A em relação a Ω.

$$\overline{A} = \Omega - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

Como $\overline{A} = \Omega - A$ e $\overline{A} \cap A = \varnothing$, temos:

$$n(\overline{A}) = n(\Omega) - n(A)$$

Ao dividirmos ambos os membros dessa igualdade por $n(\Omega) > 0$, obtemos:

A probabilidade de um evento A não ocorrer é igual a 1 menos a probabilidade de A ocorrer, ou seja: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

$$\frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega) - n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{n(\overline{A})}{n(\Omega)} = \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} - \frac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Portanto, a probabilidade de não ocorrer um número maior do que 7 é:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{10} \Rightarrow P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$$

Vamos considerar, agora, um jogo no qual são depositadas as seguintes bolinhas numeradas em uma urna não transparente.

RONALDO INÁCIO

Nesse caso, ao ser selecionada aleatoriamente uma bolinha, a probabilidade de que ela tenha o número 1 não é a mesma de ter o número 4, já que na urna há mais bolinhas com esse número do que com o 1. Por isso, dizemos que esse espaço amostral não é equiprovável.

Desse modo, o espaço amostral pode ser escrito como $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, mas, como nem todos os seus elementos têm a mesma probabilidade de serem sorteados, trata-se de um **espaço amostral não equiprovável**.

Considerando A como sendo o evento de sair o número 1 na escolha aleatória de uma bolinha e B de sair o número 3 na escolha aleatória de uma bolinha, podemos verificar o seguinte.

- Como há apenas uma bolinha entre 10 com o número 1, a probabilidade de que seja retirada essa bolinha é:

$$1 \text{ em } 10 \text{ ou } \frac{1}{10} \text{ ou } \frac{10}{100} = 10\%$$

- Contudo, como há três bolinhas com o número 3, a probabilidade de que seja retirada uma delas é:

$$3 \text{ em } 10 \text{ ou } \frac{3}{10} \text{ ou } \frac{30}{100} = 30\%$$

Observe, agora, que sendo C o evento de sair o número 2 ou o número 4, a quantidade de eventos favoráveis é 6 em 10, já que existem $2 + 4 = 6$ possibilidades de a bolinha sorteada ser 2 ou 4 (pois há duas bolinhas com o número 2 e quatro bolinhas com o número 4).

No cálculo da probabilidade $P(A)$ de um evento A ocorrer em um espaço amostral Ω finito, mas não equiprovável, a divisão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis deve levar em consideração a proporção em que os elementos de cada conjunto ocorrem, adicionando as repetições.

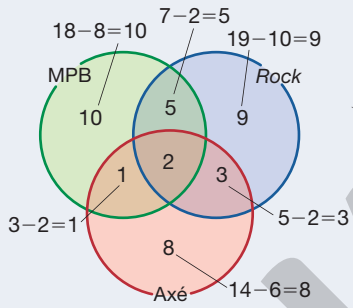
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R6 Marcela investigou a preferência de seus colegas de classe em relação aos gêneros musicais MPB (Música Popular Brasileira), *Rock* e Axé. Dos 38 entrevistados, 18 gostam de MPB; 19 gostam de *Rock*; 14 gostam de Axé; 7 gostam de MPB e *Rock*; 5 gostam de *Rock* e Axé; 3 gostam de MPB e Axé e 2 gostam dos três gêneros.

Ao sortear um desses entrevistados, qual é a probabilidade de que ele goste somente de Axé?

Resolução Se necessário, construa o diagrama de Venn na lousa, junto com os alunos.

Inicialmente, construímos um diagrama de Venn, como indicado ao lado.



RONALDO INÁCIO

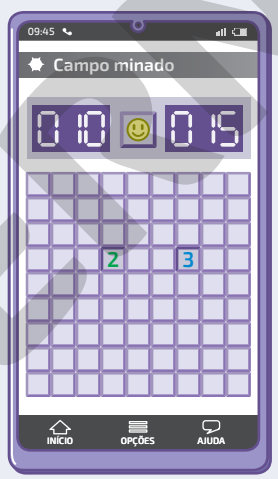
Seja A o evento "gostar somente de Axé", então $n(A) = 8$. Assim, a probabilidade de o entrevistado gostar somente de Axé é:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{38} = \frac{4}{19} \simeq 21{,}05\%$$

R7 No jogo Campo minado o objetivo é descobrir onde estão as 10 minas escondidas nos 81 quadradinhos, sem clicar nessas minas. Um jogador clicou em dois quadradinhos em que não havia minas: no 1º apareceu o número 3, indicando que há 3 bombas nos 8 quadradinhos que o cercam; no 2º apareceu o 2, indicando que há duas bombas nos 8 quadradinhos que o cercam, conforme a figura.

Qual das jogadas abaixo é a mais indicada para o próximo clique? Justifique sua resposta.

- Jogada **A**: clicar em um dos 8 quadradinhos que cercam o número 3.
- Jogada **B**: clicar em um dos 8 quadradinhos que cercam o número 2.
- Jogada **C**: clicar em um dos quadradinhos restantes, não indicados nas jogadas **A** ou **B**.



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

campo minado

Resolução

Calculamos a probabilidade de clicar em uma mina para cada jogada.

- Jogada **A**

  Há 3 minas escondidas em um total de 8 quadradinhos. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina nos quadradinhos que cercam o número 3 é:

$$P(A) = \frac{3}{8} = 37{,}5\%$$

- Jogada **B**

  Há 2 minas escondidas em um total de 8 quadradinhos. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina nos quadradinhos que cercam o número 2 é:

$$P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 25\%$$

- Jogada **C**

  Restam 5 minas escondidas nos 63 quadradinhos não incluídos nas jogadas **A** ou **B**. Logo, a probabilidade de clicar em uma mina em um deles é:

$$P(C) = \frac{5}{63} \simeq 7{,}9\%$$

Portanto, como $P(C) < P(B) < P(A)$, a jogada mais indicada é a **C**, pois nela há menor probabilidade de se clicar em uma mina.

Note que o evento "clicar em uma mina" é o mesmo para as 3 jogadas, porém o espaço amostral é diferente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

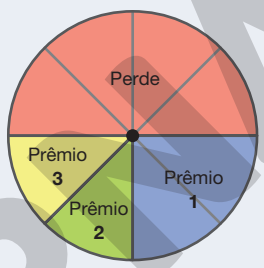
R8 Joyce foi selecionada para participar de um programa de televisão no qual ela tem a possibilidade de ganhar os prêmios **1**, **2** e **3**, mas também corre o risco de não ganhar nada. Para isso, ela vai girar uma roleta honesta igual à da imagem ao lado, na qual os prêmios estão indicados nos setores circulares correspondentes.

Qual é a probabilidade de que Joyce ganhe o prêmio **1** ou o prêmio **2**?

Resolução

O espaço amostral do sorteio é $\Omega = \{\text{Perde, Prêmio 1, Prêmio 2, Prêmio 3}\}$. No entanto, tal espaço não é equiprovável, já que os setores circulares correspondentes aos prêmios **2** e **3** são menores do que o correspondente ao setor em que Joyce não ganha nada.

Dividindo o círculo de modo conveniente em setores de mesma área, porém, conseguimos associar as áreas de interesse a fatias equiprováveis do círculo.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

A área referente ao prêmio **1** abrange dois setores circulares, e a referente ao prêmio **2** abrange um. Assim, temos 3 setores de interesse em um total de 8 setores equiprováveis. Assim, a possibilidade de que Joyce ganhe o prêmio **1** ou o prêmio **2** é 3 em 8, ou $\frac{3}{8}$, ou, ainda, 37,5%.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

13 Na lista de chamada de uma turma, os 30 alunos são numerados de 1 a 30. Em certo dia, quando faltaram os alunos de números 11 e 26, o professor sorteou, dentre os presentes, um aluno para resolver uma tarefa na lousa. Qual é a probabilidade de o número do aluno que vai à lousa ser:

a) par? $\frac{1}{2}$ ou 50%

b) menor do que 9? $\frac{2}{7}$ ou aproximadamente 28,57%

c) múltiplo de 4? $\frac{1}{4}$ ou 25%

d) primo? $\frac{9}{28}$ ou aproximadamente 32,14%

e) maior do que 12 e menor do que 25? $\frac{3}{7}$ ou aproximadamente 42,86%

14 Considere todos os números de 3 dígitos distintos formados a partir dos algarismos 6, 7 e 8. Se escolhermos um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de ele ser: $\frac{1}{2}$ ou 50%

a) ímpar. $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

b) par. $\frac{2}{3}$ ou $66,\overline{6}\%$

c) múltiplo de 3. 1 ou 100%

d) maior do que 770.

e) múltiplo de 5. 0 ou 0%

15 Em uma central de atendimento, 100 pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20? alternativa **c**

a) $\frac{1}{100}$ b) $\frac{19}{100}$ c) $\frac{20}{100}$ d) $\frac{21}{100}$ e) $\frac{80}{100}$

16 Ao realizar uma prova objetiva em que cada questão possuía 5 alternativas de respostas, sendo apenas uma correta, um aluno decidiu assinalar aleatoriamente a resposta da última questão por falta de tempo. Qual é a probabilidade de esse aluno acertar a questão? E de errar? $\frac{1}{5}$ ou 20%; $\frac{4}{5}$ ou 80%

17 O RPG trata-se de um jogo em que seus participantes interpretam personagens e desenvolvem uma narrativa. Nesse tipo de jogo, costuma-se utilizar dados para definir o sucesso ou o fracasso dos jogadores, já que existem eventos aleatórios. Veja a seguir dois dados que geralmente são usados no RPG: um de 10 faces (numeradas de 1 a 10) e outro de 5 faces (numeradas de 1 a 5).

Qual é a probabilidade de escolher ao acaso uma face de cada um desses dados, de modo que a soma dos números das faces escolhidas determine um número ímpar? alternativa **c**

RONALDO INÁCIO

Considere que todas as faces de um mesmo dado têm a mesma probabilidade de serem sorteadas (eventos equiprováveis).

a) $\frac{3}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{5}$ e) $\frac{3}{4}$

MODERNA

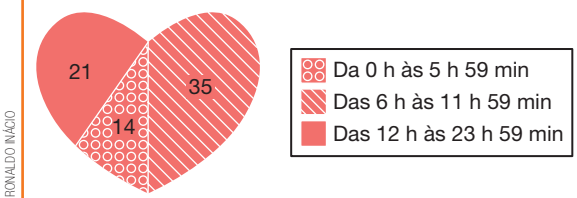
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

18 Momentos antes de acordar, nosso organismo envia cortisol e adrenalina para circular pelo corpo. Esses hormônios são responsáveis por nos deixar mais dispostos, e no sistema cardiovascular aumentam a pressão arterial e aceleram a frequência cardíaca. Contudo, o cortisol e a adrenalina favorecem a formação de placas de gordura nas artérias, o que pode provocar um infarto durante a manhã.

Certo grupo de médicos cardiovasculares realizou uma pesquisa com os pacientes que deram entrada no hospital em março de 2021, obtendo como resultado os dados do gráfico a seguir.

As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Quantidade de pacientes que sofreram infarto por faixa horária em março de 2021



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: Administração do hospital.

a) Na faixa horária da 6 h às 11 h e 59 min, pois é nessa faixa horária que ocorre a maior quantidade de infartos.

a) Em qual faixa horária esse hospital deve colocar a maior quantidade de médicos de plantão? Por quê?

b) Considerando que a proporção de pacientes com infartos se mantenha, qual é a probabilidade de uma pessoa infartada dar entrada nesse hospital da:

- 0 h às 5 h 59 min? $\frac{1}{5}$ ou 20%
- 0 h às 11 h 59 min? $\frac{7}{10}$ ou 70%

19 Em um congresso compareceram oftalmologistas (profissionais especializados no tratamento dos olhos), ortopedistas (médicos especialistas no tratamento do sistema locomotor) e odontologistas (especialistas que se dedicam ao tratamento dentário), conforme apresentado a seguir.

	Homem	Mulher	Total
Oftalmologistas	17	14	31
Ortopedistas	12	18	30
Odontologistas	13	11	24
Total	42	43	85

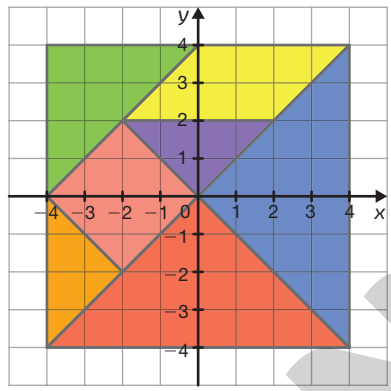
Ao final do congresso, houve o sorteio de um prêmio entre os participantes. Calcule a probabilidade de o profissional sorteado ser:

a) um homem. $\frac{42}{85}$ ou aproximadamente 49,41%

b) um ortopedista. $\frac{6}{17}$ ou aproximadamente 35,29%

c) uma mulher oftalmologista. $\frac{14}{85}$ ou aproximadamente 16,47%

20 O tangram é um quebra-cabeça chinês de origem milenar, composto por sete peças cujas formas lembram figuras geométricas planas que, organizadas, podem formar cerca de 1 700 silhuetas. Os chineses o chamam de "Tábua de sabedoria" ou "Tábua das sete sabedorias". Considere o seguinte tangram em um plano cartesiano.



RONALDO INÁCIO

Silhueta: desenho que representa um objeto ou uma pessoa de acordo com sua sombra.

As probabilidades solicitadas nos itens **a**, **b** e **c** são proporcionais à área das regiões.

a) Qual é a probabilidade de, ao marcarmos aleatoriamente um ponto pertencente ao tangram, esse ponto:

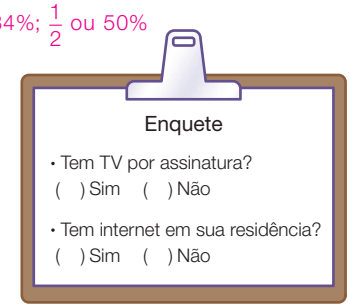
- pertencer à região alaranjada? $\frac{1}{4}$ ou 25%
- pertencer à região roxa? $\frac{1}{16}$ ou 6,25%
- não pertencer à região azul? $\frac{3}{4}$ ou 75%

b) Se marcarmos um ponto pertencente ao tangram com abscissa −3, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região vermelha? E à região verde? $\frac{1}{8}$ ou 12,5%; $\frac{3}{8}$ ou 37,5%

c) Ao marcarmos um ponto pertencente ao tangram com ordenada positiva, qual é a probabilidade de esse ponto pertencer à região amarela? $\frac{1}{4}$ ou 25%

21 Em uma enquete realizada com 50 moradores de um bairro, 42 afirmaram que têm internet em casa, 28 que têm TV por assinatura e 5 que não têm internet nem TV por assinatura. Ao sortear aleatoriamente um dos 50 moradores desse bairro, qual é a probabilidade de ele ter somente internet? E de ter internet e TV por assinatura?

$\frac{17}{50}$ ou 34%; $\frac{1}{2}$ ou 50%



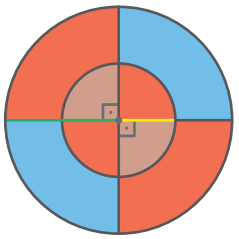
RONALDO INÁCIO

22 Selecionando aleatoriamente dois números distintos do intervalo $1 \leqslant n < 10$, com $n \in \mathbb{N}$, qual é a probabilidade de que a soma desses números seja maior do que seu produto? $\frac{2}{9}$ ou 22,2%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

23 Mariana está jogando dardos em um alvo como o da imagem ao lado.



RONALDO INÁCIO

Suponha que a ponta do dardo tenha dimensões desprezíveis, isto é, que ela seja considerada um ponto, não podendo acertar duas cores diferentes ao mesmo tempo.

Sabendo que a probabilidade de acertar um dardo em determinada região é proporcional a sua área e considerando um único arremesso aleatório que acerte em alguma região do alvo, qual é a probabilidade de que o dardo acerte em uma região:

a) vermelha? $\frac{1}{2}$ ou 50% b) marrom? $\frac{1}{8}$ ou 12,5% c) azul? $\frac{3}{8}$ ou 37,5%

24 Amanda e Pedro estão participando de um jogo de dados com regras incomuns. No jogo, utilizam-se dois dados de seis faces honestos, mas um deles tem as faces numeradas de 1 a 6, enquanto o outro, de 3 a 8. Em cada rodada, os dois dados são arremessados simultaneamente, e a pontuação obtida é a soma das faces voltadas para cima. Nessas condições, responda às questões.

a) Para vencer Pedro em uma rodada, Amanda precisa obter soma maior do que 9. Qual é a probabilidade de isso acontecer? $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ ou $41,\overline{6}\%$

b) Na rodada seguinte, Pedro precisa obter soma 4 ou superior para vencer. Qual é a probabilidade de que isso aconteça? 1 ou 100% (evento certo)

25 Elaborando

Elabore um problema de probabilidade envolvendo o jogo de bingo, no qual os jogadores devem preencher uma cartela com 24 números (cinco deles de 1 a 15, cinco de 16 a 30, quatro de 31 a 45, cinco de 46 a 60 e os cinco restantes de 61 a 75) com base no sorteio aleatório de bolinhas numeradas de 1 a 75. Depois, entregue o problema que você elaborou para um colega resolver e verifiquem se as respostas estão corretas.

nº: 6 Torneio

BINGO

6	17	40	51	72
8	24	44	56	73
12	28	★	50	61
4	19	38	48	74
9	22	36	47	66

RONALDO INÁCIO

25. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

A tarefa **25** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

26 Considere todos os números de 4 dígitos distintos que podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5 e 9. Qual é a probabilidade de que, em uma escolha ao acaso, seja tomado um número maior do que 4 593? $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ ou $58,\overline{3}\%$

27 (Enem, 2007) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. O quadro abaixo apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

pacientes	problemas respiratórios causados pelas queimadas	problemas respiratórios resultantes de outras causas	outras doenças	total
idosos	50	150	60	260
crianças	150	210	90	450

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a:

alternativa **e**

a) 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.

b) 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.

c) 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.

d) 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.

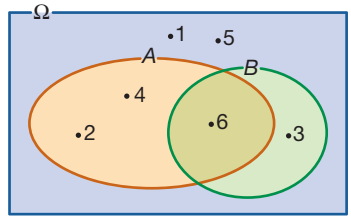
e) 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Probabilidade da união de dois eventos

Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, como podemos calcular a probabilidade de ocorrer ao menos um desses eventos?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar o lançamento de um dado comum e os eventos A, "o número obtido ser múltiplo de 2", e B, "o número obtido ser múltiplo de 3". Nesse caso:



RONALDO INÁCIO

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(\Omega) = 6$
- $A = \{2, 4, 6\}$; $n(A) = 3$
- $B = \{3, 6\}$; $n(B) = 2$

O diagrama nos auxilia a verificar que:

- $A \cap B = \{6\} \rightarrow$ o elemento 6 satisfaz simultaneamente os eventos A e B.
- $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\} \rightarrow$ os elementos 2, 3, 4 e 6 satisfazem o evento A ou B.

Calculando $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ e $P(A \cup B)$, temos:

- $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A) = \dfrac{3}{6}$
- $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(B) = \dfrac{2}{6}$
- $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$
- $P(A \cup B) = \dfrac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} \Rightarrow P(A \cup B) = \dfrac{4}{6}$

Portanto, em um lançamento, a probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B é de $\frac{4}{6}$ ou $66,\overline{6}\%$.

A partir desses cálculos, podemos verificar que:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$$

Para demonstrar essa igualdade, considere os eventos A e B de um espaço amostral Ω finito.

Da teoria de conjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Ao dividirmos ambos os membros dessa igualdade por $n(\Omega) > 0$, obtemos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{n(\Omega)} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} + \frac{n(B)}{n(\Omega)} - \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A probabilidade de ocorrer o evento A ou o evento B, ou seja, a união dos dois eventos, é igual à probabilidade de ocorrer A mais a probabilidade de ocorrer B menos a probabilidade da interseção de A com B.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Quando $A \cap B = \varnothing$, ou seja, A e B são conjuntos disjuntos, dizemos que os eventos são **mutuamente exclusivos**, isto é, a ocorrência de um deles exclui a possibilidade da ocorrência do outro.

Nesses casos, temos $n(A \cap B) = 0$ e $P(A \cap B) = 0$, logo $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

No contexto

Considerando as informações apresentadas na página **61** sobre o jogo Tetris, qual a probabilidade de um jogador receber um tetraminó no formato de quadrado ou barra? Esses eventos são mutuamente exclusivos? Justifique sua resposta. *

* $\frac{2}{7}$ ou aproximadamente 28,6%. Sim, esses eventos são mutuamente exclusivos, pois receber um tetraminó no formato de um quadrado exclui a possibilidade de receber um no formato de barra e vice-versa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R9 Em uma pesquisa realizada com 400 jovens de 15 a 20 anos, verificou-se que 200 estudam e 180 trabalham, sendo que, entre esses jovens, 130 estudam e trabalham. Qual é a probabilidade de que um dos jovens pesquisados, escolhido aleatoriamente, estude ou trabalhe?

Resolução

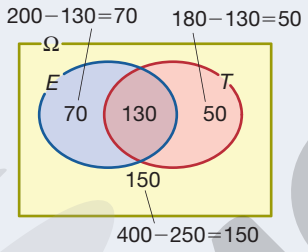
Sejam E e T os eventos "estude" e "trabalhe", respectivamente.
Temos:

- $P(E) = \frac{200}{400}$
- $P(T) = \frac{180}{400}$
- $P(E \cap T) = \frac{130}{400}$

A probabilidade de que um jovem escolhido aleatoriamente estude ou trabalhe é dada por:

$$P(E \cup T) = P(E) + P(T) - P(E \cap T) =$$
$$= \frac{200}{400} + \frac{180}{400} - \frac{130}{400} = \frac{250}{400} =$$
$$= \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$$

Podemos resolver esta situação de outra maneira, representando o total de jovens que estudam e trabalham no diagrama abaixo.



RONALDO RÁDIO

$$P(E \cup T) = \frac{n(E \cup T)}{n(\Omega)} = \frac{70 + 130 + 50}{400} =$$
$$= \frac{50}{400} = \frac{5}{8} = 0{,}625 = 62{,}5\%$$

R10 Nos jogos de xadrez entre os amigos Evandro e Victor, o primeiro vence, em média, 3 a cada 5 jogos, e 1 em cada 10 jogos termina em empate. Determine, em média, a probabilidade de que em uma partida Victor seja o vencedor.

Resolução

Sejam E o evento "Evandro ser o vencedor da partida" e V o evento "Victor ser o vencedor da partida".

Obviamente, o evento $E \cap V = \varnothing$, já que em um jogo de xadrez não há como duas pessoas serem simultaneamente vitoriosas. Assim, $P(E \cap V) = 0$.

Com essas definições, $E \cup V$ é o evento "Evandro ou Victor é o vencedor da partida". Assim, considerando que $\frac{1}{10}$ das partidas termina em empate e que apenas uma pessoa é vencedora do jogo, temos:

$$P(E \cup V) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

Dessa maneira, considerando a informação do enunciado de que $P(E) = \frac{3}{5}$, obtemos a seguinte relação:

$$P(E \cup V) = P(E) + P(V) - P(E \cap V) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{9}{10} = \frac{3}{5} + P(V) - 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(V) = \frac{9}{10} - \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

Portanto, a probabilidade de que Victor seja o vencedor em uma dada partida é 3 em 10, ou $\frac{3}{10} = 30\%$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

28 Os baralhos comuns com 52 cartas são divididos em quatro naipes distintos – copas, espadas, ouros e paus. Cada naipe possui 13 cartas, sendo que 9 delas são numeradas de 2 a 10. A carta que representa o 1 é aquela que contém a letra A, chamada Ás, palavra originária do latim que significa "uma unidade". As outras três cartas – Valete, Dama e Rei, também conhecidos como figuras – são representadas pelas iniciais das palavras em inglês: J, de *jack* (valete), Q de *queen* (rainha) e K de *king* (rei). Ao se retirar uma carta aleatoriamente de um desses baralhos, qual é a probabilidade de essa carta ser: Respostas no final do livro.

a) um rei de paus?

b) uma carta com o número 8?

c) um valete ou uma carta de ouros?

d) uma dama ou uma carta com o número 3?

e) uma carta de copas, que não seja figura?

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

29 Um aluno, após concluir o Ensino Médio, prestou vestibular em duas universidades, uma pública e uma particular. A probabilidade de esse aluno ser aprovado no vestibular da universidade pública é 15%. Na universidade particular é de 23%. Já em ambas, é 3,45%. Qual é a probabilidade de esse aluno:

a) ser aprovado em pelo menos uma das universidades? 27,65%

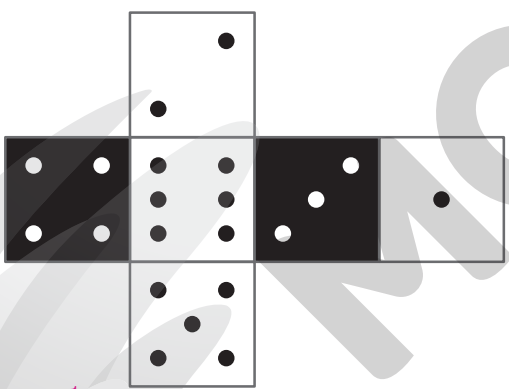
b) ser aprovado em apenas uma das universidades? 31,1%

c) não ser aprovado em nenhuma das universidades? 72,35%

30 Em um jogo, que é decidido com apenas um lançamento do dado representado na planificação, quatro participantes vencem nos casos descritos a seguir.

- Luana: face preta ou número menor do que 4.
- Marcos: face branca ou número primo.
- Natália: face preta ou número 1.
- Otávio: face branca ou número menor do que 3.

Considere que no lançamento do dado a probabilidade de obtenção de qualquer face seja a mesma (eventos equiprováveis).



SERGIO L. FILHO

a) Qual dos participantes tem a menor probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?

b) Se em cada caso o termo **ou** for substituído por **e**, qual dos amigos terá a maior probabilidade de vencer? Qual é essa probabilidade?

30. a) Natália; $\frac{1}{2}$ ou 50%

Marcos e Otávio; $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

31 Dos 120 alunos matriculados em certa academia, 62 praticam musculação, 48 participam das aulas de ginástica aeróbica e 20 praticam as duas modalidades de exercício físico. Ao ser sorteado um brinde entre os alunos dessa academia, qual é a probabilidade de esse aluno praticar musculação ou ginástica aeróbica?

$\frac{3}{4}$ ou 75%

32 Para a retirada da primeira Carteira Nacional de Habilitação (CNH), os candidatos devem ser considerados aptos nos exames médicos, psicológicos, de legislação de trânsito e de direção. A primeira CNH pode ser solicitada, por exemplo, nas categorias **A**, para condução de motocicletas de duas ou três rodas, e **B**, para condução de veículos que não contenham mais de 8 lugares (excluído o do motorista) e que não ultrapassem 3,5 t.

Em certo município, em uma semana, dos 120 candidatos que realizaram os exames médicos e psicológicos, 112 foram aprovados no exame médico, 104 foram considerados aptos no exame psicológico e apenas 6 não foram aprovados em nenhum desses exames. Qual é a probabilidade de, ao se escolher ao acaso uma das 120 pessoas, ela ter sido aprovada:

a) no exame médico ou no psicológico? $\frac{19}{20}$ ou 95%

b) em ambos os exames? $\frac{17}{20}$ ou 85%

c) apenas no exame psicológico? $\frac{1}{60}$ ou $1,\overline{6}\%$

33 Certa professora de Matemática propôs 20 problemas para que os alunos resolvessem em casa. O aluno **A** resolveu 17, e o aluno **B**, 14 desses problemas. Sabendo que é de 95% a probabilidade de, ao ser sorteado um dos problemas, ele ter sido resolvido por um desses alunos, calcule a probabilidade de ser sorteado um problema que foi resolvido por ambos os alunos. 60%

34 Escolhendo aleatoriamente um número natural de 1 a 100, qual é a probabilidade de que ele seja par, mas não seja múltiplo de 4? $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ou 25%

35 Gustavo tem uma coleção de filmes com 50 títulos distintos. Nela, 15 filmes têm o ator **A** no elenco, dos quais 10 foram dirigidos pelo cineasta **B**. Sabendo que 25 filmes foram estrelados pelo ator **A** ou dirigidos pelo cineasta **B** (podendo, inclusive, terem sido estrelados por **A** e dirigidos por **B** em simultaneidade), qual é a probabilidade de que, escolhendo ao acaso um título da coleção, o filme tenha sido dirigido pelo cineasta **B**? $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ ou 40%

36 Segundo o noticiário, a probabilidade de que chova em algum momento durante o dia do aniversário de Camila é de 79%, e a probabilidade de que em algum momento faça sol nesse mesmo dia é de 84%. Dessa maneira, qual é a probabilidade de que, no dia do aniversário de Camila, aconteça de chover em um período e fazer sol em outro? 63%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6 Probabilidade condicional

BNCC
- EM13MAT312
- CE2CNT

Teste do pezinho: um primeiro passo para o futuro dos recém-nascidos

Os glóbulos vermelhos (ou hemácias) são um dos tipos de células que compõem o sangue. Eles são elásticos e arredondados, não apresentando dificuldade em passar pelos vasos sanguíneos. Dentro dessas células, há um pigmento chamado hemoglobina **A**, que dá a coloração vermelha ao sangue e é responsável pelo transporte de oxigênio do pulmão aos tecidos e órgãos.

Existem outras variações genéticas da hemoglobina, das quais uma delas é a hemoglobina **S**. Esta, por sua vez, não exerce a função de oxigenar o corpo de maneira satisfatória, logo as pessoas que a possuem podem ter uma anemia que não se corrige com alimentação ou ferro. Essa doença genética, conhecida por **anemia falciforme**, causa deformação na membrana dos glóbulos vermelhos, deixando-os com o formato de foice. Com isso, perdem mobilidade e flexibilidade, o que dificulta o transporte de oxigênio aos tecidos e órgãos.

Os sinais e sintomas associados à anemia falciforme são, dentre outros, dores em ossos, músculos e juntas, palidez, cansaço fácil, olhos amarelados, febre alta, úlceras nas pernas e mais tendência a infecções. O exame laboratorial específico que identifica a anemia falciforme é a eletroforese de hemoglobina, o qual é realizado na triagem de recém-nascidos, conhecido como **teste do pezinho**, ou quando houver a necessidade de identificar traços da hemoglobina **S**.

Existem tratamentos para a anemia falciforme que não são específicos, mas que proporcionam ao paciente uma vida com qualidade, conforto e segurança, desde que detectada precocemente. Atualmente, são realizados transplantes de medula óssea como opção de tratamento e possível cura da doença, mas, para ser realizado, são necessários alguns requisitos, dentre eles o de encontrar um doador que seja compatível.

Na triagem neonatal, o exame gratuito conhecido como teste do pezinho é realizado em recém-nascidos e pode detectar diversas doenças, entre elas a anemia falciforme. O objetivo da realização do teste no tempo correto é diagnosticar os bebês antes que os sintomas apareçam.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

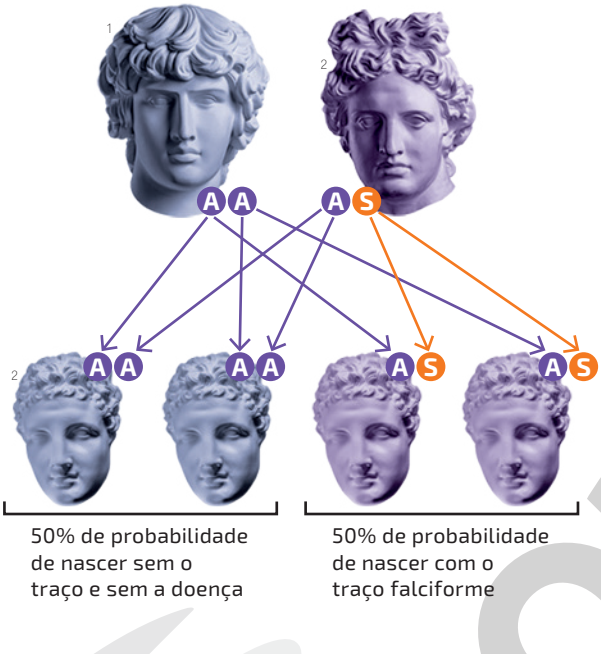
A maioria das pessoas recebe dos seus pais o gene para hemoglobina **A**. Como uma parte vem da mãe e a outra do pai, dizemos que seu genótipo é **AA**. As pessoas com anemia falciforme recebem de seus pais o gene para hemoglobina **S**, portanto possuem genótipo **SS**. Quando uma pessoa herda de um dos pais o gene para hemoglobina **A** e do outro o gene para hemoglobina **S**, seu genótipo é **AS**, e dizemos que ela possui o **traço falciforme**, porém não desenvolverá a doença, conforme os esquemas a seguir.

Anemia: estado em que a quantidade de hemácias se encontra abaixo do normal, gerando debilidade, fraqueza, abatimento.

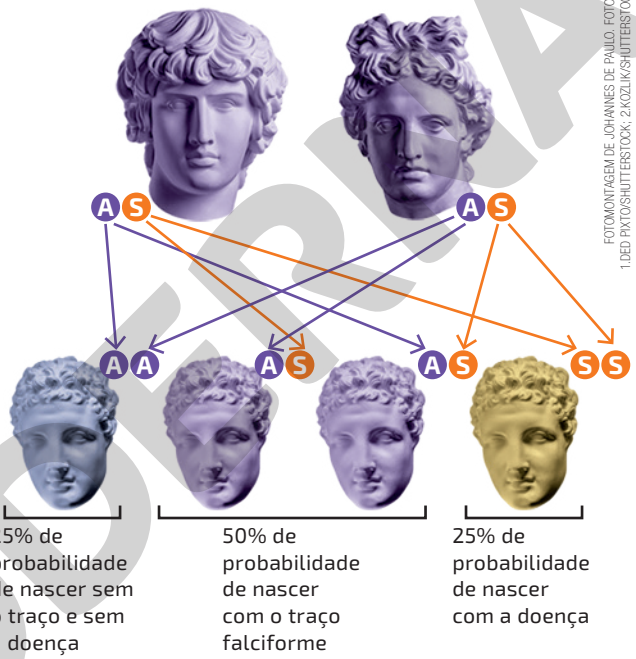
Genótipo: um gene ou grupo de genes de um indivíduo.

Anemia falciforme

No caso de um casal em que um deles possui o traço falciforme (AS) e o outro não possui esse traço nem a doença (AA), temos 50% de probabilidade de um filho desse casal nascer com o traço falciforme e 50% de probabilidade de nascer sem o traço e sem a doença.



Já no caso de um casal em que ambos possuem o traço falciforme (AS), temos 25% de probabilidade de nascer um filho desse casal sem o traço e sem a doença, 50% de probabilidade de nascer com o traço falciforme e 25% de probabilidade de nascer com a doença.



FOTOMONTAGEM DE JOHANNES DE PAULO. FOTOS: 1.DED PIXTO/SHUTTERSTOCK; 2.KOZLIK/SHUTTERSTOCK

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A É possível um casal sem anemia falciforme ter um filho com anemia falciforme?

B Um casal teve dois filhos, um com anemia falciforme e outro com o traço da doença. Como pode ser o genótipo dos pais? AS×SS ou AS×AS

A) Sim, pois o casal pode possuir o traço falciforme sem desenvolver a doença, conforme apresentado no segundo esquema.

Ser consciente

> Qual a importância do teste do pezinho? Você fez esse teste quando nasceu? Converse com seus pais ou responsáveis a respeito. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que a importância é identificar a doença o quanto antes, para dar início ao tratamento, garantindo uma vida saudável mesmo para os portadores.

A Genética é o campo da Biologia que estuda os genes, a hereditariedade e como os indivíduos transmitem características biológicas de geração para geração, como a anemia falciforme. Uma maneira de calcular as probabilidades da transmissão ou não dessas características é representar todas as possibilidades de compor o grupo de genes por meio de um esquema ou árvore de possibilidades, semelhante ao apresentado.

Situações envolvendo **probabilidade condicional**, ou seja, a probabilidade de ocorrer um evento, sabendo que outro já ocorreu, como a probabilidade de um indivíduo portar ou transmitir certas características biológicas sabendo se os pais ou avós já possuem tal característica, é assunto das próximas páginas.

Fonte de pesquisa: NELSON, David L.; COX, Michael M. *Princípios da bioquímica de Lehninger*. Trad. Fabiana Horn. Revisão técnica Carla Dalmaz e Sandra Estrazulas Farias. 5. ed. Porto Alegre: Artmed, 2011. Disponível em: <https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/doenca_falciforme_deve_saber_sobre_heranca.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2020.

FOTOMONTAGEM DE MAURÍCIO PLANEL. FOTOS: 1.MESA STUDIOS/SHUTTERSTOCK; 2.STUDIO DMM PHOTOGRAPHY, DESIGNS & ART/SHUTTERSTOCK; 3.ST. VALENTINE PRODUCTION/SHUTTERSTOCK; 4.ORANGE DEER STUDIO/SHUTTERSTOCK; 5.MIKHAIL RULKOV/SHUTTERSTOCK; 6.ANNA-MARI WEST/SHUTTERSTOCK; 7.RAWPIXEL/SHUTTERSTOCK; 8.VCHAL/SHUTTERSTOCK; 9.NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK; 10.ANNA-MARI WEST/SHUTTERSTOCK; 11.VASILIK IRYNA/SHUTTERSTOCK

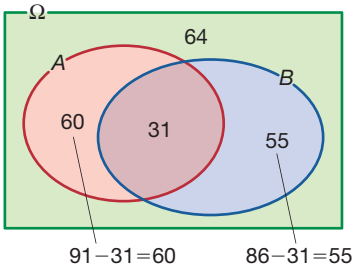
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PROVA

Estudando probabilidade condicional

Se necessário, construa o diagrama de Venn na lousa, junto com os alunos.

Em uma pesquisa foram entrevistados 210 alunos. Nela, constatou-se que 91 praticam esportes coletivos (*A*), 86 praticam esportes individuais (*B*), 31 praticam os dois tipos de esporte e 64 não praticam esportes. Veja essas informações organizadas no diagrama de Venn apresentado ao lado.



RONALDO INÁCIO

Agora, vamos analisar três situações.

- Sorteando um desses alunos, a probabilidade de ele praticar os dois tipos de esporte é:

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{31}{210}$$

Nessa situação, o espaço amostral é Ω, ou seja, todos os alunos entrevistados.

- Sorteando um aluno que pratica esporte coletivo (*A*), a probabilidade de ele praticar também esporte individual (*B*) é:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{31}{91}$$

Note que, nessa situação, o espaço amostral é *A*, pois sorteamos um aluno dentre aqueles que praticam esportes coletivos (*A*), ou seja, os casos possíveis são os alunos que praticam esportes coletivos.

Denominamos a razão $\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$ de **probabilidade condicional de *B* em relação a *A***, ou seja, a probabilidade de *B* ocorrer sabendo que *A* ocorreu, a qual indicamos por $P(B \mid A)$.

- Sorteando um aluno que pratica esporte individual (*B*), a probabilidade de ele praticar também esporte coletivo (*A*) é:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{31}{86}$$

Nessa situação, o espaço amostral é *B*, pois sorteamos um aluno dentre aqueles que praticam esportes individuais (*B*), ou seja, os casos possíveis são os alunos que praticam esportes individuais.

Denominamos a razão $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ de **probabilidade condicional de *A* em relação a *B***, ou seja, a probabilidade de *A* ocorrer sabendo que *B* ocorreu, a qual indicamos por $P(A \mid B)$.

Para escrever $P(A \mid B)$ em função de $P(A \cap B)$ e $P(B)$, dividimos o numerador e o denominador de $\frac{n(A \cap B)}{n(B)}$ por $n(\Omega)$.

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} \Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Sejam *A* e *B* eventos não vazios de um espaço amostral Ω. Denominamos probabilidade condicional de *A* em relação a *B*, a qual indicamos por $P(A \mid B)$, a probabilidade de ocorrer o evento *A*, sabendo que já ocorreu o evento *B*.

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Eventos dependentes e eventos independentes

Sabemos que a probabilidade de ocorrer o evento A dado que já ocorreu o evento B é:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Desse modo:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

Exemplo

De uma urna com 30 fichas numeradas de 1 a 30, serão retiradas duas fichas sem reposição. Qual é a probabilidade de o número em cada uma das fichas ser ímpar?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar o evento B, "retirar a 1ª ficha e o número ser ímpar", o evento A, "retirar a 2ª ficha e o número ser ímpar", e calcular $P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$.

Ao retirar a 1ª ficha, temos 15 números ímpares em um total de 30. A probabilidade de obter um número ímpar na 1ª retirada é:

$$P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

Ao retirar a 2ª ficha, já tendo retirado uma ficha com número ímpar sem reposição, temos 14 números ímpares em um total de 29. A probabilidade de obter um número ímpar na 2ª retirada é:

$$P(A \mid B) = \frac{14}{29}$$

Calculando $P(A \cap B)$, obtemos a probabilidade de ambos os números serem ímpares:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B) = \frac{14}{29} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{7}{29}$$

Portanto, a probabilidade de o número em cada uma das fichas ser ímpar é $\frac{7}{29}$.

Em situações em que os eventos A e B de um mesmo espaço amostral são **independentes**, ou seja, a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro, temos $P(A \mid B) = P(A)$ e $P(B \mid A) = P(B)$. Assim:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Dois eventos A e B de um mesmo espaço amostral que não são independentes são chamados **dependentes**.

Exemplo

Qual é a probabilidade de, ao lançar um dado comum duas vezes, obter em ambos os lançamentos um número par de pontos?

Vamos considerar o evento A, "número de pontos do 1º lançamento ser par", e o evento B, "número de pontos do 2º lançamento ser par". Note que esses eventos são independentes, pois a ocorrência de um deles não influencia a ocorrência do outro. Então, para responder a essa pergunta, calculamos:

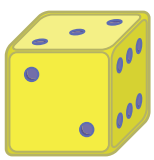
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Para obter um número par de pontos no 1º lançamento, temos 3 possibilidades em um total de 6. A probabilidade de obter um número par de pontos no 1º lançamento é:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Para obter um número par de pontos no 2º lançamento, ainda temos 3 possibilidades em um total de 6. Assim temos:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



SERGIO L. FILHO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Calculando $P(A \cap B)$, temos:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Portanto, a probabilidade de obter um número par de pontos em ambos os lançamentos é $\frac{1}{4}$.

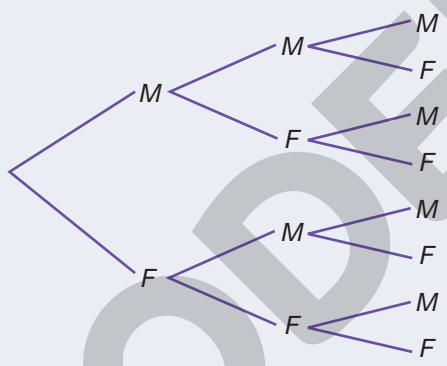
Se os eventos não vazios A e B de um mesmo espaço amostral são **dependentes**, então $P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$. No caso em que A e B são **independentes**, temos $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Um casal planeja ter 3 filhos. Qual é a probabilidade de que o casal tenha exatamente dois filhos do sexo masculino (M), sabendo que o primeiro filho nascido é do sexo feminino (F)?

Resolução

Inicialmente, vamos determinar o espaço amostral Ω, que representa a possibilidade de o casal ter 3 filhos. Para isso, construiremos uma árvore de possibilidades.



Desse modo:

$$\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$$

Agora, considerando o evento A, "dois filhos do sexo masculino", e o evento B, "primeiro filho é do sexo feminino", temos:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{8}$$

Note que os eventos A e B são dependentes, ou seja, a ocorrência de B influencia a ocorrência de A.

Por fim, calculamos a probabilidade de que o casal tenha exatamente dois filhos do sexo masculino, já tendo um primeiro filho do sexo feminino, ou seja, $P(A \mid B)$.

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 25\%$$

Portanto, essa probabilidade é $\frac{1}{4}$ ou 25%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 Utilizando uma aposta simples na Mega-Sena, a probabilidade de ganhar na quadra é de uma em 2 332; na quina é de uma em 154 518; e na sena é de uma em 50 063 860. Matematicamente, essas probabilidades são consideradas tão pequenas que a Polícia Federal investiga o acúmulo patrimonial de pessoas que o justificam com uma série de prêmios nessa loteria.

Calcule a probabilidade de um apostador, utilizando uma aposta simples na Mega-Sena, ganhar na quadra em um sorteio e na quina em um sorteio consecutivo.

Para ganhar na Mega-Sena com uma aposta simples, o jogador deve escolher 6 números do total de 60 e acertar 4 (quadra), 5 (quina) ou 6 (sena) desses números.

Resolução

Representando por A o evento "ganhar na quadra" e por B o evento "ganhar na quina", segue que os eventos A e B são independentes, ou seja, a ocorrência do evento A não influencia a ocorrência do evento B, pois os sorteios são diferentes.

Calculando $P(A \cap B)$, obtemos a probabilidade de um apostador ganhar na quadra em um sorteio, e na quina em outro.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2\,332} \cdot \frac{1}{154\,518} \simeq 0{,}000000003 = 0{,}0000003\%$$

Portanto, a probabilidade de um apostador, utilizando uma aposta simples na Mega-Sena, ganhar na quadra em um sorteio e na quina em um sorteio consecutivo é aproximadamente 0,0000003%.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Em um congresso de ciências, os participantes foram classificados da seguinte maneira.

	Físicos	Químicos	Biólogos
Homens	35	30	45
Mulheres	20	40	40

Para resolver esta tarefa, considere a inicial da palavra o evento em que é escolhida uma pessoa da respectiva categoria.

Considere o evento em que é escolhida ao acaso uma dessas pessoas e calcule as probabilidades. Respostas no final do livro.

a) $P(H \mid F)$

b) $P(Q \mid M)$

c) $P(M \mid B)$

d) $P(H \mid \overline{Q})$

e) $P(\overline{M} \mid B)$

f) $P(\overline{H} \mid \overline{F})$

No contexto

2 Vimos nas páginas 78 e 79 algumas informações sobre a anemia falciforme. De acordo com essas informações, resolva as questões.

a) Qual é a probabilidade de um casal, em que ambos possuem o traço falciforme, ter:
- dois filhos sem a doença? $\frac{9}{16}$
- um filho sem a doença e outro com a doença? $\frac{3}{16}$
- dois filhos com o traço falciforme? $\frac{1}{4}$

b) Uma mulher cujo pai tinha anemia falciforme casa-se com um homem cuja mãe tinha a doença e o pai não tinha o traço nem a doença. Qual é a probabilidade de esse casal ter um filho com o traço falciforme? 50%

c) Junte-se a um colega e pesquisem outras aplicações de probabilidade no estudo da genética. Depois, apresentem os resultados da pesquisa à turma. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 De cada lote de 20 peças produzidas por uma máquina que está com um pequeno problema de regulagem, 4 apresentam algum tipo de defeito. Retirando-se aleatoriamente 2 peças de um desses lotes, sem reposição, calcule a probabilidade de se retirar: Respostas no final do livro.

a) duas peças perfeitas.

b) uma peça perfeita e uma defeituosa.

c) duas peças defeituosas.

4 O bloco lógico é composto por 48 peças que combinam cores, formatos, espessuras e tamanhos. Existem peças para todas as combinações possíveis, podendo ser amarelas, azuis e vermelhas, nos formatos circular, quadrangular, retangular e triangular, e ainda podem ser finas ou grossas, grandes ou pequenas. As 48 peças estão distribuídas da seguinte maneira: 16 peças de cada cor; 12 peças de cada formato; 24 peças de cada espessura; e 24 peças de cada tamanho.

a) Ao escolher duas dessas peças aleatoriamente, qual é a probabilidade de ambas:

- serem vermelhas? $\frac{5}{47}$ ou aproximadamente 10,64%
- terem o mesmo formato? $\frac{11}{47}$ ou aproximadamente 23,4%

b) Qual é a probabilidade de se retirar uma peça com formato triangular, dentre aquelas que não possuem formato circular? $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

5 (Enem, 2010) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

Tamanho dos calçados	Número de funcionárias
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior do que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é: alternativa d

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{2}{5}$

d) $\frac{5}{7}$

e) $\frac{5}{14}$

6 (Famema-SP, 2020) Uma confecção de roupas produziu um lote com um total de 150 camisetas, distribuídas entre os tamanhos P e M, sendo 59 lisas e as demais estampadas. Nesse lote, havia 100 camisetas tamanho P, das quais 67 eram estampadas. Retirando-se, ao acaso, uma camiseta desse lote e sabendo que seu tamanho é M, a probabilidade de que seja uma peça estampada é igual a alternativa c

a) 36%

b) 24%

c) 48%

d) 60%

e) 72%

7 Para testar um novo medicamento contra certa doença e seus efeitos colaterais, foi realizado um teste com 200 pessoas, sendo 25% sadias e as restantes portadoras da doença. Nesse teste, 160 pessoas tomaram o remédio, e as restantes, placebo. Sabendo que 35 pessoas sadias tomaram placebo, qual é a probabilidade de escolher ao acaso uma pessoa que tomou o remédio entre as pessoas sadias? $\frac{3}{10}$ ou 30%

> **Placebo:** substância neutra que substitui um medicamento com finalidade de controlar as reações psicológicas.

8 No Brasil, os jovens menores do que 16 anos não podem votar. Já para as pessoas analfabetas ou maiores do que 70 anos, ou com idade entre 16 e 18 anos, o voto é facultativo. Para o restante da população, o voto é obrigatório. Em um bairro, 45% da população é de homens e 80% deles são obrigados a votar. Qual é a probabilidade de uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, ser homem e não ser obrigado a votar? $\frac{9}{100}$ ou 9%

9 Para a realização do exame *antidoping*, no campeonato brasileiro de futebol de 2015, a Confederação Brasileira de Futebol (CBF) estipulou que seriam sorteados dois jogadores de cada equipe, entre titulares e suplementares, após os 30 min da segunda etapa de cada jogo. Suponha que uma equipe com 18 jogadores, até o momento do sorteio, registrasse 4 com cartão amarelo. Qual é a probabilidade de ser sorteado para o exame *antidoping* um jogador que recebeu cartão amarelo, visto que já foi sorteado um jogador que recebeu cartão amarelo? $\frac{3}{17}$ ou aproximadamente 17,65%

10 De acordo com os resultados obtidos na pesquisa realizada no item **c** da tarefa **2**, elabore um problema envolvendo probabilidade. Em seguida, peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

10. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

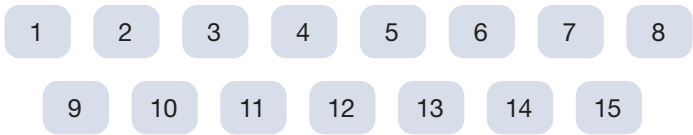
A tarefa **10** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Experimentos binomiais

Ao repetirmos um experimento várias vezes, sob as mesmas condições, de modo que as repetições sejam independentes umas das outras, a probabilidade de que ocorra certo evento em uma, duas, três ou todas as vezes em que o experimento for repetido pode ser calculada por meio da **lei binomial das probabilidades**.

Considere uma urna com as 15 fichas indicadas a seguir. Realizando cinco sorteios com reposição, qual é a probabilidade de, em exatamente 3 desses sorteios, ocorrer um número maior do que 10?



Nessa situação, para cada lançamento, o espaço amostral é:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

Além disso, considerando o evento A, "ocorrer um número maior do que 10", temos:

- $A = \{11, 12, 13, 14, 15\}$ e, consequentemente:

$$P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

- $\overline{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e, consequentemente:

$$P(\overline{A}) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

Lembre-se que $\overline{A}$ é o conjunto formado pelos elementos de Ω que não pertencem a A.

Nesses cinco sorteios, os eventos A e $\overline{A}$ podem ocorrer em diferentes ordens. Uma delas é $AAA\overline{A}\,\overline{A}$, ou seja, as três primeiras fichas sorteadas apresentarem números maiores do que 10, e as duas últimas, não. A partir dessa ordem, e sabendo que os sorteios são independentes, ou seja, a ocorrência de um não influencia na do outro:

$$P(A \cap A \cap A \cap \overline{A} \cap \overline{A}) = P(A) \cdot P(A) \cdot P(A) \cdot P(\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) =$$

$$= [P(A)]^3 \cdot [P(\overline{A})]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{27} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{243}$$

Essa é a probabilidade de ocorrer três vezes o evento A e duas vezes o evento $\overline{A}$, em determinada ordem. Devemos então multiplicar esse valor pela quantidade de ordens possíveis, que pode ser obtida por meio da combinação simples $\binom{5}{3}$.

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10$$

Portanto, como existem 10 ordens diferentes e a probabilidade de cada uma dessas ordens é $\frac{4}{243}$, a probabilidade de, em cinco sorteios, ocorrer exatamente três vezes o evento A é:

$$10 \cdot \frac{4}{243} = \frac{40}{243} \simeq 16{,}46\%$$

Se em um experimento aleatório a probabilidade de o evento A ocorrer em cada uma das n tentativas é dada por $P(A)$, então a probabilidade de o evento A ocorrer exatamente p vezes em n tentativas é:

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [P(\overline{A})]^{n-p}$$

sendo $n \geqslant p$ e $\overline{A}$ o evento complementar de A.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R3 Em 2019, uma das provas do Enem era a de Matemática e suas tecnologias, composta por 45 questões. Sabendo que cada questão dessa prova continha cinco alternativas, das quais somente uma era correta, calcule a probabilidade de um candidato, ao marcar as alternativas aleatoriamente:

a) acertar 60% das questões.

b) errar todas as questões.

Resolução

Considere o evento A "marcar a alternativa correta em uma questão". Logo:

$$P(A) = \frac{1}{5}$$

Sabendo que $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, podemos escrever:

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p}$$

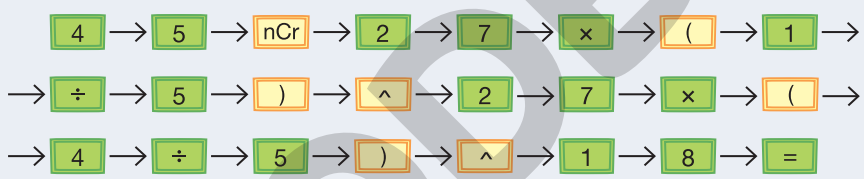
a) Como os acertos são independentes, isto é, o acerto de uma questão não depende das demais, calculamos a probabilidade de acertar 60% do total de 45 questões da prova, ou seja, a probabilidade de o evento A ocorrer 27 vezes (p) em 45 tentativas (n).

$$\binom{n}{p} \cdot [P(A)]^p \cdot [1 - P(A)]^{n-p} = \binom{45}{27} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{27} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right)^{45-27} =$$

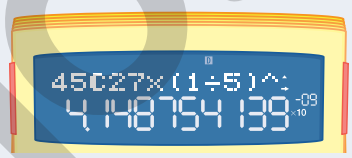
$$= \binom{45}{27} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{27} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18} \simeq 0{,}000000004 = 0{,}0000004\%$$

Portanto, a probabilidade de um candidato, ao marcar as alternativas aleatoriamente, acertar 60% das questões é, aproximadamente, 0,0000004%.

Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular $\binom{45}{27} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{27} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{18}$ com a seguinte sequência de teclas.



Diga aos alunos que este procedimento pode variar dependendo do modelo da calculadora.



SERGIO L. FILHO

Em algumas calculadoras, a tecla x^y substitui a tecla ^.

b) Se a probabilidade de acertar uma questão é $P(A) = \frac{1}{5}$, então a de errar a questão é $P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. Calculamos a probabilidade de errar todas as 45 questões, ou seja, a probabilidade de o evento $\overline{A}$ ocorrer 45 vezes (p) em 45 tentativas (n).

$$\binom{n}{p} \cdot [P(\overline{A})]^p \cdot [1 - P(\overline{A})]^{n-p} = \binom{45}{45} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{45} \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{45-45} =$$

$$= \underbrace{\binom{45}{45}}_{1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{45} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{0}}_{1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{45} \simeq 0{,}000043556 = 0{,}0043556\%$$

Portanto, a probabilidade de um candidato, ao marcar as alternativas aleatoriamente, errar todas as questões é, aproximadamente, 0,0043556%.

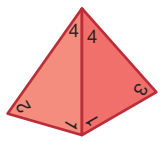
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

11 Uma loja de calçados constatou que 4 entre 5 clientes do sexo feminino compram sapatos com a numeração de 35 a 39. Num dia em que 12 mulheres compraram sapatos nessa loja, qual era a probabilidade de exatamente 9 delas terem comprado sapatos com a numeração apresentada?
aproximadamente 23,62%

12 Considere um tetraedro regular em que, próximo a cada vértice, esteja escrito um dos números naturais de 1 a 4, em cada face adjacente a esse vértice. Ao lançarmos esse tetraedro, o número sorteado é aquele que estiver próximo ao vértice voltado para cima. Na figura, por exemplo, o número sorteado é 4.



RONALDO INÁCIO

Supondo que esse tetraedro seja lançado 5 vezes, calcule a probabilidade de:

a) ser sorteado o número 3 em exatamente dois lançamentos. aproximadamente 26,37%

b) ser sorteado apenas o número 2. aproximadamente 0,1%

c) ser sorteado o número 4 apenas uma vez. aproximadamente 39,55%

d) não ser sorteado o número 1. aproximadamente 23,73%

13 De acordo com a FIFA (*Fédération Internationale de Football Association*) uma partida de futebol deve ter início após um sorteio de cara ou coroa, e a equipe que ganhar o sorteio escolhe a direção em que atacará na 1ª etapa de jogo. Em 6 partidas, qual é a probabilidade de uma equipe escolher a direção de ataque em exatamente 5 delas?
Resposta no final do livro.

14 O salto em distância é uma modalidade olímpica em que o objetivo é saltar a maior distância possível. Os atletas correm em uma pista em direção a uma caixa com areia e saltam. Para que o salto seja válido, é necessário que o atleta o inicie antes da plataforma de decolagem. Em competições oficiais, os atletas efetuam o salto por três vezes, mas somente o melhor deles é considerado. Supondo que a probabilidade de certo atleta saltar mais de 8,5 m seja de 80%, qual é a probabilidade de esse atleta realizar exatamente dois saltos com mais de 8,5 m em uma competição?
38,4%

15 Um jogador de basquetebol tem média de aproveitamento de 70% nos arremessos livres. Sabendo que em certo jogo esse jogador efetuou 8 arremessos livres, determine a probabilidade de ele ter acertado:

a) exatamente 5 arremessos. aproximadamente 25,41%

b) nenhum arremesso. aproximadamente 0,007%

c) mais de 6 arremessos. aproximadamente 25,53%

16 A probabilidade de uma mulher com menos de 30 anos gerar uma criança com síndrome de Down é de aproximadamente 0,04%; já em uma mulher com 40 anos, a probabilidade é de aproximadamente 0,9%. Isso ocorre devido a uma alteração genética causada por um erro na divisão celular durante a divisão embrionária.

Fonte de pesquisa: CAMPBELL, Neil A. *et al. Biology.* 8. ed. San Francisco: Pearson Benjamin Cummings, 2008. p. 299.

Supondo que a probabilidade de uma mulher gerar uma criança com síndrome de Down dos 20 aos 25 anos seja de 0,04%, qual é a probabilidade de uma mulher ter 3 filhos nesse intervalo de tempo e sem síndrome de Down?
aproximadamente 99,88%

17 Para uma pessoa ser aprovada em certo concurso, ela precisa passar por um teste composto de duas fases. A 1ª fase é uma prova objetiva com 10 questões de Matemática e 14 de conhecimentos gerais, em que apenas uma entre as 4 alternativas de cada questão está correta. Será classificado para realizar a 2ª fase, de teste físico, o candidato que atingir no mínimo 50% de aproveitamento em cada área da prova objetiva. Se um candidato assinalar aleatoriamente as respostas da prova objetiva, qual é a probabilidade de ele ser classificado para a 2ª fase com exatamente o aproveitamento mínimo?
aproximadamente 0,16%

18 A probabilidade da ocorrência de combinações curiosas quanto ao sexo dos filhos de um casal acontece em diversos casos. Os filhos do casal norte-americano Emory Landon Harrison representam um agrupamento inusitado: 13 filhos, todos meninos.

BETTMANN/GETTY IMAGES

Casal Emory Landon Harrison e seus treze filhos homens, 1º de maio de 1955, Manhattan, Nova Iorque, EUA.

a) Qual é a probabilidade de essa combinação de filhos acontecer? $\frac{1}{8\,192}$ ou aproximadamente 0,012%

b) Qual combinação de filhos tem a maior probabilidade de ocorrer: 13 filhos do mesmo sexo ou 13 filhos com alternância de sexo? Justifique sua resposta.
Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

CÓPIA

7 Probabilidade e a produção de resíduos

Acerte a lixeira

Você já pensou na quantidade de resíduos sólidos que produzimos diariamente e para onde vai todo esse lixo? Se ainda não pensou, está na hora de começar a se preocupar e agir, reduzindo, reutilizando e ajudando a reciclar o seu lixo.

Seria ótimo se não gerássemos lixo algum em nossas atividades cotidianas; porém, como isso é quase impossível, podemos nos esforçar para reduzir nossa produção com atitudes simples, como planejar melhor as compras do mercado, evitando desperdício de alimentos, substituir itens descartáveis, escolher produtos com menos embalagens e utilizar sacolas retornáveis. Além disso, muito do que seria descartado pode ser reutilizado, criando-se itens com outras finalidades, por exemplo: garrafas de vidro tornam-se itens de decoração, como luminárias ou vasos.

BNCC
• CE1CNT

Alguns resíduos precisam receber atenção especial: 1 litro de óleo de cozinha, por exemplo, se descartado inadequadamente, pode contaminar 20 mil litros de água. As pilhas e baterias também não devem ser descartadas em lixeiras comuns, pois contém materiais tóxicos, que podem contaminar o meio ambiente e prejudicar a saúde de coletores.

Em locais onde há algum tipo de coleta seletiva, também é importante separar materiais que não são orgânicos e nem recicláveis. Veja alguns exemplos abaixo.

- **Papel**: papel higiênico, guardanapos, papel-carbono, papéis metalizados.
- **Plástico**: cabos de panela, acrílicos, adesivos.
- **Metal**: esponja de aço, latas de produtos tóxicos, clipes.
- **Vidro**: lâmpadas, espelhos, louças, vidros temperados.

Dicas para descartar o lixo

É essencial que façamos a separação e o descarte correto dos resíduos sólidos, pois este é o primeiro passo para a reciclagem.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Segundo relatório de 2018 da Cempre (Compromisso Empresarial de Reciclagem), apenas 17% da população brasileira é atendida por sistema de coleta seletiva, sendo que 83% dessa cobertura encontra-se em cidades da região Sul e Sudeste, apesar de essas regiões representarem pouco mais de 50% da população brasileira.

Fonte de pesquisa: <http://cempre.org.br/ciclosoft/id/9>. Acesso em 24 jul. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Em 2018, segundo dados do Cempre, aproximadamente 83% dos municípios brasileiros não possuíam coleta seletiva. Ao sortear um município brasileiro aleatoriamente, qual a probabilidade de que ele tenha coleta seletiva? $\frac{17}{100}$ ou 17%

B Em alguns locais públicos são colocadas lixeiras coloridas a fim de separar o lixo a ser reciclado (vidro, plástico, metal e papel) e o orgânico. As cores atribuídas para cada tipo de material estão representadas a seguir. $\frac{7}{20}$ ou 35%

Uma pessoa desinformada, ao passar por uma dessas lixeiras, joga aleatoriamente uma embalagem de papel e uma lata metálica em lixeiras diferentes. Qual é a probabilidade de ela ter jogado pelo menos um dos materiais na lixeira correta?

Ser consciente

A No município em que você mora há algum tipo de coleta seletiva? Qual? Resposta pessoal.

B Você tem o hábito de separar o lixo por tipo? Relate como você faz. Resposta pessoal.

C Pesquise e escreva uma lista de iniciativas que podem ser adotadas na escola para contribuir com o processo de reciclagem do lixo. Resposta pessoal.

ANIMAFLORA PICS STOCK/SHUTTERSTOCK

Lixeiras utilizadas para coleta seletiva.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.ANDREY ARKUSHA/SHUTTERSTOCK; 2.BARBAJONES/SHUTTERSTOCK; 3.STR110510/SHUTTERSTOCK; 4.KARI DESIGN/SHUTTERSTOCK; 5.KALFA/SHUTTERSTOCK; 6.ROMAN SAMOKHIN/SHUTTERSTOCK; 7.ORTIS/SHUTTERSTOCK; 8.PICS FIVE/SHUTTERSTOCK; 9.DIVBOXPL/SHUTTERSTOCK; 10.INGA NIELSEN/SHUTTERSTOCK; 11.MEGA PIXEL/SHUTTERSTOCK; 12.EVAN LORNE/SHUTTERSTOCK; 13.SCISETTI ALFIO/SHUTTERSTOCK; 14.FRESH_STUDIO/SHUTTERSTOCK; 15.YETI STUDIO/SHUTTERSTOCK; 16.ROLAND MAGNUSSON/SHUTTERSTOCK; 17.VED PRAKASH SHARMA/SHUTTERSTOCK; 18.YETI STUDIO/SHUTTERSTOCK; 19.ANTON STARIKOV/SHUTTERSTOCK; 20.ERIC ISSELEE/SHUTTERSTOCK; 21.LINEAR_DESIGN/SHUTTERSTOCK; 22.TAMAS PANCZEL - EROSS/SHUTTERSTOCK; 23.KOZINN91/SHUTTERSTOCK; 24.AD OCULOS/SHUTTERSTOCK; 25.ALENKADR/SHUTTERSTOCK; 26.ALESSANDRO GALLUCCI/SHUTTERSTOCK; 27.LOVE THE WIND/SHUTTERSTOCK

Os recipientes que serão reciclados devem ser descartados limpos e secos.

Utilize uma garrafa PET limpa para armazenar óleo usado e, depois, leve a um posto de reciclagem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

8 Estatística

Quantos somos?

Conhecer dados estatísticos sobre os habitantes de determinada localidade não é um interesse exclusivo da atualidade. O registro mais antigo de tal conjunto de dados, que recebe o nome “censo”, data de 2238 a.C., na China. Os Estados Unidos da América realizam censo desde 1790, sendo prevista pela sua constituição e, a partir desses dados, é definida a distribuição de cadeiras na Câmara dos Representantes para cada estado. No Brasil, o primeiro censo realizado foi em 1872, antes mesmo de nos tornarmos república.

Com a criação do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em 1936, houve uma grande modernização no processo censitário nacional, o que agilizou a coleta e a organização de informações. Foi então que, a partir de 1940, o censo passou a ser realizado a cada dez anos no país.

Em 2010, mais de 68 países fizeram seus censos, e entre eles podemos citar países como os Estados Unidos da América, México, Argentina, Costa do Marfim, China, Japão, Paquistão, Coreia do Sul, Rússia, Suíça, Finlândia e, entre eles, o Brasil. Segundo dados da ONU, foram recenseadas quase 47% da população mundial em 2010.

O censo brasileiro fundamenta-se em dois tipos de questionários: o “básico” e o “da amostra”. O primeiro é aplicado em todas as residências no Brasil, com 34 questões no censo 2010, já o segundo é aplicado em aproximadamente 10% das residências, com 102 questões no censo 2010, incluindo as 34 questões do questionário básico. Essa divisão é motivada devido à inviabilidade de realizar o questionário prolongado em todos os domicílios, devido a prazos e aos custos envolvidos. Uma das perguntas feitas é sobre a quantidade de pessoas que moram na residência e qual é a relação entre elas.

É importante ressaltar que o IBGE só divulga os resultados dos estudos feitos a partir do censo e não a informação individual de cada residência. Assim, conseguimos saber a média de pessoas por residência, mas ninguém vai ter acesso a quantas pessoas vivem em sua residência, por exemplo.

Censo 2010 em números

ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS

Total de domicílios visitados: 67 569 688.

Total de municípios pesquisados: 5 565.

Pessoal contratado e treinado: cerca de 240 mil pessoas.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

As informações obtidas nos censos são de extrema importância para o governo, pois, com base na análise desses dados, ele pode direcionar suas ações: onde investir mais em saúde, educação, implementar projetos para desenvolvimento econômico, entre outras. Os valores repassados pela União às cidades são baseados em parâmetros obtidos pelo censo e a sociedade também pode tirar proveito dessas informações. É possível utilizá-las, por exemplo, para instalar comércios, conhecer o perfil de determinado público e também para cobrar ações do governo a fim de resolver problemas específicos.

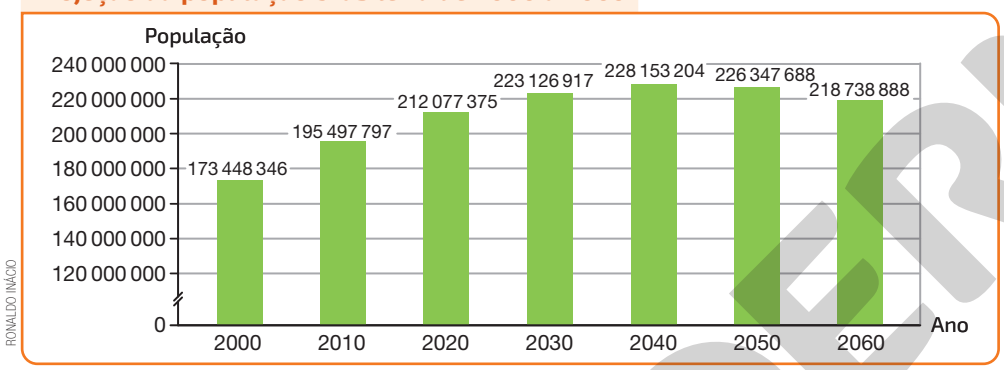
Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A De acordo com o texto, por que a realização do censo é tão importante?

B Junto com os colegas da turma, façam uma estimativa de quantos alunos há em toda a escola e, em seguida, verifiquem esse dado com o professor ou com a direção da escola. A estimativa feita se aproximou da quantidade real? Justifiquem suas respostas.

C Entre dois anos indicados no gráfico a seguir estima-se que a população brasileira começará a diminuir. Quais são esses anos? entre 2040 e 2050

Projeção da população brasileira de 2000 a 2060



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <https://ftp.ibge.gov.br/Projecao_da_Populacao/Projecao_da_Populacao_2013/projecoes_2013_populacao_xls.zip>. Acesso em: 12 abr. 2021.

A partir de estudos estatísticos sobre a população brasileira ou sobre uma amostra representativa dessa população, é possível realizar previsões, assim como foi feito para estimar a população brasileira nos anos de 2000 a 2060 do gráfico.

Ainda em relação ao Censo 2010, o questionário da amostra foi aplicado de maneira aleatória, mas esse não é o único tipo de amostra estatística, conforme estudaremos nas próximas páginas.

Fontes de pesquisa: <https://censo2020.ibge.gov.br/>. Acesso em: 16 jun. 2020.

<https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/25089-censo-1991-6.html?=&t=o-que-e>. Acesso em: 16 jun. 2020

<https://censo2010.ibge.gov.br/apps/atlas/>. Acesso em: 16 jun. 2020.

A) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos justifiquem que o governo e a sociedade obtêm informações sobre vários aspectos da população, podendo direcionar suas ações.

B) Resposta pessoal. Verifique a informação da quantidade de alunos matriculados na escola previamente.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.BRUNO MARTINS IMAGENS/SHUTTERSTOCK; 2.WINWIN ARTLAB/SHUTTERSTOCK; 3.ROBUART/SHUTTERSTOCK; 4.SKREIDZELEU/SHUTTERSTOCK; 5.EUGENE GA/SHUTTERSTOCK; 6.AHMET MISIRLIGUL/SHUTTERSTOCK; 7.DANILA3D/SHUTTERSTOCK – BANCO CENTRAL; 8.FOCUS STOCKER/SHUTTERSTOCK; 9.RHJ PHTOTO AND ILUSTRATION/SHUTTERSTOCK – BANCO CENTRAL; 10.VENOMOUS VECTOR/SHUTTERSTOCK; 11.OPTIMARC/SHUTTERSTOCK; 12.MIMAGE PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 13.GALITSIN/SHUTTERSTOCK; 14.WAYHOME STUDIO/SHUTTERSTOCK; 15.LUNA MARINA/SHUTTERSTOCK; 16.DANIEL M ERNST/SHUTTERSTOCK; 17.KARELNOPPE/SHUTTERSTOCK; 18.HOGAN IMAGING/SHUTTERSTOCK; 19.SZEFEI/SHUTTERSTOCK; 20.KRAKENIMAGES/SHUTTERSTOCK; 21.OMERIS/SHUTTERSTOCK

MODERNA

Estudando estatística

Vimos nas páginas anteriores que não é de agora que a estatística é uma ferramenta importante para a humanidade. Um exemplo são os registros de contagem da população desde antes da Era Cristã, como o recenseamento ocorrido no Egito por volta de 2900 a.C.

Atualmente, o estudo da estatística permeia os mais diversos campos do conhecimento, como a Medicina, a Agronomia e a Computação, sendo aplicado não somente com o intuito de constatar fatos, mas também de percepção de tendências. Um governo, por exemplo, utiliza informações de pesquisas atuais acerca da população para prever necessidades futuras, como a quantidade de escolas ou a quantidade de hospitais a serem construídos em certa localidade.

Os meios de comunicação e as evoluções tecnológicas nos levam à exposição cada vez maior de informações apresentadas com tratamento estatístico, como a utilização de gráficos, tabelas e medidas estatísticas, assuntos que estudaremos em temas posteriores.

É importante que, ao nos depararmos com uma informação tratada estatisticamente, tenhamos a capacidade de interpretar, compreender, estabelecer relações e realizar previsões a partir dos dados expostos.

Variáveis estatísticas

Quando o IBGE realiza os chamados censos, busca obter informações sobre o perfil da população brasileira, tais como idade, sexo, grau de instrução, renda, tipo de moradia etc. Em estatística, esses itens são denominados **variáveis**.

A fim de simplificar a escrita, não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, utilizaremos expressões do tipo "altura de uma pessoa" quando, na realidade, queremos nos referir à medida da altura da pessoa.

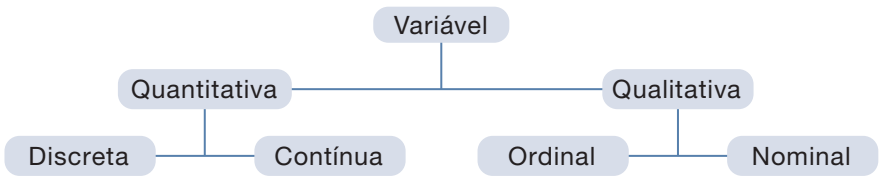
Quando uma variável está relacionada a um valor numérico, como, por exemplo, a altura de uma pessoa ou o total de espécies de animais em um ambiente, é denominada **variável quantitativa**. Já aquela que está relacionada a uma qualidade ou a um atributo, como o sexo de um indivíduo ou o grau de instrução de um trabalhador, é denominada **variável qualitativa**.

Uma variável quantitativa pode ser classificada em:

- **variável quantitativa discreta**, quando pode assumir certos valores que, em geral, são expressos por números inteiros, obtidos mediante algum modo de contagem. A quantidade de clientes de um restaurante, a quantidade de alunos matriculados em uma escola e a quantidade de atendimentos em um hospital são exemplos desse tipo de variável.
- **variável quantitativa contínua**, quando, teoricamente, pode assumir valores dados em um intervalo real. Resultam, em geral, de uma mensuração. A massa de uma pessoa é um exemplo de variável quantitativa contínua, pois ela pode assumir como valor, por exemplo, 72 kg, 72,5 kg ou 72,58 kg.

Por sua vez, uma variável qualitativa pode ser classificada em:

- **variável qualitativa ordinal**, quando se refere a uma categoria que, mesmo não sendo numérica, pode ser ordenada. O nível de desenvolvimento de um país é um exemplo desse tipo de variável, pois um país pode ter alto, médio ou baixo nível de desenvolvimento.
- **variável qualitativa nominal**, quando não é numérica e tampouco há uma ordenação subjetiva. A cor dos automóveis vendidos em uma concessionária e o esporte predileto de uma pessoa são exemplos dessa variável.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

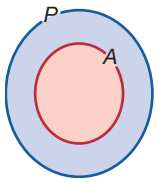
MODERNA

População e amostra estatística

Quando uma pesquisa estatística é planejada, diversos elementos relacionados a ela devem ser definidos, como as variáveis que constarão no questionário. Outro fator importante no planejamento é estabelecer quem será consultado nessa pesquisa. Para obter a altura dos alunos de uma turma do Ensino Médio, por exemplo, é possível consultar todos os alunos da turma, que constituem a **população** ou **universo estatístico** dessa pesquisa.

Em outros casos, é impossível ou inviável consultar todos os indivíduos da pesquisa. Durante as campanhas eleitorais para presidente da República, por exemplo, é inviável questionar todos os eleitores do país sobre sua intenção de voto, uma vez que isso demandaria muito tempo e recursos financeiros. Nesses casos, seleciona-se um subconjunto da população, chamado **amostra**, que possa representar essa população da melhor maneira possível. Para que a amostra seja representativa, ela deve ter as principais características da população à qual pertence. No exemplo apresentado, os eleitores selecionados para responder a sua intenção de voto para a eleição presidencial correspondem à amostra da pesquisa.

Pesquisas realizadas com toda a população são chamadas **pesquisas censitárias**. Já as pesquisas realizadas com uma amostra da população são chamadas **pesquisas amostrais**.



RONALDO INÁCIO

P: população
A: amostra

$A \subset P$

Levantamentos amostrais

Em pesquisas amostrais, a amostra é obtida, por meio de certos processos, a partir de uma população bem definida. As amostragens subdividem-se em dois grupos: não probabilística e probabilística.

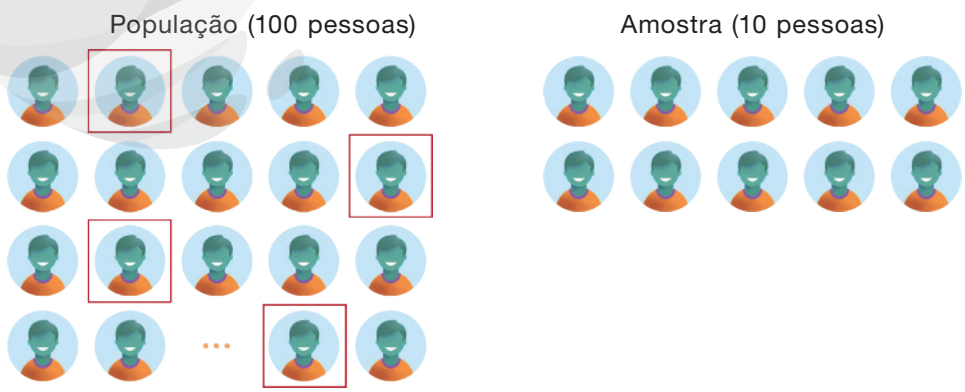
- **Amostragem não probabilística**: fica a cargo do pesquisador a definição de parâmetros e critérios para a escolha dos elementos da amostra.
- **Amostragem probabilística**: a escolha de um elemento é feita de modo aleatório, por sorteio não viciado, de tal maneira que a probabilidade de cada elemento da população pertencer à amostra seja conhecida. Esse é o tipo mais usado em pesquisas científicas.

Agora, apresentaremos alguns exemplos de amostragem probabilística: aleatória simples, sistemática e estratificada.

- **Amostragem aleatória simples**: nesse tipo de amostragem, todos os elementos da população têm a mesma probabilidade de pertencer à amostra. A amostragem aleatória simples é indicada apenas quando a população é homogênea.

Exemplo

Uma loja deseja fazer uma pesquisa de satisfação com seus clientes. Para isso, ela solicitará a 10 clientes, de um banco de dados de 100 pessoas, que preencham um questionário.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- **Amostragem sistemática**: Nessa amostragem, os elementos da população devem ser organizados em determinada ordem ou listagem (possibilitando a identificação de cada um deles) e a escolha dos elementos é feita conforme um critério ou fator de repetição. A amostragem sistemática é indicada apenas quando a população é homogênea.

Exemplo

Em uma linha de produção, a cada lote de 150 camisetas, retiram-se 20 para análise de qualidade. Para determinar quais serão os elementos da amostra, podemos realizar os seguintes procedimentos.

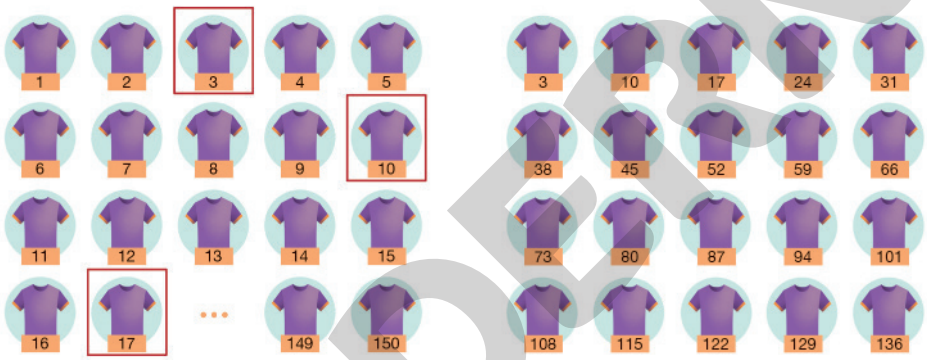
A Calculamos a razão entre o número de elementos da população (N) e o total de elementos da amostra (n). Nessa etapa, consideramos apenas a parte inteira R da razão.

B Sorteamos um número inteiro S no intervalo de 1 a R. Em seguida, determinamos a quantidade correspondente a cada elemento que pertencerá à amostra. Para isso, fazemos:

- S
- $S + R$
- $S + 2R$
- ...
- $S + (n - 1) \cdot R$

Como $\frac{150}{20} = 7{,}5$, então $R = 7$. Assim, se o número sorteado S for 3, temos:

População (150 camisetas) | Amostra (20 camisetas)



- **Amostragem estratificada**: Nesse tipo de amostragem, a população é dividida em subgrupos homogêneos (estratos). Em geral, a amostra é composta a partir de um sorteio simples dos elementos desses estratos. Como exemplos, podemos citar sexo, faixa etária, escolaridade, entre outros.

Exemplo

Certa universidade vai fazer uma pesquisa com as alunas do 2º período do curso de Matemática. Determinou-se que, das 18 alunas (todas com 19 ou 20 anos de idade), serão entrevistadas 5 com 20 anos de idade e 2 com 19 anos de idade.

População (18 alunas) | Amostra (7 alunas)

ILUSTRAÇÕES: HELOISA PINTARELLI

Podemos classificar a amostragem estratificada em **uniforme** ou **proporcional**. A primeira é composta de uma quantidade igual de elementos de cada estrato. Já na amostragem estratificada proporcional, o total de elementos de cada estrato é condicional ao total de elementos do estrato.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

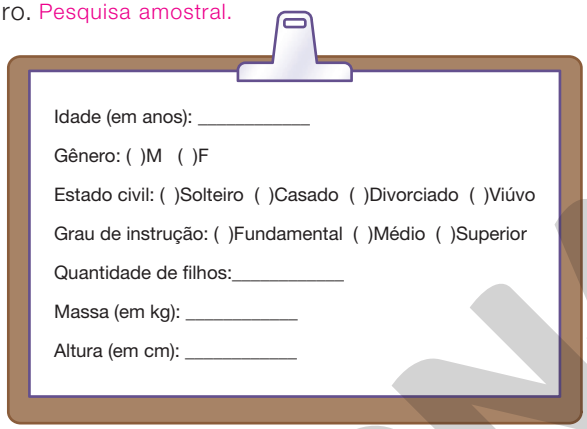
1 Classifique as pesquisas apresentadas em censitárias ou amostrais.

a) Em uma pesquisa estatística, cujo objetivo era determinar quem gosta de Matemática, foram entrevistados todos os alunos de uma escola. Pesquisa censitária.

b) Certa lanchonete, a fim de fazer uma pesquisa de satisfação, entrevistou 100 dos 1 000 clientes que compraram no mês de janeiro. Pesquisa amostral.

2 Classifique cada variável apresentada no questionário ao lado em quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa ordinal ou qualitativa nominal.

quantitativa discreta: idade (em anos) e quantidade de filhos; quantitativa contínua: massa (em kg) e altura (em cm); qualitativa ordinal: grau de instrução; qualitativa nominal: gênero e estado civil



RONALDO INÁCIO

3 Elaborando

Na Pesquisa Nacional por Amostragem de Domicílio Contínua (Pnad Contínua), o IBGE, para obter informações referentes à inserção da população no mercado de trabalho e de características como idade, gênero e nível de instrução, bem como permitir o estudo do desenvolvimento socioeconômico do País, aplica um questionário em uma amostra de domicílios.

Elabore um questionário a ser aplicado à turma em que você estuda, utilizando variáveis quantitativas e qualitativas. Por fim, estabeleça um tipo de amostragem: aleatória simples, sistemática ou estratificada. Resposta pessoal.

4 Seja P o conjunto dos elementos que compõem determinada população em uma pesquisa estatística e A um subconjunto de P, correspondente à amostra que será pesquisada. Em que circunstância temos $A = P$? Quando todo elemento da população P também é elemento da amostra A, ou seja, quando todos os elementos da população serão pesquisados.

5 Uma fábrica de automóveis pretende produzir mensalmente 800 unidades de um novo modelo. Porém, com o objetivo de testar os itens de segurança, a fábrica vai fazer uma pesquisa simulando acidentes com esse automóvel. Em sua opinião, nessa pesquisa, o fabricante utilizará todos os automóveis produzidos ou uma amostra dos automóveis desse novo modelo? Justifique sua resposta. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o fabricante utilizará uma amostra, uma vez que é inviável realizar a simulação com todas as 800 unidades produzidas mensalmente desse modelo de automóvel.

6 Certa livraria fez uma pesquisa sobre o gênero literário preferido de seus clientes. Para isso, inicialmente, seu banco de clientes foi dividido em dois grupos (homem ou mulher) e, em seguida, foram sorteadas 35 pessoas de cada grupo, compondo assim a amostra da pesquisa.

a) Qual tipo de amostragem essa livraria utilizou na pesquisa apresentada? Amostragem estratificada.

b) A pergunta principal do questionamento era:

HELOÍSA PINTARELLI

Classifique a variável apresentada nessa pergunta em quantitativa discreta, quantitativa contínua, qualitativa ordinal ou qualitativa nominal. Variável qualitativa nominal.

c) Caso a livraria optasse por utilizar uma amostragem sistemática, quais procedimentos ela deveria seguir? Possível resposta: inicialmente, deveria organizar os elementos da população em determinada ordem ou listagem (possibilitando a identificação de cada um deles). Em seguida, escolher os elementos que compõem a amostra conforme um critério ou fator de repetição.

7 Uma empresa produz diariamente 100 lotes com 500 peças cada um. Para garantir a qualidade dos produtos são analisadas, por dia, 200 peças da produção.

a) Quantos por cento da produção são analisados diariamente? 0,4%

b) Em sua opinião, qual tipo de amostragem essa empresa deveria utilizar para compor a amostra analisada? Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

9 Gráficos e tabelas

Sopa de letrinhas: gerações X, Y, Z, BB ...

Já pensou em como a nossa idade e a época em que nascemos influencia diretamente no modo como fazemos coisas simples, como ficar informado das notícias, se divertir, consumir ou trabalhar? Faça um teste! Converse com seus avós ou amigos idosos sobre como eram esses costumes na juventude deles, entre 16 e 24 anos, por exemplo. Provavelmente, alguns dirão "Nessa idade eu já trabalhava, tinha casa, esposa, filhos etc.", ou seja, tinham mais responsabilidades da vida adulta.

Antigamente uma geração era definida a cada 20 ou 25 anos, porém, nos dias de hoje, já não se espera mais tanto tempo para instaurar uma nova classe. Embora alguns artigos consideram datas diferentes para as divisões geracionais, existe um consenso a respeito da existência de pelo menos quatro gerações: Baby Boomers (BB), X, Y (ou Millennials) e Z. Definir quem faz parte de qual geração pode ajudar a entender mudanças de comportamento ao longo do tempo. A geração Z, por exemplo, é caracterizada pela tecnologia, o que impacta numa mudança de comportamento, se comparada às anteriores. Veja outras características dessa geração nos gráficos apresentados na página seguinte.

BNCC

- EM13MAT102
- CE3CNT

A expressão Baby Boomers é usada como referência ao *baby boom*, cuja tradução faz relação ao grande acontecimento da época, que foi a "explosão de bebês", filhos dos que viveram o período da Segunda Guerra Mundial.

Baby Boomers (BB)

Nascimento: entre 1940 e 1959.
Contexto: pós-guerra. No Brasil, Regime militar e repressão.
Comportamento: idealistas, revolucionários e coletivos.
Consumo: ideológico, vinil, cinema e música.

Geração Z

Nascimento: entre 1995 e 2010.
Contexto: mobilidade e múltiplas realidades, redes sociais, nativos digitais.
Comportamento: identidade fluida, realistas e ativistas ponderados.
Consumo: verdade, singularidade, acesso e ética.

Geração X

Nascimento: entre 1960 e 1979.
Contexto: transição política, hegemonia do capitalismo e meritocracia.
Comportamento: materialistas, competitivos e individualistas.
Consumo: *status*, marcas, carros e artigos de luxo.

Geração Y

Nascimento: entre 1980 e 1994.
Contexto: globalização, estabilidade econômica e surgimento da internet.
Comportamento: abstratos, questionadores e globais.
Consumo: experiências, festivais e viagens.

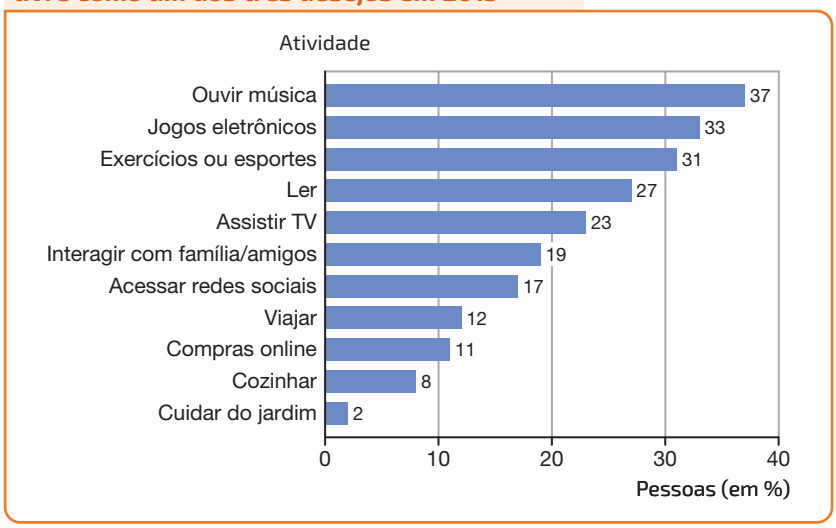
Fonte: KOJIKOVSKI, Gian. Agora é com eles. *Exame*, 6 dez. 2017. p.9.

FOTOMONTAGEM DE GUSTAVO PEDROSA. FOTOS: 1.ALEXA PICSO/SHUTTERSTOCK; 2.GALLO FOTO/SHUTTERSTOCK; 3.DAVID FRANKLIN/SHUTTERSTOCK; 4.TAKE PHOTO/SHUTTERSTOCK; 5.AMASTER PHOTOGRAPHER/SHUTTERSTOCK; 6.MCLITTLE STOCK/SHUTTERSTOCK; 7.NINA DESIGN/SHUTTERSTOCK; 8.BEST PIXELS/SHUTTERSTOCK; 9.SPF/SHUTTERSTOCK; 10.SPASIBLO/SHUTTERSTOCK; 11.FLEUR_DE_PAPIER/SHUTTERSTOCK; 12.CREATIVIKA GRAPHICS/SHUTTERSTOCK; 13.DIEGO CERVO/SHUTTERSTOCK; 14.MILICA NISTORAN/SHUTTERSTOCK; 15.SPAXIAX/SHUTTERSTOCK; 16.WAYHOME STUDIO/SHUTTERSTOCK; 17.ROMAN ARBUZOV/SHUTTERSTOCK; 18.BEST PIXELS/SHUTTERSTOCK; 19.KARNOFF/SHUTTERSTOCK; 20.RHJ PHTOTO AND ILUSTRATION/SHUTTERSTOCK – BANCO CENTRAL DO BRASIL; 21.BOY KUNG/SHUTTERSTOCK; 22.MR3D/SHUTTERSTOCK; 23.CHERKAS/SHUTTERSTOCK; 24.KOLOPACH/SHUTTERSTOCK; 25.ORANGE VECTOR/SHUTTERSTOCK; 26.MACRO VECTOR/SHUTTERSTOCK; 27.BRENDA ROCHA/SHUTTERSTOCK – BANCO CENTRAL DO BRASIL

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PROVA

Atividades preferidas da geração Z no tempo livre como um dos três desejos em 2015

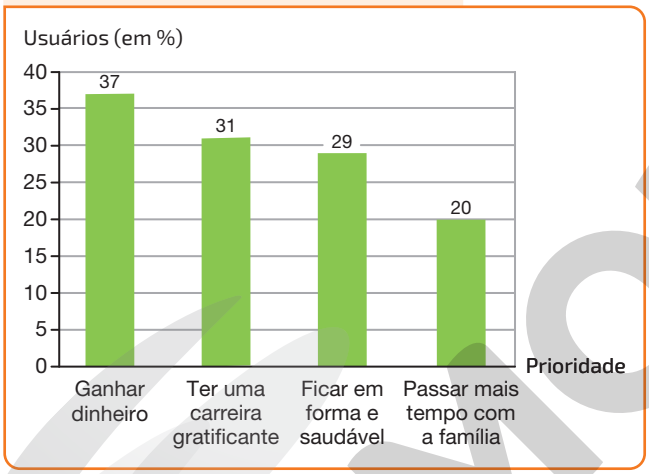


Fonte de pesquisa: Geração Global Estilos de Vida: Como vivemos, comemos, nos divertimos, trabalhamos e economizamos para o nosso futuro. *Nielsen*. Novembro, 2015. p.10.

O "Z" vem de "zapear", fazendo referência ao ato de mudar constantemente o canal de TV, caracterizando o que a geração tem em comum: fazer várias coisas ao mesmo tempo. Ouvem música, assistem TV, jogam *videogames* e interagem com amigos virtuais de várias partes do mundo.

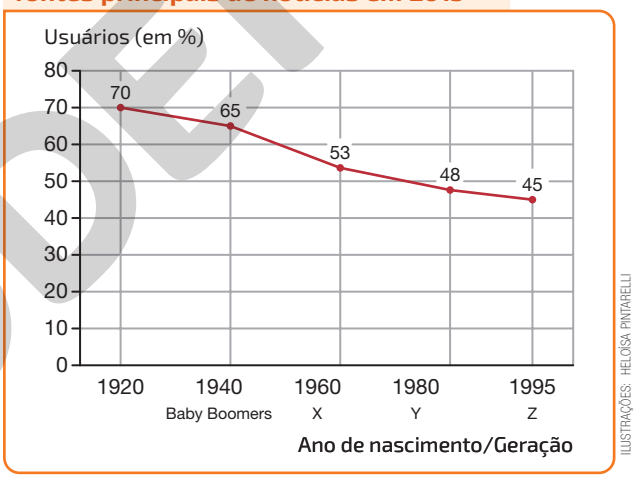
Fonte de pesquisa: MENEZES, Nayra; MORAIS, Marizangela; RASSI, Werianny. Influência da Geração "Z" na relação de consumo. *Anais*...XII Congresso Nacional de excelência em gestão & III Inovarse – Responsabilidade social aplicada. 2016. p.9. Disponível em: <https://www.inovarse.org/sites/default/files/T16_245.pdf>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Prioridades da geração Z como um dos principais três desejos em 2015



Fonte de pesquisa: Geração Global Estilos de Vida: Como vivemos, comemos, nos divertimos, trabalhamos e economizamos para o nosso futuro. *Nielsen*. Novembro, 2015. p.6.

Preferência pela TV como uma das três fontes principais de notícias em 2015



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Fonte de pesquisa: Geração Global Estilos de Vida: Como vivemos, comemos, nos divertimos, trabalhamos e economizamos para o nosso futuro. *Nielsen*. Novembro, 2015. p.4.

A Você pertence à geração Z? E seus pais ou responsáveis pertencem à geração X ou Y? Converse com eles a respeito das noções pré-concebidas dessas gerações e também sobre as informações apresentadas por meio dos gráficos.

B Pesquise a respeito de gerações anteriores à geração Z, suas características e comportamentos.

C Em sua opinião, porque a preferência pela TV como uma das três fontes principais de notícias está decrescendo de acordo com as novas gerações? Faça uma comparação com outras fontes de notícias, como o jornal impresso e a internet.

Note que os gráficos utilizados contribuem para facilitar a leitura e a interpretação das informações no contexto das gerações. Os diferentes tipos de gráficos, assim como as tabelas, são assuntos das próximas páginas.

A) Resposta pessoal. Se for conveniente, promova um momento de debate, levando os alunos a tomarem posição favorável ou contra os aspectos que caracterizam a geração Z.

B) Resposta pessoal.

C) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos relacionem o decrescimento das principais fontes tradicionais de notícias (TV, rádio e jornal impresso) devido à predileção por fontes digitais na internet.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Estudando gráficos e tabelas

Os gráficos e as tabelas são recursos estatísticos muito úteis para resumir e apresentar os resultados obtidos em uma pesquisa. As tabelas são utilizadas para organizar as informações e apresentá-las de modo mais simples ao leitor. Já os gráficos, além de simplificar a exposição dos dados obtidos na pesquisa, possibilitam uma análise mais detalhada acerca da evolução das variáveis ou de como elas se relacionam. Há diversos tipos de gráficos, e a escolha do mais adequado à situação depende de uma série de fatores, como o objetivo do pesquisador e as características das informações a serem apresentadas.

Tabelas

Assim como os gráficos, as **tabelas** devem apresentar em sua estrutura **título** e **fonte de pesquisa**. O título deve conter informações suficientes para explicitar o que está sendo apresentado. A fonte de pesquisa deve identificar a origem dos dados apresentados.

Em tabelas, os dados são apresentados em linhas e colunas, contribuindo para a leitura e a interpretação das informações.

Observe a tabela abaixo.

título

Pontos mais elevados do Brasil em 2015

Nome (estado)	Altitude (m)
Pico da Neblina (AM)	2 995,30
Pico 31 de Março (AM)	2 974,18
Pico da Bandeira (MG/ES)	2 891,32
Pedra da Mina (MG/SP)	2 798,06
Pico das Agulhas Negras (MG/RJ)	2 790,94
Pico do Cristal (MG)	2 769,05
Monte Roraima (RR)	2 734,05

fonte de pesquisa

Fonte de pesquisa: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2016-02/ibge-reve-altitudes-de-sete-picos-brasileiros-pico-da-neblina-fica-mais-alto>. Acesso em: 7 jul. 2020.

Analisando essa tabela, chegamos a algumas conclusões, como as apresentadas a seguir.

- O ponto que possui a maior altitude no Brasil é o Pico da Neblina.
- Pico do Cristal, em Minas Gerais, tem 2 769,05 m de altitude.

Note que, para chegarmos a essas conclusões, temos que observar a tabela horizontalmente, ou seja, analisar suas linhas. Contudo, há tabelas em que devemos analisar, simultaneamente, as linhas e as colunas. Essas são as **tabelas de dupla entrada**. Observe.

EDSON SATO/PULSAR IMAGENS

Estudantes indígenas da etnia guarani-kaiowá desfilando em comemoração ao Sete de Setembro, na cidade de Amambai, no estado de Mato Grosso do Sul em 2012.

População indígena no Brasil, segundo a situação do domicílio, nos censos demográficos de 1991, 2000 e 2010

	1991	2000	2010
Urbana	71 026	383 298	315 180
Rural	223 105	350 829	502 783
Total	294 131	734 127	817 963

Fonte de pesquisa: <https://indigenas.ibge.gov.br/graficos-e-tabelas-2.html>. Acesso em: 7 jul. 2020.

Nessa tabela, para identificar a população indígena urbana brasileira no ano 2000, devemos observar o valor correspondente à coluna "2000" e à linha "Urbana". Nesse caso, a população era de 383 298 indígenas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

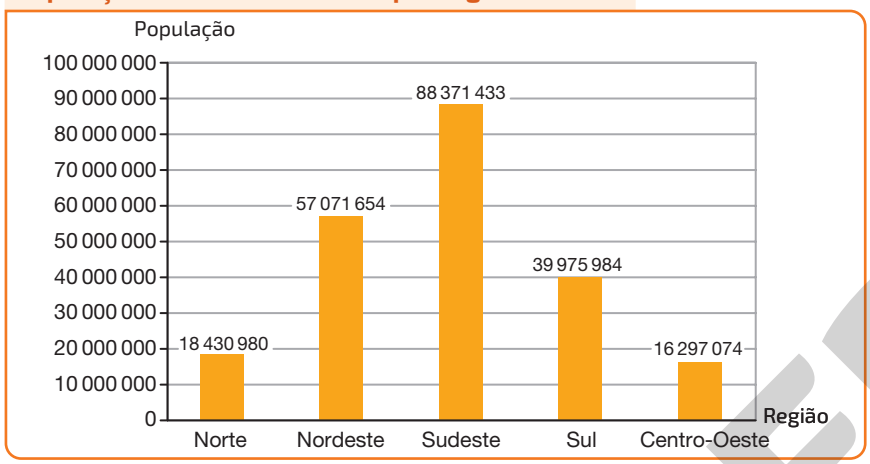
Gráfico de barras

Os gráficos de barras (ou de colunas) representam os dados pesquisados por meio de regiões retangulares que podem estar dispostas na vertical (**gráfico de barras verticais**) ou na horizontal (**gráfico de barras horizontais**). Esse tipo de gráfico é muito utilizado para comparar entre si os dados obtidos na pesquisa.

No gráfico de barras verticais, as regiões retangulares têm larguras iguais e alturas proporcionais aos valores representados. Já no gráfico de barras horizontais, as regiões retangulares têm alturas iguais e as larguras variam proporcionalmente aos valores representados. Observe os exemplos.

- Gráfico de barras verticais

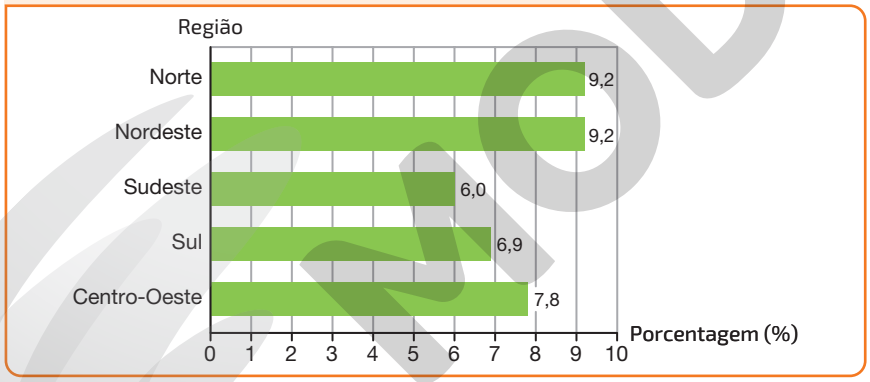
População brasileira estimada por região em 2019



Fonte de pesquisa: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9103-estimativas-de-populacao.html?5&t5downloads>. Acesso em: 7 jul. 2020.

- Gráfico de barras horizontais

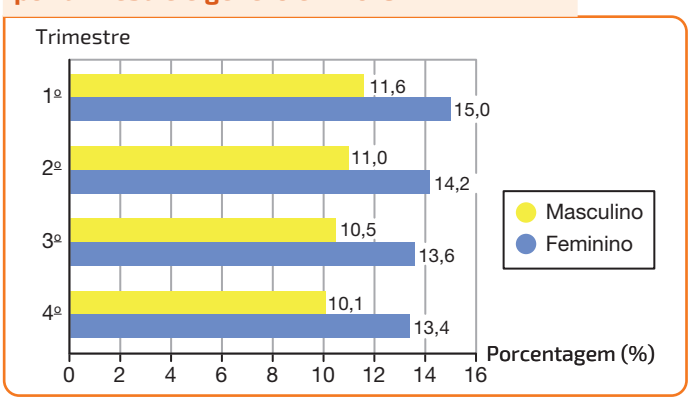
Percentual de jovens de 15 a 17 anos de idade fora da escola por região em 2018



Fonte de pesquisa: <https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/media/com_mediaibge/arquivos/f1404e8068f13a84a53a9d0b7ca997e3.pdf>. Acesso em: 7 jul. 2020.

Há também os gráficos de barras múltiplas, em que é possível representar mais de um fenômeno no mesmo gráfico de barras verticais ou horizontais, contribuindo para a comparação e a verificação de relações entre eles. Observe um exemplo.

Taxa de desocupação da população brasileira por trimestre e gênero em 2018



Fonte de pesquisa: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/9173-pesquisa-nacional-por-amostra-de-domicilios-continua-trimestral.html>. Acesso em: 7 jul. 2020.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

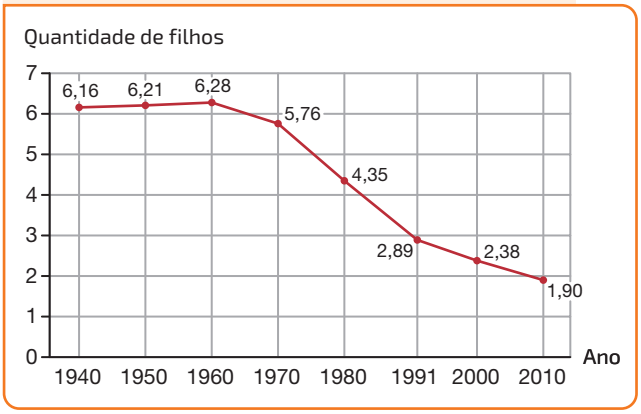
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Gráfico de linhas

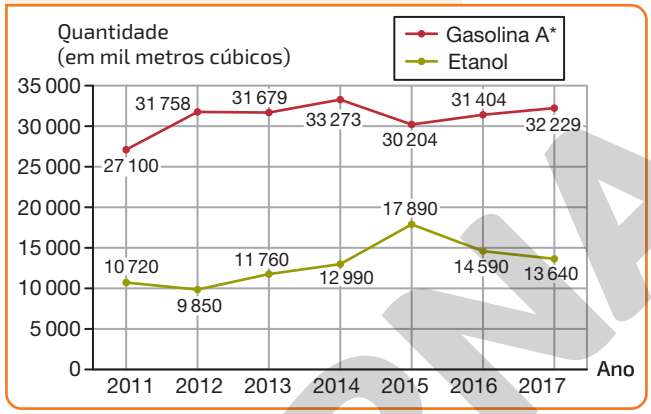
Os gráficos de linhas (ou gráficos de segmentos) são utilizados, em geral, para representar a variação contínua de um fenômeno no decorrer do tempo. Esse tipo de gráfico facilita suposições em relação a tendências do fenômeno pesquisado em períodos de tempo posteriores ao apresentado, como crescimento, decrescimento ou constância. Observe os exemplos.

Taxa de fecundidade no Brasil de 1940 a 2010



Fonte de pesquisa: <https://cnae.ibge.gov.br/en/component/content/article/95-7a12/7a12-vamos-conhecer-o-brasil/nosso-povo/1472-nupcialidade-e-fecundidade.html?Itemid=6160>. Acesso em: 7 jul. 2020.

Vendas internas anuais de gasolina e etanol no Brasil – 2011 a 2017



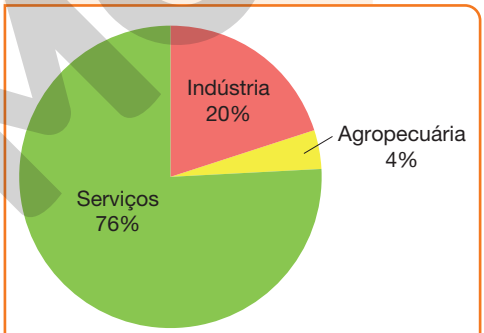
Fonte de pesquisa: <http://www.anp.gov.br/images/Palestras/seminario_avaliacao_2018.pdf>. Acesso em: 7 jul. 2020.

*Gasolina A: gasolina sem etanol, vendida pelos produtores e importadores de gasolina

Gráfico de setores

Os gráficos de setores, em geral, são utilizados para comparar as partes de um conjunto de dados com o todo. Para isso, costuma-se utilizar a porcentagem correspondente a cada uma dessas partes. Esse gráfico consiste em um círculo dividido em tantas partes quantas forem as divisões dos dados, e cada setor obtido é proporcional à parte por ele representada. Observe o exemplo.

Distribuição do PIB brasileiro por setor em 2019



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <https://sidra.ibge.gov.br/Tabela/1846>. Acesso em: 7 jul. 2020.

É possível obter a medida do ângulo central correspondente a cada setor do gráfico acima. Para isso, indicaremos por x_A, x_B, x_C o ângulo central correspondente ao setor agropecuária, indústria e serviços, respectivamente, e utilizaremos uma regra de três.

- Agropecuária:

$$\underbrace{\overbrace{1}^{100\%}}_{4\%} = \frac{360^\circ}{x_A} \Rightarrow x_A = 14{,}4^\circ$$

- Indústria:

$$\underbrace{\overbrace{1}^{100\%}}_{20\%} = \frac{360^\circ}{x_B} \Rightarrow x_B = 72^\circ$$

- Serviços:

$$\underbrace{\overbrace{1}^{100\%}}_{76\%} = \frac{360^\circ}{x_C} \Rightarrow x_C = 273{,}6^\circ$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

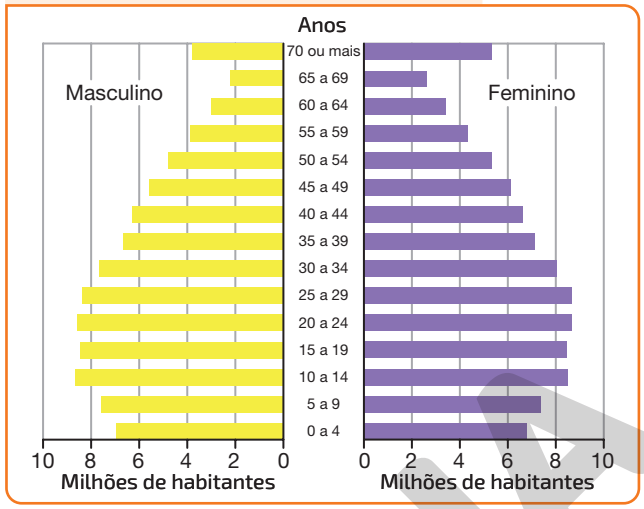
MODERNA

Pirâmide etária

As pirâmides etárias são um tipo de gráfico utilizado para representar uma população cuja distribuição está disposta em faixas etárias. Nesse tipo de gráfico, costuma-se organizar os dados de maneira que na parte inferior (base) estejam as faixas etárias dos mais jovens e, na parte superior (topo), as faixas etárias dos mais idosos.

No exemplo ao lado, além das faixas etárias, a população também está organizada por gênero: masculino e feminino.

População do Brasil em 2010, classificada por gênero e faixa etária



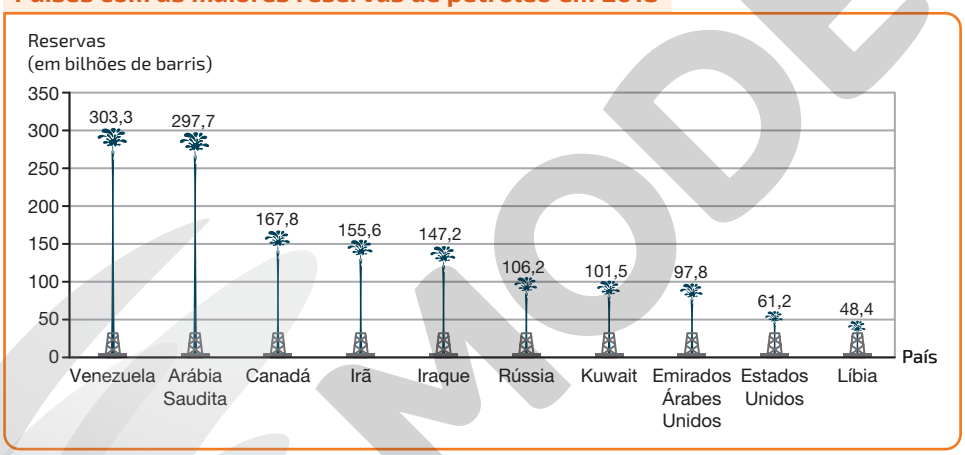
Fonte de pesquisa: <https://www.ibge.gov.br/censo2010/apps/sinopse/webservice/>. Acesso em: 7 jul. 2020.

Pictograma

Os pictogramas ou gráficos pictóricos são gráficos que utilizam em sua apresentação figuras, fotos ou outros recursos visuais relacionados ao contexto tratado. Essas imagens tornam o pictograma mais atrativo ao leitor e, por isso, é um tipo de gráfico muito utilizado em revistas, jornais etc.

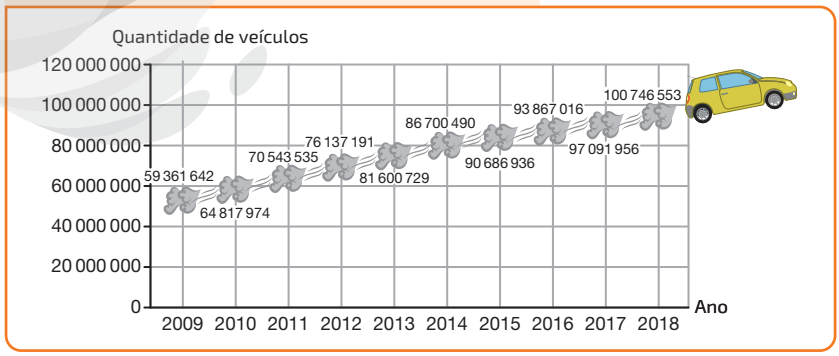
Veja a seguir algumas situações envolvendo pictogramas.

Países com as maiores reservas de petróleo em 2018



Fonte de pesquisa: Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis. *Anuário estatístico brasileiro do petróleo, gás natural e biocombustíveis: 2019*. Rio de Janeiro: ANP, 2019.

Frota de veículos no Brasil de 2009 a 2018



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pesquisa/22/28120?tipo5grafico>. Acesso em: 7 jul. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Construção de gráficos

Veja mais informações sobre a planilha eletrônica Calc no Suplemento para o professor.

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Além disso, elas possibilitam a organização de dados e contêm recursos para realizar cálculos, esboçar gráficos, restringir dados, fazer preenchimentos automáticos, entre outras funcionalidades. Algo importante a destacar é que uma planilha se divide em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (indicada por um número) com uma coluna (indicada por uma letra). As planilhas eletrônicas são úteis para abordar diversos assuntos, como aqueles relacionados à Estatística.

Apresentaremos a seguir a construção de gráficos de barras e de setores. Para isso, vamos utilizar o Calc, que é uma das planilhas eletrônicas disponíveis atualmente.

- **Gráfico de barras**

Neste exemplo, organizaremos os dados apresentados na tabela ao lado em um gráfico de barras vertical.

As informações apresentadas na tabela e no gráfico são fictícias.

Distribuição dos cursos por área de conhecimento na Universidade Y em 2020

Área de conhecimento	Quantidade de cursos
Exata	13
Humana	8
Biológica	9
Tecnológica	10

Fonte de pesquisa: Reitoria da Universidade.

A Preencha as células com os dados da tabela, conforme segue.

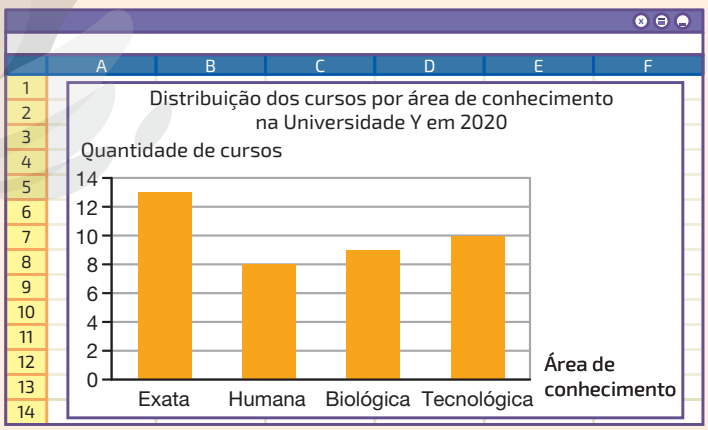
	A	B
1	Exata	13
2	Humana	8
3	Biológica	9
4	Tecnológica	10

SÉRGIO L. FILHO

B Selecione o intervalo **A1:B4**, clique em **Inserir** e selecione **Gráfico...**. No campo **Tipo de Gráfico**, na janela **Assistente de gráficos**, selecione a opção **Coluna**. Em seguida, clique em **Elementos do gráfico** e preencha o título do gráfico e o nome dos eixos. Por fim, clique em **Concluir**.

Nesse caso, o título do gráfico é "Distribuição dos cursos por área de conhecimento na Universidade Y em 2020" e o nome dos eixos X e Y são, respectivamente, "Área de conhecimento" e "Quantidade de cursos".

C Para alterar algum elemento do gráfico, basta clicar sobre ele com o botão direito do *mouse* e selecionar a opção desejada. É possível ainda reposicionar e/ou redimensionar um elemento clicando sobre ele e fazendo os ajustes.



RONALDO INÁCIO E SÉRGIO L. FILHO

A fonte de pesquisa do gráfico deve ser adicionada, por exemplo, em uma célula da planilha ou no arquivo em que o gráfico será utilizado.

Para esboçar um gráfico de barras horizontais, basta selecionar, no campo **Tipo de Gráfico**, na janela **Assistente de gráficos**, a opção **Barras**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

• **Gráfico de setores**

Neste exemplo, organizaremos os dados apresentados na tabela em um gráfico de setores.

As informações apresentadas na tabela e no gráfico são fictícias.

Satisfação dos consumidores do produto X no Mercado A em 2020

Satisfação	Quantidade de clientes (%)
Muito satisfeito	55
Satisfeito	33
Insatisfeito	12

Fonte de pesquisa: RH da empresa que produz o produto X.

A Preencha as células com os dados da tabela, conforme segue.

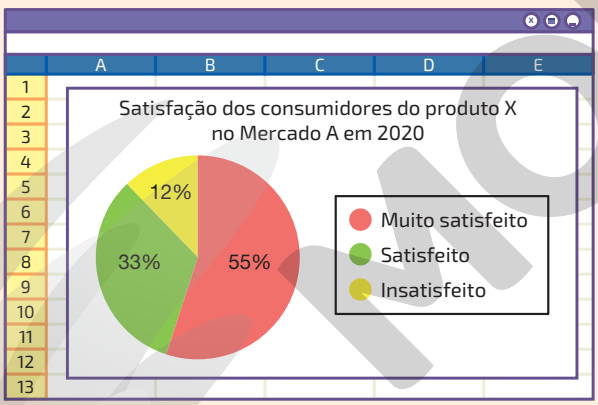
	A	B
1	Muito satisfeito	55
2	Satisfeito	33
3	Insatisfeito	12

SERGIO L. FILHO

B Selecione o intervalo **A1:B3**, clique em **Inserir** e selecione **Gráfico...**. No campo **Tipo de Gráfico**, na janela **Assistente de gráficos**, selecione a opção ***Pizza***. Em seguida, clique em **Elementos do gráfico** e preencha o título do gráfico. Por fim, clique em **Concluir**.

Nesse caso, o título do gráfico é "Satisfação dos consumidores do produto X no Mercado A em 2020".

C Clique no gráfico de setores com o botão direito do *mouse* e selecione a opção **Inserir rótulos de dados**. Em seguida, clique novamente com o botão direito no mesmo local e selecione **Formatar rótulo de dados**. No campo **Rótulo de dados**, desmarque a opção **Mostrar valor como número** e marque a opção **Mostrar valor como porcentagem**. Por fim, clique em **OK**.



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

A fonte de pesquisa do gráfico deve ser adicionada, por exemplo, em uma célula da planilha ou no arquivo em que o gráfico será utilizado.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Com base nos dados da tabela da página **98**, relativos aos pontos mais elevados do Brasil em 2015, construa dois gráficos: um de barras verticais e outro de setores. Em sua opinião, qual gráfico é o mais adequado para representar essas informações? Por quê?

2 Com o professor, faça uma pesquisa para determinar qual área de conhecimento seus colegas de sala de aula desejam estudar no Ensino Superior: exata, humana, biológica ou tecnológica. Depois, construa um gráfico de setores para representar os dados obtidos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

3. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor**. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem as questões, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

1 A falta de água potável em diversas regiões do mundo já é uma realidade. Desde o tratamento adequado de esgotos residenciais e industriais, passando pelo uso correto da água na agricultura, até o combate ao desperdício de água em situações corriqueiras, como o banho, são exemplos de atitudes que devemos tomar para garantir a nossos descendentes o direito a esse bem vital.

As tabelas a seguir apresentam algumas informações relacionadas à água.

I **Consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras em 2017**

	Consumo diário (litros/habitante)
Brasil	153,6
Norte	132,3
Nordeste	113,6
Sudeste	180,3
Sul	145,2
Centro-Oeste	146,1

Fonte de pesquisa: <http://www.snis.gov.br/diagnostico-anual-agua-e-esgotos/diagnostico-ae-2017>. Acesso em: 8 jul. 2020.

II **Quantidade de água necessária para produzir alguns produtos em 2018**

Produto (1 kg)	Quantidade de água (em litros)
Algodão	9 980
Arroz	2 497
Açúcar	1 782
Leite	1 020
Milho	1 222

Fonte de pesquisa: <http://conteudo.ebc.com.br/portal/projetos/2018/especiais-agua/agua-invisivel/>. Acesso em: 8 jul. 2020.

a) Quais dados são apresentados em cada tabela?

b) Qual região brasileira apresentou menor consumo médio de água por habitante em 2017? E qual apresentou maior consumo? Nordeste; Sudeste

c) Em 2017, o Brasil tinha cerca de 207 milhões de habitantes. Quantos litros de água, aproximadamente, foram consumidos diariamente no Brasil em 2017? $3{,}2 \cdot 10^{10}$ ℓ

d) Dos produtos apresentados na tabela II, quais necessitam de uma quantidade de água inferior a 4 000 ℓ para que sejam produzidos 2 kg desses itens? açúcar; leite; milho

e) Quantos litros de água, no total, são necessários para produzir 500 g de cada um dos produtos apresentados na tabela II? 8 250,5 ℓ

f) Calcule quantos litros de água, em média, foram consumidos em 2017 na sua região por uma família com o mesma quantidade de integrantes que a sua. Resposta pessoal.

2 Visando a doação voluntária de sangue, diversas campanhas são frequetemente promovidas pelo Ministério da Saúde em regiões com menores quantidade de doadores, para manter os estoques dos hemocentros. Essas campanhas são realizadas com base nos dados publicados pela Agência Nacional de Vigilância Sanitária, a Anvisa, e um dos principais dados avaliados é a taxa de doação de sangue, determinada pela razão entre o total de doadores e de habitantes.

a) Norte e Nordeste. Espera-se que os alunos respondam que a intensificação foi bem-sucedida, pois, em 2018, houve um aumento na taxa de doação nessas regiões, quando comparado com 2017.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2017 e 2018

	Região				
	Norte	Nordeste	Sudeste	Centro-Oeste	Sul
2017	0,69%	1,27%	2,28%	2,17%	2,06%
2018	1,03%	1,39%	2,10%	1,00%	1,44%

Fontes de pesquisa: BRASIL. *6º Boletim Anual de Produção Hemoterápica*. Agência Nacional de Vigilância Sanitária, 2017. p. 4.

BRASIL. *7º Boletim Anual de Produção Hemoterápica*. Agência Nacional de Vigilância Sanitária, 2018. p. 4.

A partir dos resultados são determinadas as regiões priotárias para as campanhas, intensificando-as nas regiões com taxa de doação abaixo da taxa nacional.

a) Se em 2017 a taxa de doação nacional foi de 1,81%, em quais regiões brasileiras as campanhas deveriam ser intensificadas em 2018? De acordo com os dados de 2018, podemos concluir que a intensificação foi bem-sucedida?

b) Sabendo que em 2018 a taxa de doação brasileira foi de 1,61%, determine em quais regiões brasileiras as campanhas deveriam ser intensificadas. Norte; Nordeste; Centro-Oeste; Sul

3 **Elaborando**

Com base na tabela a seguir, construa, com o auxílio de uma planilha eletrônica, um gráfico de barras horizontais e elabore algumas questões. Depois, troque suas questões com um colega e, ao final, verifiquem se as resoluções estão corretas.

A tarefa 3 propõe aos alunos que elaborem algumas questões utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Distribuição do rebanho bovino nas regiões brasileiras em 2018

Região	Distribuição (%)
Centro-Oeste	34,6
Norte	22,8
Sudeste	17,4
Nordeste	13,0
Sul	12,2

Fonte de pesquisa: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/3939#resultado>. Acesso em: 8 jul. 2020.

1. a) Na tabela I é apresentado o consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras, no ano de 2017. Na tabela II é apresentada a quantidade de água necessária para produzir alguns produtos em 2018.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

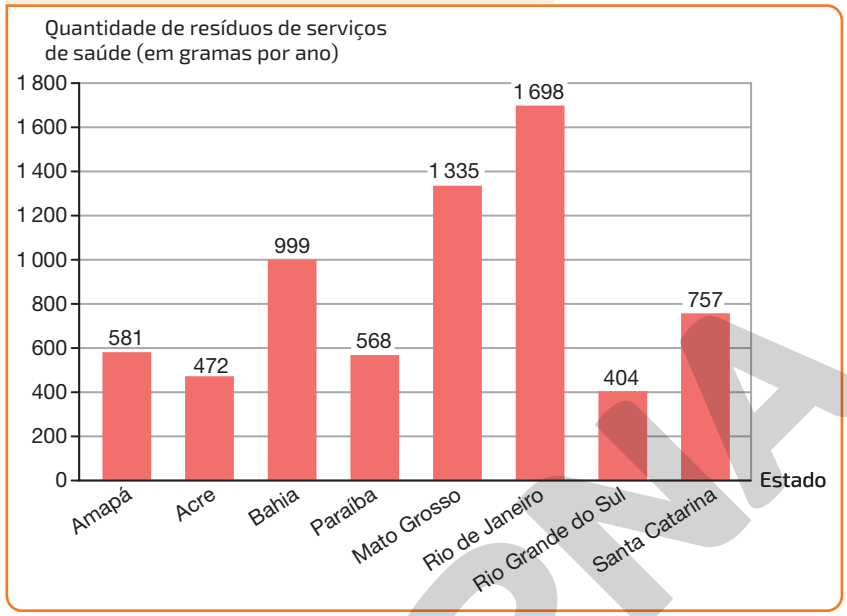
MODERNA

4 Observe o gráfico e resolva o que se pede.

a) Podemos afirmar que a quantidade diária de resíduos de serviços de saúde produzida no Acre é menor do que a quantidade produzida no Amapá? Justifique sua resposta.

b) Em 2018, a população urbana do estado da Paraíba era cerca de 3 996 496 habitantes. Calcule a quantidade aproximada, em quilogramas, de resíduos de serviços de saúde produzida durante o ano. 2 270 009,7 kg

Produção de resíduos de serviços de saúde por pessoa em alguns estados em 2018



Fonte de pesquisa: <https://abrelpe.org.br/panorama/>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Ser consciente

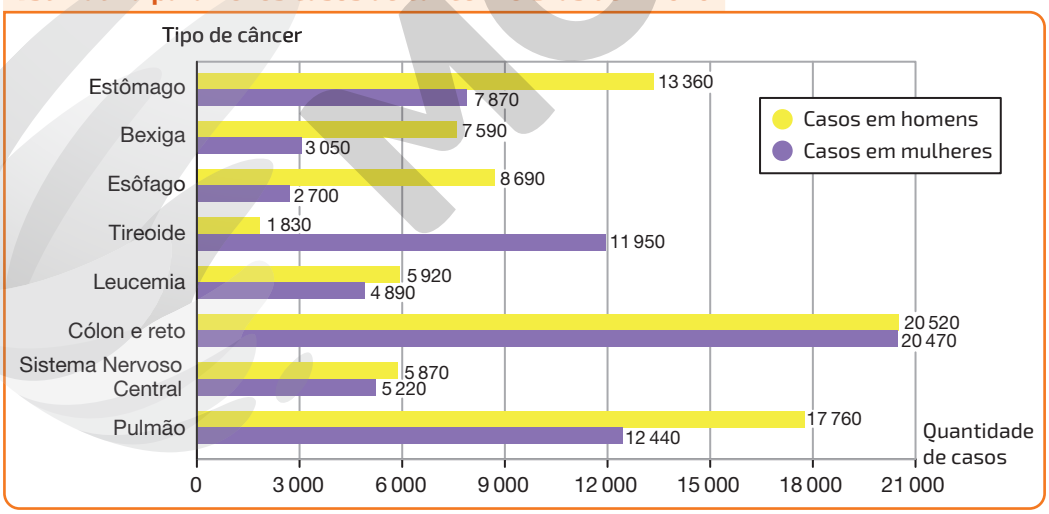
> Cite algumas medidas que podemos tomar para diminuir a produção de lixo. Resposta pessoal.

4. a) Não, pois os dados apresentados nessa tabela são referentes à produção por pessoa. Para fazer uma comparação quantitativa, é necessário conhecer a quantidade de habitantes de cada um dos estados em questão.

5 O câncer é uma patologia que pode atacar diversas partes do organismo, não possui sintomas específicos e pode ser detectado em vários estágios de evolução. As causas do câncer podem ser externas (relacionadas ao meio ambiente, aos hábitos e aos costumes) ou internas ao organismo (na maioria das vezes, geneticamente predeterminadas). De 80% a 90% dos casos de câncer são causados por fatores externos, como o cigarro, que causa o câncer de pulmão (os fumantes têm 10 vezes mais chances de desenvolver câncer de pulmão do que os não fumantes); a exposição excessiva ao sol, que causa o câncer de pele; e alguns vírus, que podem causar a leucemia.

Fonte de pesquisa: <https://www.inca.gov.br/tabagismo>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Estimativa para novos casos de câncer no Brasil em 2020



Fonte de pesquisa: <https://www.inca.gov.br/sites/ufu.sti.inca.local/files//media/document//estimativa-2020-incidencia-de-cancer-no-brasil.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

a) Estima-se que em 2020 as mulheres serão a maioria diagnosticada com qual tipo de câncer? tireoide

b) Qual é a estimativa de novos casos de câncer de cólon e reto que serão diagnosticados no Brasil em 2020? 40 990 novos casos

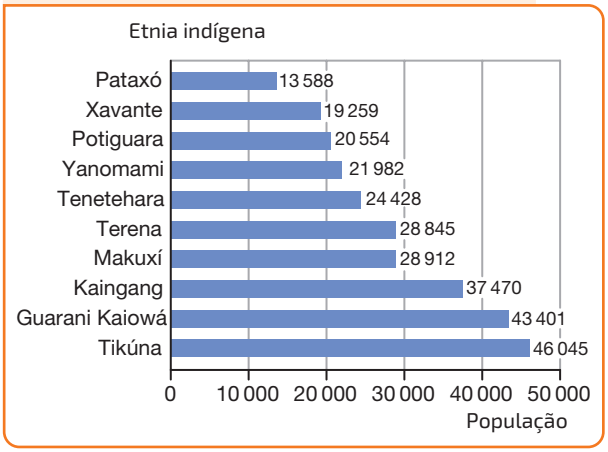
c) Da estimativa dos casos de câncer de bexiga que serão diagnosticados no Brasil em 2020, qual é o percentual aproximado de diagnósticos em homens? aproximadamente 71,3%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6 No censo demográfico realizado pelo IBGE em 2010, foram coletadas informações específicas sobre os povos indígenas, entre elas, a etnia a qual perteciam, a língua falada e se residiam ou não em terras indígenas. Observe o gráfico e resolva.

Etnias indígenas mais populosas do Brasil em 2010, segundo classificação do IBGE



RONALDO INÁCIO

a) Quais são as duas etnias com as populações mais próximas à metade da apresentada pelo povo Tikúna? Yanomami e Tenetehara

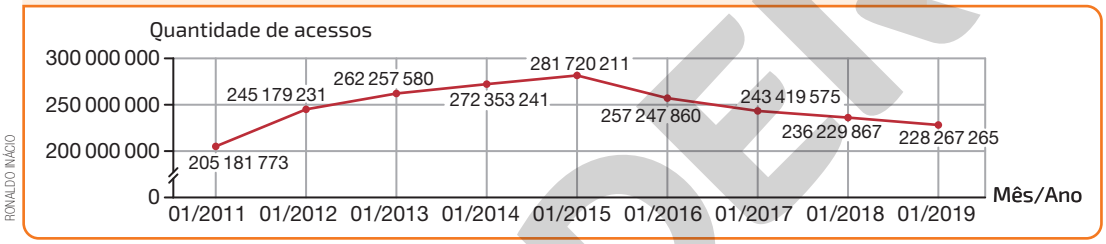
b) Calcule a população indígena aproximada que declarou pertencer a alguma etnia, sabendo que os Tikúna correspondem a 6,8% desse total. 677,1 mil

c) Junte-se a um colega e pesquisem informações sobre uma das etnias apresentadas no gráfico, como região do país onde mais se concentra e costumes próprios. Depois, compartilhem com a turma as informações pesquisadas. Resposta pessoal.

Fonte de pesquisa: <https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/95/cd_2010_indigenas_universo.pdf>. Acesso em: 8 jul. 2020.

7 Observe o gráfico.

Acessos de telefonia móvel no Brasil de janeiro de 2011 a janeiro de 2019



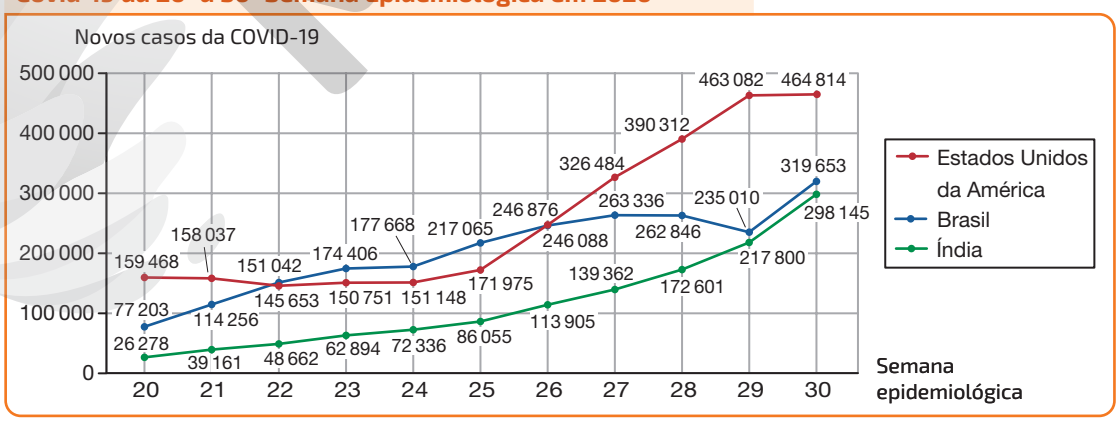
RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <https://www.anatel.gov.br/paineis/acessos/telefonia-movel>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Entre quais datas consecutivas apresentadas no gráfico ocorreu a maior variação no total de acessos de telefonia móvel no Brasil? De quanto foi essa variação?
entre 01/2011 e 01/2012; 39 997 458 acessos

8 Observe no gráfico a evolução da quantidade de novos casos confirmados do Covid-19 em alguns países, da 20ª à 30ª semana epidemiológica, correspondente ao período de 18 de maio de 2020 a 25 de julho de 2020.

Evolução da quantidade de novos casos confirmados de Covid-19 da 20ª à 30ª Semana Epidemiológica em 2020



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <https://www.saude.gov.br/boletins-epidemiologicos>. Acesso em: 4 ago. 2020.

a) Em cada país, qual é a diferença entre a quantidade de novos casos confirmados na 20ª e na 30ª semana epidemiológica? Estados Unidos da América: 309 346; Brasil: 242 450; Índia: 241 867

b) Em sua opinião, o que ocasionou o aumento da quantidade de casos confirmados de Covid-19 no Brasil durante o período apresentado? Converse com os colegas e o professor. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

9. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

9 A partir da tabela, construa um gráfico de linhas para representar a evolução da população brasileira nos anos indicados.

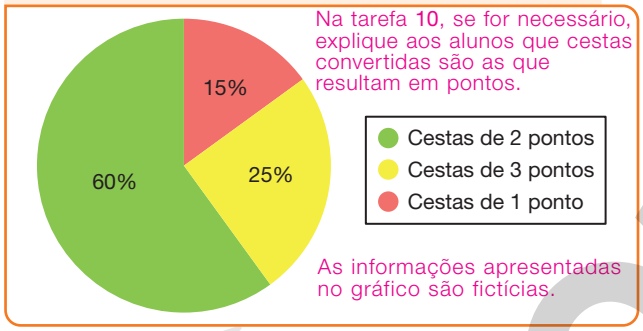
População do Brasil de 1940 a 2010

Ano	População (em quantidade de pessoas)
1940	41 236 315
1950	51 944 397
1960	70 992 343
1970	94 508 583
1980	121 150 573
1991	146 917 459
2000	169 799 170
2010	190 755 799

Fonte de pesquisa: <https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=4&uf=00>. Acesso em: 8 jun. 2020.

10 O gráfico representa as cestas convertidas por uma equipe, em uma partida de basquete, de acordo com a pontuação correspondente.

Cestas convertidas de acordo com a pontuação



Fonte de pesquisa: Súmula da partida em 2020.

a) De quantos pontos foi a maior parte das cestas convertidas pela equipe? cestas de 2 pontos

b) Sabendo que essa equipe converteu 40 cestas ao todo, qual foi a pontuação obtida por ela na partida? 84 pontos

11 Uma instituição de Ensino Superior oferece cursos de graduação em diferentes áreas de conhecimento. As informações apresentadas na tabela são fictícias.

Distribuição dos cursos por área de conhecimento na Universidade X em 2020

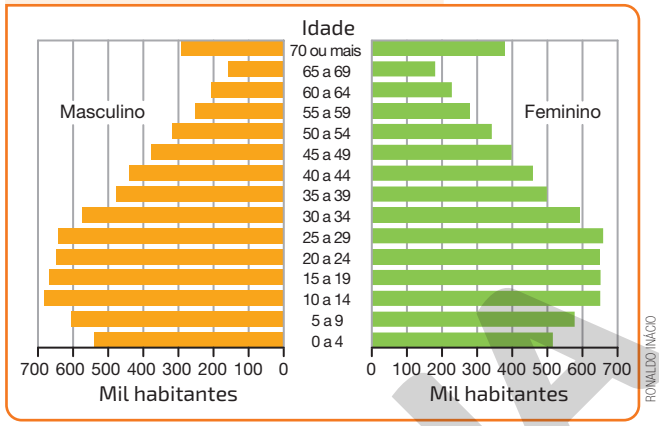
Área de conhecimento	Quantidade de cursos
Exata	14
Humana	11
Biológica	10
Tecnológica	9

Fonte: Catálogo da instituição.

Utilizando uma planilha eletrônica, construa um gráfico de setores para representar os dados da tabela. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

12 De acordo com as informações da pirâmide etária, resolva as questões.

População residente na Bahia, por gênero e grupo de idade em 2010



Fonte de pesquisa: <https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?uf=29&dados=26>. Acesso em: 8 jul. 2020.

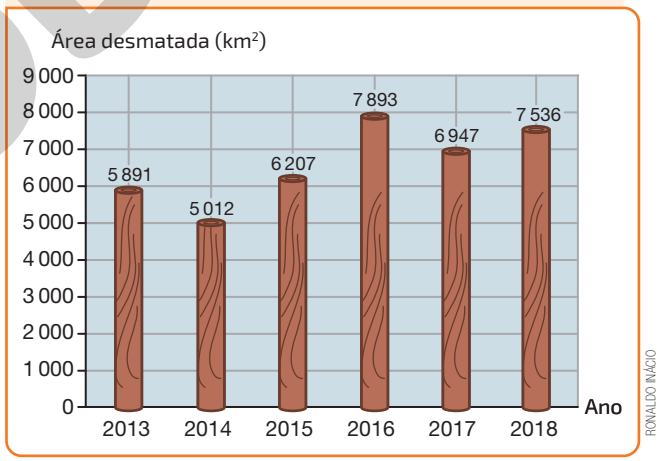
a) Quais faixas etárias possuem entre 640 mil e 650 mil indivíduos no gênero masculino? 20 a 24 anos e 25 a 29 anos

b) Na faixa etária entre 0 e 4 anos há mais pessoas do gênero masculino ou feminino? E na faixa etária entre 60 e 64? masculino; feminino

c) Aproximadamente quantas pessoas são da mesma faixa etária que você? A resposta depende da idade do aluno.

13 Observe as áreas florestais desmatadas na Amazônia Legal.

Desmatamento na Amazônia Legal de 2013 a 2018



Fonte de pesquisa: <http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes>. Acesso em: 8 jul. 2020.

a) Dos anos apresentados no gráfico, em qual foi registrada a maior área desmatada? 2016

b) Podemos afirmar que a área desmatada a cada ano, no período apresentado, foi sempre decrescente em relação ao ano anterior? Por quê? não; Espera-se que os alunos respondam que entre os anos de 2015 e 2016, por exemplo, a área desmatada foi crescente.

c) Determine, em porcentagem, o aumento na área desmatada em 2018 em relação à 2017. aproximadamente 8,5%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

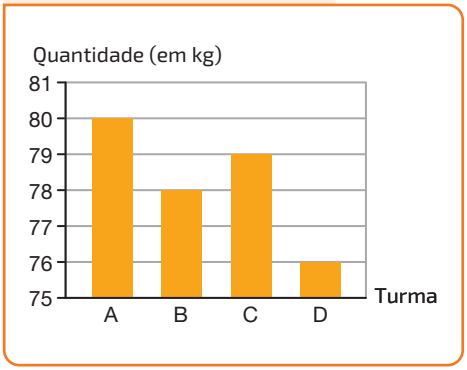
MODELO

Inadequações em gráficos e tabelas

Gráficos e tabelas estão presentes em redes sociais, canais de televisão, jornais, livros, relatórios de empresas, entre outros meios que precisam apresentar uma série de dados de maneira concisa e de fácil leitura. Porém, há algumas inadequações que podem levar a erros de interpretação. A seguir, analisaremos um exemplo.

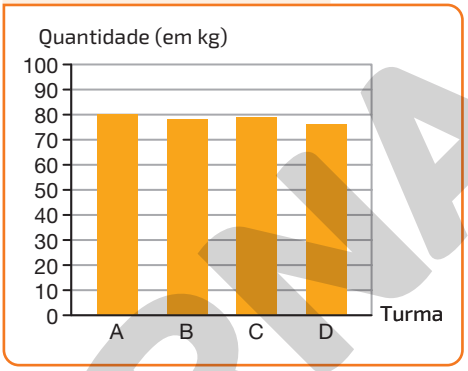
Os gráficos **I** e **II** apresentam os mesmos dados.

I **Quantidade de alimentos arrecadada pelas turmas de Ensino Médio em 2020**



Fonte de pesquisa: Coordenação da escola.

II **Quantidade de alimentos arrecadada pelas turmas de Ensino Médio em 2020**



Fonte de pesquisa: Coordenação da escola.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

As informações apresentadas nos gráficos são fictícias.

Devemos ficar atentos ao realizar leituras de gráficos e tabelas.

Note que o gráfico **I** nos induz a concluir que a quantidade de alimento arrecadada pela turma A é muito maior do que a arrecadada pelas outras turmas. Porém, ao analisarmos o gráfico **II**, em que o eixo vertical é iniciado em 0 kg, percebe-se que essa diferença é pequena. Assim, essa percepção pode parecer menor ou maior, dependendo da escala adotada, nesse caso, no eixo vertical.

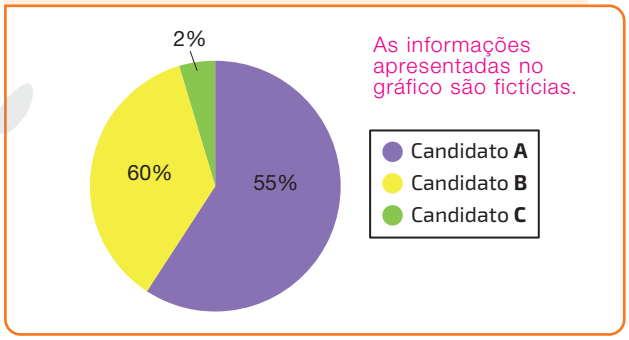
Existem inúmeras outras maneiras de tentar manipular os dados apresentados. Analisaremos outras inadequações em pesquisas nos problemas propostos na seção **Exercícios e problemas**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

14 Para verificar as intenções de votos para prefeito de certa cidade, foram entrevistados os clientes de um supermercado. Após a pesquisa, organizou-se o gráfico apresentado a seguir.

Eleições municipais para prefeito: intenção de voto da população de certa cidade em 2020



As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Fonte de pesquisa: Clientes do supermercado X.

RONALDO INÁCIO

a) Não, pois diferentes tipos de pessoas frequentam diferentes tipos de supermercados. A amostra daria unicamente indicações sobre a população constituída pelos clientes desse supermercado.

a) A amostra utilizada nessa pesquisa é representativa? Justifique sua resposta.

b) Há inadequações no gráfico apresentado nessa pesquisa? Se sim, quais?
Sim, as porcentagens somam mais do que 100%. Nesse caso, a amostra utilizada não é representativa e a área do setor correspondente a 55% é maior do que a área do setor correspondente a 60%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

15 A administração da loja *MatSong* organizou a seguinte tabela.
O nome da loja apresentada nessa tarefa é fictício e os dados apresentados na tabela são fictícios.

Quantidade de guitarras vendidas por trimestre em 2020

Loja	Quantidade			
	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre	4º trimestre
MatSong	534	732*	740*	800*
Concorrente A	545	200	120	340
Concorrente B	500	160	210	250

* Valor acumulado.

Fonte de pesquisa: Administração da loja *MatSong*.

15. b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois os valores referentes às vendas da loja *MatSong* nos 2º, 3º e 4º trimestres são acumulados, enquanto os referentes às vendas das outras lojas são trimestrais.

a) Qual loja vendeu a maior quantidade de guitarras no 1º trimestre? E no 3º trimestre? Concorrente A; Concorrente B.

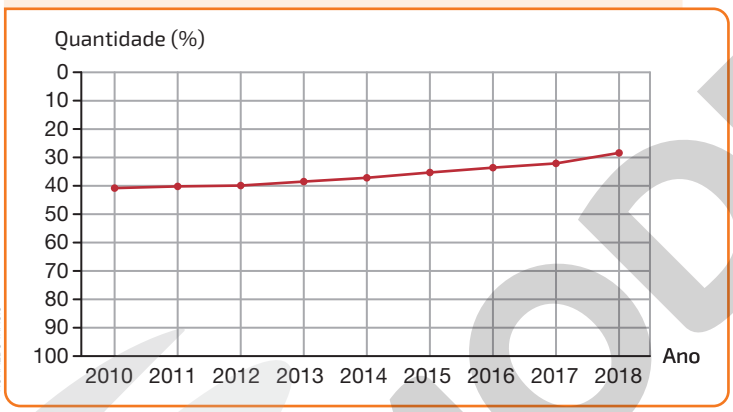
b) Em sua opinião, a Administração da loja *MatSong* utilizou algum recurso para manipular as informações apresentadas na tabela?

c) Entre as lojas apresentadas na tabela, qual vendeu a maior quantidade de guitarras em 2020? Concorrente A.

16 A fim de conhecer a situação financeira das empresas de certo estado, foram entrevistadas as cinco empresas que tiveram o maior volume de exportação no último ano. A amostra utilizada nessa pesquisa é representativa? Justifique sua resposta.
Não, pois foram analisadas apenas as empresas que tiveram o maior volume de exportação no último ano, o que, geralmente, não representa a situação financeira de todas as empresas de um estado.

17 Observe o gráfico a seguir.

Domicílios brasileiros com telefone fixo – 2010 a 2018



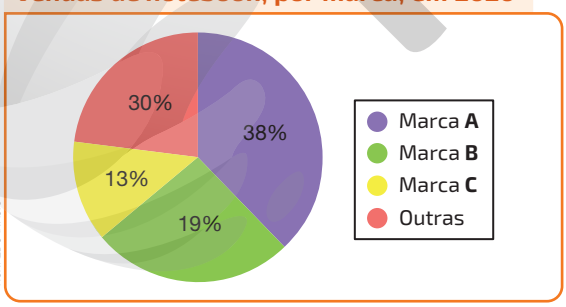
RONALDO INÁCIO

Aparentemente, houve um aumento de residências com telefone fixo entre os anos de 2010 e 2018? Quais recursos foram utilizados para nos induzir a essa interpretação?
Não. Espera-se que os alunos respondam que o eixo "Quantidade (%)" está invertido.

Fonte de pesquisa: <https://www.teleco.com.br/pnad.asp>. Acesso em: 8 jul. 2020.

18 O gráfico e a tabela a seguir apresentam as vendas de *notebook* por marca durante o ano de 2020. Porém, o gráfico contém algumas incoerências.
As informações apresentadas na tabela e no gráfico são fictícias.

Vendas de *notebook*, por marca, em 2020



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: Administração das marcas.

Vendas de *notebook*, por marca, em 2020

Marca	Quantidade (%)
A	38
B	19
C	13
D	11
E	11
F	8

Fonte de pesquisa: Administração das marcas.

a) Observe, rapidamente, o gráfico de setores. Aparentemente, a marca B vendeu mais *notebooks* que as marcas D, E e F juntas. Quais recursos foram utilizados para manipular as informações? Espera-se que os alunos respondam que a área do setor correspondente à marca B foi ampliada e a área do setor correspondente a "Outras" foi reduzida.

b) Analise cuidadosamente o gráfico e a tabela. Em seguida, determine se a marca B vendeu mais *notebooks* que as marcas D, E e F juntas.
A marca B vendeu menor quantidade de *notebook* do que as marcas D, E e F juntas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

10 Medidas de tendência central

Reduzindo distâncias

O filósofo canadense Marshall McLuhan (1911–1980) criou em 1962 o termo **Aldeia Global**, para simbolizar que, com o avanço de tecnologias da informação e comunicação, as distâncias entre países e povos se reduziam a tal ponto, que o mundo todo poderia ser analisado como uma vila, com tradições, padrões e culturas globais. McLuhan via o rádio e a televisão como um sistema nervoso de informação, bombardeando pessoas com notícias, informação sobre política e tempo. Mas sua análise ia além e leva em consideração outros dispositivos para a criação da Aldeia Global, como o desenvolvimento do automóvel, do avião, do telefone, entre outros. Ele considerava esses dispositivos extensões do corpo humano, como a televisão, que passou a levar os olhos muito além do nosso campo de visão, o rádio, que expandia nossa audição a outras partes do globo, e o automóvel que permitia aos nossos pés a capacidade de percorrer grandes distâncias. O desenvolvimento da internet e de *smartphones*, na última década, apenas realçam esse sentimento de que os *gadgets* são extensões do ser humano.

BNCC
• EM13MAT316

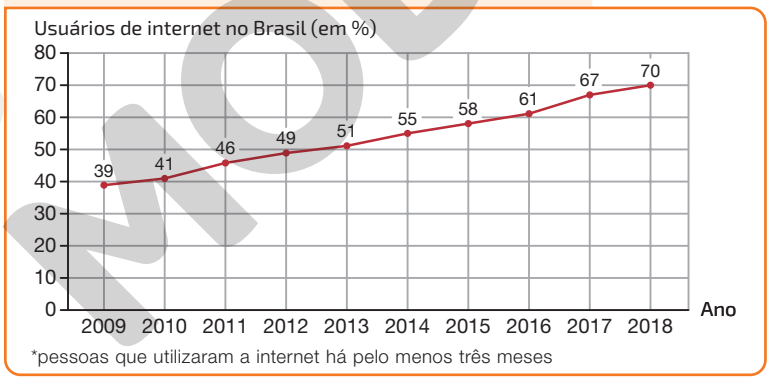
Conforme maior o total de usuários, maior é o impacto que a tecnologia gera.

Gadget: dispositivo eletrônico portátil.

A conectividade gerada por essas tecnologias é fundamental para nossa sociedade. Por exemplo, a telefonia possibilita a comunicação entre fornecedor e comprador, mesmo que estejam em continentes diferentes, garantindo que o produto seja produzido da maneira que foi encomendando. Os meios de transporte, como avião, navios e outros veículos, garantem que a entrega desse produto seja realizada. A televisão permite que a propaganda desse produto atinja seu público-alvo e a internet permite a venda para o comprador final.

A internet comercial, no Brasil, começou de modo experimental, em dezembro de 1994, com apenas cinco mil usuários. Uma implantação mais ampla começou em maio de 1995. Em pesquisa realizada em 2018, 70% dos entrevistados declararam que utilizaram internet nos últimos três meses, equivalente a 126,9 milhões de usuários, que correspondem a 25 380 vezes o total de usuários de 1994.

Usuários de internet no Brasil de 2009 a 2018*



HELOÍSA PINTARELLI

Fonte de pesquisa: <https://cetic.br/media/analises/tic_domicilios_2018_coletiva_de_imprensa.pdf>. Acesso em: 7 ago. 2020.

Tempo para atingir 50 milhões de usuários

Internet
7 anos

Celular
12 anos

Televisão
13 anos

Computador
16 anos

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

FOTOMONTAGEM DE MARIANA COAN. FOTOS: 1.IC36006/SHUTTERSTOCK; 2.POM POM/SHUTTERSTOCK; 3.PHIVE/SHUTTERSTOCK; 4.VISUAL GENERATION/SHUTTERSTOCK; 5.KAMIRA/SHUTTERSTOCK; 6.BRAT82/SHUTTERSTOCK; 7.SUJIN VAIPIA/SHUTTERSTOCK; 8.SANTI S/SHUTTERSTOCK

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Você considera que vive em uma Aldeia Global? Por quê? Resposta pessoal.

B Quantos anos a mais o telefone levou para alcançar 50 milhões de usuários em relação ao celular? 38 anos.

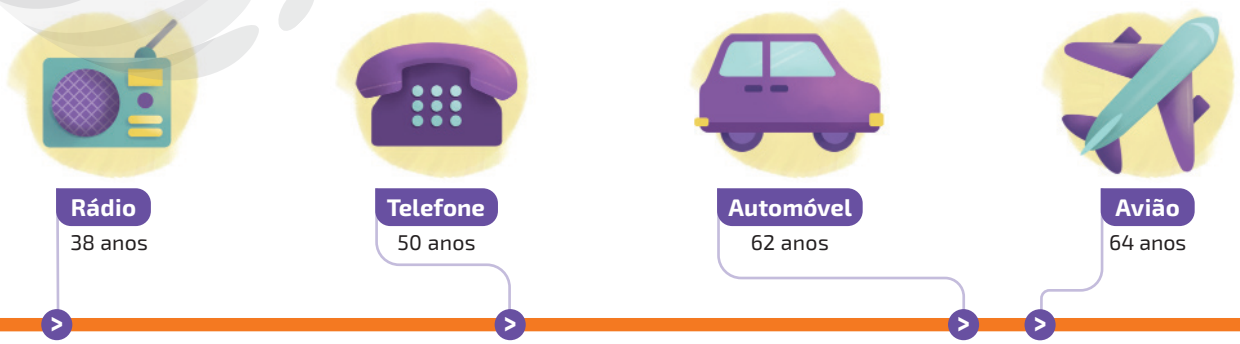
C Divida 50 milhões pelo tempo que o computador levou até atingir essa quantidade de usuários. O que esse valor representa?

D De 2009 a 2010 houve um aumento de 2% em relação aos usuários de internet no Brasil. De 2010 a 2011, esse aumento foi de 5%. Seguindo o mesmo princípio, os demais aumentos anuais foram de 3%, 2%, 4%, 3%, 3%, 6% e 3%, nessa ordem. Calcule a soma dos aumentos anuais no período de 2009 a 2018 e, em seguida, divida o resultado obtido por 9. O que esse resultado representa?

Ao trabalharmos com pesquisas, muitas vezes precisamos representar um valor único, que represente o comportamento dos dados estudados. As questões **C** e **D** são exemplos dessa representação envolvendo **média aritmética**. Nas páginas seguintes estudaremos essa e outras **medidas de tendência central**.

C) 3 125 000 usuários por ano. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos relacionem esse valor à média aritmética anual de novos usuários ou que esse resultado representa a quantidade de novos usuários de computador a cada ano, caso fosse considerada uma taxa de crescimento constante.

D) Aproximadamente 3,44%. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos relacionem esse valor à média de crescimento anual de usuários de internet no Brasil, ou seja, a cada ano, houve, em média, um aumento aproximado de 3,4% em relação aos usuários de internet.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando medidas de tendência central

As **medidas de tendência central** são utilizadas quando é necessário representar ou caracterizar, por um único valor, um conjunto de dados.

Quando dizemos, por exemplo, que a média dos rendimentos do trabalhador formal brasileiro em dezembro de 2019 era R$ 2 371,00, indicamos que esse é um valor que representa o conjunto formado pela renda de todos os trabalhadores formais brasileiros considerados na pesquisa.

Fonte de pesquisa: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/trabalho/9171-pesquisa-nacional-por-amostra-de-domicilios-continua-mensal.html?edicao=26737&t=destaques>. Acesso em: 5 ago. 2020.

Nesse tópico, iremos estudar a média aritmética, a média aritmética ponderada, a moda e a mediana, que são medidas de tendência central.

Média aritmética

A **média aritmética**, ou simplesmente média, é uma das medidas de tendência central mais utilizadas no cotidiano. Para calcular a média aritmética de dois ou mais números, adicionamos esses números e dividimos o resultado obtido pela quantidade de números adicionados.

A média aritmética $(\bar{x})$ de um conjunto de n valores $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ é:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n}$$

Exemplo

Observe a seguir o número de transplantes de fígado realizados no Brasil anualmente, de 2011 a 2018.

Transplantes de fígado no Brasil de 2011 a 2018

Ano	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Quantidade de transplantes	1 497	1 603	1 726	1 757	1 810	1 882	2 122	2 196

Fonte de pesquisa: <http://www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/RBT/2019/RBT-2019-1%20trim%20-%20Pop.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Calculando a média anual de transplantes de fígado realizados no período, temos:

$$\bar{x} = \frac{1\,497 + 1\,603 + 1\,726 + 1\,757 + 1\,810 + 1\,882 + 2\,122 + 2\,196}{8} =$$

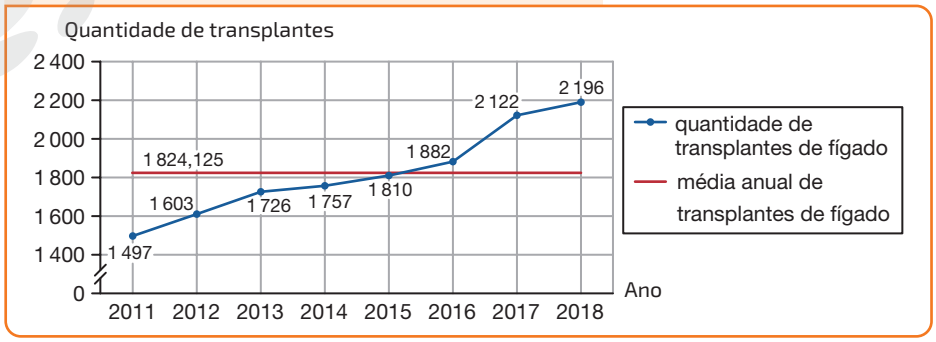
$$= \frac{14\,593}{8} = 1\,824{,}125$$

Portanto, de 2011 a 2018, foram realizados por ano, em média, 1 824,125 transplantes de fígado no Brasil.

Explique aos alunos que, mesmo quando a variável é do tipo quantitativa discreta, é conveniente utilizarmos valores decimais para representar medidas estatísticas, como a média aritmética.

No gráfico a seguir, a linha em azul indica a quantidade de transplantes de fígado, e a linha em vermelho indica a média anual.

Transplantes de fígado no Brasil de 2011 a 2018



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <http://www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/RBT/2019/RBT-2019-1%20trim%20-%20Pop.pdf>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Média aritmética ponderada

No cálculo da média aritmética visto anteriormente, cada valor do conjunto de dados tinha a mesma "importância". Contudo, há situações nas quais há valores com "importâncias" diferentes. Observe a situação a seguir.

> No processo de seleção de certa instituição de Ensino Superior, a nota do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) obtida pelo candidato tem peso 4, e a obtida no vestibular, peso 6. Se um candidato obtiver nota 70 no Enem e 50 no vestibular, qual será sua nota média final?

Note que, nessa situação, temos de levar em consideração o peso ("importância") de cada nota obtida (Enem e vestibular). Essa característica faz que seja necessária, para o cálculo da nota média final do candidato, a utilização da **média aritmética ponderada** $\left(\bar{x}_p\right)$, que é dada pela soma dos produtos de cada nota pelo respectivo peso, dividida pela soma dos pesos.

Na situação apresentada, temos:

$$\bar{x}_p = \frac{4 \cdot 70 + 6 \cdot 50}{4 + 6} = \frac{280 + 300}{10} = \frac{580}{10} = 58$$

Portanto, a nota média final do candidato foi 58.

A média aritmética ponderada $\left(\bar{x}_p\right)$ de um conjunto de n valores $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n$, cujos pesos são respectivamente $p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, p_{n-1}, p_n$, é:

$$\bar{x}_p = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 + \ldots + x_{n-1} \cdot p_{n-1} + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots + p_{n-1} + p_n}$$

Moda

Quando dizemos que algo está na moda, como uma peça de vestuário, por exemplo, estamos nos referindo a um modelo de roupa que está sendo aceito e usado por muitas pessoas. Em estatística, a **moda** (Mo) é uma medida de tendência central que consiste nos valores de maior frequência em um conjunto de dados.

Exemplo

Veja a seguir a quantidade de gols marcados nos 40 primeiros jogos do campeonato brasileiro de futebol de 2019.

2	3	2	4	3	4	5	5	4	1
1	2	3	1	2	3	3	3	3	5
2	1	3	2	2	3	1	0	1	9
1	0	3	3	3	2	4	1	0	1

Fonte de pesquisa: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2019>. Acesso em: 10 jul. 2020.

XANDY RODRIGUES/FUTURA PRESS

Jogador Arrascaeta do Flamengo no lance de seu gol de bicicleta durante a partida entre Ceará e Flamengo pelo Campeonato Brasileiro de 2019, na cidade de Fortaleza (CE).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Como você faria para determinar o total de gols marcados nesses 40 primeiros jogos do campeonato brasileiro de futebol a partir das informações ao lado?

Uma possível resposta: adicionaria os produtos de cada frequência pela respectiva quantidade de gols, cujo total é de 104 gols.

Para auxiliar na obtenção da moda da quantidade de gols marcados por partida, podemos determinar a **frequência** (f) de cada valor, ou seja, quantas vezes esse valor se repete no conjunto de dados.

Portanto, como a maior frequência (12) foi 3 gols, temos $Mo = 3$, ou seja, a moda desse conjunto de dados é 3 gols.

Gols marcados nos 40 primeiros jogos do campeonato brasileiro de futebol de 2019

Quantidade de gols marcados por jogo	Frequência
0	3
1	9
2	8
3	12
4	4
5	3

Fonte de pesquisa: <https://www.cbf.com.br/futebol-brasileiro/competicoes/campeonato-brasileiro-serie-a/2019>. Acesso em: 10 jul. 2020.

Há conjuntos de dados que não possuem moda, denominados **amodais**. Contudo, existem também aqueles que possuem mais de uma moda. Denominamos **bimodais** aqueles que possuem duas modas, **trimodais** os que possuem três modas, e assim por diante.

Exemplos

- Preço, em reais, de certo produto em diversos supermercados.

1,85	2,07	2,11	2,45	2,49	2,79	2,99

Nesse caso o conjunto dos preços é amodal, pois nenhum preço se repetiu mais vezes que outro.

- Idade, em anos, dos funcionários de certa empresa.

18	21	21	21	23	27	31	31	31	38	42	49

Nesse caso, há duas idades empatadas com maior frequência (21 anos e 31 anos), ou seja, o conjunto das idades é bimodal.

Mediana

Outra medida de tendência central muito utilizada é a **mediana** (Md).

Podemos considerar dois casos para a obtenção da mediana.

- 1º caso: conjunto de dados com quantidade **ímpar** de valores.

Nesse caso, inicialmente dispomos esses valores em **rol**, ou seja, em ordem crescente ou decrescente. A mediana irá corresponder ao termo central do rol.

Exemplo

A seguir, está indicado em ordem crescente o comprimento, em centímetros de 11 peixes criados por um piscicultor.

13	15	15	16	17	18	19	19	21	22	22

Portanto, a mediana dos comprimentos dos peixes é 18 cm.

Quando a quantidade n de valores de um conjunto de dados for ímpar, a posição do valor correspondente à mediana, com os valores dispostos em rol, é dada por $\frac{n+1}{2}$.

No exemplo acima, temos:

$$\frac{11+1}{2} = 6 \text{ (6ª posição)}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- 2º caso: conjunto de dados com quantidade **par** de valores.
  Com os valores dispostos em rol, obtemos a mediana calculando a média aritmética entre os dois termos centrais do rol.

Exemplo

A seguir, está indicado, em rol, o tamanho, em megabaites, de 14 arquivos gravados em um *pen drive*.

52,8	76	82,4	103	142,5	167,2	173,1	181,5	207,4	248,2	262,3	281	313,3	358,4

$$Md = \frac{173{,}1 + 181{,}5}{2} = \frac{354{,}6}{2} = 177{,}3$$

Portanto, a mediana do tamanho dos arquivos é 177,3 megabaites.

Quando a quantidade n de valores de um conjunto de dados for par, a posição dos valores cuja média aritmética corresponde à mediana, com os valores dispostos em rol, é dada por $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$.

No exemplo acima, temos:

$\frac{14}{2} = 7$ (7ª posição) $\qquad$ $\frac{14}{2} + 1 = 8$ (8ª posição)

Exercícios e problemas resolvidos

R1 A seguir estão apresentados os resultados de 400 candidatos aprovados em um concurso e que resolveram uma prova com 30 questões.

Total de acertos	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Quantidade de candidatos	108	80	64	54	39	29	15	7	3	1

Com base nessas informações, calcule a média aritmética, a moda e a mediana para a variável "total de acertos" e dê o significado de cada uma delas.

Resolução

- Média aritmética
  A média aritmética $(\bar{x})$ do total de acertos por candidato é:

$$\bar{x} = \frac{108 \cdot 21 + 80 \cdot 22 + 64 \cdot 23 + 54 \cdot 24 + 39 \cdot 25 + 29 \cdot 26 + 15 \cdot 27 + 7 \cdot 28 + 3 \cdot 29 + 1 \cdot 30}{108 + 80 + 64 + 54 + 39 + 29 + 15 + 7 + 3 + 1} = \frac{9\,243}{400} \simeq 23{,}1$$

  Os candidatos acertaram, em média, aproximadamente 23,1 questões.

- Moda
  A moda corresponde ao total de acertos com maior frequência, ou seja, $Mo = 21$. Logo, a quantidade de questões que mais alunos acertaram foi 21.

- Mediana
  O total de candidatos é 400 (par). Logo, as posições centrais são 200º e 201º, pois:

  - $\frac{n}{2} = \frac{400}{2} = 200$
  - $\frac{n}{2} + 1 = \frac{400}{2} + 1 = 201$

  Se organizássemos todos os candidatos em ordem crescente, de acordo com o total de acertos, veríamos que do 1º ao 108º acertaram 21 questões, do 109º ao 188º acertaram 22 questões (80 candidatos) e do 189º ao 252º acertaram 23 questões (64 candidatos).
  Logo, os candidatos de posição 200º e 201º acertaram 23 questões. Assim:

$$Md = \frac{23 + 23}{2} = 23$$

  Portanto, a quantidade mediana de acertos dos 400 candidatos é 23 acertos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 Um instituto de pesquisa entrevistou alguns consumidores em relação à qualidade de três marcas de televisores. Observe ao lado a nota média dada pelos entrevistados em três critérios e os pesos atribuídos pelo instituto para o cálculo da média final.

Qual marca de televisor obteve a maior média final?

Critério	Marca do televisor			Peso
	A	B	C	
Qualidade de imagem	8	7	9	5
Qualidade de som	7	8	6	3
Preço	6	6	4	2

Resolução

Indicando por $\bar{x}_{p_A}$, $\bar{x}_{p_B}$ e $\bar{x}_{p_C}$ as médias finais dos televisores das marcas **A**, **B** e **C**, respectivamente, temos:

- $\bar{x}_{p_A} = \frac{8 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{5 + 3 + 2} = \frac{73}{10} = 7{,}3$
- $\bar{x}_{p_B} = \frac{7 \cdot 5 + 8 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{5 + 3 + 2} = \frac{71}{10} = 7{,}1$
- $\bar{x}_{p_C} = \frac{9 \cdot 5 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{5 + 3 + 2} = \frac{71}{10} = 7{,}1$

Portanto, a marca **A** obteve maior média final.

R3 (Enem, 2014) Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o:

a) **1** b) **2** c) **3** d) **4** e) **5**

Resolução

Calculando a média para cada reagente, temos:

- Reagente **1**: $\frac{1 + 6 + 6 + 6 + 11}{5} = \frac{30}{5} = 6$
- Reagente **2**: $\frac{0 + 6 + 7 + 6 + 5}{5} = \frac{24}{5} = 4{,}8$
- Reagente **3**: $\frac{2 + 3 + 8 + 10 + 11}{5} = \frac{34}{5} = 6{,}8$
- Reagente **4**: $\frac{2 + 4 + 7 + 8 + 12}{5} = \frac{33}{5} = 6{,}6$
- Reagente **5**: $\frac{1 + 2 + 9 + 10 + 11}{5} = \frac{33}{5} = 6{,}6$

Comparando a média para cada reagente com os resultados do quadro, observamos que o reagente **2** é o que atende ao critério do pesquisador, pois é o que possui a maior quantidade de resultados acima da média (4 resultados).

Portanto, a alternativa correta é a **b**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Média, moda e mediana

Nesta seção, vamos calcular, com o auxílio da planilha eletrônica Calc, a média, a moda e a mediana de um conjunto de dados. Veja mais informações sobre a planilha eletrônica Calc no Suplemento para o professor.

A Preencha as células com os dados apresentados abaixo.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	5	8	10	1	10	5	3
2	8	2	4	6	2	6	5	1
3	1	5	4	8	9	3	7	0

B Nas células **A5**, **B5** e **C5** digite “Média”, “Moda” e “Mediana”, respectivamente.

C Para calcular a média do conjunto de dados, digite =MÉDIA(A1:H3) na célula **A6** e pressione a tecla **Enter**.

D Para calcular a moda do conjunto de dados, selecione um intervalo com uma quantidade de células igual ao número de modas que deseja localizar no conjunto de dados (nesse caso, vamos selecionar o intervalo **B6:B8**, contendo 3 células). Em seguida, digite =MODO.MULT(A1:H3) e pressione **Ctrl**+**Shift**+**Enter**.

Caso o conjunto de dados não possua moda, o programa apresentará uma mensagem de erro nas células selecionadas. Agora, se o conjunto de dados tiver uma única moda, esse valor será exibido em todas as células selecionadas.

E Para calcular a mediana do conjunto de dados, digite =MED(A1:H3) na célula **C6** e pressione a tecla **Enter**.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	5	8	10	1	10	5	3
2	8	2	4	6	2	6	5	1
3	1	5	4	8	9	3	7	0
4								
5	Média	Moda	Mediana					
6	4,75	1	5					
7		5						
8		#N/D						

A imagem apresenta o exemplo em que, ao executar o passo **D**, foram selecionadas três células. Como o conjunto de dados é bimodal, foi exibido um erro na terceira célula.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Ao calcular a moda de um conjunto de dados, o usuário selecionou três células e digitou os comandos necessários, conforme apresentado na seção. Sabendo que foram exibidos os valores 1, 4 e 7, é possível afirmar que essas são as únicas modas do conjunto de dados? Justifique sua resposta.

2 O quadro apresenta o tempo diário, em minutos, em que João jogou *videogame* durante todos os dias no último mês.

62	55	0	20	80	0	20	55	68	95
30	55	0	0	120	55	60	49	32	30
88	57	65	45	36	38	42	100	25	37

Calcule a média, a moda e a mediana dos minutos em que João jogou *videogame* nesse mês.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

6. a) Não, pois sua média aritmética final será de, aproximadamente, 6,8, que é inferior à nota média mínima.

6. c) Sim, pois, para não ser eliminada na prova prática, a nota de Fátima deve ser igual ou superior a 5, nota com a qual sua média final ficará acima de 7.

1 Calcule a média aritmética, a moda e a mediana de cada conjunto de valores.

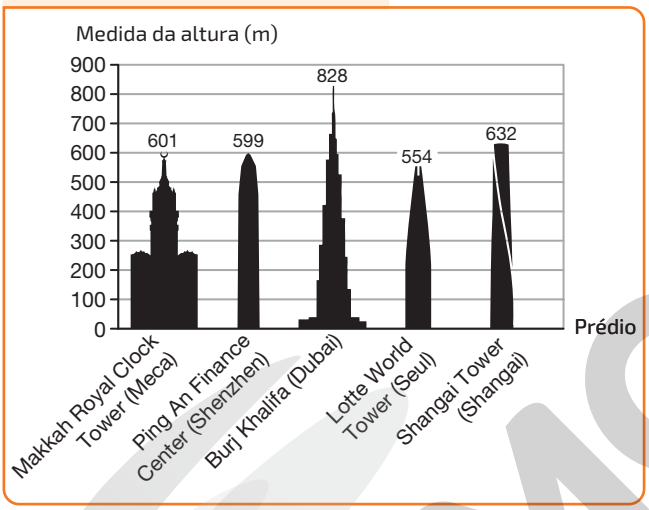
a) 3 8 15 5 3 12 7 11
média: 8; moda: 3; mediana: 7,5

b) −6 −4 −7 −11 −3 −1 −6 −7 −10 −19 0 −25 −22 −2 −15
média: −9,2; moda: −6 e −7; mediana: −7

c) −20 5 8 −1 12 −24 6 10 −3 16 −1 −8 0
média: 0; moda: −1; mediana: 0

2 Os avanços tecnológicos na construção civil permitem a edificação de prédios cada vez mais altos. Observe a altura de alguns dos prédios mais altos do mundo.

Altura de alguns dos prédios mais altos do mundo em 2020



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <http://www.skyscrapercenter.com/buildings>. Acesso em: 10 jul. 2020.

a) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana das alturas desses prédios.
média: 642,8 m; amodal; mediana: 601 m

b) Qual prédio deve ser desconsiderado para que a média das alturas diminua? Nesse caso, qual seria essa média? Burj Khalifa; 596,5 m

3 Felipe tem o dobro da idade de seu filho e metade da idade de seu pai. Sabendo que a média da idade dos três é 49 anos, qual é a idade de cada um deles? Felipe: 42 anos; filho: 21 anos; pai: 84 anos

4 Após ter realizado uma prova A com peso 7 e obtido nota 6,5, Carlos realizará uma prova B, com peso 5. Sabendo que para ser aprovado ele deve obter a média ponderada das notas das provas A e B igual ou superior a 7, qual é a nota mínima que Carlos deve obter na prova B? 7,7

5 A seguir é apresentada a quantidade de alunos de cada uma das três turmas do Ensino Médio de um colégio, e as notas médias em Matemática de cada uma delas, em certo bimestre. Qual foi a média geral em Matemática nessas três turmas, no bimestre? 67

Turma	Quantidade de alunos	Nota média em Matemática
A	24	77
B	30	59
C	26	67

6 Certo concurso público era composto por três etapas: prova de conhecimentos gerais, prova de conhecimentos específicos e prova prática. Para ser aprovado nesse concurso, o candidato não poderia obter em nenhuma das etapas nota inferior a 5 pontos, e a média aritmética final das três notas tinha de ser igual ou superior a 7 pontos.

Veja a seguir as notas obtidas por três candidatos nas duas primeiras etapas desse concurso.

Candidato	Conhecimentos gerais	Conhecimentos específicos
Amanda	5,2	6,3
Pedro	6,5	7,2
Fátima	7,8	8,3

a) Caso Amanda obtenha nota 9 na prova prática, ela será aprovada? Por quê?

b) Qual é a nota mínima que Pedro deve obter na prova prática para que seja aprovado? 7,3

c) É possível afirmar que se Fátima não for eliminada na prova prática ela será aprovada? Justifique sua resposta.

7 (Enem, 2015) Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos: alternativa d

Raia	1	2	3	4
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80

Raia	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é:

a) 20,70 c) 20,80 e) 20,90
b) 20,77 d) 20,85

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

A tarefa **10** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

No contexto

8 As redes sociais são espaços virtuais que possibilitam o relacionamento entre pessoas ou empresas por meio de mensagens, compartilhamento de conteúdos etc. Para divulgar seu trabalho, Carla publica vídeos em suas redes sociais.

A seguir são apresentadas algumas informações sobre os vídeos publicados por Carla no último mês.

Semana	Quantidade de vídeos publicados	Tempo total dos vídeos postados (em minutos)
1	13	31
2	8	35
3	17	52
4	14	38

a) Determine o tempo médio de cada vídeo postado por Carla no último mês. 3 minutos

b) De acordo com as informações apresentadas, é possível determinar a mediana e a moda do intervalo de tempo dos vídeos publicados por Carla nesse mês? Justifique sua resposta. Espera-se que os alunos respondam que não, pois não é dado o tempo de cada vídeo para organizá-los em um rol e analisar esses dados.

9 O professor de Matemática apresentou na lousa, sem divulgar nomes, as notas obtidas pelos alunos de uma turma do Ensino Médio na última prova, cuja nota máxima era 10.

a) Respostas no final do livro.

3,4	8	10	9	10
8	7,5	5	10	8
9	8	6,8	10	8
9	9	10	8,5	3
9,5	10	7,8	8	7

b) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

a) Calcule a média, a moda e a mediana dessas notas e dê o significado de cada uma delas.

b) Conforme as medidas calculadas no item **a**, escreva um pequeno texto com algumas conclusões sobre as notas dessa turma na última prova de Matemática.

10 **Elaborando**

Realize uma pesquisa sobre um assunto de seu interesse. Com os dados coletados, elabore um problema em que seja necessário calcular algumas medidas de tendência central do conjunto de dados obtidos. Em seguida, peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta.

11 Considere um conjunto de dados composto por 7 números naturais, dos quais: alternativa **a**

- 102 é o menor número;
- 107 é a única moda do conjunto de dados;
- 104 é a mediana do conjunto de dados.

De acordo com essas informações, podemos afirmar com certeza que:

a) o maior número desse conjunto de dados é o 107.

b) o 105 faz parte do conjunto de dados.

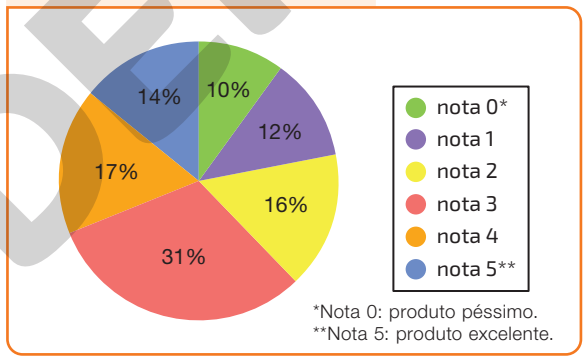
c) 108 é o maior número do conjunto de dados.

d) 103 é o segundo maior elemento desse conjunto de dados.

e) a mediana é igual à média do conjunto de dados.

12 Uma empresa fez uma pesquisa com 3 000 consumidores de um de seus produtos. Na pesquisa, cada consumidor atribuía uma nota de 0 até 5. Os resultados estão apresentados no gráfico a seguir. As informações apresentadas no gráfico são fictícias.

Avaliação dos consumidores do produto em 2020



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: Registros da empresa.

a) Calcule a média, a moda e a mediana das notas atribuídas a esse produto na pesquisa e dê o significado de cada uma delas. Respostas no final do livro.

b) Conforme as medidas calculadas no item **a**, escreva um pequeno texto com algumas conclusões sobre as notas atribuídas a esse produto na pesquisa. Resposta pessoal. Espera-se que, nesse texto, os alunos digam, por exemplo, que 62% dos entrevistados deram notas superiores à nota média.

13 **Calculadora**

Observe o quadro abaixo.

Peso	a	b	c	d	e	f	g	h	i
Valores	20	22	25	26	28	30	34	48	55

Com o auxílio de uma calculadora, atribua valores distintos para os pesos a fim de que a média ponderada desse conjunto de valores seja menor do que 26. Uma possível resposta: $a = 15$, $b = 8$, $c = 7$, $d = 6$, $e = 5$, $f = 4$, $g = 3$, $h = 2$, $i = 1$.

10. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

11 Medidas separatrizes

Direito ao voto no Brasil

Eleições estão presentes na história do Brasil muito antes de sua constituição, enquanto éramos ainda colônia de Portugal. Mesmo sendo governados em um sistema monárquico, antes da formação de uma democracia de fato, em diversas situações as eleições eram empregadas na escolha de pessoas que ocupariam determinados cargos. Apenas durante o Estado Novo de Getúlio Vargas (1937-1945) tivemos um período sem a ocorrência de eleições regulares, pois até mesmo durante o Regime Militar (1964-1985) em alguns momentos recorreu-se às eleições, ainda que de modo indireto, para a escolha de pessoas que ocupariam a presidência.

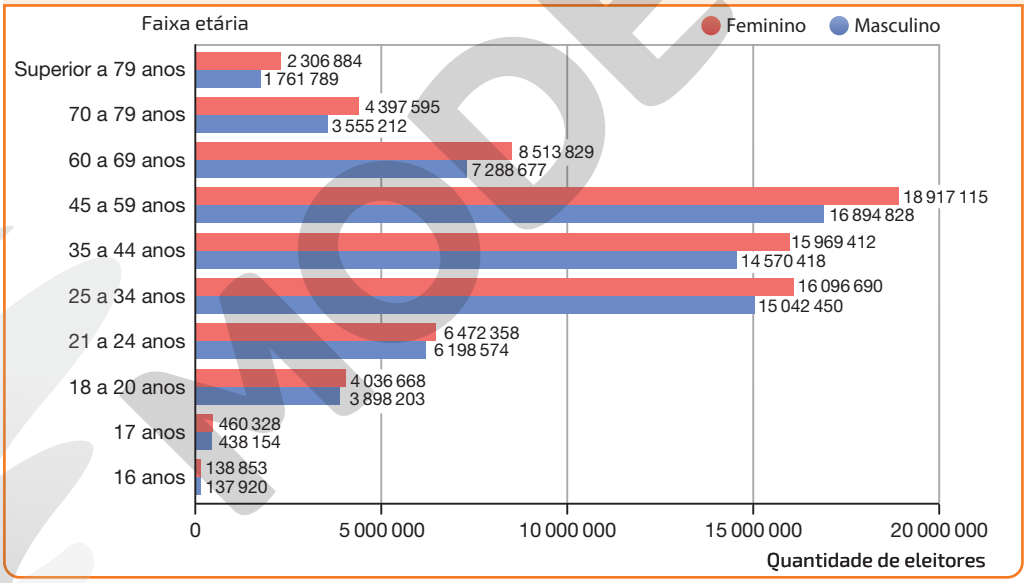
Porém, apesar da presença de processos eleitorais desde 1532, ao longo da história do país o voto sofreu diversas transformações até chegar ao sistema eleitoral presente nos dias de hoje, conforme apresentado na página seguinte.

No cenário atual do Brasil, a Constituição Federal de 1988, em vigor atualmente, estabelece o voto obrigatório para indivíduos com idade igual ou superior a 18 anos, sendo facultativo para analfabetos, para maiores de 70 anos e para os que têm idade entre 16 e 18 anos. Para a organização dos dados coletados, o Tribunal Superior Eleitoral divide os brasileiros em dez categorias.

Durante o Regime Militar, foram realizadas seis eleições indiretas para presidente, de modo que em três delas o representante do país foi escolhido pelo Congresso Nacional e as outras três pelo Colégio Eleitoral.

Analisando os dados relativos a 2018, podemos observar que, do total, aproximadamente 52,5% dos eleitores são eleitoras, o que evidencia uma grande participação das mulheres no processo eleitoral contrastando com a participação enquanto candidatas, já que correspondem apenas a 31% das candidatas para as eleições de 2018.

Quantidade de eleitores brasileiros, por gênero e faixa etária, em dezembro de 2018



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <http://www.tse.jus.br/eleitor/estatisticas-de-eleitorado/estatistica-do-eleitorado-por-sexo-e-faixa-etaria>. Acesso em 22 jun. 2020.

Fontes de pesquisa: <http://www.tse.jus.br/hotsites/catalogo-publicacoes/pdf/tse-eleicoes-no-brasil-uma-historia-de-500-anos-2014.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2020. <http://www.tse.jus.br/eleitor/estatisticas-de-eleitorado/estatistica-do-eleitorado-por-sexo-e-faixa-etaria>. Acesso em: 22 jun. 2020. <https://www.camara.leg.br/noticias/90154-conheca-a-historia-do-voto-no-brasil/>. Acesso em: 22 jun. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A De acordo com o gráfico, cerca de 66% dos eleitores de 2018 estão concentrados em três faixas etárias contínuas. Quais são essas faixas? As faixas de 25 a 59 anos.

B Identifique, a partir dos dados apresentados, a quarta faixa etária com maior número de eleitores. 60 a 69 anos.

C Determine a porcentagem de mulheres votantes na faixa etária de 60 anos ou mais. 19,7%.

D Em 2018, pouco menos de 1% dos votantes foram jovens entre 16 e 17 anos. Com base nas informações apresentadas, converse com os colegas a respeito dos motivos da baixa participação dos jovens no processo eleitoral e elabore uma propaganda, voltada às redes sociais, com o objetivo de conscientizar os jovens eleitores da importância da participação no processo eleitoral e do voto consciente. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.ROWFARN/SHUTTERSTOCK; 2.SYDA PRODUCTIONS/SHUTTERSTOCK; 3.ALLIES INTERACTIVE/SHUTTERSTOCK; 4.T777/SHUTTERSTOCK; 5.BRASTOCK/SHUTTERSTOCK; 6.RAFAPRESS/SHUTTERSTOCK; 7.GABRIEL_RAMOS/SHUTTERSTOCK; 8.RAFAPRESS/SHUTTERSTOCK; 9.THIAGO MELO/SHUTTERSTOCK; 10.TORIN55/SHUTTERSTOCK; 11.ARQUIVO PESSOAL

Ano/período	Contexto histórico
1532	Eleição indireta para o Conselho Municipal, em São Vicente (SP).
1821	Primeira eleição em âmbito nacional, da qual homens livres poderiam votar, inclusive os analfabetos.
1881	Instituição do título de eleitor, sem foto.
1891	Primeira aparição do voto direto para presidente e vice-presidente, apesar do período marcado por eleições ilegítimas e voto de cabresto.
1932	Instituição de nova legislação eleitoral e conquista do direito de voto pelas mulheres.
1955	Exigência de foto no título eleitoral e a Justiça Eleitoral passou a produzir as cédulas eleitorais.
1964-1985	Eleições indiretas durante a Ditadura Militar.
1988	Promulgação da nova Constituição, garantindo o direito ao voto para todos, mas mantendo voto facultativo para alguns grupos.
1989	Retorno às eleições diretas.
1996	Utilização das urnas eletrônicas pela primeira vez no país.
2010	Utilização de biometria nas urnas eletrônicas.

Vimos no tema anterior que a **mediana** é o valor que separa a metade maior e a metade menor de um conjunto de dados organizados em rol. Ela é um caso particular de um conjunto mais amplo de medidas estatísticas, chamadas **separatrizes**, assunto das próximas páginas. Conhecer os valores que ocupam posições específicas em um conjunto de dados ordenados e separados em duas, quatro, dez ou cem partes igualmente distribuídas é muito útil em algumas situações, principalmente naquelas em que não temos um gráfico para comparar as barras visualmente, como na resolução da questão **A**, por exemplo.

MODELO

Separatrizes

Fique atento! Para que seja possível identificar as medidas separatrizes, é necessário que o conjunto de dados esteja organizado em ordem crescente.

Conforme apresentado anteriormente, o TSE organiza os dados dos eleitores a partir de dez faixas etárias, sendo que algumas delas contemplam apenas uma idade, enquanto outras contemplam duas ou mais idades em uma mesma categoria. Assim, podemos observar que não existe uma padronização da distribuição das idades, mas uma organização conforme as intencionalidades do TSE.

No entanto, existem situações em que desejamos dividir um conjunto de valores ordenado em partes iguais (ou aproximadamente iguais). Para isso, podemos empregar as chamadas **medidas separatrizes**. Por meio dessas medidas, podemos identificar valores que ocupam posições específicas no conjunto de dados organizados em ordem crescente.

Neste tema estudaremos os quartis, os decis e os percentis, pois a mediana, por ser, também, uma medida de tendência central, foi estudada no tema anterior.

As principais medidas separatrizes podem ser classificadas em:

- **mediana**: divide o conjunto de valores em duas partes iguais. Existe uma mediana (Md).
- **quartis**: divide o conjunto de valores em 4 partes iguais. Existem três quartis $(Q_1, Q_2 \text{ e } Q_3)$.
- **decis**: divide o conjunto de valores em 10 partes iguais. Existem nove decis $(D_1, \ldots, D_8 \text{ e } D_9)$.
- **percentis**: divide o conjunto de valores em 100 partes iguais. Existem 99 percentis $(P_1, \ldots, P_{98} \text{ e } P_{99})$.

Quartis

Os quartis $(Q_1, Q_2 \text{ e } Q_3)$ dividem o conjunto de valores, organizado em ordem crescente, em quatro partes iguais. Nesse caso, temos:

- aproximadamente 25% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao primeiro quartil (Q_1) e aproximadamente 75% são maiores ou iguais ao primeiro quartil (Q_1).
- aproximadamente 50% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao segundo quartil (Q_2) e aproximadamente 50% são maiores ou iguais ao segundo quartil (Q_2).
- aproximadamente 75% dos valores do conjunto são menores ou iguais ao terceiro quartil (Q_3) e aproximadamente 25% são maiores ou iguais ao terceiro quartil (Q_3).

Para determinar cada quartil, podemos utilizar a definição de mediana.

- Q_2: mediana do conjunto de dados.
- Q_1: mediana da primeira metade dos elementos do conjunto de dados (excluindo a mediana).
- Q_3: mediana da segunda metade dos elementos do conjunto de dados (excluindo a mediana).

Exemplo

Veja os salários em reais dos funcionários de uma empresa organizados em rol.

1 615	1 700	1 700	1 820	1 850	1 935	2 000	2 000	2 050	3 180	3 180	4 200

- Q_2 é mediana do conjunto de dados. Assim:

$$Q_2 = \frac{1\,935 + 2\,000}{2} = 1\,967{,}5$$

- Q_1 é mediana da primeira metade dos elementos do conjunto de dados.

1 615	1 700	1 700	1 830	1 850	1 935

Assim:

$$Q_1 = \frac{1\,700 + 1\,830}{2} = 1\,765$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

• Q_3 é mediana da segunda metade dos elementos do conjunto de dados.

2 000	2 000	2 050	3 180	3 180	4 200

Assim:

$$Q_3 = \frac{2\,050 + 3\,180}{2} = 2\,615$$

Nesse exemplo, após calcular os quartis, podemos concluir, por exemplo, que 25% dos funcionários dessa empresa recebem R$ 1 765,00 ou menos; metade dos funcionários recebe R$ 1 967,50 ou menos; e 75% dos funcionários recebem R$ 2 615,00 ou menos.

Decis

Os decis $(D_1, \ldots, D_8 \text{ e } D_9)$ dividem o conjunto de valores, organizado em ordem crescente, em dez partes iguais. Nesse caso, temos, por exemplo:

- aproximadamente 30% dos valores do conjunto menores ou iguais ao terceiro decil (D_3) e aproximadamente 70% maiores ou iguais ao terceiro decil.
- aproximadamente 50% dos valores do conjunto menores ou iguais ao quinto decil (D_5) e aproximadamente 50% maiores ou iguais ao quinto decil.
- aproximadamente 80% dos valores do conjunto menores ou iguais ao oitavo decil (D_8) e aproximadamente 20% maiores ou iguais ao oitavo decil.

Para determinar os decis, geralmente é necessário algum procedimento de arredondamento.

Indicamos o n-ésimo decil por D_n, com $1 \leqslant n \leqslant 9$.

Note que o quinto decil é igual a mediana do conjunto de valores.

Exemplo

Considerando o conjunto de valores apresentado no exemplo anterior, temos:

- o terceiro decil ocupa a 4ª posição, pois $3 \cdot \frac{12}{10} = 3{,}6 \simeq 4$. Nesse caso, $D_3 = 1\,820$.
- o oitavo decil ocupa a 10ª posição, pois $8 \cdot \frac{12}{10} = 9{,}6 \simeq 10$. Nesse caso, $D_8 = 3\,180$.

Nesse exemplo, após calcular esses decis, podemos concluir, por exemplo, que aproximadamente 30% dos funcionários da empresa recebem R$ 1 820,00 ou menos e aproximadamente 80% dos funcionários recebem R$ 3 180,00 ou menos.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Um instituto de pesquisas aferiu a massa de 21 barras de chocolate, de diferentes marcas, cuja embalagem indica que a massa é 90 g. Veja o resultado.

78,5	81,2	81,3	86,3	87,1	87,1	87,3
88,1	88,5	88,5	88,5	88,6	88,9	89,3
89,9	90,1	90,2	90,5	90,8	91	91

a) Aproximadamente 20% das marcas apresentaram massa igual ou inferior a quantos gramas?

b) Aproximadamente 50% das marcas apresentaram massa igual ou superior a quantos gramas?

Resolução

a) Para resolver esse item, precisamos calcular o segundo decil do conjunto de valores. Note que:

$$2 \cdot \frac{21}{10} = 4{,}2 \simeq 4$$

Neste caso, o segundo decil ocupa a 4ª posição. Como os dados estão organizados em rol, temos $D_2 = 86{,}3$.

Portanto, aproximadamente 20% das marcas apresentaram massa igual ou inferior a 86,3 g.

b) Para resolver esse item, precisamos calcular o quinto decil ou a mediana do conjunto de valores. Assim:

$$Md = D_5 = 88{,}5$$

Portanto, aproximadamente 50% das marcas apresentaram massa igual ou superior a 88,5 g.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Percentis

Os percentis $(P_1, \ldots, P_{98}$ e $P_{99})$ dividem o conjunto de valores, organizado em ordem crescente, em cem partes iguais. Nesse caso, temos, por exemplo:

- aproximadamente 5% dos valores do conjunto menores ou iguais ao quinto percentil (P_5) e aproximadamente 95% maiores ou iguais ao quinto percentil.
- aproximadamente 50% dos valores do conjunto menores ou iguais ao quinquagésimo percentil (P_{50}) e aproximadamente 50% maiores ou iguais ao quinquagésimo percentil.
- aproximadamente 75% dos valores do conjunto menores ou iguais ao setuagésimo quinto percentil (P_{75}) e aproximadamente 25% maiores ou iguais ao setuagésimo quinto percentil.

Indicamos o n-ésimo percentil por P_n, com $1 \leqslant n \leqslant 99$.

Note que $P_{25} = Q_1$, $P_{50} = Q_2$ e $P_{75} = Q_3$.

Para determinar os percentis, geralmente é necessário algum procedimento de arredondamento.

É importante perceber o significado de percentil. Por exemplo, se a altura de uma pessoa está no 88º percentil, essa pessoa tem altura igual ou maior do que, aproximadamente, 88% das outras pessoas entrevistadas. Isso não significa que a pessoa tem 88% de alguma altura ideal.

Exercícios e problemas resolvidos

R2 A tabela a seguir apresenta a nota final em Matemática dos alunos do Ensino Médio de certa escola. Nessa tabela, estão indicadas a frequência e a **frequência acumulada**, que é a soma das frequências até determinado dado.

Nota final em Matemática dos alunos do Ensino Médio de certa escola em 2020

Nota	Frequência	Frequência acumulada
5,8	2	2
6,2	18	20
6,5	9	29
7,2	46	75
7,8	25	100
8,0	12	112
8,7	20	132
9,3	10	142
9,5	24	166
9,8	10	176
10	28	204

Fonte de pesquisa: Registros do professor de Matemática.

Os dados apresentados na tabela são fictícios.

No tema seguinte, estudaremos com mais detalhes as tabelas de frequências.

Qual nota representa o 78º percentil? Como devemos interpretar essa medida?

Resolução

Inicialmente, determinaremos a posição do 78º percentil. Para isso, fazemos:

$$78 \cdot \frac{204}{100} = 159{,}12 \simeq 159$$

De acordo com as informações apresentadas na tabela, temos $P_{78} = 9{,}5$.

Portanto, podemos concluir, por exemplo, que aproximadamente 78% dos alunos do Ensino Médio dessa escola obtiveram uma nota menor ou igual a 9,5.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Considere o conjunto de valores apresentado a seguir.

2	5	3	1	0	5	6	3	10	3	4	7
1	5	9	10	9	8	8	9	0	6	5	1

Para determinar as medidas separatrizes, organize o conjunto de dados em ordem crescente.

Determine:

a) Q_2 5 b) D_8 8 c) Q_1 2,5 d) D_5 5 e) D_2 1 f) Q_3 8

2 Em uma prova de *kart*, são realizados diversos registros de tempo.

A seguir, são apresentados os tempos, em segundos, da volta mais rápida de cada um dos pilotos em determinada prova.

99,21	99,79	100,18	100,42	101,13
101,23	101,30	102,25	102,36	102,47
102,69	103,09	103,19	103,15	103,31
103,33	103,44	103,67	103,85	104,50

DIVINA EPIPHANIA/ALAMY/FOTOARENA

Competição de *kart* na cidade de Florianópolis (SC) em 2019.

a) Qual é o terceiro decil desse conjunto de valores? 101,23

b) Como devemos interpretar a medida obtida no item a?
Uma possível resposta: 30% dos pilotos fizeram sua volta mais rápida em 101,23 s ou menos.

3 A seguir, estão apresentadas as notas obtidas pelos alunos de certa turma em um simulado envolvendo todas as áreas do conhecimento.

9,5	7,3	5,2	8,8	6,3	6,2	5,0	3,2	1,7	4,3	6,7	3,2	6,0	6,5	7,1
7,3	5,9	6,6	8,2	9,8	10,0	8,3	7,8	7,8	8,2	1,5	7,5	8,0	6,5	8,0

Classifique cada afirmativa em verdadeira ou falsa. Em seguida, reescreva as afirmativas falsas tornando-as verdadeiras.

a) Aproximadamente 40% dos alunos obtiveram uma nota menor ou igual a 5.
Falsa. Aproximadamente 40% dos alunos obtiveram uma nota menor ou igual a 6,5.

b) Dos alunos que realizaram esse simulado, 30% obtiveram notas entre 1,49 e 6,1. Verdadeira.

c) Um aluno que obteve nota 8 está no 9º decil. Falsa. Um aluno que obteve nota 8 está no 8º decil.

d) Ao escolher um aluno aleatoriamente, tem-se 50% de probabilidade de ele ter obtido uma nota menor ou igual a 6,7. Verdadeira.

No contexto

4 O presidente de uma seção eleitoral registrou em um quadro a idade dos eleitores de sua seção em 2020.

Idade	18	20	21	22	25	31	33	35	39	42	45	48
Quantidade de eleitores	25	43	28	37	26	40	37	18	37	5	19	37

a) Aproximadamente 78% das pessoas que votaram nessa seção têm menos de quantos anos? 39 anos

b) Calcule Q_1, Q_2 e Q_3. Como devemos interpretar cada uma dessas medidas? Resposta no final do livro.

A tarefa **5** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

5 Realize uma pesquisa sobre algum assunto de sua preferência. Em seguida, elabore um problema que envolva a determinação de separatrizes associadas ao conjunto de valores obtidos. Na sequência, peça a um colega que o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

12 Medidas de dispersão

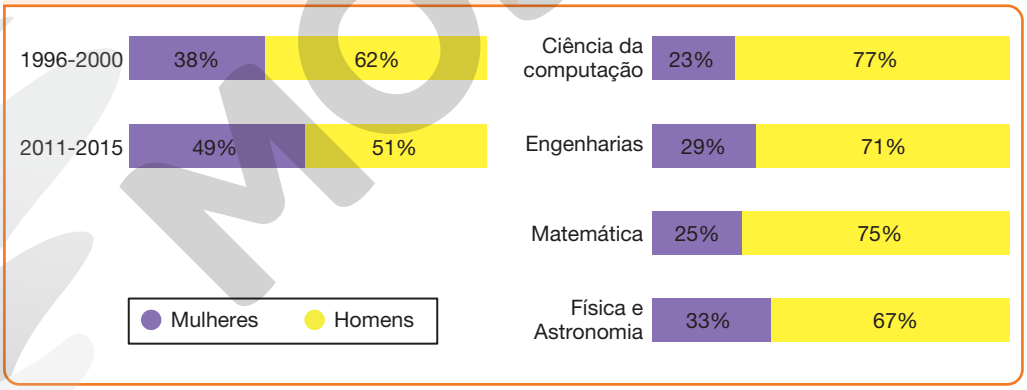
A participação feminina na Ciência

Desde o ano de 2016, a cada dia 11 de fevereiro é comemorado o Dia Internacional das Mulheres e Meninas na Ciência, estabelecido pela UNESCO com o propósito de valorizar o papel da mulher nas pesquisas científicas e buscar igualdade de direitos entre homens e mulheres principalmente nos campos da ciência, tecnologia, engenharia e matemática. De acordo com a publicação "Decifrar o código: educação de meninas e mulheres em Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM)", da UNESCO Brasil, publicado em 2018, menos de 30% dos pesquisadores no mundo são do sexo feminino, e quando consideramos as mulheres que ocupam cargos de líderes em sociedades de alto prestígio ou por premiações, os números continuam baixos.

Analisando os dados do Censo da Educação Superior, apesar de em alguns cursos observarmos um predomínio das mulheres, como é o caso de Pedagogia, por exemplo, em que as matrículas de mulheres chegou a 92,5% em 2017, em cursos das áreas de Engenharias, por exemplo, a participação feminina nas matrículas não passa de 35%. Porém, apesar dessas discrepâncias, em 2017 as matrículas de pessoas do sexo feminino em cursos de Ensino Superior chegou a 55,2% do total, evidenciando uma maior participação das mulheres nessa etapa de ensino.

De acordo com o relatório "Gênero no Cenário Global de Pesquisa", publicado pela Elsevier, uma das maiores editoras do mundo, em relação ao Brasil, a participação feminina dentre os pesquisadores aumentou nos últimos anos, mas ainda é baixa nas áreas de Ciências, Tecnologias, Engenharia e Matemática.

Proporção de pesquisadores brasileiros



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <https://www.elsevier.com/__data/assets/pdf_file/0008/265661/ElsevierGenderReport_final_for-web.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Algumas mulheres que fizeram história

ULLSTEIN BILD/GETTY IMAGES – COLEÇÃO PARTICULAR

Marie Curie (1867-1934)
Primeira mulher a receber um Prêmio Nobel, e a receber em duas áreas diferentes (Química e Física), sendo responsável pela descoberta dos elementos químicos polônio e rádio.

REPRODUÇÃO – MEMORIAL DA CÂMARA MUNICIPAL DE SALVADOR, BAHIA

Ana Néri (1814-1880)
Pioneira da enfermagem no Brasil.

NASA/SPL/FOTOARENA – COLEÇÃO PARTICULAR

Katherine Johnson (1918-2020)
Matemática de formação, dentre outros trabalhos, contribuiu com cálculos para o projeto Apollo 11, que levou o ser humano à Lua pela primeira vez, em 1969.

ALEXANDRE CAMPBELL/FOLHAPRESS

Johanna Döbereiner (1924–2000)
Agrônoma que realizou pesquisas essenciais para que o Brasil se tornasse um grande produtor de soja.

BETTMANN/GETTY IMAGES – COLEÇÃO PARTICULAR

Gertrude Elion (1918–1999)
Além de ter sido especialista no tratamento de gota e leucemia, seus trabalhos foram essenciais para o desenvolvimento de medicamentos contra a AIDS.

FOTOMONTAGEM DE JULIANA DEL ANHOL AZEVEDO. FOTOS: 1.DAVID WOODS/SHUTTERSTOCK; 2.AVIGATOR FORTUNER/SHUTTERSTOCK; 3.TARAPATTA/SHUTTERSTOCK; 4.BJOERN WYLEZICH/SHUTTERSTOCK; 5.ANYAIVANOVA/SHUTTERSTOCK; 6.DENCG/SHUTTERSTOCK; 7.LEIGH PRATHER/SHUTTERSTOCK; 8.PARAMONOV ALEXANDER/SHUTTERSTOCK; 9.AKR11_SS/SHUTTERSTOCK; 10.CRYSTAL LIGHT/SHUTTERSTOCK; 11.ESB PROFESSIONAL/SHUTTERSTOCK; 12.BRAT82/SHUTTERSTOCK; 13.ORANGEVECTOR/SHUTTERSTOCK

No Brasil, as mulheres são a maioria em diversas áreas de pesquisa, como é o caso do campo da Bioquímica, Genética, Biologia Molecular, Imunologia, Medicina, Enfermagem, Psicologia, entre outras, conforme o relatório "Gênero no Cenário Global de Pesquisa", publicado pela Elsevier, o que evidencia uma grande participação feminina nas áreas relacionadas à saúde.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Faça um levantamento, dentre os profissionais que atuam em sua escola, com relação à participação feminina e à respectiva formação de cada profissional, organizando os dados a partir de tabelas e gráficos, de tal maneira a traçar um panorama a respeito da participação das mulheres na escola. Resposta pessoal.

B Pesquise sobre outras mulheres, como Ada Lovelace (1815-1852), Katie Bouman (1989-), e as brasileiras Ester Cerdeira Sabino (1960-) e Jaqueline Goes de Jesus (1990-), e seus respectivos pioneirismos no campo da Computação, Física e Medicina. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos relacionem Ada Lovelace como a matemática que escreveu o primeiro algoritmo do mundo e primeira programadora, Katie Bouman, como especialista em Engenharia Elétrica e Ciência da Computação e uma das responsáveis pela primeira foto de um buraco negro e Ester Cerdeira Sabino e Jaqueline Goes de Jesus como as cientistas brasileiras que lideraram o sequenciamento do Covid-19, apenas 2 dias após a confirmação do primeiro caso no país.

Ser consciente

A Considerando os dados apresentados e o contexto da sociedade brasileira, que fatores você acredita que influenciam para que haja uma menor participação feminina nas áreas de Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática?

B Que estratégias poderiam ser adotadas para incentivar as mulheres a participarem das áreas de Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática enquanto pesquisadoras?

Ser consciente:
A) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam alguns fatores: discriminação, falta de incentivo para as meninas ingressarem nessas áreas, assédio, dificuldade de ascensão em carreiras que historicamente são destinadas aos homens, necessidade de conciliar a profissão com as responsabilidades familiares e maternidade, entre outras.

Existem algumas medidas para verificar a dispersão ou a variabilidade de um conjunto de dados, ou seja, o quanto os valores se afastam de uma regularidade. Por meio deles é possível comparar, por exemplo, a média aritmética das notas dos meninos e das meninas da turma em diferentes componentes curriculares.

As **medidas de dispersão** podem ser apresentadas também em disposições gráficas, como é o caso do *box-plot*, por exemplo. Ele é utilizado para representar a variação dos dados por meio dos quartis e da mediana. A mediana e os quartis você já estudou nos temas anteriores, no entanto, as medidas de dispersão e o *box-plot* são assuntos das páginas seguintes.

BNCC
- EM13MAT202
- EM13MAT316
- EM13MAT406
- EM13MAT407

Fontes de pesquisa: <https://www.camara.leg.br/noticias/91536-educacao-aprova-enfermeira-ana-neri-entre-herois-da-patria/>. Acesso em: 25 jun. 2020. <http://portal.inep.gov.br/sinopses-estatisticas-do-enem>. Acesso em: 25 jun. 2020. <https://pt.unesco.org/news/unesco-celebra-o-dia-internacional-das-mulheres-e-meninas-na-ciencia>. Acesso em: 25 jun. 2020. <https://ead2.iff.edu.br/pluginfile.php/138994/mod_resource/content/1/Decifrar%20o%20CODIGO.pdf>. Acesso em: 25 jun. 2020.

Ser consciente: B) Resposta pessoal. A motivação pode vir por meio da representatividade, do engajamento das instituições na manutenção das alunas que já fazem parte de cursos nessa área, divulgação de pesquisas, entre outros meios.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Estudando medidas de dispersão

Vimos anteriormente que as medidas de tendência central buscam representar ou caracterizar um conjunto de dados por meio de um único valor. Contudo, em diversas situações, fazem-se necessárias, para melhor representar o conjunto de dados, algumas medidas que indiquem a distribuição desses valores em torno da média. Essas medidas são denominadas **medidas de dispersão**.

Para representar o salário dos 5 funcionários de certo setor de uma empresa, por exemplo, podemos utilizar seu valor médio. Observe dois exemplos:

Exemplo 1

Salários: R$ 2 660,00, R$ 2 700,00, R$ 3 040,00, R$ 3 200,00 e R$ 3 400,00.

Média: $\bar{x} = \frac{2\,660 + 2\,700 + 3\,040 + 3\,200 + 3\,400}{5} = 3\,000$

A média salarial dos funcionários nesse setor é R$ 3 000,00.

Exemplo 2

Salários: R$ 1 680,00, R$ 1 680,00, R$ 1 900,00, R$ 3 800,00 e R$ 5 940,00.

Média: $\bar{x} = \frac{1\,680 + 1\,680 + 1\,900 + 3\,800 + 5\,940}{5} = 3\,000$

A média salarial dos funcionários nesse setor é R$ 3 000,00.

Note que em ambos os exemplos a média é igual a R$ 3 000,00. Contudo, no exemplo **1** os valores estão mais próximos da média e, no exemplo **2**, mais distantes dela. Dizemos que no exemplo **1** os valores estão menos dispersos em relação à média do que no exemplo **2**.

A seguir, estudaremos as medidas de dispersão amplitude (*A*), desvio médio (*Dm*), variância (*V*) e desvio-padrão (*Dp*).

Amplitude

A amplitude é a medida de dispersão mais simples.

A **amplitude** *A* de um conjunto de valores é a diferença entre o maior (x_M) e o menor valor (x_m), ou seja:

$A = x_M - x_m$

Exemplo

A seguir são apresentadas as quantidades de livros lidos no último ano pelos estudantes dos grupos de leitura de certa escola.

Grupo **A**

Quantidade de livros	15	12	18	22	17	15	18	23	13

Grupo **B**

Quantidade de livros	10	28	15	9	22	8	20	23	18

Ambos os conjuntos de valores apresentados no exemplo possuem média igual a 17, porém os elementos do conjunto correspondente ao grupo **B** apresentam uma maior variação.

Vamos calcular a amplitude do:

- grupo **A**.

$A_A = x_M - x_m = 23 - 12 = 11$

- grupo **B**.

$A_B = x_M - x_m = 28 - 8 = 20$

Portanto, a amplitude das quantidades de livros lidos no último ano pelos alunos do grupo **A** é 11 livros e do grupo **B**, 20 livros.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Desvio médio

Observe a seguir a quantidade de veículos vendidos por uma concessionária em certa semana de setembro de 2020.

Domingo	Segunda-feira	Terça-feira	Quarta-feira	Quinta-feira	Sexta-feira	Sábado
26	12	18	16	33	17	25

Vamos calcular inicialmente a média diária de veículos vendidos.

$$\bar{x} = \frac{26 + 12 + 18 + 16 + 33 + 17 + 25}{7} = \frac{147}{7} = 21$$

Agora, calculamos os **desvios** de cada valor, ou seja, a diferença entre cada valor e a média do conjunto de valores.

- $x_1 - \bar{x} = 26 - 21 = 5$
- $x_2 - \bar{x} = 12 - 21 = -9$
- $x_3 - \bar{x} = 18 - 21 = -3$
- $x_4 - \bar{x} = 16 - 21 = -5$
- $x_5 - \bar{x} = 33 - 21 = 12$
- $x_6 - \bar{x} = 17 - 21 = -4$
- $x_7 - \bar{x} = 25 - 21 = 4$

Podemos verificar que a soma dos desvios é igual a zero $(5 - 9 - 3 - 5 + 12 - 4 + 4 = 0)$. A fim de não ser afetado por essa propriedade, o desvio médio (Dm) é dado pela média dos valores absolutos dos desvios. Nesse caso, temos:

$$Dm = \frac{|5| + |-9| + |-3| + |-5| + |12| + |-4| + |4|}{7} = \frac{42}{7} = 6$$

Portanto, o desvio médio diário foi de 6 veículos vendidos.

O **desvio médio** (Dm) de um conjunto de n valores é dado pela média aritmética dos valores absolutos dos desvios de cada valor em relação à média.

$$Dm = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

O valor absoluto ou módulo de um número real a, indicado por $|a|$, é definido como o próprio número a, se $a \geqslant 0$, ou como $-a$, se $a < 0$.

Exemplos:

$|2| = 2$

$|-5| = -(-5) = 5$

Variância

Outra medida de dispersão muito utilizada é a variância (V).

A **variância** (V) de um conjunto de n valores é dada pela média aritmética dos quadrados dos desvios de cada valor em relação à média.

$$V = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

Exemplo

Após as 5 primeiras partidas de um campeonato de basquete, os dois principais cestinhas (jogadores que mais pontuaram) obtiveram médias iguais de pontos por partida. Observe a seguir a pontuação obtida por esses jogadores em cada partida.

As informações apresentadas na tabela são fictícias.

Pontuação dos dois primeiros cestinhas do campeonato de basquete em 2020

Jogador	Pontuação				
	1ª partida	2ª partida	3ª partida	4ª partida	5ª partida
A	8	12	9	17	5
B	10	9	11	10	11

Fonte de pesquisa: Organização do campeonato.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- Média de pontos por partida
  - Jogador **A**: $\bar{x}_A = \frac{8 + 12 + 9 + 17 + 5}{5} = \frac{51}{5} = 10{,}2$
  - Jogador **B**: $\bar{x}_B = \frac{10 + 9 + 11 + 10 + 11}{5} = \frac{51}{5} = 10{,}2$

Podemos utilizar a variância para verificar qual dos jogadores obteve maior regularidade na pontuação por partida.

- Variância do jogador **A** $\left(V_A\right)$

  Desvios:
  - $x_1 - \bar{x} = 8 - 10{,}2 = -2{,}2$
  - $x_2 - \bar{x} = 12 - 10{,}2 = 1{,}8$
  - $x_3 - \bar{x} = 9 - 10{,}2 = -1{,}2$
  - $x_4 - \bar{x} = 17 - 10{,}2 = 6{,}8$
  - $x_5 - \bar{x} = 5 - 10{,}2 = -5{,}2$

$$V_A = \frac{\left(-2{,}2\right)^2 + 1{,}8^2 + \left(-1{,}2\right)^2 + 6{,}8^2 + \left(-5{,}2\right)^2}{5} =$$

$$= \frac{4{,}84 + 3{,}24 + 1{,}44 + 46{,}24 + 27{,}04}{5} = \frac{82{,}8}{5} = 16{,}56$$

- Variância do jogador **B** $\left(V_B\right)$

  Desvios:
  - $x_1 - \bar{x} = 10 - 10{,}2 = -0{,}2$
  - $x_2 - \bar{x} = 9 - 10{,}2 = -1{,}2$
  - $x_3 - \bar{x} = 11 - 10{,}2 = 0{,}8$
  - $x_4 - \bar{x} = 10 - 10{,}2 = -0{,}2$
  - $x_5 - \bar{x} = 11 - 10{,}2 = 0{,}8$

$$V_B = \frac{\left(-0{,}2\right)^2 + \left(-1{,}2\right)^2 + 0{,}8^2 + \left(-0{,}2\right)^2 + 0{,}8^2}{5} =$$

$$= \frac{0{,}04 + 1{,}44 + 0{,}64 + 0{,}04 + 0{,}64}{5} = \frac{2{,}8}{5} = 0{,}56$$

Note que a variância de pontos por partida do jogador **A** $\left(16{,}56\right)$ é maior do que a do jogador **B** $\left(0{,}56\right)$. Portanto, o jogador **B** foi mais regular do que o jogador **A**.

Desvio-padrão

Vimos que no cálculo da variância os desvios de cada valor em relação à média são elevados ao quadrado, sendo que o resultado é obtido em uma unidade diferente da variável. A medida de dispersão desvio-padrão consiste na raiz quadrada da variância, o que resulta em um valor na mesma unidade da variável.

Em relação ao exemplo apresentado no estudo da variância, vamos calcular o desvio-padrão da quantidade de pontos por partida obtido pelos jogadores **A** e **B**.

- Desvio-padrão do jogador **A**: $Dp_A = \sqrt{V_A} = \sqrt{16{,}56} \simeq 4{,}07$
- Desvio-padrão do jogador **B**: $Dp_B = \sqrt{V_B} = \sqrt{0{,}56} \simeq 0{,}75$

Portanto, o jogador **A** teve um desvio-padrão de aproximadamente 4,07 pontos por partida, e o jogador **B**, de cerca de 0,75 ponto por partida.

Qual é o desvio-padrão de um conjunto de n valores iguais? zero

O **desvio-padrão** (Dp) de um conjunto de n valores é dado pela raiz quadrada da variância: $Dp = \sqrt{V}$

Quanto mais próximo de zero estiver o desvio-padrão, mais regular será o conjunto de valores, ou seja, mais próximos da média estarão esses valores.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Observe na tabela a seguir as idades dos alunos de uma das turmas do período noturno do Ensino Médio de certa escola. Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Com relação às idades dos alunos, determine o:

a) desvio médio.

b) desvio-padrão.

Idades dos alunos de uma turma do período noturno do Ensino Médio de certa escola, em 3 de outubro de 2020

Idade (em anos)	16	17	18	19	20	22
Frequência (f)	16	9	4	2	1	1

Fonte de pesquisa: Turma do período noturno do Ensino Médio.

Resolução

Inicialmente calculamos a média aritmética das idades.

$$\bar{x} = \frac{16 \cdot 16 + 17 \cdot 9 + 18 \cdot 4 + 19 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 22 \cdot 1}{16 + 9 + 4 + 2 + 1 + 1} = \frac{561}{33} = 17$$

Agora, calculamos o desvio de cada valor em relação à média.

- $x_1 - \bar{x} = 16 - 17 = -1$
- $x_2 - \bar{x} = 17 - 17 = 0$
- $x_3 - \bar{x} = 18 - 17 = 1$
- $x_4 - \bar{x} = 19 - 17 = 2$
- $x_5 - \bar{x} = 20 - 17 = 3$
- $x_6 - \bar{x} = 22 - 17 = 5$

a) $Dm = \frac{16 \cdot |-1| + 9 \cdot |0| + 4 \cdot |1| + 2 \cdot |2| + 1 \cdot |3| + 1 \cdot |5|}{33} = \frac{32}{33} = 0,\overline{96}$

Portanto, o desvio médio das idades dos alunos é de $0,\overline{96}$ ano.

b) Como o desvio-padrão é dado pela raiz quadrada da variância, segue que:

$$V = \frac{16 \cdot (-1)^2 + 9 \cdot 0^2 + 4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 5^2}{33} = \frac{62}{33} = 1,\overline{87}$$

$$Dp = \sqrt{1,\overline{87}} \simeq 1,37$$

Portanto, o desvio-padrão é de, aproximadamente, 1,37 ano.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Nas tarefas dessa seção, sempre que julgar conveniente, utilize uma calculadora.

1. d) $\bar{x} = 2,5$; $Mo = 3$; $Md = 3$, $A = 31$; $Dm = 6,375$; $V = 81$; $Dp = 9$

1 Para cada conjunto de valores, calcule a média aritmética, a moda, a mediana, a amplitude, o desvio médio, a variância e o desvio-padrão.

a)

62	58	72	66	53	70	51	64

$\bar{x} = 62$; amodal; $Md = 63$; $A = 21$; $Dm = 6$; $V = 50,25$; $Dp \simeq 7,09$

b)

14	18	25	14	39	27	31

$\bar{x} = 24$; $Mo = 14$; $Md = 25$; $A = 25$; $Dm \simeq 7,43$; $V \simeq 74,29$; $Dp \simeq 8,62$

c)

12	4,5	1,2	12	2,7	4,5

$\bar{x} = 6,15$; $Mo = 4,5$ e $Mo = 12$; $Md = 4,5$; $A = 10,8$; $Dm = 3,9$; $V \simeq 18,38$; $Dp \simeq 4,29$

d)

13	−18	3	8	−1	11	1	3

2 Uma Organização Não Governamental (ONG) realiza semanalmente uma pesquisa de preços de combustíveis em 6 postos. Ao lado, estão apresentados os preços da gasolina nesses postos em duas semanas consecutivas.

Preço, em reais, do litro da gasolina por posto de combustível em janeiro de 2020

Os dados apresentados na tabela são fictícios.

posto \ semana	1ª	2ª
A	4,67	4,70
B	4,68	4,73
C	4,71	4,74
D	4,69	4,71
E	4,70	4,73
F	4,69	4,71

Fonte de pesquisa: Postos de combustíveis.

a) De quantos por cento, aproximadamente, foi a diferença entre o menor e o maior preço pesquisado em cada semana? 1ª semana: 0,86%; 2ª semana: 0,85%

b) Qual é o preço médio da gasolina na 1ª semana? E na 2ª semana? R$ 4,69; R$ 4,72

c) Para cada semana, calcule o desvio médio, a variância e o desvio-padrão em relação ao preço do litro da gasolina.

1ª semana: $Dm = 0,01$; $V \simeq 0,00017$; $Dp \simeq 0,013$

2ª semana: $Dm \simeq 0,013$; $V = 0,0002$; $Dp \simeq 0,014$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 A seguir estão apresentadas as idades, em anos, dos membros de uma guilda de certo jogo *online*.

! **Guilda:** grupo *online* formado pelos *gamers*.

15	16	16	15	25	19
28	15	16	16	14	14
14	28	25	20	29	18
18	18	16	16	14	15
18	28	30	19	20	21

a) Determine a amplitude do conjunto dos valores apresentados. 16 anos

b) Se um jogador com 30 anos sair dessa guilda e um novo jogador, com 42 anos, se tornar membro, qual será a amplitude do novo conjunto de valores? 28 anos

c) Ao compararmos os resultados obtidos nos itens **a** e **b**, o que podemos concluir?

d) Elabore um problema envolvendo amplitude com as informações apresentadas nessa tarefa. Em seguida, peça para que um colega o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.

3. c) A alteração do valor máximo do conjunto de valores altera muito a amplitude.

4 Em certo concurso, foram aprovados os candidatos que obtiveram, no conjunto de 3 provas, nota média superior a 60 pontos e desvio-padrão inferior a 5 pontos. Uma candidata que obteve 54, 68 e 61 pontos nas provas foi aprovada nesse concurso? Justifique sua resposta.

Não, pois, apesar de sua média ser superior a 60 pontos, o desvio-padrão foi superior a 5 pontos.

5 Em uma corrida de automóveis, três pilotos estão disputando o primeiro lugar. A seguir está apresentado o tempo, em segundos, para as cinco primeiras voltas da corrida.

	Volta				
Piloto	**1ª**	**2ª**	**3ª**	**4ª**	**5ª**
A	870	848	855	845	852
B	866	850	847	845	847
C	867	851	843	849	855

Considerando as cinco primeiras voltas, determine qual piloto obteve:

a) o pior tempo médio. piloto A

b) a maior regularidade no tempo para cada volta. piloto B

6 Realize uma pesquisa a respeito de um assunto de seu interesse. Em seguida, de acordo com os dados obtidos, elabore um problema envolvendo medidas de dispersão e peça para que um colega o resolva. Por fim, verifique se a resposta obtida por ele está correta. Resposta pessoal.

7 Veja a pontuação obtida por duas equipes de basquete feminino nas 8 primeiras partidas da liga.

O item **d** da tarefa **3** e a tarefa **6** propõem aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Equipe A

115	98	100	88	112	98	105	93

Equipe B

123	90	104	92	90	118	109	100

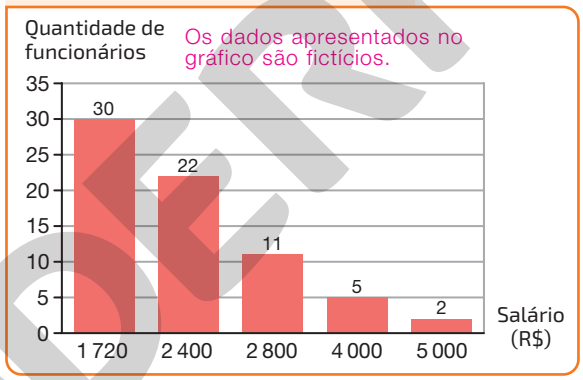
a) Equipe **A**: $A = 27$; $V \simeq 73{,}1$; $Dp \simeq 8{,}6$
Equipe **B**: $A = 33$; $V \simeq 141{,}2$; $Dp \simeq 11{,}9$

a) Com o auxílio de uma calculadora, determine a amplitude, a variância e o desvio-padrão de cada um dos conjuntos de valores.

b) O que podemos concluir ao analisar os resultados obtidos no item **a**? As pontuações obtidas nas oito primeiras partidas pela equipe A são menos variáveis do que as obtidas pela equipe B.

8 Os salários dos funcionários de uma fábrica estão representados no gráfico.

Salário dos funcionários de uma fábrica em janeiro de 2020



Fonte de pesquisa: Departamento administrativo.

a) Qual é o salário médio dos funcionários dessa fábrica? R$ 2 360,00

b) Calcule o desvio-padrão dos salários dos funcionários. R$ 773,12

c) Qual é a interpretação do resultado obtido no item **b**? Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

9 **Em grupo**

Em temas anteriores estudamos sobre pesquisas amostrais e, também, sobre tipos de amostras. Agora, vamos realizar uma pesquisa amostral e divulgar os resultados obtidos. Para isso, junte-se a um colega, escolham um tema relevante para a sociedade e sigam as etapas: **planejamento**, **coleta de dados**, **organização**, **análise** e **interpretação**. Em seguida, escrevam um relatório com o objetivo de divulgar os resultados obtidos por meio de tabelas e gráficos, destacando as medidas de tendência central e de dispersão. Resposta pessoal.

Nessa pesquisa, os dados podem ser coletados diretamente (por meio de entrevistas) ou em diferentes fontes. Além disso, se julgarem conveniente, os gráficos podem ser construídos com o auxílio de uma planilha eletrônica.

Antes de os alunos elaborarem o problema do item **d** da tarefa **3** e da tarefa **6**, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Distribuição de frequência

Observe o nível de conhecimento em informática de 20 estudantes que se candidataram a estagiários em uma empresa do setor de tecnologia.

Candidatos a estagiários em uma empresa em 2020

Nome	Nível de conhecimento
Agnaldo	Avançado
Altair	Básico
Amanda	Intermediário
Ana Maria	Avançado
Carlos	Intermediário
Fabiane	Avançado
Fábio	Avançado
Gabriel	Intermediário
João	Intermediário
Marcos	Avançado

Fonte de pesquisa: Departamento de tecnologia.

Candidatos a estagiários em uma empresa em 2020

Nome	Nível de conhecimento
Marta	Intermediário
Natália	Intermediário
Osvaldo	Básico
Rafael	Avançado
Ricardo	Intermediário
Tainá	Avançado
Tiago	Avançado
Vagner	Intermediário
Válter	Intermediário
Vanessa	Intermediário

Fonte de pesquisa: Departamento de tecnologia.

Os dados apresentados nas tabelas são fictícios

Podemos, por exemplo, resumir os valores atribuídos à variável "nível de conhecimento" utilizando a **frequência absoluta** (f), ou simplesmente frequência, que corresponde à quantidade de vezes em que cada valor foi citado. Nesse caso, temos as seguintes frequências absolutas:

- frequência do nível de conhecimento "básico": 2
- frequência do nível de conhecimento "intermediário": 10
- frequência do nível de conhecimento "avançado": 8

Nesse caso, como pode ser classificada a variável "nível de conhecimento"?

qualitativa ordinal

Para comparar a participação de cada um desses valores em relação ao todo, podemos utilizar a **frequência relativa** (fr), que equivale à razão entre a frequência absoluta correspondente e a quantidade total de observações. Em geral, a frequência relativa é apresentada em porcentagem. Em relação à variável "nível de conhecimento", temos:

- frequência relativa do conhecimento básico: $\frac{2}{20} = 0{,}1$ ou 10%
- frequência relativa do conhecimento intermediário: $\frac{10}{20} = 0{,}5$ ou 50%
- frequência relativa do conhecimento avançado: $\frac{8}{20} = 0{,}4$ ou 40%

Podemos organizar as frequências absoluta e relativa em uma **tabela de frequências**.

Candidatos a estagiários em uma empresa em 2020

Nível de conhecimento	Frequência (f)	Frequência relativa (fr)
Básico	2	10%
Intermediário	10	50%
Avançado	8	40%
Total	20	100%

Fonte de pesquisa: Departamento de tecnologia.

Outros tipos de frequência muito utilizados são a **frequência acumulada** (fa) e a **frequência acumulada relativa** (far), que correspondem, respectivamente, às somas das frequências absolutas e às somas das frequências relativas até determinado dado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Complementando a tabela de frequências vista anteriormente, temos:

Candidatos a estagiários em uma empresa em 2020

Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Nível de conhecimento	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
Básico	2	2	10%	10%
Intermediário	10	$\underbrace{12}_{2+10}$	50%	$\underbrace{60\%}_{10\%+50\%}$
Avançado	8	$\underbrace{20}_{2+10+8}$	40%	$\underbrace{100\%}_{10\%+50\%+40\%}$
Total	20		100%	

Fonte de pesquisa: Departamento de tecnologia.

Nessa tabela de frequências, observando a frequência acumulada podemos notar, por exemplo, que 12 estudantes têm nível de conhecimento em informática até o intermediário (básico e intermediário), o que corresponde a 60% dos estudantes, informação que pode ser observada na frequência acumulada relativa.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

10 Veja a seguir o número de nascimentos diários em uma maternidade, em agosto de 2020. A partir dele, construa uma tabela de frequências contendo f, fa, fr e far. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

5	2	3	1	4	4	3	2	2	0
2	4	3	2	1	3	4	5	3	4
2	3	1	4	5	4	2	4	2	2

Os dados apresentados no quadro são fictícios.

11 Observe o gráfico a seguir.

Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Quantidade de moradores, por apartamento, em um condomínio residencial em janeiro de 2020

RONALDO INÁCIO

11. b) Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

Fonte de pesquisa: Administração do condomínio.

a) Quantos apartamentos tem esse condomínio? Desses, quantos têm exatamente 4 moradores? 40 apartamentos; 6 apartamentos

b) A partir das informações do gráfico, construa uma tabela de frequências para a variável "quantidade de moradores", contendo f, fa, fr e far.

c) Quantos apartamentos têm 2 moradores ou menos? Que porcentagem dos apartamentos essa quantidade representa? 21 apartamentos; 52,5%

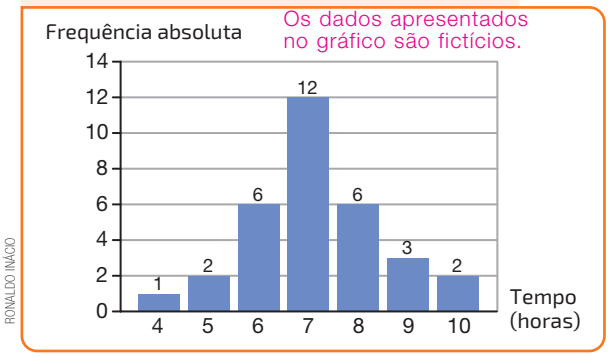
12 O uso de aparelhos eletrônicos durante a noite prejudica o sono, pois a luz emitida por eles afeta diretamente a produção de melatonina, hormônio responsável pela indução do sono.

De acordo com pesquisas, para manter a saúde em dia, é recomendado para cada faixa etária uma quantidade de horas de sono diária. Aconselha-se que jovens de 14 a 17 anos, por exemplo, durmam em torno de 10 horas por dia.

Fonte de pesquisa: <https://revista.abrale.org.br/nao-durma-demais-nem-de-menos/?q=revista-online/nao-durma-demais-nem-de-menos/>. Acesso em: 14 jul. 2020.

Por meio de um questionário foram obtidas as informações indicadas no gráfico a seguir.

Quantidade média de horas de sono diário dos alunos de 14 a 17 anos de um grupo de estudos em fevereiro de 2020



RONALDO INÁCIO

Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Fonte de pesquisa: Resultado do questionário.

a) Construa uma tabela de frequências, contendo f, fa, fr e far, para a variável "quantidade de horas de sono".

b) Qual é a porcentagem de alunos de 14 a 17 anos que dormem a quantidade de horas recomendadas para sua idade? 6,25%

12. a) Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Intervalo de classe

O excesso de triglicérides, um tipo de gordura, pode ser um forte indicador de possíveis doenças cardíacas. Embora não haja consenso sobre a partir de que nível de triglicérides as pessoas devam receber maior cuidado médico, é certo que acima de 150 mg por decilitro de sangue é recomendável a realização de tratamento.

DIOGO PPR/SHUTTERSTOCK

A ingestão em excesso de açúcares, gorduras e massas pode potencializar o aumento de triglicérides no organismo, ficando acima do nível recomendado. Sendo assim, evitar o consumo habitual de refrigerantes, frituras etc. e associar uma rotina alimentar saudável a atividades físicas com acompanhamento médico são medidas essenciais para controlar o nível de triglicérides.

A seguir, estão apresentadas as medições de triglicérides, em miligramas por decilitro de sangue, de 60 pessoas que realizaram exame em um laboratório no mês de março de 2020.

70	122	140	155	174	206	238	258	279	299
76	125	146	160	178	214	241	267	285	306
82	130	146	162	183	217	243	268	287	308
89	132	149	162	194	220	245	271	291	311
98	135	150	162	199	226	247	273	294	314
105	138	155	166	201	234	257	277	297	318

Podemos representar essas medidas por meio de uma tabela de frequência. Contudo, observe que a maioria das medidas não se repete, tornando necessárias muitas linhas na tabela. A fim de resumir esses dados, podemos agrupá-los em **intervalos de classes**.

Há diversas maneiras de definir o total de intervalos de classes que vão compor uma tabela de frequência. Porém, o mais importante é observar que, de maneira geral, uma grande quantidade de intervalos de classes tende a prejudicar o resumo das informações. Em contrapartida, uma quantidade muito pequena pode interferir na qualidade das informações.

Em relação às medições de triglicérides, podemos definir os intervalos de classes da seguinte maneira.

- Calculamos a amplitude do conjunto de valores, ou seja, fazemos:

$$318 - 70 = 248$$

- Escolhemos um valor conveniente, maior do que a amplitude, que, nesse caso, pode ser 250. Considerando o total de intervalos igual a 5, por exemplo, determinamos a amplitude de cada intervalo.

$$\frac{250}{5} = 50$$

- Construímos os intervalos de classes com amplitude 50, a partir do menor valor obtido (70 mg/dℓ).

$$70 \vdash \underbrace{120}_{70+50} \qquad 120 \vdash \underbrace{170}_{120+50} \qquad 170 \vdash \underbrace{220}_{170+50} \qquad 220 \vdash \underbrace{270}_{220+50} \qquad 270 \vdash \underbrace{320}_{270+50}$$

- A notação "$\vdash$" indica, por exemplo, que no intervalo $70 \vdash 120$ serão consideradas as medidas maiores ou iguais a 70 e menores do que 120 (inclui 70 e exclui 120).

Outras notações utilizadas para designar intervalos de classes são:

- $10 \dashv 20$: números maiores do que 10 e menores ou iguais a 20
- $10 \dashv\vdash 20$: números maiores ou iguais a 10 e menores ou iguais a 20

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A partir das 60 medições obtidas, quantificamos as frequências de cada intervalo, obtendo assim a frequência absoluta (f) e, consequentemente, as frequências acumulada (fa), relativa (fr) e acumulada relativa (far).

Exames de triglicérides realizados em março de 2020

Nível (mg/dℓ)	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
70 ⊢ 120	6	6	10%	10%
120 ⊢ 170	18	24	30%	40%
170 ⊢ 220	9	33	15%	55%
220 ⊢ 270	12	45	20%	75%
270 ⊢ 320	15	60	25%	100%
Total	60		100%	

Os dados apresentados na tabela e nos gráficos são fictícios.

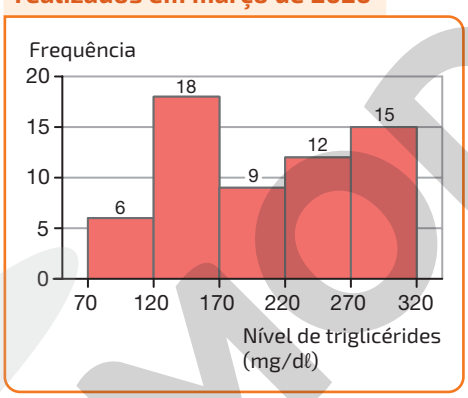
Fonte de pesquisa: Laboratório.

As frequências absoluta e relativa podem ser representadas por um tipo de gráfico denominado **histograma**, que consiste em regiões retangulares justapostas, que representam cada intervalo de classe, cujas alturas são proporcionais às frequências.

Em relação aos exames de nível de triglicérides, temos:

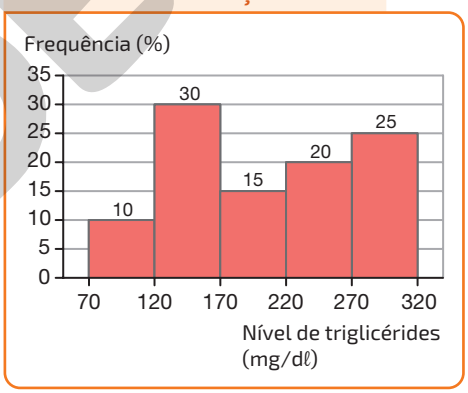
- histograma relacionado à frequência absoluta
- histograma relacionado à frequência relativa

Exames de triglicérides realizados em março de 2020



Fonte de pesquisa: Laboratório.

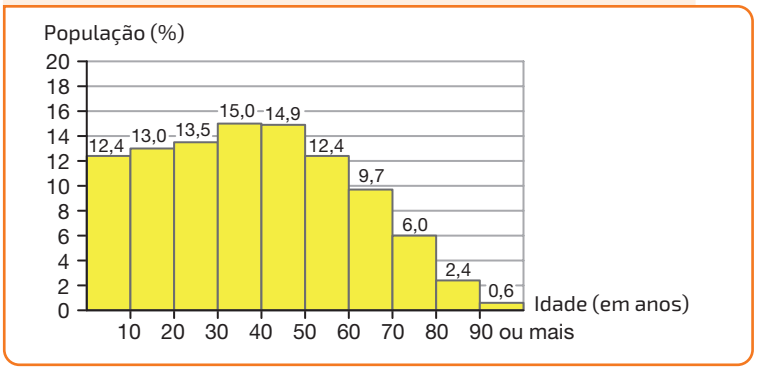
Exames de triglicérides realizados em março de 2020



Fonte de pesquisa: Laboratório.

Observe outro exemplo de histograma.

Projeção da população do Brasil por faixa etária - 2030



Fonte de pesquisa: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?5&t5resultados>. Acesso em: 14 jul. 2020.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INAGAKI

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

13 Em relação aos 60 exames de triglicérides apresentados anteriormente, responda.

a) Quantos pacientes apresentaram níveis de triglicérides iguais ou superiores a 70 mg/dℓ e inferiores a 170 mg/dℓ? 24 pacientes

b) Quantos por cento dos pacientes apresentaram níveis de triglicérides iguais ou superiores a 220 mg/dℓ? 45%

c) Para quantos pacientes pode-se recomendar a realização de tratamento médico? 43 pacientes

14 Observe as informações e responda às questões. Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Altura dos atletas da equipe de basquetebol juvenil em março de 2020

Altura (m)	Frequência (f)	Frequência acumulada (fa)	Frequência relativa (fr)	Frequência acumulada relativa (far)
1,7 ⊢ 1,8	4	4	20%	20%
1,8 ⊢ 1,9	7	11	35%	55%
1,9 ⊢ 2,0	6	17	30%	85%
2,0 ⊢ 2,1	2	19	10%	95%
2,1 ⊢ 2,2	1	20	5%	100%

Fonte de pesquisa: Ficha técnica.

a) Quantos atletas treinam nessa equipe de basquetebol? 20 atletas

b) Em qual intervalo está concentrada a maior quantidade de atletas dessa equipe? 1,8 ⊢ 1,9

c) Quantos atletas têm altura superior ou igual a 2 m? 3 atletas

d) Que porcentagem dos atletas possui altura inferior a 1,9 m? 55%

e) Podemos afirmar que existem 2 atletas com 1,85 m de altura? Por quê? Não, pois não conhecemos a altura de nenhum deles; sabemos apenas que existem 7 atletas com alturas entre 1,8 m e 1,9 m.

f) De acordo com os dados apresentados na tabela, construa um histograma referente a frequência da variável "altura". Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do Suplemento para o professor.

15 Abaixo é apresentado o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) de cada país do continente americano.

IDH dos países do continente americano em 2019

País	IDH	País	IDH	País	IDH	País	IDH
Antígua e Barbuda	0,776	Colômbia	0,761	Guiana	0,670	República Dominicana	0,745
Argentina	0,830	Costa Rica	0,794	Haiti	0,503	Santa Lúcia	0,745
Bahamas	0,805	Cuba	0,778	Honduras	0,623	São Cristóvão e Névis	0,777
Barbados	0,813	Dominica	0,724	Jamaica	0,726	São Vicente e Granadinas	0,728
Belize	0,720	El Salvador	0,667	México	0,767	Suriname	0,724
Bolívia	0,703	Equador	0,758	Nicarágua	0,651	Trinidad e Tobago	0,799
Brasil	0,761	Estados Unidos	0,920	Panamá	0,795	Uruguai	0,808
Canadá	0,922	Granada	0,763	Paraguai	0,724	Venezuela	0,726
Chile	0,847	Guatemala	0,651	Peru	0,759		

Fonte de pesquisa: <http://hdr.undp.org/en/content/2019-human-development-index-ranking>. Acesso: 14 jul. 2020.

a) Com base nessas informações, construa uma tabela de frequências contendo f, fa, fr e far, agrupando o IDH em seis intervalos de classes, sendo 0,503 ⊢ 0,573 o primeiro deles. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do Suplemento para o professor.

b) Em qual intervalo de frequência da tabela o Brasil está? 0,713 ⊢ 0,783

c) Em 2019, que porcentagem dos países americanos apresentavam IDH maior ou igual a 0,643 e menor do que 0,713? aproximadamente 14,3%

d) Quantos países possuem IDH menor do que 0,853? 33 países

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

16 A tabela ao lado apresenta a projeção da população brasileira, por faixa etária, em 2023 e 2025.

a) Qual a projeção da população brasileira com menos de 40 anos de idade em 2023? E em 2025? 126 623 242 habitantes; 125 183 469 habitantes

b) De quantos por cento aproximadamente foi o aumento da projeção da população brasileira com idade maior ou igual a 40 anos e menor do que 60 anos, de 2023 para 2025? 3,2%

c) Em quais faixas etárias a projeção para a população diminui em 2025, se comparado a 2023? 0 ⊢ 20 anos e 20 ⊢ 40 anos

Projeção da população brasileira por faixa etária em 2023 e 2025

Faixa etária	2023	2025
0 ⊢ 20	58 989 621	58 428 570
20 ⊢ 40	67 633 621	66 754 899
40 ⊢ 60	55 981 041	57 761 550
60 ⊢ 80	28 691 954	30 662 979
80 ou mais	4 988 032	5 421 095

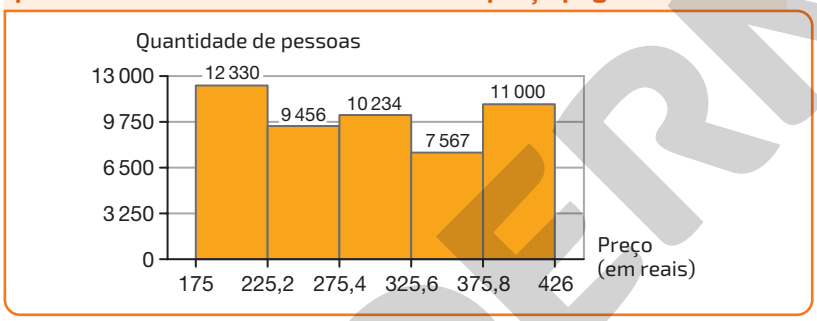
Fonte de pesquisa: <https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?5&t5resultados>. Acesso em: 14 jul. 2020.

17 Os preços dos ingressos antecipados de certo *show* musical eram modificados semanalmente. O histograma apresenta o número de pessoa que compraram ingressos antecipados de acordo com o preço pago. Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

18. b) Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibulares e Enem.

O item **b** da tarefa **18** propõe aos alunos que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Quantidade de pessoas que compraram ingressos antecipados para o *show* em 2020 de acordo com o preço pago



RONALDO RÁCIO

Fonte de pesquisa: Registros da organização do *show*.

Dentre as pessoas que compraram os ingressos antecipados, quantas pagaram menos do que R$ 325,60? 32 020 pessoas

18 O Índice de Massa Corporal (IMC) é uma medida internacional muito utilizada para avaliar a massa corporal de um adulto. Sua fórmula é dada por: $\text{IMC} = \frac{\text{massa (kg)}}{\text{altura}^2\text{ (m)}}$.

Ao lado está indicado o IMC de um grupo de pessoas.

a) Usando os dados ao lado, construa um histograma referente à frequência relativa da variável IMC. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

b) De acordo com o histograma que você construiu no item **a**, elabore uma questão e troque com um colega. Depois, verifiquem se as resoluções estão corretas.

IMC de algumas pessoas em março de 2020

Os dados apresentados na tabela são fictícios.

IMC	Número de pessoas
16 ⊢ 18,5	2
18,5 ⊢ 21	6
21 ⊢ 23,5	9
23,5 ⊢ 26	12
26 ⊢ 28,5	8
28,5 ⊢ 31	5
31 ⊢ 33,5	3

Fonte de pesquisa: Pessoas do grupo.

19 Junte-se a um colega, realize uma pesquisa amostral e divulgue os resultados obtidos. Para isso, escolham um tema relevante para a sociedade e sigam as etapas: **planejamento**, **coleta de dados**, **organização**, **análise** e **interpretação**. Em seguida, escrevam um relatório com o objetivo de divulgar os resultados obtidos por meio de tabelas e gráfico (incluindo tabelas de frequência e histogramas), destacando as medidas de tendência central e de dispersão.

Resposta pessoal.

Nessa pesquisa, os dados podem ser coletados diretamente (por meio de entrevistas) ou em diferentes fontes.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Medidas de tendência central para dados agrupados em intervalos de classes

Estudamos anteriormente como calcular medidas de tendência central para dados discretos. Agora veremos como calcular a média aritmética, a moda e a mediana para dados agrupados em intervalos de classes. Para isso, considere a tabela de frequência a seguir, que apresenta as massas dos 30 alunos de uma turma do Ensino Médio.

Massa dos alunos de uma turma do Ensino Médio em março de 2020

Massa (kg)	Frequência (f)
$40 \vdash 50$	4
$50 \vdash 60$	10
$60 \vdash 70$	9
$70 \vdash 80$	5
$80 \vdash 90$	2
Total	30

Fonte de pesquisa: Turma do Ensino Médio.

Os dados apresentados nas tabelas são fictícios.

Na prática, geralmente, estão disponíveis os dados brutos para o cálculo da média aritmética, da moda e da mediana; entretanto, é possível que esteja disponível apenas a distribuição de frequências da variável de interesse dividida em intervalos de números reais. O problema é: como calcular as medidas de tendência central nesse caso? Exceto sob algumas condições, não é possível calcular exatamente tais medidas, mas é possível obter valores aproximados.

Para calcularmos as medidas de tendência central para a variável "massa dos alunos", inicialmente obtemos o **valor médio** (vm) de cada intervalo de classe.

O valor médio de um intervalo de classe corresponde à média dos extremos desse intervalo. No exemplo ao lado, o valor médio do intervalo $40 \vdash 50$ é 45, pois $\frac{40 + 50}{2} = 45$.

Massa dos alunos de uma turma do Ensino Médio em março de 2020

Massa (kg)	Frequência (f)	Valor médio (vm)
$40 \vdash 50$	4	45
$50 \vdash 60$	10	55
$60 \vdash 70$	9	65
$70 \vdash 80$	5	75
$80 \vdash 90$	2	85
Total	30	

Fonte de pesquisa: Turma do Ensino Médio.

- Para calcularmos a **média aritmética** $(\bar{x})$, adicionamos o produto de cada frequência pelo valor médio correspondente e dividimos o resultado obtido pela quantidade total de valores.

  Em relação à massa dos alunos, a média é:

  $$\bar{x} = \frac{4 \cdot 45 + 10 \cdot 55 + 9 \cdot 65 + 5 \cdot 75 + 2 \cdot 85}{30} = \frac{1860}{30} = 62$$

  Portanto, a massa média dos alunos dessa turma é 62 kg.

- A **moda** (Mo) é o valor médio do intervalo de classe de maior frequência.

  Em relação à massa dos alunos, como o intervalo de classe de maior frequência é $50 \vdash 60$ (10 valores), a moda equivale ao valor médio correspondente, que nesse caso é 55 kg, ou seja, $Mo = 55$.

- A **mediana** (Md) é o valor médio do intervalo de classe que contém o termo central se a quantidade de termos for ímpar; se a quantidade de termos for par, a mediana é a média aritmética dos valores médios correspondentes aos intervalos de classes que contêm os dois termos centrais.

  Em relação às massas dos alunos, a quantidade de termos é par e igual a 30. Como o 15º e o 16º termos (termos centrais) pertencem ao intervalo $60 \vdash 70$, a mediana é:

  $$Md = \frac{65 + 65}{2} = 65$$

  Portanto, a mediana das massas desses alunos é 65 kg.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

20. b) $\bar{x} = 8{,}14$; $Mo = 8$; $Md = 8$

20 Ao acompanhar o desenvolvimento de uma plantação de trigo, um engenheiro agrônomo mediu o comprimento de algumas plantas (amostra). Os dados obtidos estão apresentados na tabela.

a) Quantas plantas compõem a amostra analisada pelo engenheiro agrônomo? 100 plantas

b) Calcule a média, a moda e a mediana do comprimento das plantas da amostra.

c) O que se pode afirmar em relação à porcentagem das plantas da amostra que têm o comprimento maior ou igual à média?
Não se pode afirmar uma quantidade exata, mas sabemos que é entre 29% e 76%.

Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Comprimento das plantas da amostra em abril 2020

Comprimento (cm)	Quantidade de plantas
3 ⊢ 5	6
5 ⊢ 7	18
7 ⊢ 9	47
9 ⊢ 11	21
11 ⊢ 13	8

Fonte de pesquisa: Anotações do engenheiro agrônomo.

21 A associação de moradores de um bairro observou que os acidentes de trânsito eram frequentes em certo trecho de uma avenida, onde a velocidade máxima permitida era de 80 km/h, e que isso era causado pelo excesso de velocidade dos veículos que transitam no local. Para mostrar a necessidade da instalação de redutores de velocidade e cobrar providências do poder público, foi feita a medição da velocidade dos veículos que passaram pelo local em certo período do dia, cujos resultados estão organizados abaixo.

Os dados apresentados na tabela são fictícios.

Velocidade dos veículos que passaram pelo local em certo período do dia 15 de abril de 2020

Velocidade (km/h)	Frequência (f)
50 ⊢ 60	3
60 ⊢ 70	5
70 ⊢ 80	11
80 ⊢ 90	19
90 ⊢ 100	9
100 ⊢ 110	3
Total	50

Fonte de pesquisa: Associação de moradores.

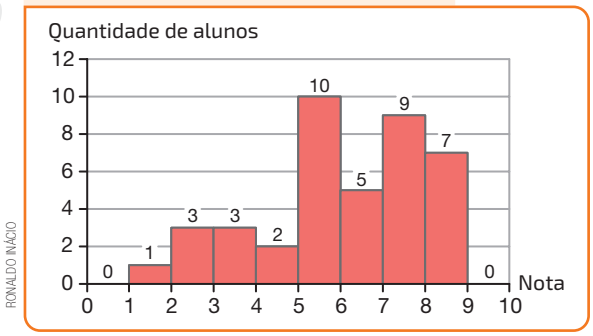
a) Calcule a média, em quilômetros por hora (km/h), das velocidades registradas. 82 km/h

b) A média da velocidade dos veículos ficou acima ou abaixo do limite nesse trecho da avenida? acima

22 O histograma a seguir apresenta o resultado da prova de Matemática aplicada para uma turma do Ensino Médio. Calcule a média das notas obtidas por essa turma. aproximadamente 6,08

Nota dos alunos de uma turma do Ensino Médio em abril de 2020

Os dados apresentados no gráfico são fictícios.



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: Anotações da professora.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Outros gráficos e representações

Até o momento, estudamos alguns tipos de gráficos e tabelas, como os gráficos de barras, de setores e os histogramas. Agora, vamos conhecer outras maneiras de representar dados graficamente.

Diagrama de ramo-e-folhas

O **diagrama de ramo-e-folhas** (ou **gráfico de ramo-e-folhas**), criado por John Tukey, possibilita a organização de dados quantitativos. Os valores apresentados a seguir representam as idades, em anos, dos alunos que cursavam Matemática em certa instituição de ensino no mês de fevereiro de 2020.

18	18	19	20	20	20	20	20	20	20	21
21	22	23	24	25	25	26	29	35	37	

Organizando esses dados em um diagrama de ramo-e-folhas, temos:

Idade dos alunos que cursavam Matemática em certa instituição de ensino no mês de fevereiro de 2020

1	8 8 9
2	0 0 0 0 0 0 0 1 1 2 3 4 5 5 6 9
3	5 7

Legenda:
1 | 8 é igual a 18 anos

Os dados apresentados nos diagramas são fictícios.

Fonte de pesquisa: Reitoria da instituição de ensino.

Note que, nesse gráfico, colocamos as dezenas em "evidência", separando-as das unidades por um traço. O "lado" com as dezenas é chamado **ramo** e o com as unidades, **folhas**. O diagrama de ramo-e-folhas deve ter sempre uma legenda, indicando o que significam os ramos e as folhas.

O diagrama de ramo-e-folhas é similar ao histograma, porém tem a vantagem de apresentar os dados originais do conjunto.

Vamos analisar outro exemplo.

Notas obtidas pelos alunos na última prova de História em agosto de 2020

0	9
1	0 0
2	5 7
3	5 6 8 9
4	1 3
5	
6	2 2 4 4 9
7	0 8 9
8	1 4 5 8 9
9	7 7 7 9
10	0 0 0 0 0 0

Legenda:
2 | 5 é igual a 25 pontos
10 | 0 é igual a 100 pontos

Fonte de pesquisa: Professor de História.

Analisando esse gráfico, podemos concluir, por exemplo, que:

- 6 alunos obtiveram 100 pontos.
- nenhum aluno obteve uma nota maior ou igual a 50 pontos ou menor do que 60 pontos.
- mais de 50% dos alunos obtiveram uma nota igual ou superior a 70 pontos.

A De acordo com o diagrama de ramo-e-folhas, determine quantos alunos obtiveram uma nota igual ou superior a 43 pontos. Essa quantidade representa quantos por cento do total de alunos que fizeram a prova?
24 alunos; aproximadamente 70,6%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O diagrama de ramo-e-folhas também pode ser utilizado para comparar dois conjuntos de dados. Nesse caso, representamos as folhas para o primeiro conjunto de dados de um lado e as folhas para o segundo conjunto de dados do outro lado. Veja, por exemplo, o diagrama de ramo-e-folhas que apresenta os salários anuais, em milhares de reais, de todos os funcionários de duas empresas.

Salários anuais dos funcionários das empresas A e B em março de 2020

Empresa **A**		Empresa **B**
	2	1 3 5 5 7 7 7
	3	0 0 1
9 9 9 8 4 1	4	5 7
	5	5 6 8 9
	6	1 2 2 2 2 2 3
9 7 5 5 5 5 5 3 3	7	
	8	
3 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	9	
9 9 9 9 9	10	
	11	2 2 6
4 2	12	1 4
	13	3
1	14	
5 2	15	0

Legenda:
4 2|12|1 4
significa
R$ 121 000,00 e
R$ 124 000,00,
respectivamente,
para a empresa **B**
e R$ 122 000,00 e
R$ 124 000,00,
respectivamente,
para a empresa **A**

Fonte de pesquisa: RH da empresa.

Para comparar dois conjuntos de dados com quantidades de elementos muito diferentes, não é recomentado o uso do diagrama de ramo-e-folhas.

Os dados apresentados nos diagramas são fictícios.

Analisando o gráfico podemos observar, por exemplo, que o salário anual mais alto na empresa **A** é R$ 155 000,00 e na empresa **B**, R$ 150 000,00.

B Quantos funcionários há em cada uma dessas empresas?
empresa A: 37 funcionários; empresa B: 31 funcionários

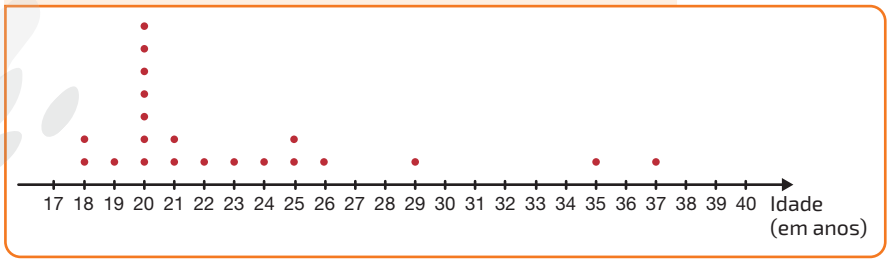
C Qual é a média dos salários anuais em cada empresa?
empresa A: R$ 88 216,22; empresa B: R$ 62 903,23

Diagrama de pontos

Outra maneira de representar dados quantitativos é por meio do **diagrama de pontos**. Nesse tipo de gráfico, cada ponto representa um dado do conjunto. Caso um dado se repita, ele será representado com pontos "empilhados".

Observe, por exemplo, as idades, em anos, dos alunos que cursavam Matemática, apresentadas na página anterior, organizadas em um diagrama de pontos.

Idade dos alunos que cursavam Matemática em certa instituição de ensino no mês de fevereiro de 2020



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: Reitoria da instituição de ensino.

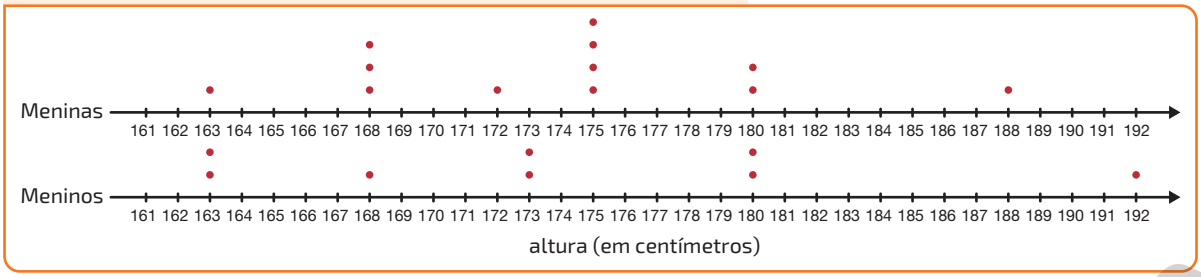
Analisando esse gráfico, podemos concluir, por exemplo, que:
- a maioria dos alunos que cursam Matemática tem 20 anos de idade.
- os alunos que cursam Matemática têm entre 18 e 37 anos de idade.
- a maioria das idades dos alunos tem entre 18 e 26 anos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Também é possível organizar dois conjuntos de valores em um diagrama de pontos. Observe, por exemplo, o diagrama de pontos que apresenta a altura, em centímetros, dos alunos do curso de Música.

Altura dos alunos do curso de Música em fevereiro de 2020

Os dados apresentados no diagrama são fictícios.



Fonte de pesquisa: Registros do curso de música.

Analisando esse gráfico, podemos concluir, por exemplo, que o aluno mais alto tem 192 cm de altura e é um menino.

Quando temos uma quantidade muito grande de dados, vimos que, a fim de facilitar a interpretação, é desejável agrupar os dados em intervalos de classe. Porém, quando a quantidade de dados não é muito grande, o uso do histograma não é recomendável, e, nesses casos, podemos utilizar os diagramas de ramo-e-folhas e de pontos.

Box-plot

O *box-plot* auxilia na análise da distribuição dos dados do conjunto.

Agora, vamos estudar o ***box-plot*** (ou **gráfico de caixa**) que é uma importante aplicação dos quartis, medidas separatrizes estudadas anteriormente.

Para construir um *box-plot* é necessário conhecer o menor valor (x_m), o primeiro quartil (Q_1), o segundo quartil (Q_2), o terceiro quartil (Q_3) e o maior valor (x_M) do conjunto de dados. A seguir, estão apresentadas as etapas de construção desse tipo de gráfico.

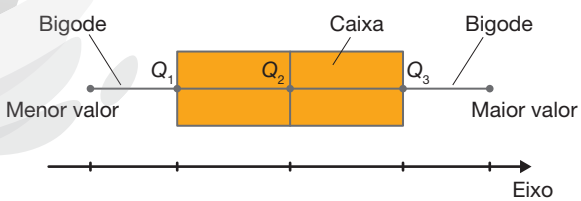
I. Determine o menor e o maior valor, o primeiro quartil, o segundo quartil e o terceiro quartil do conjunto de dados.

II. Construa um eixo de escalas (vertical ou horizontal) que contenha o maior e o menor valor.

III. Represente, no eixo, os cinco números calculados no passo **I**.

IV. Construa uma caixa (região retangular) a partir de Q_1 estendendo-se para Q_3 e, em Q_2, desenhe uma linha vertical.

V. Desenhe os bigodes a partir da caixa até o maior e o menor valor.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exemplo

A seguir, são apresentadas as notas obtidas pelos alunos do curso de Inglês em determinado simulado.

27	37	45	57	58	68	76	79	81	82	83	84	85	90

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

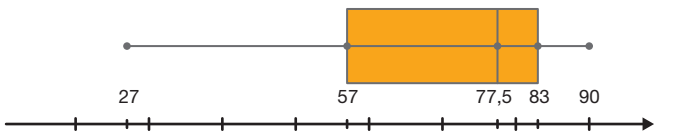
MODERNA

Para esse conjunto de dados, temos:

• $x_m = 27$ • $Q_1 = 57$ • $Q_2 = Md = 77{,}5$ • $Q_3 = 83$ • $x_M = 90$

Assim, construímos o seguinte *box-plot*.

Notas obtidas pelos alunos no simulado em 2020



Fonte de pesquisa: Coordenação do curso de Inglês.

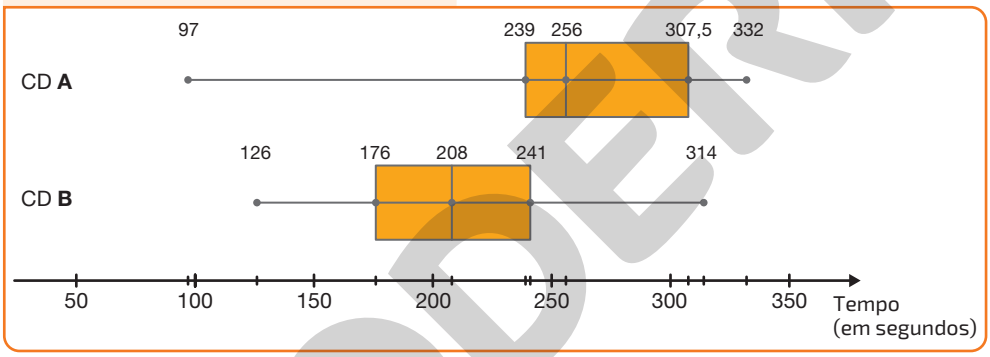
Analisando esse gráfico, podemos concluir, por exemplo, que aproximadamente:

- 25% das notas foram iguais ou inferiores a 57.
- 25% das notas foram iguais ou superior a 83.
- metade das notas está entre 57 e 83.

Os dados apresentados nos gráficos são fictícios.

Também é possível comparar dois ou mais conjuntos de dados usando o *box-plot*. Vamos analisar um exemplo.

Duração das músicas dos CDs A e B



Fonte de pesquisa: Registros de Marta em 2020.

Analisando esse gráfico, podemos concluir, por exemplo, que aproximadamente metade das músicas do CD **A** tem duração maior do que aproximadamente metade das músicas do CD **B**. Além disso, é possível concluir que a variação de tempo das músicas do CD **B** é menor do que a do CD **A**.

Quanto maior o comprimento (ou a altura) da caixa, maior a variabilidade dos dados do conjunto.

O *box-plot* não deve ser usado quando os dados tiverem mais que uma moda. Quando isso ocorrer, o diagrama de ramo-e-folhas ou o de pontos são recomendados.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

23 O diagrama de ramo-e-folhas apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, vendida pelos produtores de alimentos orgânicos de certo município.

Arroz vendido pelos produtores de certo município, em toneladas, no 1º semestre de 2019 e 2020

1º sem./2019		1º sem./2020
8 3 3	0	
	1	
9 1 1 1 1	2	
	3	7 7 7 7 7 9
	4	
7 7 2 2 0	5	
	6	
	7	0 0 0 0 0 0
	8	
1 1	9	
	10	
	11	2 2 5

Legenda:
|11|2 significa 112 toneladas para o 1º sem./2020
0|5| significa 50 toneladas para o 1º sem./2019

Fonte de pesquisa: Professor de História.

a) Quantos produtores de arroz orgânico há nesse município? 15 produtores

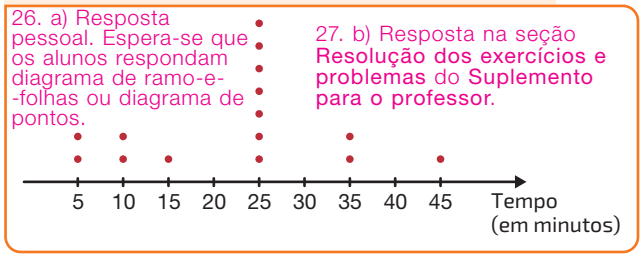
b) No 1º semestre de qual ano esses produtores venderam a maior quantidade de arroz? 2020

c) Qual foi a quantidade média, em toneladas, vendida por esses produtores no 1º semestre de 2019? E no 1º semestre de 2020? aproximadamente 38,5 toneladas; aproximadamente 65,5 toneladas

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
MODERNA

24 O gráfico a seguir, apresenta o tempo, em minutos, que os funcionários de uma pequena empresa levam para ir de suas casas ao trabalho.
Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Tempo gasto pelos funcionários para irem de suas casas ao trabalho em maio de 2020



RONALDO INÁCIO

26. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam diagrama de ramo-e-folhas ou diagrama de pontos.

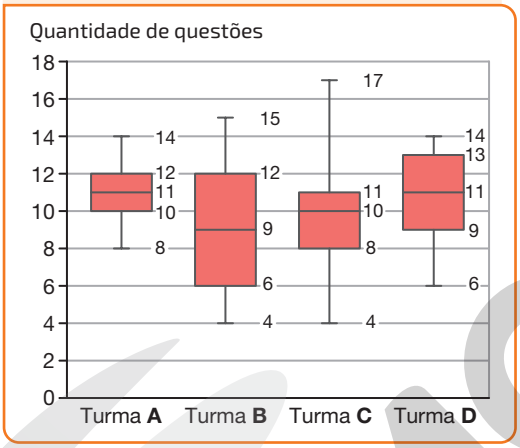
27. b) Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

Fonte de pesquisa: RH da empresa.

Analisando o gráfico, o que podemos concluir?
Resposta no final do livro.

25 Após corrigir as provas das quatro turmas do Ensino Médio de uma escola, o professor de Matemática organizou a quantidade de questões resolvidas corretamente pelos alunos em um *box-plot*.
Os dados apresentados no gráfico são fictícios.

Quantidade de questões resolvidas corretamente na última prova em 2020



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: Registros do professor de Matemática.

Qual foi a quantidade mediana de acertos em cada uma das turmas? Turma A: 11; Turma B: 9; Turma C: 10; Turma D: 11

26 O quadro a seguir representa o tempo gasto, em minutos, que os alunos de uma sala dedicam diariamente aos estudos em 2020.
Os dados apresentados no quadro são fictícios.

180	180	195	195	210	210	215	215	240	240
245	260	265	265	265	280	280	280	280	280
300	300	300	300	305	305	305	305		

a) Em sua opinião, qual tipo de gráfico deve ser usado para organizar os dados: diagrama de ramo-e-folhas, diagrama de pontos, histograma ou *box-plot*?

b) Esboce o gráfico indicado por você no item **a**.

c) Podemos afirmar que mais da metade dos alunos estudam mais do que 4 h 30 min por dia? Justifique sua resposta. Resposta no final do livro.

26. b) Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

27 Foi feita uma pesquisa sobre a quilometragem média por litro de óleo *diesel* dos ônibus de certo município, em março de 2020.

27. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam histograma, pois a quantidade de valores apresentados é alta.

Quilometragem média por litro de óleo *diesel* dos ônibus de certo município em março de 2020

Quilometragem	Frequência
1,02	20
1,67	100
2,04	97
2,70	87
3,23	150
3,94	125
4,05	315

Fonte de pesquisa: Registros da prefeitura do município.
Os dados apresentados na tabela são fictícios.

a) A organizadora da pesquisa pretende esboçar um gráfico para apresentar os dados obtidos. Em sua opinião, ela deveria utilizar um histograma ou um diagrama de ramo-e-folhas? Justifique sua resposta.

b) Esboce o gráfico indicado por você no item **a**.

28 Certa empresa produz peças com 75 cm de diâmetro. Após realizar a verificação de alguns lotes da produção, a diretoria da empresa decidiu dividir seus funcionários em 2 grupos (A e B) e enviar um deles (A) para um treinamento. Para verificar a validade do treinamento (ou seja, constatar se a variação no diâmetro das peças produzidas diminuiu), no dia 10 de agosto de 2020 foram selecionadas 10 peças produzidas pelo grupo A e 10 peças produzidas pelo grupo B, cujos funcionários não participaram do treinamento. Veja os resultados obtidos.

Diâmetro, em centímetros, das peças produzidas pelo grupo A. Os dados apresentados nos quadros são fictícios.

75,27	75	74,98	75,01	75,41
74,93	74,72	74,53	75,22	74,75

Diâmetro, em centímetros, das peças produzidas pelo grupo B. a) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam *box-plot*.

75,98	75,61	75	74,2	76,84
76,75	76,75	74,74	72,58	74,86

a) A fim de possibilitar uma comparação rápida dos dados, será esboçado um gráfico. Em sua opinião, qual gráfico seria o mais indicado para essa comparação?

b) Esboce o gráfico indicado por você no item **a**. Em seguida, analisando-o, determine se o treinamento foi válido. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXCLUSIVA

13 Estatística e probabilidade

Tomada de decisões na prevenção de doenças e de gravidez não planejada

A tomada de decisões é uma ação indispensável à vida em sociedade, porém, para que seja exercida de modo adequado, é necessário ter conhecimentos que permitam avaliar as diferentes possibilidades e escolher a melhor opção. Esse tipo de situação está presente em diversos ramos da sociedade, nas mais variadas situações, como é o caso da saúde.

Todos os seres humanos passam, desde o seu nascimento, por um processo de desenvolvimento que inclui diversas mudanças morfológicas, emocionais e atitudinais, por exemplo, que irão refletir em sua vida adulta. Uma parte importante desse desenvolvimento envolve os cuidados com a saúde e a sexualidade. E nesse contexto, merece atenção o uso adequado dos métodos contraceptivos, com o objetivo de evitar gravidez não planejada ou a transmissão de infecções sexualmente transmissíveis. Nesse caso, a Matemática pode contribuir para a tomada de decisão envolvendo alguns métodos contraceptivos não definitivos e de fácil acesso.

BNCC

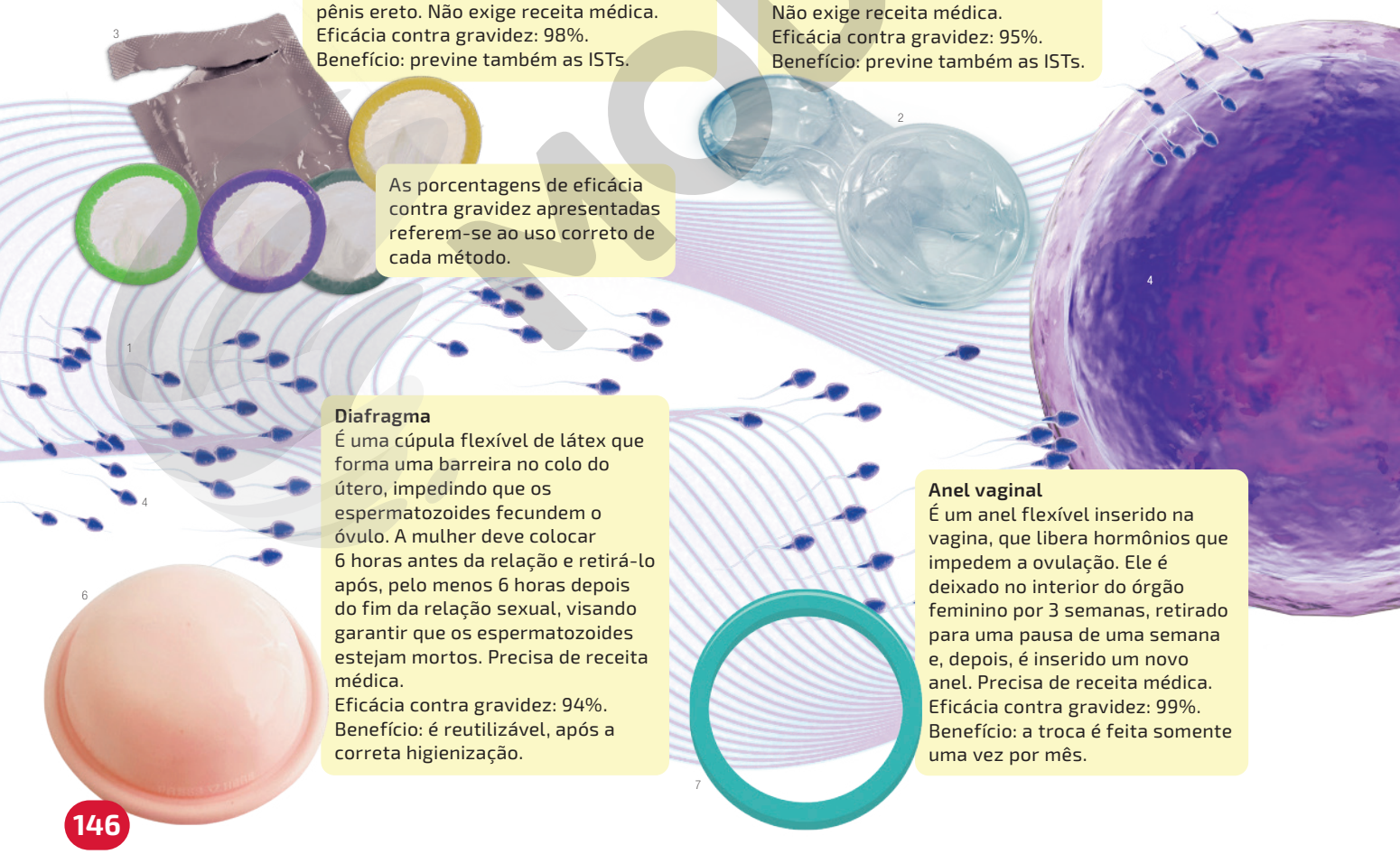
- EM13MAT106
- CE2CNT

Uma consideração importante é que alguns métodos não impedem a transmissão de ISTs (Infecções Sexualmente Transmissíveis).

Eficácia dos principais métodos contraceptivos

Preservativo masculino
O mais correto é dizer que o preservativo atua como uma barreira, impedindo o contato de fluidos corporais, com o sêmen e com o sistema genital feminino. Deve ser colocado antes da penetração, com o pênis ereto. Não exige receita médica.
Eficácia contra gravidez: 98%.
Benefício: previne também as ISTs.

Preservativo feminino
Segue o mesmo princípio do preservativo masculino, mas as mulheres podem colocar com até 8 horas de antecedência.
Não exige receita médica.
Eficácia contra gravidez: 95%.
Benefício: previne também as ISTs.



As porcentagens de eficácia contra gravidez apresentadas referem-se ao uso correto de cada método.

Diafragma
É uma cúpula flexível de látex que forma uma barreira no colo do útero, impedindo que os espermatozoides fecundem o óvulo. A mulher deve colocar 6 horas antes da relação e retirá-lo após, pelo menos 6 horas depois do fim da relação sexual, visando garantir que os espermatozoides estejam mortos. Precisa de receita médica.
Eficácia contra gravidez: 94%.
Benefício: é reutilizável, após a correta higienização.

Anel vaginal
É um anel flexível inserido na vagina, que libera hormônios que impedem a ovulação. Ele é deixado no interior do órgão feminino por 3 semanas, retirado para uma pausa de uma semana e, depois, é inserido um novo anel. Precisa de receita médica.
Eficácia contra gravidez: 99%.
Benefício: a troca é feita somente uma vez por mês.

NÃO OFERTA

Um fato que precisamos considerar sobre os diferentes métodos contraceptivos é que nenhum deles é 100% garantido. Em um universo de 100 relações sexuais, a probabilidade de uma gravidez não planejada mesmo tomando a pílula anticoncepcional corretamente, por exemplo, é de, em média, 1 em 100. Por menor que seja essa probabilidade, ela só aumenta quando o assunto é o uso inadequado.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Junte-se a um colega para realizar uma pesquisa a fim de determinar quais procedimentos e tipo de pesquisa (amostral ou censitária) foram utilizados para obter as porcentagens da eficácia dos métodos contraceptivos apresentados. Em seguida, exponham suas conclusões aos colegas e professor. Resposta pessoal.

B Você já teve acesso a dados como esses em outras fontes de informação? Essas fontes eram confiáveis? Converse com os colegas e o professor. Resposta pessoal.

C Em relação ao uso do preservativo masculino, e desconsiderando os fatores biológicos envolvidos, determine, em um universo de 50 relações sexuais, em quantas delas, em média, seria evitada uma gravidez não planejada. aproximadamente 49 relações

Ser consciente

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que é importante aprender sobre o assunto para tomar decisões adequadas no que diz respeito aos cuidados com a saúde e a sexualidade.

> Em sua opinião, é importante conhecer os diferentes métodos contraceptivos e a eficácia de cada um deles? Converse com o professor e os colegas a respeito.

Explique aos alunos que a escolha do método contraceptivo deve ser sempre acompanhada pelo ginecologista.

Ginecologia: especialidade médica que se dedica ao estudo da fisiologia e da patologia do corpo da mulher e de seu aparelho reprodutor.

Nos temas anteriores, estudamos as chances de um evento ocorrer por meio da probabilidade, e também alguns parâmetros que representam o comportamento de uma amostra. A partir da relação entre as duas áreas de estudo, é possível identificar um padrão em meio à aleatoriedade dos registros de órgãos públicos ou privados da área da saúde, por exemplo, assim como foi feito com a eficácia dos métodos contraceptivos. Essa relação é assunto das próximas páginas.

Injeção anticoncepcional
Injeção de hormônios, que agem impedindo a ovulação. Precisa ser aplicado uma vez por mês ou uma vez a cada três meses, dependendo da composição indicada pelo médico especializado em ginecologia.
Eficácia contra gravidez: 99%.
Benefício: não requer controle diário ou semanal.

DIU (Dispositivo Intra Uterino)
É um dispositivo pequeno em formato de T que é colocado dentro do útero. Na versão de cobre, libera íons de cobre que imobilizam o esperma e dificultam bastante a sua motilidade no útero, mas não impedem a ovulação. Já na versão hormonal, impede a ovulação pela liberação contínua de hormônios. Precisa ser inserido por um médico.
Eficácia contra gravidez: 99%.
Benefícios: pode permanecer no útero por até 5 anos (hormonal) ou até 10 anos (de cobre), mas pode ser retirado a qualquer momento.

Adesivo anticoncepcional
É colado na pele da mulher uma vez por semana durante 3 semanas, por um total de 21 dias, podendo ser colocado no braço, nas costas ou nas nádegas. Ele libera hormônios que entram na corrente sanguínea e impedem a ovulação. Precisa de receita médica.
Eficácia contra gravidez: 99%.
Benefício: fácil aplicação.

Pílula
É um comprimido que a mulher toma uma vez ao dia, independente se houver ou não relação sexual. Ela contém hormônios que impedem a ovulação. Deve ser avaliada por um médico.
Eficácia contra gravidez: 99%.
Benefícios: receitada adequadamente, pode ajudar a combater sintomas de TPM (Tensão Pré-Menstrual) e proteger contra câncer de ovário.

Fonte de pesquisa: <https://www.vivasuavida.com.br/pt/metodos-contraceptivos/#methods->. Acesso em: 24 jun. 2020.

FOTOMONTAGEM DE MARIANA COAN. FOTOS: 1.ALEKSEI DERIN/SHUTTERSTOCK; 2.NITO/SHUTTERSTOCK; 3.JPC-PROD/SHUTTERSTOCK; 4.PHONLAMAI PHOTO/SHUTTERSTOCK; 5.CHOO CHIN/SHUTTERSTOCK; 6.LAURAMNTG/SHUTTERSTOCK; 7.ANATOLIR/SHUTTERSTOCK; 8.MAGDALENA KARBOWIAK/SHUTTERSTOCK

NÃO OPERA

Estudando estatística e probabilidade

Estudamos anteriormente que a probabilidade P de um evento ocorrer em um espaço amostral equiprovável pode ser calculada teoricamente por meio da seguinte razão:

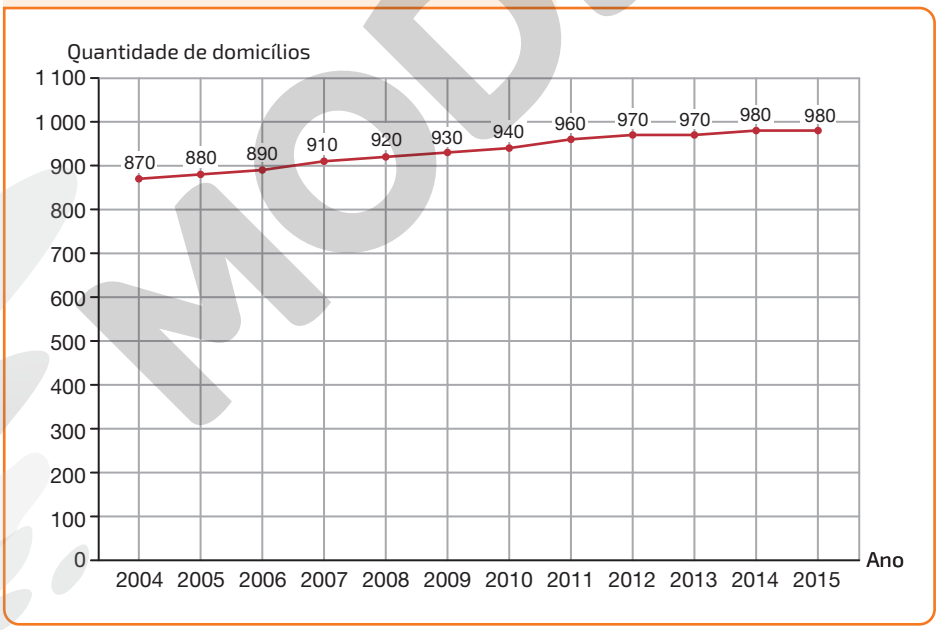
$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Porém, existem situações em que não é possível realizar o cálculo da probabilidade teoricamente, sendo necessário considerar várias repetições de um experimento e obter a probabilidade a partir da frequência relativa da ocorrência do evento. Assim, a probabilidade de um evento ocorrer pode ser estimada por meio de cálculos estatísticos.

À medida que aumentamos a quantidade de repetições do experimento, mais precisa é a probabilidade estimada. Por exemplo, mesmo que cinco peças produzidas por uma máquina e escolhidas ao acaso não apresentem defeitos, não podemos afirmar que a probabilidade de sortear uma peça sem defeito seja de 100%, pois essa quantidade analisada ainda é pequena. Para obter um valor que melhor represente a ocorrência do evento "a peça não apresentar defeito", devemos analisar uma quantidade maior de peças.

Nem sempre é necessária a realização de um experimento para obter os dados amostrais; esses dados também podem ser obtidos em registros históricos fornecidos por órgãos públicos e privados. O gráfico a seguir, por exemplo, apresenta informações registradas pelo IBGE.

Quantidade aproximada de domicílios com geladeira por mil domicílios de 2004 a 2015



RONALDO NÁCIO

Os valores apresentados no gráfico foram obtidos pelo cálculo da frequência relativa da ocorrência do evento "o domicílio ter geladeira".

Fonte de pesquisa: <https://sidra.ibge.gov.br/tabela/1954#resultado>. Acesso em: 23 jun. 2020.

Por meio dos dados apresentados nesse gráfico, podemos verificar que, em 2004, sorteando um domicílio brasileiro, a probabilidade de ele ter uma geladeira era de aproximadamente $\frac{870}{1\,000}$ ou 87%. Entretanto, note que essa probabilidade foi aumentando. Em 2015, por exemplo, era de aproximadamente 98%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

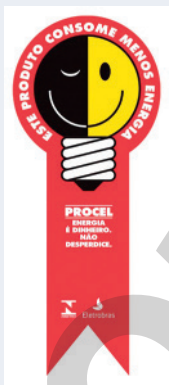
Explique aos alunos que a notação $P(X < 8)$ e $P(X = 7)$ é utilizada, por exemplo, para indicar a probabilidade de que o tempo de vida útil da lâmpada seja menor do que 8 000 horas e igual a 7 000 horas, respectivamente.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 O Programa Brasileiro de Etiquetagem (PBE) é um programa de conservação de energia do Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial (Inmetro), que atua por meio de etiquetas informativas cujo objetivo é alertar o consumidor sobre a eficiência energética de eletrodomésticos. Entre os produtos etiquetados pelo PBE, as lâmpadas fluorescentes são avaliadas em relação à durabilidade e intensidade luminosa. As lâmpadas permanecem ligadas durante meses para que se verifique se sua vida útil mínima corresponde a 5 000 horas. Além disso, são ligadas e desligadas várias vezes ao dia.

A seguir, estão apresentados os resultados obtidos por um laboratório de controle de qualidade para uma amostra de 320 lâmpadas da marca **A** em relação à durabilidade.

Tempo de vida útil (milhares de horas)	Quantidade de lâmpadas
3	10
4	17
5	25
6	35
7	44
8	49
9	46
10	38
11	28
12	18
13	10
Total	320



REPRODUÇÃO

O selo Procel indica melhor eficiência energética em eletrodomésticos.

Considerando que essa amostra representa significativamente todas as lâmpadas da marca **A** vendidas ao consumidor, resolva.

a) Construa um gráfico de barras representando a probabilidade de durabilidade das lâmpadas da marca **A** em função do tempo de vida.

b) Na etiqueta das lâmpadas da marca **A** vem indicada durabilidade média de 8 000 horas. Qual é a probabilidade de que, ao sortear uma lâmpada, ela tenha tempo de vida útil menor do que as 8 000 horas indicadas na etiqueta?

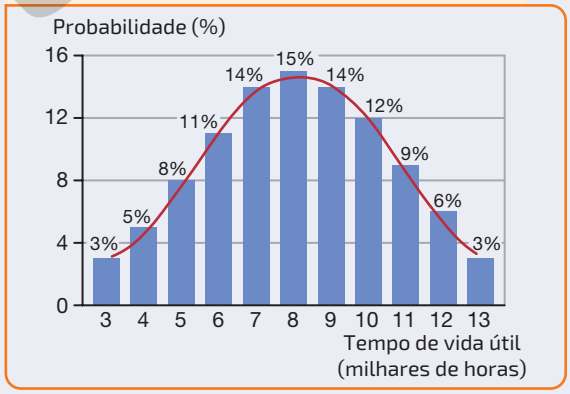
Resolução

a) Para construir o gráfico de barras, calculamos a probabilidade aproximada para cada tempo de vida útil das lâmpadas.

Tempo de vida útil (milhares de horas)	Quantidade de lâmpadas	Probabilidade
3	10	$\frac{10}{320} \simeq 3\%$
4	17	$\frac{17}{320} \simeq 5\%$
5	25	$\frac{25}{320} \simeq 8\%$
6	35	$\frac{35}{320} \simeq 11\%$
7	44	$\frac{44}{320} \simeq 14\%$
8	49	$\frac{49}{320} \simeq 15\%$
9	46	$\frac{46}{320} \simeq 14\%$
10	38	$\frac{38}{320} \simeq 12\%$
11	28	$\frac{28}{320} \simeq 9\%$
12	18	$\frac{18}{320} \simeq 6\%$
13	10	$\frac{10}{320} \simeq 3\%$
Total	320	100%

As informações apresentadas no gráfico e nos quadros são fictícias.

Probabilidade em função do tempo de vida útil da lâmpada da marca A em 2020



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: Laboratório de controle de qualidade.

b) Representando por X o tempo de vida útil da lâmpada, em milhares de horas, a probabilidade de que uma lâmpada da marca **A** tenha duração menor do que 8 000 horas é:

$P(X < 8) = P(X = 7) + P(X = 6) +$
$+ P(X = 5) + P(X = 4) + P(X = 3) =$
$= 0{,}14 + 0{,}11 + 0{,}08 + 0{,}05 +$
$+ 0{,}03 = 0{,}41 = 41\%$

Explique aos alunos que o item **b** dessa tarefa também pode ser resolvido dividindo a quantidade de lâmpadas com vida útil menor do que 8 mil horas pelo total de lâmpadas: $P(X < 8) = \frac{131}{320} \simeq 0{,}41 = 41\%$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R2 Na tarefa **18** da página **138** foram apresentadas algumas informações relacionadas ao IMC (Índice de Massa Corporal), além de apresentar a fórmula para obter o IMC de uma pessoa.

Os dados obtidos no IMC podem ser empregados para identificar características relacionadas à obesidade, com base na relação a seguir.

Classificação	IMC
Baixo peso	Menor do que 18,5 kg/m^2
Peso adequado	Maior ou igual a 18,5 kg/m^2 e menor do que 25 kg/m^2
Sobrepeso	Maior ou igual a 25 kg/m^2 e menor do que 30 kg/m^2
Obesidade grau 1	Maior ou igual a 30 kg/m^2 e menor do que 35 kg/m^2
Obesidade grau 2	Maior ou igual a 35 kg/m^2 e menor do que 40 kg/m^2
Obesidade grau 3 (mórbida)	Maior ou igual a 40 kg/m^2

O IMC não é a única ferramenta utilizada pelos profissionais da saúde para avaliar as condições físicas de um paciente. Assim, ele não deve ser tomado como único parâmetro para classificar uma pessoa em relação à obesidade.

Em uma clínica de endocrinologia e nutrição foi realizado um levantamento a respeito dos valores de IMC de uma amostra de seus pacientes, cujos dados foram organizados no quadro indicado a seguir.

IMC	Quantidade de pacientes
Menor do que 18,5 kg/m^2	7
Maior ou igual a 18,5 kg/m^2 e menor do que 25 kg/m^2	36
Maior ou igual a 25 kg/m^2 e menor do que 30 kg/m^2	54
Maior ou igual a 30 kg/m^2 e menor do que 35 kg/m^2	18
Maior ou igual a 35 kg/m^2 e menor do que 40 kg/m^2	9
Maior ou igual a 40 kg/m^2	6

Considerando que essa amostra representa significativamente todos os pacientes dessa clínica, determine a probabilidade de, selecionando um paciente dessa clínica ao acaso, a pessoa escolhida ser classificada como obesa, conforme os parâmetros de avaliação do IMC.

Resolução

Para que um indivíduo seja classificado como obeso, ele precisa apresentar IMC maior ou igual a 30 kg/m^2. Assim, representando por X o IMC de um paciente, a probabilidade de que, conforme os parâmetros de avaliação do IMC, ele seja classificado como obeso é:

$$P(X \geqslant 30) = P(30 \leqslant X < 35) + P(35 \leqslant X < 40) + P(X \geqslant 40)$$

$$P(X \geqslant 30) = \frac{18}{130} + \frac{9}{130} + \frac{6}{130}$$

$$P(X \geqslant 30) \simeq 0{,}14 + 0{,}07 + 0{,}05$$

$$P(X \geqslant 30) = 0{,}26$$

Portanto, a probabilidade de um paciente escolhido ao acaso ser classificado, de acordo com o IMC, como obeso é aproximadamente 26%.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

5. Algumas possíveis respostas: abertura de um negócio; destino de uma viagem considerando a possibilidade de chuva.

1 O esgoto doméstico é formado após utilizarmos água no banho, na limpeza da louça, na descarga do vaso sanitário, entre outros. O escoamento da água da chuva é denominado esgoto pluvial e aqueles gerados em fábricas são chamados de esgotos industriais. O sistema da rede coletora de esgoto é importante para a saúde pública, pois geralmente o esgoto não tratado contém diversos microrganismos que podem provocar uma série de contaminações e transmissão de doenças.

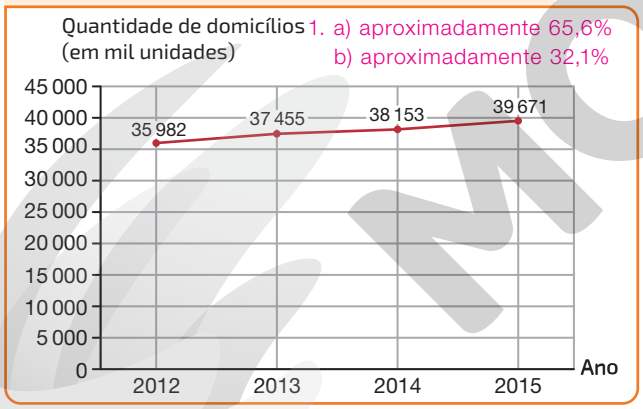
Veja como vem aumentando o total de domicílios urbanos e o de domicílios ligados à rede coletora de esgoto no Brasil.

Total de domicílios urbanos no Brasil nos anos de 2012 a 2015

Ano	Quantidade de domicílios (em mil unidades)
2012	54 886
2013	55 968
2014	57 718
2015	58 425

Fonte de pesquisa: <https://sidra.ibge.gov.br/Tabela/1941#resultado>. Acesso em: 17 jul. 2020.

Domicílios urbanos servidos de rede coletora de esgoto no Brasil de 2012 a 2015



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: <https://sidra.ibge.gov.br/Tabela/1956>. Acesso em: 17 jul. 2020.

a) Em 2012, ao ser escolhido aleatoriamente um domicílio urbano no Brasil, qual era a probabilidade de ele ter serviço de rede de esgoto?

b) Qual era a probabilidade de, ao ser escolhido ao acaso um domicílio urbano em 2015, ele não contar com a rede coletora de esgoto?

c) Em que ano, ao ser escolhido aleatoriamente um domicílio urbano no Brasil, havia a maior probabilidade de ele estar ligado à rede coletora de esgoto: 2013 ou 2014? 2013

1. a) aproximadamente 65,6%
b) aproximadamente 32,1%

2 Uma urna contém 30 bolinhas, entre brancas, pretas e vermelhas. Ao realizar repetidas vezes um experimento, que consistia em sortear uma bolinha da urna, anotar sua cor e devolvê-la à urna, foram obtidos os resultados apresentados.

Cor da bolinha	Quantidade de sorteios
Branca	427
Preta	902
Vermelha	271

A partir dos resultados obtidos no experimento, estime qual deve ser o total de bolinhas de cada cor dentro dessa urna. 8 brancas; 17 pretas; 5 vermelhas

3 Em certo experimento realizado com um dado de seis faces, foram feitos 900 lançamentos, obtendo os seguintes resultados. Pode-se suspeitar da honestidade desse dado? Justifique sua resposta.

Face	1	2	3	4	5	6
Quantidade de lançamentos	113	225	105	120	202	135

3. sim; Espera-se que os alunos digam que a probabilidade de se obter cada face deveria ser próxima da probabilidade teórica $\left(16,\overline{6}\%\right)$. Existe uma tendência maior de saírem as faces de números 2 (25%) e 5 $\left(22,\overline{4}\%\right)$.

No contexto

4. Redução de aproximadamente 98% nos casos de gravidez não planejada comparando o segundo grupo com o primeiro.

4 Nas páginas 146 e 147 vimos algumas informações relacionadas à gravidez não planejada e à prevenção das ISTs. Uma das estratégias indicadas por especialistas para evitar gravidez não planejada e a transmissão das ISTs é a combinação de dois métodos contraceptivos de categorias diferentes, por exemplo, combinar um método hormonal com o preservativo.

Uma pesquisa foi feita com um grupo de 1 000 casais, nos quais todos eles usaram a pílula anticoncepcional, e apenas metade deles usou também o preservativo masculino como segundo método contraceptivo. Considerando que no segundo grupo o preservativo apresentou sua eficácia para os casais nos quais a pílula anticoncepcional apresentou falha, determine uma estimativa, em porcentagem, com relação à diferença entre os casos de gravidez não planejada entre os dois grupos participantes da pesquisa.

5 Em grupo

Há situações cotidianas em que é necessário tomar decisões com base em pesquisas prévias e conhecimentos de probabilidade, como a escolha de um método contraceptivo e um tratamento médico. Junte-se a um colega e realize uma pesquisa para determinar outras situações em que é necessário utilizar os conhecimentos sobre probabilidade na tomada de decisão.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Ampliando seus conhecimentos

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de livros, *sites* e *podcasts* que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula, envolvendo conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

Para ler

- **A Matemática das coisas**

  CRATO, Nuno. *A Matemática das coisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro apresenta diversos exemplos da importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

- **A Matemática nas profissões**

  BARELLA, Elaine S.; MARTINS, Laura M. R. (Org.). *A Matemática nas profissões*. São Paulo: Portal Editora, 2010.

  Resultado de pesquisas e entrevistas, o livro apresenta o relato de profissionais de diversas áreas sobre a relação deles com a Matemática em suas rotinas de trabalho.

- **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**

  GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro é um relato de quatro milênios da história da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

- **A vida secreta dos números: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos**

  SZPIRO, George. *A vida secreta dos números*: 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos. Trad. J. R. Souza. Rio de Janeiro: Difel, 2008.

  Por meio de histórias, anedotas e outros tipos de textos, este livro nos mostra como a Matemática está presente em quase todos os aspectos do cotidiano. O livro aborda curiosidades históricas pouco conhecidas e apresenta grandiosos praticantes da Matemática ao longo dos tempos.

- **O instinto matemático**

  DEVLIN, Keith. *O instinto matemático*. Trad. Michelle Dysman. Rio de Janeiro: Record, 2009.

  O autor defende a ideia de haver dois "tipos" de Matemática: a simbólica, que é exclusiva do ser humano; e a natural, que pertence a qualquer animal e corresponde a habilidades matemáticas relacionadas à sobrevivência, senso de direção e captura de presas.

- **O livro dos números: uma história ilustrada da Matemática**

  BENTLEY, Peter. *O livro dos números*: uma história ilustrada da Matemática. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2010.

  O autor busca revelar segredos e mistérios da Matemática e mostrar sua presença no cotidiano, desde a ciência até as artes. Ilustrado com fotografias, gravuras, pinturas, entre outros, o livro é organizado de maneira a facilitar a compreensão de situações em que a Matemática está envolvida.

- **O universo e a xícara de chá**

  COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá*. Trad. Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

  O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como enxergar a lógica presente nessas situações, cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para navegar

- **Domínio Público**

  Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* consiste em uma biblioteca digital, na qual é possível pesquisar textos, imagens, sons e vídeos de domínio público (acesso livre e gratuito) referentes a diversas áreas.

- **Edumatec**

  Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

- **Enem**

  Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível fazer a inscrição para o Enem e acessar os resultados, os simulados e as provas aplicadas em anos anteriores, assim como a matriz de referência dos conhecimentos avaliados no exame.

- **IBGE**

  Disponível em: <https://www.ibge.gov.br/pt/inicio.html>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível obter informações estatísticas sobre o Brasil, como contagem da população e índices da economia, além de dados referentes a estados e municípios.

- **Matemática essencial**

  Disponível em: <http://www.uel.br/projetos/matessencial/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* apresenta definições e conceitos matemáticos de diversos níveis de ensino, exemplos resolvidos e exercícios que possuem respostas, e, em alguns casos, as respostas estão justificadas e as resoluções, detalhadas.

- **Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas**

  Disponível em: <http://www.obmep.org.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível obter diversas informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, como efetuar a inscrição, verificar a data das provas e acessar as provas aplicadas em anos anteriores.

Para ouvir

- **Número imaginário**

  Disponível em: <https://numeroimaginario.wordpress.com/2017/06/14/podcasts/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Uma série de *podcasts* abordando diversos tópicos relacionados à área de Matemática são disponibilizados neste *site*, tratando de assuntos que vão desde a discussão sobre 0 pertencer ou não ao conjunto dos números naturais até o infinito de Cantor.

- **Pravaler**

  Disponível em: <https://soundcloud.com/canal-pravaler/guia-fies-2020-saiba-tudo-sobre-essa-edicao-1>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Vai começar a graduação ou pensa em fazer uma segunda faculdade, mas não tem renda o suficiente para pagar um curso em uma instituição privada? O Pravaler preparou um guia completo sobre o Fies 2020, com tudo o que você precisa saber.

- **Resumov**

  Disponível em: <https://www.resumov.com.br/podcast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Criado por Susane Ribeiro, o Resumov é um *podcast* que dá dicas de estudos para quem deseja ter uma boa nota no Enem ou passar nos vestibulares mais difíceis do país.

- **Scicast**

  Disponível em: <https://www.deviante.com.br/podcasts/scicast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Esse *podcast* é voltado para aquele que precisa dar um gás nos estudos da área de Ciências exatas e naturais. Nele, o apresentador utiliza de situações do dia a dia para explicar Matemática, Química e Física de uma maneira mais didática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 Os conjuntos

1 alternativa b

2 a) verdadeira
b) falsa
c) verdadeira
d) falsa
e) verdadeira
f) verdadeira

3 alternativa c

4 alternativa b; propriedade transitiva

7 $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 10\}$, $\{1, 5, 10\}$, $\{2, 5, 10\}$

8 a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$
c) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
d) $\{1, 4\}$
e) $\varnothing$
f) $\{5\}$
g) $\{5\}$
h) $\{1, 3, 4, 5\}$

9 8 elementos

10 5 elementos; 3 elementos

11 a) $\complement_U^A = \{x | x \text{ é um número par}\}$
b) $\complement_U^B = \{x | x \text{ é um número negativo ou } x = 0\}$

13 alternativa b

14 a) 19 funcionários
b) 12 funcionários
c) 5 funcionários
d) 14 funcionários
e) 7 funcionários

15 6 alunos

16 a) 200 pacientes
b) 88 pacientes

17 alternativa d

18 34 clientes

19 a) 35 alunos
b) 77 alunos
c) 63 alunos

20 a) 49 alunos
b) 103 alunos

21 13 500 habitantes

2 Princípio aditivo, multiplicativo e arranjos

1 6 filmes

2 a) 7 personagens; princípio aditivo da contagem.
b) 24 maneiras; princípio multiplicativo da contagem.
c) 2 opções; princípio aditivo da contagem.

4 24 maneiras

5 49 maneiras; 42 maneiras

6 258 336 000 senhas

7 5 trajetos

8 12 pessoas

9 24 maneiras

10 302 400 possibilidades

11 alternativa d

12 a) 36 maneiras
b) 12 maneiras

13 a) 9 000 números
b) 27 216 números
c) 450 números
d) 180 000 números

14 15 120 maneiras

15 235 min ou 3 h 55 min

16 a) Não, pois o 4º dígito deve ser 5 ou 7.
b) 20 000 números
c) 20 000 números distintos a mais.

18 a) 720
b) 8
c) 25
d) 96
e) 120
f) 195
g) $\frac{1}{455}$
h) 10

19 a) n
b) $n + 3$

20 a) $n = 3$
b) $n = 1$ ou $n = 0$
c) $n = -4$

21 a) 30
b) 504
c) 840
d) 20 160
e) 48
f) 6 880

22 a) $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{(n-3)}$
b) $n + 1$
c) $\frac{1}{2n^2 + 2n}$

23 1 320 maneiras

24 665 280 maneiras

25 24 165 120 maneiras

26 19 656 000 livros

27 a) 27 907 200
b) 3 113 510 400
c) 78 960 961
d) 19 958 399
e) 6 652 800
f) 3 160 080

28 a) 625 números
b) 120 números
c) 36 números
d) 48 números

29 1 440 números

30 a) 3 senadores
b) $\frac{81!}{74!}$

31 $n = 4$

32 480 maneiras

33 a) 27 907 200 maneiras
b) 2 203 200 maneiras

34 a) 16 equipes
b) 30 partidas

35 a) 420 min
b) Não, pois, nessas condições, o número máximo de senhas a serem digitadas é 672, o que equivale a 56 min.

3 Permutações

1 a) 5 040
b) 1 120
c) 4 920
d) 132
e) 4 320
f) 24

2 a) 24 anagramas
b) 120 anagramas
c) 362 880 anagramas

3 719 maneiras

4 a) 120 palavras
b) 24 palavras
c) 48 palavras

5 a) 875 431; 134 578
b) 389 números; 310 números

6 24 meses

7 2 340ª

8 Uma possível resposta: considerando V, A e P as cores das caixas vermelhas, amarelas e pretas, respectivamente, a sequência será (V A P V A V P A V); 9 caixas.

9 a) 2 520 anagramas
b) 60 480 anagramas
c) 1 814 400 anagramas
d) 1 663 200 anagramas

11 84 soluções

12 a) 180 números
b) 90 números
c) 120 números

13 UACÉLL

14 alternativa d

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

4 Combinação simples e Binômio de Newton

1 a) 15
b) 126
c) 3 003
d) 952
e) 14
f) 1

2 a) $p!$
b) $n(n-2)$
c) $\frac{p(p+1)}{n}$
d) $\frac{n-1}{p-1}$

3 a) 12 650
b) 2 042 975
c) 3 365 856
d) 10 015 005
e) 24 040 016
f) 3 921 225

4 15

5 2 118 760 grupos diferentes

6 19 600 maneiras

7 31 824 maneiras

8 alternativa a

9 alternativa a

10 2 042 975 maneiras

11 196 times diferentes

12 $x = 4$

13 a) 15 segmentos
b) 20 triângulos

14 36 pessoas

15 250 800 maneiras

16 a) $C_{60,6} = \frac{60!}{6!(60-6)!} = \frac{60!}{6!54!} = 50\,063\,860$

b) R$ 225 287 370,00; Uma possível resposta: o procedimento seria vantajoso se o prêmio fosse maior do que esse valor e não existisse outro ganhador.

c) • R$ 31,50 • R$ 4 158,00 • R$ 378,00 • R$ 22 522,50

17 38 760 maneiras

18 27 alunos

19 33 264 000 maneiras

20 alternativa a

21 64 maneiras

22 140 maneiras

23 1 680 mensagens

24 alternativa c

25 alternativa b

26 alternativa c

28 a) 112
b) 267
c) 32 768
d) 808

29 a) $S = \{9\}$
b) $S = \{11, 13\}$
c) $S = \{100\}$
d) $S = \{0, 10\}$

30 8 elementos; 256

31 alternativa d

32 $x = 8$

33 1 023 comissões

34 $n = 12$

35 a) $x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

b) $16a^4 - 32a^3b + 24a^2b^2 - 8ab^3 + b^4$

c) $64x^6 - 48x^5y + 15x^4y^2 - \frac{5x^3y^3}{2} + \frac{15x^2y^4}{64} - \frac{3xy^5}{256} + \frac{y^6}{4\,096}$

d) $x^2 + 4x\sqrt{x}\sqrt{y} + 6xy + 4y\sqrt{x}\sqrt{y} + y^2$

e) $\frac{a^2}{16} - \frac{a\sqrt{a}\sqrt{b}}{6} + \frac{ab}{6} - \frac{2b\sqrt{a}\sqrt{b}}{27} + \frac{b^2}{81}$

f) $x^6y^6 + 2x^5y^5z + \frac{5}{3}x^4y^4z^2 + \frac{20}{27}x^3y^3z^3 + \frac{5}{27}x^2y^2z^4 + \frac{2}{81}xyz^5 + \frac{z^6}{729}$

36 a) 1
b) −1
c) 0
d) 256

37 a) $220\sqrt{5} - 284\sqrt{3}$
b) $3\,964 + 624\sqrt{35}$
c) $3\,363 - 2\,378\sqrt{2}$
d) $2\,403 + 981\sqrt{6}$

38 $n = 8$

39 a) $T_{p+1} = \binom{7}{p} \cdot 9^{7-p}(-a)^p$

b) $T_{p+1} = \binom{5}{p} \cdot 3^{5-p}\left(\frac{x}{3}\right)^p$

c) $T_{p+1} = \binom{9}{p}(5ab)^{9-p}\left(-\frac{c}{7}\right)^p$

d) $T_{p+1} = \binom{6}{p}\left(\frac{7}{x}\right)^{6-p}\left(\frac{8y}{3}\right)^p$

40 $-\frac{320x^3}{729}$

41 $77\,520x^4y^{16}$

42 a) $540y^6$
b) $70a^4b^4$
c) $\frac{59\,136z^{18}}{15\,625x^6y^6}$

43 a) 729
b) 1 024
c) não possui termo independente de x
d) 5 670

44 $\frac{760x^{18}}{y^2}$

45 a) $\frac{55x^3}{2y^9}$
b) $\frac{231x^6}{16y^6}$
c) $\frac{495x^8}{256y^4}$

5 Probabilidade

1 $\Omega = \{(A,B), (A,C), (A,D), (B,C), (B,D), (C,D)\}$

2 a) $\Omega = \{(P,A,T,Q), (P,A,T,C), (P,A,Q,C), (P,T,Q,C)\}$
b) $\Omega = \{213, 268, 305, 313\}$

3 a) $\Omega = \{(A,A,V), (A,V,A), (A,V,V), (V,V,A), (V,A,V), (V,A,A)\}$
b) $E = \varnothing$

4 a) $A = \{(C,C), (E,E), (O,O), (P,P)\}$
b) $B = \{(O,O), (O,C), (O,E), (O,P)\}$
c) $C = \{(E,E), (E,O), (E,P), (O,O), (O,P), (P,P)\}$

5 Resposta no final da página **156**.

6 b)
- $A = \{(M,M,M), (F,F,F)\}$
- $B = \{(M,M,F), (M,F,M), (F,M,M)\}$
- $C = \{(M,M,F), (M,F,M), (M,F,F), (F,M,M), (F,M,F), (F,F,M), (F,F,F)\}$

8 $\Omega = \{(Co), (Ca, Co), (Ca, Ca, Co), (Ca, Ca, Ca, Co, \ldots), (Ca, Ca, Ca, \ldots, Co), \ldots\}$.
O espaço amostral é infinito.

9 a) 6 maneiras
b) $\Omega = \{$R$ 120,00; R$ 130,00; R$ 140,00; R$ 150,00; R$ 160,00; R$ 180,00$\}$

10 a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $B = \{0, 6; 1, 5; 2, 4; 3\}$
c) $C = \varnothing$
d) $D = \Omega$

11 a) $\Omega = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, B, D), (A, C, D, B), (A, D, B, C), (A, D, C, B)\}$
b) $M = \{(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, D, B), (A, D, C, B)\}$
c) $N = \{(A, C, B, D), (A, D, B, C)\}$
d) $P = \varnothing$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

12 a) $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 1\,095\}$
ou $\Omega = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in [0, 1\,095]\}$

b) $A = \{t \in \mathbb{R} \mid 365 < t < 730\}$
ou $A = \{t \in \mathbb{R} \mid t \in]365, 730[\}$

13 a) $\frac{1}{2}$ ou 50%

b) $\frac{2}{7}$ ou aproximadamente 28,57%

c) $\frac{1}{4}$ ou 25%

d) $\frac{9}{28}$ ou aproximadamente 32,14%

e) $\frac{3}{7}$ ou aproximadamente 42,86%

14 a) $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

b) $\frac{2}{3}$ ou $66,\overline{6}\%$

c) 1 ou 100%

d) $\frac{1}{2}$ ou 50%

e) 0 ou 0%

15 alternativa **c**

16 $\frac{1}{5}$ ou 20%; $\frac{4}{5}$ ou 80%

17 alternativa **c**

18 a) Na faixa horária das 6 h às 11 h 59 min, pois é nessa faixa horária que ocorre o maior número de enfartes.

b) • $\frac{7}{10}$ ou 70% • $\frac{1}{5}$ ou 20%

19 a) $\frac{42}{85}$ ou aproximadamente 49,41%

b) $\frac{6}{17}$ ou aproximadamente 35,29%

c) $\frac{14}{85}$ ou aproximadamente 16,47%

20 a) • $\frac{1}{4}$ ou 25%
• $\frac{1}{16}$ ou 6,25%
• $\frac{3}{4}$ ou 75%

b) $\frac{1}{8}$ ou 12,5%; $\frac{3}{8}$ ou 37,5%

c) $\frac{1}{4}$ ou 25%

21 $\frac{17}{50}$ ou 34%; $\frac{1}{2}$ ou 50%

22 $\frac{2}{9}$ ou $22,\overline{2}\%$

23 a) $\frac{1}{2}$ ou 50%

b) $\frac{1}{8}$ ou 12,5%

c) $\frac{3}{8}$ ou 37,5%

24 a) $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ ou $41,\overline{6}\%$

b) 1 ou 100% (evento certo)

26 $\frac{14}{24} = \frac{7}{12}$ ou $58,\overline{3}\%$

27 alternativa **e**

28 a) $\frac{1}{52}$ ou aproximadamente 1,92%

b) $\frac{1}{13}$ ou aproximadamente 7,69%

c) $\frac{4}{13}$ ou aproximadamente 30,77%

d) $\frac{2}{13}$ ou aproximadamente 15,38%

e) $\frac{5}{26}$ ou aproximadamente 19,23%

29 a) 27,65%

b) 31,1%

c) 72,35%

30 a) Natália; $\frac{1}{2}$ ou 50%

b) Marcos e Otávio; $\frac{1}{3}$ ou $33,\overline{3}\%$

31 $\frac{3}{4}$ ou 75%

32 a) $\frac{19}{20}$ ou 95%

b) $\frac{17}{20}$ ou 85%

c) $\frac{1}{60}$ ou $1,\overline{6}\%$

33 60%

34 $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ ou 25%

35 $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$ ou 40%

36 63%

6 Probabilidade condicional

1 a) $\frac{7}{11}$ ou $63,\overline{63}\%$

b) $\frac{2}{5}$ ou 40%

c) $\frac{8}{17}$ ou aproximadamente 47,06%

d) $\frac{4}{7}$ ou 57,14%

e) $\frac{9}{17}$ ou aproximadamente 52,94%

f) $\frac{16}{31}$ ou aproximadamente 51,61%

Resposta da tarefa 5 do tema 5.

a)

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

b) • $A = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$
• $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$
• $C = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$
• $D = \varnothing$
• $E = \{(3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

2 a) • $\frac{9}{16}$
• $\frac{3}{16}$
• $\frac{1}{4}$
b) 50%

3 a) $\frac{12}{19}$ ou aproximadamente 63,15%
b) $\frac{32}{95}$ ou aproximadamente 33,68%
c) $\frac{3}{95}$ ou aproximadamente 3,16%

4 a) • $\frac{5}{47}$ ou aproximadamente 10,64%
• $\frac{11}{47}$ ou aproximadamente 23,4%
b) $\frac{1}{3}$ ou aproximadamente $33,\overline{3}\%$

5 alternativa **d**

6 alternativa **c**

7 $\frac{3}{10}$ ou 30%

8 $\frac{9}{100}$ ou 9%

9 $\frac{3}{17}$ ou aproximadamente 17,65%

11 aproximadamente 23,62%

12 a) aproximadamente 26,37%
b) aproximadamente 0,1%
c) aproximadamente 39,55%
d) aproximadamente 23,73%

13 $\frac{3}{32}$ ou aproximadamente 9,38%

14 38,4%

15 a) aproximadamente 25,41%
b) aproximadamente 0,007%
c) aproximadamente 25,53%

16 aproximadamente 99,88%

17 aproximadamente 0,16%

18 a) $\frac{1}{8\,192}$ ou aproximadamente 0,012%

8 Estatística

1 a) Pesquisa censitária.
b) Pesquisa amostral.

2 Quantitativa discreta: idade (em anos) e quantidade de filhos; quantitativa contínua: massa (em kg) e altura (em cm); qualitativa ordinal: grau de instrução; qualitativa nominal: gênero e estado civil.

4 Quando todo elemento da população *P* também é elemento da amostra *A*, ou seja, quando todos os elementos da população serão pesquisados.

6 a) Amostragem estratificada.
b) Variável qualitativa nominal.
c) Possível resposta: inicialmente, deveria organizar os elementos da população em determinada ordem ou listagem (possibilitando a identificação de cada um deles). Em seguida, escolher os elementos que compõem a amostra conforme um critério ou fator de repetição.

7 a) 0,4%

9 Gráficos e tabelas

1 a) Na tabela I, é apresentado o consumo médio diário de água por pessoa no Brasil e nas regiões brasileiras, no ano de 2017. Na tabela II, é apresentada a quantidade de água necessária para produzir alguns produtos, em 2018.
b) Nordeste; Sudeste
c) $3,2 \cdot 10^{10}$ ℓ
d) açúcar; leite; milho
e) 8 250,5 ℓ

2 a) Norte e Nordeste.
b) Norte; Nordeste; Centro-Oeste; Sul

4 a) Não, pois os dados apresentados nessa tabela são referentes à produção por pessoa. Para fazer uma comparação quantitativa, é necessário conhecer a quantidade de habitantes de cada um dos estados em questão.
b) 2 270 009,7 kg

5 a) tireoide
b) 40 990 novos casos
c) aproximadamente 71,3%

6 a) Yanomami e Tenetehara
b) 677,1 mil

7 entre 01/2011 e 01/2012; 39 997 458 acessos

8 a) Estados Unidos da América: 309 346; Brasil: 242 450; Índia: 241 867

10 a) cestas de 2 pontos
b) 84 pontos

12 a) 20 a 24 anos e 25 a 29 anos
b) masculino; feminino

13 a) 2016
b) não
c) aproximadamente 8,5%

14 a) Não, pois diferentes tipos de pessoa frequentam diferentes tipos de supermercados. A amostra daria unicamente indicações sobre a população constituída pelos clientes desse supermercado.
b) Sim, as porcentagens somam mais do que 100%. Nesse caso, a amostra utilizada não é representativa e a área do setor correspondente a 55% é maior do que a área do setor correspondente a 60%.

15 a) Concorrente A; Concorrente B
c) Concorrente A.

16 Não, pois foram analisadas apenas as empresas que tiveram o maior volume de exportação no último ano, o que, geralmente, não representa a situação financeira de todas as empresas de um estado.

17 não

18 b) A marca B vendeu menor quantidade de *notebook* do que as marcas D, E e F juntas.

10 Medidas de tendência central

1 a) média: 8;
moda: 3;
mediana: 7,5
b) média: −9,2;
moda: −6 e −7;
mediana: −7
c) média: 0;
moda: −1;
mediana: 0

2 a) média: 642,8 m; amodal; mediana: 601 m
b) Burj Khalifa; 596,5 m

3 Felipe: 42 anos; filho: 21 anos; pai: 84 anos

4 7,7

5 67

6 a) Não, pois sua média aritmética final será de, aproximadamente, 6,8, que é inferior à nota média mínima.
b) 7,3
c) Sim, pois, para não ser eliminada na prova prática, a nota de Fátima deve ser igual ou superior a 5, nota com a qual sua média final ficará acima de 7.

7 alternativa **d**

8 a) 3 minutos

9 a) A média é 8,1; o que significa que a nota média dos alunos é 8,1 pontos. A moda é 8 e 10, ou seja, as notas que mais alunos obtiveram foram 8 e 10. A mediana é 8 e, portanto, a nota mediana dos 25 alunos é 8.

11 alternativa **a**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

12 a) A média é 2,75 e significa que a nota média recebida pelo produto foi 2,75. A moda é 3 e significa que a nota mais atribuída pelos clientes foi 3 e a mediana é 3, pois a nota mediana atribuída pelos 3 000 clientes foi 3.

13 Uma possível resposta: $a = 15$, $b = 8$, $c = 7$, $d = 6$, $e = 5$, $f = 4$, $g = 3$, $h = 2$, $i = 1$

11 Medidas separatrizes

1 a) 5 c) 2,5 e) 1
b) 8 d) 5 f) 8

2 a) 101,23
b) Uma possível resposta: 30% dos pilotos fizeram sua volta mais rápida em 101,23 s ou menos.

3 a) Falsa. Aproximadamente 40% dos alunos obtiveram uma nota menor ou igual a 6,5.
b) verdadeira
c) Falsa. Um aluno que obteve nota 8 está no 8º decil.
d) verdadeira

4 a) 39 anos
b) 25% dos eleitores dessa seção têm 21 anos ou menos, metade desses eleitores tem 31 anos ou menos e 75% desses eleitores têm 39 anos ou menos.

12 Medidas de dispersão

1 a) $\bar{x} = 62$; amodal; $Md = 63$; $A = 21$; $Dm = 6$; $V = 50{,}25$; $Dp \simeq 7{,}09$
b) $\bar{x} = 24$; $Mo = 14$; $Md = 25$; $A = 25$; $Dm \simeq 7{,}43$; $V \simeq 74{,}29$; $Dp \simeq 8{,}62$
c) $\bar{x} = 6{,}15$; $Mo = 4{,}5$ e $Mo = 12$; $Md = 4{,}5$; $A = 10{,}8$; $Dm = 3{,}9$; $V \simeq 18{,}38$; $Dp \simeq 4{,}29$
d) $\bar{x} = 2{,}5$; $Mo = 3$; $Md = 3$; $A = 31$; $Dm = 6{,}375$; $V = 81$; $Dp = 9$

2 a) 1ª semana: 0,86%; 2ª semana: 0,85%
b) R$ 4,69; R$ 4,72
c) 1ª semana: $Dm = 0{,}01$; $V \simeq 0{,}00017$; $Dp \simeq 0{,}013$; 2ª semana: $Dm = 0{,}013$; $V \simeq 0{,}0002$; $Dp \simeq 0{,}014$

3 a) 16 anos
b) 28 anos
c) A alteração do valor máximo do conjunto de valores altera muito a amplitude.

4 Não, pois, apesar de sua média ser superior a 60 pontos, o desvio padrão foi superior a 5 pontos.

5 a) piloto A
b) piloto B

7 a) Equipe A:
$A = 27$; $V \simeq 73{,}1$; $Dp \simeq 8{,}6$;
Equipe B:
$A = 33$; $V \simeq 141{,}2$; $Dp \simeq 11{,}9$
b) As pontuações obtidas nas oito primeiras partidas pela equipe A são menos variáveis do que as obtidas pela equipe B.

8 a) R$ 2 360,00
b) R$ 773,12

11 a) 40 apartamentos; 6 apartamentos
c) 21 apartamentos; 52,5%

12 b) 6,25%

13 a) 24 pacientes
b) 45%
c) 43 pacientes

14 a) 20 atletas
b) 1,8 ⊢ 1,9
c) 3 atletas
d) 55%
e) Não, pois não conhecemos a altura de nenhum deles; sabemos apenas que existem 7 atletas com alturas entre 1,8 m e 1,9 m.

15 b) 0,713 ⊢ 0,783
c) aproximadamente 14,3%
d) 33 países

16 a) 126 623 242 habitantes; 125 183 469 habitantes
b) 3,2%
c) 0 ⊢ 20 anos e 20 ⊢ 40 anos

17 32 020 pessoas

20 a) 100 plantas
b) $\bar{x} = 8{,}14$;
$Mo = 8$;
$Md = 8$
c) Não se pode afirmar uma quantidade exata, mas sabemos que é entre 29% e 76%.

21 a) 82 km/h
b) acima

22 aproximadamente 6,08

23 a) 15 produtores
b) 2020
c) aproximadamente 38,5 toneladas; aproximadamente 65,5 toneladas

24 Algumas possíveis respostas: dois funcionários levam 5 minutos para ir de suas casas ao trabalho; aproximadamente 40% dos funcionários levam 25 minutos para ir de suas casas ao trabalho; o funcionário que leva mais tempo demora 45 minutos.

25 Turma A: 11;
Turma B: 9;
Turma C: 10;
Turma D:11

26 c) Não, pois dos 28 alunos, apenas 8 estudam mais do que 4 h 30 min, ou 300 min, ou seja, menos da metade.

13 Estatística e probabilidade

1 a) aproximadamente 65,6%
b) aproximadamente 32,1%
c) 2013

2 8 brancas; 17 pretas; 5 vermelhas

3 sim

4 Redução de aproximadamente 98% nos casos de gravidez não planejada comparando o segundo grupo com o primeiro.

5 Algumas possíveis respostas: abertura de um negócio; destino de uma viagem considerando a possibilidade de chuva.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Referências bibliográficas

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em educação matemática).

  Este livro trata da informática educativa, abordando aspectos que vão desde as políticas governamentais até as questões epistemológicas e pedagógicas. São apresentados exemplos do uso da informática com alunos e professores, bem como questões referentes ao uso de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  A História da Matemática é abordada neste livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, e finalmente chegando aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  O objetivo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente. A qualidade da escola é condição essencial de inclusão e democratização das oportunidades no Brasil, e o desafio de oferecer uma educação básica de qualidade para a inserção do aluno, o desenvolvimento do país e a consolidação da cidadania é tarefa de todos.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional.

- Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro.

  A coleção é destinada à formação de professores de Matemática, a alunos de licenciatura ou cursos de aperfeiçoamento de professores. Organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), esta coleção está disposta em 20 volumes que tratam desde conteúdos relacionados à Matemática até temas sobre ensino e história da Matemática.

- Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual, 2013.

  A coleção aborda uma grande variedade de conteúdos e conceitos dispostos em dez volumes direcionados a alunos do Ensino Médio e Superior.

- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para a sua resolução.

- GUEDJ, D. *O teorema do papagaio*. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

  Em meio a uma rede de intrigas envolvendo a máfia, sequestros e enigmas intelectuais, esse romance desafia o leitor a compreender e organizar a história do pensamento matemático desde a antiguidade até os nossos dias.

- HAZZAN, Samuel. *Fundamentos de matemática elementar*: combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 5.

  Este volume é composto de teorias, exercícios de aplicação e testes de vestibulares atualizados, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre a história da Matemática e os temas abordados.

- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2. v.

  No volume 1, a história dos algarismos é apresentada considerando a origem da representação simbólica dos números em diversas civilizações, como a dos gregos, dos romanos e dos maias. Já no volume 2, é explicado por que a civilização indiana é considerada o berço da numeração moderna, e são refeitos os caminhos que levaram o homem a inventar o computador.

- LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  O conteúdo desse livro é uma coleção de crônicas e comentários em torno de um tema comum: a Matemática estudada nos últimos três anos que antecedem a universidade.

- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

  Neste livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

- MORGADO, Augusto César de Oliveira et al. *Análise combinatória e probabilidade*: com as soluções dos exercícios. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. (Coleção do Professor de Matemática).

  O livro aborda o conteúdo de Análise combinatória com uma variedade de problemas resolvidos e apresenta uma iniciação à teoria das probabilidades.

- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. adap. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

  Neste livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Lista de siglas

ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio

FAMEMA-SP: Faculdade de Medicina de Marília

FURG-RS: Universidade Federal do Rio Grande

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina

UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UFSCAR-SP: Universidade Federal de São Carlos

UNESP: Universidade Estadual Paulista

MODERNA

ISBN 978-65-5779-079-3