ORGANIZADORA: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

EDITORA RESPONSÁVEL:
Lilian Aparecida Teixeira

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO.
VERSÃO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO.

Código da coleção: 0197P21202
Código da obra: 0197P21202138

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

FUNÇÕES E PROGRESSÕES

Área do conhecimento:
Matemática
e suas Tecnologias

MODERNA

MODERNA

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

FUNÇÕES E PROGRESSÕES

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

MANUAL DO PROFESSOR

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias : manual do professor / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37387 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

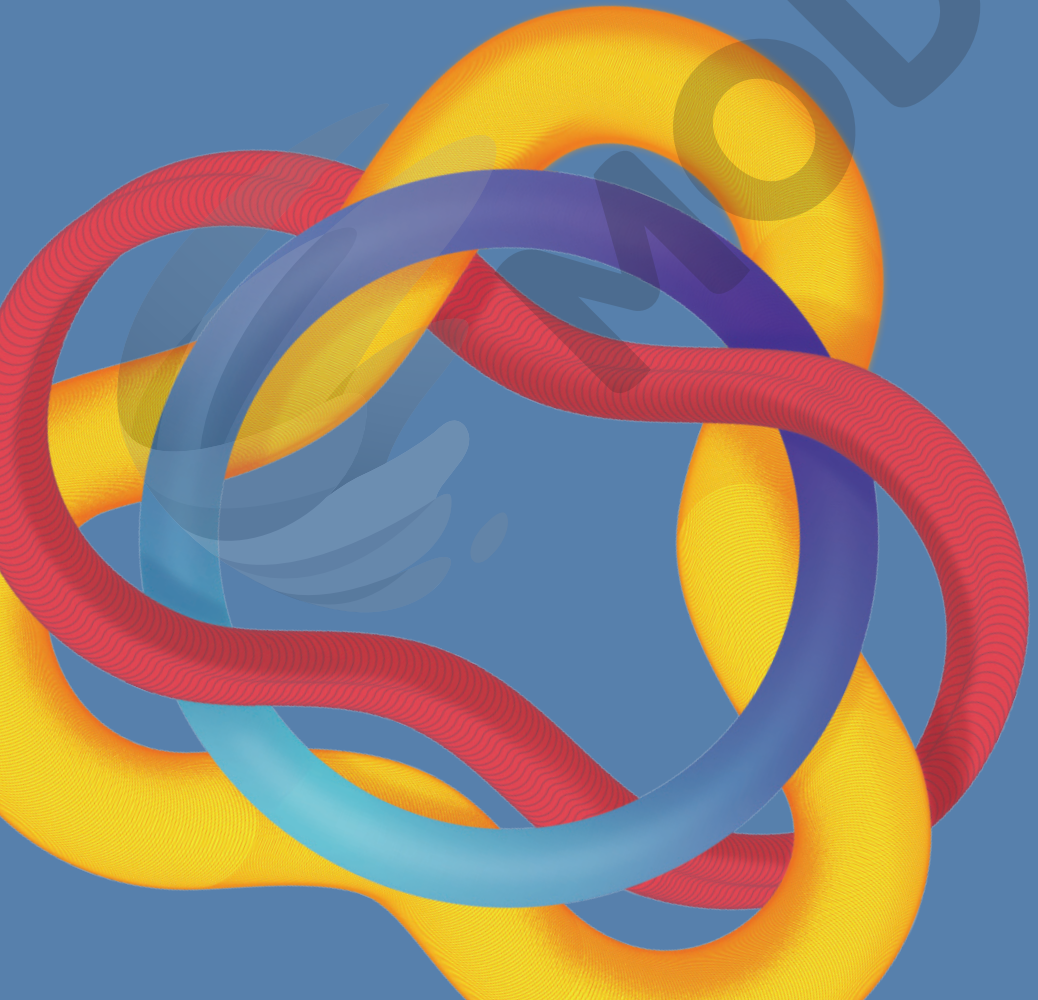
Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Suplemento para o professor



MODERNA

Apresentação

Um meio de inclusão e democratização de oportunidades é a educação. O Ensino Médio representa um momento decisivo na vida de qualquer indivíduo. Assim, cabe ao livro didático auxiliar professores e alunos nessa fase, oferecendo-lhes ferramentas úteis no processo de ensino e aprendizagem. Pensando nisso, esta coleção procurou tratar a Matemática e suas Tecnologias como parte integrante do cotidiano dos alunos, além de estabelecer associação com outros componentes curriculares e com outras áreas do conhecimento.

Tomando diversos documentos oficiais como diretrizes, esta coleção contempla os conteúdos essenciais para esse nível de ensino, apresentando-os de maneira contextualizada e empregando uma linguagem clara e objetiva, em uma sequência que favorece a aprendizagem.

O objetivo é possibilitar aos alunos o desenvolvimento das competências gerais, competências específicas e habilidades listadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), referentes ao Ensino Médio. Porém, é importante que o professor tenha autonomia e consciência de que pode selecionar os conteúdos que serão abordados em sala de aula adotando uma ordem diferente da sugerida no livro do aluno, de acordo com a proposta didático-pedagógica da escola.

Este **Suplemento para o professor** busca oferecer aos docentes subsídios teórico-metodológicos, de maneira a auxiliar seu trabalho na utilização desta coleção em sala de aula e em suas demais atribuições.

MODERNA

Sumário

A estrutura da coleção VI

Livro do aluno VI

Suplemento para o professor X

O Ensino Médio XII

O aluno do Ensino Médio XII

O professor XIII

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos XIV

O convívio social em sala de aula XV

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio XVI

As áreas do conhecimento XVII

Temas contemporâneos transversais XVIII

Orientações didáticas e metodológicas XIX

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção XIX

O computador e o ensino da Matemática XXII

O pensamento computacional XXIII

O aluno no centro do processo de aprendizagem XXIV

Estratégias XXV

Avaliação XXVII

A BNCC e a coleção XXIX

Sugestão de cronograma XXIX

Objetivos, comentários e sugestões XXXII

Tema 1 Os conjuntos XXXII

Tema 2 Números reais no método braille XXXV

Tema 3 Noção intuitiva de função XXXVI

Tema 4 Gráfico de uma função XXXVIII

Tema 5 Função afim XL

Tema 6 Função afim crescente e função afim decrescente XLIII

Tema 7 Proporcionalidade e função linear XLIV

Tema 8 Modelo linear XLVI

Tema 9 Função quadrática XLVIII

Tema 10 Coeficientes de uma função quadrática XLIX

Tema 11 Vértice de uma parábola LI

Tema 12 Inequação do 1º e do 2º grau LIII

Tema 13 Progressão aritmética LV

Tema 14 Função exponencial LVII

Tema 15 Função exponencial e radioatividade LIX

Tema 16 Equação e inequação exponencial LXI

Tema 17 Progressão geométrica LXIII

Tema 18 Logaritmo LXVI

Tema 19 Função inversa e logarítmica LXVIII

Resolução dos exercícios e problemas LXXIV

Sugestões ao professor CXVI

Leituras sobre o ensino de Matemática CXVI

Leituras sobre a História da Matemática CXIX

Leituras sobre os conteúdos deste volume CXX

Sugestões de *sites* para o professor CXXII

Referências bibliográficas ... CXXIII

MODERNA

A estrutura da coleção

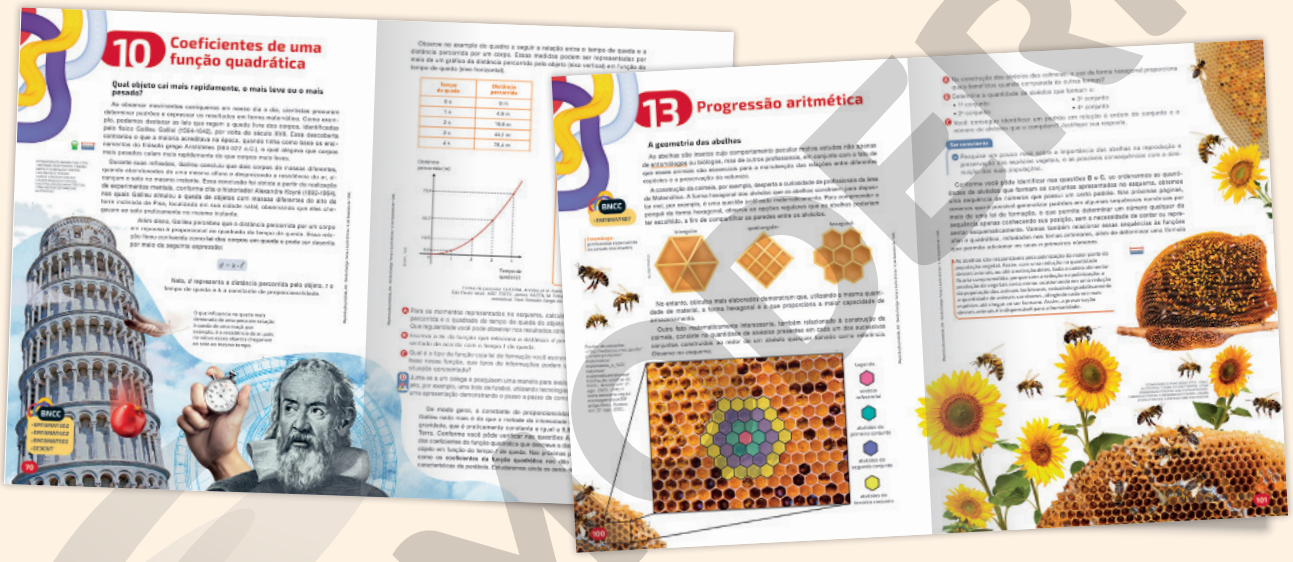
Esta coleção de Matemática e suas Tecnologias, destinada ao Ensino Médio, é composta de seis volumes, cujos conteúdos estão organizados por temas. Esses temas, por sua vez, foram elaborados com base nas competências gerais, competências específicas e habilidades elencadas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), assim como nos temas contemporâneos transversais.

A seguir, são apresentadas as características das seções e de outros elementos que compõem esta coleção.

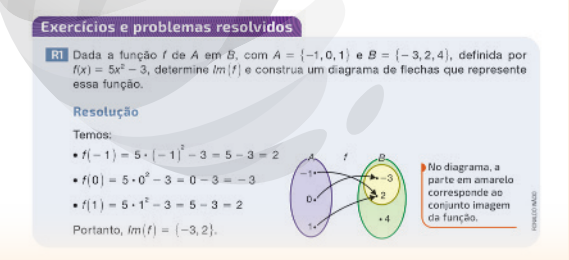
Livro do aluno

Páginas de abertura do tema

As páginas de abertura apresentam uma temática cujas características permitem estabelecer relações com os conteúdos que serão trabalhados naquele tema. Nessas páginas, há informações que se referem a outras áreas do conhecimento ou à própria Matemática, apresentadas por meio de diferentes recursos, como textos, fotografias, gráficos, infográficos e esquemas. Esses recursos são acompanhados por questões que buscam levantar os conhecimentos prévios dos alunos com relação a diversas situações de âmbito geral, bem como estabelecer intuitivamente relações entre o assunto abordado e alguns conteúdos matemáticos. Essas questões propiciam um momento de interação e troca de ideias entre os alunos, auxiliando no desenvolvimento de sua capacidade argumentativa, além de proporcionar momentos nos quais eles devem ouvir e lidar com pensamentos que possam ser divergentes dos seus. Neste **Suplemento para o professor**, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, são apresentadas informações complementares sobre as páginas de abertura referentes a cada tema, além de sugestões para trabalhá-las em sala de aula, dicas de avaliação dos alunos e outros assuntos que podem ser propostos como ideia para a realização de pesquisas extraclasse. Também são sugeridos outros questionamentos, a fim de atingir os objetivos daquele tema específico.

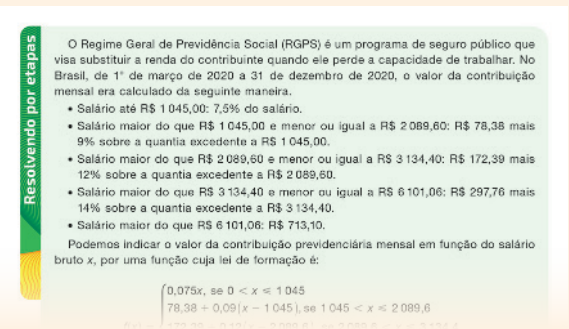


Exercícios e problemas resolvidos



O objetivo dessa seção é complementar a teoria abordada e os exemplos apresentados com o auxílio de tarefas cujas resoluções são apresentadas aos alunos de maneira detalhada, facilitando-lhes compreender a aplicação prática do conteúdo em questão. Essa seção também tem por finalidade auxiliar os alunos a exercitar suas habilidades e estratégias na resolução de tarefas que serão propostas em outras seções, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

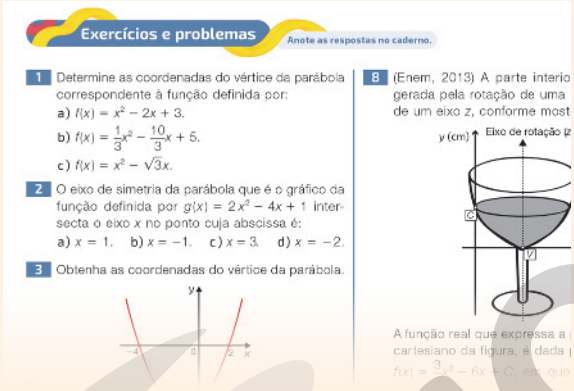
Resolvendo por etapas



MODELO

A seção **Resolvendo por etapas** apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Tais problemas, além de contar com o auxílio do recurso textual, também podem apresentar imagens, gráficos, tabelas, esquemas e outros recursos necessários à compreensão dos alunos. O processo de resolução dos problemas é feito em quatro etapas, denominadas **Compreendendo o problema**, **Organizando as ideias e elaborando um plano**, **Executando o plano** e **Verificando a solução obtida**. Em cada uma dessas etapas, os alunos são orientados a analisar as informações fornecidas no enunciado do problema, separar e organizar os dados apresentados, elaborar e executar um plano que resolva o problema e, por fim, verificar se os procedimentos efetuados estão de acordo com o que foi solicitado. No boxe **Agora é você quem resolve!**, outro problema é apresentado aos alunos. Com isso, eles são levados a analisar se a resolução desse novo problema pode ser obtida seguindo os mesmos procedimentos utilizados na resolução do problema anterior.

Exercícios e problemas


Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Determine as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função definida por:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 5$.

c) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x$.

2 O eixo de simetria da parábola que é o gráfico da função definida por $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$ intersecta o eixo x no ponto cuja abscissa é:

a) $x = 1$. b) $x = -1$. c) $x = 3$. d) $x = -2$.

3 Obtenha as coordenadas do vértice da parábola.

8 (Enem, 2013) A parte interio
gerada pela rotação de uma
de um eixo z, conforme most

y (cm) Eixo de rotação (z

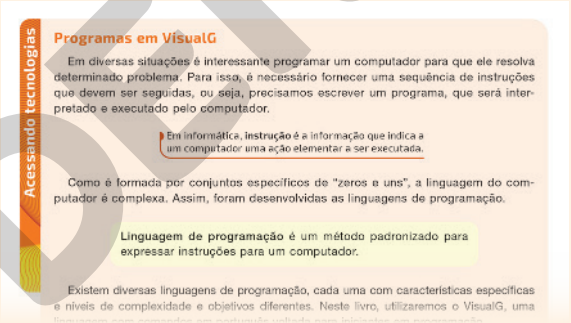
A função real que expressa a
cartesiano da figura, é dada

Essa seção traz tarefas relacionadas ao conteúdo estudado em um ou mais tópicos do tema. Dispostas em nível gradual de complexidade, elas podem ser exploradas, em sua maioria, em sala de aula. Aquelas cuja resolução for indicada para ser realizada fora do ambiente escolar devem ser corrigidas, se possível, em aula imediatamente posterior, a fim de promover uma discussão acerca das diferentes maneiras de resolução que vierem a ser apresentadas pelos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, estão indicadas sugestões de condução para algumas das tarefas apresentadas no livro do aluno, que são propostas por meio de questionamentos adicionais, pesquisas complementares e trabalhos interdisciplinares e transdisciplinares a serem desenvolvidos com base no conteúdo ou na temática tratada, visando desenvolver a autonomia e o pensamento crítico dos alunos.

Nos exercícios, a tarefa solicitada está explícita, ou seja, os alunos deverão aplicar de imediato um conceito ou procedimento-padrão estabelecido anteriormente. Já nos problemas, é esperado que os alunos mobilizem conhecimentos, competências e habilidades a fim de conceber estratégias para resolvê-los.

Acessando tecnologias

A seção **Acessando tecnologias** apresenta propostas de tarefas cujos contextos permitem desenvolver os conceitos estudados com o auxílio de recursos tecnológicos, oferecendo, assim, uma estratégia complementar àquela apresentada no livro do aluno. Tais recursos tratam-se, principalmente, de *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, uso de linguagem de programação, indicações de *sites*, entre outras ferramentas tecnológicas que permitem aprofundar os conteúdos matemáticos trabalhados até então. Essa abordagem contribui para que os alunos visualizem e verifiquem, por meio dessas ferramentas, as propriedades estudadas, auxiliando-os, posteriormente, na resolução de problemas. O principal objetivo dessa seção é estimular o aluno a utilizar ferramentas tecnológicas computacionais com o intuito de agilizar diversas atividades práticas de seu dia a dia. É importante enfatizar que os recursos sugeridos nessa seção são disponibilizados gratuitamente na internet, estando, portanto, ao alcance de todos.


Acessando tecnologias

Programas em VisualG

Em diversas situações é interessante programar um computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Em informática, **instrução** é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

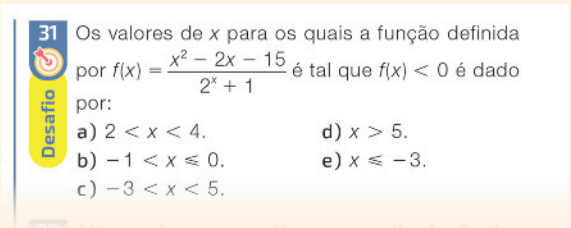
Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Neste livro, utilizaremos o VisualG, uma

Algumas tarefas, por apresentarem certas características, recebem destaques diferentes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Desafio

O destaque **Desafio** indica tarefas que apresentam maior nível de dificuldade e cuja resolução vai além da aplicação imediata do conteúdo trabalhado. De modo geral, o aluno é levado a desenvolver as próprias estratégias de resolução e a aprimorar seu raciocínio lógico.


Desafio

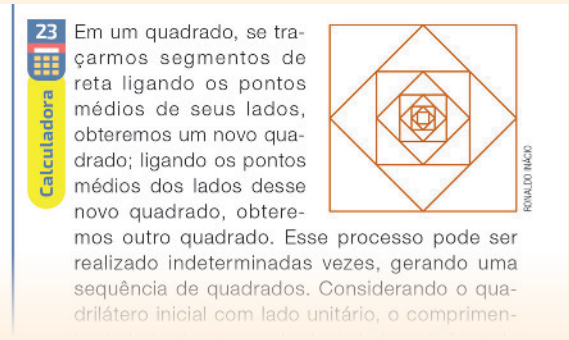
31 Os valores de x para os quais a função definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{2^x + 1}$ é tal que $f(x) < 0$ é dado por:

a) $2 < x < 4$.
b) $-1 < x \leq 0$.
c) $-3 < x < 5$.
d) $x > 5$.
e) $x \leq -3$.

MODERNA

Calculadora

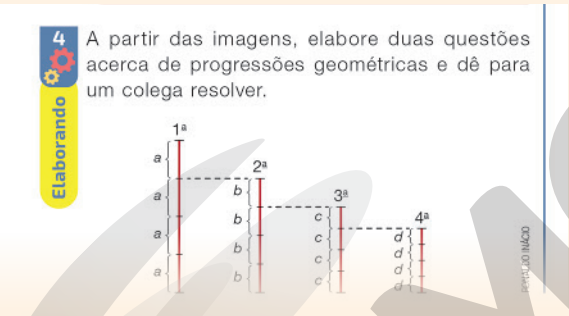
O destaque **Calculadora** é utilizado em tarefas cuja execução dos cálculos deve ser realizada com o auxílio de calculadoras, comuns ou científicas. Em alguns casos, esse instrumento possibilitará ao aluno criar as próprias estratégias de resolução, verificando resultados e regularidades.


Calculadora

23 Em um quadrado, se traçarmos segmentos de reta ligando os pontos médios de seus lados, obteremos um novo quadrado; ligando os pontos médios dos lados desse novo quadrado, obteremos outro quadrado. Esse processo pode ser realizado indeterminadas vezes, gerando uma sequência de quadrados. Considerando o quadrilátero inicial com lado unitário, o comprimen-

Elaborando

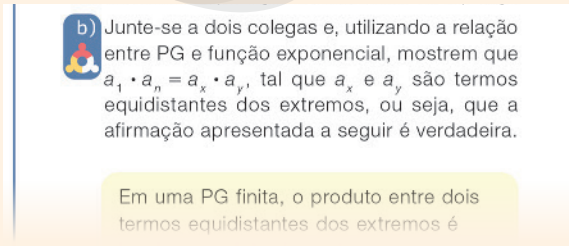
O destaque **Elaborando** indica tarefas que exploram o desenvolvimento da escrita, nas quais os alunos são levados a elaborar problemas, relatórios ou outros tipos de textos tomando como base imagens ou informações previamente apresentadas.


Elaborando

4 A partir das imagens, elabore duas questões acerca de progressões geométricas e dê para um colega resolver.

Em grupo

O destaque **Em grupo** é aplicado às tarefas cuja resolução será mais proveitosa aos alunos caso tenham o auxílio de um ou mais colegas, promovendo, assim, um momento de interação e permitindo que eles investiguem, expliquem e justifiquem os problemas resolvidos.


b) Junte-se a dois colegas e, utilizando a relação entre PG e função exponencial, mostrem que $a_1 \cdot a_n = a_x \cdot a_y$, tal que a_x e a_y são termos equidistantes dos extremos, ou seja, que a afirmação apresentada a seguir é verdadeira.

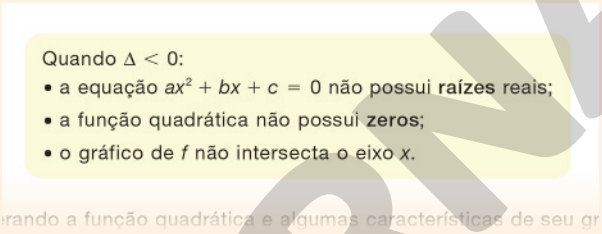
Em uma PG finita, o produto entre dois termos equidistantes dos extremos é

Elementos das teorias e das seções especiais

No decorrer do livro do aluno, alguns elementos, por possuírem certas características, serão apresentados com algum destaque. Os elementos visuais que caracterizam esses destaques estão descritos logo a seguir.

Quadro-teoria

Localizado junto à parte teórica, o **Quadro-teoria** tem o objetivo de formalizar alguns conceitos, apresentando propriedades, definições e relações importantes acerca do conteúdo estudado.

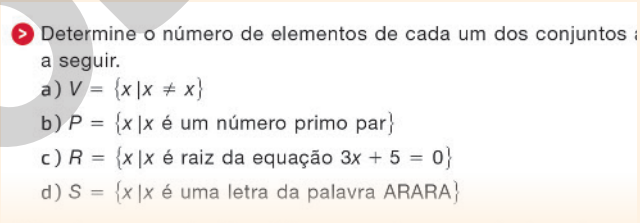

Quando $\Delta < 0$:

- a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais;
- a função quadrática não possui zeros;
- o gráfico de f não intersecta o eixo x.

rando a função quadrática e algumas características de seu gr

Questão intervenção

Localizada junto à parte teórica, a **Questão intervenção**, que pode apresentar cunho matemático ou de caráter pessoal, leva os alunos a refletir a respeito das aplicações práticas que envolvem o conteúdo apresentado.


Determine o número de elementos de cada um dos conjuntos a seguir.

a) $V = \{x \mid x \neq x\}$

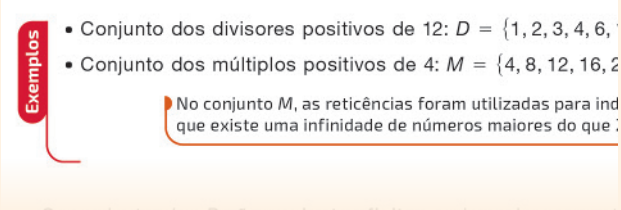
b) $P = \{x \mid x$ é um número primo par$\}$

c) $R = \{x \mid x$ é raiz da equação $3x + 5 = 0\}$

d) $S = \{x \mid x$ é uma letra da palavra ARARA$\}$

Exemplo

O destaque **Exemplo** tem o objetivo de apresentar aos alunos alguns exemplos práticos que retratam a teoria abordada.


Exemplos

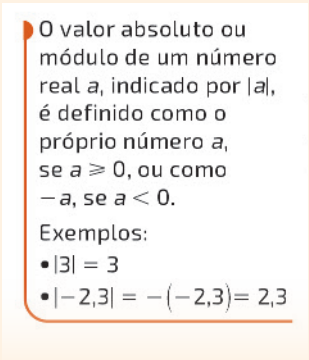
- Conjunto dos divisores positivos de 12: $D = \{1, 2, 3, 4, 6,$
- Conjunto dos múltiplos positivos de 4: $M = \{4, 8, 12, 16, 2$

No conjunto M, as reticências foram utilizadas para ind que existe uma infinidade de números maiores do que

MODERNA

Boxe info

O destaque **Boxe info** apresenta lembretes, dicas ou informações complementares, cujo objetivo é fornecer subsídios que auxiliem os alunos na resolução de algumas tarefas ou na compreensão de determinadas teorias.

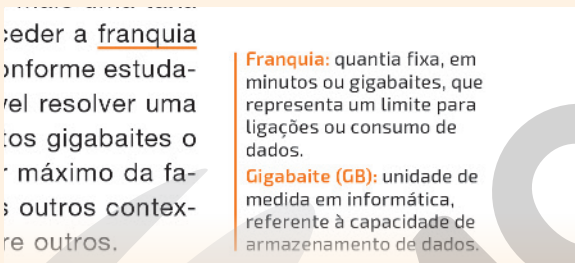

O valor absoluto ou módulo de um número real a, indicado por $|a|$, é definido como o próprio número a, se $a \geqslant 0$, ou como $-a$, se $a < 0$.

Exemplos:

- $|3| = 3$
- $|-2{,}3| = -(-2{,}3) = 2{,}3$

Vocabulário

O quadro **Vocabulário** traz o significado de algumas palavras em destaque no texto, geralmente pouco utilizadas ou desconhecidas por parte dos alunos, a fim de auxiliar na compreensão das informações apresentadas.

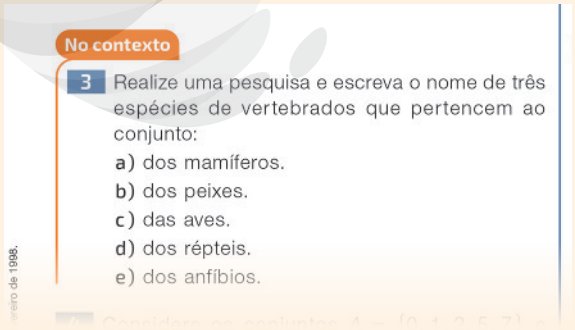

ceder a franquia
nforme estuda-
el resolver uma
os gigabaites o
máximo da fa-
outros contex-
re outros.

Franquia: quantia fixa, em minutos ou gigabaites, que representa um limite para ligações ou consumo de dados.

Gigabaite (GB): unidade de medida em informática, referente à capacidade de armazenamento de dados.

No contexto

O destaque **No contexto** indica tarefas que estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.

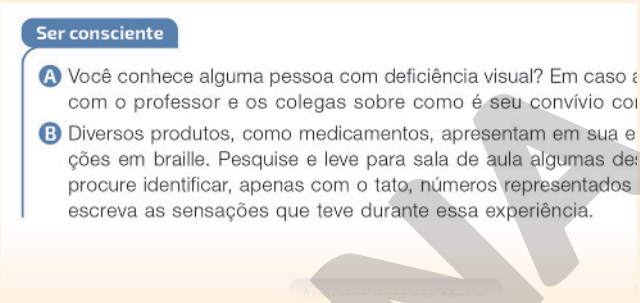

No contexto

3 Realize uma pesquisa e escreva o nome de três espécies de vertebrados que pertencem ao conjunto:

a) dos mamíferos.
b) dos peixes.
c) das aves.
d) dos répteis.
e) dos anfíbios.

Ser consciente

O destaque **Ser consciente** tem o objetivo de abordar assuntos que podem, inclusive, ser relacionados aos temas contemporâneos transversais descritos na BNCC. Geralmente, os contextos que apresentam esse destaque procuram levar os alunos a refletir a respeito de questões que impactam diretamente em alguns aspectos da nossa sociedade, com o intuito de envolvê-los em uma avaliação cidadã e social da situação proposta.


Ser consciente

A Você conhece alguma pessoa com deficiência visual? Em caso a
com o professor e os colegas sobre como é seu convívio co

B Diversos produtos, como medicamentos, apresentam em sua e
ções em braille. Pesquise e leve para sala de aula algumas de
procure identificar, apenas com o tato, números representados
escreva as sensações que teve durante essa experiência.

Ícones

Em certos momentos desta coleção, alguns ícones serão utilizados para indicar informações importantes. Veja, a seguir, a descrição de cada um deles.

Proporcionalidade

Indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

Cor

Indica que as cores dos objetos retratados não correspondem à realidade.

e a transmissão de

Fontes de pesquisa: <http
salmonella>. Aces
Acesso em

Sabendo que ce
30 min, estime er
gir 1 000 indivíd

Ser consciente

Ampliando seus conhecimentos

Encontrada no fim de cada volume, essa seção traz sugestões de livros, *sites* e *podcasts* para complementar o estudo dos conteúdos trabalhados nos temas. É essencial que os alunos sejam incentivados a consultar essas fontes de informação.

MODERNA

Suplemento para o professor

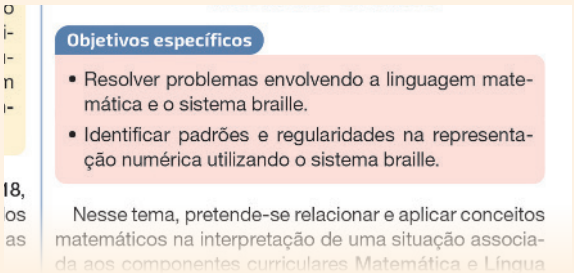
O livro do professor impresso é composto do livro do aluno, com comentários e respostas das tarefas apresentadas, e do **Suplemento para o professor**, constituído de parte geral, parte específica, resoluções dos exercícios e problemas e sugestões de leitura e de *sites*. A parte geral é composta dos pressupostos teóricos e metodológicos que fundamentam esta coleção, da descrição e das orientações acerca das seções e da estrutura de conteúdos, bem como de suas relações com a BNCC e do quadro de distribuição dos conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Já a parte específica, desenvolvida no tópico **Objetivos, comentários e sugestões**, apresenta ao professor orientações específicas dos conteúdos apresentados página a página.

Além do livro impresso, também é disponibilizado um videotutorial de caráter complementar, que tem o objetivo de destacar elementos-chave da obra em linguagem audiovisual atrativa e simplificada para o professor.

Conheça, a seguir, as características da parte específica deste **Suplemento para o professor**.

Objetivos específicos

No início de cada tema são apresentados os principais objetivos que se almejam atingir no trabalho com aqueles conteúdos.



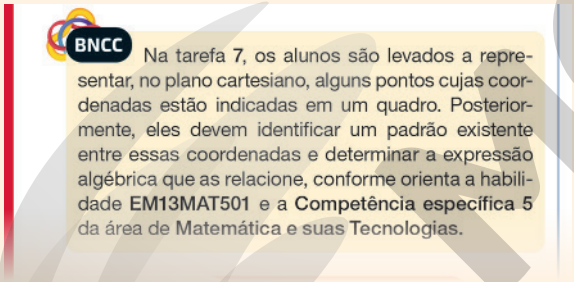
Objetivos específicos

- Resolver problemas envolvendo a linguagem matemática e o sistema braille.
- Identificar padrões e regularidades na representação numérica utilizando o sistema braille.

Nesse tema, pretende-se relacionar e aplicar conceitos matemáticos na interpretação de uma situação associada aos componentes curriculares Matemática e Língua

BNCC

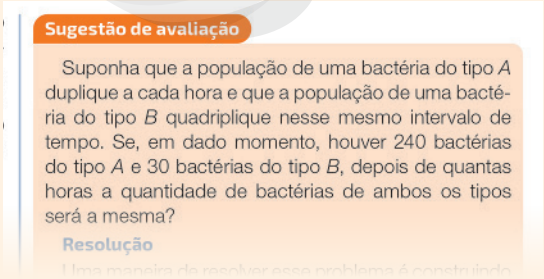
No decorrer dos temas são destacadas e comentadas algumas relações entre o que está sendo abordado no livro do aluno e o que é proposto na BNCC.



BNCC Na tarefa 7, os alunos são levados a representar, no plano cartesiano, alguns pontos cujas coordenadas estão indicadas em um quadro. Posteriormente, eles devem identificar um padrão existente entre essas coordenadas e determinar a expressão algébrica que as relacione, conforme orienta a habilidade **EM13MAT501** e a **Competência específica 5** da área de Matemática e suas Tecnologias.

Sugestão de avaliação

Apresenta sugestões e estratégias de avaliação para que o professor verifique a aprendizagem dos alunos em momentos oportunos.



Sugestão de avaliação

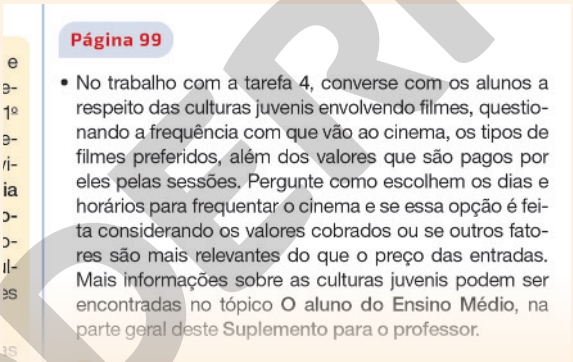
Suponha que a população de uma bactéria do tipo *A* duplique a cada hora e que a população de uma bactéria do tipo *B* quadriplique nesse mesmo intervalo de tempo. Se, em dado momento, houver 240 bactérias do tipo *A* e 30 bactérias do tipo *B*, depois de quantas horas a quantidade de bactérias de ambos os tipos será a mesma?

Resolução

Uma maneira de resolver esse problema é construindo

Orientações página a página

As orientações e informações complementares importantes para o desenvolvimento dos conteúdos, das tarefas e das seções especiais encontram-se indicadas em tópicos, separadas de acordo com as páginas do livro do aluno.



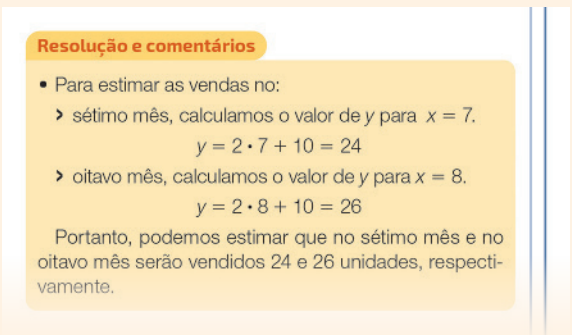
Página 99

- No trabalho com a tarefa 4, converse com os alunos a respeito das culturas juvenis envolvendo filmes, questionando a frequência com que vão ao cinema, os tipos de filmes preferidos, além dos valores que são pagos por eles pelas sessões. Pergunte como escolhem os dias e horários para frequentar o cinema e se essa opção é feita considerando os valores cobrados ou se outros fatores são mais relevantes do que o preço das entradas. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico O aluno do Ensino Médio, na parte geral deste Suplemento para o professor.

Resolução e comentários

As resoluções das questões das páginas de abertura, das questões intervenção e de algumas tarefas específicas encontram-se em boxes como esse.

No decorrer do desenvolvimento dos temas, sempre que for oportuno, são apresentadas citações que enriquecem e fundamentam o trabalho com o conteúdo proposto.



Resolução e comentários

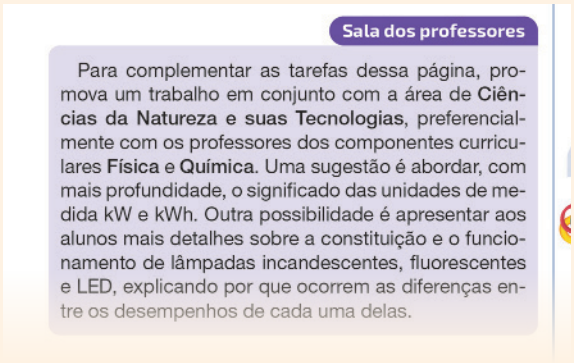
- Para estimar as vendas no:
  - sétimo mês, calculamos o valor de y para $x = 7$.
    $$y = 2 \cdot 7 + 10 = 24$$
  - oitavo mês, calculamos o valor de y para $x = 8$.
    $$y = 2 \cdot 8 + 10 = 26$$

Portanto, podemos estimar que no sétimo mês e no oitavo mês serão vendidos 24 e 26 unidades, respectivamente.

MODERNA

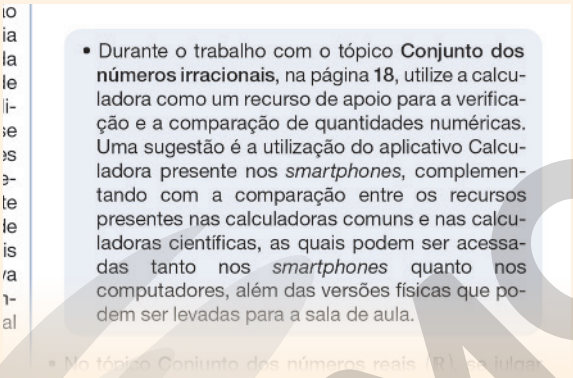
Sala dos professores

Esse boxe estará presente em abordagens e tarefas que permitam relacionar o conteúdo com outras áreas do conhecimento, apresentando sugestões e subsídios para a construção de aulas em conjunto com professores de outros componentes curriculares.



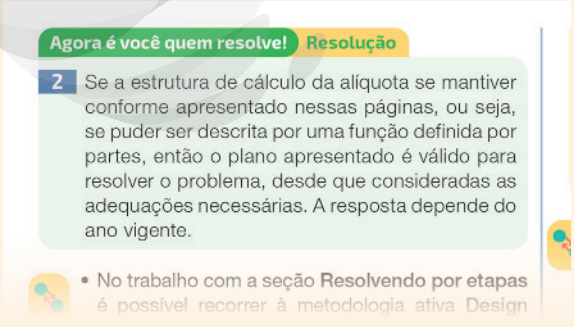
Tarefas extras

Apresenta sugestões de tarefas extras com o objetivo de complementar o trabalho com o conteúdo do respectivo tema.



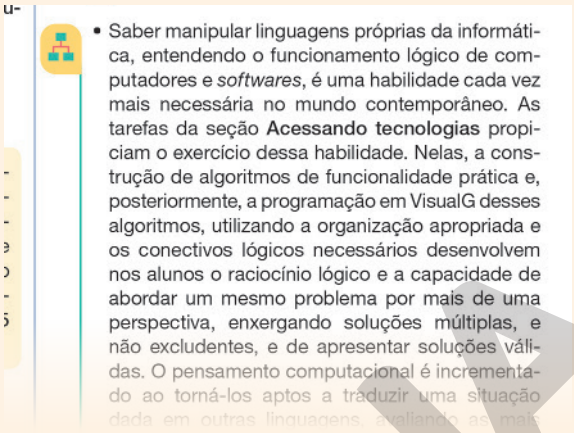
Agora é você quem resolve! Resolução

Apresenta as respostas da seção **Resolvendo por etapas**.



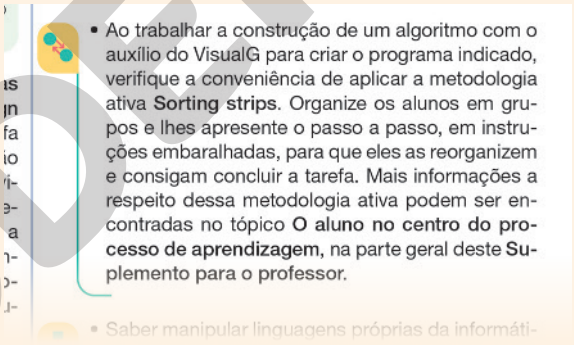
Pensamento computacional

Selo utilizado para indicar que o texto apresenta informações a respeito do pensamento computacional.



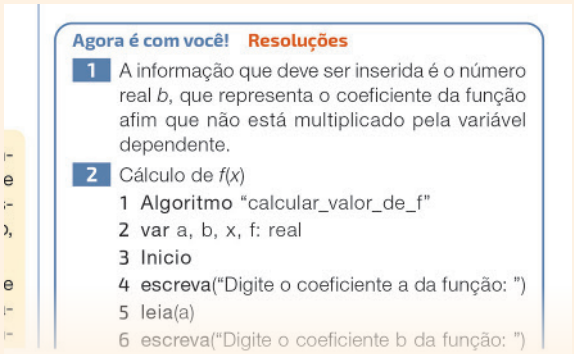
Metodologia ativa

Selo utilizado para sinalizar que o texto apresenta indicações quanto ao uso das metodologias ativas.



Agora é com você! Resolução

Apresenta as respostas da seção **Acessando tecnologias**.



MODERNA

O Ensino Médio

Nos últimos anos, o Ensino Médio no Brasil passou por uma reforma que instituiu novos parâmetros e diretrizes para esse segmento. O objetivo dessas mudanças foi combater índices de evasão escolar, promovendo um ensino que atendesse às expectativas dos jovens em relação ao seu projeto de vida pessoal e profissional e que estivesse alinhado com as necessidades e os anseios desse público. Além disso, almejava-se também ampliar o engajamento desses alunos, para que pudessem desenvolver maneiras autônomas de lidar com os desafios do mundo contemporâneo.

Com base nessas novas perspectivas educacionais, é necessário compreender o Ensino Médio como uma etapa de grande importância política e social, aspecto que supera o conceito de apenas ser uma fase passageira na vida dos jovens. Na verdade, o Ensino Médio constitui-se um momento fundamental de protagonismo e de desenvolvimento pessoal. É nessa fase que os alunos ampliam suas perspectivas culturais, convivendo em um espaço de ampla diversidade de ideias e de opiniões. Também desenvolvem suas capacidades de tomada de decisão, cujo maior desafio é aprender a fazer escolhas coerentes e alinhadas com seu projeto de vida.

Assim, é fundamental que a escola do Ensino Médio desenvolva uma atitude acolhedora das juventudes, estando preparada para os desafios que essa fase exige, principalmente no que se refere à formação profissional e à construção da cidadania dos jovens. Isso requer condutas que priorizem a construção da autonomia dos alunos, que em breve estarão atuando na vida pública sem o acompanhamento de adultos. Desse modo, como podemos preparar os jovens para participar da sociedade de forma responsável?

> A experiência participativa representa uma das formas de os jovens vivenciarem processos de construção de pautas, projetos e ações coletivas. Além disso, a experiência participativa também é importante por permitir a vivência de valores, como os da solidariedade e da democracia, e o aprendizado da alteridade. O que significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças. O exercício da participação pode ser, então, uma experiência decisiva para a vida dos jovens um efetivo contraponto – em uma sociedade que, ao se individualizar, enfraquece ideias, valores e práticas relacionadas à dimensão coletiva da vida social.
>
> BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 46.

É no Ensino Médio também que ocorre a preparação mais intensa e aprofundada dos alunos para os vestibulares e os exames de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Algumas instituições, inclusive, aceitam alunos que não tenham completado o Ensino Médio como uma espécie de "treineiros", para testar suas habilidades e seus conhecimentos antes da prova efetiva ao final desse ciclo. Esses exames têm como objetivo verificar o desempenho e avaliar o preparo dos jovens para os desafios da vida adulta, seja no âmbito profissional, seja no social. Além disso, as avaliações em larga escala contribuem para monitorar as redes de ensino de modo a oferecer soluções educacionais viáveis por meio de políticas públicas.

Esta coleção apresenta diversos subsídios para auxiliar os alunos na preparação para esses exames, entre eles o Enem. Nas seções **Exercícios e problemas resolvidos** e **Exercícios e problemas**, por exemplo, sempre que possível, apresentamos questões extraídas diretamente do Enem e de vestibulares atuais para que os alunos possam se familiarizar com o formato das provas fornecidas por essas instituições. Além disso, há propostas de elaboração de problemas e articulações interdisciplinares e transdisciplinares, com abordagens que podem contribuir para o desempenho dos alunos em futuras avaliações.

O aluno do Ensino Médio

Existem diversas maneiras de conceituar a fase da juventude. Época de incertezas e de definição identitária, por muito tempo a juventude foi compreendida como um período de passagem, uma etapa prévia da vida adulta, marcada por uma faixa etária delimitada. Porém, de acordo com o estudioso Juarez Dayrell (2016), as pesquisas mais atuais têm demonstrado que a juventude deve ser compreendida como uma categoria socialmente construída na qual os jovens se assumem como verdadeiros sujeitos, ou seja, possuem determinada origem familiar, estão inseridos em relações sociais, apresentam uma historicidade específica, movem-se por desejos e se constituem como seres ativos e produtores de conhecimento.

> A juventude constitui um momento determinado, mas que não se reduz a uma passagem. Ela assume uma importância em si mesma como um momento de exercício de inserção social, no qual o indivíduo vai se descobrindo e descortinando as possibilidades em todas as instâncias de sua vida, desde a dimensão afetiva até a profissional. Essa realidade ganha contornos próprios em contextos históricos, sociais e culturais distintos. As distintas condições sociais (origem de classe, por exemplo), a diversidade cultural (a cor da pele, as identidades culturais e religiosas, os diferentes valores familiares etc.), a diversidade de gênero e

MODELO

> de orientação afetiva e até mesmo as diferenças territoriais se articulam para a constituição das diferentes modalidades de se vivenciar a juventude.
>
> DAYRELL, Juarez. (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016, p. 27.

Para que as relações possam ser fecundas e mutuamente respeitosas no ambiente escolar, uma opção interessante é investir no trabalho com as diversas manifestações culturais juvenis, ou seja, fazer da escola um território de produção cultural da juventude e não apenas um local de aprendizado de uma cultura externa ou "adulta". Nesse contexto, o jovem deve se identificar com as produções culturais com as quais convive, deve se sentir incluído e, principalmente, valorizado.

> Os jovens sujeitos do Ensino Médio nos trazem cotidianamente desafios para o aprimoramento de nosso ofício de educar. Entre esses desafios, encontra-se a difícil tarefa de compreensão dos sentidos os quais os jovens elaboram no agir coletivo, em seus grupos de estilo e identidades culturais e territoriais que, em grande medida, nos são apenas "estranhos" (no sentido de estrangeiros) e diferem de muitas de nossas concepções (adultas) de educação (escolar ou não), de autoridade, de respeito, de sociabilidade "adequada" e produção de valores e conhecimentos.
>
> BRASIL. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I - caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica; [organizadores: Paulo Carrano, Juarez Dayrell]. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013, p. 20.

Realizar esse trabalho de aproximação e de valorização das culturas juvenis exige muito mais do professor. A primeira etapa é passar a compreender o jovem como um sujeito de interlocução, com o qual podemos aprender e expandir nossos horizontes culturais. Essa aproximação requer uma flexibilidade por parte dos professores, que muitas vezes terão de superar visões estereotipadas e superficiais sobre a juventude atual. Assim, deve-se considerar que os jovens não estão inseridos em uma cultura única. A juventude se constitui como categoria socialmente construída, que deve ser analisada com base no contexto de cada comunidade. Existem jovens, por exemplo, que já estão inseridos no mercado de trabalho e que vivenciam a juventude de um modo muito diferente daqueles que têm mais tempo de lazer ou de estudo.

Compreender essas múltiplas culturas juvenis que permeiam o contexto escolar faz parte do processo de inovação que tem marcado o curso educativo nos últimos anos. Em vez de "transmitirmos os saberes" aos jovens, por que não trocarmos e compartilharmos conhecimento, abrindo espaços e criando condições para que as culturas juvenis se expressem no ambiente escolar? Essas novas práticas compõem um caminho de construção coletiva do conhecimento. Sob esse ponto de vista, a aprendizagem passa a ser encarada como uma via de mão dupla, como uma troca e, assim, tende a criar um clima mais saudável e menos impositivo, sendo menos propício ao desenvolvimento de problemas indisciplinares e de relações conflituosas.

O professor

Diante desses novos desafios educacionais, que envolvem inclusive o trabalho com metodologias ativas e tecnologias, o professor assume cada vez mais o papel de mediador das relações entre os alunos e o conhecimento, orientando o caminho a ser adotado no processo de ensino e aprendizagem. Essa mediação ocorre de acordo com um planejamento bem definido das aulas, no qual são explicitadas as estratégias de engajamento e protagonismo dos alunos. Supera-se a postura de um profissional meramente transmissor de informações e almeja-se uma conduta mais interativa, que toma como base a colaboração.

> O papel do professor é mais o de curador e de orientador. Curador, que escolhe o que é relevante entre tanta informação disponível e ajuda a que os alunos encontrem sentido no mosaico de materiais e atividades disponíveis. Curador, no sentido também de cuidador: ele cuida de cada um, dá apoio, acolhe, estimula, valoriza, orienta e inspira. Orienta a classe, os grupos e cada aluno.
>
> MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Orgs.). Coleção Mídias Contemporâneas. *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. v. II. Ponta Grossa: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. p. 24.

Sabe-se que no Brasil as turmas de Ensino Médio são diversificadas e são formadas por grupos de alunos que possuem diferenças nos modos de aprender. O processo de ensino e aprendizagem é complexo e envolve diversas dimensões da vida dos sujeitos. Knud Illeris (2013), por exemplo, descreve a aprendizagem em três dimensões: a de conteúdo, a de incentivo e a de interação. A dimensão de **conteúdo** envolve a aprendizagem cognitiva, relacionada aos conhecimentos que são internalizados. Já a dimensão de **incentivo** se relaciona às sensibilidades, ao equilíbrio mental e às motivações que instigam as pessoas no aprendizado. Por fim, a dimensão de **interação** é aquela que está ligada à sociabilidade e à comunicação do indivíduo.

Desse modo, uma maneira de o professor lidar com a diversidade em sala de aula é identificar em qual dimensão de aprendizagem estão as defasagens dos alunos. Com esse diagnóstico, pode-se, então, desenvolver estratégias adequadas ao tipo de dificuldade específica apresentada por eles. Por exemplo, em casos de defasa-

EM MODERNIZAÇÃO

gem na dimensão de interação, o professor poderá desenvolver estratégias de trabalho em grupo e dinâmicas que exijam a troca de ideias. Quando o problema for em relação à dimensão de incentivo, o professor poderá repensar as maneiras pelas quais aquele conteúdo instiga os alunos e se relaciona com o cotidiano deles.

Nesse sentido, sabe-se que não é fácil a adequação aos novos parâmetros que têm sido delimitados na educação no século XXI. Muitos professores vão precisar de um período de adaptação para renovar e implementar suas práticas. Para contribuir com esse processo, sugerimos a seguir algumas condutas que podem ser utilizadas durante o planejamento e durante as aulas com turmas do Ensino Médio.

- Observar os alunos de modo personalizado, adequando os desafios e as propostas às características de cada um e procurando colocar a diferença como um agregador e um ponto positivo em relação ao coletivo.
- Organizar planejamentos coletivos e individuais para lidar com as turmas como um todo e também de modo personalizado.
- Relacionar os temas e conteúdos à realidade próxima dos alunos, problematizando as experiências vivenciadas e alinhando os conteúdos aos interesses da turma.
- Dar importância à significação dos conteúdos que serão trabalhados em sala de aula.
- Propor constantemente diferentes maneiras de autoavaliação, permitindo aos alunos um momento de reflexão a respeito de suas atividades e seu aprendizado e, também, permitindo ao professor avaliar suas práticas em sala de aula.
- Desenvolver flexibilidade para improvisar, quando necessário, e para adequar as propostas metodológicas à realidade de cada turma.
- Acompanhar a evolução de cada grupo ou aluno, avaliando-a sob uma perspectiva processual.
- Evitar propostas que abordem capacidades meramente interpretativas e que não desafiem os alunos a desenvolver sua criatividade e seu pensamento crítico.
- Inserir opiniões e sugestões dos alunos no planejamento das tarefas, considerando suas dificuldades e preferências.
- Capacitar os alunos em determinadas atividades com as quais eles possam não estar acostumados, como a realização de uma pesquisa bem fundamentada ou a produção de um texto-síntese.
- Gerir o tempo de modo personalizado, observando os ritmos de aprendizagem específicos das turmas.
- Aderir a dinâmicas que alterem o posicionamento tradicional das carteiras em sala de aula, promovendo atividades em grupo e explorando os diversos ambientes da escola.
- Propor trabalhos em grupos, para que os alunos desenvolvam suas capacidades de expressão e de socialização.

O combate à violência e a promoção da saúde mental dos alunos

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a adolescência é o período de 10 a 19 anos de idade (BRASIL, 2018d). Nessa etapa da vida, o indivíduo ainda se encontra em desenvolvimento e vários fatores podem interferir em seu comportamento e em sua saúde mental. Trata-se de um período de mudanças e descobertas, no qual o jovem constrói e reconstrói sua identidade. Fatores emocionais associados à realidade social, econômica, histórica e cultural tornam essa parcela da população muito vulnerável mental e emocionalmente.

Entre os problemas relacionados à saúde mental que mais afetam os jovens, de acordo com entidades internacionais, está a violência familiar, o *bullying*, a depressão, a ansiedade e a dependência química.

Os casos de *bullying*, por exemplo, envolvem relações de poder e dominação que provocam violência psicológica e, muitas vezes, física, sem motivos aparentes. Em alguns casos, os indivíduos agressores recebem punição, mas é necessário promover um trabalho de conscientização para que esses jovens possam refletir sobre suas ações e analisar os impactos emocionais que elas acarretam para as vítimas. Os jovens que praticam *bullying* geralmente são atraídos por um imaginário preestabelecido de padrões de beleza, comportamento, consumo e configurações sociais. Por isso, as ações de combate a essa prática devem contribuir para a desconstrução desses padrões e para o respeito à diversidade.

Além disso, é preciso analisar o contexto familiar desses jovens, que, muitas vezes, vivem em ambientes onde há violência e/ou negligência. Por essas razões, é imprescindível o papel da escola no cuidado com a saúde mental dos alunos, combatendo ativamente todos os modos de discriminação e violência.

Para isso, são necessários programas para prevenir o *bullying* e qualquer outro tipo de violência, além do abuso de substâncias nocivas. Esses programas devem ter a participação da escola, dos familiares, da comunidade e de profissionais, como psicólogos e psicopedagogos. Tal união pode contribuir para detectar os sinais de problemas envolvendo a saúde mental dos alunos e para

MODERNA

tomar as medidas necessárias antes que esse tipo de comportamento resulte em alguma consequência grave.

Como a escola pode contribuir na promoção da saúde mental dos alunos?

A escola deve ser um espaço de disseminação do respeito e da proteção social dos jovens, atuando com a participação ativa das famílias. Nela, os alunos podem ser organizados em grupos a fim de possibilitar a troca de experiências em debates mediados por um psicólogo. Assim, os jovens tendem a se sentir mais à vontade para discutir e relatar sua realidade, compartilhando suas emoções e descobrindo os gatilhos que os fazem reagir com violência, ansiedade ou tristeza, por exemplo. Trata-se de uma oportunidade para trabalhar o autoconceito, a autoimagem e a autoestima dos jovens.

Averigue a possibilidade de a escola oferecer espaços em horários alternativos para que os alunos desenvolvam atividades extracurriculares, como esportes, oficinas de teatro, atividades de cuidado com a escola e com os colegas, oficinas de dança, gincanas, competições e simulados. Nesses momentos, é importante incluir alunos de diferentes perfis. A convivência é essencial para o desenvolvimento do respeito mútuo e da empatia, colaborando com a saúde mental deles.

Atividades envolvendo atitudes solidárias podem contribuir para que os alunos se coloquem no lugar de outras pessoas, desenvolvendo a empatia. Uma sugestão é promover campanhas de coleta de produtos com o intuito de disponibilizá-los às pessoas vulneráveis e em situação de necessidade assistidas por instituições sociais do município.

Outras atividades podem envolver o futuro dos alunos, identificando os potenciais de cada um a fim de construir um projeto de vida. Mostrar que suas atitudes hoje influenciam o futuro incentiva-os a refletir sobre suas escolhas e opções. A escola, então, tem o papel de ajudá-los a ultrapassar as barreiras com atividades que envolvam a autoestima, o autoconhecimento e o autocuidado.

O professor deve ficar atento aos sinais que denotem mudança de comportamento dos alunos e que demandem o encaminhamento para avaliação da equipe formada pelos profissionais que cuidam da saúde mental, ações que contribuem para prevenir transtornos. Para isso, é muito importante que o professor converse com a administração da escola sobre a possibilidade de promover eventos de formação continuada relacionada à saúde mental.

O convívio social em sala de aula

A convivência social é um aspecto importante na vida de qualquer indivíduo. Vivemos constantemente em interação com outras pessoas e dependemos delas em muitas atividades do dia a dia. Por isso, é necessário ter harmonia no convívio social, com proveito mútuo e respeito constante. Não ter preconceitos, compreender as necessidades do outro, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para criar um ambiente propício para o crescimento em conjunto exige, além de boa vontade, ações de inclusão e integração comunitária.

Na socialização humana, em especial no ambiente escolar, lidamos com indivíduos de diferentes perfis, com diversas crenças e opiniões. Respeitar essas diferenças é dever de cada um e a palavra-chave, em todos os casos, é empatia.

Comumente, a escola é um dos primeiros lugares onde boa parte dos jovens tem contato com outras pessoas. Assim, entre as tarefas do professor, está a necessidade de orientar e instruir os alunos a ser empáticos, desenvolvendo a tolerância, a sensibilidade e, principalmente, o respeito para com os demais. Por meio de práticas saudáveis e bons exemplos, é possível que o professor consiga influenciar seus alunos em um sentido positivo de comportamento socialmente responsável, o qual poderá vir a ter impactos benéficos na sociedade como um todo.

Ações que podem facilitar a construção de um ambiente com essas características incluem, por exemplo, conversas amistosas nas quais, um a um, os alunos possam expressar suas opiniões e compartilhar suas emoções sobre os mais variados assuntos. Tal prática pode ser incrementada com atividades complementares, como a solicitação de pesquisas extraclasse, para posterior debate construtivo, a respeito de temas como as relações familiares, a importância dos vínculos de amizade, a aceitação de ideias contrárias às nossas e o respectivo respeito, o pluralismo cultural na escola e no ambiente de trabalho, a promoção da paz na comunidade escolar, entre outros.

A Matemática, nesse contexto, pode ser uma ferramenta para analisar dados acerca da distribuição de renda ou das discriminações em razão de etnia, sexo ou crença, investigando e interpretando as porcentagens de cada grupo sociocultural em diferentes estudos estatísticos. Com base em análises quantitativas, é possível discutir os desafios que a sociedade enfrenta rumo à efetividade da justiça social, que pode ser um ponto de partida para a troca de ideias e o autoconhecimento por parte dos alunos, inclusive com o envolvimento do professor. Para isso, noções de proporcionalidade, de causas e consequências lógicas e até mesmo da objetividade dos números na descrição dos fenômenos naturais, incluindo os socioeconômicos, são fatores importantes para a compreensão da realidade e, também, para aumentar a consciência dos jovens de modo a auxiliá-los no embasamento de argumentos.

Ademais, sempre que julgar conveniente, o professor pode conversar com os alunos, dispondo-se a ouvi-los e incentivando-os a expressar suas ideias. Atitudes desse tipo favorecem o respeito e a admiração mútuos, contribuindo para o engajamento saudável e natural em sala de aula.

MODERNA

Além disso, é importante conversar com os alunos sobre traçar planos em busca de sonhos e alcançar os meios necessários para consolidá-los pelo próprio esforço. Justamente por essa razão, também estão entre seus maiores desafios.

Nesse processo dinâmico, muitas vezes sem fim, a educação assume um papel importantíssimo, em especial nas peculiares etapas de transição entre a infância e a vida adulta. Ao lado da família, da sociedade e da autodeterminação do próprio sujeito, a escola é o fator mais importante na produção desse despertar de consciência e de responsabilidade no jovem, instruindo-o, tanto quanto possível, na estruturação gradativa e na viabilização sensata de um projeto de vida tão necessário. Tal projeto, constituindo o alicerce em que o futuro do jovem será edificado, deve levar em consideração os múltiplos âmbitos interconectados em que a vida se manifesta: pessoal, educacional, profissional, social, político, moral, intelectual e emocional.

O anseio por objetivos de vida maiores e mais realistas do que aqueles dos primeiros sonhos da infância costumam despontar com ímpeto durante a juventude, e normalmente o fazem de maneira desordenada, cheia de agitação, ingenuidades, inseguranças e receios. Assim, a escola deve se preocupar com a formação integral dos alunos e assumir o compromisso de lidar adequadamente com essas questões, elegendo a construção da autonomia como o eixo central em torno do qual organizar suas atividades.

Sendo a última etapa da Educação Básica, no Ensino Médio tais questões devem ser trabalhadas pelo professor com maior atenção e de maneira mais explícita, ora no contexto das tarefas do componente curricular, ora em conversas com a turma, mas sempre por meio de exemplos e de aconselhamentos que fomentem o delineamento de planos de vida e o recrudescimento do caráter.

Nesse sentido, a trajetória escolar deve ser capaz de dialogar com os jovens, desenvolvendo neles habilidades e conhecimentos que incentivem atitudes efetivas para lidar com os desafios da sociedade, promovendo a maturação de valores que incidirão sobre seus processos de tomada de decisão ao longo da vida. Além de prepará-los para o mercado de trabalho, fornecer orientação vocacional e capacitá-los para eventuais estudos mais complexos no ensino superior ou para aperfeiçoamento técnico em cursos profissionalizantes, conforme as circunstâncias de cada caso.

O estabelecimento do projeto de vida, como já frisado, é um processo dinâmico que conta com diálogos entre jovens, família, amigos, escola e sociedade. Contudo, a liberdade e o protagonismo são exclusivos do indivíduo: é ele que escolherá sua profissão, decidirá constituir família ou não, e vai direcionar sua atenção e seus esforços para a área de seu interesse. Desse modo, o projeto de vida que os alunos almejam, projetam e redefinem para si ao longo de suas trajetórias, praticamente coincidindo com o desenvolvimento da própria identidade, é apenas motivado e instruído pela escola, nunca imposto forçosamente por ela. As escolhas devem ocorrer naturalmente em uma multiplicidade de influências, experiências e aprendizagens que enriquecem à medida que se tornam plurais, de tal modo que os alunos de diferentes perfis aprendem uns com os outros por interação mútua e convívio constante, mediados – e não determinados – pela família, pelo professor, pela escola como um todo e, ainda mais amplamente, pelas conjunturas socioculturais nas quais o jovem está inserido.

É, enfim, no ambiente escolar que os jovens podem experimentar, de modo controlado, as interações com o outro e com o mundo, vislumbrando, na valorização da diversidade, oportunidades de crescimento para seu presente e futuro. É nessa riqueza de motivação que o jovem deve traçar o próprio caminho, explorando seus talentos e potencialidades, assumindo deveres e responsabilidades, aprendendo a fruir e a conter desejos, a dosar razão com emoção, a harmonizar lazer com labor, a mesclar estudos com diversão, disciplina com curiosidade. Com isso, ele estará apto a constituir-se um ser humano íntegro, seguro de si, cônscio de quem é, dos próprios méritos e limitações, atento ao seu papel no mundo e ativo quanto às necessidades de seu tempo e de sua comunidade.

A Base Nacional Comum Curricular na etapa do Ensino Médio

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é o documento que estabelece os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio).

Com o intuito de substituir o currículo do Ensino Médio isolado em componentes curriculares, a BNCC apresenta, para essa etapa, as aprendizagens essenciais distribuídas por áreas do conhecimento. Assim, para cada área são definidas competências específicas que se relacionam diretamente com as habilidades da área. Essa estrutura constitui a formação geral básica que, segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM), "[...] é composta por competências e habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e articuladas como um todo indissociável, enriquecidas pelo contexto histórico, econômico, social, ambiental, cultural local, do mundo do trabalho e da prática social [...]" (BRASIL, 2018b).

Além de estabelecer que os conteúdos sejam apresentados por área (formação geral básica), a BNCC prevê, tendo como documento orientador as DCNEM, os itinerários formativos, em que os alunos poderão escolher, por exemplo, a formação técnica como maneira de complementar sua formação escolar. Veja o esquema a seguir.

PROVISÓRIA

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 469. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Com essa estruturação, a BNCC do Ensino Médio articula-se às habilidades e competências do Ensino Fundamental, com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral dos alunos, possibilitando, assim, a construção de uma sociedade mais justa e igualitária.

As áreas do conhecimento

O currículo do Ensino Médio deve ser elaborado por área e supõe um trabalho interdisciplinar e transdisciplinar. Isso requer um currículo que integre não só os conteúdos dos componentes de determinada área (interdisciplinaridade), mas também os componentes de outras áreas, estabelecendo relações transdisciplinares. As áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares são divididos na BNCC conforme apresenta o quadro a seguir.

ÁREAS DO CONHECIMENTO	COMPONENTES CURRICULARES
Linguagens e suas Tecnologias	- Arte - Educação Física - Língua Inglesa - Língua Portuguesa
Matemática e suas Tecnologias	- Matemática
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	- Biologia - Física - Química
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	- Filosofia - Geografia - História - Sociologia

As dez competências gerais da Educação Básica, previstas na BNCC, têm como principal objetivo formar cidadãos conscientes do seu papel na sociedade e que saibam agir de maneira justa. Essas competências se desdobram na construção de conhecimentos, no desenvolvimento de habilidades, valores e atitudes.

1 – Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2 – Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

3 – Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.

4 – Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

MODERNA

5 – Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

6 – Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

7 – Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8 – Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.

9 – Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

10 – Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 9. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para que os alunos desenvolvam as competências gerais é preciso, primeiramente, adquirirem as aprendizagens essenciais de cada área, por meio das habilidades, desenvolvendo, também, os princípios das competências específicas.

Esta coleção foi organizada de maneira a contemplar as habilidades e as competências específicas relacionadas à área do conhecimento **Matemática e suas Tecnologias**, bem como contemplar as competências gerais propostas na BNCC. Essas relações estão presentes nas abordagens dos conteúdos, nas teorias, nas seções especiais e nas tarefas apresentadas. O livro do aluno aborda as relações entre as habilidades e/ou competências, de maneira que os conteúdos de Matemática estão destacados, permitindo que tanto os alunos quanto o professor confiram como esses elementos são desenvolvidos. Já o **Suplemento para o professor** aborda as relações entre as habilidades e/ou competências e os conteúdos da área de **Matemática e suas Tecnologias**, assim como as competências específicas da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, auxiliando o professor a verificar como esses itens podem ser desenvolvidos, a fim de contribuir com a formação integral dos alunos.

As diferentes maneiras de trabalhar com esses elementos serão explicitadas no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**. Além disso, no tópico **A BNCC e a coleção** há um mapeamento em que são apresentados os elementos da BNCC desenvolvidos em cada tema deste volume.

Temas contemporâneos transversais

Os temas contemporâneos transversais não são novidade nos documentos oficiais para a Educação Básica. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de 1997, eram chamados **temas transversais** e pressupunha-se que fossem incluídos nos currículos das escolas. Contudo, como os PCNs não tinham caráter obrigatório e os seis temas listados não eram pautados em nenhuma legislação ou norma específica, nem sempre essa inclusão acontecia no contexto escolar.

Com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) de 2013, os Temas transversais receberam o nome de **eixos temáticos** ou **eixos norteadores**, e pressupunham que os professores e os alunos escolhessem temas/assuntos afeitos ao componente curricular que desejassem estudar, contextualizando-os com outros. O trabalho interdisciplinar e transdisciplinar, por meio de eixos temáticos, tornou-se obrigatório a fim de conduzir os alunos na reflexão sobre a vida em sociedade.

Com a homologação da BNCC, em 2018, eles passaram a ser chamados **temas contemporâneos** e tornaram-se uma referência obrigatória para a elaboração dos currículos. Em 2019, com a publicação do documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC*, passaram a ser chamados **temas contemporâneos transversais** (TCTs). Essa mudança de nomenclatura é pautada na BNCC, que afirma: "[...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma **transversal** e integradora." (BRASIL, 2018a, grifo nosso).

Na BNCC, os TCTs foram distribuídos em seis áreas temáticas, conforme apresentado no quadro a seguir.

MODERNA

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS					
CIÊNCIA E TECNOLOGIA	**MEIO AMBIENTE**	**ECONOMIA**	**MULTICULTURALISMO**	**CIDADANIA E CIVISMO**	**SAÚDE**
• Ciência e tecnologia	• Educação ambiental • Educação para o consumo	• Trabalho • Educação financeira • Educação fiscal	• Diversidade cultural • Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	• Vida familiar e social • Educação para o trânsito • Educação em direitos humanos • Direitos da criança e do adolescente • Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso	• Saúde • Educação alimentar e nutricional

Os TCTs não pertencem a nenhuma área específica do conhecimento e devem ser abordados por todas elas de maneira integrada e complementar, possibilitando aos alunos a melhor compreensão da sociedade em que vivem. Seguindo essa premissa, e com o objetivo de orientar o professor no trabalho com os TCTs, esta coleção aborda esses temas por meio de recursos e tarefas, tanto no livro do aluno quanto neste **Suplemento para o professor**. Essas abordagens percorrem as áreas do conhecimento e proporcionam aos alunos a reflexão sobre seu papel na sociedade, contribuindo para sua formação cidadã.

Orientações didáticas e metodológicas

Tendências no ensino de Matemática nesta coleção

Esta coleção propõe a contextualização sociocultural do aluno, tornando-o protagonista de seu processo de aprendizagem. Embora a Matemática seja, "[...] por excelência, uma ciência hipotético-dedutiva, porque suas demonstrações se apoiam sobre um sistema de axiomas e postulados [...]" (BRASIL, 2018, p. 265), o papel heurístico das experimentações na aprendizagem da Matemática tem importância considerável e deve fazer parte, sempre que possível, das tarefas discentes, a fim de produzir questionamentos saudáveis, levantar conjecturas e buscar contra-exemplos, entre outras situações. Nesse sentido, em diversos momentos desta coleção a condução dos conceitos busca ferramentas da tendência socioetnocultural, amparada na Etnomatemática, que propõe troca de conhecimento entre professor e aluno, incentivando sua autonomia crítica, criativa e transformadora na aprendizagem de um saber prático e dinâmico. Além disso, a realidade do aluno é, muitas vezes, problematizada e tomada como contexto para explorar novos conceitos e ampliar os conhecimentos prévios deles.

O ponto de partida da tendência socioetnocultural está pautado nos "problemas oriundos do meio cultural, das práticas cotidianas. Professor e alunos trocariam seus conhecimentos [...]. Isso se evidencia pelo trabalho pedagógico a partir da abordagem de temas envolvendo o conhecimento cotidiano dos alunos." (ZIMER, 2008, p. 86-87).

Dessa maneira, a Matemática é uma ciência prática e dinâmica, produzida histórica e culturalmente em diversos contextos sociais, em que sua história desmitifica a realidade e estabelece estratégias que incentivam e facilitam as ações dos alunos, contribuindo para a construção de uma consciência cidadã e democrática. Além disso, as trocas de conhecimentos entre o professor e os alunos por meio de metodologias ativas objetivam a formação crítica, pessoal e social.

Ademais, os recursos tecnológicos são ferramentas potenciais de ensino ao apoiar a autoprodução de conhecimentos por parte dos alunos.

Sabe-se que os resultados matemáticos são obtidos por meio de deduções pautadas em axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados ou proposições. Grande parte do ensino atual está relacionada à mera reprodução de algoritmos. No entanto, não podemos reduzir a Matemática à simples aplicação de fórmulas e à resolução de exercícios, pois são procedimentos mecânicos, que não possibilitam o desenvolvimento do pensamento crítico do aluno. Com o objetivo de mudar essa abordagem em sala de aula, algumas concepções no ensino de Matemática podem ser adotadas, visando tornar o aluno protagonista do próprio processo de aprendizagem. Entre elas, temos a Etnomatemática, a História da Matemática, a Investigação matemática, a Resolução de problemas e a Modelagem matemática.

No Brasil, o precursor da Etnomatemática é o professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio. Etimologicamente, Etnomatemática significa a maneira, a técnica ou a arte (*tica*) de explicar, conhecer e entender (*mathema*) a realidade natural e sociocultural em que o indivíduo está inserido (*etno*). Nesse sentido, o autor a concebe como "o reconhecimento que as ideias matemáticas, substanciadas nos processos de comparar, classificar, quantificar, medir, organizar e de inferir e de concluir, são próprias da natureza humana. Em todo ser humano, cérebro e mente se organizam para execução desses processos" (D'AMBROSIO, 2008, p. 164). Para D'Ambrosio, a Matemática é espontânea e individual, motivada e desenvolvida de acordo com o ambiente social e cultural em que o indivíduo se encontra. Ao sugerir um vínculo entre a Etnomatemática e a sala de aula, D'Ambrosio argumenta que "a proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações reais no tempo [agora] e no espaço [aqui]. E através da crítica, questionar o aqui e agora. Ao fazer isso, mergulhamos

CONTEMPORÂNEA

nas raízes culturais e praticamos dinâmica cultural" (D'AMBROSIO, 2015, p. 46-47).

Nesta coleção, a Etnomatemática é trabalhada em alguns contextos e tarefas que apresentam o conhecimento matemático atrelado a diversas culturas, oportunizando momentos de reflexão quanto ao papel social que a Matemática representa nas relações humanas. Por meio dessa abordagem, é esperado que os alunos descubram métodos úteis para resolver, de maneira eficaz, problemas em contextos não tão comuns à própria realidade. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, são apresentadas diversas situações que permitem ao professor promover, junto aos alunos, um debate acerca da importância da Etnomatemática.

A História da Matemática, como uma tendência de ensino, excede a descrição de fatos históricos ou a apresentação de biografias de matemáticos famosos. Esse ramo envolve a recuperação do processo histórico de construção do conhecimento matemático, favorecendo a contextualização dos objetos de conhecimento. Segundo Lopes e Ferreira (2013), uma dinâmica interessante para introduzir um novo conteúdo em sala de aula é proporcionar aos alunos o contato com o desenvolvimento histórico desse conceito, apontando, sempre que possível, quais eram as condições sociais, econômicas e políticas que, possivelmente, levaram ao surgimento daquela ideia. Para Miguel e Miorim (2011), o professor pode buscar na História da Matemática o apoio de que necessita para atingir os objetivos pedagógicos que levem os alunos a perceber:

> (1) a matemática como uma criação humana; (2) as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; (3) as necessidades práticas, sociais, econômicas e físicas que servem de estímulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas; (4) as conexões existentes entre matemática e filosofia, matemática e religião, matemática e lógica, etc.; (5) a curiosidade estritamente intelectual que pode levar à generalização e extensão de ideias e teorias; (6) as percepções que os matemáticos têm do próprio objeto da matemática, as quais mudam e se desenvolvem ao longo do tempo; (7) a natureza de uma estrutura, de uma axiomatização e de uma prova.
>
> MIGUEL, Antonio; MIORIN, Maria Ângela. *História na Educação Matemática*: propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011. p. 53.

Nesta coleção, a História da Matemática é abordada, sempre que oportuno, por meio de situações motivadoras, que propiciam o trabalho com os aspectos históricos dos conceitos envolvidos. Tais situações podem ser encontradas tanto no decorrer das teorias quanto nos enunciados das tarefas propostas.

A Investigação matemática, por sua vez, consiste no trabalho com situações abertas, isto é, situações em que a questão principal não está bem definida. Visto que os alunos podem tomar diferentes pontos de partida, é provável que os resultados obtidos também sejam diferentes ao final do processo de investigação. Para Ponte, Brocado e Oliveira (2016), a Investigação matemática pode ser concebida como uma atividade de ensino e aprendizagem que favorece "o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016, p. 23). O desenvolvimento de atividades de investigação envolve quatro momentos distintos: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2016). Em um primeiro momento, os alunos devem reconhecer e explorar a situação-problema proposta, além de formular questões que serão investigadas no decorrer desse processo. Em um segundo momento, eles são levados a organizar os dados coletados e propor conjecturas com base nas informações obtidas até então. Depois, eles devem testar tais conjecturas, verificando sua validade e reformulando-as, caso necessário. Por fim, devem justificar essas conjecturas, avaliando o raciocínio desenvolvido e os resultados obtidos.

Nesta coleção, a Investigação matemática é trabalhada em contextos nos quais os alunos são levados a: investigar algoritmos e representá-los por meio de um fluxograma; elaborar enunciados de problemas, nos quais eles devem investigar problemas parecidos que envolvam os conceitos estudados, tomando-os como base para criar uma nova situação; investigar propriedades matemáticas e estabelecer relações entre diferentes conceitos, de modo a formular conjecturas e validá-las sempre que necessário; entre outros casos.

Outra tendência no ensino de Matemática é a Resolução de problemas, que consiste em trabalhar com situações cujos procedimentos que permitem sua resolução não estão predefinidos. Em primeiro lugar, é preciso definir o conceito de problema. Para Onuchic (1999), problemas são situações nas quais não se sabe o que fazer, mas há interesse em solucioná-las. Em outras palavras, são situações que levam o aluno a pensar em algum procedimento de resolução que ainda não está bem definido. A autora ainda destaca que, na abordagem da Resolução de problemas, o aluno, por um lado, aprende Matemática para resolver problemas e, por outro, aprende Matemática resolvendo problemas. Polya (1999), ao tratar da Resolução de problemas no ensino de Matemática, propõe uma heurística de resolução, isto é, resolver um problema consiste em seguir determinadas etapas. O primeiro passo é compreender o problema interpretando o enunciado. Em seguida, elabora-se um plano de resolução, no qual é possível identificar procedimentos mate-

COPEIA

máticos que podem ser úteis. Definido o plano, deve-se colocá-lo em execução, encontrando uma solução para o problema. Por fim, a última etapa consiste na comparação dos resultados obtidos com o enunciado do problema, verificando todos os procedimentos utilizados e analisando se a solução é consistente com o que foi solicitado.

De acordo com a BNCC:

> [...]
>
> Para resolver problemas, os estudantes podem, no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles precisam aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente e linguagem adequada.
>
> No entanto, a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes. Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação.
>
> Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco. [...]

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 535. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Nesta coleção, a Resolução de problemas é abordada na seção **Resolvendo por etapas**, em que são apresentadas situações que complementam os conteúdos trabalhados no livro do aluno. Por meio de orientações específicas detalhadas em algumas etapas, os alunos são levados a determinar a resposta do problema proposto. Dependendo do que o professor julgar conveniente, o trabalho com essa seção poderá ser desenvolvido individualmente ou em grupos.

As atividades de cunho predominantemente investigativo, que não possuem procedimentos de resolução previamente determinados, não se restringem apenas à Resolução de problemas ou à Investigação matemática. A Modelagem matemática, enquanto tendência de ensino, também tem como base as atividades investigativas. Porém, o que a diferencia das outras tendências é o fato de que as atividades abordam situações do mundo real, em contextos próximos à realidade dos alunos. A Modelagem matemática pode ser considerada uma alternativa pedagógica, que aborda situações não matemáticas, isto é, reais, por meio da Matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nesse sentido, ao trabalhar com uma atividade na perspectiva da Modelagem matemática, os alunos têm como ponto de partida uma situação-problema cujo contexto está relacionado ao mundo real e cujos dados só serão conhecidos por meio da coleta de informações. Essa etapa leva os alunos a elaborar problemas que serão investigados por meio da Matemática, resultando em um modelo formado por um sistema conceitual expresso em linguagem matemática. A construção desse modelo matemático requer que os alunos criem estratégias que os auxiliem na resolução do problema, mesmo que tais estratégias não sejam determinadas *a priori*. Por fim, é necessário que eles determinem a resolução do problema por meio do modelo matemático elaborado, cuja resposta será confrontada com o enunciado, buscando possíveis divergências de valores. Essa interpretação do resultado pode resultar em uma solução que satisfaça o problema ou, então, em uma solução que não seja condizente com as informações previamente apresentadas. Nesse último caso, é necessário orientar o aluno para que retome os procedimentos a fim de encontrar o erro cometido e, assim, executar novamente os procedimentos com o intuito de encontrar a solução correta. Esse tipo de atividade, além de proporcionar uma aprendizagem significativa, pode causar motivação nos alunos, visto que são estudadas situações de seu cotidiano. O desenvolvimento de atividades sob a luz da Modelagem matemática exige que o professor desempenhe o papel de orientador, tornando o aluno o próprio protagonista de seu processo de aprendizagem.

Apesar das diferentes características entre as tendências citadas, todas elas destacam o papel do professor distinto do modelo usual de ensino. Quando inserido em atividades com as características descritas, ele deve se tornar um mediador do ensino, no sentido de fazer com que os alunos utilizem suas habilidades e técnicas na resolução dos problemas e/ou situações que surgirem. Nesse sentido, há dois caminhos que podem ser percorridos: primeiro, o professor encaminha os alunos na resolução do problema por meio de dicas e orientações que, na verdade, não os auxiliam no desenvolvimento do raciocínio crítico; segundo, o professor, por meio de questionamentos, auxilia os alunos na resolução da situação proposta sem revelar a solução do problema inicial. Em qualquer caso, cabe ao professor utilizar todo o conhecimento relacionado à sua prática pedagógica para refletir acerca do caminho mais adequado para aquela situação, de acordo com o trabalho que estiver sendo desenvolvido.

MODERNA

O computador e o ensino da Matemática

O advento da tecnologia beneficiou diversos setores importantes da nossa sociedade, um deles foi a educação. Os computadores, celulares, *tablets* e outros dispositivos eletrônicos estão presentes em qualquer ambiente, inclusive na sala de aula. Assim, é de se esperar que tais equipamentos passem a fazer parte do cotidiano escolar dos alunos, contrariando grande parte da população que considera instrumentos escolares apenas a lousa, o giz e o livro didático.

Apesar da constante presença em diversos setores e do comprovado auxílio de um computador a um ambiente escolar, muitos professores ainda apresentam certa resistência à sua implementação na sala de aula. Enquanto alguns encaram os equipamentos tecnológicos como eficazes transmissores de conhecimento (informática na educação), outros ainda acreditam que deveria ser criado um componente curricular específico no currículo escolar dos alunos com o intuito de auxiliá-los a manipular tais equipamentos (educação informática). Mas qual seria a diferença entre esses dois conceitos?

De maneira geral, o objetivo da educação informática é preparar o indivíduo para o mercado de trabalho, ensinando-lhe alguns conceitos computacionais, os fundamentos sobre como um computador funciona e a utilização de alguns *softwares* para trabalhos específicos. Contudo, esse tipo de serviço ainda é ofertado pelas escolas de informática em algumas localidades. Já em relação à informática na educação, o computador assume outro papel: sua inserção na rotina escolar tem participação no processo de ensino e aprendizagem. Nesse caso, é possível obter e trocar informações, desenvolver conceitos, entre outras possibilidades.

Focando no segundo conceito, informática na educação, podem surgir algumas perguntas que merecem reflexão.

- De quais maneiras é possível inserir o computador no ambiente escolar?
- Que tipo de contribuição esse instrumento pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem?
- Quais são os *softwares* mais adequados para o trabalho em sala de aula?
- Que cuidados devemos ter para que o computador seja uma ferramenta efetiva utilizada para fins educativos?

As respostas para essas e outras perguntas devem surgir de acordo com o planejamento do projeto pedagógico da escola, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

O uso de um computador como recurso didático requer muito mais do que a simples instalação desse equipamento e de como os professores farão uso dele. É necessário que eles sejam capazes de extrair todo o potencial desse equipamento no ambiente escolar. Com o objetivo de alcançar resultados cada vez mais satisfatórios, ao trabalhar com o auxílio da tecnologia, o professor deve explorá-la como uma ferramenta pedagógica capaz de auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. É importante enfatizar que, diante de todas essas transformações, o professor em sala de aula deixa de ser apenas um transmissor de informações para ser mediador do processo de ensino e aprendizagem.

> Os recursos computacionais em si mesmos, quando amplamente dominados pelo professor, não são suficientes para garantir uma ação educacional diferenciada, se não estiverem claras e fundamentadas as teorias. Assim, além da necessidade de saber lidar com o computador, o professor deve entregar-se ao processo de construir para si mesmo um novo conhecimento, incorporando não somente os princípios que estão sendo atualmente desenvolvidos sobre informática e educação, mas acima de tudo, passando pelas considerações teóricas sobre a aprendizagem que melhor explicam a aquisição do conhecimento e o desenvolvimento cognitivo. Trata-se de dominar o conhecimento científico de uma maneira ampla e necessária para o seu próprio aprimoramento intelectual.

OLIVEIRA, 2007, p. 59, apud FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009, Ponta Grossa. *Anais* [...]. Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1023.

Em certos momentos, especificamente nas aulas de Matemática, a utilização de alguns *softwares* pode facilitar algumas dinâmicas em sala de aula ou propiciar a exploração de algo que seria inviável sem esses recursos. Os *softwares* contribuem de maneira significativa no processo de ensino e aprendizagem, pois são interativos, promovem maior abertura para o desenvolvimento da criatividade dos alunos, estimulam a pesquisa e auxiliam na construção de um saber coletivo. Portanto, quanto maior a gama de *softwares* distintos conhecidos pelo professor, mais rica, dinâmica e produtiva será a aula ministrada.

> [...] Inovações didáticas resultantes da utilização do computador podem ser ilustradas por *softwares* destinados ao ensino da geometria, incorporando o recurso do movimento e da simulação na representação de conceitos. Essa é uma novidade, uma vez que o movimento é um recurso mais próximo da flexibilidade da representação por imagens mentais, restritas ao cérebro humano.
>
> [...]

PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 40-41.

MODERNA

Nesta coleção, alguns temas relacionados ao uso do computador em sala de aula são abordados em diversos momentos. Por exemplo, na seção **Acessando tecnologias** são apresentados *softwares* e outros recursos tecnológicos que complementam o ensino dos conteúdos abordados no livro do aluno. O trabalho com essa seção poderá ser realizado no laboratório de informática da escola ou, ainda, proposto como atividade extraclasse.

O pensamento computacional

Vivemos em uma sociedade na qual a presença das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) provoca importantes transformações em diversos setores, como na economia, na cultura e na educação. Diante disso, pesquisadores de campos relacionados às políticas educacionais enfatizam a importância da implantação da programação e de conceitos oriundos da ciência da computação no currículo escolar, uma vez que o trabalho realizado no âmbito dessa ciência desenvolve capacidades relacionadas ao pensamento computacional, que, junto à leitura, à escrita e à aritmética, deveria ser uma das habilidades analíticas inerentes a cada indivíduo (RAABE, 2017).

Mas o que é o pensamento computacional?

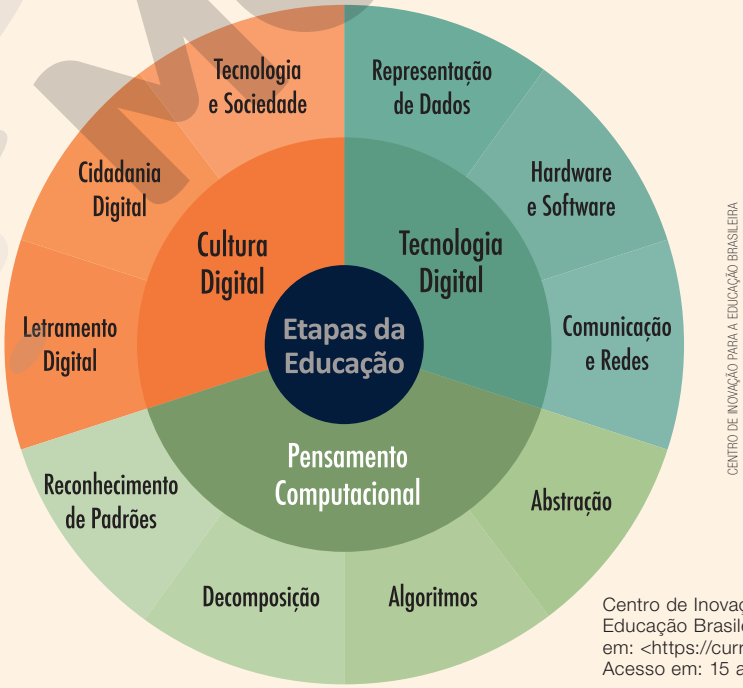
> [...]
>
> Pensamento computacional é uma forma para seres humanos resolverem problemas; não é tentar fazer com que seres humanos pensem como computadores. Computadores são tediosos e enfadonhos; humanos são espertos e imaginativos. Nós humanos tornamos a computação empolgante. Equipados com aparelhos computacionais, usamos nossa inteligência para resolver problemas que não ousaríamos sequer tentar antes da era da computação e construir sistemas com funcionalidades limitadas apenas pela nossa imaginação.
>
> [...]

WING, Jeannette. *Computational Thinking*. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Communications of the ACM*, n. 3, p. 4, 2006. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Um dos eixos do currículo de referência em tecnologia e computação, do Centro de Inovação para a Educação Brasileira, é o pensamento computacional, o qual dissera sobre a resolução de problemas que envolvem tecnologias digitais considerando quatro pilares: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo (CIEB, 2018; BRACKMANN, 2017).

- **Decomposição:** decompor o problema em problemas menores, conhecidos como subproblemas, mais fáceis de serem resolvidos.
- **Reconhecimento de padrões:** analisar os subproblemas individualmente, com o objetivo de reconhecer padrões e identificar características comuns que ajudam na sua resolução.
- **Abstração:** filtrar, classificar e organizar as informações relevantes ao considerar apenas os dados essenciais para a resolução do problema e ignorar as informações irrelevantes, atingindo uma generalização dos padrões identificados.
- **Algoritmo:** construção de estratégias ou instruções claras e ordenadas que auxiliam a resolução dos subproblemas e, consequentemente, a obter a solução do problema principal.

Para mais informações a respeito do currículo de referência em tecnologia e computação, acesse o *site* do CIEB. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.



Centro de Inovação para a Educação Brasileira. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

MODELO

Como estratégia didática para o desenvolvimento do pensamento computacional, os conceitos relacionados à linguagem de programação, quando o contexto assim solicitar, podem ser utilizados de modo contextualizado a fim de que os alunos exercitem sua aprendizagem e autonomia para estabelecer relações com situações de seu cotidiano. O uso de simulações, *softwares* ou equipamentos específicos, por exemplo, pode levar os alunos a estudar determinados fenômenos reais que dificilmente seriam possíveis sem o auxílio desses recursos.

No Ensino Médio, ao trabalhar com abordagens que desenvolvem o pensamento computacional, deve-se planejar a maneira como as atividades propostas serão efetuadas, considerando diferentes perfis de alunos, bem como as características de cada turma, além de fazer uso dos recursos disponíveis no ambiente escolar e de perseguir os objetivos a serem alcançados.

Sabe-se que as escolas públicas brasileiras, muitas vezes, não possuem o aparato tecnológico e computacional necessário para o desenvolvimento de atividades com essas tecnologias. Nesses casos, o professor deve recorrer ao trabalho com o pensamento computacional sem o auxílio de recursos tecnológicos, conhecido como pensamento computacional desplugado, ou *unplugged*. Segundo Brackmann (2017), essa alternativa, por ser de fácil aplicação em diferentes realidades, foi pensada justamente com o intuito de atender às escolas públicas que não possuem condições socioeconômicas de ter acesso a computadores ou outras tecnologias. Desse modo, o professor pode aplicar abordagens lúdicas, como truques de mágica e competições entre os alunos ou, ainda, usar objetos manipuláveis, como jogos (de tabuleiro, de cartas, de peças), livros, fichas, figuras e, até mesmo, o próprio material escolar dos alunos.

Além disso, de acordo com a BNCC (2018, p. 474), o pensamento computacional "envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos".

Assim, nesta coleção, o pensamento computacional é incentivado eventualmente: em tarefas que envolvem a organização do pensamento; no registro e na análise de resultados e dados por meio de planilhas e gráficos; no uso de *softwares* de geometria dinâmica; nas construções de algoritmos e fluxogramas; por meio de linguagem de programação usando o *software* VisualG – programa que possibilita a criação, edição, interpretação e execução de algoritmos, bastante utilizado para o ensino da lógica de programação por ser de fácil manipulação.

No trabalho com o VisualG, os alunos são levados a interpretar as informações do problema proposto e organizá-las em uma sequência de instruções que devem ser transformadas em um algoritmo. Então, essas instruções são transcritas no *software*, realizando a codificação do problema, apresentado em linguagem materna, para uma linguagem de programação. Com isso, os alunos desenvolvem os quatro pilares do pensamento computacional. O VisualG é livre e seu *download* pode ser feito por meio do *site* disponível em: <https://visualg3.com.br/>. Acesso em: 14 maio 2020.

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 271. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

Para auxiliar nas práticas que propiciam o desenvolvimento do pensamento computacional em sala de aula, veja algumas referências no tópico **Sugestões ao professor** deste **Suplemento para o professor.**

O aluno no centro do processo de aprendizagem

Metodologias ativas

Nas últimas décadas, o advento da tecnologia e as discussões envolvendo novos métodos de ensino têm gerado grandes desafios aos professores e às escolas. Estruturas de ensino tradicionais, nas quais professores transmitem conhecimentos aos alunos, têm sido cada vez mais questionadas quanto ao seu papel efetivo no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, as metodologias ativas são uma maneira de transformar essa realidade, engajando o aluno e tornando o processo de ensino e aprendizagem mais significativo. As estratégias de metodologias ativas são um processo de ensino e aprendizagem em que o aluno é o protagonista da construção do conhecimento, tendo o professor como mediador para atingir um objetivo de aprendizagem de modo interativo, dinâmico, reflexivo e colaborativo.

Nesse tipo de abordagem, o professor deixa de ser o transmissor do conhecimento, passando a ser um mediador ao planejar as aulas com foco em orientar e incentivar os alunos.

> As metodologias ativas dão ênfase ao papel protagonista do aluno, ao seu envolvimento direto, participativo e reflexivo em todas as eta-

MODERNA

pas do processo, experimentando, desenhando, criando, com orientação do professor [...].

MORAN, J. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, L; MORAN, J. (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 02-25.

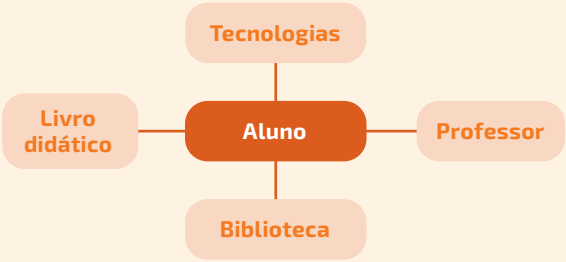
As dez competências gerais propostas pela BNCC estão alinhadas às situações de aprendizagem que podem ser conduzidas por meio da aplicação de estratégias de metodologias ativas, incentivando o protagonismo do aluno.

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. p. 14. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

As competências gerais da BNCC centralizam no aluno o processo de ensino e aprendizagem, colocando-o como produtor efetivo de conhecimento. Assim, as competências visam à mobilização de conhecimentos com o intuito de atender às demandas cotidianas e também aos problemas sociais mais complexos, sempre conferindo ao aluno um papel central e ativo nesse processo.

Ao empregar estratégias de metodologias ativas no processo de ensino e aprendizagem, os alunos são incentivados a construir o conhecimento de modo integrado às necessidades de seu cotidiano. Nesse processo, é possível agregar o uso de recursos diversos, como o livro didático usado em sala de aula, os livros disponíveis na biblioteca e os recursos provenientes da tecnologia, como o computador, o celular, a internet e as plataformas digitais.



Considerando esse contexto, esta coleção busca explorar diferentes estratégias de metodologias ativas por meio de tarefas que incentivam o protagonismo dos alunos. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, encontra-se o destaque **Metodologia ativa,** que explica, de maneira geral, como algumas estratégias podem ser aplicadas em determinados momentos, orientando o professor, sempre que conveniente, sobre a metodologia ativa mais adequada para ser adotada naquele contexto específico.

Estratégias

Design thinking (Pensamento de *design*)

Design thinking (DT) é uma estratégia baseada em empatia, colaboração, criatividade e otimismo, que busca soluções para determinada necessidade por meio de um processo estruturado.

Inspirado na maneira como os *designers* resolvem problemas, o processo do Design thinking parte da compreensão de um problema para um *brainstorming* e, por fim, segue para a criação de soluções inovadoras. Veja a seguir as principais etapas do DT.

EMPATIZAR

Conhecer e compreender a realidade do problema. Podem ocorrer por meio de pesquisas em diversas fontes ou de diálogos com as pessoas envolvidas.

DEFINIR

O grupo deve se unir para compartilhar o que percebeu na etapa da empatia e analisar todos os dados coletados para definir sobre qual aspecto do problema vai se debruçar. Recomenda-se expressar esse desafio por meio de uma pergunta iniciada com "Como podemos...?".

Exemplo: Como podemos conscientizar os moradores do bairro sobre o problema da dengue?

IDEAR

Momento de *brainstorming*. Todos devem se sentir à vontade para sugerir. Após esse processo, o grupo deve refinar as opções, escolhendo as que podem ser aplicadas. Em seguida, devem antecipar as dificuldades de cada uma, até chegar à que será executada. Nessa etapa, o *feedback* do público envolvido é importante.

PROTOTIPAR

Fazer um protótipo é tornar uma ideia tangível, como a primeira versão de algo. Um protótipo pode ser um produto, um processo ou uma experiência. É a proposta do grupo para a solução do problema.

TESTAR

O teste é a parte da implementação e execução da proposta feita pelo grupo. É necessário um plano de ação para aplicá-la. É importante que o grupo acompanhe e esteja atento a possíveis necessidades de modificações no protótipo.

Fonte de pesquisa: ROCHA, Julciane. Design thinking na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Orgs.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

MODELO

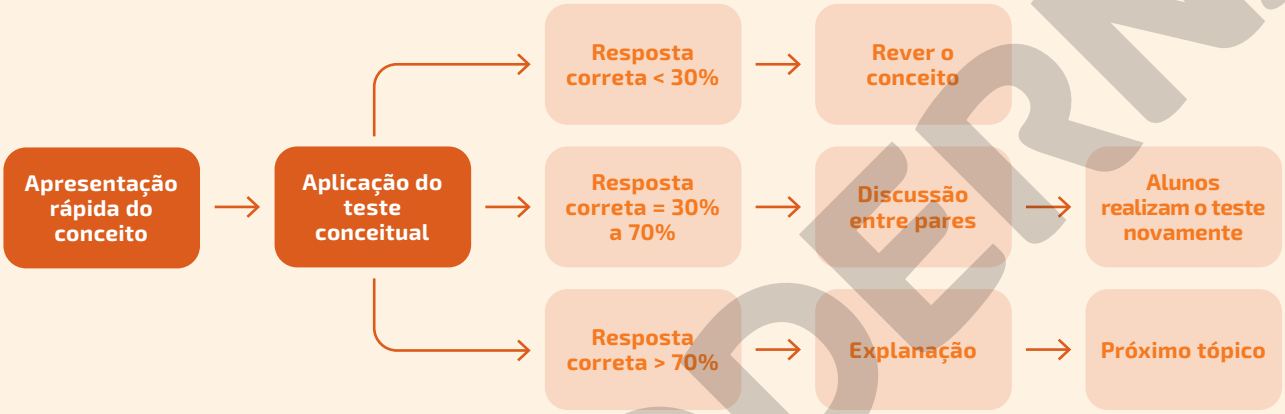
Na educação, a estratégia DT pode ser aplicada tanto em atividades que levem horas para serem resolvidas, como as problematizações de conteúdos em aulas expositivas, quanto em atividades que podem levar semanas ou meses, como as campanhas na escola. Essa metodologia ativa contribui para o desenvolvimento da empatia, da criatividade e da colaboração entre os alunos.

Peer instruction (Abordagem por pares)

A estratégia Peer instruction ou abordagem por pares consiste em uma dinâmica na qual a aprendizagem dos alunos não se baseia somente no estudo individual e na explicação do professor, mas também em auxiliar e ser auxiliado pelos colegas para compreender conceitos.

A estratégia é organizada da seguinte maneira.

- O aluno estuda os conteúdos antes da aula.
- Em sala de aula, o professor faz uma breve exposição do assunto e aplica um teste, preferencialmente oral e com respostas de múltipla escolha.
- Ao fazer a primeira pergunta, o professor deve avaliar as respostas da turma: se mais de 70% dos alunos acertarem a resposta, o professor faz uma breve explanação da resposta correta e dos motivos pelos quais as outras estão erradas e prossegue com o teste. Se menos de 30% dos alunos responderem corretamente, é necessário voltar aos conteúdos e revisá-los de maneira aprofundada. Se a porcentagem de acertos ficar entre 30% e 70%, o professor deve pedir aos alunos que se reúnam em duplas ou grupos para conversar sobre a questão, explicando ao colega o que foi entendido e chegando a um consenso. Ao terminarem a conversa, o professor faz a pergunta novamente, e segue nesse ciclo.



Fonte de pesquisa: FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa.* São Paulo: Saraiva Educação, 2018. p. 46.

Há diversas maneiras de aplicar o teste para os alunos: pode-se indicar alternativas e pedir que levantem as mãos; distribuir cartões coloridos e pedir que os levantem conforme a resposta; registrar em papel ou utilizar aplicativos.

Essa estratégia é válida, por exemplo, para iniciar os estudos sobre o tema e para revisar os conteúdos estudados. A abordagem por pares contribui com a interação, a colaboração e o diálogo entre os alunos.

Gallery walk (Caminhada na galeria)

Gallery walk é uma estratégia que desenvolve a habilidade de síntese e estimula a interação, o trabalho em equipe e a socialização do conhecimento. Nela, os alunos exibem seus trabalhos em cartazes que devem ser afixados em paredes, como obras de arte em uma galeria. Em seguida, a turma circula pela sala, observando os cartazes afixados, debatendo e refletindo sobre o tema proposto.

Há diversas possibilidades de condução dessa estratégia: trabalhos individuais apresentados enquanto a turma percorre a "galeria" em conjunto; circulação livre dos alunos pela "galeria", colando notas adesivas nos cartazes com dúvidas ou sugestões; entre outras.

Essa dinâmica pode ser aplicada na apresentação, revisão ou mesmo na avaliação de conteúdos. Cabe ao professor definir os objetivos e o tema a serem trabalhados, orientando a turma em relação à atividade. Durante o processo, o docente assume o papel de observador, permitindo que os alunos se organizem e intervindo somente se for necessário. Ao final, é importante promover um debate geral com a turma ou fazer uma breve explanação sobre os trabalhos e o processo da Gallery walk.

Sorting strips (Tiras de classificação)

Na estratégia Sorting strips, trechos de informações ou conteúdos são separados em tiras de papel para serem organizados em sequência ou classificados em categorias.

Essa dinâmica auxilia a sistematização da aprendizagem de modo colaborativo, incentivando a troca de ideias entre os alunos e possibilitando a discussão de ideias opostas, complementares ou sequenciais ao conteúdo das tiras.

A estratégia pode ser aplicada para explorar a compreensão de processos, o encadeamento de ideias e o exercício de classificações.

MODERNA

Think-pair-share (Pensar-conversar-compartilhar)

Think-pair-share é uma estratégia de aprendizagem cooperativa que consiste em pensar, individualmente, sobre uma questão ou um problema levantado pelo professor, compartilhar o raciocínio individual com um colega e, em seguida, socializar com um grupo maior os pensamentos e as conclusões aos quais a dupla chegou.

Essa estratégia favorece os alunos que não se sentem à vontade em compartilhar suas opiniões ou seus conhecimentos com a turma ou com um grupo, mas são capazes de conversar com um colega sobre determinada situação antes de se posicionar diante de um grupo maior.

Think

O professor expõe o problema e o aluno reflete individualmente sobre a situação.

Pair

O aluno reúne-se com um colega para trocar percepções sobre a situação.

É interessante que as duplas sejam definidas antes de a questão ser exposta, a fim de que as reflexões dos alunos não sejam interrompidas para que eles encontrem um par.

Share

As duplas se unem em grupos maiores para compartilhar as conclusões a que chegaram após a discussão conjunta. O grupo discute todas as percepções e chega a uma nova síntese das ideias com base na discussão coletiva.

Em outro modelo de socialização, o professor pode pedir a algumas duplas que compartilhem suas conclusões com toda a turma.

ILUSTRAÇÕES: LAÍS GARBELINI

Essa estratégia desenvolve habilidades de oralidade e argumentação, além de incentivar os alunos a ouvir e respeitar diferentes opiniões.

Quick writing (Escrita rápida)

Quick writing é uma estratégia que consiste em escrever uma resposta relacionada a um conteúdo em, no máximo, cinco minutos.

Essa dinâmica desenvolve a fluência na escrita e a capacidade de síntese. A pergunta é feita pelo professor e pode se relacionar tanto aos assuntos estudados quanto à vivência dos alunos. É possível aplicar essa estratégia baseando-se em abordagens como: explicação de conceitos ou vocabulários de um texto; formulação de hipóteses; ou inferências e explanação de conhecimentos prévios.

Avaliação

A etapa escolar do Ensino Médio busca o desenvolvimento **integral** dos jovens alunos. Os objetivos pedagógicos, portanto, de acordo com as orientações da BNCC, devem propiciar o desenvolvimento de **competências** nesses jovens, não apenas no sentido de **saber**, mas principalmente de **saber fazer**. Desse modo, nesta coleção, os alunos são envolvidos em situações de estudo que perpassam suas necessidades e seus interesses, ampliam seus conhecimentos e permitem a mobilização desses conhecimentos visando atender às demandas do mundo onde vivem.

Portanto, a **avaliação das aprendizagens** desses alunos, como parte indissociável do processo de ensino e aprendizagem, deve estar alinhada a esses objetivos na atividade escolar.

A prática avaliativa tem sido cada vez mais reconhecida por sua importância, pois auxilia o trabalho do professor, e por seu caráter legítimo na validação da condução didático-pedagógica. Desse modo, faz-se necessário compreender a essência de algumas modalidades de avaliação e implementá-las de acordo com os objetivos definidos para cada momento do processo de ensino e aprendizagem.

Avaliação diagnóstica

Toda avaliação tem caráter diagnóstico, pois tende a obter informações sobre a aprendizagem dos alunos. Essa é uma prática muito importante ao iniciar um conteúdo, pois, por meio dela, é possível identificar os conhecimentos prévios de cada um. Desse modo, é possível tomar decisões sobre seu planejamento de ensino, caso seja necessário complementá-lo ou resumi-lo.

Avaliação somativa

Em geral, é aplicada ao final do estudo de um conteúdo e pode valer-se de diferentes tipos de instrumentos. Fornece dados ou informações que sintetizam os avanços das aprendizagens dos alunos em relação a tal conteúdo. Busca, de maneira pontual e conclusiva, sintetizar e registrar os resultados verificados, com finalidade informativa ou classificatória.

Avaliação formativa

É parte integrante de todo o processo de ensino e aprendizagem, pois busca melhorias na atividade em curso. Oferece subsídios que respaldam a interferência no processo de atuação do professor e de aprendizagem dos alunos, com vistas ao seu aprimoramento. Desse modo, permite a retomada e a revisão de conceitos e temas, além do ajuste da prática pedagógica.

A avaliação e o trabalho do professor

Alguns fatores são fundamentais para que a prática avaliativa possa contribuir de modo efetivo com o professor em seu trabalho diário.

A avaliação e a prática pedagógica

É possível observar casos de práticas avaliativas que se limitam, na maioria das vezes, a uma verificação resumida de notas, seguida de progressão e certificação. Essas práticas, em geral, estão relacionadas a encaminha-

MODERNA

mentos pedagógicos em que o professor é um transmissor de conhecimento e os alunos, meros receptores. Por outro lado, em algumas metodologias, nas quais o aluno assume parte importante no processo de construção e ampliação de seu conhecimento, a avaliação preocupa-se mais com "como" o aluno aprende e menos com "o que" ele aprende. Portanto, o acompanhamento das aprendizagens dos alunos está intrinsicamente relacionado à **opção teórico-metodológica** escolhida, ou seja, o modo como se avalia diz muito sobre o modo como se ensina, e vice-versa.

Uma prática constante

A avaliação não deve ser estanque ou limitada a determinados momentos. Uma prova ao final do estudo de um conteúdo não é suficiente para obter todas as informações necessárias sobre a aprendizagem de cada aluno. Desse modo, a **diversificação** de dinâmicas e instrumentos de avaliação, assim como o registro das informações que elas fornecem sobre o processo de aprendizagem, devem ser analisados e confrontados constantemente, a fim de embasar o prosseguimento do trabalho do professor.

Há diferentes maneiras de **registrar** a trajetória dos alunos em relação à sua aprendizagem. Muitos professores fazem relatórios de observação diária, constroem um portfólio ou anotam comentários em um diário de aulas. Esses registros podem conter descrições ou conceitos que indiquem o progresso ou as dificuldades dos alunos de maneira individual, em pequenos grupos ou de toda a turma. Com base neles, é possível decidir sobre a retomada de explicações, sugestões de leituras ou atividades paralelas, que auxiliem o acompanhamento dos alunos em relação aos objetivos de aprendizagem estabelecidos. Esse **aspecto qualitativo** da prática avaliativa exige do professor uma postura ativa, reflexiva e reguladora em relação ao processo de ensino e aprendizagem. E, portanto, é inevitável que a avaliação seja **constante**, estando inserida em diversos momentos desse processo.

A seguir, apresentamos um modelo de **relatório** que pode auxiliar no acompanhamento da aprendizagem dos alunos. O modelo traz itens de acompanhamento diferentes em cada linha a fim de exemplificar a variação a ser aplicada nesse documento. É possível considerar os objetivos de aprendizagem do estudo de cada tema ou outros objetivos propostos em seus planejamentos. Também é possível acompanhar o desempenho dos alunos em relação às habilidades a serem desenvolvidas. Outra alternativa é registrar os indicadores de aprendizagem dos alunos obtidos por meio de uma determinada tarefa que pode ser desenvolvida individualmente ou em grupos. O campo de observações é muito importante para que comentários e lembretes de detalhes sejam registrados, auxiliando nas futuras tomadas de decisões com base nesses relatórios.

Lembramos que esse relatório figura como modelo que pode (e deve) ser adaptado de acordo com as necessidades e realidade de trabalho de cada turma ou escola.

Modelo de relatório de acompanhamento da aprendizagem

MODELO

NOME DO ALUNO					
Componente curricular		Ano		Turma	

Objetivos/habilidades ou atividades propostas	Período letivo do registro			Apresentou progressos durante o período letivo indicado?	
	NÃO consegue executar	Executa com DIFICULDADE	Executa com FACILIDADE	SIM	NÃO
Reconhecer algumas unidades de medida de base do Sistema Internacional de Unidades (SI).					
(**EM13MAT103**) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.					
Síntese conclusiva da utilização de diferentes unidades de medida de base pertencentes ou não ao Sistema Internacional de Unidades (SI).					
Observações					

Instrumentos de avaliação diversificados

Independentemente do instrumento de avaliação que o professor decida utilizar, é fundamental que os objetivos a serem atingidos estejam bem definidos. Obter **indicadores** da aprendizagem dos alunos deve ser a essência de cada instrumento de avaliação elaborado pelo professor. Portanto, provas objetivas ou discursivas, seminários, produções de textos, sínteses de pesquisas, debates, dramatizações, produção de esquemas ou desenhos e trabalhos em grupo ou individuais estão entre as variações possíveis.

Quanto ao professor, é preciso esclarecer os **objetivos** de ensino a serem investigados em relação à aprendizagem dos alunos. Já os alunos devem receber, por parte do professor, toda e qualquer **orientação** possível sobre a dinâmica proposta, de modo que estejam conscientes a respeito de como e quando serão avaliados.

Mas, por que a avaliação deve ter essa **diversificação**? Porque os alunos são diferentes, aprendem de maneiras distintas e expressam-se também de modos diversos. Alguns têm mais facilidade em aprender ouvindo explicações, enquanto outros precisam ler textos, resumos ou esquemas. Há aqueles que demonstram o que sabem por meio de conversas ou debates, mas apresentam dificuldade para se expressar por meio da escrita. Enquanto alguns têm facilidade em compreender raciocínios lógico-matemáticos, outros têm destreza na produção de textos.

A variedade de estratégias, como dinâmicas em grupo ou individuais, ou de participação anônima, por exemplo, também são recursos que auxiliam no trabalho com grupos de **diferentes perfis**. O incentivo à socialização e à junção de grupos heterogêneos, a relevância dos temas de estudos e o envolvimento dos jovens também são fatores que podem tornar eficaz o trabalho de professores e alunos no processo de ensinar, aprender e avaliar.

A avaliação nesta coleção

Nesta coleção, a opção por um trabalho que destaque o protagonismo dos alunos do Ensino Médio apresenta **oportunidades constantes** de avaliação do processo de ensino e aprendizagem, privilegiando **dinâmicas diversificadas**, em especial aquelas fundamentadas em **metodologias ativas**. Para tanto, no trabalho com as diferentes unidades temáticas, são propostas dinâmicas e atividades variadas, com a exploração de diversos recursos (textuais e imagéticos), ocasiões que permitem o acompanhamento do professor em relação à aprendizagem dos alunos.

Também são disponibilizadas, no tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor**, diversas orientações com dicas pontuais, alinhadas aos objetivos de ensino e a uma avaliação formativa. Destacamos o boxe **Sugestão de avaliação**, que apresenta, em geral, orientações específicas para os momentos de avaliação, com sugestões de como obter informações a respeito da aprendizagem dos alunos, e as possibilidades de escolher o melhor procedimento a ser tomado.

A **autoavaliação** também é uma ferramenta que colabora coerentemente com o propósito de que os alunos assumam o protagonismo no processo de formação do seu conhecimento. Essa proposta de reflexão a respeito de sua aprendizagem, participação, limitações e potencialidades deve ser mediada pelo professor como um processo construtivo e positivo, para que não se encaminhe de modo depreciativo e interfira na autoestima dos alunos. Ao contrário, deve ser encarada e assimilada como um procedimento de verificação dos caminhos possíveis para superar os diferentes desafios que a vida lhes colocará.

Em se tratando de desafios, esta coleção também se preocupa em preparar os alunos para os **exames de larga escala**. Para isso, a condução dos estudos é norteada pelo objetivo de desenvolver **habilidades** e **competências** que permitam o embasamento em conhecimentos científicos, o exercício da criatividade, a resolução de problemas com base em saberes interdisciplinares e transdisciplinares, a valorização da cultura em suas diversas expressões, expressar-se e argumentar por meio de diferentes linguagens, inclusive a tecnológica e a digital, agindo com respeito a si mesmo e aos outros, sempre com responsabilidade.

A BNCC e a coleção

Cada volume desta coleção foi organizado e desenvolvido de maneira a contemplar as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais elencados na BNCC, estabelecendo, sempre que possível, conexões com outras áreas do conhecimento. É possível perceber tais relações na maneira como os temas foram estruturados e abordados, nas questões-teoria ao longo do desenvolvimento dos conteúdos, nas seções especiais e nas tarefas propostas no decorrer do livro do aluno. No tópico **Objetivos, comentários e sugestões** deste **Suplemento para o professor** há o aporte para o desenvolvimento do trabalho com esses objetos.

Sugestão de cronograma

Apresentamos, a seguir, uma proposta de cronograma para elaborar o planejamento deste volume. No entanto, cabe ao professor a decisão de como utilizar o livro didático como apoio pedagógico, seguindo critérios de seleção dos temas e levando em consideração diversos fatores, como o projeto pedagógico da escola, as condições da turma, a carga horária e a grade

MODERNA

curricular. Da maneira como está estruturada, esta coleção permite que o professor tenha autonomia pedagógica para decidir sobre quais temas abordar ou deixar de abordar, no todo ou em partes; sobre seguir a ordem apresentada ou reagrupar os temas de acordo com os critérios organizacionais escolhidos e, com isso, estabelecer as conexões entre os temas dentro desses critérios.

No caso de um cronograma bimestral, considerando que a duração do curso seja de 12 bimestres, este volume pode ser trabalhado, em sua totalidade, em 2 bimestres, ou seja, aproximadamente 16 semanas.

Sugestão de cronograma bimestral			
1º bimestre		**2º bimestre**	
1ª semana	Temas 1 e 2	9ª semana	Temas 12 e 13
2ª semana	Temas 3 e 4	10ª semana	
3ª semana	Temas 5 e 6	11ª semana	
4ª semana	Temas 7 e 8	12ª semana	Temas 14, 15 e 16
5ª semana	Temas 9, 10 e 11	13ª semana	
6ª semana		14ª semana	Tema 17
7ª semana		15ª semana	Temas 18 e 19
8ª semana		16ª semana	

O quadro a seguir apresenta os principais conceitos, as competências gerais, as competências específicas, as habilidades e os temas contemporâneos transversais trabalhados neste volume, organizados de acordo com cada tema, especificando, também, as competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, quando essas forem abordadas.

Neste quadro, por exemplo:

CG1 indica a **Competência geral 1**.

CE2MAT indica a **Competência específica 2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

CE3CNT indica a **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Tema	Principais conceitos	Habilidades	Competências gerais; competências específicas de Matemática e suas Tecnologias e de Ciências da Natureza e suas Tecnologias	Temas contemporâneos transversais
1	• Conjuntos • Subconjuntos • Conjuntos numéricos • Intervalos		• CG1 • CG4	
2	• Números reais no método braille		• CG4 • CG10	• Educação em direitos humanos
3	• Noção intuitiva de função • O conceito de função • Estudo do domínio de uma função		• CG4 • CG7 • CG10	• Educação ambiental • Educação para o consumo • Saúde

MODERNA

4	• Gráfico de uma função • Zero de uma função • Funções crescente, decrescente e constante • Taxa de variação média	• EM13MAT101 • EM13MAT404	• CG4 • CE1MAT • CE4MAT	• Educação em direitos humanos • Saúde
5	• Função afim • Gráfico de uma função afim • Zero de uma função afim	• EM13MAT101 • EM13MAT302 • EM13MAT404 • EM13MAT405 • EM13MAT501	• CG2 • CG4 • CG5 • CG7 • CE1MAT • CE3MAT • CE4MAT • CE5MAT	
6	• Função crescente e função decrescente • Estudo do sinal de uma função afim	• EM13MAT302 • EM13MAT404	• CE3MAT • CE4MAT	• Educação financeira • Vida familiar e social
7	• Proporcionalidade e função linear	• EM13MAT302 • EM13MAT401	• CE3MAT • CE4MAT	• Educação em direitos humanos • Educação financeira • Educação fiscal
8	• Modelo linear	• EM13MAT302 • EM13MAT510	• CG4 • CG5 • CE3MAT • CE5MAT	
9	• Função quadrática • Gráfico de uma função quadrática	• EM13MAT302	• CE3MAT	
10	• Coeficientes de uma função quadrática • Zeros de uma função quadrática	• EM13MAT302 • EM13MAT402 • EM13MAT502	• CG1 • CG2 • CG10 • CE3CNT • CE3MAT • CE4MAT • CE5MAT	
11	• Vértice de uma parábola • Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática • Estudo do sinal de uma função quadrática	• EM13MAT302 • EM13MAT503	• CG4 • CG5 • CE3MAT • CE5MAT	• Educação ambiental
12	• Inequações do 1º e do 2º grau	• EM13MAT302 • EM13MAT506	• CE3MAT • CE5MAT	• Ciência e tecnologia • Educação financeira
13	• Sequências numéricas • Progressão aritmética • Fórmula do termo geral de uma PA • PA e função afim • PA e função quadrática • Soma dos *n* primeiros termos de uma PA	• EM13MAT507	• CG1 • CE5MAT	
14	• Função exponencial • Gráfico de uma função exponencial	• EM13MAT304	• CG2 • CE3MAT	
15	• Função exponencial e radioatividade	• EM13MAT304	• CE1MAT • CE3MAT	• Educação ambiental • Saúde
16	• Equação e inequação exponenciais	• EM13MAT304	• CE3MAT	• Saúde
17	• Progressão geométrica • Fórmula do termo geral de uma PG • PG e função • Soma dos *n* primeiros termos de uma PG	• EM13MAT508	• CG5 • CE5MAT	• Saúde • Vida familiar e social
18	• Definição de logaritmo • Propriedades operatórias dos logaritmos		• CG10	• Saúde
19	• Função inversa e função logarítmica • Gráfico de uma função logarítmica • Equação logarítmica • Inequação logarítmica	• EM13MAT305 • EM13MAT403	• CE1MAT • CE3MAT • CE4MAT • CE1CNT • CE3CNT	• Saúde

MODERNA

Objetivos, comentários e sugestões

Nesta seção do **Suplemento para o professor**, para cada tema que compõe o livro do aluno, são apresentados objetivos, comentários e sugestões, oferecendo ao professor subsídios para seu trabalho em sala de aula. Nos comentários de cada tema, são abordados, inicialmente, os objetivos específicos e as questões relativas à organização do conteúdo. Há sugestões de condução e tarefas para a abordagem inicial, resgatando os conhecimentos prévios dos alunos. Essas sugestões estão relacionadas às páginas iniciais do tema, complementando a situação apresentada. No entanto, existem casos em que é sugerida outra abordagem inicial para o conteúdo, oferecendo a você, professor, novos elementos, de modo que seja possível escolher essas situações e adaptá-las segundo sua realidade.

Na sequência, encontram-se comentários e sugestões a respeito de algumas seções e tarefas que envolvem o tema. Por exemplo, há comentários adicionais sobre as páginas de abertura, sugestões de condução, tarefas que podem ser desenvolvidas em sala de aula e informações complementares às apresentadas no livro do aluno. Também são apresentadas demonstrações e sugestões de condução para a resolução de algumas tarefas, comentários e informações, entre outros recursos.

1 Os conjuntos

Objetivos específicos

- Compreender e consolidar o conceito de conjuntos.
- Identificar e representar conjuntos utilizando diferentes formas, como diagramas, chaves e lei de formação.
- Estabelecer relações de pertinência e continência envolvendo elementos e conjuntos.
- Identificar os elementos dos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, reconhecendo suas propriedades.

Esse tema aborda os conceitos de conjuntos, subconjuntos e operações com conjuntos, apresentando problemas contextualizados e as características dos principais conjuntos numéricos. Com isso, pretende-se realizar uma abordagem dos principais tópicos relacionados ao tema partindo de exemplos matemáticos e não matemáticos, possibilitando a identificação de aplicações para a teoria dos conjuntos tanto na área da Matemática quanto em outras áreas.

Ao iniciar esse trabalho, é importante realizar uma discussão com o objetivo de fazer um levantamento a respeito dos conhecimentos prévios dos alunos com relação ao tema. Isso pode ser feito por meio da avaliação dos significados atribuídos por eles aos termos conjuntos, elementos, conjuntos finitos, conjuntos infinitos, união, interseção, entre outros.

Durante essa etapa, solicite aos alunos que exemplifiquem, o que pode contribuir para a identificação de possíveis lacunas de aprendizagem ou erros na compreensão do significado dos principais termos relacionados a esse conteúdo. Sempre que necessário, contribua com outros exemplos para que eles possam estabelecer outras relações envolvendo o conceito de conjuntos e sua aplicabilidade nas mais variadas situações.

Páginas 10 e 11 Muito parecidos e ao mesmo tempo diferentes

- As páginas de abertura desse tema tratam da classificação biológica dos seres vivos para introduzir a noção matemática de conjuntos. A utilização de exemplos práticos de conjuntos com os quais os alunos já tenham alguma familiaridade, como deve ser o caso das famílias e espécies de animais, é importante para facilitar a transição entre uma noção intuitiva, ainda imprecisa, e um conceito formal mais bem sedimentado acerca do tema.

  Atualmente, a classificação dos seres vivos é realizada por um ramo da ciência denominado Sistemática, que se preocupa em inventariar e descrever a biodiversidade do planeta Terra. A Sistemática se divide em Taxonomia e Filogenia. A primeira é dedicada à catalogação dos seres vivos conhecidos, estabelecendo categorias e critérios convenientes para uma organização eficaz, a fim de facilitar a identificação dos seres e a comunicação entre os pesquisadores. A Filogenia, por sua vez, estuda as relações evolutivas entre os organismos, traçando vínculos de semelhança e ancestralidade entre as espécies.

  A percepção da necessidade de se realizar algum tipo de agrupamento entre os seres vivos remonta à Grécia Antiga. Aristóteles, no século IV a.C., adotava a divisão dos seres vivos em plantas e animais, sendo os animais subdivididos com base no meio em que se movimentam (água, terra ou ar). Essa classificação, ainda que extremamente básica para a visão moderna, foi o modelo que inspirou todos os sistemas de classificação posteriores.

  Com o passar dos séculos e a descoberta de novos seres vivos, em especial após os avanços da tecnologia microscópica, os quais permitiram a descoberta de seres como bactérias e protozoários, o modelo de Aristóteles se revelou insuficiente. No século XVIII, os trabalhos de Carolus Linnaeus deram origem ao chamado Sistema de Classificação de Lineu, muito similar ao atual: no Sistema de Lineu, os seres eram agrupados em três reinos (mineral, vegetal e animal) e cinco categorias (classe, ordem, gênero, espécie e variedade). Posteriormente, já no século XIX, Ernst Haeckel aper-

MODERNA

feiçoou o Sistema de Lineu, inserindo mais categorias e dando origem ao sistema que, com alguns poucos detalhes de diferença, está vigente até os dias de hoje.

O estudo das classificações dos seres vivos desperta duas observações: a primeira é a de que a definição de um conjunto depende de critérios de conveniência, ficando a cargo do pesquisador definir um conjunto de acordo com as suas necessidades práticas; a segunda é a de que, uma vez bem definido o conjunto, seus elementos, em geral, são identificados por uma regra que os seleciona com base em alguma característica distintiva (no caso da classe dos mamíferos, por exemplo, uma regra é a presença de glândulas mamárias).

Com base na classificação dos seres vivos, observa-se, ainda, a existência de diversas relações entre os conjuntos: um pode estar inserido em outro (por exemplo: espécies estão contidas em gêneros, que estão contidos em famílias, que estão contidas em ordem etc.), estabelecendo uma referência direta à relação de continência; um pode ter elementos em comum com outro (o leão é um elemento comum à classe dos mamíferos e ao conjunto dos animais carnívoros), fazendo referência à relação de pertinência; um pode não ter elemento algum em comum com outro (animais e vegetais não possuem elementos em comum), referindo-se aos conjuntos disjuntos; entre outras relações.

Conhecer o que são conjuntos e saber trabalhar com suas propriedades matemáticas são, portanto, habilidades necessárias com aplicabilidade em diversas outras áreas.

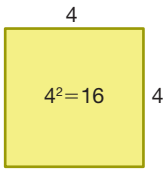
- Para desenvolver o assunto proposto nessas páginas de abertura, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta, registrando suas dúvidas e conversando com os colegas sobre esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem as conclusões para a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 12 a 14

Sala dos professores

Diante da exemplificação proveniente do conjunto dos animais vertebrados e de alguns subconjuntos importantes para a introdução do conceito de conjunto, verifique a possibilidade de conversar com o professor do componente curricular **Biologia** para que seja realizado um trabalho em conjunto a respeito das classificações dos animais. Assim, podem ser abordadas as divisões do reino animal, com destaque para os vertebrados, tratando das suas principais categorias e das espécies que podem ser destacadas nesse conjunto, a fim de contribuir para a compreensão do conceito de conjunto do ponto de vista matemático. Nesse trabalho, podem ser construídos diagramas de Venn, de modo a contribuir para que os alunos visualizem de que forma o reino animal pode ser organizado, permitindo estabelecer relação com os conceitos matemáticos correspondentes.

- No trabalho com os conceitos de conjuntos finitos e infinitos, destaque que o fato de um conjunto apresentar uma grande quantidade de elementos não implica que ele seja infinito. Para ilustrar essa ideia, podem ser construídos conjuntos com, por exemplo, a população de grandes cidades, como São Paulo, o que evidencia que, apesar de possuir muitos elementos, esse conjunto é classificado como finito. Esclareça o significado do termo "infinito" e reforce a importância de utilizá-lo corretamente, inclusive nos diálogos do cotidiano, evitando atribuir a esse conceito um significado incorreto.
- Durante as discussões sobre os exemplos apresentados na página **13**, relembre os alunos da definição de um número quadrado perfeito, que consiste em um número inteiro positivo cuja raiz quadrada é também um inteiro positivo. Solicite aos alunos a identificação de exemplos de números quadrados perfeitos. Se julgar conveniente, estabeleça uma associação entre o número quadrado perfeito, sua raiz quadrada e a área de um quadrado, cuja medida do lado corresponde à raiz quadrada do número quadrado perfeito. Por exemplo, 16 é um número quadrado perfeito que pode ser associado à área de um quadrado cujo lado mede 4 unidades, ou seja, que consiste na raiz quadrada de 16. É possível recorrer a ilustrações, conforme o exemplo a seguir.



- Na página **14**, após tratar de subconjuntos, retome o assunto do conjunto dos animais vertebrados, discutido na página **12**, e questione os alunos sobre como podemos interpretar o subconjunto dos mamíferos em relação ao conjunto dos vertebrados, destacando a relação de continência entre eles. Esse tipo de relação pode ser representado por meio de um diagrama de Venn da seguinte maneira.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Também podem ser construídos diagramas envolvendo os demais subconjuntos destacados na página **12**.

BNCC No ensino de Matemática, o uso de diferentes tipos de linguagem, como a linguagem visual e a própria linguagem matemática, auxilia os alunos na aprendizagem de determinados conteúdos, como os esquemas que caracterizam os diagramas de Venn na abordagem de conjuntos (linguagem visual) e a representação de conjuntos por sua lei de formação (linguagem matemática). Esse recurso obedece ao que dita a **Competência geral 4** da BNCC.

Página 15

- Durante a resolução da tarefa **8** da seção **Exercícios e problemas**, é interessante discutir as relações apresentadas em cada item, no contexto do enunciado. Por exemplo, no item **a**, o diagrama de Venn pode ser interpretado da seguinte maneira: todos os alunos do curso de Ciências Contábeis são também alunos de Economia, e existem alunos de carreira de Economia que não cursam Ciências Contábeis, mas cursam Administração. Seguindo esse padrão, solicite aos alunos que construam interpretações para os diagramas apresentados nos itens **c** e **d**, diferenciando-os uns dos outros.

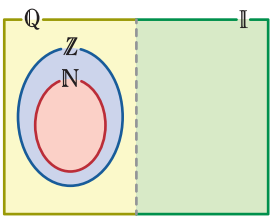
- Ao trabalhar com as tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum problema sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share** antes de apresentá-lo aos alunos conforme indicado no livro. Dessa maneira, após eles resolverem esse problema, peça que apresentem suas soluções aos colegas. Em seguida, pode-se comparar as resoluções apresentadas com a resolução presente no livro, discutindo as diferentes possibilidades de encaminhamento para um mesmo problema. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 16 a 19

- Antes de iniciar as discussões a respeito dos conjuntos numéricos, proponha aos alunos alguns questionamentos, visando identificar seus conhecimentos prévios em relação a esse conteúdo. Nesse sentido, podem ser abordadas as situações descritas utilizando os diferentes conjuntos, as semelhanças e diferenças entre eles, além de outras questões que julgar relevantes.
- Na abordagem do tópico **Conjunto dos números naturais e inteiros**, na página **16**, reforce o significado do termo "correspondência biunívoca", relacionando-o ao processo de contagem, no qual associamos cada elemento de certo conjunto a um número natural de forma única, esclarecendo o significado desse termo no contexto matemático.
- Durante os trabalhos com os conjuntos numéricos, é importante falar a respeito do fechamento das operações em cada conjunto. Por exemplo, o resultado da adição de números naturais sempre será um natural, mas a subtração pode gerar números que não pertencem a esse conjunto. É importante exemplificar cada uma dessas relações para que os alunos consigam atribuir significado ao "fechamento de uma operação" em cada conjunto.
- Considerando os subconjuntos importantes dos números racionais – racionais não nulos $(\mathbb{Q}^*)$, racionais não negativos $(\mathbb{Q}_+)$, racionais positivos $(\mathbb{Q}_+^*)$, racionais não positivos $(\mathbb{Q}_-)$ e racionais negativos $(\mathbb{Q}_-^*)$, solicite aos alunos a identificação de exemplos de números que pertençam a cada um deles, de modo a verificar sua compreensão em relação ao significado de cada uma das descrições e notações adotadas para esses subconjuntos. Faça um levantamento de, ao menos, três elementos pertencentes a cada subconjunto, propondo questionamentos que permitam a análise da compreensão dos alunos em relação à estrutura de cada um desses subconjuntos.
- Destaque a diferença entre os termos "fração irredutível" e "fração geratriz" para diferenciar os dois conceitos, identificando que as frações geratrizes são exclusivas para a descrição de dízimas periódicas, enquanto as irredutíveis podem ser empregadas na descrição das mais variadas quantidades numéricas.

- Durante o trabalho com o tópico **Conjunto dos números irracionais**, na página **18**, utilize a calculadora como um recurso de apoio para a verificação e a comparação de quantidades numéricas. Uma sugestão é a utilização do aplicativo Calculadora presente nos *smartphones*, complementando com a comparação entre os recursos presentes nas calculadoras comuns e nas calculadoras científicas, as quais podem ser acessadas tanto nos *smartphones* quanto nos computadores, além das versões físicas que podem ser levadas para a sala de aula.

- No tópico **Conjunto dos números reais** $(\mathbb{R})$, se julgar conveniente, enfatize a importância da representação adequada das relações entre os conjuntos numéricos por meio de diagramas, como o apresentado a seguir, destacando que o conjunto dos números irracionais consiste na região do conjunto dos números reais que está "fora" do conjunto dos números racionais, enfatizando que não existe número real que seja racional e irracional ao mesmo tempo, isto é, os dois conjuntos são disjuntos entre si.

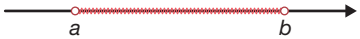


RONALDO INÁCIO

MODERNA

BNCC A abordagem histórica apresentada na introdução de um novo conceito matemático, como a contextualização dos principais fatos que levaram ao surgimento dos conjuntos numéricos, mostra-se eficaz no sentido de despertar a curiosidade dos alunos quanto aos acontecimentos que resultaram em determinada teoria, conforme sugere a **Competência geral 1** da BNCC.

- Durante o estudo do tópico **Intervalos**, na página **18**, faça uma abordagem que inclua a representação dos intervalos de números reais na reta real, conforme as referências a seguir.

	$a < x < b$	$]a, b[$
	$a \leqslant x \leqslant b$	$[a, b]$
	$a < x \leqslant b$	$]a, b]$
	$a < x$	$]a, +\infty[$
	$x \leqslant b$	$]-\infty, b]$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Nesse trabalho, é possível fazer uma associação com a geometria plana, relacionando os intervalos limitados a segmentos de reta e os ilimitados a semirretas ou retas, considerando a possibilidade de representação na reta real.

- Ainda em relação aos intervalos, apresente aos alunos outras notações comumente utilizadas para a sua representação. Por exemplo, na descrição do intervalo aberto de extremos a e b, podemos usar tanto a notação $]a, b[$ quanto (a, b). Apresente alguns exemplos da utilização dos parênteses na descrição desses intervalos, com o intuito de que os alunos se familiarizem com esses tipos de notação. Destaque a importância do reconhecimento das diferentes notações, principalmente em situações que envolvem a participação em avaliações de vestibulares ou Exame Nacional do Ensino Médio (Enem).

- Ao final do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite, se possível, que eles citem algumas das vantagens do estudo envolvendo os conceitos de conjuntos, principalmente em relação aos conjuntos numéricos e suas aplicações nas mais variadas situações do cotidiano. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

2 Números reais no método braille

Objetivos específicos

- Resolver problemas envolvendo a linguagem matemática e o sistema braille.
- Identificar padrões e regularidades na representação numérica utilizando o sistema braille.

Nesse tema, pretende-se relacionar e aplicar conceitos matemáticos na interpretação de uma situação associada aos componentes curriculares **Matemática** e **Língua portuguesa**, por meio do estudo do método braille, o qual se constitui como um sistema tátil utilizado por pessoas com deficiência visual para a escrita e a leitura. Nesse sentido, é importante realizar questionamentos a fim de verificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ e $\mathbb{R}$, principalmente, em busca das soluções das situações propostas.

Páginas 20 e 21 **A inclusão na ponta do dedo**

- Essa seção apresenta uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **Língua portuguesa**, devido à associação entre os elementos de diferentes conjuntos numéricos ao estudo das diferentes formas de comunicação, com enfoque ao método braille e seu emprego na representação numérica. Números usualmente representados por algarismos indo-arábicos são, nessa abordagem, representados por meio de uma célula com seis pontos, alguns em alto relevo, caracterizando o algarismo que se deseja comunicar.

Sala dos professores

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho em associação com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Língua portuguesa**, visando enriquecer as discussões a respeito das diferentes linguagens utilizadas para a comunicação, como as linguagens oral e escrita, com destaque ao método braille. Podem ser discutidas as características do método tanto para a representação das letras quanto dos algarismos, observando as vantagens e desvantagens desse sistema de escrita.

Nesse trabalho, solicite antecipadamente aos alunos que levem para a sala de aula embalagens de produtos ou livros impressos em braille. Deixe que manipulem esses materiais e solicite-lhes que tentem verificar quais letras, algarismos ou sinais de pontuação estão representados.

- Durante as discussões sobre a representação numérica em braille, se possível, leve para a sala de aula alguns instrumentos matemáticos utilizados por pessoas com deficiência visual, como o ábaco ou as réguas especiais,

EDITORIA

e proponha uma comparação entre tais instrumentos e os já conhecidos pelos alunos, no sentido de evidenciar o fato de que as pessoas com deficiência visual dispõem de instrumentos que permitem a realização de todo e qualquer tipo de atividade.

- Verifique a possibilidade de convidar uma pessoa com deficiência visual ou um profissional da área da saúde para ministrar uma palestra aos alunos. Nessa proposta, podem ser abordadas questões relacionadas à vida cotidiana, acessibilidade, mercado de trabalho, entre outros pontos importantes quanto à inclusão de pessoas com deficiência visual. Esse tipo de atividade permite o esclarecimento de dúvidas relacionadas ao assunto e contribui para a eliminação de algum preconceito que, porventura, possa existir.
- Durante esses trabalhos, os quais envolvem reflexões a respeito da importância da inclusão de pessoas com deficiência visual, especialmente no item **B** do **Ser consciente**, aproveite a oportunidade para conversar com os alunos sobre a importância de ter harmonia e empatia no convívio social, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício para o crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O trabalho com essas páginas permite o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Educação em direitos humanos**, uma vez que leva os alunos a refletir a respeito da inclusão de pessoas com deficiência nas mais variadas esferas da sociedade, observando a importância do método braille para o acesso das pessoas com deficiência visual à comunicação escrita.

Além disso, ao tratar do método braille, é possível abordar os diferentes tipos de linguagem, levando os alunos a compreender a vasta gama de possibilidades utilizadas na comunicação e na expressão, abordando as **Competências gerais 4** e **10** da BNCC.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem as conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

3 Noção intuitiva de função

Objetivos específicos

- Compreender o conceito de função, utilizando corretamente as notações associadas.
- Reconhecer o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de uma função.
- Interpretar diferentes representações das funções, como os diagramas de flechas e as leis de formação.
- Realizar o estudo do domínio de uma função, recorrendo, para isso, aos conceitos de união e interseção de conjuntos.
- Utilizar o conceito de função como base para a interpretação e a resolução de problemas.

Esse tema trabalha com a introdução ao estudo das funções, apresentando, inicialmente, a noção intuitiva e estabelecendo uma base consistente para a definição formal do conceito.

Por meio da interpretação de diagramas de flechas, os alunos são levados a identificar, entre as situações apresentadas, quais caracterizam uma função, realizando, posteriormente, o estudo de suas características para a identificação do seu domínio, seu contradomínio e seu conjunto imagem. Para esse estudo, são essenciais os conceitos relacionados à Teoria dos Conjuntos, já vistos pelos alunos em outras etapas do ensino e que compõem a definição de função, pois são uma associação particular entre elementos de conjuntos.

Página 22 O lixo nosso de cada dia

- A página de abertura apresenta uma possível relação entre os componentes curriculares **Matemática**, **Geografia** e **Química**, por tratar do estudo dos resíduos sólidos produzidos em determinada região do Brasil. A partir desse contexto, avalie os conhecimentos prévios dos alunos no que diz respeito aos conceitos de variável dependente e variável independente, identificando qual delas se relaciona à situação proposta e explorando a equação apresentada.

Sala dos professores

Avalie a possibilidade de propor um trabalho em associação com os professores dos componentes curriculares **Geografia** e **Química**, visando enriquecer as discussões sobre a produção e a coleta de resíduos sólidos no país, abordando também os impactos ambientais causados pelo descarte de resíduos em locais inadequados. Assim, podem ser discutidas questões envolvendo a produção de lixo em diferentes re-

MODERNA

giões do Brasil, com atenção especial à região onde os alunos residem. Além disso, realize uma pesquisa prévia com o objetivo de obter informações e promover uma discussão a respeito da destinação dos resíduos coletados, tomando por base os diferentes dados fornecidos, por exemplo, pelo *site* do IBGE ou da Associação Brasileira de Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe). Disponíveis em: <https://sidra.ibge.gov.br/home/ipp/brasil> e <https://abrelpe.org.br/panorama/>. Acessos em: 17 ago. 2020.

BNCC O trabalho com essa página permite o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Educação ambiental** e **Educação para o consumo**, permitindo que os alunos reflitam a respeito da importância na adoção de atitudes que promovam o consumo consciente de modo a preservar a natureza, por exemplo, com a redução na quantidade de resíduos sólidos produzidos, além da necessidade de adotar a coleta seletiva como uma estratégia importante para a redução do descarte de materiais em locais inadequados.

No destaque **Ser consciente**, ao solicitar que os alunos defendam diferentes pontos de vista, tomando como base informações apresentadas em fontes confiáveis que tratem de medidas alternativas adotadas para a melhoria da qualidade dos serviços relacionados à coleta e ao descarte de resíduos sólidos no Brasil, promovendo a consciência socioambiental, abordam-se as **Competências gerais 7** e **10** da BNCC.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos estudados para que, posteriormente, apresentem suas conclusões aos colegas. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 23 e 24

- O exemplo **1** apresenta a relação existente entre a quantidade de litros de biodiesel produzida a partir de certa quantidade de toneladas de mamona. Essa pode ser uma oportunidade de se realizar um trabalho em conjunto com os professores dos componentes curriculares **Geografia** e **Química**. Converse com os alunos sobre a necessidade de investir cada vez mais em fontes renováveis de energia, apontando as vantagens socioambientais que levam o ser humano consciente a buscar esse tipo de recurso. Informações sobre esses assuntos podem ser encontradas no *site* da Petrobras. Disponível em: <https://petrobras.com.br/pt/>. Acesso em: 17 ago. 2020.

Página 25

- Se julgar conveniente, após a resolução da tarefa **3**, solicite aos alunos que determinem qual seria a quantia depositada por Joana caso ela recebesse outros valores de comissão e qual deveria ser o valor recebido de comissão para conseguir outros valores de depósito. Em seguida, peça que organizem as informações obtidas em um quadro, conforme apresentado no exemplo **3**, da página **24**.
- Caso os alunos tenham dificuldades na resolução do item **a** da tarefa **4** da seção **Exercícios e problemas**, lembre-os de que um hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros. Dessa maneira, eles poderão perceber que a medida do lado do hexágono corresponde à medida do raio da circunferência, ou seja, $\frac{x}{2}$.

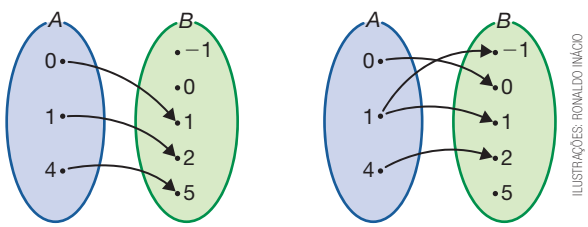
- Ao trabalhar com as tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Nesse sentido, após os alunos resolverem esse problema, pode ser realizada a apresentação das soluções obtidas e a posterior discussão a respeito das soluções apresentadas. Mais informações sobre essa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 26

- Durante as discussões a respeito do conceito de função, apresente aos alunos alguns exemplos de associações entre conjuntos que não podem ser classificadas como funções, de modo que eles compreendam e reconheçam os critérios necessários para sua definição.

  Como sugestão para essa discussão, considere os conjuntos $A = \{0, 1, 4\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$. Com base nesses conjuntos, temos as regras de associação e os diagramas correspondentes apresentados a seguir.

a) $y = x + 1$ b) $y^2 = x$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Nesses exemplos, x pertence ao conjunto A e y pertence a B. Analisando os dois exemplos, é possível verificar que a associação presente no item **a** pode ser classificada como função, pois todos os elementos do conjunto A estão associados a um único elemento de

EDITORIA

B. Por outro lado, as associações apresentadas no item **b** não correspondem a uma função, porque temos um elemento do conjunto *A* que está associado a dois elementos de *B*. É importante efetuar comparações entre exemplos que representam uma função e exemplos que não representam uma função, de modo que os alunos possam identificar as semelhanças e diferenças entre esses dois casos, partindo, principalmente, das representações em diagramas e construindo as associações entre os elementos dos dois conjuntos envolvidos com base nas regras estabelecidas em cada situação.

BNCC O uso de diferentes tipos de linguagens, como a linguagem visual e a própria linguagem matemática, auxilia os alunos na aprendizagem de determinados conteúdos, como os esquemas que caracterizam os diagramas de flechas (diagramas de Venn) no ensino de Funções (linguagem visual) e a representação dessas mesmas funções por meio de sua lei de formação (linguagem matemática). Esse recurso obedece à **Competência geral 4** da BNCC.

Página 27

BNCC O contexto abordado na tarefa **11** permite estabelecer conexão com o tema contemporâneo transversal **Saúde**. Nesse sentido, promova um debate com os alunos a respeito dos riscos causados pela prática do tabagismo. Enfatize que o consumo do cigarro traz consequências não apenas à pessoa que fuma, mas também àquelas que estão em seu convívio. Os fumantes passivos, ou seja, aqueles que não consomem diretamente o tabaco, mas convivem com pessoas que fazem uso dessa substância, também correm o risco de desenvolver doenças cardiovasculares e respiratórias, incluindo o câncer de pulmão. Com o intuito de resguardar a saúde dos não fumantes, em 2011 foi aprovada a lei nº 12.546, conhecida como Lei Antifumo, que impede o consumo de cigarros e outros derivados em ambientes públicos fechados.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Em debate, solicite, se possível, que eles comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos intuitivos de função, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

4 Gráfico de uma função

Objetivos específicos

- Interpretar gráficos de funções.
- Analisar o comportamento das funções, identificando os intervalos em que elas são crescentes, decrescentes ou constantes.
- Calcular e interpretar a taxa de variação média de funções.
- Empregar o conceito de função para a interpretação e resolução de problemas, principalmente a partir do estudo de seus gráficos.

Esse tema trabalha com o estudo do gráfico de funções partindo de conceitos iniciais como a definição e a identificação de domínio, contradomínio e imagem. Assim, a proposta é estudar as características apresentadas pelos gráficos de funções e como essas representações podem contribuir, entre outros, para a identificação de intervalos de crescimento e decrescimento em seu domínio, possibilitando aplicar esse recurso na resolução de problemas provenientes de contextos diversos. Além disso, discute-se a respeito da taxa de variação média, aplicada em situações que envolvem, por exemplo, o estudo da velocidade média.

BNCC O trabalho com os conteúdos propostos permite o desenvolvimento da **Competência geral 4**, em razão do uso da linguagem visual por meio de gráficos, possibilitando que os alunos estabeleçam uma relação entre as linguagens matemática e visual, contribuindo para a compreensão do conceito de função. Além disso, o desenvolvimento dessa competência é incentivado por meio dos exercícios e problemas propostos, que exigem a compreensão das diversas representações adotadas no estudo de funções, principalmente no que se refere às representações algébricas e gráficas correspondentes.

Páginas 30 e 31 **O homem mais rápido do mundo**

- Essas páginas apresentam uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **Educação Física**, por analisar, do ponto de vista matemático, situações envolvendo o atletismo, mais especificamente, as conquistas do atleta Usain Bolt. Esse tipo de abordagem possibilita que os alunos entrem em contato com o

MODERNA

conhecimento científico por meio de ferramentas que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Se achar conveniente, verifique com o professor de **Educação Física** a possibilidade de conversar previamente com os alunos a respeito das características do atletismo, principalmente das provas de 100 e 200 metros rasos, para que relacionem as ações realizadas pelo atleta com as informações presentes no gráfico.

BNCC O trabalho com essas páginas permite o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Educação em direitos humanos** e **Saúde**, contribuindo para a percepção da importância da prática esportiva para a manutenção da saúde e, principalmente, possibilitando reflexões a respeito de como o esporte pode contribuir para a superação dos limites individuais, gerando conquistas pessoais, além de contribuir para a superação de desigualdades e preconceitos, principalmente em relação às origens e à renda familiar.

- Após o trabalho com as questões propostas, se julgar conveniente, peça aos alunos que, em grupos, pesquisem o assunto apresentado em outras fontes e comparem as informações, analisando criticamente os resultados obtidos.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem as conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 32 e 33

- Para introduzir o conceito de gráfico de uma função, inicialmente, peça aos alunos que pesquisem e selecionem alguns gráficos em jornais, revistas e na internet. Depois, solicite-lhes que verifiquem se esses gráficos representam funções e, em caso positivo, determinem quais são as variáveis envolvidas. Esse trabalho pode ser realizado com os alunos organizados em duplas ou em pequenos grupos.

- Para auxiliar na resolução das tarefas da seção **Exercícios e problemas**, reproduza o plano cartesiano disponível nas páginas para reprodução deste **Suplemento para o professor** e entregue aos alunos, orientando-os a indicar as coordenadas de pontos de algumas tarefas.

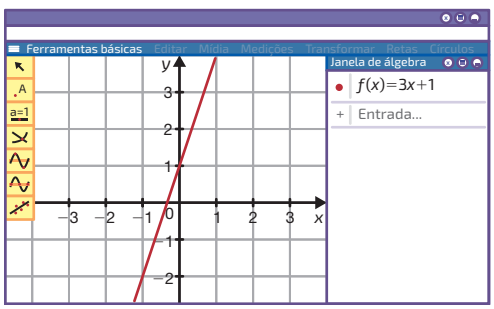
Página 35 Acessando tecnologias

- Para o desenvolvimento do trabalho com essa seção, é possível fazer o *download* do *software* de geometria dinâmica GeoGebra ou usar a versão *online* dele. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 8 jul. 2020.

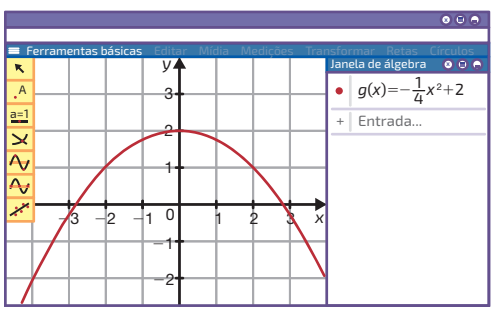
- O trabalho pode ser desenvolvido com a metodologia ativa **Sorting strips**. Para isso, utilize os passos apresentados na seção ou até mesmo proponha outra construção. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.
- Durante a resolução do item **1** da seção **Agora é com você!**, esclareça que o *software* utilizado identifica uma aproximação do zero da função para o inteiro, décimo ou centésimo mais próximo, conforme as configurações estabelecidas pelo fabricante.

Agora é com você! Resoluções

1 a) No campo **Entrada**, digite $f(x) = 3x + 1$ e pressione a tecla **Enter**. Neste caso, obtemos:



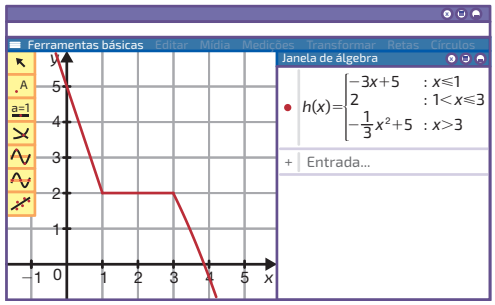
b) No campo **Entrada**, digite $g(x) = -1/4x^2 + 2$ e pressione a tecla **Enter**. Neste caso, obtemos:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

MODERNA

c) No campo **Entrada**, digite $h(x) = se\left(x <= 1, -3x + 5, se\left(1 < x <= 3, 2, se\left(x > 3, -(1/3)x\text{^}2 + 5\right)\right)\right)$ e pressione a tecla **Enter**. Neste caso, obtemos:



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

2 Para cada um dos itens da questão **1**, selecione a ferramenta **Raízes** e clique sobre o gráfico construído.

- O zero da função *f*, com aproximação de duas casas decimais, é $x = -0{,}33$.
- Os zeros da função *g*, com aproximação de duas casas decimais, são $x = -2{,}83$ e $x = 2{,}83$.
- O zero da função *h*, com aproximação de duas casas decimais, é $x = 3{,}87$.

Páginas 36 e 37

BNCC As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas** contribuem para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT404**, permitindo que os alunos analisem funções definidas por uma ou mais sentenças, em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínio, imagem, crescimento e decrescimento, convertendo essas representações uma para a outra, com e sem o auxílio de *softwares* de geometria dinâmica. Além disso, essa seção envolve a **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, por compreender e utilizar diferentes registros de representação matemática na busca de soluções de problemas.

- Ao propor o trabalho com a seção **Ser consciente** da página **36**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 39

BNCC O trabalho com a seção **Exercícios e problemas** permite o desenvolvimento da **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, além da habilidade **EM13MAT101**, por exigir dos alunos a interpretação de situações provenientes de contextos diversos e ligadas à realidade, relacionando a linguagem matemática com a representação gráfica, contribuindo para a compreensão de relações que podem ser estabelecidas entre grandezas, com base no conceito de função e das taxas de variação.

5 Função afim

Objetivos específicos

- Estabelecer relações entre grandezas por meio de uma função afim.
- Calcular o valor numérico de uma função afim.
- Resolver problemas envolvendo função afim.
- Interpretar e esboçar o gráfico de uma função afim.
- Determinar o zero de uma função afim e compreender o seu significado.
- Compreender a relação entre os coeficientes de uma função afim e o seu gráfico.
- Conhecer e saber identificar os casos especiais de função afim: função constante, função linear e função identidade.

O tema trata de funções afins. Nele, estudam-se tanto a representação algébrica quanto a representação gráfica no plano cartesiano desse tipo de função, identificando suas características em ambos os casos e incentivando a conversão de um registro em outro.

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca de conceitos de funções afins, proponha-lhes o seguinte problema.

Um taxista cobra R$ 5,00 de bandeira (taxa fixa) mais R$ 0,75 por quilômetro rodado. Caso um passageiro deseje saber quanto terá de pagar pela viagem após *x* quilômetros, que função matemática ele pode utilizar para obter o valor exato? Representando essa função em um gráfico, que formato esse gráfico terá?

Resolução e comentários

Sendo *f* a função que indica o preço da viagem, em reais, em relação à variável *x*, que indica a quantidade de quilômetros rodados, segue que $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = 0{,}75x + 5$. O gráfico da função é uma reta que corta o eixo *y* no ponto $(0, 5)$.

MODERNA

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 40 Lâmpadas de LED: acenda essa ideia

- A página de abertura desse tema associa, de maneira intuitiva, o conceito de função afim ao consumo de energia elétrica, propondo uma análise da relação estabelecida entre as grandezas "tempo" e "consumo de energia elétrica" de diferentes modelos de lâmpada.

Resoluções e comentários

B Inicialmente, calculamos o consumo referente a cada dia de uso, considerando o período de funcionamento de 8 horas por dia.

- incandescente: $8 \cdot 0{,}060 = 0{,}48$
- fluorescente: $8 \cdot 0{,}015 = 0{,}12$
- LED: $8 \cdot 0{,}010 = 0{,}08$

Por fim, calculamos o consumo referente ao mês com 30 dias.

- incandescente: $30 \cdot 0{,}48 = 14{,}4$
- fluorescente: $30 \cdot 0{,}12 = 3{,}6$
- LED: $30 \cdot 0{,}08 = 2{,}4$

Portanto, o consumo de energia elétrica de uma lâmpada do tipo incandescente será 14,4 kWh, do tipo fluorescente será 3,6 kWh, e do tipo LED será 2,4 kWh.

Sala dos professores

Para complementar as tarefas dessa página, promova um trabalho em conjunto com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente com os professores dos componentes curriculares **Física** e **Química**. Uma sugestão é abordar, com mais profundidade, o significado das unidades de medida kW e kWh. Outra possibilidade é apresentar aos alunos mais detalhes sobre a constituição e o funcionamento de lâmpadas incandescentes, fluorescentes e LED, explicando por que ocorrem as diferenças entre os desempenhos de cada uma delas.

BNCC O conteúdo deste tema contempla a habilidade **EM13MAT302** da BNCC ao trabalhar com a resolução de problemas que envolvem funções afins e equações lineares, as quais são representadas tanto em seus registros algébricos quanto em sua forma gráfica no plano cartesiano, incentivando a compreensão, a interpretação e a identificação, por parte dos alunos, de certas propriedades presentes em ambos os tipos de registro, realizando as conversões entre eles.

Ao fazer uso de procedimentos específicos para resolver problemas relacionados a funções afins, os alunos utilizam conceitos e estratégias matemáticas na interpretação e na construção de modelos, analisando os resultados obtidos de maneira crítica para se chegar a um resultado plausível, conforme orienta a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Além disso, ao incentivar os alunos a dizer se possuem o hábito de manter as lâmpadas acesas desnecessariamente em cômodos desocupados, aborda-se a **Competência geral 7** da BNCC.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Solicite aos alunos que se organizem em duplas para traçar representações gráficas do consumo de energia elétrica em função do tempo de utilização para cada uma das espécies de lâmpadas, discutindo sobre as interpretações dos gráficos produzidos. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 41 a 43

- Após introduzir os conceitos abordados nessas páginas, reproduza a malha quadriculada que se encontra nas páginas para reprodução deste **Suplemento para o professor** e entregue-a aos alunos. Peça que esbocem o gráfico de algumas funções afins, identificando, em cada caso, o zero da função e o coeficiente *b*. Questione-os sobre a variação da inclinação ao alterarmos o valor do coeficiente *a* da função, levando-os a perceber a influência desse coeficiente no gráfico da função.

Páginas 44 e 45 Resolvendo por etapas

BNCC Na seção **Resolvendo por etapas**, os alunos são levados a interpretar o sistema de tributação aplicado no Regime Geral de Previdência Social (RGPS) por meio da análise das representações algébricas e gráficas da função que define esse regime, contemplando, assim, aspectos das habilidades **EM13MAT101** e **EM13MAT404**. Desse modo, eles aplicam os conhecimentos adquiridos em ambiente escolar na interpretação de situações que fazem parte do cotidiano de grande parte da população, despertando a curiosidade intelectual e chamando a atenção para a aplicabilidade de conceitos teóricos em situações comuns de diferentes áreas, contribuindo, assim, para uma formação generalizada, conforme orientam a **Competência geral 2** da BNCC e as **Competências específicas 1** e **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

MODERNA

Agora é você quem resolve! Resolução

2 Se a estrutura de cálculo da alíquota se mantiver conforme apresentado nessas páginas, ou seja, se puder ser descrita por uma função definida por partes, então o plano apresentado é válido para resolver o problema, desde que consideradas as adequações necessárias. A resposta depende do ano vigente.

- No trabalho com a seção **Resolvendo por etapas** é possível recorrer à metodologia ativa **Design thinking**. Sugira aos alunos que realizem a tarefa em grupos, promovendo, assim, a colaboração entre os colegas e o desenvolvimento da criatividade, no sentido de encontrar uma solução adequada ao problema proposto. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 46 e 47

BNCC Na tarefa 7, os alunos são levados a representar, no plano cartesiano, alguns pontos cujas coordenadas estão indicadas em um quadro. Posteriormente, eles devem identificar um padrão existente entre essas coordenadas e determinar a expressão algébrica que as relacione, conforme orienta a habilidade **EM13MAT501** e a **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias.**

Páginas 48 e 49 Acessando tecnologias

- O trabalho com a seção **Acessando tecnologias** pode ser realizado no laboratório de informática da escola. Para isso, certifique-se de que todos os computadores possuam o *software* VisualG instalado, por meio do qual a tarefa será realizada. O *download* pode ser feito gratuitamente no *site* a seguir. Disponível em: <http://visualg3.com.br>. Acesso em: 18 ago. 2020.

  A fim de que os alunos trabalhem com o programa apresentado, oriente-os a digitá-lo no *software* e atribuir valores às variáveis definidas.

BNCC O trabalho com a seção dessas páginas contempla a habilidade **EM13MAT405**, tendo em vista que requer dos alunos a implementação de algoritmos escritos em linguagem matemática utilizando, para isso, conceitos iniciais de linguagem de programação.

Ao propor o desenvolvimento de um trabalho que envolva o uso do *software* VisualG para a determinação do zero de uma função afim, dados os coeficientes a e b, com $a \neq 0$, os alunos são levados a compreender e utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação, além de diferentes tipos de linguagem, nesse caso, a digital, para partilhar informações e divulgar conhecimentos, conforme preveem as **Competências gerais 4** e **5** da BNCC.

- Ao trabalhar a construção de um algoritmo com o auxílio do VisualG para criar o programa indicado, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Sorting strips**. Organize os alunos em grupos e lhes apresente o passo a passo, em instruções embaralhadas, para que eles as reorganizem e consigam concluir a tarefa. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Saber manipular linguagens próprias da informática, entendendo o funcionamento lógico de computadores e *softwares*, é uma habilidade cada vez mais necessária no mundo contemporâneo. As tarefas da seção **Acessando tecnologias** propiciam o exercício dessa habilidade. Nelas, a construção de algoritmos de funcionalidade prática e, posteriormente, a programação em VisualG desses algoritmos, utilizando a organização apropriada e os conectivos lógicos necessários desenvolvem nos alunos o raciocínio lógico e a capacidade de abordar um mesmo problema por mais de uma perspectiva, enxergando soluções múltiplas, e não excludentes, e de apresentar soluções válidas. O pensamento computacional é incrementado ao torná-los aptos a traduzir uma situação dada em outras linguagens, avaliando as mais convenientes em cada caso. No exemplo, a construção de um programa que indique o valor de $f(x)$, dada a lei de formação da função e o próprio valor de x, apresenta, em sua essência, os rudimentos fundamentais do pensamento computacional que podem vir a ser aplicados em situações muito mais complexas e impactantes no futuro.

Agora é com você! Resoluções

1 A informação que deve ser inserida é o número real b, que representa o coeficiente da função afim que não está multiplicado pela variável dependente.

2 Cálculo de $f(x)$

```
1 Algoritmo "calcular_valor_de_f"
2 var a, b, x, f: real
3 Inicio
4 escreva("Digite o coeficiente a da função: ")
5 leia(a)
6 escreva("Digite o coeficiente b da função: ")
```

MODERNA

```
 7 leia(b)
 8 escreva("Digite o valor de x: ")
 9 leia(x)
10 f <- a*x+b
11 escreva("O valor de f(x) é: ", f)
12 Fimalgoritmo
```

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Faça um resumo dos principais tópicos do tema e peça que indiquem fenômenos diversos que se comportem de modo linear ou em conformidade com alguma função afim. Solicite, ainda, que comentem as aprendizagens que acharam mais relevantes e interessantes a respeito das funções afins. Mais informações sobre essa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

6 Função afim crescente e função afim decrescente

Objetivos específicos

- Analisar uma função afim quanto ao crescimento ou decrescimento.
- Estudar o sinal de uma função afim.
- Relacionar o crescimento ou decrescimento de funções afins, ou a presença de zeros, com a solução de problemas provenientes de contextos diversos.

Os conceitos trabalhados nesse tema complementam os estudos realizados anteriormente, dando destaque ao crescimento e decrescimento de funções afins e o estudo de seu sinal. Essas propriedades são essenciais na descrição de fenômenos de natureza linear, como é o caso da relação estabelecida entre o valor a ser pago e a quantidade de unidades adquirida de um mesmo produto, por exemplo.

BNCC As tarefas propostas nas seções **Exercícios e problemas** deste tema possibilitam o desenvolvimento de aspectos das habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT404** e das **Competências específicas 3** e **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, uma vez que sugerem a construção de modelos empregando funções afins para resolver problemas e a análise de funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações gráfica e algébrica identificando domínio, imagem, crescimento e decrescimento, convertendo representações algébricas em representações gráficas. O uso de diferentes tipos de linguagem, como a linguagem visual e a própria linguagem matemática, é um recurso útil para auxiliar os alunos na aprendizagem de determinados conteúdos.

Páginas 50 e 51 Uma gangorra de preços

- Essa seção apresenta uma aplicação de conceitos matemáticos relacionados a outra área do conhecimento, nesse caso, a Economia. Antes de iniciar o trabalho com o assunto da seção, converse com os alunos a respeito dos hábitos de consumo deles e de suas famílias, questionando-os como selecionam os produtos a serem adquiridos, se eles têm o costume de realizar pesquisas de preços ou se sempre optam por uma loja em particular, entre outras questões que julgar convenientes no momento.
- Oriente-os a realizar o estudo do texto e a responder às questões propostas durante um tempo preestabelecido (em torno de 20 minutos). Após esse momento, proponha uma discussão com toda a turma a respeito das questões, aproveitando a questão **C** para retomar as características das funções afins e questionando os alunos a respeito das estratégias empregadas para identificar a lei de formação das funções solicitadas. Se julgar conveniente, proponha a construção, em um mesmo plano cartesiano, dos esboços dos gráficos correspondentes a cada uma das funções para que os alunos possam compará-las entre si e com os gráficos ilustrados no texto, interpretando o fenômeno em estudo.
- Para avaliar os alunos em relação à compreensão do assunto exposto, organize-os em duplas e peça que façam uma pesquisa para determinar quais são os fatores que podem afetar a quantidade demandada e a quantidade ofertada de algum produto. Nessa pesquisa, algumas das possíveis respostas que podem ser obtidas em relação à quantidade demandada dizem respeito a alterações na renda do consumidor, em seus hábitos e gostos, além de preços de outros bens. Com relação à quantidade ofertada, algumas possibilidades são custos dos fatores de produção (matérias-primas, salários etc.), preço do bem, alterações tecnológicas e aumento do número de empresas no mercado.

BNCC Como o assunto em discussão está relacionado com finanças, influenciando diretamente no cotidiano das pessoas, essa seção contribui para o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Educação financeira** e **Vida familiar e social**, pois possibilita a realização de discussões acerca da importância de estar atento aos seus

MODERNA

direitos do consumidor, observando as variações dos preços e as possíveis causas, com o objetivo de usar o dinheiro de modo consciente para a manutenção das necessidades básicas suas e de sua família, garantindo o exercício de seus direitos de maneira efetiva.

Resolução e comentários

c)

- $\begin{cases} f(45) = 65 \\ f(35) = 85 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 45a + b = 65 \\ 35a + b = 85 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -2$ e $b = 155$

Assim, a lei de formação da função f é $f(x) = -2x + 155$.

- $\begin{cases} g(45) = 120 \\ g(35) = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 45a + b = 120 \\ 35a + b = 90 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 3$ e $b = -15$

Assim, a lei de formação da função g é $g(x) = 3x - 15$.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizarem o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem as conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 53

- A tarefa **5** da seção **Exercícios e problemas** discute a respeito do emprego do bagaço da cana-de-açúcar para a geração de energia elétrica. Aproveite o tema abordado para discutir a geração de energia elétrica a partir de fontes renováveis, com destaque para a biomassa. Comente que as vantagens desse tipo de fonte de energia estão no fato de ser de baixo custo, utilizar tecnologia nacional, entre outras.

Sugestão de avaliação

A fim de analisar a compreensão dos alunos a respeito dos conteúdos trabalhados até o momento, sugira que algumas das tarefas propostas nessa página sejam resolvidas na lousa. Além disso, é importante desenvolver neles a capacidade de avaliar os próprios processos de aprendizagem. Para isso, proponha algumas questões como:

- Estudei os conteúdos trabalhados na aula de função afim crescente e função afim decrescente?
- Participei das discussões propostas?
- Relacionei os conteúdos propostos nesse tema com os estudados anteriormente?

Com base nessas questões, os alunos podem refletir sobre os conhecimentos adquiridos. Mais informações sobre avaliações podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 55

- Ao final do trabalho com este tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Em debate, solicite, se possível, que eles comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos envolvendo função afim crescente e função afim decrescente, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

7 Proporcionalidade e função linear

Objetivos específicos

- Identificar grandezas diretamente proporcionais.
- Relacionar o conceito de proporcionalidade ao estudo das funções lineares.
- Empregar funções lineares na interpretação e na resolução de problemas.

Nesse tema, são discutidas as relações existentes entre o conceito de proporção e as funções lineares, evidenciando a possibilidade de relacionar grandezas diretamente proporcionais utilizando tais funções, as quais podem ser entendidas como um caso particular de função afim. Assim, os alunos devem tomar como base seus conhecimentos a respeito das funções afins e dos tipos de grandeza para compreender as relações estabelecidas.

Antes de iniciar os estudos dos conteúdos expostos, proponha um debate sobre as grandezas diretamente e inversamente proporcionais, buscando investigar os conhecimentos prévios dos alunos a respeito desses conceitos. Durante essa discussão, incentive-os a apresentar exemplos de grandezas proporcionais e não proporcionais. Além disso, ao citar exemplos de grandezas proporcionais, peça que as classifiquem como grandezas direta ou inversamente proporcionais.

MODERNA

Páginas 56 e 57 Por que pagamos tributos?

- Essas páginas possibilitam o trabalho com aspectos importantes da cidadania e têm como principal objetivo conscientizar os alunos sobre a importância e a destinação de alguns tributos arrecadados pelos governos. Pode ser adotada a dinâmica de destinar um tempo (em torno de 15 a 20 minutos) a fim de que os alunos façam a leitura do texto e respondam às questões apresentadas para que, na sequência, seja realizado um debate coletivo a respeito da temática proposta. Incentive-os a manifestar seus pontos de vista, principalmente em relação às questões do **Ser consciente**, levando-os a construir argumentos consistentes, tomando como base os estudos realizados e em seu conhecimento de mundo.

Resolução e comentários

B • $0{,}17 \cdot 3 = 0{,}51$

Portanto, o valor do tributo é R$ 0,51.

• $5 \cdot 0{,}51 = 2{,}55$

Portanto, o valor do tributo é R$ 2,55.

• $35 \cdot 0{,}51 = 17{,}85$

Portanto, o valor do tributo é R$ 17,85.

BNCC Considerando que o assunto em discussão está relacionado aos tributos, essa seção contribui para o desenvolvimento dos temas contemporâneos transversais **Educação financeira** e **Educação fiscal**, pois leva os alunos a perceber a importância do hábito de controlar os gastos, considerando as diversas obrigações relacionadas à vida em sociedade, e da fiscalização dos investimentos públicos, principalmente dos relacionados à saúde e à educação, estando conscientes a respeito dos tipos de investimentos que devem ser feitos com os tributos pagos pela sociedade.

Além disso, a seção também favorece o desenvolvimento do tema contemporâneo transversal **Educação em direitos humanos**, ao incentivar os alunos a conhecer os próprios direitos, como o acesso à educação e à saúde de qualidade, considerando sua participação nas arrecadações do município, do estado e do país onde reside. Essas ações auxiliam os alunos a assumir uma postura ativa no sentido de exigir dos governantes os direitos estabelecidos na Constituição Federal e nos demais documentos que orientam a sociedade e o desenvolvimento do país.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos e, posteriormente, apresentar suas conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 59

BNCC A tarefa **1** da seção **Exercícios e problemas** possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT401** e da **Competência específica 4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, pois solicita aos alunos que façam a conversão de representações algébricas de funções afins em representações geométricas no plano cartesiano e identifiquem os casos nos quais o comportamento é proporcional.

- Após resolver a tarefa **3**, leve para a sala de aula um mapa do Brasil e mostre-o aos alunos. Peça que, utilizando a escala do mapa, escrevam a lei de formação de uma função que permita calcular a distância real entre dois pontos do mapa. Em seguida, instrua-os a medir a distância, em linha reta, entre algumas capitais e, utilizando a função escrita, a determinar a distância real entre elas. Depois, oriente-os a pesquisar as distâncias reais entre essas capitais para que possam compará-las aos valores obtidos com a função e identificar se os valores ficaram próximos. Caso o cálculo tenha dado muito diferente, leve-os a refletir sobre as possíveis causas dessas diferenças.

Sala dos professores

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho em conjunto com o professor do componente curricular **Geografia** sobre o processo de construção de mapas e a importância da identificação das escalas. Pode ser feito um estudo a respeito dos diferentes tipos de mapa construídos ao longo da história, destacando os tipos de projeção adotados e suas principais características. Em seguida, podem ser explorados diferentes tipos de mapa – principalmente os mapas do Brasil, de estados, de regiões metropolitanas e de municípios brasileiros –, destacando as escalas adotadas em cada um deles para que os alunos possam compreender as diferenças entre elas.

- Ao trabalhar com a seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas propostos sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Assim, após os alunos resolverem esse problema, organizem um momento para que todos apresentem as soluções obtidas e discutam a respeito delas.

EDITORIA

Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC O trabalho com a seção **Exercícios e problemas** contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** e da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, por incentivar a construção de modelos matemáticos que empregam funções afins, mais especificamente as funções lineares, considerando contextos provenientes das mais variadas situações, o que exige dos alunos a interpretação das situações e as representações algébricas ou geométricas desses modelos, permitindo a resolução dos problemas em estudo.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, levando-os a refletir sobre os conteúdos estudados. Em debate, solicite, se possível, que eles comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos envolvendo proporcionalidade e função linear, analisando sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

8 Modelo linear

Objetivos específicos

- Interpretar modelos lineares como aproximações que captam a tendência de um conjunto de dados.
- Conhecer o conceito de regressão linear e compreender os benefícios práticos de se utilizar aproximações lineares em contextos diversos, especialmente no que diz respeito à realização de previsões, planejamentos e estimativas.
- Utilizar planilhas eletrônicas para aplicar regressão linear em vários conjuntos de dados, interpretando seus significados e extraindo estimativas importantes.
- Analisar criticamente a pertinência de modelos lineares em casos práticos, avaliando a adequação dos métodos e identificando suas limitações.

O tema trata de modelos de aproximação linear, em especial do método de regressão linear. Nele, estudam-se maneiras de se avaliar a tendência de dados e de expressar essa tendência por meio de uma função linear que as sintetize do modo mais preciso possível. Para isso, são usadas planilhas eletrônicas que auxiliam na construção de regressões lineares e incentivam, mais do que a simples realização de cálculos, a correta interpretação do significado de uma regressão linear na análise de dados.

Os modelos lineares são de grande importância para promover previsões e estimativas com base em conjuntos de dados que se comportem de modo aproximadamente linear, facilitando planejamentos para o futuro. Modelos de aproximação linear, embora relativamente simples, são aplicáveis em contextos diversificados, variando desde o planejamento financeiro de uma empresa até a verificação experimental de leis da Física, passando por análises de índices sociais e econômicos, controle de qualidade de produtos eletrônicos e estudo da eficácia de estratégias de *marketing*, entre muitas outras áreas.

Página 60 É possível prever vendas?

- A página de abertura utiliza um esquema de organização de dados relativos à quantidade de vendas por mês de uma empresa hipotética para ilustrar o conceito e a importância de modelos lineares. No modelo do exemplo, a organização dos dados em um gráfico sugere visualmente que eles seguem, com poucas variações, uma linha reta. Explique aos alunos que, caso haja motivos para crer, com relativa segurança, que a tendência observada vá se manter pelos próximos meses, então é possível aproximar os dados "dispersos" por uma reta que sintetize o comportamento médio deles. Com base nessa reta, os donos da empresa poderão estimar as vendas futuras, planejando com maior segurança em relação à realidade.

  É importante notar, contudo, que a pertinência e a eficácia de modelos lineares dependem de haver forte relação de linearidade entre os dados e, também, de que se disponha de uma quantidade suficiente de dados para fazer supor que de fato haja essa relação de linearidade. Também é importante que os alunos percebam que, na análise de dados do mundo real, existe uma multiplicidade de fatores influenciando os fenômenos, de modo que aproximações lineares podem ser eficazes para estimativas apenas até certo ponto. No caso da empresa do exemplo, não é sensato assumir que a relação entre a quantidade de meses e a quantidade de produtos vendidos se mantenha linear para sempre. Se fosse esse o caso, em algum momento a quantidade de produtos vendidos seria tão grande que ultrapassaria a capacidade de compra dos clientes, o que, naturalmente, é impossível. Além disso, a qualidade dos produtos fornecidos, o investimento em *marketing*, a quantidade de funcionários da empresa e a situação econômica dos clientes são fatores decisivos no sucesso das vendas. Dessa maneira, modelos lineares

MODERNA

são aplicáveis em previsões de curto prazo, e, embora tenham essa limitação, eles são capazes de fornecer parâmetros de grande praticidade para estimativas e embasar a tomada de decisões.

Resolução e comentários

- Para estimar as vendas no:
  - sétimo mês, calculamos o valor de y para $x = 7$.
  $$y = 2 \cdot 7 + 10 = 24$$
  - oitavo mês, calculamos o valor de y para $x = 8$.
  $$y = 2 \cdot 8 + 10 = 26$$

Portanto, podemos estimar que no sétimo mês e no oitavo mês serão vendidos 24 e 26 unidades, respectivamente.

BNCC

Os conteúdos propostos nesse tema contemplam as **Competências específicas 3** e **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, desenvolvendo em especial as habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT510**. Ao longo do tema, os alunos são desafiados a analisar o comportamento de duas variáveis numéricas, utilizar uma reta para descrever a relação observada e, a partir do modelo construído, resolver problemas.

- Para que os alunos percebam que inúmeras retas podem aproximar um conjunto de dados, mas que algumas são mais convenientes do que outras pelo fato de estarem mais próximas da maior parte dos dados, sugira-lhes que, com o auxílio de uma régua, verifiquem outras possibilidades de retas para aproximar os dados do exemplo, buscando aquela que lhes pareça a mais adequada.

Páginas 62 e 63 Acessando tecnologias

- É possível desenvolver o trabalho com essa seção utilizando o programa Calc, que é uma planilha eletrônica do pacote LibreOffice, versão gratuita de aplicativos que inclui também editores de texto, de apresentação, de desenhos e de banco de dados. Para fazer o *download* e instalar o programa, basta acessar o *site*. Disponível em: <https://pt-br.libreoffice.org/baixe-ja/libreoffice-novo/>. Acesso em: 19 ago. 2020.
- Uma sugestão para o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** é utilizar, se possível, o laboratório de informática da escola. Para isso, verifique antecipadamente se todos os computadores possuem o *software* necessário para o desenvolvimento do contexto. Durante a tarefa, caso os alunos apresentem dificuldades, auxilie-os na execução das etapas propostas.

Agora é com você! Resoluções

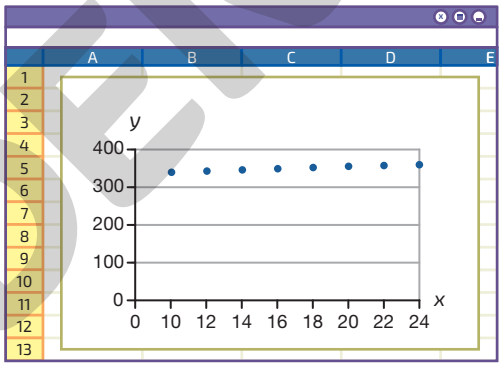
1 Inicialmente, preenchemos as células da planilha com as informações apresentadas no quadro.

	A	B	C	D	E
1	10	338			
2	12	341			
3	14	344			
4	16	347			
5	18	351			
6	20	354			
7	22	356			
8	24	358			
9					

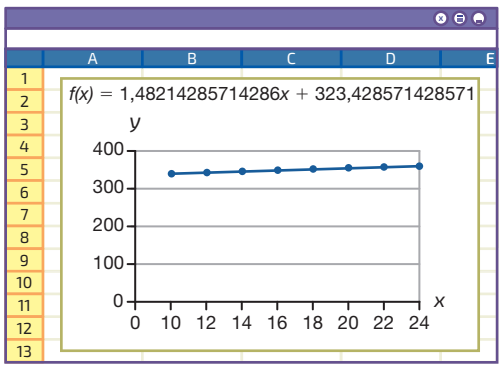
SERGIO L. FILHO

- Selecione o intervalo **A1:B9**. Em seguida, clique na opção **Inserir** e, depois, em **Gráfico**. Na janela **Tipos de gráfico**, selecione a opção **XY (Dispersão) somente pontos**. Na aba **Elementos do gráfico**, desmarque a opção **Exibir legenda**, e, nos campos **Eixo X** e **Eixo Y**, preencha, respectivamente, x e y. Por fim, clique em **Concluir**.

Nesse caso, obtemos:



2 Clique com o botão direito do *mouse* sobre um dos pontos do gráfico construído na questão 1 e selecione a opção **Inserir linha de tendência...**. Em seguida, na aba **Tipo**, clique em **Linear**, marque a opção **Mostrar equação** e clique em **OK**.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI E SERGIO L. FILHO

Portanto, o modelo de regressão, com aproximação de duas casas decimais, é $y = 1{,}48x + 323{,}43$.

MODERNA

BNCC Ao propor trabalhos envolvendo o uso de planilha eletrônica (nesse caso, o *software* Calc) para auxiliar no manuseio de técnicas de regressão linear, os alunos são levados a compreender e a utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação para partilhar informações e divulgar conhecimentos, lidando com diferentes linguagens, nos moldes do que preveem as **Competências gerais 4** e **5** da BNCC.

Páginas 64 e 65

- Ao trabalhar com a tarefa **5**, leve os alunos a questionar se as respostas dadas garantem ou não a certeza de que as previsões vão se efetivar na prática. Com base nesses questionamentos, faça-os perceber que modelos lineares traduzem tendências abstratas baseadas unicamente em dados numéricos, de modo que indicam, com base nas informações coletadas, o comportamento mais provável dos dados, e não uma certeza absoluta. Isso ocorre porque esses modelos não se baseiam em parâmetros que expliquem a exata natureza dos dados (o que é inviável ou mesmo impossível na ampla maioria das situações práticas). No caso do IDH de um país, muitos fatores imprevisíveis podem fazer com que seu valor mude drasticamente, contrariando as previsões mais razoáveis. Alguns exemplos são: crises econômicas, guerras, catástrofes ambientais (que tendem a diminuir o IDH), além de avanços em ciência e educação, investimentos bem aplicados em saneamento básico e boas políticas econômicas (que tendem a aumentar o IDH). O que a regressão linear traduz é o comportamento do crescimento do IDH em situações convencionais, pressupondo que não haja mudanças bruscas em nenhum fator determinante para o desenvolvimento humano da população.
- No trabalho com a tarefa **6**, saliente a importância de se ter uma quantidade suficiente de dados para poder fazer especulações seguras. Incentive os alunos a perceber que a "quantidade suficiente" de dados vai depender da natureza de cada problema em particular, exigindo bom senso e certa experiência por parte da pessoa encarregada de realizar a análise dos dados.
- A temática exposta na tarefa **6** tem relação com ferramentas e hábitos que fazem parte das culturas juvenis. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos estudados. Recapitule de maneira sucinta o conceito de regressão linear, pedindo que expliquem a importância desse tipo de modelo linear em situações práticas, citando exemplos. Incentive-os a pensar em situações não abordadas explicitamente na aula, talvez até de suas vidas cotidianas ou de atividades profissionais de algum familiar. Solicite que comentem, de modo geral, quais foram os pontos do tema que acharam mais úteis e interessantes. Ao final da conversa, peça que registrem, em não mais do que 5 minutos, as conclusões que absorveram para si a respeito de todo o tema. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

9 Função quadrática

Objetivos específicos

- Reconhecer as representações algébrica e geométrica das funções quadráticas.
- Esboçar o gráfico de uma função quadrática.
- Empregar as funções quadráticas na interpretação e resolução de problemas.

Nesse tema, são trabalhados conceitos introdutórios envolvendo as funções quadráticas. Nesse sentido, as discussões serão direcionadas à definição e ao gráfico desse tipo de função. Portanto, além de reconhecer a representação algébrica, é importante que os alunos estabeleçam uma associação com o tipo de gráfico utilizado para sua descrição.

Página 66 **Os maiores saltadores da natureza**

- A abertura desse tema apresenta uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **Biologia**. Nela, a parábola, gráfico de uma função quadrática, é associada, de maneira intuitiva, à trajetória dos saltos dos cangurus.

  Uma sugestão de condução do trabalho com essa página é promover um debate, após a resolução das questões propostas, com o objetivo de observar as diferentes interpretações e opiniões dos alunos. Durante esse debate, eles podem esboçar esquemas que contribuam na explicação de suas ideias e interpretações. Por isso, incentive-os a construir diferentes tipos de representação para a resolução das questões propostas.
- Ao propor o debate, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível,

MODERNA

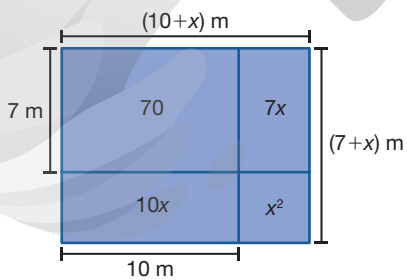
a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem suas conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

  A aplicação dessa metodologia na temática proposta permite uma articulação com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Língua Portuguesa**, orientando os alunos a analisar os resultados obtidos em suas pesquisas de maneira crítica, criativa e propositiva. Peça ao professor desse componente que auxilie a leitura dos textos referentes à temática considerando os procedimentos multimodal e inferencial dos diferentes gêneros textuais.

Página 67

- A situação proposta nessa página, em que se deseja aumentar a área retangular para a plantação de verduras, pode ser explorada associando representações algébricas e geométricas. Antes de apresentar a fórmula $f(x) = x^2 + 17x + 70$, que representa a área da região reservada para o plantio de verduras, mostre aos alunos que essa área pode ser calculada multiplicando o comprimento da região por sua largura. Para isso, construa na lousa com eles o seguinte esquema.



HELOÍSA PINTARELLI

$$10 \cdot 7 + 10x + 7x + x^2 = (10 + x)(7 + x)$$

- Verifique se todos concordam que a expressão $(10 + x)(7 + x)$ representa a área da região retangular proposta quando ocorre um acréscimo de x metros nas duas dimensões.
- Ao realizar o desenvolvimento de $(10 + x)(7 + x)$, expressão apresentada no livro-texto, procure identificar se os alunos compreenderam todas as etapas.

Página 69

- Ao trabalhar com os exercícios da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas propostos sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Algumas das tarefas da seção **Exercícios e problemas** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** e da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, ao solicitar a construção de modelos matemáticos envolvendo funções quadráticas para resolver problemas em contextos diversos.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Em debate, solicite, se possível, que eles comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos envolvendo funções quadráticas, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

10 Coeficientes de uma função quadrática

Objetivos específicos

- Estabelecer relação entre os coeficientes de uma função quadrática e a forma do gráfico correspondente.
- Modelar fenômenos naturais por meio de uma função quadrática.
- Identificar grandezas diretamente proporcionais ao quadrado de outra.
- Determinar e compreender geometricamente o zero de uma função quadrática.

Nesse tema, serão estudados os coeficientes das funções quadráticas com o intuito de identificar suas influências sobre o comportamento do gráfico desse tipo de

MODERNA

função. Outro conceito importante discutido ao longo do tema é o zero de uma função quadrática. Por isso, converse com os alunos a respeito das estratégias utilizadas para a resolução de uma equação polinomial de 2º grau, com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios deles a respeito desse assunto e as possíveis lacunas de aprendizagem, caso existam.

Páginas 70 e 71 — Qual objeto cai mais rapidamente: o mais leve ou o mais pesado?

- A fim de complementar o trabalho com essas páginas, realize com os alunos uma experiência para contrapor a afirmativa de Aristóteles (384-322 a.C.) de que objetos com maior massa encontram primeiro o solo do que outro com menor massa, quando soltos de uma mesma altura. Nessa proposta, peça aos alunos que soltem, simultaneamente e de uma mesma altura, uma folha de papel (menor massa) e um caderno (maior massa). Nesse caso, o caderno deverá encontrar o solo primeiro. Depois, solicite que amassem a folha de papel obtendo uma "bola" e façam a mesma experiência. Nesse caso, espera-se que o caderno e a folha amassada encontrem o solo quase ao mesmo tempo, evidenciando a influência da resistência do ar no experimento.

Resolução e comentários

B Temos:

$$k = \frac{9{,}8}{2} = 4{,}9$$

Assim:

$$d(t) = k \cdot t^2 \Rightarrow d(t) = 4{,}9 \cdot t^2$$

Sala dos professores

Ao trabalhar com a questão **D**, verifique a possibilidade de desenvolver um trabalho transdisciplinar com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, principalmente com o componente curricular **Física**, no qual sejam exploradas as características do movimento de objetos em queda livre, relacionando os conceitos físicos envolvidos com as propriedades das funções quadráticas, visando ao desenvolvimento da **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que diz:

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprias das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informações e comunicação (TDIC)."

Para o desenvolvimento dessa questão, sugira que os alunos utilizem a ferramenta Tracker, aplicativo gratuito de análise de vídeo e ferramenta de modelagem desenvolvida para aplicações em aulas de **Física**. Essa ferramenta está disponível em: <https://physlets.org/tracker/>. Acesso em: 19 ago. 2020. Para que os alunos criem uma apresentação demonstrando o passo a passo de como a análise foi feita, sugira que utilizem o Scratch, ferramenta gratuita desenvolvida no Massachusetts Institute of Technology (MIT), voltada para a criação de histórias animadas e de jogos interativos. Disponível em: <https://scratch.mit.edu>. Acesso em: 19 ago. 2020.

BNCC A abordagem histórica para a introdução de um novo conceito matemático, como a contextualização dos experimentos realizados por Galileu nos estudos relacionados à queda livre dos corpos, contribui para o desenvolvimento da **Competência geral 1** da BNCC, a qual é contemplada nessas páginas. Além disso, ao destacar a utilização dos critérios e rigores matemáticos presentes na situação descrita, envolvendo os conhecimentos e experimentos da Física, é possível despertar a curiosidade dos alunos quanto aos experimentos e às investigações realizadas pelos antigos estudiosos na resolução dos problemas nas respectivas áreas de atuação, indo ao encontro do que dita a **Competência geral 2** da BNCC. Além disso, busca-se desenvolver nos alunos atitudes relacionadas ao agir pessoal e coletivo, tomando como base preceitos relacionados à autonomia e responsabilidade, contemplando aspectos da **Competência geral 10** da BNCC.

Páginas 72 a 74

- Com o auxílio do GeoGebra, explore com os alunos as alterações sofridas pelo gráfico de uma função quadrática ao variar os parâmetros *a*, *b* e *c*. Nesse caso, utilize a ferramenta **Controle Deslizante** do *software*, para visualizar o que ocorre com o gráfico ao alterar os valores assumidos por *a*, *b* e *c*.

Página 75

BNCC As tarefas **3** e **6** da seção **Exercícios e problemas** favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** ao solicitar a interpretação de situações, bem como a construção e o estudo de modelos matemáticos envolvendo funções quadráticas.

Na tarefa **4**, os alunos são desafiados a esboçar o gráfico de funções quadráticas dada a lei de formação de cada uma delas. Além disso, é solicitada a identificação dos casos em que uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra, contemplando, assim, a habilidade **EM13MAT402**.

ORIENTAÇÕES

Já a tarefa **5** propõe que os alunos investiguem relações entre números expressos em quadros, criem conjecturas e as generalizem por meio de expressões, identificando padrões e reconhecendo quando as representações algébricas são de funções do tipo $f(x) = ax^2$, conforme solicita a habilidade **EM13MAT502**.

Desse modo, aborda-se aspectos das **Competências específicas 3**, **4** e **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Página 79

BNCC A tarefa **12** proporciona o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT502**, pois permite que os alunos conjecturem sobre números expressos em quadros e generalizem, por meio de expressões matemáticas, as relações observadas, identificando quando as representações algébricas são de funções do tipo $f(x) = ax^2$.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Em debate, solicite, se possível, que comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos envolvendo os coeficientes de uma função quadrática, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

11 Vértice de uma parábola

Objetivos específicos

- Compreender e determinar as coordenadas do vértice do gráfico de uma função quadrática.
- Determinar o valor máximo ou o valor mínimo de funções quadráticas.
- Estudar o sinal de uma função quadrática.

Os conceitos trabalhados nesse tema complementam os estudos realizados anteriormente sobre funções quadráticas, dando destaque ao vértice de uma parábola e aos valores máximo ou mínimo de uma função quadrática. Essas propriedades são essenciais na descrição de fenômenos e na resolução de problemas. Além disso, é realizado o estudo do sinal de uma função quadrática.

Páginas 80 e 81 — Um dos mais antigos esportes do mundo

Sala dos professores

O tema exposto apresenta uma relação entre os componentes curriculares **Matemática** e **Educação Física**. Nele, o conceito matemático de função é associado ao esporte de lançamento de discos.

Nessa abordagem, é utilizada uma função definida por $f(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}54x + 1{,}71$ para determinar a altura atingida por um disco após seu lançamento. Se julgar oportuno, solicite aos alunos que pesquisem outras modalidades esportivas em que é possível utilizar funções do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$ para modelar e resolver problemas.

Resoluções e comentários

B Para responder a essa questão, calculamos $f(0)$.

$$f(0) = -0{,}01 \cdot (0)^2 + 0{,}54 \cdot 0 + 1{,}71 = 1{,}71$$

Portanto, o disco foi lançado a 1,71 m de altura em relação ao solo.

C Para responder a essa questão, calculamos $f(12)$.

$$f(12) = -0{,}01 \cdot (12)^2 + 0{,}54 \cdot 12 + 1{,}71 = 6{,}75$$

Portanto, após percorrer horizontalmente 12 m em relação ao atleta, o disco atingiu 6,75 m de altura.

D Para responder a essa questão, calculamos o valor de x tal que $f(x) = 0$.

$$0 = -0{,}01x^2 + 0{,}54x + 1{,}71$$

Resolvendo essa equação, obtemos $x_1 = -3$ e $x_2 = 57$. Como x é positivo, a raiz -3 não convém. Portanto, esse disco atingiu uma distância horizontal de 57 m.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nessas páginas, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem as conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 83

Resoluções e comentários

- Para construir o algoritmo, devemos, inicialmente, responder às seguintes perguntas.

1 Quais são os dados de entrada?

R.: Os coeficientes a e b da função quadrática f.

2 Quais são os dados de saída?

R.: As coordenadas do vértice do gráfico da função *f*.

3 Quais são os procedimentos?

R.: Dados os coeficientes *a*, *b* e *c*, calculamos $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Agora, escrevemos o algoritmo.

Início
1. Leia o coeficiente *a*.
2. Leia o coeficiente *b*.
3. Leia o coeficiente *c*.
4. Calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.
5. Calcule $x_v = -\frac{b}{2a}$.
6. Calcule $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Fim

Página 84

- Na tarefa **9** é apresentada a lei de formação de uma função que descreve matematicamente a estrutura de uma ponte. Sugira aos alunos outra tarefa interessante baseada na situação inversa, ou seja, dada a altura e o comprimento entre os extremos de um arco, peça que determinem a lei de formação da função quadrática que descreve matematicamente a curva. Pode-se utilizar, por exemplo, dados referentes à ponte Juscelino Kubitschek (conhecida como ponte JK), em Brasília, inaugurada no ano de 2002.

  Sobre essa ponte existe uma estrutura com três arcos medindo 240 m de vão cada, com altura máxima de 62,7 m. Com esses dados, é possível determinar a lei de uma função cuja representação gráfica é uma parábola que lembra esses arcos. Posicionando, no plano cartesiano, essa curva com uma das extremidades na origem do sistema, podemos afirmar que os zeros dessa função são 0 e 240, e as coordenadas do vértice da parábola são $(120; 62{,}7)$. Como $c = 0$, temos $a = -\frac{1{,}045}{240}$ e $b = 1{,}045$. Portanto, a lei da função que representa cada arco é $f(x) = -\frac{1{,}045}{240}x^2 + 1{,}045x$.

Páginas 86 e 87 — Resolvendo por etapas

Agora é você quem resolve! — Resolução

2 Para resolver esse problema, inicialmente, construímos um modelo matemático que possibilita determinar a quantia arrecadada por Maria de acordo com a quantidade de lugares vagos na van. Em seguida, calculamos a quantidade de lugares vagos para que a arrecadação seja máxima e, por fim, determinamos a quantidade correspondente de lugares que devem ser ocupados. Ou seja, é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção. Agora, resolveremos o problema.

- Indicando por x e $f(x)$, respectivamente, a quantidade de lugares vagos na van e a quantia arrecadada por Maria com o fretamento, segue que $(16 - x)$ representa a quantidade de lugares ocupados e $(60 + 15x)$, a quantia paga por passageiro. Desse modo:

  $f(x) = (16 - x) \cdot (60 + 15x) = -15x^2 + 180x + 960$

  Agora, determinaremos a quantidade de lugares vagos correspondente à arrecadação máxima, ou seja, calculamos:

  $$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{180}{2 \cdot (-15)} = 6$$

  Desse modo, podemos concluir que Maria vai arrecadar a quantia máxima caso 6 lugares fiquem vagos na van, ou seja, se forem ocupados 10 lugares, pois:

  $$16 - 6 = 10$$

  Portanto, para que Maria arrecade o maior valor possível, 10 lugares devem ser ocupados.

Página 88 — Acessando tecnologias

- Para o desenvolvimento dessa seção, pode ser utilizada a versão *online* do *software* de geometria dinâmica GeoGebra ou fazer o *download* dele. Disponível em: <https://www.geogebra.org>. Acesso em: 8 jul. 2020.
- Explique aos alunos que, em alguns casos, o programa aproxima os resultados obtidos de acordo com suas configurações. No item **a** da questão **1** na seção **Agora é com você!**, por exemplo, o programa apresenta as coordenadas aproximadas do ponto de mínimo.

Agora é com você! — Resoluções

1 a) Digite, no campo **Entrada...**, $f(x) = 3x\text{^}2 - 4x + 1$. Em seguida, na **Janela de álgebra**, clique sobre os três pontos localizados no campo destinado à lei de formação de *f*. Por fim, selecione a opção **Pontos Especiais**. Desse modo, na **Janela de álgebra**, será exibido:

$C = \text{Extremo}(f)$
$\rightarrow (0.67, -0.33)$

Portanto, o valor mínimo da função *f* é, aproximadamente, $-0{,}33$.

b) Digite, no campo **Entrada...**, $f(x) = x\text{^}2 - 3x + 4$. Em seguida, na **Janela**

MODERNA

de álgebra, clique sobre os três pontos localizados no campo destinado à lei de formação de *f*. Por fim, selecione a opção **Pontos Especiais**. Desse modo, na **Janela de álgebra**, será exibido:

$$C = \text{Extremo}(f) \rightarrow (1.5, 1.75)$$

Portanto, o valor mínimo da função *f* é 1,75.

c) Digite, no campo **Entrada...**, $f(x) = -2x\text{^}2 - 20x - 2$. Em seguida, na **Janela de álgebra**, clique sobre os três pontos localizados no campo destinado à lei de formação de *f*. Por fim, selecione a opção **Pontos Especiais**. Desse modo, na **Janela de álgebra**, será exibido:

$$C = \text{Extremo}(f) \rightarrow (5, -52)$$

Portanto, o valor mínimo da função *f* é, aproximadamente, $-0{,}33$.

2 Digite, no campo **Entrada...**, $f(x) = -x\text{^}2 + 24x$. Em seguida, na **Janela de álgebra**, clique sobre os três pontos localizados no campo destinado à lei de formação de *f*. Por fim, selecione a opção **Pontos Especiais**. Desse modo, na **Janela de álgebra**, será exibido:

$$C = \text{Extremo}(f) \rightarrow (12, 144)$$

Nesse caso, temos $x = 12$. Agora, calculamos o valor de *z*. Para isso, fazemos:

$$z = 24 - x = 24 - 12 = 12$$

Portanto, para que a área seja máxima, as dimensões do retângulo devem ser iguais a 12 cm, ou seja, o retângulo é um quadrado com lados de 12 cm.

BNCC

Ao propor o desenvolvimento de um trabalho que envolva o uso de um *software* de geometria dinâmica, nesse caso, o GeoGebra, ou outros recursos tecnológicos, para a determinação do valor máximo ou do valor mínimo de funções quadráticas, os alunos são levados a compreender e a utilizar tecnologias digitais de informação e comunicação, além de diferentes tipos de linguagem, como a digital e a matemática, para partilhar informações e divulgar conhecimentos, conforme preveem as **Competências gerais 4** e **5** da BNCC.

A questão **2** da seção **Agora é com você!** possibilita o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT503**, pois os alunos são desafiados a investigar a abscissa do ponto de máximo do gráfico de uma função quadrática com o apoio de tecnologia digital.

Páginas 89 e 90

BNCC

As tarefas propostas na seção **Exercícios e problemas** possibilitam o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT503** e de aspectos das **Competências específicas 3** e **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, uma vez que sugerem a construção de modelos empregando funções quadráticas para resolver problemas e a investigação de valores máximos ou mínimos de funções quadráticas em contextos diversos com o apoio de tecnologia digital.

Na tarefa **18**, pode-se promover uma conversa relacionando o tema da tarefa com o tema contemporâneo transversal **Educação ambiental**. Proponha um debate acerca dos impactos dos incêndios no ecossistema. Comente que em 2020 os incêndios na Amazônia bateram recorde – entre maio e junho foram detectados 3 077 focos de incêndio. Converse com os alunos a respeito da necessidade de se preservar o meio ambiente, evitando incêndios ou quaisquer outros tipos de degradação, que, na maioria das vezes, são provocados em decorrência das próprias ações humanas.

Página 93

- Ao desenvolver o trabalho com a questão do **Ser consciente**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

12 Inequação do 1º e do 2º grau

Objetivos específicos

- Identificar e resolver inequações do 1º grau e do 2º grau.
- Empregar as inequações do 1º e do 2º grau na interpretação e na resolução de problemas.

O conteúdo abordado nesse tema consiste nas inequações do 1º grau e do 2º grau, observando sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de contextos diversos, o que exige dos alunos a interpretação dos resultados obtidos e a verificação de sua plausibilidade diante das situações em estudo.

MODELO

Páginas 94 e 95 Na palma da mão

- Como introdução ao estudo das inequações do 1º grau e do 2º grau, é proposta a reflexão e discussão a respeito dos *smartphones*, destacando suas principais funções e as características dos planos de telefonia móvel, possibilitando uma abordagem das funções associada à educação financeira, por solicitar aos alunos a tomada de decisão no caso de contratação desses planos.
- Ao comentar as ferramentas dos *smartphones*, questione os alunos a respeito dos tipos de atividades que são realizadas por eles nesses aparelhos, se todos possuem acesso a essa tecnologia, entre outras questões que julgar relevantes, aproveitando para discutir as culturas juvenis envolvendo as novas tecnologias. Envolva toda a turma, desperte o ânimo dos alunos e converse sobre o tema. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Ao longo do tema, serão propostos estudos e tarefas que envolvem a construção de modelos matemáticos caracterizados por funções polinomiais de 1º grau e de 2º grau, para que seja possível avaliar as inequações correspondentes, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT302** e da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Além de construir os modelos e resolver os problemas, é essencial que os alunos interpretem os resultados, considerando as características das situações em estudo.

Além disso, a temática abordada nessas páginas possibilita o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação financeira** ao solicitar a tomada de decisões perante diferentes planos de telefonia móvel, favorecendo as reflexões, por parte dos alunos, em relação aos planos mais adequados financeiramente e considerando o uso do *smartphone*. Além disso, também possibilita a abordagem do tema contemporâneo transversal **Ciência e tecnologia**, por contribuir para a criação de um espaço no qual seja possível discutir e refletir a respeito das inovações tecnológicas relacionadas a esses tipos de aparelhos, principalmente no que se refere ao número de atividades que podem ser realizadas com um *smartphone*.

Página 96

- Após as discussões a respeito do plano de telefonia presente no exemplo e da apresentação da definição de inequação do 1º grau, converse com os alunos sobre os planos de telefonia comercializados na região onde residem. Para isso, pode ser proposta uma pesquisa considerando as operadoras de telefonia que atuam nesse lugar e um estudo análogo ao que foi feito nessa página, considerando os diferentes planos oferecidos pelas operadoras, criando um espaço para a discussão sobre a importância de pesquisar preços e comparar diferentes ofertas antes de adquirir um plano de telefonia ou outro tipo de serviço ou bem.

Aproveite a oportunidade para falar da importância de o consumidor estar atento aos seus direitos, principalmente no que se refere aos serviços prestados a ele, como é o caso dos planos de telefonia móvel. Comente que a Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) é o órgão responsável por regular o setor das telecomunicações no Brasil, inclusive as operadoras de telefonia móvel, fiscalizando-as para que sejam prestados serviços de qualidade aos brasileiros. Para mais informações a respeito das atividades desenvolvidas por essa agência, pode ser acessado o *site* da Anatel. Disponível em: <https://www.anatel.gov.br/institucional/>. Acesso em: 23 jul. 2020.

Página 99

- No trabalho com a tarefa **4**, converse com os alunos a respeito das culturas juvenis envolvendo filmes, questionando a frequência com que vão ao cinema, os tipos de filmes preferidos, além dos valores que são pagos por eles pelas sessões. Pergunte como escolhem os dias e horários para frequentar o cinema e se essa opção é feita considerando os valores cobrados ou se outros fatores são mais relevantes do que o preço das entradas. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC A temática abordada na tarefa **4** possibilita o trabalho com o tema contemporâneo transversal **Educação financeira** por favorecer a conscientização dos alunos a respeito da importância de realizar pesquisas de preço e usar o dinheiro com consciência, garantindo seus direitos como consumidor.

- Após resolver a tarefa **7**, proponha aos alunos a realização de uma pesquisa a respeito dos valores cobrados para o fornecimento de energia elétrica na cidade onde eles residem e em outras cidades da região, observando se existem variações de preço e dos modos de cobrança.

BNCC Nas tarefas **12** e **13**, é solicitado aos alunos que representem graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas, conforme indica a habilidade **EM13MAT506** da BNCC. Assim, são abordados aspectos da **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

MODERNA

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de usar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

13 Progressão aritmética

Objetivos específicos

- Reconhecer sequências numéricas.
- Distinguir sequências finitas de sequências infinitas.
- Compreender progressões aritméticas (PA) como um caso específico de sequência numérica.
- Classificar as progressões em crescentes, decrescentes e constantes.
- Calcular a soma dos termos de uma progressão aritmética.
- Relacionar progressões aritméticas com funções afins e funções quadráticas.
- Resolver problemas utilizando o conceito de progressão aritmética.

Esse tema trata das progressões aritméticas iniciando com uma apresentação sobre o conceito de sequências numéricas, das quais as progressões aritméticas são casos especiais. Também são apresentadas as definições e notações usadas para o estudo do assunto e são feitas observações para ajudar os alunos a distinguir cada conceito com objetividade, evitando, assim, que haja confusão entre as noções de sequências numéricas e conjuntos numéricos, entre sequências finitas e sequências infinitas, ou mesmo entre as classificações das sequências (crescentes, decrescentes e constantes).

Sugestão de avaliação

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca dos conceitos relacionados ao conteúdo abordado nesse tema, proponha-lhes o problema a seguir, que explora a sequência dos números quadrados perfeitos.

Numa escola com 100 alunos, há um corredor onde estão enfileirados 100 armários, inicialmente todos fechados, enumerados em ordem crescente de 1 a 100. Em uma das extremidades do corredor, próximo ao armário número 1, encontram-se os 100 alunos da escola, cada um com o número do respectivo armário estampado na camiseta. Inicia-se uma gincana cuja regra é: sendo P e n inteiros, o aluno com o número n na camiseta inverte a situação dos armários de número P quando P for múltiplo de n, ou seja, abre os armários fechados e fecha os abertos.

Assim, o aluno com o número 1 na camiseta passa pelo corredor e abre todos os armários. Depois, o aluno com o número 2 passa pelo corredor e fecha os armários pares. Em seguida, o aluno com o número 3 passa pelo corredor e inverte a situação dos armários cujo número seja múltiplo de 3, e assim sucessivamente.

Considerando que todos os alunos tenham passado pelo corredor, responda às seguintes questões.

a) Quantos armários ficaram abertos? Quais são esses armários?

b) Existe uma regra matemática que determina a sequência numérica obtida com os números dos armários que ficaram abertos? Qual é essa regra?

Resoluções e comentários

a) 10 armários; 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

b) Sim; $a_n = n^2$

Incentive-os a realizar uma investigação matemática a respeito da situação abordada, promovendo o desenvolvimento da autonomia, da autoconfiança, da solidariedade e, principalmente, do pensamento matemático, a fim de que sejam protagonistas de sua aprendizagem. Para isso, pode ser sugerida a construção de um quadro, como o que segue. Nele, cada letra A indica um armário aberto, e cada letra F, um armário fechado.

Armários / Alunos	1	2	3	4	5	6	7	...
1	A	A	A	A	A	A	A	...
2	A	F	A	F	A	F	A	...
3	A	F	F	F	A	A	A	...
4	A	F	F	A	A	A	A	...
5	A	F	F	A	F	A	A	...
6	A	F	F	A	F	F	A	...
7	A	F	F	A	F	F	F	...
8	A	F	F	A	F	F	F	...
9	A	F	F	A	F	F	F	...
10	A	F	F	A	F	F	F	...
11	A	F	F	A	F	F	F	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

Observe no quadro que, quando um aluno passa pelo corredor, nenhum armário com número menor do que o da sua camiseta é alterado. Por exemplo, quando o aluno número 2 passar, já sabemos que o armário 1 não será mais fechado; quando o aluno número 3 passar, o armário 1 não será fechado e o 2 não será mais aberto; e assim por diante. Se possível, com a ajuda dos alunos, faça na lousa um quadro como o apresentado até o número 26. Peça a eles que observem a última linha do quadro, levando-os a perceber que os armários que ficarão com as portas abertas são os de número: 1, 4, 9, 16, 25, ..., 100; ou seja, os números

EM MODERNA

quadrados perfeitos menores ou iguais a 100. Isso ocorre porque esses números têm uma quantidade ímpar de divisores, enquanto os demais números têm uma quantidade par de divisores.

Assim, no procedimento de abrir e fechar os armários, como inicialmente todos os armários estão fechados, ficarão abertos aqueles que passarem por um número ímpar de alterações. É importante que os alunos percebam que a sequência obtida tem um comportamento padrão.

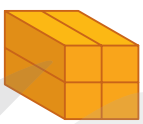
Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Páginas 100 e 101 A geometria das abelhas

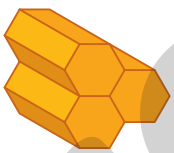
- Nas páginas de abertura, o conceito de sequência numérica é associado a elementos que compõem comunidades biológicas, nesse caso, a sociedade das abelhas. Aproveite o assunto abordado e apresente aos alunos informações complementares a respeito dos alvéolos construídos pelas abelhas. Diga que na construção de suas colmeias, as abelhas adotaram uma ideia simples: construir alvéolos de maior volume possível empregando a menor quantidade de material. Dentro desse plano, elas chegam ao formato perfeito para a sua confecção: uma forma prismática.

  Para uma boa economia, é preciso que a parede de um alvéolo sirva também para o alvéolo vizinho. Assim, adotam o formato de um dos três únicos prismas que se justapõem sem deixar espaços vazios: o prisma triangular, o quadrangular e o hexagonal.

Prisma de base triangular.



Prisma de base quadrada.



Prisma de base hexagonal.

Um primeiro cálculo revela que, para uma mesma área lateral, o prisma com maior volume é o de base hexagonal. Depois de justificada a adoção do prisma de base hexagonal, ainda resta um problema a ser resolvido: como fechar os alvéolos? A solução encontrada pelas abelhas foi selar o fundo deles, não com o mesmo formato que a base, mas com três losangos iguais.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Esse detalhe gera uma economia de cerca de 2% no consumo de material. Parece pequena, mas é uma quantidade relevante, levando em consideração que são construídos milhões de alvéolos.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, verifique a conveniência de aplicar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Para isso, peça aos alunos que se organizem em duplas a fim de resolver as questões propostas. Na sequência, solicite que exponham suas conclusões para toda a turma, comparando as respostas obtidas. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 103

Resolução e comentários

- Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos responder às seguintes questões.
  - Quais são os dados de entrada?

    O primeiro termo a_1, a ordem n do termo e a razão q.
  - Quais são os dados de saída?

    O n-ésimo termo da progressão aritmética.
  - Quais são os procedimentos?

    Dados o primeiro termo (a_1), a ordem n do termo e a razão r, determinamos a_n.

  Agora, escrevemos o algoritmo.

Início
1. Leia a ordem n do termo.
2. Leia o primeiro termo a_1.
3. Leia a razão r.
4. Calcule $a_n = a_1 + (n-1)r$.
Fim

Página 106

BNCC O trabalho com a tarefa **10** dessa página estabelece vínculos entre PA e funções afins de domínios discretos, desenvolvendo a análise de propriedades e a dedução de fórmulas que possuem aplicabilidade em problemas práticos, promovendo a habilidade **EM13MAT507** da BNCC. A partir da investigação de certos padrões e do estabelecimento de conjecturas, os alunos são levados a empregar recursos e procedimentos cada vez mais formais na validação de propriedades matemáticas, indo ao encontro do que determina a **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Página 109

Resolução e comentários

A Como os termos são equidistantes, temos:

$$\left(a_1 - (n-1)r\right) + \left(a_1 + (n-1)r\right) =$$
$$= \left(a_1 - (x-1)r\right) + \left(a_1 + (x-1)r\right) \Rightarrow 2a_1 = 2a_1$$

Portanto, a afirmação é verdadeira.

Página 110

Resolução e comentários

- Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos responder às seguintes questões.
  - Quais são os dados de entrada?
    R.: O número de termos n, razão r e primeiro termo a_1.
  - Quais são os dados de saída?
    R.: A soma dos termos de uma PA.
  - Quais são os procedimentos?
    R.: Dados o primeiro termo (a_1), o número n de termos e a razão r, obtemos S_n.

Agora, escrevemos o algoritmo.

Início
1. Leia a quantidade de termos n.
2. Leia o primeiro termo a_1.
3. Leia a razão r.
4. Calcule $S_n = \dfrac{n\left(2a_1 + (n-1)r\right)}{2}$.
Fim

Agora é com você! Resoluções

1 Seguindo os procedimentos apresentados, digitamos o 1º termo da PA $(a_1 = 3{,}4)$ no campo Valor inicial e a razão $(r = 0{,}7)$ no campo Incremento. Em seguida, clicamos em OK e os 70 primeiros termos da PA $(3{,}4;\ 4{,}1;\ 4{,}8;\ \ldots)$ serão exibidos na coluna A.

2 Na célula B65, digitamos = SOMA(A1:A65). Assim, obtemos a soma dos 65 primeiros termos da PA $(3{,}4;\ 4{,}1;\ 4{,}8;\ \ldots)$, que é 1 677.

	A	B
49	37	
50	37,7	
51	38,4	
52	39,1	
53	39,8	
54	40,5	
55	41,2	
56	41,9	
57	42,6	
58	43,3	
59	44	
60	44,7	
61	45,4	
62	46,1	
63	46,8	
64	47,5	
65	48,2	1677
66	48,9	
67	49,6	
68	50,3	
69	51	
70	51,7	1928,5

RONALDO INÁCIO

Página 111

- Ao apresentar o método de Gauss na determinação da soma dos números de 1 a 100, a tarefa **24** aborda aspectos da **Competência geral 1**, mobilizando a valorização e o uso de conhecimentos historicamente construídos.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

14 Função exponencial

Objetivos específicos

- Conhecer o conceito de função exponencial e estudar suas características.
- Relacionar grandezas por meio de funções exponenciais.
- Resolver problemas envolvendo função exponencial.
- Analisar e esboçar o gráfico de uma função exponencial, identificando quando ela é crescente e quando é decrescente.
- Estudar fenômenos naturais por meio de função exponencial.

Esse tema trata de funções exponenciais. Nele, apresenta-se o conceito de função exponencial e trabalha-se com suas propriedades mais notórias. Além disso, explora-se a visualização gráfica do comportamento dessa classe de funções, bem como são examinados os casos em que uma função exponencial é crescente ou decrescente.

A abordagem do tema privilegia a associação de funções exponenciais a fenômenos da natureza e das ciências em geral, demonstrando a vasta abrangência e a grande importância desse tipo de função na descrição de processos físicos, químicos, biológicos, financeiros e tecnológicos.

Páginas 112 e 113 Menores e mais "poderosos"

- As páginas de abertura desse tema relacionam algumas ideias envolvendo o conceito de função exponencial com fatos relativos à revolução tecnológica de *chips* e microprocessadores. Em especial, discute-se como expressar matematicamente a variação da quantidade de transistores nos microprocessadores no decorrer do tempo com base na chamada Lei de Moore.

Resolução e comentários

C Para resolver essa questão, construiremos um quadro que apresente a quantidade de transistores em função do ano, de acordo com a lei de Moore.

MODERNA

Ano	Quantidade de transistores
1971	$2\,300 = 2^0 \cdot 2\,300 = 2^{\frac{1\,971-1\,971}{2}} \cdot 2\,300$
1973	$2 \cdot 2\,300 = 2^1 \cdot 2\,300 = 2^{\frac{1\,973-1\,971}{2}} \cdot 2\,300$
1975	$2 \cdot 2^1 \cdot 2\,300 = 2^2 \cdot 2\,300 = 2^{\frac{1\,975-1\,971}{2}} \cdot 2\,300$
1977	$2 \cdot 2^2 \cdot 2\,300 = 2^3 \cdot 2\,300 = 2^{\frac{1\,977-1\,971}{2}} \cdot 2\,300$
⋮	⋮
n	$2^{\frac{n-1\,971}{2}} \cdot 2\,300$

Assim, para $n = 2\,021$, temos:

$$2^{\frac{2\,021-1\,971}{2}} \cdot 2\,300 = 2^{\frac{50}{2}} \cdot 2\,300 = 2^{25} \cdot 2\,300$$

Portanto, de acordo com a Lei de Moore, o número de transistores seria $2^{25} \cdot 2\,300$.

- Após trabalhar com a questão **C**, se julgar oportuno, leve os alunos ao laboratório de informática da escola e oriente-os na construção de um gráfico em um *software* de geometria dinâmica, ou esboce o gráfico na lousa, para mostrar o crescimento estimado da quantidade de transistores (tomando por base o quadro construído na resolução da questão), mesmo que seja de maneira empírica.

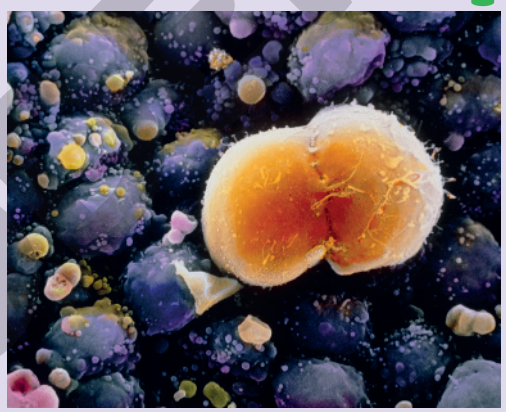
BNCC O tema contempla a **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, desenvolvendo em especial a habilidade **EM13MAT304**. Ao longo do tema, funções exponenciais são utilizadas na elaboração e na resolução de problemas diversos, demandando que os alunos percebam e descrevam variações entre grandezas que se vinculem umas às outras por meio de relações exponenciais, em contextos como a Matemática financeira, a Biologia, a Química, entre outros. Desse modo, ao exercitar a curiosidade intelectual, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade com base nos conhecimentos das diferentes áreas, como a Lei de Moore, aborda-se, também, aspectos da **Competência geral 2** da BNCC.

Páginas 114 e 115

- As tarefas dessas páginas exercitam habilidades de manuseamento das propriedades de potenciação, já vistas em outras etapas de ensino. Tais propriedades são imprescindíveis no estudo das funções exponenciais. Caso seja necessário, retome essas propriedades avaliando a compreensão dos alunos sobre o assunto. Para fazer isso, leve-os a aplicá-las ao longo da resolução da tarefa **1**, solicitando que justifiquem, ainda que de modo informal, a validade dessas propriedades. Para ajudar na fixação do conteúdo, pode ser conveniente escrever as principais propriedades na lousa, inclusive dando exemplos numéricos.

Sala dos professores

Para complementar a tarefa **4**, verifique a possibilidade de realizar trabalhos em conjunto com o professor da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, preferencialmente do componente curricular **Biologia**, a fim de apresentar mais informações aos alunos acerca do processo de divisão celular. Uma possibilidade é trazer explicações sobre as divisões mitóticas do zigoto (nome dado à célula formada pela união do espermatozoide com o óvulo), indicando que o zigoto se desenvolve em divisões e subdivisões que seguem o padrão relatado no enunciado da tarefa, em uma fase de divisão e multiplicação celular denominada clivagem. Peça aos alunos que pesquisem e levem para a sala de aula esquemas ou ilustrações que representem alguns ciclos de divisões mitóticas. Verifique se eles conseguem interpretar corretamente a relação entre esse fenômeno e o conceito de crescimento exponencial, percebendo que o aumento da quantidade de células, nesse caso, não é linear.



PROFESSORS P.M. MOTTA & S. MAKABE/SPL/FOTOARENA

Micrografia eletrônica de divisão mitótica de um zigoto (aumento aproximado de 1730 vezes).

Essa pesquisa também permite uma articulação com a área de **Linguagens e suas Tecnologias**, preferencialmente com o professor do componente curricular **Língua Portuguesa**. Peça a ele que oriente os alunos a analisar os resultados obtidos na pesquisa de maneira crítica, criativa e propositiva e que auxilie a leitura considerando os procedimentos multimodal e inferencial de cada gênero textual.

Páginas 116 e 117

- Após trabalhar com os exemplos de gráficos de função exponencial apresentados nessas páginas, sugira aos alunos que esbocem o gráfico da função do tipo exponencial definida por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$ para que eles

percebam que, nesse caso, o gráfico cruza os eixos x e y. Essa proposta também pode ser realizada com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, em que os alunos poderão explorar a construção de gráficos de outras funções exponenciais, analisando o que acontece quando, na função dada por $f(x) = b \cdot a^x + c$, são alterados os valores de b e c.

- Ao trabalhar com o item **b** da tarefa **6**, verifique se os alunos percebem que, apesar de o número 6 ser maior do que 1, o fato de o expoente ser negativo faz com que a função exponencial dada por $f(x) = 6^{-x}$ possa ser convenientemente reescrita como $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$, ou seja, uma função decrescente.
- Ao abordar a tarefa **11**, pergunte aos alunos se já conheciam o conceito de tempo de meia-vida e se sabem citar casos de ocorrência de meia-vida em fenômenos físicos, como no caso de elementos radioativos.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Recapitule a definição de função exponencial, pedindo que citem algumas de suas características (gráficas e algébricas) e mencionem fenômenos do mundo que podem ser descritos por esse tipo de função. Incentive-os a pensar em situações não trabalhadas explicitamente em sala de aula, verificando a imensa quantidade de relações entre grandezas existentes na natureza e nas atividades humanas que se comportam de modo exponencial. Com base nesse diálogo, solicite, ainda, que expliquem a importância de se estudar esse tipo de função, destacando quais são os pontos principais. Ao final da conversa, peça aos alunos que registrem, em não mais do que 5 minutos, as conclusões que absorveram para si a respeito de todo o tema. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

15 Função exponencial e radioatividade

Objetivos específicos

- Reconhecer a aplicabilidade do conceito de função exponencial no estudo da radioatividade.
- Empregar as funções exponenciais e suas propriedades na interpretação e resolução de problemas.

Nesse tema é abordado o conceito de função exponencial no contexto da radioatividade. Sendo assim, os alunos precisarão empregar seus conhecimentos a respeito das funções exponenciais e de suas propriedades na interpretação de situações envolvendo a radioatividade, observando a aplicabilidade desses conceitos matemáticos em situações do cotidiano.

Antes de iniciar os estudos desse tema, proponha também uma discussão com toda a turma a respeito das funções exponenciais, com o objetivo de identificar os conhecimentos prévios dos alunos em relação a esse conteúdo. Proponha também um estudo do significado dos termos "crescimento exponencial" e "decrescimento exponencial", solicitando aos alunos que façam pesquisas e identifiquem exemplos de situações nas quais esses termos podem ser empregados, avaliando o significado em cada contexto. Para isso, eles podem pesquisar notícias e reportagens divulgadas pela mídia nas quais esses termos sejam apresentados, considerando diferentes contextos. Um exemplo de situação que pode ser analisada durante esse estudo é o crescimento da quantidade de casos confirmados de pessoas contaminadas durante a pandemia do coronavírus Sars-Cov-2, em 2020, principalmente no início do surto.

Páginas 118 e 119 **Radiação: amiga ou inimiga?**

- Essa seção permite discutir a aplicação das funções exponenciais no estudo da radioatividade, bem como de fenômenos correlatos. A proposta é que os alunos possam utilizar seus conhecimentos a respeito das funções exponenciais e suas propriedades, aplicando-os na interpretação de diferentes situações envolvendo a radioatividade.

Sala dos professores

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho em conjunto com os professores dos componentes curriculares **Física** e **Química** a respeito da radioatividade, propondo um estudo mais aprofundado sobre esse assunto. Também é possível tratar de algumas das suas aplicações, como é o caso do funcionamento das usinas nucleares, destacando suas vantagens e desvantagens. Nesse sentido, podem ser considerados os aspectos econômicos e ambientais, como o processo de descarte de materiais radioativos, por exemplo. Também podem ser feitos em grupos visando, por exemplo, o estudo dos grandes problemas e catástrofes que envolveram o uso da radioatividade, como a ativação da bomba atômica, desastres em usinas nucleares, entre outros.

MODERNA

Resoluções e comentários

A Para resolver essa questão, construiremos um quadro.

Dias decorridos	Quantidade, em gramas, de iodo-131
8	$\frac{1}{2}\cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{8}}\cdot 3$
16	$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{8}}\cdot 3$
24	$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{8}}\cdot 3$
32	$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{32}{8}}\cdot 3$

Portanto, após:

- 8 dias, haverá 1,5 g, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{8}}\cdot 3 = \frac{3}{2} = 1{,}5$.
- 16 dias, haverá 0,75 g, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{16}{8}}\cdot 3 = \frac{3}{4} = 0{,}75$.
- 24 dias, haverá 0,375 g, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{8}}\cdot 3 = \frac{3}{8} = 0{,}375$.
- 32 dias, haverá 0,1875 g, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{32}{8}}\cdot 3 = \frac{3}{16} = 0{,}1875$.

B Generalizando o quadro construído na questão **A**, decorridos x dias, a quantidade $f(x)$, em gramas, de iodo-131, será:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}\cdot 3$$

Portanto, o item correto é o **II**.

D Para resolver essa questão, construiremos um quadro.

Anos decorridos	Massa de carbono-14
5 730	$m\cdot\frac{1}{2} = m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = m\cdot(2)^{-\frac{5\,730}{5\,730}}$
11 460	$m\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = m\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = m\cdot(2)^{-\frac{11\,460}{5\,730}}$
⋮	⋮
t	$m\cdot(2)^{-\frac{t}{5\,730}}$

Portanto, a lei de formação da função é $f(t) = m\cdot(2)^{-\frac{t}{5\,730}}$.

E Para resolver essa questão, construiremos um quadro.

Meia-vida	Porcentagem	Datação
1	50%	5 730
2	25%	$2\cdot 5\,730 = 11\,460$
3	12,25%	$3\cdot 5\,730 = 17\,190$

Portanto, um resíduo de organismo que tem 12,5% do carbono-14 original data de 17 190 anos.

BNCC

As discussões motivadas pelo tema abordado nessas páginas contribuem para o trabalho com a **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, pois propõem a interpretação de situações envolvendo questões tecnológicas, como os avanços nas ciências motivados pelo uso de elementos radioativos, além de questões socioeconômicas e históricas, tomando por base os conhecimentos a respeito das funções exponenciais e suas aplicações no cotidiano. Além disso, favorecem o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT304** e de aspectos da **Competência específica 3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, por exigir dos alunos a interpretação de problemas, situados no contexto da radioatividade, empregando as funções exponenciais e suas propriedades.

O trabalho com esse assunto também contribui para a abordagem dos temas contemporâneos transversais **Saúde** e **Educação ambiental**, permitindo, por um lado, a conscientização dos alunos sobre as contribuições da radioatividade para o diagnóstico de doenças, para os avanços na medicina e para os estudos relacionados à história da humanidade. Por outro lado, permite reflexões a respeito dos malefícios, para os indivíduos e para o meio ambiente, do uso inadequado dos elementos radioativos, que podem causar grandes desastres, como o lançamento das bombas atômicas durante a Segunda Guerra Mundial ou o acidente radiológico de Goiânia, no Brasil, em 1987.

- Ao desenvolver o trabalho com a questão do **Ser consciente**, converse com os alunos sobre a importância de ter harmonia no convívio social, não ter preconceitos, compreender as necessidades dos outros, aprender a lidar com as próprias limitações e contribuir para a criação de um ambiente propício ao crescimento coletivo, promovendo, sempre que possível, a paz na comunidade escolar e na sociedade. Mais informações sobre esse assunto podem ser encontradas no tópico **O convívio social em sala de aula**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.
- Após o trabalho com essas páginas, peça aos alunos que acessem o artigo utilizado como fonte de pesquisa e identifiquem aspectos característicos de um texto de

divulgação científica, como introdução, apresentação da metodologia da coleta de dados, citações de embasamento teórico, discussões, resultados, conclusão, além da bibliografia consultada. Se julgar conveniente, peça a eles que, em grupos, pesquisem o assunto do texto em outras fontes e comparem as informações, analisando criticamente os resultados obtidos.

16 Equação e inequação exponencial

Objetivos específicos

- Compreender o que são equações e inequações exponenciais.
- Identificar e aplicar técnicas de resolução de equações e inequações exponenciais.
- Reconhecer a importância das propriedades de potenciação na resolução de equações e inequações exponenciais.

O tema trata de equações e inequações exponenciais. Nele, aprende-se a desenvolver e aplicar técnicas algébricas para a resolução de problemas envolvendo essas relações.

Além de exercitar as propriedades de potenciação – cruciais para a resolução de problemas de natureza exponencial –, o objetivo do tema é desenvolver nos alunos a capacidade de compreender e aplicar técnicas de resolução de equações e inequações exponenciais, adquirindo experiência e destreza para identificar quando um ou outro artifício de cálculo é mais adequado para a solução de dado problema. Para tanto, incentiva-se o raciocínio lógico e a sensibilidade algébrica dos alunos por meio de problemas resolvidos e exercícios propostos que abrangem os principais desafios que usualmente surgem na resolução de problemas envolvendo expressões exponenciais.

Entre as propriedades imprescindíveis para a resolução de equações e inequações exponenciais, destaca-se a que indica se uma função exponencial é crescente ou decrescente tomando-se por parâmetro o valor de sua base, isto é, a propriedade segundo a qual a função dada por $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$. Essa observação implica uma sutileza a mais no trato das inequações, pois, em certas circunstâncias, os alunos precisam ter grande atenção quanto à orientação do sinal da desigualdade, mantendo-a fixa ou invertendo-a, dependendo da especificidade do caso. Essa sutileza, fundamental na resolução de inequações, inexiste quando se trabalha apenas com equações, de modo que exige uma boa compreensão dos alunos acerca do significado de inequação, entendendo em que sentido ela difere de uma equação.

A fim de verificar o conhecimento prévio dos alunos acerca do tema, proponha-lhes o problema a seguir.

Sugestão de avaliação

Suponha que a população de uma bactéria do tipo *A* duplique a cada hora e que a população de uma bactéria do tipo *B* quadriplique nesse mesmo intervalo de tempo. Se, em dado momento, houver 240 bactérias do tipo *A* e 30 bactérias do tipo *B*, depois de quantas horas a quantidade de bactérias de ambos os tipos será a mesma?

Resolução

Uma maneira de resolver esse problema é construindo um quadro.

Tipo	Após 1 h	Após 2 h	Após 3 h
A	480	960	1 920
B	120	480	1 920

Portanto, após 3 horas, haverá a mesma quantidade de bactérias do tipo *A* e do tipo *B*.

Na resolução desse problema diagnóstico, verifique quais procedimentos os alunos empregam para buscar a solução: eles tentam comparar as quantidades com o auxílio de quadros ou descrevem a quantidade de bactérias em função do tempo e tentam resolver a equação resultante? Se optarem pela via algébrica, quais estratégias eles utilizam para resolver a equação?

Mais informações sobre avaliações diagnósticas podem ser encontradas no tópico **Avaliação**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

BNCC Nas seções **Exercícios e problemas** desse tema, os alunos são desafiados a elaborar e resolver problemas envolvendo funções exponenciais em contextos variados, compreendendo a variação das grandezas, abordando a habilidade **EM13MAT304** e aspectos da **Competência específica 3** da área da **Matemática e suas Tecnologias**.

Páginas 120 e 121 **Tabaco: livre-se de seus males!**

- As páginas de abertura tratam dos malefícios à saúde causados pelo tabagismo. Nelas, chama-se a atenção para a elevada quantidade de substâncias tóxicas que são introduzidas no organismo em razão do consumo do tabaco em produtos como o cigarro e o narguilé, mencionando, em especial, a nicotina, principal causadora do vício.

  O trabalho com as páginas de abertura pode ser realizado organizando os alunos em pequenos grupos, de dois ou três integrantes, possibilitando-lhes maior liberdade para expressar suas opiniões e, sem censuras, relatar possíveis experiências que tiveram com produtos derivados do tabaco. Em seguida, promova um debate com toda a turma e reforce o fato de que, muitas vezes, as pessoas começam experimentando

EM MODERNA

cigarros ou outros produtos similares para serem aceitas em grupos sociais, ou mesmo por curiosidade, e acabam se tornando dependentes da nicotina.

Enfatize que o cigarro ocasiona um vício que não é apenas psicológico, mas também químico. Isso significa que, por mais que um fumante iniciante tenha a sensação de que consegue parar a qualquer momento, o uso do tabaco induz quimicamente alterações psicoativas que dificultam o abandono da droga. Ao ser inalada, a nicotina produz alterações no sistema nervoso central, modificando o estado emocional e comportamental dos indivíduos. Logo após sua inalação, a nicotina atinge o cérebro e libera neurotransmissores que proporcionam uma sensação passageira de prazer, a qual induz ao abuso e à dependência. Cada vez mais necessitado dessa sensação artificial de prazer fugidio para controlar a irritação e o estresse ocasionados pelas necessidade da presença da nicotina no sistema nervoso, o cérebro se acostuma e passa a precisar de doses cada vez maiores para manter o mesmo nível de satisfação, o que faz crescer a dependência, os danos ao organismo e o risco de desenvolver doenças que podem levar à invalidez e à morte.

No Brasil, além da Lei Federal 12.546, de 2011, conhecida como Lei Antifumo, que proíbe o uso de produtos fumígenos em locais fechados de uso coletivo (incluindo áreas comuns de condomínios e clubes), também existem leis estaduais e municipais com disposições similares que reforçam a proibição. Além disso, a Lei 9.294, de 1996, em vigor, proíbe, em todo o território nacional, a propaganda comercial de produtos fumígenos, derivados ou não do tabaco, bem como exige que a exposição desses produtos seja acompanhada de informações e imagens de advertência acerca dos malefícios que eles causam à saúde. Além de razões óbvias de saúde pública, essas exigências se devem ao fato de que, no passado, muitas propagandas desses produtos associavam o uso de tabaco a ideias de virilidade ou feminilidade, êxito sexual, proeminência social e redução de tensão, características essas que hoje sabemos, comprovadamente, serem afetadas negativamente pelo tabagismo.

Resoluções e comentários

A Para resolver essa questão, construiremos um quadro.

Tempo (em horas)	Quantidade de nicotina (em miligramas)
2	$1 \cdot \frac{1}{2} = 2^{-1} = 2^{-\frac{2}{2}}$
4	$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-2} = 2^{-\frac{4}{2}}$
6	$1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = 2^{-3} = 2^{-\frac{6}{2}}$
⋮	⋮
t	$2^{-\frac{t}{2}}$

- Portanto, $y = 2^{-\frac{t}{2}}$.

B Utilizando a expressão obtida na questão **A** e calculando o valor de y para $t = 4$, temos:

$$y = 2^{-\frac{4}{2}} = 2^{-2} = 0{,}25$$

Portanto, a quantidade de nicotina é 0,25 mg.

BNCC As páginas de abertura permitem que se desenvolvam trabalhos relacionados ao tema contemporâneo transversal **Saúde**. Conscientizar-se quanto aos malefícios de substâncias tóxicas, tanto para usuários diretos quanto para indiretos (no caso do tabaco, os chamados "fumantes passivos"), é essencial para manter-se afastado de vícios que possam colocar a saúde em risco.

- Ao trabalhar com as páginas de abertura, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizarem o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem as conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 124

- Caso seja necessário, para tornar mais claro o fato de que, para $0 < a < 1$, tem-se $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$, incentive os alunos a experimentarem exemplos numéricos. Por exemplo, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ e $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, de que se obtém $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Mas, obviamente, $3 > 2$.

Página 125

- A tarefa **21** apresenta um problema relacionado ao crescimento populacional de duas espécies. Incentive os alunos a perceber que, como a inequação $\frac{P(n)}{Q(n)} \geqslant 1\,024$ indica que a espécie Q está em risco de extinção, é possível interpretar que a espécie P é composta por predadores da espécie Q. Deduz-se isso do fato de que, se a quantidade de predadores é muito

PROVA

maior do que a quantidade de presas, então a tendência é que as presas sejam completamente eliminadas pelos predadores, entrando em extinção.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Recapitule de modo sucinto as distinções entre equações e inequações. Na sequência, peça a eles que comentem quais estratégias de resolução de equações e inequações exponenciais lhes chamaram a atenção, orientando-os a sintetizar a abordagem adotada na tentativa de determinar o valor da incógnita de uma equação exponencial ou encontrar o conjunto solução de uma inequação exponencial. Ao final dessa conversa, oriente-os a registrar, em não mais do que 5 minutos, as conclusões que absorveram para si a respeito de todo o tema. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

17 Progressão geométrica

Objetivos específicos

- Identificar uma progressão geométrica e determinar seus termos utilizando a lei de formação correspondente.
- Calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.
- Resolver situações-problema utilizando os conceitos de progressão geométrica.

O conteúdo abordado nesse tema corresponde às progressões geométricas (PG), bem como a suas principais características e definição. Além disso, é apresentada a fórmula para o termo geral e a soma dos n primeiros termos de uma sequência dessa natureza.

BNCC Ao longo desse tema, durante os exercícios e problemas propostos, é incentivado o reconhecimento das progressões geométricas e sua aplicação no estudo de problemas, bem como a compreensão das propriedades correspondentes e das deduções de fórmulas, além da identificação de relações entre esse tipo de sequência e as funções exponenciais com domínio discreto. Desse modo, é contemplada a habilidade **EM13MAT508** da BNCC e são abordados aspectos da **Competência específica 5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Páginas 126 e 127 **Dengue: não fique parado!**

- Essa seção explora uma relação entre os componentes curriculares **Matemática**, **Biologia** e **Sociologia** ao apresentar algumas informações sobre o vírus da dengue. Nela, são destacadas estatísticas sobre a doença no Brasil, estratégias de como evitar a proliferação do mosquito transmissor e sintomas comuns nos doentes.
- A leitura do texto e a resolução das questões propostas podem ser realizadas coletivamente, envolvendo toda a turma. Além disso, durante as discussões a respeito dessa temática, explique aos alunos que o mosquito *Aedes aegypti* não transmite apenas a dengue, mas também outras doenças como a *Chikungunya* e o Zika Vírus.

Sala dos professores

Para complementar os estudos realizados a partir desse assunto, verifique a possibilidade de realizar um trabalho em conjunto com um professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, preferencialmente do componente curricular **Sociologia**. Nesse trabalho, proponha aos alunos a realização de um estudo a respeito dos casos de dengue verificados, no ano anterior ao vigente, no município em que residem, identificando em quais épocas do ano ocorreram a maior quantidade de casos e mortes em razão dessa doença. Se julgar conveniente, proponha que se organizem em grupos e façam uma pesquisa nos bairros com o intuito de coletar dados a respeito do número de casos que foram registrados no último ano, quais os principais sintomas manifestados pelos indivíduos infectados e como foi o processo do diagnóstico à cura da doença, considerando o tipo de atendimento que receberam – ocorrido em uma unidade básica de saúde ou em associação a um plano de saúde.

A partir desse estudo, proponha uma reflexão a respeito do papel dos cidadãos no combate à dengue, se existe alguma relação entre os casos de dengue e a classe social das pessoas infectadas, bem como a respeito de estratégias que poderiam ser adotadas, em sociedade, para reduzir o número de casos dessa doença. Para finalizar, sugira que elaborem cartazes e panfletos visando conscientizar os demais alunos da escola a cuidarem de suas casas e de seus bairros, com o objetivo de reduzir a quantidade de casos de dengue no município.

MODERNA

BNCC Por meio dos trabalhos desenvolvidos a partir do assunto exposto nessas páginas, são abordados aspectos da **Competência geral 5** da BNCC a fim de incentivar o emprego de conhecimentos matemáticos no estudo e na resolução de problemas que afetam o contexto social, contribuindo para exercer o protagonismo dos alunos diante dos problemas enfrentados pela sociedade, especificamente de saúde pública, como é o caso da dengue. Nesse sentido, contribui também para o desenvolvimento da **Competência específica 2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, por exigir dos alunos reflexões e participação em ações que impactam diretamente em situações relacionadas à saúde pública.

Além desses aspectos, abordam-se os temas contemporâneos transversais **Saúde** e **Vida familiar e social**, pois, por um lado, incentiva o cuidado com a saúde por meio da tomada de medidas que podem evitar a contaminação pela dengue, e, por outro, conscientiza os alunos da importância dessas medidas para contribuir com a redução na disseminação dessa doença em sociedade e nos impactos, por exemplo, no sistema de saúde, serviço essencial para todos.

Resoluções e comentários

- Inicialmente, calculamos a quantidade de fêmeas infectadas na 2ª geração. Para isso, fazemos:

$$\frac{200}{2} \cdot 0{,}3 = 30$$

Em seguida, calculamos a quantidade de fêmeas infectadas na 3ª geração.

$$30 \cdot \frac{200}{2} \cdot 0{,}3 = 900$$

Portanto, na 2ª e na 3ª geração haverá, respectivamente, 30 e 900 fêmeas infectadas nesse reservatório.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem suas conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 128

Sala dos professores

Antes de expor os conteúdos apresentados nessa página, verifique a possibilidade de realizar um trabalho em conjunto com o professor do componente curricular **Biologia** para promover uma discussão a respeito da fissão binária bacteriana, processo pelo qual as bactérias realizam a divisão celular. A partir desse estudo proveniente do contexto da Biologia, é possível trabalhar com problemas como o seguinte.

Considerando que no instante inicial exista uma única bactéria no meio, após três fissões binárias, quantas bactérias estarão presentes nesse meio?

Assim, os alunos poderão construir esquemas que possibilitem a identificação de que, a cada divisão, o número de bactérias será multiplicado por 2, possibilitando iniciar o trabalho com as progressões geométricas.

- Depois da apresentação do conceito de progressão geométrica, converse com os alunos a respeito das semelhanças e diferenças entre esse tipo de sequência e as progressões aritméticas, de tal modo que eles possam reconhecê-las nas diferentes situações nas quais podem ser aplicadas.

Página 129

- Para o trabalho com a seção **Exercícios e problemas resolvidos**, verifique a possibilidade de adotar uma dinâmica na qual as tarefas sejam propostas aos alunos antes da apresentação da seção, para que eles possam resolvê-las utilizando os conhecimentos construídos até o momento. Em seguida, promova um debate com toda a turma a respeito dos procedimentos empregados durante o processo, comparando com a resolução presente no livro, sanando possíveis dúvidas.

Página 130

- Caso seja necessário, no trabalho com a tarefa **3** da seção **Exercícios e problemas**, diga aos alunos que o comprimento do raio de uma circunferência consiste na distância entre o centro da circunferência e um de seus pontos.
- No trabalho com a tarefa **8**, informe aos alunos que, dependendo do modelo da calculadora, as operações devem ser executadas seguindo ordens diferentes. Caso eles disponham de *smartphones*, aproveite para conversar sobre as funções das calculadoras disponíveis nesses equipamentos e solicite que utilizem esses aplicativos para explorar essa proposta.

MODERNA

Além disso, aproveite o tema exposto nessa tarefa para apresentar o formato utilizado pelas calculadoras para exibir números muito grandes e muito pequenos, interpretando a representação em notação científica adotada por esse equipamento.

Página 131

Resolução e comentários

- Para construir o algoritmo, devemos, inicialmente, responder às seguintes perguntas.

  › Quais são os dados de entrada?

  O primeiro termo, a ordem n do termo e a razão q.

  › Quais são os dados de saída?

  O n-ésimo termo da progressão geométrica.

  › Quais são os procedimentos?

  Dados o primeiro termo (a_1), a ordem n do termo e a razão q, determinamos a_n calculando $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

  Agora, escrevemos o algoritmo.

Início
1. Leia o primeiro termo (a_1).
2. Leia a ordem n do termo.
3. Leia a razão q.
4. Calcule $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Fim

Página 134

- Durante o desenvolvimento da tarefa **21**, proponha aos alunos uma pesquisa a respeito de outros modelos que foram construídos historicamente para comparar o crescimento da população mundial com a produção de alimentos. Peça que, durante a pesquisa, identifiquem aspectos característicos de um texto de divulgação científica, como introdução, apresentação da metodologia da coleta de dados, citações de embasamento teórico, discussões, resultados, conclusão e bibliografia consultada. Ressalte a importância de utilizar diferentes fontes para comparar as informações, analisando criticamente cada uma delas.

Sala dos professores

Verifique a possibilidade de realizar um trabalho alinhado com o professor do componente curricular **Geografia**, a fim de aprofundar o estudo a respeito da teoria de Malthus e de outras teorias relacionadas a esse assunto, bem como as atuais projeções da população mundial e dos limites na produção de alimentos, refletindo sobre os impactos da má distribuição de renda e do acesso à alimentação.

- Ao trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas apresentados sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Nesse sentido, após os alunos resolverem esse problema, pode ser realizada uma apresentação das soluções obtidas para toda a turma e a discussão a respeito das soluções apresentadas. Mais informações sobre essa metodologia podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 135

- Após o trabalho com a tarefa **22** da seção **Exercícios e problemas**, discuta a respeito de outros fractais que podem ser construídos utilizando um procedimento semelhante àquele empregado no triângulo de Sierpinski, solicitando aos alunos que façam uma pesquisa a respeito de fractais. Se julgar conveniente, proponha que, em pequenos grupos, construam um fractal análogo aos estudados, relacionando-o ao conceito de progressão geométrica.

Página 136

- Após estudar a relação entre progressões geométricas e funções exponenciais, proponha um estudo a respeito dos comportamentos gráficos correspondentes, com o intuito de esclarecer aos alunos que as progressões geométricas podem ser relacionadas a uma função de domínio discreto, no caso, formado pelo conjunto de números naturais não nulos. Sendo assim, sua representação gráfica, diferente das funções de domínio real, deve ser feita através de pontos, e não de uma curva contínua.

Página 139

- Aproveitando o contexto da tarefa **42**, converse com os alunos sobre as culturas juvenis envolvendo os programas de televisão, principalmente os de auditório, que propõem gincanas em que os participantes podem receber dinheiro conforme seu desempenho.

MODERNA

Pergunte a eles se acompanham esse tipo de programação, a opinião deles quanto a esse tipo de atração, principalmente a respeito dos tipos de provas propostas. Mais informações sobre as culturas juvenis podem ser encontradas no tópico **O aluno do Ensino Médio**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Em debate, solicite, se possível, que eles comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos envolvendo progressões geométricas, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos. Mais informações sobre essa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

18 Logaritmo

Objetivos específicos

- Compreender o conceito de logaritmo.
- Estudar as propriedades operatórias dos logaritmos e a mudança de base de logaritmos.
- Interpretar e resolver problemas envolvendo logaritmos.

Nesse tema, discute-se o conceito de logaritmo e suas propriedades, possibilitando realizar estudos envolvendo, entre outros aspectos, a obtenção de solução para equações exponenciais.

Além da situação proposta na abertura do tema, na qual se estuda o crescimento de uma população de bactérias, é possível introduzir esse conteúdo perguntando aos alunos acerca dos conceitos envolvendo as equações exponenciais. Nesse sentido, eles podem ser questionados a respeito de como poderiam resolver a equação $2^x = 5$. Inicialmente, os alunos poderão dizer que não é possível determinar x, pois não é possível trabalhar com a igualdade de potências de bases diferentes. Diante disso, pode ser iniciada uma conversa com toda a turma a respeito de potências de base 2, apresentando na lousa os resultados de 2^1, 2^2 e 2^3. Espera-se que os alunos percebam que o valor de x deve estar entre 2 e 3.

Proponha também que investiguem os valores assumidos pelas potências de base 2 com expoentes racionais, assumindo valores entre 2 e 3, utilizando uma calculadora. Nesse caso, eles podem utilizar as calculadoras presentes em seus *smartphones* ou mesmo o laboratório de informática da escola. Alguns dos possíveis valores que podem ser investigados são os seguintes: $2^{2,1} \simeq 4{,}287$, $2^{2,2} \simeq 4{,}595$, $2^{2,3} \simeq 4{,}925$, $2^{2,4} \simeq 5{,}278$, $2^{2,5} \simeq 5{,}657$. Nesse caso, explique aos alunos que $x = 2{,}3$ é uma boa aproximação, no entanto não é o valor exato que soluciona a equação exponencial em estudo.

Comente que existe um conceito matemático chamado do logaritmo que permite resolver esse tipo de problema sem utilizar a estratégia de tentativa e erro, que, em alguns casos, pode ser demasiadamente trabalhosa. Acreditamos que a busca pelo valor do expoente da maneira proposta seja uma maneira de tornar o estudo dos logaritmos mais significativo. É importante reforçar, durante esse estudo, o comportamento de uma função exponencial, de modo a discutir com os alunos o motivo de 2,5 não ser uma boa aproximação para x, diferentemente do que ocorreria se estivéssemos lidando com uma função afim, por exemplo.

Página 140 Microrganismos

- O conteúdo dessa página aborda o crescimento populacional de bactérias associado ao conceito de função exponencial, propiciando introduzir as reflexões a respeito da necessidade do estudo de logaritmos para resolver equações exponenciais sem recorrer à igualdade de potências de mesma base.

  Durante o trabalho, verifique se os alunos são capazes de interpretar a questão apresentada nessa página no sentido de identificar que os microrganismos dividem-se em dois indivíduos, os quais se dividem em quatro, que por sua vez originam oito indivíduos, e assim sucessivamente a cada 30 minutos. Para isso, eles podem empregar o estudo de uma potência do tipo 2^t, a qual fornece a quantidade de microrganismos após t intervalos de 30 minutos. Para avaliar a compreensão dos alunos, podem ser propostas outras situações semelhantes, variando o número de indivíduos ou o tempo, por exemplo.

Sala dos professores

Para complementar os estudos realizados a partir desse assunto, verifique a possibilidade de realizar um trabalho em conjunto com o professor do componente curricular **Biologia**. Nesse trabalho, proponha

MODERNA

aos alunos a realização de uma pesquisa, em pequenos grupos, a respeito de doenças que são causadas por microrganismos e as medidas que podem ser tomadas para evitar a contaminação, contribuindo para a reflexão proposta pela questão do **Ser consciente**. Questione-os a respeito da estratégia de abordagem para conscientizar as pessoas dos cuidados que devem ser tomados com os alimentos para evitar esse tipo de problema.

Além disso, proponha aos alunos uma investigação a respeito das bactérias que são benéficas à saúde das pessoas, como as que são encontradas em alimentos probióticos, como leites fermentados e alguns iogurtes e queijos, incentivando-os a fazer levantamentos dos tipos de bactérias que têm essa característica, em quais alimentos elas são encontradas e quais são os benefícios do consumo de alimentos que contêm esses microrganismos.

BNCC O trabalho com o conteúdo dessa página aborda o tema contemporâneo transversal **Saúde**, propiciando reflexões a respeito de como manusear corretamente alimentos e objetos para evitar contaminações por bactérias, além de esclarecer que as bactérias são essenciais para a saúde das pessoas, já que muitas contribuem para a manutenção de funções vitais importantes. Nesse sentido, ao tratar de iniciativas que podem ser tomadas com o objetivo de melhorar o serviço de coleta e descarte de resíduos sólidos, aborda-se a **Competência geral 10** da BNCC.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a realizar o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo aos pares esses conteúdos para que, posteriormente, apresentem suas conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Resolução e comentários

A O número mais próximo de 1 000 representado como potência de base 2 é 1 024 ou 2^{10}. Assim:

$$10 \cdot 30\,\text{min} = 300\,\text{min} = \frac{300\,\text{min}}{60\,\text{min}} = 5\,\text{h}$$

Portanto, uma população desse microrganismo pode atingir 1 000 indivíduos em aproximadamente 5 horas.

Página 141

- Os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier (1550-1617), no início do século XVII. Antes de seu desenvolvimento, efetuar cálculos como, por exemplo, $1{,}45786 \cdot 2{,}38761$ ou $5{,}78204 : 3{,}89367$ era, em geral, trabalhoso e demorado. Contudo, após a descoberta de Napier, operações desse tipo puderam ser transformadas em adições e subtrações, o que, na maioria dos casos, era mais simples e rápido.

  Em sua obra *Mirifice logarithmorum canonis descriptio* (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), de 1614, Napier explica a natureza dos logaritmos, cujo objetivo principal era minimizar os cálculos realizados pelos navegadores e astrônomos da época.

  Napier não era um matemático profissional, porém dedicava grande parte de seu tempo ao estudo da Matemática. Os frutos dessa dedicação foram vários trabalhos que contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Uma de suas invenções ficou conhecida como barras de Napier (ou ossos de Napier), um instrumento utilizado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e cálculos de raízes quadradas.

  Atualmente, com o uso de computadores e calculadoras científicas, realizar operações como multiplicação e divisão já não é tão exaustivo. Mesmo assim, os logaritmos ainda são utilizados em algumas situações, como na resolução de equações exponenciais.

  Fonte de pesquisa: BOYER, Carl Benjamin. *História da matemática*. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Blücher, 1974.

Página 144

- No decorrer das discussões a respeito da mudança de base nos logaritmos, reforce a importância dessa propriedade, principalmente no caso em que os exercícios e problemas são resolvidos com o auxílio da calculadora. Se possível, leve uma calculadora científica para a sala de aula e comente a respeito da presença apenas de funções envolvendo o logaritmo de base decimal (função $\log x$) e o logaritmo neperiano, ou seja, de base e (função $\ln x$). Para isso, comente com os alunos que, caso haja necessidade de se realizar um cálculo utilizando a calculadora, é importante que o logaritmo em estudo esteja na base decimal ou na base e.
- Durante essa discussão, explique que o número e, conhecido por número de Euler, número de Napier ou de Neper, é uma constante matemática, muito empregada no estudo de logaritmos e exponenciais. Uma aproximação desse número com oito casas decimais é

MODERNA

$e \simeq 2{,}71828182\ldots$, o qual é classificado como um número irracional. Esse número possui diversas aplicações na representação matemática para fenômenos, como estudo de juros, decaimento radioativo, entre outros. Destaque que o logaritmo cuja base é o número e é chamado logaritmo natural ou neperiano, cuja notação é ln. Comente que esse logaritmo pode ser estudado porque satisfaz a condição para a base de um logaritmo, a qual deve ser um número real positivo diferente de 1.

Página 145

- Ao trabalhar com as tarefas da seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar algum dos problemas sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Nesse sentido, depois de resolvido esse problema, pode ser realizada uma apresentação das soluções obtidas para toda a turma e a discussão a respeito das soluções apresentadas.
- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Em debate, solicite, se possível, que eles comentem quais julgam ser as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos envolvendo logaritmos, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos.

  Mais informações sobre essas metodologias ativas podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

19 Função inversa e logarítmica

Objetivos específicos

- Abordar os requisitos necessários para que uma função tenha inversa.
- Estabelecer relações entre diferentes grandezas por meio de uma função logarítmica.
- Interpretar e esboçar o gráfico de uma função logarítmica.
- Resolver problemas envolvendo funções logarítmicas.
- Relacionar funções exponenciais e logarítmicas a partir do conceito de função inversa.
- Resolver e elaborar problemas cujos contextos envolvem equações e inequações logarítmicas.

O conteúdo abordado nesse tema corresponde às funções logarítmicas. Além de avaliar sua definição e principais características, uma discussão importante que é proposta corresponde a relacionar as funções exponenciais e logarítmicas entre si a partir do conceito de função inversa. Por isso, antes de iniciar o estudo desse tema, realize uma discussão com toda a turma a respeito da função exponencial e suas propriedades, bem como seu comportamento gráfico. Discuta os logaritmos e suas propriedades, buscando avaliar a compreensão dos alunos a respeito de ambos os conteúdos, os quais são indispensáveis para o trabalho com os conceitos propostos nesse tema.

Páginas 146 e 147 **O poder de um terremoto**

- O conteúdo das páginas de abertura trata do fenômeno dos terremotos e seus impactos sobre a sociedade, bem como a interpretação da escala Richter, que possibilita avaliar a gravidade do fenômeno e as possíveis consequências de sua ocorrência, as quais estão diretamente associadas ao conceito de função logarítmica.

Sala dos professores

Se achar conveniente, complemente os estudos dessas páginas por meio do desenvolvimento de um trabalho em conjunto com o professor do componente curricular **Geografia**. Nesse sentido, proponha aos alunos a realização de uma pesquisa, em pequenos grupos, a respeito dos fenômenos dessa natureza ocorridos nos séculos XX e XXI, indicando as respectivas classificações conforme a escala Richter, bem como os efeitos causados nos locais de ocorrência. Durante essa pesquisa, proponha que sejam considerados os eventos ocorridos em todo o planeta, inclusive no Brasil. Uma possível fonte de pesquisa é o *site* do Observatório Sismológico da Universidade de Brasília. Disponível em: <http://obsis.unb.br/portalsis/>. Acesso em: 21 ago. 2020. Ao final, os alunos podem organizar os eventos pesquisados em uma escala de magnitude, avaliando dos menores tremores aos terremotos que causaram grandes destruições.

BNCC O estudo apresentado nessas páginas aborda a **Competência específica 1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, descrita a seguir, pois trata de um fenômeno natural, no caso os terremotos, possibilitando aos alunos a compre-

MODERNA

ensão dos impactos causados por esse tipo de acontecimento sobre a sociedade.

"Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global."

Esse contexto também permite que os alunos utilizem ferramentas matemáticas para o desenvolvimento do seu estudo, contribuindo para a abordagem da **Competência específica 1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, visto que os conhecimentos matemáticos são empregados na interpretação e no estudo desse fenômeno natural.

- Para desenvolver o conteúdo proposto nesse tema, é possível utilizar a metodologia ativa **Abordagem por pares**. Oriente os alunos a fazer o estudo da temática proposta registrando suas dúvidas e discutindo, em duplas, os conteúdos abordados para que, posteriormente, apresentem suas conclusões para toda a turma. Mais informações a respeito dessa metodologia ativa podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

Página 148

- Comente com os alunos que uma função é bijetiva quando pode ser caracterizada, simultaneamente, como uma função injetiva e sobrejetiva. Uma função f é injetiva quando dois elementos, x_1 e x_2, pertencentes ao seu domínio e distintos entre si, fornecem imagens $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ também distintas entre si. Por outro lado, uma função f é sobrejetiva quando o contradomínio da função é igual ao seu conjunto imagem, ou seja, para todo y_1 e y_2 pertencentes ao contradomínio, existem x_1 e x_2 pertencentes ao domínio, tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

  Nessa discussão, esses conceitos podem ser ilustrados, por exemplo, a partir de funções afins sob a forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, inclusive em relação ao seu comportamento gráfico, uma vez que essas funções também podem ser classificadas como bijetivas e, consequentemente, injetivas e sobrejetivas ao mesmo tempo. Para estabelecer uma comparação, as funções quadráticas podem ser apresentadas como um exemplo de função não bijetiva, pois, tendo o domínio e o contradomínio descritos pelo conjunto dos números reais, tais funções não podem ser classificadas como injetivas nem como sobrejetivas.

Página 150

BNCC

A tarefa **3** da seção **Exercícios e problemas** discute o nível sonoro de um ambiente. Aproveite essa oportunidade para trabalhar com o tema contemporâneo transversal **Saúde**, no que se refere aos cuidados que devemos ter ao utilizar, por exemplo, fones de ouvido. Esclareça que, segundo pesquisas realizadas por médicos otorrinolaringologistas, a orientação é que o limite seguro para o ouvido é cerca de 80 dB, o que corresponde a utilizar os fones de ouvidos com volume, no máximo, até a metade da capacidade do equipamento, além de não dormir usando esses fones, para que não haja prejuízos à saúde auditiva.

A tarefa **7** da seção **Exercícios e problemas** contribui para o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT403**, ao propor o estudo de uma função logarítmica e de uma função exponencial a partir dos respectivos valores apresentados em um quadro, de modo que seja necessário interpretar esses dados para obter informações a respeito de suas principais características, como domínio e imagem. Esse contexto resume o que é solicitado nas **competências específicas 3** e **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, ao levar os alunos a utilizar diferentes tipos de representações matemáticas, como a algébrica (lei de formação da função) ou a geométrica (gráfico da função), na elaboração de estratégias para a resolução de problemas em diversos contextos.

Páginas 152 e 153

- No trabalho com a tarefa **23**, explique aos alunos que a utilização do pH na indústria permitiu que diversos processos, como a produção de vacinas, as fermentações e a produção de leite e seus derivados, fossem realizados por meio de procedimentos mais adequados. Se julgar conveniente, para avaliar o aprendizado dos alunos, proponha a seguinte tarefa.

Sugestão de avaliação

Em 1909, o bioquímico dinamarquês Sören P. Sörensen (1868-1939) estabeleceu uma maneira de expressar o pH de uma substância utilizando o loga-

SOBERANA

ritmo negativo da sua concentração de íons hidrogênio $\left(\left[H^+\right]\right)$, ou seja, $pH = -\log\left[H^+\right]$. A partir desse conceito, da obtenção experimental do produto iônico da água $\left(\left[H^+\right]\left[OH^-\right]\right)$ e da fórmula $pOH = -\log\left[OH^-\right]$, foi obtida a relação $pH + pOH = 14$, por meio da qual se desenvolveu uma escala de 0 a 14, em que uma solução aquosa a 25 °C pode ser classificada em ácida, neutra ou básica.

- solução ácida: $pH < 7$
- solução neutra: $pH = 7$
- solução básica: $pH > 7$

Um agrônomo, ao verificar as condições do solo para o início de um plantio, oferece ao produtor informações sobre o nível de nutrientes, o conteúdo orgânico e o pH do solo que tende a ser mais fértil.

a) Em uma propriedade rural, a produtividade máxima de feijão foi obtida com o pH 6,4 do solo. Determine a concentração de íons hidrogênio apresentada nesse solo.

b) Considerando o pH das substâncias a seguir, a 25 °C, classifique-as em ácidas, básicas ou neutras.

- leite de magnésia: $10 < pH < 11$
- suco de limão: $2 < pH < 3$
- água pura: $pH = 7$
- leite: $6 < pH < 7$

c) Considerando $\left[H^+\right]\left[OH^2\right] = 1 \cdot 10^{-14}$, obtenha a relação $pH + pOH = 14$.

Resoluções e comentários

a) $10^{-6,4}$ mol/ℓ.

b) leite de magnésia: substância básica
suco de limão: substância ácida
água pura: substância neutra
leite: substância ácida

c)
$$\left[H^+\right]\left[OH^-\right] = 1 \cdot 10^{-14} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log\left(\left[H^+\right]\left[OH^-\right]\right) = -14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -\log\left[H^+\right] - \log\left[OH^-\right] = 14 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow pH + pOH = 14$$

BNCC A tarefa **22** da página **153** contribui para o desenvolvimento da **Competência específica 3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, descrita a seguir, por abordar as consequências do acidente nuclear de Chernobyl, incentivando a reflexão dos alunos sobre a situação-problema à luz dos conhecimentos a respeito de funções logarítmicas, avaliando seus impactos para a sociedade.

"Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC)."

O estudo da tarefa **23** contribui para o desenvolvimento de aspectos da habilidade **EM13MAT305**, por relacionar o conceito de função logarítmica ao estudo do pH, propiciando a interpretação desse assunto com base em conceitos matemáticos correspondentes.

As discussões propiciadas pelo trabalho com a tarefa **25** incentivam a abordagem do tema contemporâneo transversal **Saúde**, por falar a respeito das funções da tireoide para o corpo humano, bem como os efeitos de possíveis problemas nessa glândula, permitindo enfatizar a importância de se realizar, periodicamente, exames de saúde preventivos, visando detectar possíveis problemas e auxiliando na manutenção da saúde e da qualidade de vida.

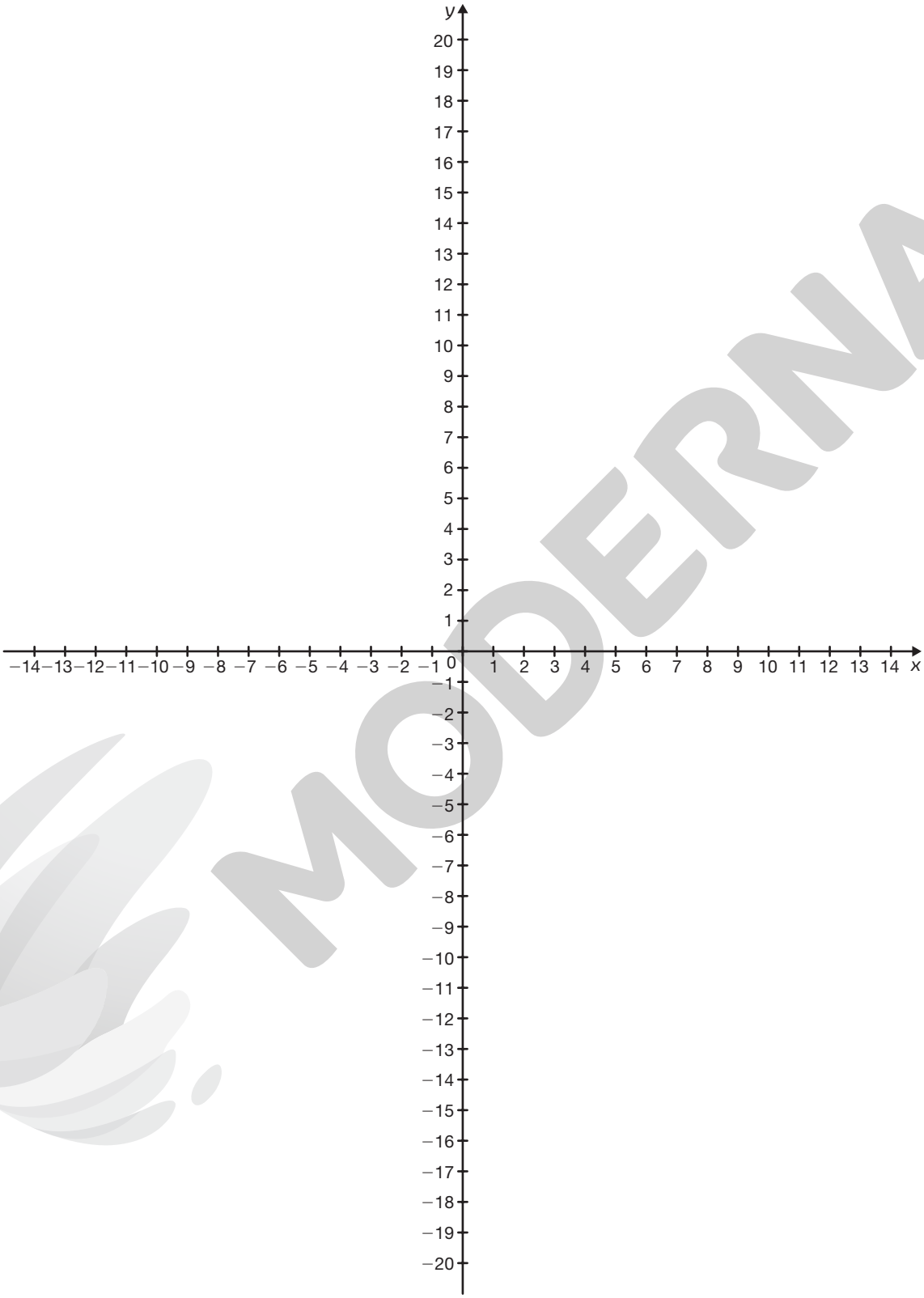
- Ao trabalhar com a seção **Exercícios e problemas**, verifique a conveniência de aplicar alguma das tarefas propostas sob a perspectiva da metodologia ativa **Think-pair-share**. Nesse sentido, após os alunos resolverem o problema, pode ser realizada uma apresentação das soluções obtidas para toda a turma e a discussão a respeito das soluções apresentadas.
- Ao fim do trabalho com esse tema, verifique a conveniência de utilizar a metodologia ativa **Quick writing** para avaliar o aprendizado dos alunos, fazendo-os refletir sobre os conteúdos abordados. Em debate, solicite, se possível, que eles comentem quais são as vantagens dos estudos matemáticos sobre os conceitos envolvendo funções logarítmicas, refletindo a respeito de sua aplicabilidade na resolução de problemas provenientes de diferentes áreas e contextos.
- Mais informações sobre essas metodologias ativas podem ser encontradas no tópico **O aluno no centro do processo de aprendizagem**, na parte geral deste **Suplemento para o professor**.

MODERNA

Plano cartesiano

Referente ao **tema 4**

MODELO



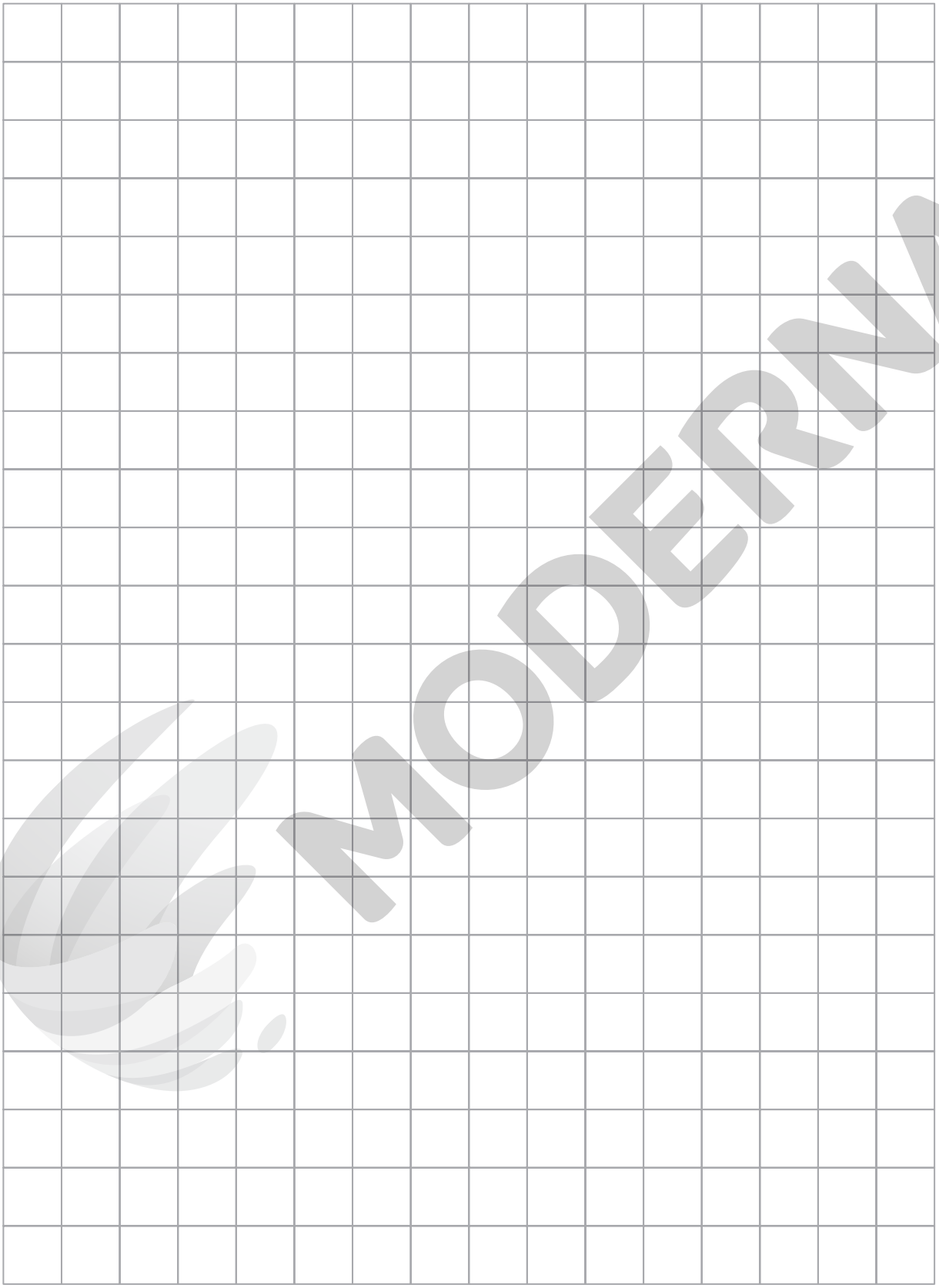
RONALDO INÁCIO

MODERNA

Malha quadriculada

Referente ao **tema 5**

MODELO



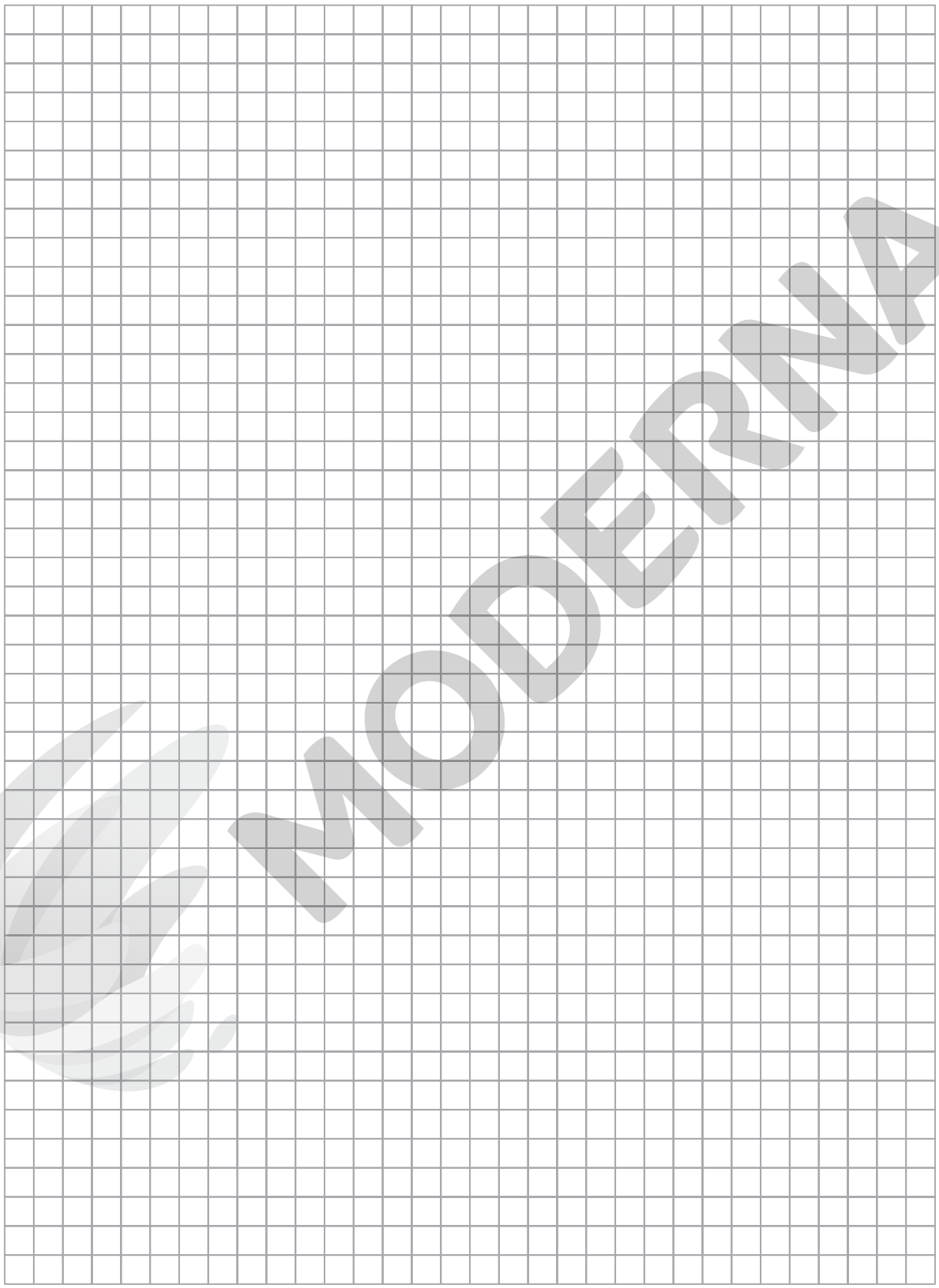
MODERNA

SERGIO L. FILHO

Malha quadriculada

Referente ao **tema 5**

MODELO



MODERNA

SERGIO L. FILHO

1 Os conjuntos

1. a) $\{a, m, i, z, d, e\}$; finito

b) $\{-9, -7, -5, -3, -1\}$; finito

c) $\{7, 14, 21, 28, \ldots\}$; infinito

d) $\left\{-\frac{3}{7}\right\}$; finito

e) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; finito

f) $\{\ \}$; finito

2. a) o conjunto Q

b) o conjunto S

c) o conjunto R

3. Uma possível resposta:

a) gambá, macaco e homem.

b) tubarão, cascudo e lambari.

c) arara, papagaio e coruja.

d) jacaré, tartaruga e iguana.

e) cobra-cega, sapo e rã.

4. a) A afirmação é falsa, pois 1 e 3 não são números pares.

b) verdadeira

c) A afirmação é falsa, pois 1, 5 e 7 não são pares.

d) A afirmação é falsa, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

e) verdadeira

f) A afirmação é falsa, pois o elemento 7 não é par, logo não pertence a P.

5. Uma possível resposta:

a) $A = \{x \mid x \text{ é par positivo e menor do que } 11\}$

b) $B = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 6\}$

c) $C = \{x \mid x \text{ é um divisor positivo de } 8\}$

d) $D = \{x \mid x \text{ é ímpar positivo e maior do que } 2\}$

e) $E = \{x \mid x \text{ é um quadrado perfeito menor ou igual a } 16\}$

f) $F = \{x \mid x \text{ é uma letra que compõe a palavra verde}\}$

6. a) verdadeira

b) falsa

c) falsa

d) falsa

e) verdadeira

f) verdadeira

7. alternativas **a**, **d** e **e**

Considerando o conjunto $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, formado pelos divisores positivos de 24, as alternativas **a** e **d** são verdadeiras, pois 2 pertence a D e 10 não pertence a D.

A alternativa **e** é verdadeira, pois o conjunto $\{1, 4, 24\}$ está contido em D.

8. alternativa **b**

As alternativas **a** e **c** não estão corretas, pois não apresentam uma relação entre os conjuntos A e E, o que deveria ocorrer, pois existem alunos do curso de Administração que também cursam Ciências Contábeis.

A alternativa **d** não está correta, pois nenhum aluno está matriculado em mais do que dois cursos.

9. $\{4, 8, 12\}$, $\{4, 8, 16\}$, $\{4, 12, 16\}$ e $\{8, 12, 16\}$

10. a) 0; 2; 6

b) $-1; -3; -7; -11$

c) $0{,}5; 8{,}012; -10{,}25; 0{,}\overline{27}; -\frac{4}{3}$

11. O número $-\frac{3}{7}$ é maior. Uma possível resposta: forma fracionária $-\frac{1}{2}$, forma decimal $-0{,}55$.

12. a) Seja $x = 0{,}\overline{6}$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 10, temos:

$$10x = 10 \cdot 0{,}\overline{6}$$
$$10x = 6{,}\overline{6}$$
$$10x = 6 + 0{,}\overline{6}$$
$$10x = 6 + x$$
$$9x = 6$$
$$x = \frac{6}{9} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Logo, a fração geratriz é $\frac{2}{3}$.

b) Seja $x = 0{,}\overline{81}$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 100, temos:

$$100x = 100 \cdot 0{,}\overline{81}$$
$$100x = 81{,}\overline{81}$$
$$100x = 81 + 0{,}\overline{81}$$
$$100x = 81 + x$$
$$99x = 81$$
$$x = \frac{81}{99} \Rightarrow x = \frac{9}{11}$$

Logo, a fração geratriz é $\frac{9}{11}$.

c) Sendo $x = 1{,}\overline{35}$, então:

$$100x = 1{,}\overline{35} \cdot 100 \Rightarrow 100x = 135{,}\overline{35} \quad \text{(I)}$$

$$100 \cdot 100x = 135{,}\overline{35} \cdot 100 \Rightarrow 10\,000x = 13\,535{,}\overline{35} \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$$10\,000x - 100x = 13\,535{,}\overline{35} - 135{,}\overline{35}$$
$$9\,900x = 13\,400$$
$$x = \frac{13\,400}{9\,900} \Rightarrow x = \frac{134}{99}$$

Portanto, a fração geratriz é $\frac{134}{99}$.

d) Seja $x = 8{,}\overline{3}$ a equação (I). Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 10, temos:

$$10x = 10 \cdot 8{,}\overline{3} \Rightarrow 10x = 83{,}\overline{3} \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II) obtemos:

$$10x - x = 83{,}\overline{3} - 8{,}\overline{3}$$
$$9x = 75$$
$$x = \frac{75}{9} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$$

Portanto, a fração geratriz é $\frac{25}{3}$.

MODERNA

e) Seja $x = 0,\overline{125}$. Multiplicando ambos os membros dessa igualdade por 1 000, temos:

$$1\,000x = 1\,000 \cdot 0,\overline{125}$$
$$1\,000x = 125,\overline{125}$$
$$1\,000x = 125 + 0,\overline{125}$$
$$1\,000x = 125 + x$$
$$999x = 125$$
$$x = \frac{125}{999}$$

Logo, a fração geratriz é $\frac{125}{999}$.

f) Sendo $x = 10,\overline{36}$, então:

$$100x = 10,\overline{36} \cdot 100 \Rightarrow 100x = 1\,036,\overline{36} \quad \text{(I)}$$
$$100 \cdot 100x = 1\,036,\overline{36} \cdot 100 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10\,000x = 103\,636,\overline{36} \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), temos:

$$10\,000x - 100x = 103\,636,\overline{36} - 1\,036,\overline{36}$$
$$9\,900x = 102\,600$$
$$x = \frac{102\,600}{9\,900} \Rightarrow x = \frac{114}{11}$$

Portanto, a fração geratriz é $\frac{114}{11}$.

13. a) De acordo com o Teorema de Pitágoras e indicando por d a medida da diagonal do retângulo, temos:

$$d^2 = 5^2 + 2,5^2 \Rightarrow d = \sqrt{31,25} \Rightarrow d = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, a medida da diagonal $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm é expressa por um número irracional.

b) De acordo com o Teorema de Pitágoras e indicando por d a medida da diagonal do retângulo, temos:

$$d^2 = \left(\sqrt{28}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow d = \sqrt{36} \Rightarrow d = 6$$

Portanto, a medida da diagonal 6 cm é expressa por um número racional.

14. Não. Espera-se que os alunos justifiquem suas respostas apresentando um contraexemplo, como o produto entre os números irracionais $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$ que é igual a 4, ou seja, um número racional.

3 Noção intuitiva de função

1. a) variáveis: ano e população

b) A população era de 121,2 milhões de habitantes.

2. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

3. a) Variável dependente: quantia depositada (D); variável independente: comissão de vendas mensal recebida por Joana (x).

b) $D(x) = 0,75x + 50 \Rightarrow D(1\,200) = 0,75 \cdot 1\,200 + 50 = 950$

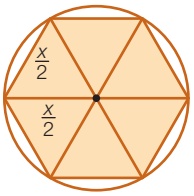
Portanto, Joana depositou R$ 950,00 no mês de março.

c) Queremos descobrir para qual valor de x temos $D(x)$ igual a R$ 1 250,00. Assim, fazemos:

$$D(x) = 0,75x + 50 \Rightarrow 1\,250 = 0,75x + 50 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{1\,250 - 50}{0,75} \Rightarrow x = 1\,600$$

Portanto, Joana precisa receber R$ 1 600,00 de comissão.

4. a) Ao dividir o hexágono em seis partes iguais, obtemos seis triângulos equiláteros, ou seja:



HELOÍSA PINTARELLI

Portanto, uma fórmula que permite calcular seu perímetro é dada por $P = 6 \cdot \frac{x}{2}$ ou $P = 3x$.

b) De acordo com a fórmula, temos:

- $P = 3 \cdot 2 \Rightarrow P = 6$

  Assim, o perímetro de cada triângulo é 6 m.
- $P = 3 \cdot 12 \Rightarrow P = 36$

  Portanto, o perímetro do hexágono é 36 m.

c) De acordo com a fórmula, temos:

- $\underset{P}{21} = 3 \cdot x \Rightarrow x = 7$

  Assim, o valor de x é 7 m.
- $\underset{P}{10,2} = 3 \cdot x \Rightarrow x = 3,4$

  Assim, o valor de x é 3,4 m.

5. alternativa **b**

Para resolver esse problema, os alunos devem observar a seguinte relação:

- figura I: 1 quadrado e 4 canudos.
- figura II: 2 quadrados e 7 canudos.
- figura III: 3 quadrados e 10 canudos.

Entre as expressões fornecidas nas alternativas, temos $C = 3Q + 1$.

6. alternativa **b**

a) Não é função, pois $-1 \in A$ não possui um correspondente em B.

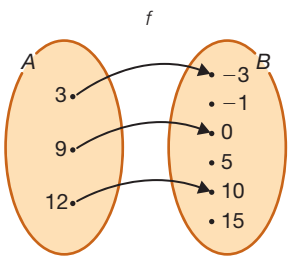
b) É função.

c) Não é função, pois os elementos 1 e 2 pertencentes a A possuem, cada um, dois correspondentes em B.

7. alternativa **d**

A alternativa **a** está incorreta, excluir o elemento e não é suficiente para que seja uma função. Nas alternativas **b** e **c**, não há necessidade de excluir o elemento j, pois ele está no contradomínio. Portanto, a alternativa correta é **d**.

8.



HELOÍSA PINTARELLI

9. a) $Im(h) = \{24, 30, 40, 60, 120\}$

b) $Im(h) = \{20, 24, 30, 40, 60\}$

c) $Im(h) = \{25, 31, 41, 61, 121\}$

d) $Im(h) = \{23, 29, 39, 59, 119\}$

MODERNA

10. a) Como nesse estacionamento é pago um preço fixo de R$ 2,50 por hora, temos:

$p(t) = 2{,}5 \cdot t$

b) Substituindo t por 3 em $p(t) = 2{,}5 \cdot t$, obtemos:

$p = 2{,}5 \cdot 3 \Rightarrow p = 7{,}5$

Portanto, Carlos pagará R$ 7,50.

11. a) $p(t) = 680t$

b) $p(24) = 680 \cdot 24 \Rightarrow p(24) = 16\,320$

- Algumas possíveis respostas: vício, pois o cérebro do fumante se adapta e precisa de doses cada vez maiores para manter o mesmo nível de satisfação que tinha no início; causa direta de aproximadamente 50 doenças, como câncer, doenças cardiovasculares e respiratórias.

12. a) Utilizando a fórmula, temos:

$p(2013) = 2{,}3 \cdot 2\,013 - 4\,500 \Rightarrow p(2013) = 129{,}9$

Assim, tem-se uma estimativa de 129 900 habitantes.

$p(2019) = 2{,}3 \cdot 2\,019 - 4\,500 \Rightarrow p(2019) = 143{,}7$

Assim, tem-se uma estimativa de 143 700 habitantes.

b) Espera-se que os alunos digam que não, pois a fórmula apresentada é para estimativas da população no período entre os anos de 2010 e 2020. Caso a utilizássemos para 1950, a população estimada seria −15 000 habitantes, o que não faz sentido.

13. alternativa b

Como o produtor plantou 10 hectares, seus gastos foram, em média, de R$ 12 000,00. Os ganhos podem ser obtidos pela multiplicação entre a quantidade x de sacas e o valor unitário delas, que é R$ 50,00. Logo, conforme os dados do problema, a expressão que determinou o lucro L do produtor naquele ano é $L(x) = 50x - 12\,000$.

14. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

c) $x - 7 \neq 0 \Rightarrow x \neq 7$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 7\}$

d) $12 - x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 12$

$D(f) =]-\infty, 12]$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 12\}$

e) $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$

$D(f) =]-\infty, 4[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

f) $3x - 6 > 0 \Rightarrow x > 2$

$D(f) =]2, +\infty[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

15. alternativa b

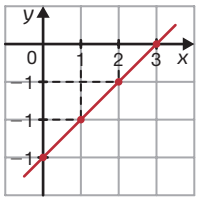
$$x + 8 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant -8$$
$$-4x - 16 > 0 \Rightarrow x < -4$$
$$D(f) = [-8, -4[\text{ ou } D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 \leqslant x < 4\}$$

16. a) O domínio não está correto. Resposta pessoal. Os alunos podem responder, por exemplo, que Aroldo considerou apenas um dos possíveis casos para que $\frac{x-6}{x+2} \geqslant 0$, nesse caso, quando $x - 6 \geqslant 0$ e $x + 2 \geqslant 0$.

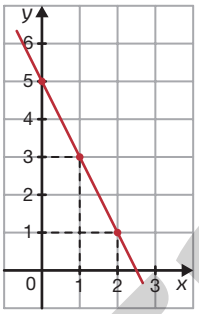
b) Para a condição $\frac{x-6}{x+2} \geqslant 0$, temos duas possibilidades: $x - 6 \geqslant 0$ e $x + 2 > 0$ ou $x - 6 \leqslant 0$ e $x + 2 < 0$. A primeira possibilidade ocorre quando $x \geqslant 6$, já a segunda ocorre quando $x < -2$. Portanto, o domínio da função f é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant 6\}$.

4 Gráfico de uma função

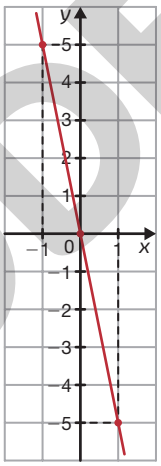
1. a)



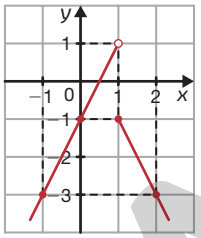
b)



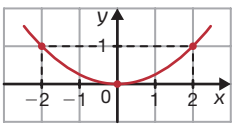
c)



d)



e)



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

2. a)

- Caso uma pessoa consuma 12 mil litros de água, ela terá que pagar de acordo com a Tarifa 2. Nesse caso, temos que $c = 12$, ou seja, $10 < c \leqslant 20$. Logo:

$f(c) = 24{,}79 + 3{,}10(c - 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(12) = 24{,}79 + 3{,}10(12 - 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(12) = 24{,}79 + 6{,}20 \Rightarrow f(12) = 30{,}99$

Portanto, a pessoa deve pagar R$ 30,99 pela fatura de água.

- Caso uma pessoa consuma 27,3 mil litros de água, ela terá que pagar de acordo com a Tarifa 3. Nesse caso, temos que $c = 27{,}3$, ou seja, $c > 20$. Logo:

$f(c) = 55{,}79 + 5{,}20(c - 20) \Rightarrow$

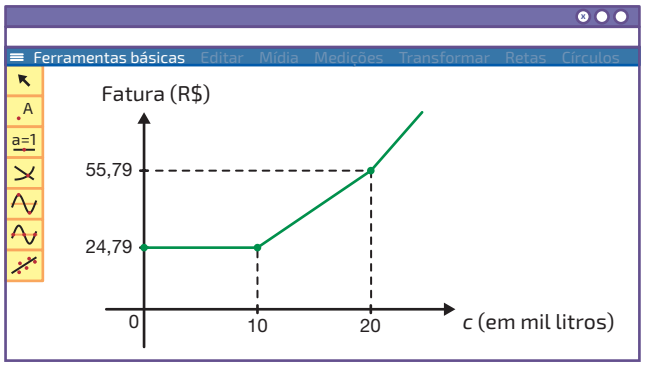
$\Rightarrow f(27{,}3) = 55{,}79 + 5{,}20(27{,}3 - 20) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(27{,}3) = 93{,}75$

Portanto, a pessoa deve pagar R$ 93,75 pela fatura de água.

MODERNA

b)



3. alternativas **a**, **b**, **e** e **f**

a) representa uma função

b) representa uma função

c) Não é o gráfico de uma função, pois podemos traçar ao menos uma reta paralela ao eixo y cortando o gráfico em dois pontos distintos.

d) Não é o gráfico de uma função, pois para uma mesma abscissa estão associadas infinitas ordenadas.

e) representa uma função

f) representa uma função

4. **a)** $-3 \leqslant x \leqslant 7$ e $1 \leqslant y \leqslant 3$

Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 7\}$ e

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 3\}$.

b) $-1 < x < 5$ e $-2 < y < 4$

Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$ e

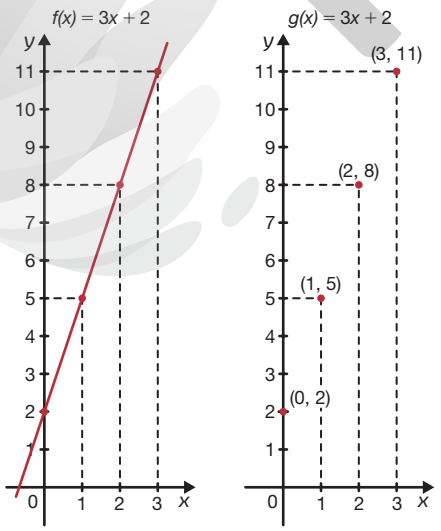
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 4\}$.

c) $-2 < x \leqslant 5$ e $-1 \leqslant y \leqslant 3$

Portanto, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 5\}$ e

$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$.

5. Espera-se que os alunos digam que por apresentarem domínios diferentes, f e g têm seus gráficos diferentes entre si. No caso de f, podem ser escolhidos dois ou mais pontos e traçada uma reta por eles. Já a função g deve ser representada apenas pelos pontos cuja abscissa é um número natural.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

6. **a)** $f(4) = 2$

b) $x = -4$, $x = -2$ e $x = 1$

c) Projetando o gráfico de f nos eixos x e y, temos:

$-6 \leqslant x \leqslant 6$ e $-2 \leqslant y \leqslant 4$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leqslant x \leqslant 6\}$ e

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\}$.

7. **a)** $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 12\}$ e

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant y \leqslant 5\}$

b)
- $[3, 5]$ e $[8, 10]$
- $[-4, -2]$
- $[-2, 3]$, $[5, 8]$ e $[10, 12]$

c) Os zeros da função são $x = -\frac{28}{9}$ e $x = 9$, pois para esses valores $f(x) = 0$.

8. **a)** Como $t(x) = 42 + 0{,}2x$, temos:
- $t(20) = 42 + 0{,}2 \cdot 20 = 46$
- $t(30) = 42 + 0{,}2 \cdot 30 = 48$

Portanto, os tempos de entrega de encomendas de 20 e 30 peças são, respectivamente, iguais a 46 h e 48 h.

b) Crescente, pois quanto maior for a quantidade de peças encomendadas, maior será o tempo para a entrega.

9. **a)** Verde, pois, como a tartaruga não parou, sua distância em relação à largada foi crescente durante todo o tempo de corrida.

b) Não, pois em certo intervalo, que corresponde ao período em que a lebre permaneceu dormindo, a função é constante.

c) tartaruga; Algumas possíveis respostas: quem segue devagar e com constância pode chegar à frente; paciência pode valer mais do que a pressa; nem sempre os mais velozes chegam em primeiro lugar.

10. **a)** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(10) - y(2)}{10 - 2} = \frac{3 - 1}{8} = \frac{1}{4}$

Portanto, a taxa de variação média no intervalo é $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(8) - y(1)}{8 - 1} = \frac{\frac{1}{2} - 4}{7} = \frac{-\frac{7}{2}}{7} = -\frac{1}{2}$

Portanto, taxa de variação média no intervalo é $-\frac{1}{2}$.

11. **a)** Conforme os dados do gráfico, em 7 semanas a planta atingiu 9 cm de altura.

b) Calculando a taxa média de crescimento em cada um dos intervalos, temos:

- Intervalo $[2, 4]$:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(4) - h(2)}{4 - 2} = \frac{4{,}1 - 0{,}9}{2} = \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6$$

Portanto, a taxa de variação média do crescimento nesse intervalo é 1,6 cm por semana.

- Intervalo $[4,9]$:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(9) - h(4)}{9 - 4} = \frac{11{,}7 - 4{,}1}{5} = \frac{7{,}6}{5} = 1{,}52$$

Portanto, a taxa de variação média do crescimento nesse intervalo é 1,52 cm por semana.

12. Espera-se que os alunos concluam que, nesse contexto, a taxa de variação média representa a aceleração escalar média.

13. a) alternativa II

b) $D(f) = [0, 16]$ e $Im(f) = [0, 12]$

c) De 0 a 4 meses. Espera-se que os alunos justifiquem que aumenta mais rápido nesse intervalo, porque a taxa de variação média da função f no intervalo $[0, 4]$ é maior do que a taxa de variação média no intervalo $[4, 16]$.

5 Função afim

1. a) função afim

b) função afim, linear e identidade

c) função afim e linear

d) função afim e constante

e) função afim

f) função afim e linear

2. a) Indicando por x o perímetro que queremos determinar, temos:

$$\frac{2}{10} = \frac{13}{x} \Rightarrow 2x = 130 \Rightarrow x = 65$$

Portanto, o perímetro do pentágono é 65 cm.

b) Indicando por c a medida de comprimento do pentágono, temos:

$$\frac{2}{10} = \frac{c}{p} \Rightarrow 2p = 10c \Rightarrow p = 5c$$

Portanto, a expressão desejada é $p(c) = 5c$.

3. a) $a = \frac{1}{4} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x + b$

$f(2) = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot 2 + b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$

Portanto, $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

b) $b = 5 \Rightarrow f(x) = ax + 5$

$f(3) = 11 \Rightarrow 3a + 5 = 11 \Rightarrow a = 2$

Portanto, $f(x) = 2x + 5$.

c) $\begin{cases} f(1) = 3 \\ f(3) = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 2$

Portanto, $f(x) = x + 2$.

d) $\begin{cases} f(-2) = 7 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = 7 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \text{ e } b = 3$

Portanto, $f(x) = -2x + 3$.

4. a) Como cada gafanhoto come cerca 1,5 grama de folhas por dia, indicando q e m, respectivamente, a quantidade de gafanhotos-do-deserto e a massa total, a lei de formação desejada é:

$$m(q) = 1{,}5\,q$$

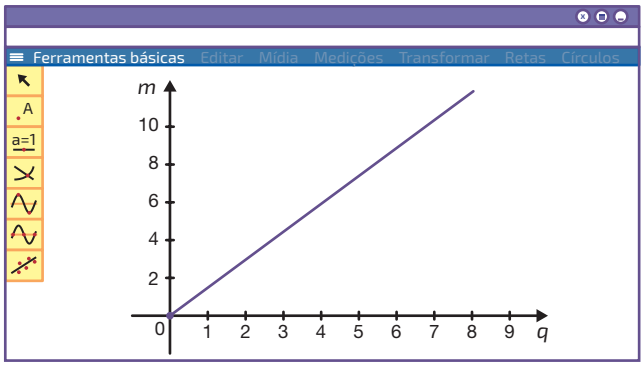
b) Temos:

$$m(50\,000\,000) = 1{,}5 \cdot 50\,000\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(50\,000\,000) = 75\,000\,000$$

Portanto, 50 000 000 de gafanhotos-do-deserto podem comer 75 000 000 de gramas de folhas ou, ainda, 75 toneladas de folhas.

5.



6. a) Indicando por n o número de lados de um polígono convexo, temos:

$$s(n) = 180 \cdot (n - 2) \Rightarrow s(n) = 180n - 360$$

Portanto, a lei de formação é $s(n) = 180n - 360$, para todo n maior do que 2.

b) Aplicando a fórmula do item a, temos:

$$s(6) = 180 \cdot 6 - 360 = 720$$

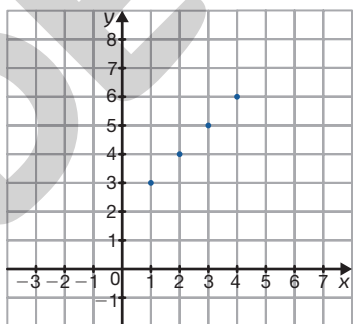
Portanto, a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de 6 lados é 720°.

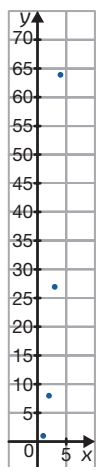
c) Aplicando a fórmula do item a, temos:

$$s(n) = 2\,340 \Rightarrow 180n = 2\,700 \Rightarrow n = 15$$

Portanto, esse polígono possui 15 lados.

7. a) Conforme os dados do problema, temos:





ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Portanto, os pontos do quadro A pertencem a uma reta e, consequentemente, correspondem a uma função afim.

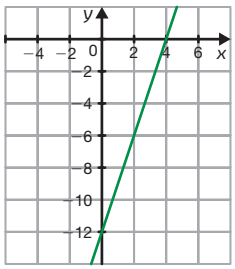
b) De acordo com os quadros A e B temos:

Quadro A: $y = x + 2$

Quadro B: $y = x^3$

MODERNA

8. **a)** Conforme os dados do problema, temos:

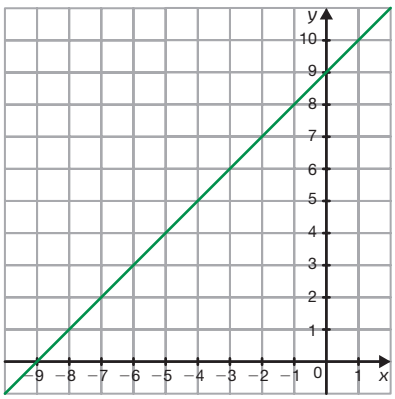


Calculando o zero da função:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, o zero de f é $x = 4$.

b) Conforme os dados do problema, temos:

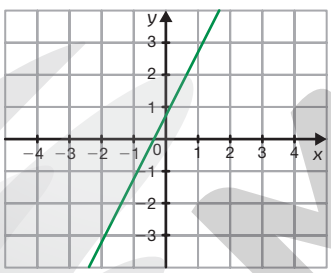


Calculando o zero da função:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x = -9 \Rightarrow x = 9$$

Portanto, o zero de f é $x = 9$.

c) Conforme os dados do problema, temos:

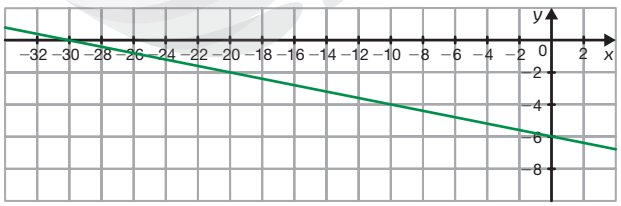


Calculando o zero da função:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x = -\frac{3}{4} \Rightarrow x = -\frac{3}{8}$$

Portanto, o zero de f é $x = -\frac{3}{8}$.

d) Conforme os dados do problema, temos:



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Calculando o zero da função:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{5}x = -6 \Rightarrow x = -30$$

Portanto, o zero de f é $x = -30$.

9. **a)** Calculando a temperatura em Celsius, temos:

$$C(50) = \frac{5}{9} \cdot (50 - 32) = 10$$

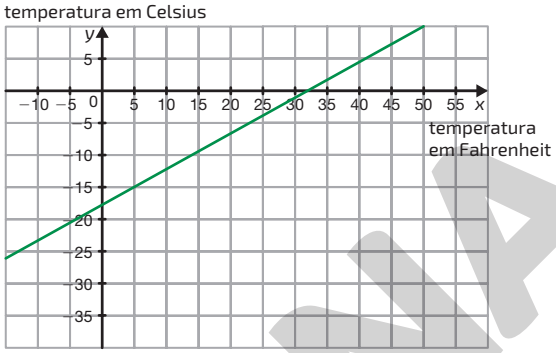
Portanto, 50 °F equivalem a 10 °C.

b) Determinando o zero da função, temos:

$$C(F) = 0 \Rightarrow \frac{5}{9} \cdot (F - 32) = 0 \Rightarrow F = 32$$

Portanto, o zero da função representa que o 0 °C corresponde a 32 °F.

c) Conforme os dados do problema, temos:



HELOÍSA PINTARELLI

10. **a)** • estabelecimento A:

$$\begin{cases} p_A(0) = 24 \\ p_A(4) = 360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 24 \\ 4a + b = 360 \end{cases} \Rightarrow a = 84 \text{ e } b = 24$$

Assim, $p_A(t) = 84t + 24$.

• estabelecimento B:

$$\begin{cases} p_B(0) = 0 \\ p_B(4) = 368 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 4a + b = 368 \end{cases} \Rightarrow a = 92 \text{ e } b = 0$$

Assim, $p_B(t) = 92t$.

b) $p_A(t) < p_B(t) \Leftrightarrow 84t + 24 < 92t \Leftrightarrow -8t < -24 \Leftrightarrow t > 3$

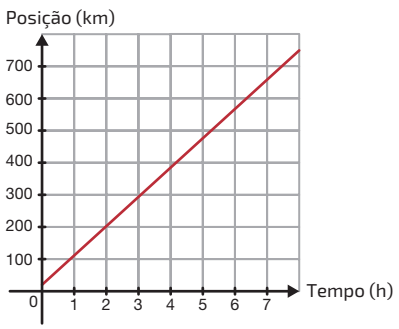
Logo, a partir de 3 h de jogo é mais econômico no estabelecimento A.

11. **a)** Calculando a velocidade média (V_m), temos:

$$V_m = \frac{650 - 20}{7 - 0} = \frac{630}{7} = 90$$

Portanto, a velocidade média é 90 km/h.

b) Gráfico:



HELOÍSA PINTARELLI

O gráfico dessa função pertence a uma reta e, consequentemente, corresponde a uma função afim.

c) Interpretando os dados da tabela, podemos observar que a lei de formação é dada por $S(t) = 20 + 90t$ onde t é o tempo em horas, $D(S) = \mathbb{R}_+$ e $Im(S) = \mathbb{R}_+^*$.

d) Conforme a fórmula do item **c**, temos:

$$S(10) = 20 + 90 \cdot 10 = 920$$

Portanto, após 10 h, a posição ocupada pelo automóvel nessa estrada é no quilômetro 920.

MODERNA

12. **a)** De acordo com os dados do problema, as leis de formação são:

- Terra: $T(m) = 9{,}8m$.
- Lua: $L(n) = 1{,}6n$.

b) Determinando o peso (em N) na Terra de uma pessoa de 75 kg na Lua:

$$L(75) = 1{,}6 \cdot 75 = 120$$

Determinando o peso (em N) na Lua de uma pessoa de 75 kg na Terra:

$$T(75) = 9{,}8 \cdot 75 = 735$$

Portanto, uma pessoa de 75 kg pesa 120 N na Lua e 735 N na Terra.

c) Conforme a fórmula obtida no item **a**, temos:

$$L(n) = 91{,}2 \Rightarrow 1{,}6n = 91{,}2 \Rightarrow n = \frac{91{,}2}{1{,}6} = 57$$

Portanto, essa pessoa tem 57 kg.

d) Calculando a massa dessa pessoa em quilogramas, temos:

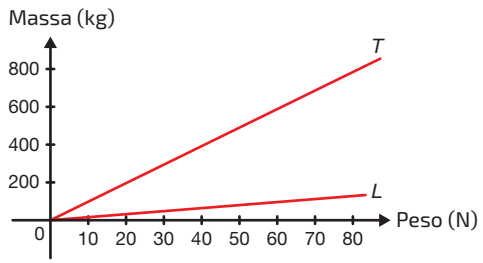
$$L(n) = 96 \Rightarrow n = \frac{96}{1{,}6} \Rightarrow n = 60$$

Conforme a fórmula obtida no item **a**, calculamos o peso dessa pessoa na Terra em newtons.

$$T(60) = 9{,}8 \cdot 60 = 588$$

Portanto, essa pessoa pesa, na Terra, 588 N.

e) Conforme os dados do problema, temos:



HELOÍSA PINTARELLI

13. alternativa **c**

Conforme os dados do problema, temos:

$$V(P) = aP \Rightarrow V(30) = -8 \Rightarrow 30a = -8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -\frac{8}{30} \Rightarrow a = -\frac{4}{15}$$

Logo, $V(P) = -\frac{4}{15}P$.

Assim:

$$V(8) = -\frac{4}{15} \cdot 8 \Rightarrow V(8) = -\frac{32}{15}$$

$$4V(2) = 4 \cdot \left(-\frac{4}{15} \cdot 2\right) \Rightarrow 4V(2) = -\frac{32}{15}$$

Portanto, $V(8) = 4V(2)$.

6 Função afim crescente e função afim decrescente

1. A função é decrescente, pois, à medida que aumentamos os valores de x (referentes aos meses de mensalidades pagas), os valores correspondentes de y (referentes às quantias em dinheiro das economias) diminuem.

2. **a)** Para um prato com massa 730 g, ou seja, acima de 700 g, o preço pago será de R$ 25,60.

Para o prato com 300 g, ou seja, menor do que 700 g, em que o preço do quilo é R$ 36,00, temos:

$$300 \text{ g} = 0{,}3 \text{ kg}$$

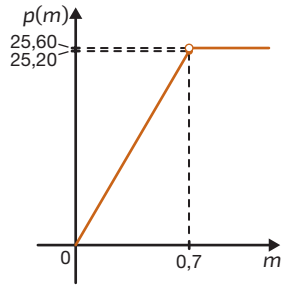
$$0{,}3 \cdot 36 = 10{,}8$$

Portanto, um prato de 730 g custará R$ 25,60 e o prato com 300 g custará R$ 10,80.

b) A lei de formação da função que expressa o preço a ser pago por um prato nesse restaurante será:

$$p(m) = \begin{cases} 36m, \text{ se } m \leqslant 0{,}7 \\ 25{,}60, \text{ se } m > 0{,}7 \end{cases}$$

c) Conforme os dados do problema temos:



SERGIO L. FILHO

Portanto, a função será crescente para $0 < m \leqslant 0{,}7$ e constante para $m > 0{,}7$.

3. **a)** Determinando a quantidade de água que três bombas retiram em uma hora:

$$3 \cdot 3\,000 = 9\,000$$

Ou seja, a cada hora as três bombas retiram 9 000 litros de água do reservatório.

Logo, em três horas essas bombas irão retirar:

$$3 \cdot 9\,000 = 27\,000$$

Portanto, com as três bombas ligadas durante três horas, serão retirados 27 000 litros de água do reservatório.

b) Conforme os dados do problema, a lei da função que representa a quantidade de água no reservatório é $Q(t) = 150\,000 - 9\,000t$.

c) A função é decrescente, pois, à medida que aumentamos os valores de t (tempo em que as bombas ficam ligadas), os valores correspondentes de $y = Q(t)$ (quantidade de água no reservatório) diminuem.

4. **a)** Se b_1 e b_2 são os custos fixos das fábricas **A** e **B**, respectivamente, e a é o custo para produzir a peça, então as funções $C_A(x) = ax + b_1$ e $C_B(x) = ax + b_2$ representam os custos totais das fábricas **A** e **B**, respectivamente, para x peças produzidas.

Logo:

$$h(x) = |C_A(x) - C_B(x)| \Rightarrow h(x) = |b_1 - b_2|.$$

Como h é constante, temos:

$$h(x) = h(5\,000) = |C_A(5\,000) - C_B(5\,000)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(5\,000) = |18\,000 - 20\,000| \Rightarrow h(5\,000) = 2\,000$$

Portanto, $h(x) = 2\,000$.

b) A função é constante, pois, à medida que aumentamos os valores de x (peças produzidas), os valores correspondentes de y (custos totais) permanecem o mesmo.

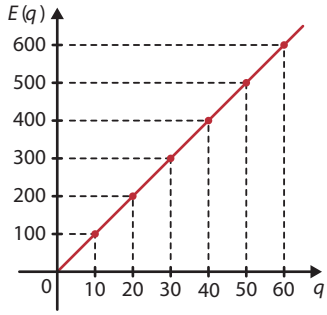
5. **a)** Conforme os dados do problema, a lei de formação da função é:

$$E(q) = \frac{30}{100} \cdot \left(\frac{100}{3}q\right) \Rightarrow E(q) = 10q$$

b) A função é crescente, pois, à medida que aumentamos os valores de q (quantidade de cana-de-açúcar), os valores correspondentes de $y = E(q)$ (energia produzida) aumentam.

MODERNA

c) Com base na lei de formação, temos:



KEITHY MOSTACHI

- Algumas possíveis respostas: ajuda a poupar os reservatórios de hidrelétricas; quando comparada a combustíveis fósseis, as emissões de gases de efeito estufa são menores; menores perdas e redução em custos associados à transmissão de energia elétrica.

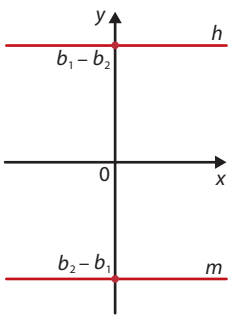
6. Indicando $f(x) = ax + b_1$ e $g(x) = ax + b_2$, temos:

$$h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x) = \left(ax + b_1\right) - \left(ax + b_2\right) \Rightarrow h(x) = b_1 - b_2$$

$$m(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow m(x) = \left(ax + b_2\right) - \left(ax + b_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(x) = b_2 - b_1$$



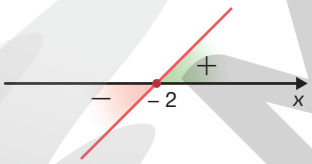
KEITHY MOSTACHI

Portanto, observando o gráfico podemos verificar que as funções h e m são constantes.

7. a) Inicialmente, obtemos o zero de f:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x + 6 = 0 \Rightarrow x = -2$$

Se $a > 0$, então f é crescente.



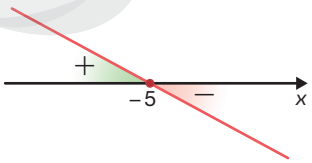
Portanto, observando o gráfico podemos verificar que:

- a função se anula, ou seja, $f(x) = 0$ para $x = -2$.
- a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$ para $x > -2$.
- a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$ para $x < -2$.

b) Inicialmente obtemos o zero de f:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

Se $a < 0$, então f é decrescente.



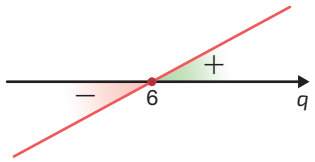
Portanto, observando o gráfico podemos verificar que:

- a função se anula, ou seja, $f(x) = 0$ para $x = -5$.
- a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$ para $x < -5$.
- a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$ para $x > -5$.

c) Inicialmente obtemos o zero de f:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} - 3 = 0 \Rightarrow x = 6$$

Se $a > 0$, então f é crescente.



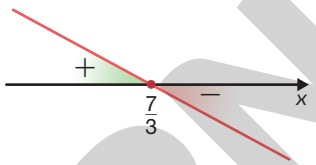
Portanto, observando o gráfico podemos verificar que:

- a função se anula, ou seja, $f(x) = 0$, quando $x = 6$.
- a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$, quando $x > 6$.
- a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$, quando $x < 6$.

d) Inicialmente, obtemos o zero de f:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -3x + 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{3}$$

Se $a < 0$, então f é decrescente.



ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI

Portanto, observando o gráfico podemos verificar que:

- a função se anula, ou seja, $f(x) = 0$ para $x = \frac{7}{3}$.
- a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$ para $x < \frac{7}{3}$.
- a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$ para $x > \frac{7}{3}$.

8. Para que ambas assumam valores positivos, temos:

$$f(x) = -3x + 15$$

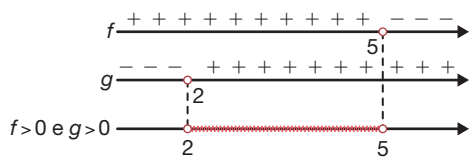
$$f(x) = 0 \Rightarrow -3x + 15 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Se $a < 0$, então f é decrescente.

$$g(x) = 4x - 8$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Se $a > 0$, então g é crescente.



KEITHY MOSTACHI

Portanto, para $x \in]2,5[$ as funções f e g assumem valores positivos.

9. a) Sabendo que $f(0) = 5$, $f(2) = 6$ e sendo f uma função afim na forma $f(x) = ax + b$, temos:

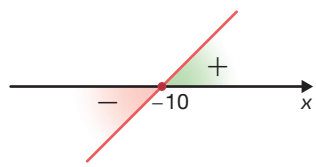
$$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow 5 = b$$

$$f(2) = a \cdot 2 + 5 \Rightarrow 6 = 2a + 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x + 5 = 0 \Rightarrow x = -10$$

Se $a > 0$, então f é crescente.



KEITHY MOSTACHI

MODERNA

Portanto, observando o gráfico podemos verificar que:

- a função se anula, ou seja, $f(x) = 0$ para $x = -10$.
- a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$ para $x > -10$.
- a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$ para $x < -10$.

b) $f(x) > 0$ para todo x real.

Se $a = 2$, então f é constante.

c) Sabendo que $f(0) = 4$, $f(3) = -2$ e sendo f uma função afim na forma $f(x) = ax + b$, temos:

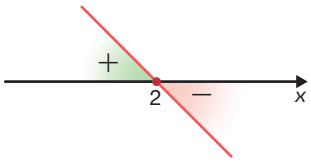
$$f(0) = a \cdot 0 + b \Rightarrow 4 = b$$

$$f(3) = a \cdot 3 + 4 \Rightarrow -2 = 3a + 4 \Rightarrow a = -2$$

Assim:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Se $a < 0$, então f é decrescente.



KEITHY MOSTACHI

Portanto, observando o gráfico podemos verificar que:

- a função se anula, ou seja, $f(x) = 0$ para $x = 2$.
- a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$ para $x < 2$.
- a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$ para $x > 2$.

10. **a)** $A(t) = 4{,}5t + 6$

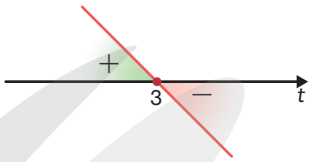
b) $B(t) = 6{,}5t$

c) Considere a função $F(t) = A(t) - B(t)$.

$$F(t) = -2t + 6$$

$$F(t) = 0 \Rightarrow -2t + 6 = 0 \Rightarrow t = 3$$

Se $a < 0$, então F é decrescente.



SERGIO L. FILHO

A opção **B** é mais vantajosa para um período menor do que 3 h e a opção **A**, para um período maior do que 3 h. As opções **A** e **B** têm o mesmo preço para 3 h.

11. alternativa **c**

$$V_A(n) = 1500n + 1400$$

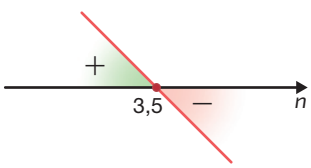
$$V_B(n) = 1700n + 700$$

Considere a função $h(n) = V_A(n) - V_B(n)$, ou seja, $h(n) = 700 - 200n$.

Assim, obtemos o zero de f:

$$h(n) = 0 \Rightarrow 700 - 200n = 0 \Rightarrow n = 3{,}5$$

Se $a < 0$, então h é decrescente.



KEITHY MOSTACHI

Portanto, $h(n) < 0$ para $n > 3{,}5$, ou seja, $V_A(n) < V_B(n)$ para $n > 3{,}5$. Portanto, o valor de n é 4.

12. **a)** • 1ª proposta: $S_1(v) = 1\,600 + 0{,}05v$

- 2ª proposta: $S_2(v) = 1\,100 + 0{,}075v$

b) Determinando qual proposta é mais vantajosa, temos:

$$S_1(v) > S_2(v) \Rightarrow 1\,600 + 0{,}05v > 1\,100 + 0{,}075v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 500 > 0{,}025v \Rightarrow v < 20\,000$$

Portanto, para vendas menores do que R$ 20 000,00, a 1ª proposta é mais vantajosa. Já para vendas maiores do que R$ 20 000,00, a 2ª proposta é mais vantajosa.

13. **a)** Conforme os dados do problema, temos:

- locadora **A**: $V_A(x) = 82 + 0{,}52x$.
- locadora **B**: $V_B(x) = 76 + 0{,}55x$.

b) Como $x = 75$, calculando o valor pago pelo aluguel, a cada locadora, temos:

$$V_A(75) = 82 + 0{,}52 \cdot 75 \Rightarrow V_A(75) = 121$$

$$V_B(75) = 76 + 0{,}55 \cdot 75 \Rightarrow V_B(75) = 117{,}25$$

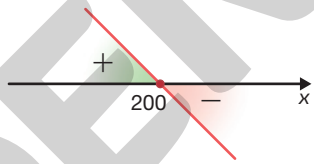
Portanto, é mais vantajoso alugar o automóvel na locadora **B**.

c) Considere a função $h(x) = V_A(x) - V_B(x)$

$$h(x) = 6 - 0{,}03x$$

$$h(x) = 0 \Rightarrow 6 - 0{,}03x = 0 \Rightarrow x = 200$$

Se $a < 0$, então h é decrescente.



KEITHY MOSTACHI

Assim, observando o gráfico podemos verificar que:

- a função se anula, ou seja, $f(x) = 0$ para $x = 200$.
- a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$ para $x < 200$.
- a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$ para $x > 200$.

Logo, $V_A(x) = V_B(x)$ para $x = 200$, $V_A(x) > V_B(x)$ para $x < 200$ e $V_A(x) < V_B(x)$ para $x > 200$.

Portanto, para rodar menos de 200 km, a locadora **B** oferece o menor preço; para rodar mais de 200 km, a locadora **A** oferece o menor preço; e para rodar 200 km, as locadoras oferecem o mesmo preço.

14. **a)** Determinando o lucro, temos:

$$75 \cdot 30 - 1\,500 = 750$$

Portanto, o lucro dos estudantes será R$ 750,00.

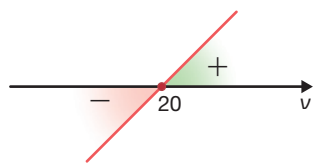
b) Conforme os dados do problema, a lei de formação é:

$$L(v) = 75v - 1\,500$$

c) Inicialmente, obtemos o zero de f:

$$L(v) = 0 \Rightarrow 75v - 1\,500 = 0 \Rightarrow v = 20$$

Se $a > 0$, então L é crescente.



KEITHY MOSTACHI

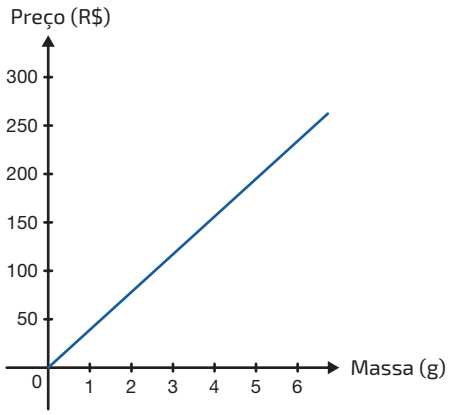
Portanto, para que haja algum lucro, o preço mínimo de cada vale-*pizza* deve ser R$ 21,00.

MODERNA

7 Proporcionalidade e função linear

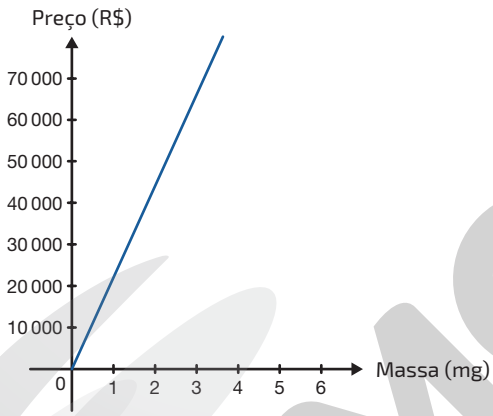
1. **a)** Conforme os dados do problema, a lei de formação da função é $P(m) = 39{,}90m$.

Nesse caso, as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 39,9.



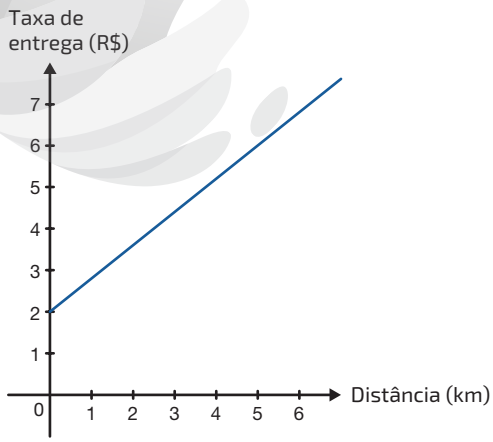
b) Conforme os dados do problema, a lei de formação da função é $P(m) = 22\,000m$.

Neste caso, as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais e a constante de proporcionalidade é 22 000.



c) Conforme os dados do problema, a lei de formação da função é $T(d) = 0{,}8d + 2$.

Neste caso, as grandezas envolvidas não são diretamente proporcionais.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

2. **a)** Conforme os dados do problema, a lei de formação da função é $A(b) = 4b$.

Sim, pois a função que expressa a relação entre a área e o comprimento da base é uma função linear.

b) Conforme a lei de formação do item **a**, temos:

$$A(15) = 4 \cdot 15 \Rightarrow A(15) = 60$$

Portanto, a área do triângulo é 60 cm^2.

c) Conforme a lei de formação do item **a**, temos:

$$A(b) = 32 \Rightarrow 4b = 32 \Rightarrow b = 8$$

Portanto, o comprimento da base é 8 cm.

3. **a)** Conforme os dados do problema, a lei de formação da função é $R(d) = 100d$.

b) Determinando a distância real aproximada, temos:

$$R(5{,}63) = 100 \cdot 5{,}63 \Rightarrow R(5{,}63) = 563$$

Portanto, a distância real aproximada é de 563 km.

4. **a)** Inicialmente, determinamos o comprimento da planta:

$$2 + 2{,}4 + 1{,}2 + 2{,}4 = 8$$

Portanto, o comprimento na planta é de 8 cm.

Calculando a largura na planta:

$$3{,}2 + 2{,}8 = 6$$

Portanto, o comprimento na planta é de 6 cm.

Indicando por x e y respectivamente, as medidas reais do comprimento e da largura da cozinha, temos:

$$\frac{x}{3{,}2} = \frac{10}{8} \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{y}{3{,}2} = \frac{7{,}5}{6} \Rightarrow y = 4$$

Portanto, as medidas reais do comprimento e da largura da cozinha são de 4 m.

b) Cada 8 cm no esquema corresponde a 1 000, logo 1 cm corresponde a 125 cm e, portanto, a escala é 1 cm : 125 cm.

c) Conforme os dados do problema, a lei de formação é $m(x) = 1{,}25x$.

d) A constante de proporcionalidade é 1,25.

8 Modelo linear

1. Uma possível resposta: Considerando os pontos $(1; 80{,}5)$ e $(6; 85)$, temos:

$$a = \frac{85 - 80{,}5}{6 - 1} \Rightarrow a = \frac{4{,}5}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 0{,}9$$

Assim, $Y = 0{,}9X + b$, onde $b \in \mathbb{R}$.

Determinando o valor de b, substituímos o ponto $(1; 80{,}5)$ em Y:

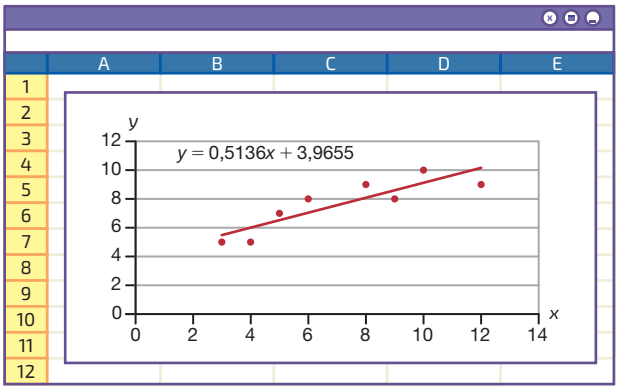
$$80 = 0{,}9 \cdot 1 + b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = 79{,}6$$

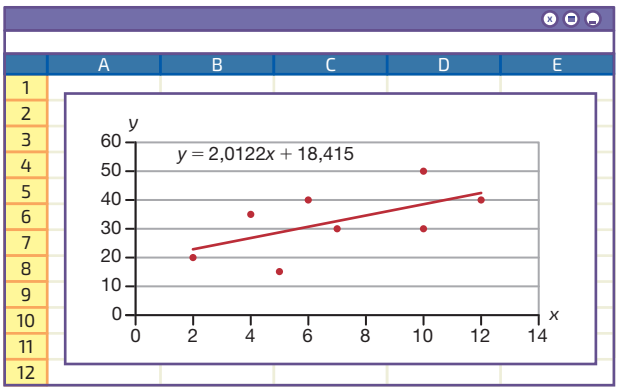
Portanto, um modelo linear para estes dados é $Y = 0{,}9X + 79{,}6$.

MODERNA

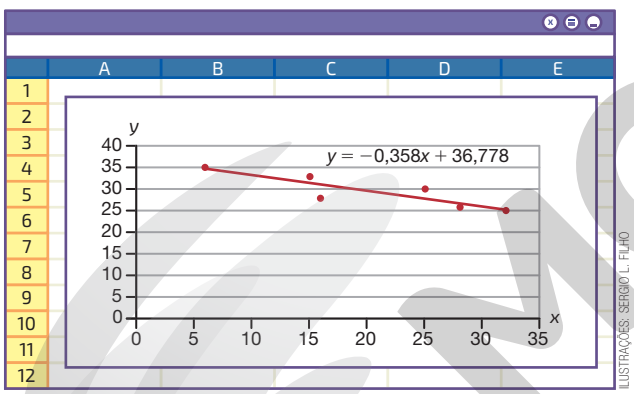
2. a) Usando uma planilha eletrônica, obtemos:



b) Usando uma planilha eletrônica, obtemos:



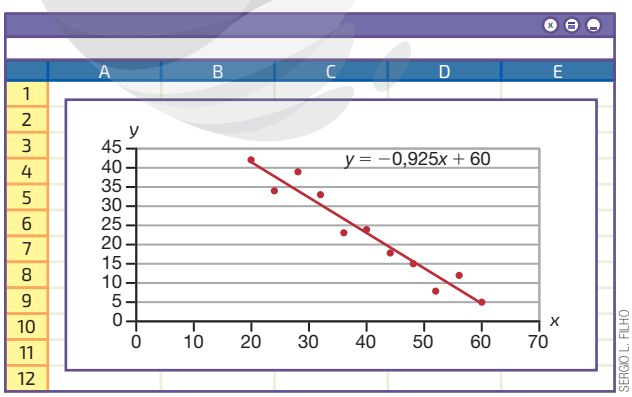
c) Usando uma planilha eletrônica, obtemos:



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

3. a) A reta que melhor ajusta os pontos é a reta em vermelho.

b) Usando uma planilha eletrônica, obtemos:

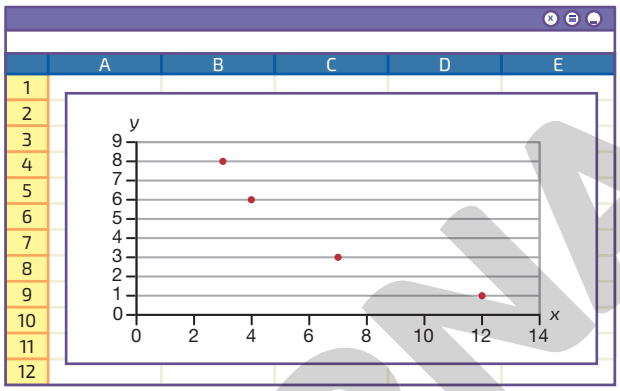


SERGIO L. FILHO

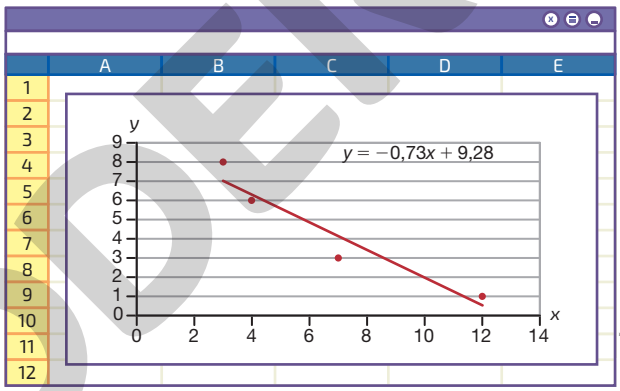
4. a) De acordo com os dados do enunciado, temos:

x	y
12	1
7	3
4	6
3	8

Então, o diagrama de dispersão é:



b) Usando uma planilha eletrônica, temos:



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Portanto, o modelo de regressão linear é $y = -0{,}73x + 9{,}28$.

c) Usando a equação da reta obtida no item b, temos:

- Após 5 horas de uso:

$$y = -0{,}73 \cdot 5 + 9{,}28 = 5{,}63$$

Portanto, o tempo restante de carga de bateria é de 5,63 horas ou aproximadamente 5 h e 38 min.

- Quando a carga da bateria acabar (0 horas):

$$0 = -0{,}73 \cdot x + 9{,}28 \Rightarrow x = \frac{9{,}28}{0{,}73} \simeq 12{,}71$$

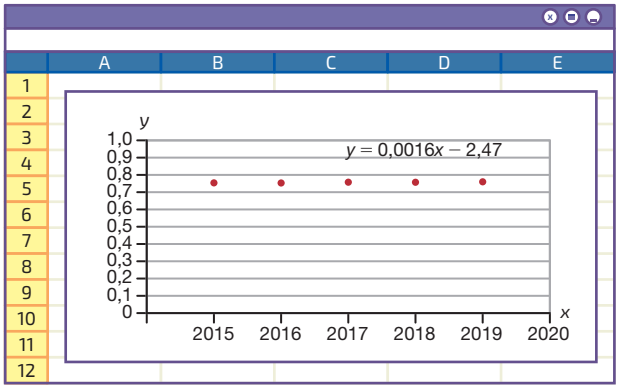
Portanto, o uso de tela ligada foi de aproximadamente 12,71 horas ou aproximadamente 12 h e 43 min.

5. a) De acordo com os dados do enunciado, temos:

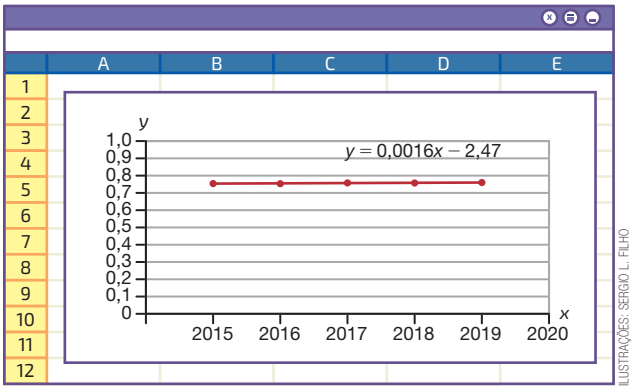
Ano (x)	IDH (y)
2015	0,755
2016	0,757
2017	0,760
2018	0,761
2019	0,761

MODERNA

Então, o diagrama de dispersão é:



b) Usando uma planilha eletrônica, temos:



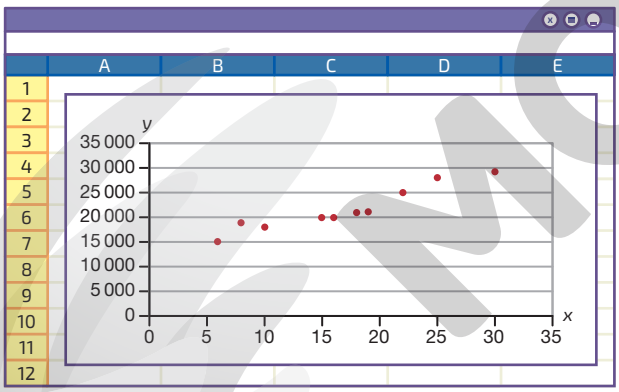
ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

c) Conforme os dados do problema, temos:

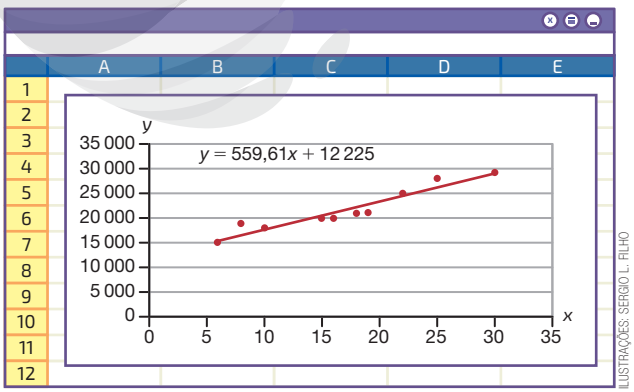
$$y \geqslant 0{,}800 \Rightarrow 0{,}0016x - 2{,}47 \geqslant 0{,}800 \Rightarrow x \geqslant \frac{3{,}27}{0{,}0016} \simeq 2044$$

Portanto, de acordo com o modelo, o Brasil será classificado como "Muito alto desenvolvimento humano", aproximadamente, em 2044.

6. a) De acordo com os dados do enunciado, temos:



b) Usando uma planilha eletrônica, temos:



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Portanto, o modelo de regressão linear para os dados apresentados é $y = 559{,}61x + 12\,225$.

c) Usando a equação da reta obtida no item **b**, temos:

- contratação de 23 influenciadores digitais:

$$y = 559{,}61 \cdot 23 + 12\,225 \simeq 25\,096$$

Portanto, a quantidade de acessos mensais será de aproximadamente 25 096 acessos.

- 33 mil acessos mensais:

$$33\,000 = 559{,}61x + 12\,225 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{33\,000 - 12\,225}{559{,}61} \simeq 37$$

Portanto, foram contratados aproximadamente 37 influenciadores.

9 Função quadrática

1. alternativas **b**, **c** e **e**

2. a) $a = 1$, $b = 1$ e $c = 2$

b) $a = -4$, $b = 0$ e $c = 2{,}5$

c) $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{7}$ e $c = 0$

d) $a = -9$, $b = 3$ e $c = -1$

e) $a = 7{,}6$, $b = 0$ e $c = 0$

f) $a = -2$, $b = 12$ e $c = -10$

3. a) $f(3) = 2 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - 4 = -4$

b) $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) - 4 = 16$

c) $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 4 = -4$

d) $f(-0{,}2) = 2 \cdot (-0{,}2)^2 - 6 \cdot (-0{,}2) - 4 = -2{,}72$

e) $g(1) = -3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 1 = -7$

f) $g(-4) = -3 \cdot (-4)^2 - 5 \cdot (-4) + 1 = -27$

g) $g(0) = -3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 = 1$

h) $g\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} + 1 = -\frac{9}{4}$

4. a) Conforme os dados do problema, determinamos a lei de formação da função:

$$S(x) = \frac{(2x - 1) \cdot (2x + 6)}{2} \Rightarrow S(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

Além disso, $x > \frac{1}{2}$, pois $2x - 1$ deve ser maior do que zero.

Portanto, a lei de formação da função é $S(x) = 2x^2 + 5x - 3$, $x > \frac{1}{2}$.

b) Calculando a área da região, temos:

- $x = 3$

$$S(3) = 2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 - 3 \Rightarrow S(3) = 30$$

- $x = 8$

$$S(8) = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 - 3 \Rightarrow S(8) = 165$$

Portanto, a área para $x = 3$ cm é 30 cm² e a área para $x = 8$ cm é 165 cm².

c) Espera-se que os alunos respondam que não, pois o comprimento da diagonal do losango seria expressa por um número negativo $(2x - 1 < 0)$.

5. Analisando os valores das abscissas na função g:

- $g(-4) = -2 \cdot (-4)^2 + 5 \cdot (-4) + 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow g(-4) = -49 \neq 1$$

Assim, $A(-4, -1)$ não pertence ao gráfico de g.

MODERNA

- $g(1) = -2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 6$

  Assim, $B(1, 6)$ pertence ao gráfico de g.
- $g(3) = -2 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 3 = 0$

  Assim, $C(3, 0)$ pertence ao gráfico de g.
- $g(0) = -2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 3 = 3$

  Assim, $D(0, 3)$ pertence ao gráfico de g.

  Portanto, os pontos B, C e D pertencem à função g.

6. **a)** Conforme os dados do problema, temos:

$$p(2) = 2 \cdot (2 - 1) \Rightarrow p(2) = 4 - 2$$
$$p(3) = 3 \cdot (3 - 1) \Rightarrow p(3) = 9 - 3$$
$$p(4) = 4 \cdot (4 - 1) \Rightarrow p(4) = 16 - 4$$
$$p(5) = 5 \cdot (5 - 1) \Rightarrow p(5) = 25 - 5$$
$$p(10) = 10 \cdot (10 - 1) \Rightarrow p(10) = 100 - 10$$

Logo:

$$p(n) = n \cdot (n - 1) \Rightarrow p(n) = n^2 - n$$

Portanto, a lei de formação da função é $p(n) = n^2 - n$, com n natural maior ou igual a 2.

b) • Determinando a quantidade de partidas disputadas, temos:

$$p(20) = 20^2 - 20 \Rightarrow p(20) = 380$$

• Determinando a quantidade de partidas de cada equipe, temos:

$$2 \cdot (20 - 1) = 38$$

Portanto, foram disputadas 380 partidas e cada equipe disputou 38 partidas.

c) Se o campeonato fosse disputado por 25 equipes:

$$p(25) = 25^2 - 25 \Rightarrow p(25) = 600$$

Portanto, se 25 equipes participassem do campeonato, 600 partidas seriam disputadas.

d) Espera-se que os alunos respondam que, dos $n \cdot n = n^2$ jogos, que representam todos contra todos, subtraímos n, que corresponderia aos jogos de "cada equipe contra ela mesma".

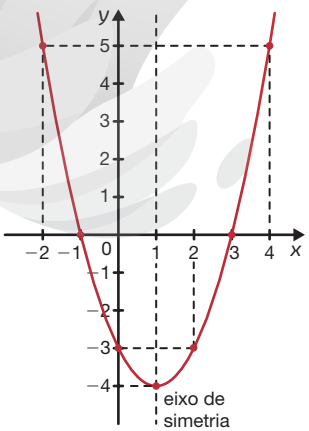
7. Conforme os dados do problema, a lei de formação que expressa a área A de cada figura em função de x é:

a) $A(x) = 4x \cdot (x + 5) = 4x^2 + 20x$, com $x > 0$.

b) $A(x) = \dfrac{(5x - 1) \cdot (4x + 4)}{2} = 10x^2 + 8x - 2$, com $x > \dfrac{1}{5}$.

10 Coeficientes de uma função quadrática

1. Conforme os dados do problema, temos:



RONALDO INÁCIO

O eixo de simetria intersecta a parábola no ponto de coordenadas $(1, -4)$.

2. De acordo com os dados do gráfico, temos:

- No gráfico de g, temos $b = 0$ e $c = 2$. Logo:

$$g(1) = 4 \Rightarrow a \cdot 1^2 + 0 \cdot 1 + 2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

Portanto, $g(x) = 2x^2 + 2$.

- No gráfico de h, temos $c = -3$. Logo:

$$\begin{cases} h(1) = 0 \\ h(2) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 3 = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} :(-2) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ \underline{-2a - b = -2} \end{cases}$$

$$-a = 1 \Rightarrow a = -1$$
$$a + b = 3 \Rightarrow b = 4$$

Portanto, $h(x) = -x^2 + 4x - 3$.

3. alternativa **e**

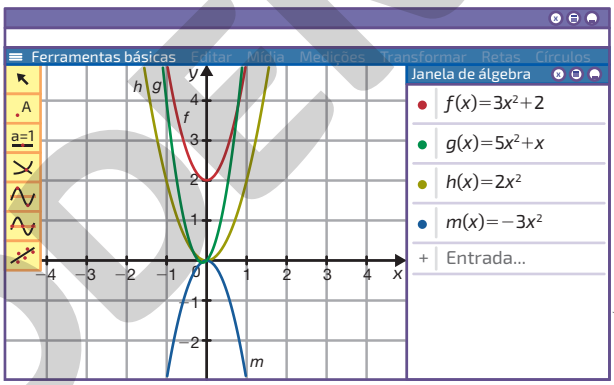
De acordo com as informações do problema, temos:

$$R(x) = k \cdot x \cdot (P - x) \Rightarrow R(x) = Pkx - kx^2$$

Sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo, x o número de pessoas que conhecem o boato e se k for uma constante positiva, o gráfico da função é uma parábola, com a concavidade voltada para baixo.

As alternativas **a**, **b** e **d** estão incorretas, pois o gráfico destas alternativas não representam uma função quadrática. A alternativa **c** também está incorreta, pois a concavidade da parábola é voltada para cima, o que não acontece.

4. **a)** Conforme os dados do problema, temos:

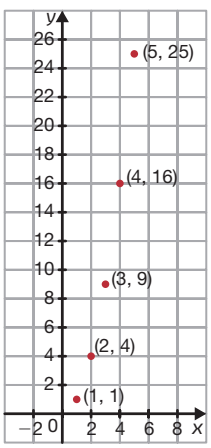


RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

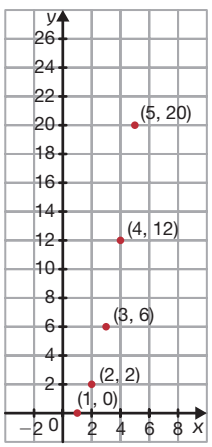
b) Nas funções h e m, pois:

$$\frac{h(x)}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} = 2 \text{ e } \frac{m(x)}{x^2} = \frac{-3x^2}{x^2} = -3, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^*.$$

5. **a)** Quadro A:



Quadro B:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Como $b = 0$ e $c = 0$, os pontos do quadro **A** pertencem ao gráfico da função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$.

b) Quadro **A**: $y = x^2$; Quadro **B**: $y = x^2 - x$.

MODERNA

6. **a)** Como o gráfico da função intersecta o eixo y em 500, então $c = 500$, logo:

$$t(h) = ah^2 + bh + 500$$

De acordo com as informações do gráfico:

$$\begin{cases} t(5) = 100 \\ t\left(\frac{15}{2}\right) = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25a + 5b = -400 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \\ \frac{225}{4}a + \frac{15}{2}b = -480 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{75}{2}a - \frac{15}{2}b = 600 \\ \frac{225}{4}a + \frac{15}{2}b = -480 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{75}{4}a = 120 \Rightarrow a = \frac{32}{5}$$

$$25 \cdot \left(\frac{32}{5}\right) + 5b = -400 \Rightarrow b = -112$$

Portanto, $t(h) = \frac{32}{5}h^2 - 112h + 500$ e

$D(t) = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leq h \leq 7{,}5\}$.

b) Resposta pessoal.

7. **a)** $f(x) = x^2 - 7x + 10$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 \Rightarrow \Delta = 9$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \Rightarrow \Delta = 0$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = 3 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

c) $f(x) = -x^2 + x - 7$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7) \Rightarrow \Delta = -27 < 0$

Não existem zeros reais.

d) $f(x) = -4x^2 + 4$

$$-4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x$

$$\frac{1}{2}x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{2}x + 6\right) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -12 \end{cases}$$

f) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-5) \Rightarrow \Delta = -31 < 0$

Não existem zeros reais.

g) $f(x) = 3x^2 + x - 2$

$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) \Rightarrow \Delta = 25$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 5}{6} \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

h) $f(x) = -x^2 + 8x - 16$

$\Delta = 8^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16) \Rightarrow \Delta = 0$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x = 4 \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

8. Devemos ter $\Delta = 0$ com $k \neq -2$.

$\Delta = 0 \Rightarrow 2^2 - 4 \cdot (k + 2) \cdot (-k) = 0 \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 0$

$$k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow k = \frac{-2 \pm 0}{2} \begin{cases} k_1 = -1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$$

Portanto, $k = -1$.

9. **a)** Como o gráfico de f intersecta o eixo x em um ponto de abscissa 0 e em ponto de abscissa positiva, a soma dos zeros é positiva, e o produto, nulo.

b) Positivo, pois a função possui dois zeros distintos.

10. alternativa **c**

I) Verdadeira, pois a função possui duas raízes distintas.

II) Verdadeira, pois $a < 0$ (concavidade voltada para baixo), $b < 0$ (gráfico corta o eixo y na parte decrescente) e $c < 0$ (gráfico corta o eixo y abaixo da origem), logo $b + c < 0$ e, portanto, $a(b + c) > 0$.

III) Verdadeira.

$$f\left(\frac{-b + 2a}{2a}\right) = a \cdot \left(\frac{-b + 2a}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b + 2a}{2a}\right) + c =$$

$$= a \cdot \frac{b^2 - 4ab + 4a^2}{4a^2} + \frac{2ab - b^2}{2a} + c =$$

$$= \frac{b^2 - 4ab + 4a^2 + 4ab - 2b^2}{4a} + c =$$

$$= a - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$f\left(\frac{-b - 2a}{2a}\right) = a \cdot \left(\frac{-b - 2a}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b - 2a}{2a}\right) + c =$$

$$= a \cdot \frac{b^2 + 4ab + 4a^2}{4a^2} + \left(\frac{-b^2 - 2ab}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{b^2 + 4ab + 4a^2 - 2b^2 - 4ab}{4a} + c =$$

$$= a - \frac{b^2}{4a} + c$$

Logo, $f\left(\frac{-b + 2a}{2a}\right) = f\left(\frac{-b - 2a}{2a}\right)$.

IV) Falsa, pois $a < 0$ e $\sqrt{\Delta} > 0$, logo $a\sqrt{\Delta} < 0$.

11. alternativa **b**

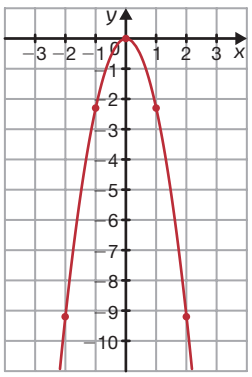
A função possui dois zeros distintos, pois $\Delta > 0$. Como $S = 0$, os zeros da função são números opostos e, sabendo que $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

12. **a)** Conforme os dados da tabela, o zero da função é $x = 0$.

b) Sim, pois o eixo de simetria da parábola coincide com o eixo y e $f(0) = 0$, consequentemente, $b = c = 0$.

c) A lei de formação é $f(x) = -2{,}3 \cdot x^2$

d)



RONALDO INÁCIO

13. Calculando a que distância horizontal, em relação ao jogador, a bola tocou o solo:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}x - \frac{1}{45}x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{45}x\right) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 60 \end{cases}$$

Portanto, como 0 m não faz sentido para nossa questão, a bola tocou o solo pela primeira vez a 60 m do jogador.

MODERNA

11 Vértice de uma parábola

1. a) Determinando as coordenadas de x e y, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{-2}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = 1$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_V = 2$$

Portanto, $V(1, 2)$ é o vértice da parábola.

b) Determinando as coordenadas de x e y, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{\left(-\frac{10}{3}\right)}{2 \cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow x_V = 5$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{\left(-\frac{10}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 5}{4 \cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow y_V = -\frac{10}{3}$$

Portanto, $V\left(5, \frac{10}{3}\right)$ é o vértice da parábola.

c) Determinando as coordenadas de x e y, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{\left(-\sqrt{3}\right)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_V = -\frac{3}{4}$$

Portanto, $V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ é o vértice da parábola.

2. alternativa **a**

$$g(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

$$x_V = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$$

Logo, o eixo de simetria da parábola corta o eixo x na abscissa $x = 1$.

3. Conforme os dados do problema, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx - 4$$

$$\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } b = 1$$

Assim, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

Determinando os vértices, então:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow x_V = -1$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{1^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4)}{4 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow y_V = -\frac{9}{2}$$

Portanto, $V\left(-1, -\frac{9}{2}\right)$ é o vértice da parábola.

4. a) Inicialmente, desenvolvemos a função.

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

Então, determinando as coordenadas de x e y, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{-2}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = 1$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_V = 0$$

Portanto, $V(1, 0)$ é o vértice da parábola.

b) Inicialmente, desenvolvemos a função.

$$f(x) = x^2 + 6x + 9$$

Então, determinando as coordenadas de x e y, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{6}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = -3$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_V = 0$$

Portanto, $V(-3, 0)$ é o vértice da parábola.

c) Inicialmente, desenvolvemos a função.

$$f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$$

Então, determinando as coordenadas de x e y, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{(-1)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = \frac{1}{2}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_V = 0$$

Portanto, $V\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ é o vértice da parábola.

d) Inicialmente, desenvolvemos a função.

$$f(x) = x^2 + 2\sqrt{5}x + 5$$

Então, determinando as coordenadas de x e y, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{2\sqrt{5}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = -\sqrt{5}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_V = 0$$

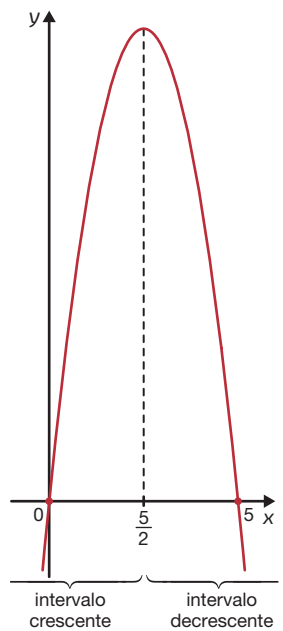
Portanto, $V\left(-\sqrt{5}, 0\right)$ é o vértice da parábola.

- Uma possível resposta: a abscissa sempre será $-p$, e a ordenada, 0.

5. Inicialmente, determinamos o valor de m:

$$f(1) = 8 \Rightarrow -\frac{m}{5} \cdot 1 + m = 8 \Rightarrow m = 10$$

Assim, $f(x) = -2x^2 + 10x$.



RONALDO INÁCIO

MODERNA

6. Conforme os dados do problema, temos:

$$y_V = 2 \Rightarrow -\frac{b^2 - 4 \cdot a \cdot 3}{4a} = 2 \Rightarrow \frac{b^2 - 12a}{4a} = 2 \Rightarrow 4$$

$$\Rightarrow -b^2 + 12a = 8a \Rightarrow 4a = b^2 \Rightarrow \frac{a}{b^2} = \frac{1}{4}$$

Portanto, o número natural mais próximo de $\frac{a}{b^2} = \frac{1}{4}$ é 0.

7. alternativa **d**

Pelo enunciado, $c = 5$. Assim:

$$\begin{cases} x_V = -2 \\ f(-2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -2 \\ 4a - 2b + 5 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - b = 0 \\ 4a - 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ e } b = 2$$

Portanto, $a < 1$, $b > 1$ e $c > 4$.

8. alternativa **e**

$$y_V = 0 \Rightarrow -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0 \Rightarrow -\frac{(-6)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right)C}{4\left(\frac{3}{2}\right)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{36 - 6C}{6} = 0 \Rightarrow C = 6$$

Portanto, a altura do líquido na taça é 6 cm.

9. **a)** A maior altura que pode ser atingida é em y_V, assim:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{(1{,}0563)^2}{4 \cdot (-0{,}0021)} \Rightarrow y_V \simeq 133$$

Portanto, a maior altura que esse pássaro irá atingir é, aproximadamente, 133 m.

b) Determinando a distância, temos:

$-0{,}0021x^2 + 1{,}0563x = 0 \Rightarrow x(-0{,}0021x + 1{,}0563) = 0$

Logo, $x = 0$ ou $-0{,}0021x + 1{,}0563 = 0$.

$$-0{,}0021x + 1{,}0563 = 0 \Rightarrow x = \frac{1{,}0563}{0{,}0021} = 503$$

Portanto, a distância aproximada entre as extremidades do arco é 503 m.

10. **a)** $y_V = -\frac{(-8)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 0$

A parábola possui concavidade voltada para cima ($a = 4 > 0$) e $y_V = 0$ é o valor mínimo de f, logo:

$$Im(f) = [0, +\infty[\text{ ou } Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$$

b) $y_V = -\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot (-7) \cdot 0}{4 \cdot (-7)} = \frac{1}{14}$

A parábola possui concavidade voltada para baixo ($a = -7 < 0$) e $y_V = \frac{1}{14}$ é o valor máximo de f, logo:

$$Im(f) = \left]-\infty, \frac{1}{14}\right] \text{ ou } Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{1}{14}\right\}$$

c) $y_V = -\frac{0^2 - 4 \cdot (-6) \cdot 1}{4 \cdot (-6)} = 1$

A parábola possui concavidade voltada para baixo ($a = -6 < 0$) e $y_V = 1$ é o valor máximo de f, logo:

$$Im(f) =]-\infty, 1] \text{ ou } Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant 1\}$$

- Possível resposta: para $\alpha > 0$,

$Im(f) = [c, +\infty[= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant c\}$; para $\alpha < 0$,

$Im(f) =]-\infty, c] = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant c\}$

11. **a)** Determinando a lei da função, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx$$

$$\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(-1) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 0 \\ a - b = -3 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 4$$

Portanto, a lei da função é $y = x^2 + 4x$.

b) Determinando o vértice da função, temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{4}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_V = -2$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_V = -4$$

Portanto, o vértice da parábola é $V(-2, -4)$.

c) O valor mínimo da função é igual a y_V, isto é, -4.

12. **a)** Para que f admita o valor mínimo, temos:

$$2p - 8 > 0 \Rightarrow 2p > 8 \Rightarrow p > 4$$

Portanto, para que f tenha mínimo é necessário que $p > 4$.

b) Para que g admita o valor máximo em $x = 6$, temos:

$$x_V = 6 \Rightarrow -\frac{p^2 - 1}{2 \cdot (-4)} = 6 \Rightarrow p^2 = 49 \begin{cases} p = -7 \\ p = 7 \end{cases}$$

Portanto, para que g tenha o máximo em $x = 6$ é necessário que $p = -7$ ou $p = 7$.

c) Para que h admita o valor mínimo igual a -8, temos:

$$y_V = -8 \Rightarrow -\frac{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (p - 2)}{4 \cdot 3} = -8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60 - 12p = 96 \Rightarrow p = -3$$

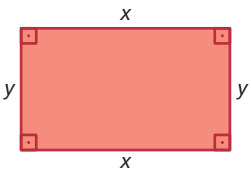
Portanto, para que h admita o valor mínimo igual a -8 é necessário que $p = -3$.

13. Indicando por x_V e y_V, respectivamente, o total de peças necessárias para atingir o custo mínimo e calculando qual é este custo mínimo, determinamos c:

$$\begin{cases} x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot (0{,}04)} = 50 \\ y_V = c(50) = 0{,}04 \cdot (50)^2 - 4 \cdot 50 + 110 = 10 \end{cases}$$

Portanto, o custo mínimo é R$10,00 e esse valor é atingido para 50 peças.

14.



RONALDO INÁCIO

$2x + 2y = 80 \Rightarrow y = 40 - x$

A área do galinheiro é dada por: $A = xy$. Assim:

$$A = x(40 - x) = -x^2 + 40x$$

A área será máxima em:

$$x_V = -\frac{40}{2 \cdot (-1)} = 20$$

Logo:

$$y = 40 - 20 = 20$$

Portanto, os lados do galinheiro devem ter 20 m e a área máxima é $\underbrace{400}_{20 \cdot 20}$ m².

MODERNA

15. alternativa **d**

A receita por viagem é dada por: $R = x \cdot p$. Assim:

$$R = x(300 - 0{,}75x) = -0{,}75x^2 + 300x$$

O valor máximo de R ocorre em:

$$x_V = -\frac{300}{2 \cdot (-0{,}75)} = 200$$

Porém, como o avião tem apenas 180 lugares e a função R é crescente no intervalo $[0, 180]$, segue que a receita máxima ocorre em $x = 180$, ou seja:

$$R = -0{,}75 \cdot 180^2 + 300 \cdot 180 \Rightarrow R = 29\,700$$

Portanto, a receita máxima por viagem é de R$ 29 700,00.

16. **a)** A função lucro é dada por:

$$L(x) = R(x) - C(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(x) = 180x - x^2 - (30x + 1\,200) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(x) = -x^2 + 150x - 1\,200$$

b) • A quantidade de itens que geram o lucro máximo é a abscissa do vértice de $L(x)$, logo:

$$x_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V = -\frac{150}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow x_V = 75$$

Portanto, a quantidade de itens vendidos que geram o lucro máximo é 75 itens.

• O lucro máximo é dado por $y_V = L(x_V)$, assim:

$$y_V = L(x_V) \Rightarrow y_V = -(75)^2 + 150 \cdot 75 - 1\,200 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_V = 4\,425$$

Portanto, o lucro máximo é de R$ 4 425,00.

17. A quantidade q de calças vendidas varia linearmente em função do preço p. Assim, $q(p) = ap + b$.

• Para o preço de R$ 80,00, o número de calças vendidas é 20, ou seja, $q(80) = 20$.

• Para o preço de R$ 78,00, por exemplo, o número de calças vendidas aumenta em 4 unidades, ou seja, $q(78) = 20 + 4$

$$\begin{cases} q(80) = 20 \\ q(78) = 20 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 80a + b = 20 \\ 78a + b = 24 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = -2 \text{ e } b = 180$$

Assim, $q(p) = -2p + 180$.

A receita r em função do preço p é dado por:

$$r(p) = p \cdot q(p) \Rightarrow r(p) = p(-2p + 180) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r(p) = -2p^2 + 180p$$

Logo, o preço de cada calça deve ser R$ 45,00. Nesse caso, o valor da receita é:

$$r(45) = -2 \cdot 45 + 180 \cdot 45 \Rightarrow r(45) = 4\,050$$

Portanto, o valor dessa receita é R$ 4 050,00.

18. alternativa **c**

$$A(T) = aT^2 + bT$$

$$\begin{cases} T_V = 10 \\ A(10) = 16\,000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 10 \\ 100a + 10b = 16\,000 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 20a + b = 0 \\ 10a + b = 1\,600 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = -160 \text{ e } b = 3\,200$$

Assim, $A(T) = -160T^2 + 3\,200T$.

19. A cerca será composta de 4 fios, sendo que um dos seus lados já está construído, então:

$$8a + 4c = 420 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = 60 - 2a$$

Indicando por A a área do cercado, temos:

$$A = ac \Rightarrow A = a(60 - 2a) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = -2a^2 + 60a$$

Desse modo, a área será máxima em:

$$a = -\frac{60}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow a = 15$$

Logo:

$$c = 60 - 2 \cdot 15 \Rightarrow c = 30$$

Portanto, o comprimento é 30 cm e a largura é 15 cm.

20. **a)** • Fernanda:

$$-\frac{x^2}{100} + \frac{x}{5} = 0 \Rightarrow x^2 - 20x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x - 20) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 20 \end{cases}$$

• Carol:

$$-\frac{x^2}{32} + \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 16x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x(x - 16) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 16 \end{cases}$$

Portanto, Fernanda fez com que a bola alcançasse a maior distância (20 m).

b) • Fernanda:

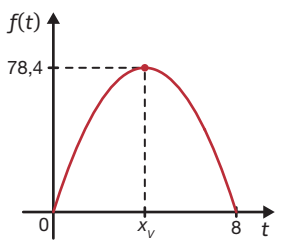
$$y_V = -\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) \cdot 0}{4 \cdot \left(-\frac{1}{100}\right)} = 1$$

• Carol:

$$y_V = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right) \cdot 0}{4 \cdot \left(-\frac{1}{32}\right)} = 2$$

Portanto, Carol lançou a bola mais alto (2 m).

21. alternativa **b**



RONALDO INÁCIO

$$f(t) = at^2 + bt$$

$$x_V = \frac{0 + 8}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 4$$

$$f(4) = 78{,}4 \Rightarrow 16a + 4b = 78{,}4$$

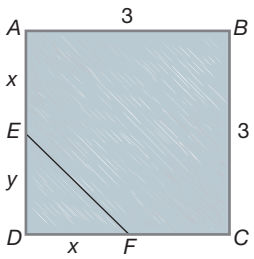
Assim, temos o sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 4 \\ 16a + 4b = 78{,}4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + b = 0 \\ 4a + b = 19{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = -4{,}9 \text{ e } b = 39{,}2$$

Portanto, $f(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t$.

MODERNA

22. Conforme os dados do problema, temos o seguinte esquema:



RONALDO INÁCIO

Logo:

$$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$$

Assim, a área do pentágono *ABCFE* é dada por:

$$A = 9 - \frac{xy}{2} \Rightarrow A = 9 - \frac{x(3-x)}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 9$$

E a área será mínima em:

$$x_V = -\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{2 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow x_V = \frac{3}{2}$$

Logo:

$$y = 3 - \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Determinando a área do triângulo *DEF*, temos:

$$\frac{xy}{2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{8}$$

Portanto, a área do triângulo *DEF* deve ser $\frac{9}{8}$ m² ou 1,125 m² para que o pentágono *ABCFE* tenha a menor área possível.

23. **a)** A distância horizontal da bola ao tocar o solo é calculada da seguinte maneira:

$$h(d) = 0 \Rightarrow -0{,}398\,d^2 + 5{,}572\,d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \cdot (-0{,}398\,d + 5{,}572) = 0 \begin{cases} d = 0 \\ d = 14 \end{cases}$$

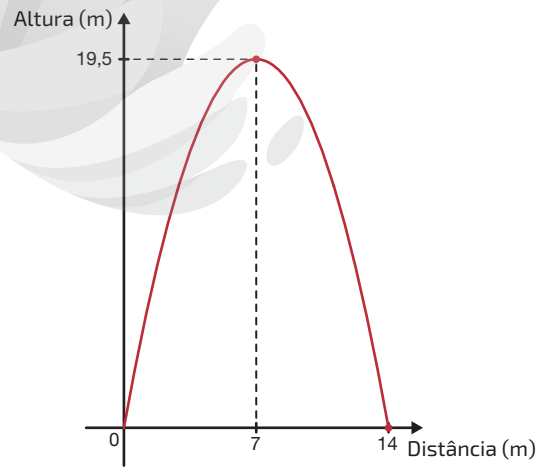
- Portanto, a distância horizontal é 14 m.

b) A altura máxima á dada pela ordenada do vértice de $h(d)$, assim:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{(5{,}572)^2}{4 \cdot (-0{,}398)} \Rightarrow y_V \simeq 19{,}5$$

Portanto, a altura máxima é, aproximadamente, 19,5 m.

c)



RONALDO INÁCIO

24. alternativa **b**

Sendo $P = 44\,000$, temos $R(x) = kx(44\,000 - x)$, ou seja:

$$R(x) = -kx^2 + 44\,000kx$$

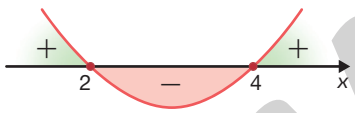
Calculando o x do vértice, temos:

$$x_V = -\frac{44\,000k}{2(-k)} = 22\,000$$

Portanto, a máxima rapidez de propagação será atingida quando 22 000 pessoas conhecerem o boato.

25. **a)** $a = 1 > 0$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

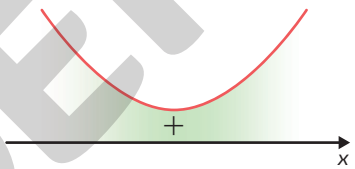


- $f(x) = 0$ para $x = 2$ ou $x = 4$
- $f(x) > 0$ para $x < 2$ ou $x > 4$
- $f(x) < 0$ para $2 < x < 4$

b) $a = 3 > 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -8 < 0$

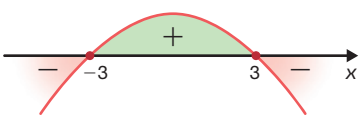
A função não possui zeros reais.



- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$
- $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$

c) $a = -1 < 0$

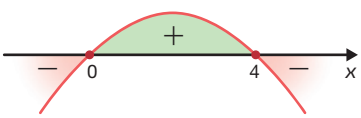
$$-x^2 + 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$



- $f(x) = 0$ para $x = -3$ ou $x = 3$
- $f(x) > 0$ para $-3 < x < 3$
- $f(x) < 0$ para $x < -3$ ou $x > 3$

d) $a = -2 < 0$

$$-2x^2 + 8x = 0 \Rightarrow -2x(x-4) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

- $f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 4$
- $f(x) > 0$ para $0 < x < 4$
- $f(x) < 0$ para $x < 0$ ou $x > 4$

MODERNA

26. Conforme os dados do problema, temos:

$$\begin{cases} f(-5) = 0 \\ f(2) = 0 \\ f(0) = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25a - 5b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = -20 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 2,\ b = 6 \text{ e } c = -20$$

Portanto, $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$.

27. Como $a = -3 < 0$, e devemos ter $h(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, segue que:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (-6)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot k < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12k < -36 \Rightarrow k < -3$$

Portanto, a condição sobre k é $k < -3$.

28. Calculando as raízes, temos:

$$-x^2 + x + 12 = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Como $a = -1 < 0$, então devemos ter $f(x) \geqslant 0$ para $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

29. Determinando os valores de x, temos:

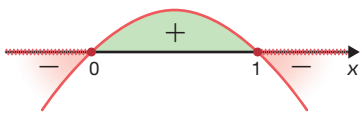
$$g(x) \cdot h(x) - h(x) \leqslant 6 \Rightarrow h(x) \cdot (g(x) - 1) \leqslant 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (6 - 3x) \cdot (x + 1) \leqslant 6 \Rightarrow -3x^2 + 3x + 6 \leqslant 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 3x \leqslant 0$$

$$a = -3 < 0$$

$$-3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow -3x(x - 1) = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$



RONALDO INÁCIO

Logo, $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$.

30. Inicialmente, calculamos a função lucro:

$$L(n) = R(n) - C(n) = -\frac{3}{2}n^2 + 60n$$

Observe que $a = -\frac{3}{2} < 0$, então:

$$-\frac{3}{2}n^2 + 60n = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}n \cdot (n - 40) = 0 \begin{cases} n = 0 \\ n = 40 \end{cases}$$

Portanto, como $n > 0$, a fábrica terá prejuízo a partir de 41 peças produzidas.

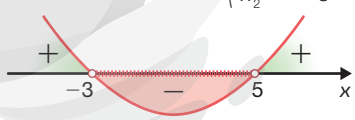
31. alternativa **c**

Como $2^x + 1 > 0$ para todo x real, logo:

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 < 0$$

$$a = 1 > 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$



RONALDO INÁCIO

Assim, $f(x) < 0$ para $-3 < x < 5$.

32. **a)** Determinando a temperatura às 10 h e às 17 h, temos:

- $f(10) = \frac{226}{9} \simeq 25{,}11$
- $f(17) = \frac{841}{36} \simeq 23{,}36$

Portanto, a temperatura registrada às 10 h foi, aproximadamente, 25,11 °C e às 17 h foi aproximadamente 23,36 °C.

b) Determinando o intervalo de tempo na qual a temperatura registrada foi superior a 22 °C:

$$f(x) > 22 \Rightarrow -\frac{5}{36}x^2 + \frac{7}{2}x + 4 > 22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5}{36}x^2 + \frac{7}{2}x - 18 > 0$$

$$a = -\frac{55}{36} < 0$$

$$-\frac{5}{36}x^2 + \frac{7}{2}x - 18 = 0 \begin{cases} x_1 = \frac{36}{5} = 7{,}2 \\ x_2 = 18 \end{cases}$$

Portanto, a temperatura foi superior a 22 °C no intervalo de tempo indicado, que foi entre 7 h 12 min e 18 h.

c) Os valores desejados são as coordenadas do vértice de $f(x)$, assim:

$$x_V = -\frac{\frac{7}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{5}{36}\right)} \Rightarrow x_V = \frac{63}{5} \Rightarrow x_V = 12{,}6$$

$$y_V = -\frac{\frac{521}{36}}{4 \cdot \left(-\frac{5}{36}\right)} \Rightarrow y_V = \frac{521}{20} \Rightarrow x_V = 26{,}05$$

Portanto, a maior temperatura foi de 26,05 °C, a qual foi registrada às 12,6 h ou 12 h e 36 min.

- Resposta pessoal.

12 Inequação do 1º grau e do 2º grau

1. **a)** $5x + 8 > -12 \Rightarrow 5x = -12 - 8 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-20}{5} \Rightarrow x = -4$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$.

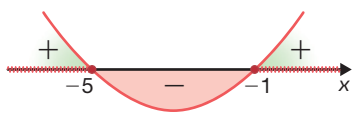
b) $3 - 5x \leqslant 8 \Rightarrow -5x \leqslant 8 - 3 \Rightarrow x \geqslant -\frac{5}{5} \Rightarrow x \geqslant -1$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$.

c) Considerando a inequação $3x^2 + 18x + 15 \geqslant 0$, fazendo estudo do sinal, temos:

$$a = 3 > 0$$

$$3x^2 + 18x + 15 = 0 \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

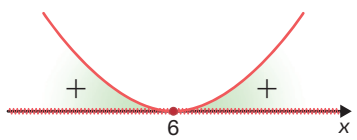


Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -1\}$.

d) Considerando a inequação $x^2 - 12x + 36 \geqslant 0$, fazendo estudo do sinal, temos:

$$a = 1 > 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0 \ (x_1 = x_2 = 6$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Portanto, $S = \mathbb{R}$.

MODERNA

2. a) Se cada unidade de biscoito contém 47 kcal, então:

$$10 \cdot 47 = 470$$

Portanto, uma pessoa que comeu 10 biscoitos consumiu 470 kcal.

b) Conforme os dados do problema, temos:

$$q(n) = 47n$$

c) Para ingerir 350 kcal, ou mais, consumindo esse tipo de biscoito, temos:

$$q(n) \geqslant 350$$

$$47n \geqslant 350 \Rightarrow n \geqslant \frac{350}{47}$$

Portanto, como $\frac{350}{47} \simeq 7{,}45$, o número mínimo de biscoitos que devem ser consumidos é 8.

3. a) • Indicando por p o perímetro do triângulo, temos:

$$p(x) = x + 2x + 2x \Rightarrow p(x) = 5x$$

• Indicando por p o perímetro do retângulo, temos:

$$p(x) = 2x + 2x + 10 + 10 \Rightarrow p(x) = 4x + 20$$

Portanto, a lei de formação do triângulo: $p: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é definida por $p(x) = 5x$ e a lei de formação do retângulo: $p: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é definida por $p(x) = 4x + 20$.

b) Para que o perímetro do triângulo seja menor do que o do retângulo, temos:

$$5x < 4x + 20 \Rightarrow x < 20$$

Portanto, o maior número inteiro menor do que 20 é o 19, logo $x = 19$.

4. Indicando por $3x$ o número total de pessoas que vão ao cinema na sexta, no sábado e no domingo e por x o número total de pessoas que vão ao cinema nos outros dias da semana, podemos determinar a arrecadação:

$$27 \cdot 3x + 21 \cdot x = 102x$$

Para que ela seja maior ou igual a R$ 178 500,00, temos:

$$102x \geqslant 178\,500 \Rightarrow x \geqslant 1\,750$$

Indicando por T o número total de pessoas que vão ao cinema durante uma semana, temos:

$$T \geqslant 3x + x \Rightarrow T \geqslant 4x \Rightarrow T \geqslant 4 \cdot 1\,750 \Rightarrow T \geqslant 7\,000$$

Portanto, o número mínimo total de pessoas deve ser de 7 000.

5. a) Sabendo que cada bolo é vendido a R$ 40,00 e o investimento inicial foi de R$ 6 000,00, a função que descreve o lucro $L: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pode ser definida por:

$$L(q) = 40q - 6\,000$$

b) Para que $L(q) > 0$, temos:

$$L(q) > 0 \Rightarrow 40q - 6\,000 > 0 \Rightarrow q > 150$$

Assim, a função assume valores positivos para $q > 150$. Portanto, pode-se concluir que a confeitaria terá lucro quando forem vendidos mais de 150 bolos.

6. Indicando por q e t, respectivamente, a quantidade de água em litros e o tempo em minutos, temos:

$$q(t) = 1\,500t$$

Assim, para que a bomba envie 22 500 litros ou mais para o reservatório, calculamos:

$$q(t) \geqslant 22\,500$$

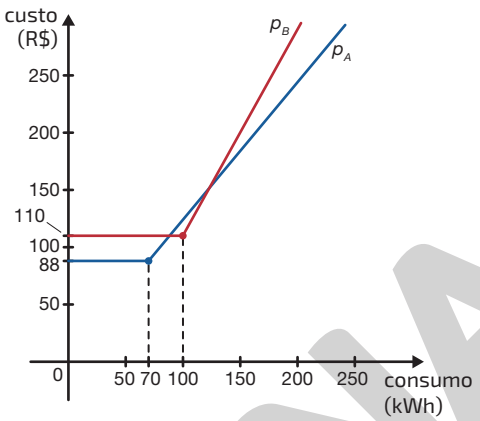
$$1\,500t \geqslant 22\,500 \Rightarrow t \geqslant \frac{22\,500}{1\,500} \Rightarrow t \geqslant 15$$

Portanto, a bomba deverá funcionar no mínimo 15 minutos.

7. a) Indicando as condições do plano A e do plano B, temos:

$$p_A = \begin{cases} 88, \text{ se } x \leqslant 70 \\ 88 + 1{,}2(x - 70), \text{ se } x > 70 \end{cases}$$

$$p_B = \begin{cases} 110, \text{ se } x \leqslant 100 \\ 110 + 1{,}8(x - 100), \text{ se } x > 100 \end{cases}$$



RONALDO INÁCIO

b) Note que:

- para $x \leqslant 70$, o plano A será mais vantajoso.
- para $70 < x \leqslant 100$, temos:

$$88 + 1{,}2(x - 70) \geqslant 110 \Rightarrow 1{,}2(x - 70) \geqslant 22 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 70) \geqslant 18{,}\overline{3} \Rightarrow x \geqslant 88{,}\overline{3}$$

Assim, para $88{,}\overline{3} \leqslant x \leqslant 100$ o plano B será mais vantajoso.

- para $x > 100$, temos:

$$88 + 1{,}2(x - 70) \geqslant 110 + 1{,}8(x - 100) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 88 - 84 - 110 + 180 \geqslant 0{,}6x \Rightarrow 74 \geqslant 0{,}6x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 123{,}\overline{3} \geqslant x$$

Assim, para $100 \leqslant x \leqslant 123{,}\overline{3}$ o plano B será mais vantajoso.

Portanto, o plano B será mais vantajoso para um consumo entre $88{,}\overline{3}$ kWh e $123{,}\overline{3}$ kWh.

8. Inicialmente, calculamos $f(-1)$:

$$f(-1) = -3 \cdot (-1)^2 + (-1) + 7 \Rightarrow f(-1) = 3$$

Em seguida, calculamos $f(x + 3)$:

$$f(x + 3) = -3 \cdot (x + 3)^2 + (x + 3) + 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x + 3) = -3 \cdot (x^2 + 6x + 9) + x + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x + 3) = 3x^2 - 17x - 17$$

Assim:

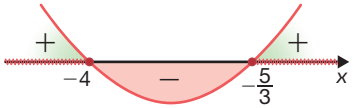
$$f(-1) \geqslant f(x + 3) \Rightarrow 3 \geqslant -3x^2 - 17x - 17 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 17x + 20 \geqslant 0$$

Fazendo estudo do sinal de f, temos:

$$a = 3 > 0$$

$$3x^2 + 17x + 20 = 0 \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$



RONALDO INÁCIO

Portanto, $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant -\frac{5}{3} \right\}$.

MODERNA

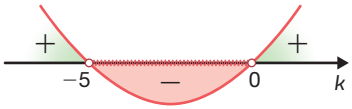
9. Considerando a inequação $5x^2 + 2kx - k > 0$ para todo x real se $\Delta < 0$.

$$\Delta < 0 \Rightarrow (2k)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-k) < 0 \Rightarrow 4k^2 + 20k < 0$$

Fazendo o estudo do sinal, temos:

$$a = 4 > 0$$

$$4k^2 + 20k = 0 \Rightarrow 4k(k + 5) = 0 \begin{cases} k_1 = -5 \\ k_2 = 0 \end{cases}$$



RONALDO INÁCIO

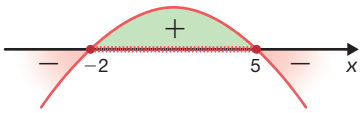
Portanto, os valores inteiros de k são -4, -3, -2 e -1 ou $S = \{k \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq k \leq -1\}$.

10. Considerando a função $h(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$, para $h(x)$ real se $-x^2 + 3x + 10 \geq 0$.

Fazendo estudo do sinal, temos:

$$a = -1 < 0$$

$$-x^2 + 3x + 10 = 0 \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 5 \end{cases}$$



RONALDO INÁCIO

Portanto, o domínio D, da função h, é:

$$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$$

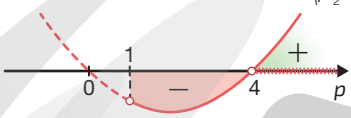
11. Para que a área do triângulo seja maior do que a do retângulo, temos:

$$\frac{4p(p-1)}{2} > p(p+2) \Rightarrow p^2 - 4p > 0$$

Fazendo o estudo do sinal, segue que:

$$a = 1 > 0$$

$$p^2 - 4p = 0 \Rightarrow p(p-4) = 0 \begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 4 \end{cases}$$

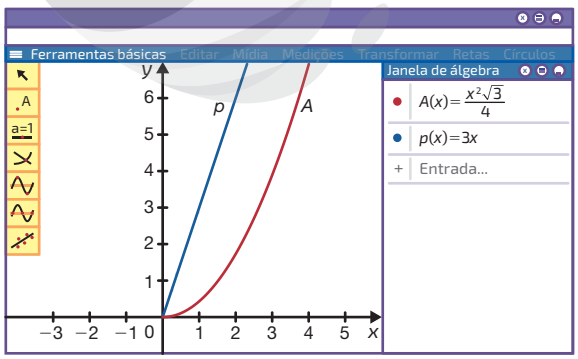


RONALDO INÁCIO

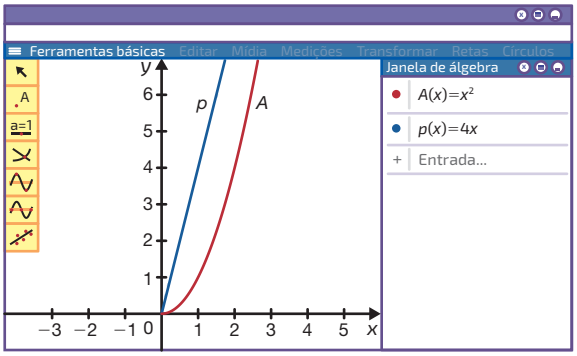
Portanto, a área do triângulo será maior do que a área do retângulo quando $p > 4$ cm.

12. **a)** Nesse exemplo utilizamos o *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Lembrando que $A: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ e $p: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
Representação gráfica da área e do período de um:

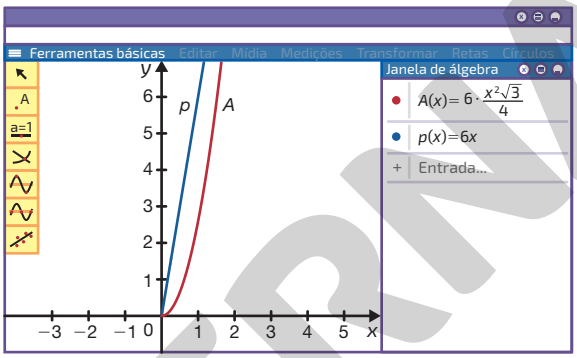
- triângulo equilátero de lado x:



- quadrado de lado x:



- hexágono regular de lado x:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

Observando os gráficos é possível notar que tanto o do perímetro quanto o da área são crescentes para os três polígonos.

b) Os perímetros são funções afins e as áreas são funções quadráticas.

c) Seja o retângulo com lados 5 e x, temos:

- considerando o quadrado cujo comprimento do lado é x, então:

$$4x > 2x + 10 \Rightarrow 2x > 10 \Rightarrow x > \frac{10}{2} \Rightarrow x > 5$$

Portanto, o perímetro do quadrado será maior do que o do retângulo quando $x > 5$ cm.

- considerando o hexágono cujo comprimento do lado é x, então:

$$6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} > 5x \Rightarrow x^2\sqrt{3} > \frac{20}{6}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x} > \frac{\frac{20}{6}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x > \frac{20\sqrt{3}}{18} \Rightarrow x > \frac{10\sqrt{3}}{9}$$

Portanto, a área do hexágono será maior do que a do retângulo quando $x > \frac{10\sqrt{3}}{9}$ cm.

- considerando o triângulo equilátero cujo comprimento do lado é x, então:

$$\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 5x \Rightarrow x^2\sqrt{3} = 20x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{x} = \frac{20}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$$

Portanto, a área do triângulo será igual à do retângulo quando $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm.

MODERNA

13. **a)** Calculando o perímetro e a área do octógono:

O perímetro P do octógono de lado x é indicado por:

$$P = 8x$$

A área A do octógono de lado x é indicada por:

$$A = 8 \cdot \left(\frac{x \cdot \frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{2} \right) \Rightarrow A = 4 \cdot \left(x \cdot \frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot x \cdot r\sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Sabendo que $x = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, então $r = \frac{x}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. Assim, temos:

$$A = 2 \cdot x \cdot \frac{x}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Racionalizando, temos:

$$A = 2 \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow$$

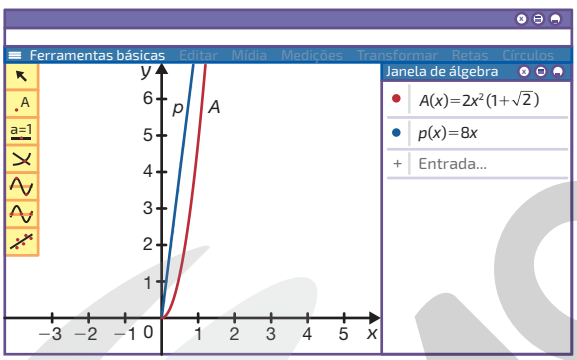
$$\Rightarrow A = 2 \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \Rightarrow A = 2 \cdot x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot x^2 \cdot \frac{2\sqrt{2}+2}{2} \Rightarrow A = x^2 \cdot \left(2\sqrt{2}+2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 2x^2\left(\sqrt{2}+1\right) = 2x^2\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Portanto, a área do octógono em função de x é $2x^2\left(1+\sqrt{2}\right)$.

b) Conforme os dados do problema, temos:



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

c) O perímetro representa uma função afim e a área, uma função quadrática.

d) Para que a área do octógono seja maior do que a área do retângulo, então:

$$2x^2\left(\sqrt{2}+1\right) > 5 \cdot 3 \Rightarrow 2x^2 > \frac{15}{\left(\sqrt{2}+1\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{15}{2\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

Racionalizando, temos:

$$x^2 > \frac{15}{2 \cdot \left(\sqrt{2}+1\right)} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 > \frac{15 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)}{2} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{15 \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)}{2}}$$

Portanto, a área da região determinada por esse octógono é maior do que a área da região determinada por um retângulo de dimensões 5 cm e 3 cm quando $x > \sqrt{\frac{15\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}}$ cm.

13 Progressão aritmética

1. Sabendo que a razão de uma PA pode ser calculada por $r = a_2 - a_1$, temos:

a) $r = 10 - 3 \Rightarrow r = 7$

b) $r = 39 - 42 \Rightarrow r = -3$

c) $r = -3 - (-7) \Rightarrow r = 4$

d) $r = -3 - 5 \Rightarrow r = -8$

e) $r = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{4}$

f) $r = 1{,}4 - 2{,}3 \Rightarrow r = -0{,}9$

2. **a)** Se $a_1 = 4$ e $r = 9$, temos:

$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 = 4 + 9 \Rightarrow a_2 = 13$

$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = 13 + 9 \Rightarrow a_3 = 22$

$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = 22 + 9 \Rightarrow a_4 = 31$

$a_5 = a_4 + r \Rightarrow a_5 = 31 + 9 \Rightarrow a_5 = 40$

$a_6 = a_5 + r \Rightarrow a_6 = 40 + 9 \Rightarrow a_6 = 49$

Portanto, a PA formada é $(4, 13, 22, 31, 40, 49)$.

b) Se $a_1 = 23$ e $a_2 = 18$, temos:

$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 18 - 23 \Rightarrow r = -5$

$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = 18 + (-5) \Rightarrow a_3 = 13$

$a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = 13 + (-5) \Rightarrow a_4 = 8$

$a_5 = a_4 + r \Rightarrow a_5 = 8 + (-5) \Rightarrow a_5 = 3$

$a_6 = a_5 + r \Rightarrow a_6 = 3 + (-5) \Rightarrow a_6 = -2$

Portanto, a PA formada é $(23, 18, 13, 8, 3, -2)$.

c) Se $a_6 = 19$ e $r = 2$, temos:

$a_5 = a_6 - r \Rightarrow a_5 = 19 - 2 \Rightarrow a_5 = 17$

$a_4 = a_5 - r \Rightarrow a_4 = 17 - 2 \Rightarrow a_4 = 15$

$a_3 = a_4 - r \Rightarrow a_3 = 15 - 2 \Rightarrow a_3 = 13$

$a_2 = a_3 - r \Rightarrow a_2 = 13 - 2 \Rightarrow a_2 = 11$

$a_1 = a_2 - r \Rightarrow a_1 = 11 - 2 \Rightarrow a_1 = 9$

Portanto, a PA formada é $(9, 11, 13, 15, 17, 19)$.

d) Se $a_4 = 3$ e $r = \frac{5}{2}$, temos:

$a_1 = a_4 - 3r \Rightarrow a_1 = 3 - 3 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow a_1 = -\frac{9}{2}$

$a_2 = a_4 - 2r \Rightarrow a_2 = 3 - 2 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow a_2 = -2$

$a_3 = a_4 - r \Rightarrow a_3 = 3 - \frac{5}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{1}{2}$

$a_4 = 3$

$a_5 = a_4 + r \Rightarrow a_5 = 3 + \frac{5}{2} \Rightarrow a_5 = \frac{11}{2}$

$a_6 = a_4 + 2r \Rightarrow a_6 = 3 + 2 \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow a_6 = 8$

Portanto, a PA formada é $\left(-\frac{9}{2}, -2, \frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8\right)$.

e) Se $a_6 = -10$ e $r = -6$, temos:

$a_5 = a_6 - r \Rightarrow a_5 = -10 - (-6) \Rightarrow a_5 = -4$

$a_4 = a_5 - r \Rightarrow a_4 = -4 - (-6) \Rightarrow a_4 = 2$

$a_3 = a_4 - r \Rightarrow a_3 = 2 - (-6) \Rightarrow a_3 = 8$

$a_2 = a_3 - r \Rightarrow a_2 = 8 - (-6) \Rightarrow a_2 = 14$

$a_1 = a_2 - r \Rightarrow a_1 = 14 - (-6) \Rightarrow a_1 = 20$

Portanto, a PA formada é $(20, 14, 8, 2, -4, -10)$.

MODERNA

3. **a)** Se $a_1 = 2$ e $a_2 = 7$, então:

$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 7 - 2 \Rightarrow r = 5$$

$$a_{20} = a_1 + 19r \Rightarrow a_{20} = 2 + 19 \cdot 5 \Rightarrow a_{20} = 97$$

Portanto, o 20º termo da PA é 97.

b) Se $a_1 = 17$ e $a_{32} = -45$, temos:

$$a_{32} = a_1 + 31r \Rightarrow -45 = 17 + 31r \Rightarrow r = -2$$

Portanto, a razão da PA é -2.

4. Indicando $a_{12} = 7$ e $a_{14} = -9$, então a razão é:

$$a_{14} = a_{12} + 2r \Rightarrow -9 = 7 + 2r \Rightarrow r = -8$$

Assim, segue que:

$$a_1 = a_{12} - 11r \Rightarrow a_1 = 7 - 11 \cdot (-8) \Rightarrow a_1 = 95$$

$$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 = 95 + (-8) \Rightarrow a_2 = 87$$

$$a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = 87 + (-8) \Rightarrow a_3 = 79$$

Portanto, os três primeiros termos são $(95, 87, 79)$.

5. **a)** Sabendo que a cada 10 minutos a quantidade de água no balde aumenta 40 mℓ, e que na primeira medição o recipiente continha 260 mℓ, utilizando regra de três, temos:

Tempo (min)	Quantidade de água (mℓ)
10	40
x	260

$$40x = 10 \cdot 260 \Rightarrow x = 65$$

Portanto, até realizar a primeira medição passaram-se 65 min.

b) Como o recipiente contém 1,5 ℓ ou 1 500 mℓ, temos:

$$1\,500 = 260 + (n - 1)40 \Rightarrow n = 32$$

Logo, o pote estará cheio na 32ª medição.

Considerando que até a 32ª medição temos 31 ciclos, para que o recipiente esteja completamente cheio foram necessários $310 + 65 = 375$, ou seja, 375 min.

6. **a)** Indicando a PA $(0, 1, 2, 3, \ldots)$, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 0 + (n - 1) \cdot 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_n = n - 1$$

Portanto, como $a = 1 > 0$, a PA é crescente e tem termo geral definido por $a_n = n - 1$.

b) Indicando a PA $\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}, 1, \ldots\right)$, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = \frac{5}{2} + (n - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Portanto, como $a = -\frac{1}{2} < 0$, a PA é decrescente e tem termo geral definido por $a_n = \frac{5}{2} + (n - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$.

7. Considerando as informações sobre a depreciação do computador, temos:

$$r = -25$$

$$a_{25} = 800$$

$$a_1 = a_{25} - 24r \Rightarrow a_1 = 800 - 24 \cdot (-25) \Rightarrow a_1 = 1\,400$$

O termo geral é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 1\,400 + (n - 1) \cdot (-25)$$

Sobre o valor pago em 1º de julho de 2017, segue que:

$$a_5 = 1\,400 + 4r \Rightarrow a_5 = 1\,400 + 4 \cdot (-25) \Rightarrow a_5 = 1\,300$$

Portanto, a fórmula do termo geral que expressa o valor do computador a cada mês é $a_n = 1\,400 + (n - 1) \cdot (-25)$ e o valor desse computador em 1º de julho de 2017 era de R$ 1 300,00.

8. Uma maneira de determinar a quantidade de termos comuns às duas progressões é encontrar o termo geral da PA dos termos que se repetem nas duas sequências, indicando por c_n.

Conforme os dados do problema, 14 é o primeiro termo que se repete em ambas as progressões. Para determinar a razão da PA desejada, devemos determinar o segundo elemento que se repete em ambas as progressões. Nesse caso, é necessário determinar o termo geral de ambas as progressões:

- 1ª progressão: $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 2 + (n - 1) \cdot 6$
- 2ª progressão: $b_n = b_1 + (n - 1)r \Rightarrow b_n = 6 + (n - 1) \cdot 4$

Então, concluímos que 26 é o segundo elemento que se repete. Assim, determinamos c_n:

$$r = 26 - 14 \Rightarrow r = 12$$

$$c_n = 14 + (n - 1) \cdot 12$$

Para obter o número de termos de c_n, devemos obter o valor de n para $c_n \leqslant 386$, então:

$$c_n \leqslant 386$$

$$14 + (n - 1) \cdot 12 \leqslant 386$$

$$12n \leqslant 384$$

$$n \leqslant 32$$

Portanto, 32 termos se repetem em ambas as progressões.

9. **a)** Se as lâmpadas piscaram juntas às 13 horas, então às 13 h 3 min 24 s terão se passado 3 min e 24 s ou 204 s. Logo:

- para a lâmpada vermelha, em que $r = 4$, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 204 = 4 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 51$$

- para a lâmpada azul, em que $r = 3$, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 204 = 3 + (n - 1)3 \Rightarrow n = 68$$

- para a lâmpada branca, em que $r = 7$, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 204 = 7 + (n - 1)7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \simeq 29{,}14$$

As lâmpadas que piscaram juntas foram a vermelha e a azul, pois piscaram um número inteiro de vezes. Além disso, 204 é múltiplo de 4 e de 3, mas não é de 7.

Dessa maneira, seis segundos depois, ou seja, às 13 h 3 min 30 s, terão passado 210 s. Logo:

- para a lâmpada vermelha, em que $r = 4$, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 210 = 4 + (n - 1)4 \Rightarrow n = 52{,}5$$

- para a lâmpada azul, em que $r = 3$, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 210 = 3 + (n - 1)3 \Rightarrow n = 70$$

- para a lâmpada branca, em que $r = 7$, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 210 = 7 + (n - 1)7 \Rightarrow n = 30$$

As lâmpadas que piscaram juntas foram a azul e a branca, pois piscaram um número inteiro de vezes. Além disso, 210 é múltiplo de 3 e de 7, mas não é de 4.

b) Das 13 h até as 14 h são 3 600 s. O último múltiplo de 7, antes de 3 600 s, é 3 598. Assim:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 3\,598 = 7 + (n - 1) \cdot 7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 514$$

Portanto, a lâmpada branca terá piscado 514 vezes nesse período.

c) A última piscada da lâmpada branca foi 3 598 s após as 13 h, ou seja, às 13 h 59 min 58 s. Assim, as outras duas foram às 13h 59 min 51 s e às 13 h 59 min 44 s.

MODERNA

d) Com base nos dados obtidos no item **c**, as últimas piscadas da lâmpada branca foram após 59 min 58 s ou 3 598 s, 59 min 51 s ou 3 591 s e 59 min 44 s ou 3 584 s.
Portanto, a lâmpada azul piscou junto com a branca às 13h 59 min 51 s, pois 3 591 é múltiplo de 3.

e) Portanto, a lâmpada vermelha piscou junto com a branca às 13h 59 min 44 s, pois 3 584 é múltiplo de 4 e 7 ao mesmo tempo.

10. **a)** $r = M_1 - C \Rightarrow r = (C + C \cdot i) - C \Rightarrow r = C \cdot i$

$r = M_2 - M_1 \Rightarrow (C + 2C \cdot i) - (C + C \cdot i) \Rightarrow r = C \cdot i$ e

$r = M_3 - M_2 \Rightarrow (C + 3C \cdot i) - (C + 2C \cdot i) \Rightarrow r = C \cdot i$

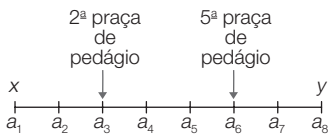
Logo, a sequência $(C, M_1, M_2, \ldots)$ é uma PA de razão $r = C \cdot i$.

b) Seja uma função afim, na forma $f(x) = ax + b$, temos:

$$M(t) = C \cdot i \cdot t + C$$

O montante resulta da soma do capital C com o juro $(C \cdot i \cdot t)$ obtido em determinado tempo, ou seja, o montante depende do tempo em que o capital fica aplicado a uma certa taxa fixa i. O tempo é a variável independente.

11. Indicando a posição das praças de pedágio por meio de um esquema, temos:



O problema pode ser resolvido de duas maneiras.

- 1ª maneira:

Como a distância entre x e y é de 420 km, a 2ª e a 5ª praça de pedágio é:

$$3 \cdot \frac{420}{7} = 180$$

Portanto, 180 km.

- 2ª maneira:

Indicando $a_1 = 0$ e $a_8 = 420$, temos:

$$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow 420 = 0 + 7r \Rightarrow r = 60$$

Ou seja, 60 km. Logo:

$$a_6 - a_3 = (a_1 + 5r) - (a_1 + 2r) = 5 \cdot 60 - 2 \cdot 60 = 180$$

Portanto, a distância entre a 2ª e a 5ª praça de pedágio é de 180 km.

12. Para interpolar 5 termos entre 3 e 27, a progressão terá 7 termos, em que $a_1 = 3$, $a_7 = 27$ e $n = 7$. Assim, temos:

$$a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 27 = 3 + 6r \Rightarrow r = 4$$

Portanto, a razão será igual a 4.

13. Como $a_1 = -16$, $a_{13} = 20$ e $n = 13$, temos:

$$a_{13} = a_1 + 12r \Rightarrow 20 = -16 + 12r \Rightarrow r = 3$$

Calculamos a_5, a_6 e a_8:

$$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_5 = -16 + 4 \cdot 3 \Rightarrow a_5 = -4$$

$$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = -16 + 5 \cdot 3 \Rightarrow a_6 = -1$$

$$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow a_8 = -16 + 7 \cdot 3 \Rightarrow a_6 = 5$$

Portanto, a soma $a_5 + a_6 + a_8 = (-4) + (-1) + 5 = 0$.

14. Para interpolar cinco termos entre 1 e 3 e entre 3 e 5, podemos compor o seguinte esquema:

$$\underbrace{1}_{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}, \overline{a_4}, \overline{a_5}, \overline{a_6}, \underbrace{3}_{a_7}, \overline{a_8}, \overline{a_9}, \overline{a_{10}}, \overline{a_{11}}, \overline{a_{12}}, \underbrace{5}_{a_{13}}$$

Indicando, $a_1 = 1$, $a_7 = 3$ e $a_{13} = 5$, temos:

a) $a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow 3 = 1 + 6r \Rightarrow r = \frac{1}{3}$

Portanto, a razão dessa PA deve ser igual a $\frac{1}{3}$.

b) 13 termos.

c) Calculando os demais termos da PA, temos:

$$a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow a_2 = \frac{4}{3}$$

$$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_3 = 1 + 2 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_3 = \frac{5}{3}$$

$$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow a_4 = 1 + 3 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_4 = 2$$

$$a_5 = a_1 + 4r \Rightarrow a_5 = 1 + 4 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_5 = \frac{7}{3}$$

$$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = 1 + 5 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_6 = \frac{8}{3}$$

$$a_7 = a_1 + 6r \Rightarrow a_7 = 1 + 6 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_7 = 3$$

$$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow a_8 = 1 + 7 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_8 = \frac{10}{3}$$

$$a_9 = a_1 + 8r \Rightarrow a_9 = 1 + 8 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_9 = \frac{11}{3}$$

$$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 1 + 9 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_{10} = 4$$

$$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow a_{11} = 1 + 10 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_{11} = \frac{13}{3}$$

$$a_{12} = a_1 + 11r \Rightarrow a_{12} = 1 + 11 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_{12} = \frac{14}{3}$$

Assim, temos a PA $\left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, 3, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}, 4, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}, 5\right)$.

Portanto, 5 termos da PA pertencem a $\mathbb{N}$, sendo eles 1, 2, 3, 4 e 5.

15. A partir da PA dada e como a razão desejada é 10, temos:

$$f(-8) = -8a + 7$$

$$f(-3) = -3a + 7$$

$$r = a_2 - a_1$$

$$-10 = -3a + 7 - (-8a + 7)$$

$$5a = -10$$

$$a = -2$$

Portanto, a é -2.

16. Indicando uma PA de 5 termos, ainda desconhecidos:

$$(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$$

Sabendo que o total de veículos vendidos foi igual a 35, temos:

$$(x - 2r) + (x - r) + (x) + (x + r) + (x + 2r) = 35 \Rightarrow x = 7$$

a) Se no 1º domingo foram vendidos 3 veículos, temos:

$$x - 2r = 3 \Rightarrow 7 - 2r = 3 \Rightarrow r = 2$$

Portanto, no 2º domingo foram vendidos 2 veículos a mais do que no 1º. Esse valor representa a razão da PA.

b) Se o 1º termo da PA é 3 e a razão é 2. Logo, a PA que representa o número de veículos vendidos é $(3, 5, 7, 9, 11)$.

c) Indicando a função definida por $f(x) = 8x - 3$, temos:

$$f(3) = 8 \cdot 3 - 3 \Rightarrow f(3) = 21$$

$$8 \cdot 2 = 16$$

Portanto, a sequência é $(21, 37, 53, 69, 85)$.

MODERNA

17. Indicando o movimento retilíneo uniforme pela função afim $p(t) = at + b$, temos:

Para o movimento da partícula A, o tempo é dado pela sequência $(0, 1, 2, 3)$ e a posição, em função do tempo, é dada pela sequência $(5, 10, 15, 20)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} p(0) = 5 \\ p(1) = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + b = 5 \\ a \cdot 1 + b = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ a + b = 10 \end{cases} \Rightarrow a = b = 5$$

Portanto, a partícula A tem função $p(t) = 5t + 5$.

Para o movimento da partícula B, o tempo é dado pela sequência $(0, 2, 4, 6)$ e a posição, em função do tempo, é dada pela sequência $(0, 13, 26, 39)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} p(0) = 0 \\ p(2) = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 0 + b = 0 \\ a \cdot 2 + b = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 2a + b = 13 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{13}{2} \text{ e } b = 0$$

Portanto, a partícula B tem função $p(t) = \frac{13}{2}t$.

18. Calculando os termos da nova PA, temos:

$$f(-4) = 2 \cdot (-4) - 4 \Rightarrow f(-4) = -12$$
$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 \Rightarrow f(-1) = -6$$
$$f(2) = 2 \cdot 2 - 4 \Rightarrow f(2) = 0$$
$$f(5) = 2 \cdot 5 - 4 \Rightarrow f(5) = 6$$
$$f(8) = 2 \cdot 8 - 4 \Rightarrow f(8) = 12$$
$$f(11) = 2 \cdot 11 - 4 \Rightarrow f(11) = 18$$
$$f(14) = 2 \cdot 14 - 4 \Rightarrow f(14) = 24$$
$$f(17) = 2 \cdot 17 - 4 \Rightarrow f(17) = 30$$

Assim, a razão pode ser obtida por:

$$\underbrace{2}_{a} \cdot \underbrace{3}_{r} = 6$$

Portanto, a nova PA é $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30)$ e sua razão é 6.

19. Seja a função afim definida pela lei de formação $f(x) = ax + b$, temos:

$$\begin{cases} f(10) = -26 \\ f(3) = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a + b = -26 \\ 3a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -3 \text{ e } b = 4$$

Portanto, a lei da função que define a PA dada é $f(x) = -3x + 4$.

20. Inicialmente, indicamos a sequência (x_1, x_2, x_3, x_4) como sendo uma PA. Em seguida:

a) determinamos os termos:

$$f(x_2) - f(x_1) = 7 - 2 = 5$$
$$f(x_3) - f(x_2) = 33 - 7 = 26$$
$$f(x_4) - f(x_3) = 80 - 33 = 47$$

Assim, a sequência $(5, 26, 47)$ é uma PA. Logo, f pode ser quadrática.

b) determinamos os termos:

$$f(x_2) - f(x_1) = 7 - 6 = 1$$
$$f(x_3) - f(x_2) = 12 - 7 = 4$$
$$f(x_4) - f(x_3) = 15 - 12 = 3$$

Assim, a sequência $(1, 4, 3)$ não é uma PA.

c) determinamos os termos:

$$f(x_2) - f(x_1) = -4 - (-15) = 11$$
$$f(x_3) - f(x_2) = -15 - (-4) = -11$$
$$f(x_4) - f(x_3) = -48 - (-15) = -33$$

Assim, a sequência $(11, -11, -33)$ é uma PA. Logo, h pode ser quadrática.

Portanto, entre as funções dadas, apenas f e h podem ser quadráticas.

21. Sabendo que a função é quadrática e que $r = 64$, temos:

$$64 = 2 \cdot \underbrace{2}_{a} r^2 \Rightarrow r^2 = 16 \begin{cases} r = 4 \\ r = -4 \end{cases}$$

Portanto, há dois possíveis valores para a razão da sequência, $r = 4$ ou $r = -4$.

22. Indicando a PA (x_1, x_2, x_3) de razão $r = 7$, temos:

$$f(x_2) - f(x_1) = 3 - (-4) = 7$$
$$f(x_3) - f(x_2) = -88 - 3 = -91$$

A sequência $\left[f(x_2) - f(x_1), f(x_3) - f(x_2)\right]$ tem razão $2 \cdot a \cdot \underbrace{7}_{r}^{2}$, logo:

$$2 \cdot a \cdot 7^2 = -91 - 7 \Rightarrow a = -1$$

Portanto, como $a = -1 < 0$, a função apresenta valor de máximo.

23. Possível resposta: indicando a função $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e a PA $(-1, 2, 5, 8, \ldots)$ de razão $r = 3$, temos:

$$f(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 \Rightarrow f(-1) = 12$$
$$f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 \Rightarrow f(2) = 0$$
$$f(5) = 5^2 - 5 \cdot 5 + 6 \Rightarrow f(5) = 6$$
$$f(8) = 8^2 - 5 \cdot 8 + 6 \Rightarrow f(8) = 30$$

As diferenças $f(2) - f(-1)$, $f(5) - f(2)$, $f(8) - f(5)$ formam a PA $(-12, 6, 24, \ldots)$ cuja razão é $2ar^2 = 2 \cdot 1 \cdot 3^2 = 18$.

24. Considerando $1 + 2 + 3 + \ldots + 100$, observe que $1\,000 + 1$; $999 + 2$; $998 + 3 = 1\,001$, e assim por diante. Portanto, a soma é dada por:

$$500 \cdot 1\,001 = 500\,500$$

Portanto, a soma dos números naturais de 1 a 1 000 é 500 500.

25. **a)** Indicando a PA $(5, 9, 13, \ldots)$, temos:

$$a_1 = 5$$
$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 9 - 5 \Rightarrow r = 4$$
$$a_{15} = a_1 + 14r \Rightarrow a_{15} = 5 + 14 \cdot 4 \Rightarrow a_{15} = 61$$
$$S_{15} = \frac{15 \cdot (a_1 + a_{15})}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{15 \cdot (5 + 61)}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{15} = 495$$

Portanto, a soma dos 15 primeiros termos da PA é 495.

b) Indicando a PA $(17, 11, 5, \ldots)$, temos:

$$a_1 = 17$$
$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 11 - 17 \Rightarrow r = -6$$
$$a_{36} = a_1 + 35r \Rightarrow a_{36} = 17 + 35 \cdot (-6) \Rightarrow a_{36} = -193$$
$$S_{36} = \frac{36 \cdot (a_1 + a_{36})}{2} \Rightarrow S_{36} = \frac{36 \cdot (17 - 193)}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{36} = -3\,168$$

Portanto, a soma dos 36 primeiros termos da PA é $-3\,168$.

MODERNA

26. **a)** Indicando a PA $(3, 11, 19, \ldots, 115)$, temos:

$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 11 - 3 \Rightarrow r = 8$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 115 = 3 + (n-1)\cdot 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 15$$

$$S_{15} = \frac{15 \cdot (a_1 + a_{15})}{2} \Rightarrow S_{15} = \frac{15 \cdot (3 + 115)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{15} = 885$$

Portanto, a soma dos termos dessa PA é 885.

b) Indicando a PA $(86, 83, 80, \ldots, 35)$, temos:

$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 83 - 86 \Rightarrow r = -3$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 35 = 86 + (n-1)\cdot(-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 18$$

$$S_{18} = \frac{18 \cdot (a_1 + a_{18})}{2} \Rightarrow S_{18} = \frac{18 \cdot (86 + 35)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{18} = 1\,089$$

Portanto, a soma dos termos dessa PA é 1 089.

c) Indicando a PA $(-8, -5, -2, \ldots, 22)$, temos:

$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = -5 - (-8) \Rightarrow r = 3$$

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 22 = -8 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 11$$

$$S_{11} = \frac{11 \cdot (a_1 + a_{11})}{2} \Rightarrow S_{11} = \frac{11 \cdot (-8 + 22)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{11} = 77$$

Portanto, a soma dos termos dessa PA é 77.

27. Sabendo que $S_{25} = 225$ e $r = 4$, temos:

$$\frac{25 \cdot (a_1 + a_{25})}{2} = 225 \Rightarrow a_1 + a_{25} = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_{18} - 17r)}_{a_1} + \underbrace{(a_{18} + 7r)}_{a_{25}} = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_{18} = 18 + 40 \Rightarrow a_{18} = 29$$

Portanto, o 18º termo da progressão é 29.

28. Indicando a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7)$, em que $r = -7$ e $S_n = 0$, temos:

$$0 = \frac{7 \cdot (a_1 + a_7)}{2} \Rightarrow a_1 + a_7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_1 + 6r) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 6 \cdot (-7) = 0 \Rightarrow a_1 = 21$$

Portanto, o primeiro termo da PA é 21.

29. alternativa **a**

Inicialmente, calculamos o valor de a_1 e r

$$r = \frac{5}{100}a_1 \Rightarrow r = 0{,}05a_1$$

$$a_1 + 20r = 32 \Rightarrow a_1 + 20 \cdot (0{,}05a_1) = 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 + a_1 = 32 \Rightarrow a_1 = 16$$

$$16 + 20r = 32 \Rightarrow r = \frac{16}{20} \Rightarrow r = \frac{4}{5}$$

Assim, a_1 é 16 e r é $\frac{4}{5}$.

a) Verdadeira, pois $a_1 = 16$.

b) Falsa, pois:

$$a_{11} = a_1 + 10r \Rightarrow a_{11} = 16 + 10 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow a_{11} = 24$$

$$S_{11} = \frac{11 \cdot (16 + 24)}{2} \Rightarrow S_{11} = 220$$

c) Falsa, pois:

$$a_{44} = a_1 + 43r \Rightarrow a_{44} = 16 + 43 \cdot \frac{4}{5} \Rightarrow a_{44} = \frac{252}{5}$$

30. **a)** Considerando a PA $(x + 1, x + 2, \ldots, x + 100)$, temos:

$$S_{100} = 7\,450$$

$$\frac{100 \cdot (x + 1 + x + 100)}{2} = 7\,450 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100x + 5\,050 = 7\,450 \Rightarrow x = 24$$

Portanto, nessa equação, $x = 24$.

b) Considerando a PA $(3x + 2, 3x + 5, \ldots, 3x + 59)$, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 59 = 3x + 2 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow n = 20$$

$$S_{20} = 630$$

$$\frac{20 \cdot (3x + 2 + 3x + 59)}{2} = 630 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 60x + 610 = 630 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Portanto, nessa equação, $x = \frac{1}{3}$.

31. alternativa **d**

Indicando a PA $(50{,}25;\ 51{,}50;\ 52{,}75;\ 54)$, temos:

$$a_1 = 50{,}25$$

$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 51{,}50 - 50{,}25 \Rightarrow r = 1{,}25$$

$$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 50{,}25 + 9 \cdot 1{,}25 \Rightarrow a_{10} = 61{,}5$$

Para determinar a soma dos 10 primeiros termos dessa PA, que representa a quantidade total de arroz que será produzida no período de 2012 a 2021, fazemos:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (50{,}25 + 61{,}5)}{2} \Rightarrow S_{10} = 558{,}75$$

Portanto, se essa progressão se mantiver, entre 2012 e 2021, serão produzidas 558,75 toneladas de arroz.

32. Indicando a PA $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$, temos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{n[0 + (n-1)]}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

Portanto,

$$(a) \cdot (ab) \cdot (ab^2) \cdot \ldots \cdot (ab^{n-1}) = a^n \cdot b^{0+1+2+\ldots+(n-1)} =$$

$$= a^n \cdot b^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

33. **a)** A sequência $(2, 6, 12, 20, 30, \ldots)$ não representa uma PA.

A sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$ não é uma PA. Ambas as sequências não apresentam uma razão constante.

b) O termo geral da sequência $(2, 6, 12, 20, 30, \ldots)$ é a soma dos n primeiros termos da PA $(2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)\cdot 2 \Rightarrow a_n = 2n$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{n(2 + 2n)}{2} \Rightarrow S_n = n(n+1)$$

MODERNA

O termo geral da sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$ é a soma dos n primeiros termos da PA $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_n = 2n - 1$$
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{n(1 + (2n-1))}{2} \Rightarrow S_n = n^2$$

c) Indicando a sequência $(2, 6, 12, 20, 30, \ldots)$, temos:

$$a_{20} = 20 \cdot (20 + 1) \Rightarrow a_{20} = 420$$

Indicando a sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$, temos:

$$a_{20} = 20^2 \Rightarrow a_{20} = 400$$

Os termos 420 e 400 representam a soma dos 20 primeiros números pares e dos 20 primeiros números ímpares positivos, respectivamente.

34. Indicando $S_{18} = 540$ e $S_{30} = 540$, temos:

$$\begin{cases} \frac{18 \cdot (a_1 + a_{18})}{2} = 540 \\ \frac{30 \cdot (a_1 + a_{30})}{2} = 540 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_{18} = 60 \\ a_1 + a_{30} = 36 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + 17r) = 60 \\ a_1 + (a_1 + 29r) = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 17r = 60 \\ 2a_1 + 29r = 36 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = 47 \text{ e } r = -2$$

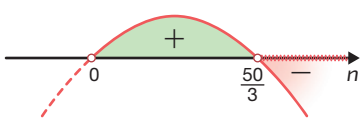
Assim, temos:

$$a_{50} = a_1 + 49r \Rightarrow a_{50} = 47 + 49 \cdot (-2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_{50} = -51$$
$$S_{50} = \frac{50 \cdot (a_1 + a_{50})}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{50} = \frac{50 \cdot (47 - 51)}{2} = -100$$

Portanto, a soma dos 50 primeiros termos dessa PA é -100.

35. Indicando $a_1 = 47$ e $r = -6$, temos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_n = 47 + (n-1) \cdot (-6) \Rightarrow a_n = 53 - 6n$$
$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{n[47 + (53 - 6n)]}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n = \frac{100n - 6n^2}{2} \Rightarrow S_n = -3n^2 + 50n$$
$$S_n < 0 \Rightarrow -3n^2 + 50n < 0$$



RONALDO INÁCIO

Como n é inteiro, o menor valor de n para que a soma seja negativa é 17.

14 Função exponencial

1. Sendo $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$, temos:

a) $f(0) = 3^0 = 1$

b) $f(1) = 3^1 = 3$

c) $f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

d) $g(2) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$

e) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

f) $g(-3) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = 4^3 = 64$

2. Uma possível resposta: considerando que $t = 0$ representa o ano de 1971, temos $f(t) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

3. a) O valor do montante é calculado com base no valor do capital do mês anterior, ou seja, o montante cresce de maneira exponencial, conforme apresentado no quadro a seguir.

Ano (n)	Montante (M)
1	$1\,500{,}00 + 1\,500{,}00 \cdot 0{,}06 = 1\,500{,}00 \cdot (1 + 0{,}06) = 1\,500{,}00 \cdot (1{,}06)^1$
2	$1\,500{,}00 \cdot (1{,}06)^1 + 1\,500{,}00 \cdot (1{,}06)^1 \cdot 0{,}06 = 1\,500{,}00 \cdot (1{,}06)^1 \cdot (1 + 0{,}06) = 1\,500{,}00 \cdot (1{,}06)^1 \cdot (1{,}06)^1 = 1\,500{,}00(1{,}06)^2$
3	$1\,500{,}00 \cdot (1{,}06)^2 + 1\,500{,}00 \cdot (1{,}06)^2 \cdot 0{,}06 = 1\,500{,}00 \cdot (1{,}06)^2 \cdot (1 + 0{,}06) = 1\,500{,}00 \cdot (1{,}06)^2 \cdot (1{,}06)^1 = 1\,500{,}00(1{,}06)^3$
⋮	⋮

Logo, a expressão que determina o montante ao final do ano n é definida por $M = 1\,500 \cdot (1{,}06)^n$.

b) Calculando o montante para $n = 4$, temos:

$$M = 1\,500 \cdot (1{,}06)^4 \simeq 1\,893{,}72$$

Logo, ao final de 4 anos o montante será, aproximadamente, R$ 1 893,72.

Calculando o montante para $n = 6$, temos:

$$M = 1\,500 \cdot (1{,}06)^6 \simeq 2\,127{,}78$$

Logo, ao final de 6 anos o montante será, aproximadamente, R$ 2 127,78.

MODERNA

4. a) O comportamento da divisão celular pode ser expresso conforme apresentado no quadro a seguir.

Número de divisões (x)	Número de células-filhas (y)
1	$2 = 2^1$
2	$2^1 \cdot 2 = 2^2 = 4$
3	$2^2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
4	$2^3 \cdot 2 = 2^4 = 16$
5	$2^4 \cdot 2 = 2^5 = 32$
6	$2^5 \cdot 2 = 2^6 = 64$
7	$2^6 \cdot 2 = 2^7 = 128$
⋮	⋮
n	$2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$

Portanto:

- após 3 divisões serão obtidas 8 células-filhas.
- após 4 divisões serão obtidas 16 células-filhas.
- após 7 divisões serão obtidas 128 células-filhas.

b) A lei de formação da função que associa a quantidade total de células-filhas y, obtida a partir de uma única célula-mãe, após uma quantidade x de divisões é $y = 2^x$.

5. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

6. a) $f(x) = \left(\frac{9}{5}\right)^x$ é crescente, pois $a = \frac{9}{5}$ e $\frac{9}{5} > 1$.

b) $f(x) = 6^{-x}$ é decrescente, pois $6^{-x} = \left(\frac{1}{6}\right)^x$, ou seja, $a = \frac{1}{6}$ e $0 < \frac{1}{6} < 1$.

c) $f(x) = 4^{\frac{x}{2}}$ é crescente, pois $4^{\frac{x}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^x = 2^x$, ou seja, $a = 2$ e $2 > 1$.

d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ é decrescente, pois

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^x = \left(\frac{1}{25}\right)^x$, ou seja,

$a = \frac{1}{25}$ e $0 < \frac{1}{25} < 1$.

7. alternativa **c**

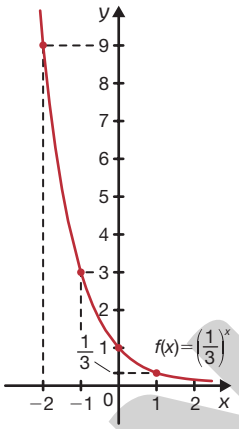
Podemos notar que o gráfico de f representa uma função decrescente. Portanto, $0 < a < 1$, ou seja, a pertence ao intervalo $]0, 1[$.

8. Uma função exponencial na forma $f(x) = a^x$ é decrescente se $0 < a < 1$. No caso da função $f(x) = \left(\frac{5}{k}\right)^x$, temos:

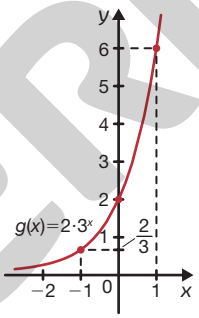
$$0 < \frac{5}{k} < 1 \Rightarrow 0 \cdot k < \frac{5}{k} \cdot k < 1 \cdot k \Rightarrow 5 < k$$

Portanto, a função f é decrescente se $k > 5$.

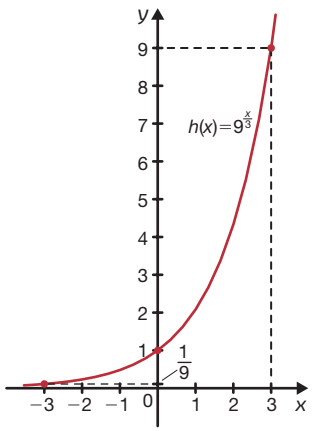
9. a)



b)



c)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

10. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

11. alternativa **d**

Sabendo que a função que descreve a porcentagem de fármaco no organismo em relação à sua meia-vida é dada por $f(x) = (0{,}5)^x$, para o período de uma hora e meia (das 12 h às 13 h 30 min), temos:

$$f(1{,}5) = (0{,}5)^{1{,}5} \simeq 0{,}35$$

Portanto, restarão aproximadamente 35% da dose de amoxicilina no organismo do paciente.

MODERNA

16 Equação e inequação exponencial

1. a) $3^{x+1} = 27 \Rightarrow 3^{x+1} = 3^3 \Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

Portanto, $S = \{2\}$.

b) $(0{,}25)^{2x+3} = 4^{x-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3} = 4^{x-1} \Rightarrow 4^{-2x-3} = 4^{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x - 3 = x - 1 \Rightarrow -2 = 3x \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

Portanto, $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

c) $\sqrt{7^x} = 343 \Rightarrow 7^{\frac{1}{2}x} = 7^3 \Rightarrow \frac{1}{2}x = 3 \Rightarrow x = 6$

$S = \{6\}$

Portanto, $S = \{6\}$.

d) $5^{\frac{3}{2}x} = 125^4 \Rightarrow 5^{\frac{3}{2}x} = 5^{12} \Rightarrow \frac{3}{2}x = 12 \Rightarrow x = 8$

Portanto, $S = \{8\}$.

e) $\sqrt[6]{1\,000} \cdot 10^x = 0{,}001 \Rightarrow \left(10^3\right)^{\frac{1}{6}} \cdot 10^x = 10^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^{\frac{1}{2}+x} = 10^{-3} \Rightarrow \frac{1}{2} + x = -3 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$

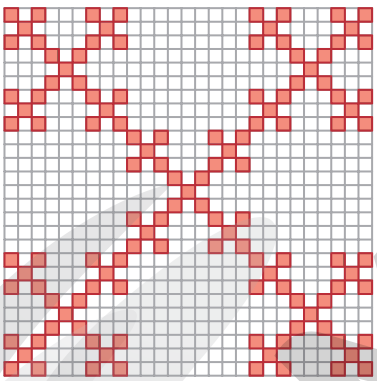
Portanto, $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$.

f) $\frac{8^x}{2^{x+2}} = 256 \Rightarrow \frac{2^{3x}}{2^{x+2}} = 2^8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2x-2} = 2^8 \Rightarrow 2x - 2 = 8 \Rightarrow x = 5$

Portanto, $S = \{5\}$.

2. a)



RONALDO INÁCIO

b)

Nível (x)	Número de quadradinhos (y)
1	$1 = 5^0 = 5^{1-1}$
2	$5 = 5^1 = 5^{2-1}$
3	$25 = 5^2 = 5^{3-1}$
⋮	⋮

Logo, $y = 5^{x-1}$.

c) • $3\,125 = 5^{x-1} \Rightarrow 5^5 = 5^{x-1} \Rightarrow 5 = x - 1 \Rightarrow x = 6$

Portanto, o número de quadradinhos da figura será 3 125 no nível 6.

• $78\,125 = 5^{x-1} \Rightarrow 5^7 = 5^{x-1} \Rightarrow 7 = x - 1 \Rightarrow x = 8$

Portanto, o número de quadradinhos da figura será 78 125 no nível 8.

3. a) Fazendo a estimativa para cada um dos anos, temos:

• 1989:

$$f(18) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{18}{2}} = 1\,177\,600$$

Portanto, a estimativa é 1 177 600 transistores em um microprocessador no ano de 1989.

• 2014:

$$f(43) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{43}{2}} \simeq 6\,821\,387\,842$$

Portanto, a estimativa é, aproximadamente, 6 821 387 842 transistores em um microprocessador no ano de 2014.

b) Espera-se que os alunos respondam que a quantidade de transistores do microprocessador lançado em 1989 aproxima-se da estimada pela Lei de Moore. Já o microprocessador de 2014 apresenta uma quantidade muito inferior à estimada pela Lei de Moore.

4. $y = 2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow 0{,}125 = 2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-3} = 2^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow -3 = -\frac{t}{2} \Rightarrow t = 6$

Portanto, haverá 0,125 mg de nicotina no organismo após 6 horas.

5.

$$3^{5x+1} \cdot \left(0{,}\overline{3}\right)^{x+8} = 243^{x-3}$$

$$3^{5x+1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x+8} = \left(3^5\right)^{x-3}$$

$$3^{5x+1} \cdot 3^{-x-8} = 3^{5x-15}$$

$$3^{4x-7} = 3^{5x-15}$$

$$4x - 7 = 5x - 15$$

$$x = 8$$

6. alternativa d

Tempo (em minutos)	Quantidade de bactérias
20	$1\,000 \cdot 2 = 1\,000 \cdot 2^{\frac{20}{20}}$
40	$1\,000 \cdot 2^{\frac{20}{20}} \cdot 2 = 1\,000 \cdot 2^{\frac{40}{20}}$
60	$1\,000 \cdot 2^{\frac{40}{20}} \cdot 2 = 1\,000 \cdot 2^{\frac{60}{20}}$
⋮	⋮

Segue que:

$$1\,000 \cdot 2^{\frac{x}{20}} = 4{,}096 \cdot 10^6$$

$$10^3 \cdot 2^{\frac{x}{20}} = 4\,096 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6$$

$$10^3 \cdot 2^{\frac{x}{20}} = 4\,096 \cdot 10^3$$

$$2^{\frac{x}{20}} = 2^{12}$$

$$\frac{x}{20} = 12$$

$$x = 240$$

Logo, o tempo do experimento foi de 240 minutos, ou seja, 4 horas.

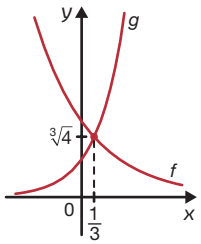
MODERNA

7. a) f: decrescente; g: crescente

b) $f(x) = g(x) \Rightarrow 2 \cdot (0{,}5)^x = 4^x \Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^2\right)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot 2^{-x} = 2^{2x} \Rightarrow 2^{1-x} = 2^{2x} \Rightarrow 1 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

c)



RONALDO INÁCIO

8. alternativa d

$$(0{,}5)^{x^2-6} = 8 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6} = 2^3 \Rightarrow 2^{-x^2+6} = 2^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 6 = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 3 = 0 \begin{cases} x_1 = -\sqrt{3} \\ x_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

9. a) $9^{2x-1} = 1 \Rightarrow 9^{2x-1} = 9^0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Portanto, $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

b) $6 \cdot 7^{x-3} = 294 \Rightarrow 7^{x-3} = 49 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7^{x-3} = 7^2 \Rightarrow x - 3 = 2 \Rightarrow x = 5$

Portanto, $S = \{5\}$.

c) $3^{1+x} = 324 - 3^x \Rightarrow 3^1 \cdot 3^x + 3^x = 324$

Substituindo $y = 3^x$:

$$3y + y = 324 \Rightarrow y = 81$$

Segue que:

$$y = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, $S = \{4\}$.

d) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 36 \Rightarrow 2^{x-1} \cdot 2^3 + 2^{x-1} = 36$

Substituindo $y = 2^{x-1}$:

$$8y + y = 36 \Rightarrow y = 4$$

Segue que:

$$y = 4 \Rightarrow 2^{x-1} = 2^2 \Rightarrow x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$$

Portanto, $S = \{3\}$.

e) $\frac{25^x + 5}{6} - 5^x = 0 \Rightarrow \left(5^x\right)^2 - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

Substituindo $y = 5^x$:

$$y^2 - 6y + 5 = 0 \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Segue que:

- $y_1 = 5 \Rightarrow 5^{x_1} = 5 \Rightarrow x_1 = 1$
- $y_2 = 1 \Rightarrow 5^{x_2} = 1 \Rightarrow 5^{x_2} = 5^0 \Rightarrow x_2 = 0$

Portanto, $S = \{0, 1\}$.

f) $\left(4^{x+1} - 4^x\right)^2 = 144 \Rightarrow \left(4^x \cdot 4^1 - 4^x\right) = 144$

Substituindo $y = 4^x$:

$$(4y - y)^2 = 144 \Rightarrow (3y)^2 = 144 \Rightarrow 9y^2 = 144 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - 16 = 0 \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

Segue que:

- $y_1 = 4 \Rightarrow 4^{x_1} = 4 \Rightarrow x_1 = 1$
- $y_2 = -4 \Rightarrow 4^{x_2} = -4$ (impossível)

Portanto, $S = \{1\}$.

10. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros em problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

11. $4^{x+1} - 12 = 2^{x+1} \Rightarrow \left(2^{x+1}\right)^2 - 2^{x+1} - 12 = 0$

Substituindo $y = 2^{x+1}$:

$$y^2 - y - 12 = 0 \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -3 \end{cases}$$

Segue que:

- $y_1 = 4 \Rightarrow 2^{x_1+1} = 4 \Rightarrow 2^{x_1+1} = 2^2 \Rightarrow x_1 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$
- $y_2 = -3 \Rightarrow 2^{x_2+1} = -3$ (impossível)

Portanto, $x = 1$.

12. a) $27^x \geqslant 3 \Rightarrow 3^{3x} \geqslant 3 \Rightarrow 3x \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{3}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$.

b) $(0{,}8)^{2x-3} < (0{,}8)^5 \Rightarrow 2x - 3 > 5 \Rightarrow x > 4$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

c) $3 \cdot 4^x \leqslant 72 - 6 \cdot 4^x$

Substituindo $y = 4^x$:

$$3y \leqslant 72 - 6y \Rightarrow y \leqslant 8$$

Segue que:

$$y \leqslant 8 \Rightarrow 4^x \leqslant 8 \Rightarrow 2^{2x} \leqslant 2^3 \Rightarrow 2x \leqslant 3 \Rightarrow x \leqslant \frac{3}{2}$$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$.

d) $4^{x+1} \cdot 2^{x-1} < 128 \Rightarrow \left(2^{x+1}\right)^2 \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{-2} < 128$

Substituindo $y = 2^{x+1}$:

$$y^2 \cdot y \cdot \frac{1}{2^2} < 128 \Rightarrow y^3 < 512 \Rightarrow y < \sqrt[3]{512} \Rightarrow y < 8$$

Segue que:

$$y < 8 \Rightarrow 2^{x+1} < 8 \Rightarrow 2^{x+1} < 2^3 \Rightarrow x + 1 < 3 \Rightarrow x < 2$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$.

e) $25 \geqslant \frac{5}{5^x} \Rightarrow 5^2 \geqslant 5^{1-x} \Rightarrow 2 \geqslant 1 - x \Rightarrow x \geqslant -1$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$.

f) $3^{x(x+1)} > 3^{x^2+1} \Rightarrow x(x+1) > x^2 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + x > x^2 + 1 \Rightarrow x > 1$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

13. alternativa b

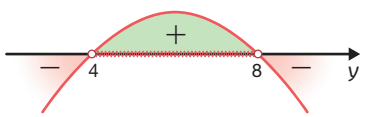
$$3 \cdot 2^{x+2} - 2^{2x} > 32 \Rightarrow 3 \cdot 2^x \cdot 2^2 - \left(2^x\right)^2 > 32$$

Substituindo $y = 2^x$:

$$3 \cdot y \cdot 4 - y^2 > 32 \Rightarrow -y^2 + 12y - 32 > 0$$

Logo:

- a parábola tem concavidade voltada para baixo
- $-y^2 + 12y - 32 = 0 \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 8 \end{cases}$



RONALDO INÁCIO

Logo, $4 < y < 8$. Segue que:

$$4 < y < 8 \Rightarrow 4 < 2^x < 8 \Rightarrow 2^2 < 2^x < 2^3 \Rightarrow 2 < x < 3$$

Portanto, $S =]2, 3[$.

MODERNA

14. $f(x) \leqslant 96 \Rightarrow 2^x + 2^{x+1} \leqslant 96 \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 \leqslant 96$

Substituindo $z = 2^x$:

$$z + 2z \leqslant 96 \Rightarrow 3z \leqslant 96 \Rightarrow y \leqslant 32$$

Segue que:

$$z \leqslant 32 \Rightarrow 2^x \leqslant 32 \Rightarrow 2^x \leqslant 2^5 \Rightarrow x \leqslant 5$$

15. • $3^{x-2} - 1 \geqslant 0 \Rightarrow 3^{x-2} \geqslant 3^0 \Rightarrow x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

• $2^{2x-1} - 8 \geqslant 0 \Rightarrow 2^{2x-1} \geqslant 2^3 \Rightarrow 2x - 1 \geqslant 3 \Rightarrow x \geqslant 2$

$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

• $4^x - 2^{x+4} \geqslant 0 \Rightarrow \left(2^2\right)^x \geqslant 2^{x+4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2x} \geqslant 2^{x+4} \Rightarrow 2x \geqslant x + 4 \Rightarrow x \geqslant 4$

$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$

16. $0{,}4^x < (0{,}4)^{\frac{x-3}{2}} \Rightarrow x > \frac{x-3}{2} \Rightarrow 2x > x - 3 \Rightarrow x > -3$

17. $f(x) + g(x) > 0 \Rightarrow 8^x - 2^{x+1} - 4^x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(2^x\right)^3 - 2^x \cdot 2 - \left(2^x\right)^2 > 0$

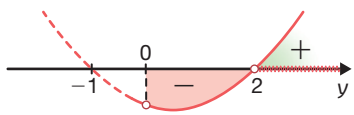
Substituindo $z = 2^x$:

$$z^3 - 2z - z^2 > 0 \Rightarrow z\left(z^2 - z - 2\right) > 0$$

Como $z = 2^x > 0$, devemos ter $z^2 - z - 2 > 0$.

• a parábola tem concavidade voltada para cima

• $z^2 - z - 2 = 0 \begin{cases} z_1 = 2 \\ z_2 = -1 \text{ (impossível)} \end{cases}$



RONALDO INÁCIO

Logo $z > 2$. Segue que:

$$z > 2 \Rightarrow 2^x > 2 \Rightarrow x > 1$$

18. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros em problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

19. alternativa d

$$0{,}5 \leqslant 8^{2x} < 4 \Rightarrow 2^{-1} \leqslant 2^{6x} < 2^2 \Rightarrow -1 \leqslant 6x < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{6} \leqslant x < \frac{1}{3}$$

20. alternativa a

$$\frac{27}{125} < f(x) \leqslant 1 \Rightarrow \frac{27}{125} < (0{,}6)^{2x+1} \leqslant 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^3 < \underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{2x+1}}_{0 < a < 1} \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 > 2x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow 1 > x \geqslant -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leqslant x < 1$$

Portanto, $\left[-\frac{1}{2}, 1\right[$.

21. alternativa a

$$\frac{P(n)}{Q(n)} \geqslant 1\,024 \Rightarrow \frac{4^n}{2^n} \geqslant 1\,024 \Rightarrow 2^n \geqslant 1\,024 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^n \geqslant 2^{10} \Rightarrow n \geqslant 10$$

Portanto, essa ameaça de extinção ocorrerá a partir da décima geração.

17 Progressão geométrica

1. a) $q = \frac{10}{5} = 2$

A PG é crescente, pois $q > 1$ e $a_1 > 0$.

b) $q = \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 1$

A PG é constante, pois $q = 1$.

c) $q = \frac{2}{3}$

A PG é decrescente, pois $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$.

d) $q = \frac{-18}{27} = -\frac{2}{3}$

A PG é alternante, pois $q < 0$.

e) $q = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$

A PG é crescente, pois $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$.

2. a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5(-1)^{n+1}}{5(-1)^n} = (-1)^{n+1-n} = -1$

Logo, a sequência é uma PG e $q = -1$.

b) • $a_1 = -3$ • $a_2 = -6$ • $a_3 = -9$

A sequência não é uma PG, pois $\frac{a_2}{a_1} = 2$ e $\frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2}$.

c) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{4^n} = 4^{n+1-n} = 4$

Logo, a sequência é uma PG e $q = 4$.

3. • raios: $\left(r, \frac{r}{2}, \frac{r}{4}, \frac{r}{8}, \frac{r}{16}\right)$

• comprimentos: $\left(2\pi r, \pi r, \frac{\pi r}{2}, \frac{\pi r}{4}, \frac{\pi r}{8}\right)$

• áreas: $\left(\pi r^2, \frac{\pi r^2}{4}, \frac{\pi r^2}{16}, \frac{\pi r^2}{64}, \frac{\pi r^2}{256}\right)$

As sequências são progressões geométricas e suas razões são dadas, respectivamente, por:

• $q = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2}$ • $q = \frac{\pi r}{2\pi r} = \frac{1}{2}$ • $q = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{\pi r^2} = \frac{1}{4}$

4. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem as questões, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

5. $a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \Rightarrow (x-1)^2 = (x-3)(x+5) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 + 2x - 15 \Rightarrow x = 4$

Assim:

$$a_1 = x - 3 = 4 - 3 = 1$$
$$a_2 = x - 1 = 4 - 1 = 3$$
$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$$

Portanto, os sete primeiros termos dessa progressão são 1, 3, 9, 27, 81, 243 e 729.

6. $a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \Rightarrow (14 + b)^2 = (8 - 5b)(18 + 5b) \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2 + 3b + 2 = 0 \begin{cases} b_1 = -1 \\ b_2 = -2 \end{cases}$

MODERNA

- Se $b = -1$, a PG é constante, pois:

$$q = \frac{14 + b}{8 - 5b} = \frac{14 + (-1)}{8 - 5 \cdot (-1)} = 1$$

- Se $b = -2$, a PG é decrescente, pois:

$$a_1 = 8 - 5b = 8 - 5 \cdot (-2) = 18 > 0$$

$$q = \frac{14 + b}{8 - 5b} = \frac{14 + (-2)}{8 - 5 \cdot (-2)} = \frac{2}{3} \Rightarrow 0 < q < 1$$

7. • $\underbrace{a_1}_{\frac{a_2}{q}} \cdot a_2 \cdot \underbrace{a_3}_{a_2 \cdot q} = -216 \Rightarrow \frac{a_2}{q} \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot q = -216 \Rightarrow a_2 = -6$

• $a_1 + a_2 + a_3 = 14 \Rightarrow \frac{a_2}{q} + a_2 + a_2 \cdot q = 14 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-6}{q} + (-6) + (-6) \cdot q = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3q^2 + 10q + 3 = 0 \begin{cases} q_1 = -3 \\ q_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Para $q = -3$, a PG é $(2, -6, 18)$. Para $q = -\frac{1}{3}$ a PG é $(18, -6, 2)$.

8. **a)** Considerando $a_1 = 210\,147\,125$ e $q = 1{,}0079$, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q = 210\,147\,125 \cdot 1{,}0079 \simeq 211\,807\,287$$

Portanto, a quantidade de habitantes no Brasil em 2020 era, aproximadamente, 211 807 287.

b) De acordo com o item anterior, temos $a_2 \simeq 211\,807\,287$. Assim:

- $a_3 = a_2 \cdot q = 211\,807\,287 \cdot 1{,}0079 \simeq 213\,480\,565$
- $a_4 = a_3 \cdot q = 213\,480\,565 \cdot 1{,}0079 \simeq 215\,167\,061$
- $a_5 = a_4 \cdot q = 215\,167\,061 \cdot 1{,}0079 \simeq 216\,866\,881$
- $a_6 = a_5 \cdot q = 216\,866\,881 \cdot 1{,}0079 \simeq 218\,580\,128$
- $a_7 = a_6 \cdot q = 218\,580\,128 \cdot 1{,}0079 \simeq 220\,306\,911$

Portanto, a população brasileira ultrapassará os 220 milhões de habitantes no ano correspondente ao termo a_7, ou seja, em 2025.

c) Resposta pessoal.

9. **a)** $q = \frac{8}{2} = 4$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 2 \cdot 4^{n-1}$$

$$a_6 = 2 \cdot 4^{6-1} = 2\,048$$

b) $q = \frac{-24}{-48} = \frac{1}{2}$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_6 = -48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = -\frac{3}{2} = -1{,}5$$

c) $q = \frac{14}{-7} = -2$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = -7 \cdot (-2)^{n-1}$$

$$a_6 = -7 \cdot (-2)^{6-1} = 224$$

d) $q = \frac{\frac{8}{5}}{\frac{64}{25}} = \frac{5}{8}$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = \frac{64}{25} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

$$a_6 = \frac{64}{25} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{6-1} = \frac{125}{512}$$

10. $q = \frac{2\,430}{729} = \frac{10}{3}$

$$a_n = 1\,000\,000 \Rightarrow a_1 \cdot q^{n-1} = 1\,000\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 729 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^{n-1} = 10^6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10^{n-1}}{3^{n-1}} = 10^6 \Rightarrow \left(\frac{10}{3}\right)^{n-7} = 1 \Rightarrow n - 7 = 0 \Rightarrow n = 7$$

Portanto, $a_7 = 1\,000\,000$.

11. $q = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{a_5}{a_7} = \frac{a_5}{a_5 \cdot q^2} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$$

Portanto, a razão dessa PG é $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{a_5}{a_7} = 2$.

12. Temos:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 648 = a_1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 \Rightarrow a_1 = 128$$

Logo:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2\,187 = 128 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\,187}{128} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7 = n - 1 \Rightarrow n = 8$$

Portanto, essa PG possui 8 termos.

13. $a_2^2 = a_1 \cdot a_3 \Rightarrow a_2^2 = 32 \cdot 72 \Rightarrow a_2 = 48$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

a) $(32, 48, 72, 108, 162, 243)$

b) A quantidade de medicamento ingerida por Júlio na quarta semana de tratamento.

c) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 32 \cdot (1{,}5)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 6$

14. **a)** $v_2 = v_1 - \frac{x}{100} \cdot v_1 = \frac{100 - x}{100} \cdot v_1$

$$v_3 = v_2 - \frac{x}{100} \cdot v_2 = \frac{100 - x}{100} \cdot v_2$$

Como cada termo é obtido pela multiplicação do seu antecedente por uma constante, a sequência é uma PG.

b) $q = \frac{v_7}{v_6} = \frac{400}{800} = \frac{1}{2}$

$$v_{10} = v_7 \cdot q^3 = 400 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 50$$

Ou seja, $v_{10} = 50\ \text{mm}^3$.

c) $v_1 = v_6 \cdot q^{-5} = 800 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 800 \cdot 2^5 = 25\,600$

Portanto, o volume inicial dessa substância é $25\,600\ \text{mm}^3$.

d) $v_n = 25\,600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

15. Se a sequência é uma PG, então devemos ter $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$, para $n \geqslant 2$.

a) Considerando $a_1 = 45$, $a_2 = b$ e $a_3 = 20$, temos:

$$b^2 = 45 \cdot 20 \Rightarrow b^2 = 900 \Rightarrow b = \pm 30$$

Portanto, $b = 30$ ou $b = -30$.

MODERNA

b) Considerando $a_1 = b + 3$, $a_2 = b + 17$ e $a_3 = b + 59$, temos:

$$(b + 17)^2 = (b + 3) \cdot (b + 59)$$
$$b^2 + 34b + 289 = b^2 + 62b + 177$$
$$28b = 112$$
$$b = 4$$

Portanto, $b = 4$.

c) Considerando $a_1 = b + 1$, $a_2 = b - 3$ e $a_3 = b - 15$, temos:

$$(b - 3)^2 = (b + 1) \cdot (b - 15)$$
$$b^2 - 6b + 9 = b^2 - 14b - 15$$
$$8b = -24$$
$$b = -3$$

Portanto, $b = -3$.

16. Seja x o número que devemos adicionar aos termos 3, 18 e 48 para que a sequência $(3 + x, 18 + x, 48 + x)$ seja uma PG. Assim, devemos ter:

$$(18 + x)^2 = (3 + x) \cdot (48 + x)$$
$$324 + 36x + x^2 = 144 + 51x + x^2$$
$$15x = 180$$
$$x = 12$$

Portanto, o número que devemos adicionar é 12.

17. Resolução na página CXV.

18. alternativa **b**

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 100 + (n - 1) \cdot 25 = 25(3 + n)$$
$$b_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow b_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

a) incorreto, pois $\underbrace{\frac{\overbrace{150}^{a_3}}{4}}_{b_3} \neq \underbrace{250}_{10a_7}$.

b) correto, pois a_n é uma PA crescente ($r > 0$); b_n é uma PG crescente ($a_1 > 0$ e $q > 1$), com $\overbrace{325}^{a_{10}} < \overbrace{512}^{b_{10}}$. Portanto, como b_n cresce mais rápido do que a_n, temos $a_n < b_n$ para $n \geqslant 10$.

c) incorreto, pois $\overbrace{325}^{a_{10}} < \overbrace{512}^{b_{10}}$.

19. **a)** 2ª aplicação, pois, ao final de cada período de 1 mês, o montante obtido será igual ao montante do mês anterior multiplicado por 1,0083.

b) • 1ª aplicação:

$(10\,260, 10\,520, 10\,780, \ldots)$

A sequência é uma PA de razão $r = 260$. Logo:

$$\overbrace{a_8}^{2 \text{ anos}} = a_1 + 7r = 10\,260 + 7 \cdot 260 = 12\,080$$

Assim, ao final de dois anos, a 1ª aplicação renderá R$ 12 080,00.

• 2ª aplicação:

$\left(10\,000 \cdot (1{,}0083), 10\,000 \cdot (1{,}0083)^2, \ldots\right)$

A sequência é uma PG com razão $q = 1{,}0083$. Logo:

$$a_{24} = a_1 \cdot q^{23} = 10\,083 \cdot (1{,}0083)^{23} = 12\,194{,}23$$

Assim, ao final de dois anos, a 2ª aplicação renderá R$ 12 194,23.

Portanto, a 2ª aplicação é mais rentável ao final de dois anos de investimento.

c) 1ª aplicação: $M_n = 10\,260 + (n - 1) \cdot 260$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, em que M e n indicam, respectivamente, o montante, em reais, e o tempo, em meses.

2ª aplicação: $M_n = 10\,083 \cdot (1{,}0083)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, em que M e n indicam, respectivamente, o montante, em reais, e o tempo, em meses.

20. **a)** A cada geração, a partir da primeira, de ovos colocados pelo mosquito *Aedes aegypti*, a quantidade de fêmeas infectadas é igual a 30. Assim, temos:

- 1ª geração: $a_1 = 1$
- 2ª geração: $a_2 = a_1 \cdot 30 = 1 \cdot 30 = 30$
- 3ª geração: $a_3 = a_2 \cdot 30 = 30 \cdot 30 = 900$
- 4ª geração: $a_4 = a_3 \cdot 30 = 900 \cdot 30 = 27\,000$
- 5ª geração: $a_5 = a_4 \cdot 30 = 27\,000 \cdot 30 = 810\,000$

Portanto, a sequência das quantidades das fêmeas infectadas nas 5 primeiras gerações é $(1, 30, 900, 27\,000, 810\,000)$.

Como $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = 30$, então a sequência é uma PG de razão $q = 30$.

b) A fórmula que expressa a quantidade de fêmeas infectadas em função da geração é $i_n = 30^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

A partir dessa expressão, calculamos:

$$i_8 = 30^{8-1} = 30^7 = 2{,}187 \cdot 10^{10}$$

Portanto, na 8ª geração teremos $2{,}187 \cdot 10^{10}$ fêmeas infectadas.

21. **a)** • A fórmula do termo geral de uma PA é dada por $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. Assim, na PA em que $a_1 = 2$ e $r = 2$, temos:

$$a_2 = 2 + (2 - 1) \cdot 2 = 4$$
$$a_3 = 2 + (3 - 1) \cdot 2 = 6$$
$$a_4 = 2 + (4 - 1) \cdot 2 = 8$$
$$a_5 = 2 + (5 - 1) \cdot 2 = 10$$
$$a_6 = 2 + (6 - 1) \cdot 2 = 12$$
$$a_7 = 2 + (7 - 1) \cdot 2 = 14$$
$$a_8 = 2 + (8 - 1) \cdot 2 = 16$$
$$a_9 = 2 + (9 - 1) \cdot 2 = 18$$
$$a_{10} = 2 + (10 - 1) \cdot 2 = 20$$

Portanto, os 10 primeiros termos dessa PA são $(2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20)$.

• A fórmula do termo geral de uma PG é dada por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Assim, na PG em que $a_1 = 2$ e $q = 2$, temos:

$$a_2 = 2 \cdot 2^{2-1} = 4$$
$$a_3 = 2 \cdot 2^{3-1} = 8$$
$$a_4 = 2 \cdot 2^{4-1} = 16$$
$$a_5 = 2 \cdot 2^{5-1} = 32$$
$$a_6 = 2 \cdot 2^{6-1} = 64$$
$$a_7 = 2 \cdot 2^{7-1} = 128$$
$$a_8 = 2 \cdot 2^{8-1} = 256$$
$$a_9 = 2 \cdot 2^{9-1} = 512$$
$$a_{10} = 2 \cdot 2^{10-1} = 1\,024$$

Portanto, os 10 primeiros termos dessa PG são $(2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1\,024)$.

b) PG

c) Resposta pessoal.

d) O gráfico II.

MODERNA

22. alternativa **c**

Construindo a sequência de imagens, temos:

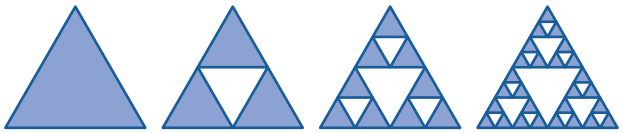


figura 1 figura 2 figura 3 figura 4

SERGIO L. FILHO

23. $a_1 = 3,\ a_6 = 96$

$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 96 = 3 \cdot q^5 \Rightarrow q = 2$

$a_1 = 3$

$a_2 = a_1 \cdot q = 3 \cdot 2 = 6$

$a_3 = a_2 \cdot q = 6 \cdot 2 = 12$

$a_4 = a_3 \cdot q = 12 \cdot 2 = 24$

$a_5 = a_4 \cdot q = 24 \cdot 2 = 48$

$a_6 = a_5 \cdot q = 48 \cdot 2 = 96$

$(3, 6, 12, 24, 48, 96)$

24. $a_1 = 2,\ a_5 = 8$

$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 8 = 2 \cdot q^4 \Rightarrow q = \sqrt{2}$ ou $q = -\sqrt{2}$

Como a PG é crescente, $q = \sqrt{2}$.

25. **a)** • folhas colocadas: PG $(6, 18, 54, \ldots)$.

$$q = \frac{18}{6} = 3$$

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = 6 \cdot 3^9 = 118\,098$$

• folhas retiradas: PA $(5, 10, 15, \ldots)$.

$$r = -10 - (-5) = -5$$

$$b_{10} = b_1 + (10 - 1)r = -5 + (10 - 1) \cdot (-5) = -50$$

Portanto, o total de folhas na 10ª pilha é:

$$a_{10} + b_{10} = 118\,098 + (-50) = 118\,048$$

b) $118\,048 \cdot 0{,}01 = 1\,180{,}48$

Portanto, a 10ª pilha tem 1 180,48 cm de altura.

26. Sejam:

- M_t: montante no tempo t
- C: capital aplicado
- i: taxa de juros

a) A sequência dos montantes em uma aplicação a juro composto é dada por:

- $M_1 = C + i \cdot C = C(1 + i)$
- $M_2 = M_1 + i \cdot M_1 = M_1(1 + i)$
- $M_3 = M_2 + i \cdot M_2 = M_2(1 + i)$
- $M_4 = M_3 + i \cdot M_3 = M_3(1 + i)$
- ⋮

Como cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é obtido pela multiplicação do termo anterior por uma constante, nesse caso $1 + i$, então a sequência dos montantes é uma PG de razão $q = 1 + i$.

b) De acordo com o item anterior, temos:

- $M_1 = C(1 + i)$
- $M_2 = M_1(1 + i) = C(1 + i) \cdot (1 + i) = C(1 + i)^2$
- $M_3 = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^3$
- $M_4 = M_3(1 + i) = C(1 + i)^3 \cdot (1 + i) = C(1 + i)^4$
- ⋮
- $M_t = C(1 + i)^t$

Portanto, o montante M no período t é dado por $M_t = C(1 + i)^t,\ t \in \mathbb{N}$.

27. **a)** $a_7 = 1 \cdot 2^{7-1} = 2^6 = 64$

$a_8 = 1 \cdot 2^{8-1} = 2^7 = 128$

$a_7 \cdot a_8 = 64 \cdot 128 = 8\,192$

b) Sejam a_x e a_y termos equidistantes de uma PG com n termos. Assim, temos $x + y = n + 1$.

A partir da fórmula do termo geral de uma PG, temos as seguintes relações: $a_x = a_1 \cdot q^{x-1}$ e $a_y = a_1 \cdot q^{y-1}$.

Logo:

$$a_x \cdot a_y = \left(a_1 \cdot q^{x-1}\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^{y-1}\right) = a_1 \cdot \left(a_1 \cdot q^{x+y-2}\right) =$$

$$= a_1 \cdot \underbrace{\left(a_1 \cdot q^{n-1}\right)}_{a_n} = a_1 \cdot a_n$$

Portanto, $a_x \cdot a_y = a_1 \cdot a_n$.

28. **a)** $f(-4) = 3 \cdot (-4) + 2 = -10$

$f(-1) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$

$f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$f(5) = 3 \cdot 5 + 2 = 17$

$f(8) = 3 \cdot 8 + 2 = 26$

$(-10, -1, 8, 17, 26)$

A sequência é uma PA e $r = -1 - (-10) = 9$.

b) $g(-4) = 3 \cdot 2^{-4} = \frac{3}{16}$

$g(-1) = 3 \cdot 2^{-1} = \frac{3}{2}$

$g(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

$g(5) = 3 \cdot 2^5 = 96$

$g(8) = 3 \cdot 2^8 = 768$

$\left(\frac{3}{16}, \frac{3}{2}, 12, 96, 768\right)$

A sequência é uma PG e $q = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{16}} = 8$.

29. **a)** $f(1) = 2 \cdot f(0) \Rightarrow x \cdot a^1 = 2 \cdot x \cdot a^0 \Rightarrow a = 2$

b) $f(0) = x \cdot 2^0 = x$

$f(1) = x \cdot 2^1 = 2x$

$f(2) = x \cdot 2^2 = 4x$

$f(3) = x \cdot 2^3 = 8x$

$(x, 2x, 4x, 8x)$

c) $f(9) = x \cdot 2^9 = 512x$

30. $q = a^r = 9^3 = 729$

31. A razão da PG $\left(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)\right)$ é $q = \frac{1}{4}$ e a razão da PA (x_1, x_2, x_3, x_4) é $r = 2$. Logo:

$$q = a^r \Rightarrow \frac{1}{4} = a^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \text{ ou } a = \frac{1}{2}$$

Como f é decrescente, $a = \frac{1}{2}$.

32. Considerando $a_1 = 180\,000$ e $r = 1{,}12$, temos:

$$a_6 = 180\,000 \cdot 1{,}12^5 \Rightarrow a_6 \simeq 317\,221{,}50$$

Portanto, o valor aproximado do terreno de Daniel ao final de 5 anos é R$ 317 221,50.

33. **a)** $q = \frac{12}{3} = 4$

$$S_8 = \frac{3 \cdot \left(1 - 4^8\right)}{1 - 4} = 65\,535$$

MODERNA

b) $q = \frac{8}{-4} = -2$

$$S_8 = \frac{(-4)\cdot\left[1-(-2)^8\right]}{1-(-2)} = 340$$

c) $q = \frac{500}{5\,000} = \frac{1}{10}$

$$S_8 = \frac{5\,000\cdot\left[1-\left(\frac{1}{10}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{10}} = 5\,555{,}5555$$

34. a) $q = \frac{5}{1} = 5$

$a_5 = 1\cdot 5^{5-1} = 5^4 = 625$

Portanto, na 5ª figura da sequência há 625 pontos.

b) $S_5 = \frac{1\cdot\left(1-5^5\right)}{1-5} = 781$

Portanto, ao concluir a 5ª figura da sequência, Débora terá desenhado 781 pontos.

35. $q = \frac{-6}{3} = -2$

$$S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \Rightarrow 129 = \frac{3\cdot\left[1-(-2)^n\right]}{1-(-2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -128 = (-2)^n \Rightarrow (-2)\,7 = (-2)^n \Rightarrow n = 7$$

36. $q = \frac{8x}{2x} = 4$

$a_n = 512x \Rightarrow a_1\cdot q^{n-1} = 512x \Rightarrow 2x\cdot 4^{n-1} = 512x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{2n-1} = 2^9 \Rightarrow 2n-1 = 9 \Rightarrow n = 5$

$$S_5 = -1\,364 \Rightarrow \frac{2x\cdot\left(1-4^5\right)}{1-4} = -1\,364 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x\cdot(-1\,023) = 4\,092 \Rightarrow x = -2$$

37. $S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} \Rightarrow 756 = \frac{a_1\left(1-2^6\right)}{1-2} \Rightarrow a_1 = 12$

38. a) $q = \frac{\frac{3}{4}u^2}{u^2} = \frac{3}{4}$

$$S_5 = \frac{u^2\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right]}{1-\frac{3}{4}} = \frac{781}{256}u^2$$

b) A soma das áreas em azul é dada pela subtração da área de cinco quadrados de lado u pela soma das áreas em amarelo, ou seja:

$$5u^2 - S_5 = 5u^2 - \frac{781}{256}u^2 = \frac{499}{256}u^2$$

39. a) $(\underbrace{7{,}2}_{\text{40\% de 18}};\ \underbrace{2{,}88}_{\text{40\% de 7,2}};\ \underbrace{1{,}152}_{\text{40\% de 2,88}};\ \ldots)$

$q = \frac{2{,}88}{7{,}2} = 0{,}4$

Após o 3º choque:

$$a_3 = a_1\cdot q^2 = 7{,}2\cdot 0{,}4^{3-1} = 1{,}152$$

Após o 3º choque, a altura máxima atingida pela bola é, aproximadamente, 1,152 m.

b) • ao tocar o solo pela 3ª vez:

$$18 + 2a_1 + 2a_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18 + 2\left(7{,}2\cdot 0{,}4^{1-1}\right) + 2\left(7{,}2\cdot 0{,}4^{2-1}\right) = 38{,}16$$

A distância total mínima percorrida pela bola quando ela tiver se chocado com o solo pela 3ª vez será 38,16 m.

• ao tocar o solo pela 4ª vez:

$$18 + 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 \Rightarrow 38{,}16 + 2a_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 38{,}16 + 2\left(7{,}2\cdot 0{,}4^{3-1}\right) = 40{,}464$$

A distância total mínima percorrida pela bola quando ela tiver se chocado com o solo pela 4ª vez será 40,464 m.

40. a) $q = \frac{3}{1} = 3$

$$S_5 = \frac{1\cdot\left(1-3^5\right)}{1-3} \Rightarrow 121$$

Serão mortas, no mínimo, 121 baratas em 5 minutos.

b) $S_6 = \frac{1\cdot\left(1-3^6\right)}{1-3} = 364$

Serão necessários, no máximo, 6 minutos para que morram 300 baratas.

41. a) • $a_1 = 1$

• $q = 2$, pois $\frac{2}{1} = 2$

• $n = 10$

b) $S_{10} = \frac{1\cdot\left(1-2^{10}\right)}{1-2} = \frac{1-2^{10}}{-1} = 2^{10} - 1 =$

$= 2\cdot 2^9 - 1 = 2^9 + 2^9 - 1.$

Portanto, $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$.

42. $(100, 200, 400, \ldots)$

$q = \frac{200}{100} = 2$

a) $S_6 = \frac{100\cdot\left(1-2^6\right)}{1-2} = 6\,300$

O valor de sua premiação será R$ 6 300,00.

b) $51\,200 = 100\cdot 2^{n-1} \Rightarrow 512 = 2^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^9 = 2^{n-1} \Rightarrow 9 = n-1 \Rightarrow n = 10$

Podem ser realizadas, no máximo, 10 perguntas a um mesmo participante.

c) $S_{10} = \frac{100\cdot\left(1-2^{10}\right)}{1-2} = 102\,300$

O valor de sua premiação será R$ 102 300,00.

18 Logaritmo

1. a) $\log_{21} 1 = 0$

b) $\log 10\,000 = \log 10^4 = 4$

c) $8^{\log_8 19} = 19$

d) $\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1$

2. a) $x \simeq 0{,}8$

b) $x \simeq 8$

c) $x \simeq 1{,}1$

d) $x \simeq 21{,}0$

e) $x \simeq 0{,}1$

f) $x = 25\,000$

3. a) $\log_3 \sqrt[4]{9} - 4^{\log_4 5} = \log_3 9^{\frac{1}{4}} - 5 = \log_3 3^{\frac{2}{4}} - 5 =$

$= \frac{2}{4} - 5 = -\frac{9}{2}$

b) $2\log_9 1 + \left[\log_{0{,}5}\left(\frac{1}{8}\right)\right]^2 = 2\cdot 0 + \left[\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = 3^2 = 9$

c) $6^{2+\log_6 7} - \log(\log 10) = 6^2\cdot 6^{\log_6 7} - \log 1 =$

$= 36\cdot 7 - 0 = 252$

d) $4\log_8 2\sqrt{2} + \log_{\frac{1}{5}} 0{,}04 = 4\log_8 \sqrt{2^2\cdot 2} + \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{4}{100}\right) =$

$= 4\log_8 8^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{25}\right) = 4\cdot\frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^2 = 2 + 2 = 4$

MODERNA

4. Temos:

- $\log_y x = 4 \Rightarrow y^4 = x$ (I)
- $\log_{3y} x = 2 \Rightarrow (3y)^2 = x$ (II)

Igualando I e II:

$$y^4 = (3y)^2 \Rightarrow y^4 = 9y^2 \Rightarrow y^4 - 9y^2 = 0$$

Substituindo $z = y^2$:

$$z^2 - 9z = 0 \begin{cases} z_1 = 9 \\ z_2 = 0 \text{ (impossível)} \end{cases}$$

Logo:

$$y = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} 3^4 = x \Rightarrow x = 81 \\ (-3)^4 = x \Rightarrow x = 81 \end{cases}$$

Portanto, o número é 81.

5.

Tempo (em horas)	População de bactérias
0	$P = P(1,2)^0$
1	$P(1,2)^1$
2	$P(1,2)^2$
3	$P(1,2)^3$
⋮	⋮
n	$P(1,2)^n$

Para que a população dobre, devemos ter:

$$P(1,2)^n = 2P \Rightarrow (1,2)^n = 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_{1,2} 2 = n \Rightarrow n = 3{,}81$$

Portanto, serão necessárias 3 h 49 min.

6. a) $x - 9 > 0 \Rightarrow x > 9$

b) • $2x + 8 > 0 \Rightarrow 2x > -8 \Rightarrow x > -4$

• $2x + 8 \neq 1 \Rightarrow 2x \neq -7 \Rightarrow x \neq -\frac{7}{2}$

Portanto, $x > -4$ e $x \neq -\frac{7}{2}$.

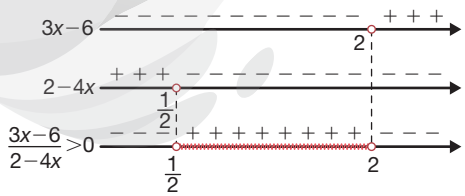
c) • $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

• $x + 0{,}3 > 0 \Rightarrow x > -0{,}3$

• $x + 0{,}3 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0{,}7$

Portanto, $-0{,}3 < x < 1$ e $x \neq 0{,}7$.

d) $\frac{3x-6}{2-4x} > 0$



RONALDO INÁCIO

Portanto, $\frac{1}{2} < x < 2$.

e) • $x - 10 > 0 \Rightarrow x > 10$

• $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

• $x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$

Portanto, $x > 10$.

7. $\log_b \left(8 - \frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow 8 - \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 14$

Segue que:

$$\log_{(2a-10)} 2 = \log_{(4+a)} \left(\frac{b}{3} - 1\right) \Rightarrow \log_{18} 2 = \log_{18} \left(\frac{b}{3} - 1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 = \frac{b}{3} - 1 \Rightarrow b = 9$$

Portanto:

$$y = 8^{\log_5 17 \cdot \log_8 (a-b)} = 8^{\log_5 17 \cdot \log_8 (14-9)} = 8^{\log_5 17 \cdot \log_8 5} =$$
$$= 8^{\log_8 5 \cdot \log_5 17} = 5^{\log_5 17} = 17$$

8. Espera-se que os alunos respondam que o número 10, que é a base do logaritmo, elevado ao número real que obtemos é igual ao número inserido inicialmente.

9. $\sqrt{\log(\log n)} = 0 \Rightarrow \log(\log n) = 0 \Rightarrow \log n = 1 \Rightarrow n = 10$

10. a) $\log\left(b\sqrt{c}\right) = \log b + \log c^{\frac{1}{2}} = \log b + \frac{1}{2}\log c$

b) $\log\left(\frac{a^2 b}{c}\right) = \log a^2 + \log b - \log c = 2\log a + \log b - \log c$

c) $\log_2 \left(\frac{\sqrt[5]{a}}{b \cdot c^2}\right) = \log_2 a^{\frac{1}{5}} - \left(\log_2 b + \log_2 c^2\right) =$

$$= \frac{1}{5}\log_2 a - \log_2 b - 2\log_2 c$$

11. a) $\log_4 5 + \log_4 9 = \log_4 (5 \cdot 9) = \log_4 45$

b) $8\log 1 + \log 0{,}77 - \log 0{,}11 = 8 \cdot 0 + \log\left(\frac{0{,}77}{0{,}11}\right) = \log 7$

12. $x + y - z = \log(0{,}001)^6 + \log_3 243 - \log_3 \sqrt{27} =$

$$= \log\left(10^{-3}\right)^6 + \log_3 \left(\frac{243}{\sqrt{27}}\right) = \log 10^{-18} + \log_3 \left(\frac{3^5}{3^{\frac{3}{2}}}\right) =$$
$$= \log 10^{-18} + \log_3 3^{5-\frac{3}{2}} = -18 + \frac{7}{2} = -\frac{29}{2}$$

13. a) $3^{x+4} = 15 \Rightarrow 3^{x+4} = 3 \cdot 5 \Rightarrow \log_3 (3 \cdot 5) = x + 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_3 3 + \log_3 5 = x + 4 \Rightarrow 1 + 1{,}465 = x + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -1{,}535$$
$$S = \{-1{,}535\}$$

b) $27^x = 125 \Rightarrow 3^{3x} = 5^3 \Rightarrow \log_3 5^3 = 3x \Rightarrow 3\log_3 5 = 3x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3 \cdot 1{,}465 = 3x \Rightarrow x = 1{,}465$$
$$S = \{1{,}465\}$$

c) $225 = 9^{\frac{x}{4}-1} \Rightarrow 3^2 \cdot 5^2 = 3^{\frac{x}{2}-2} \Rightarrow \log_3 \left(3^2 \cdot 5^2\right) = \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\log_3 3 + 2\log_3 5 = \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow 2 + 2 \cdot 1{,}465 = \frac{x}{2} - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 13{,}86$$
$$S = \{13{,}86\}$$

14. $\log_c xb^3 = \frac{1}{2}\log_c a + 4\log_c b \Rightarrow \log_c xb^3 = \log_c a^{\frac{1}{2}} + \log_c b^4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_c xb^3 = \log_c \left(\sqrt{a} \cdot b^4\right) \Rightarrow xb^3 = \sqrt{a} \cdot b^4 \Rightarrow x = b\sqrt{a}$$

15. a) $\frac{n\left(\frac{9}{10}\right)^0 - n\left(\frac{9}{10}\right)^1}{n\left(\frac{9}{10}\right)^0} = \frac{n - \frac{9n}{10}}{n} = \frac{\frac{n}{10}}{n} = \frac{1}{10} = 0{,}1$

Portanto, a taxa de desvalorização desse automóvel a cada dois anos é 10%.

MODERNA

b) $n\left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{n}{2} \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \log_{0,9}0,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \log_{0,9}\left(\frac{0,45}{0,9}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \log_{0,9}0,45 - \log_{0,9}0,9 \Rightarrow t = 7,6 - 1 \Rightarrow t = 6,6$

Como t corresponde a um período de 2 anos, após 13 anos o valor do automóvel será reduzido à metade.

16. Substituindo $M = 550$, $C = 500$ e $i = 0,01$ na fórmula $M = C(1 + i)^n$:

$$550 = 500(1 + 0,01)^n \Rightarrow \frac{11}{10} = (1,01)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{1,01}\left(\frac{11}{10}\right) = n \Rightarrow$$

$\Rightarrow \log_{1,01}11 - \log_{1,01}10 = n \Rightarrow 240,9 - 231,4 = n \Rightarrow n = 9,5$

Portanto, após 10 meses.

17. a) $\log_{12}2 + \log_{12}4 = \log_{12}(2 \cdot 4) = \frac{\log 8}{\log 12}$

b) $\log_2 3 + \log_2 1 - \log_2 7 = \log_2 3 + 0 - \log_2 7 = \log_2 \frac{3}{7} =$

$= \frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 2}$

c) $\log_{17}18 - \log_{17}12 + \log_{17}\left(\frac{4}{3}\right) = \log_{17}\left(\frac{18 \cdot \frac{4}{3}}{12}\right) =$

$= \log_{17}2 = \frac{\log 2}{\log 17}$

18. a) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

b) $\log_{\sqrt{b}}a^3 = \frac{\log a^3}{\log b^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\log a}{\frac{1}{2}\log b} = \frac{3x}{\frac{1}{2}y} = \frac{6x}{y}$, com $y \neq 0$.

19. • $z = \log_6 27 \cdot \log_3 36 = \log_6 3^3 \cdot \log_3 6^2 =$

$= \frac{\log 3^3}{\log 6} \cdot \frac{\log 6^2}{\log 3} = \frac{3\cancel{\log 3}}{\cancel{\log 6}} \cdot \frac{2\cancel{\log 6}}{\cancel{\log 3}} = 6$

• $w = \log_4 10 \cdot \log \sqrt[3]{16} = \frac{\log 10}{\log 4} \cdot \log\left(4^2\right)^{\frac{1}{3}} =$

$= \frac{\log 10}{\cancel{\log 4}} \cdot \frac{2}{3}\cancel{\log 4} = \frac{2}{3}$

Portanto, $z \cdot w = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

20.

Potência	Número de algarismos
$10^1 = 10$	2
$10^2 = 100$	3
$10^3 = 1\,000$	4
⋮	⋮
10^n	$n + 1$

Assim:

$$10^n = 50^{14} \Rightarrow \log 50^{14} = n \Rightarrow 14\log\left(\frac{100}{2}\right) = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\left(\log 10^2 - \log 2\right) = n \Rightarrow n = 14(2 - 0,301) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = 23,786$$

Logo, podemos escrever:

$$\underbrace{10^{23}}_{\text{24 algarismos}} < 10^{23,786} < \underbrace{10^{24}}_{\text{25 algarismos}}$$

Portanto, como 50^{14} é inteiro, ele possui 24 algarismos.

21. alternativa b

$$\log_8\left[\frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}{(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}\right] = \log_8\left[\frac{a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b}{\sqrt{ab}}\right] =$$

$$= \log_8\left[\frac{a + b + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\right] = \log_8\left[\frac{30\sqrt{ab} + 2\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}\right] =$$

$$= \log_8(30 + 2) = \log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3} = 1,\overline{6}$$

22.

Ciclo	População
0	$100 = P_0$
1	$2 \cdot 100 = 2 \cdot P_0$
2	$2 \cdot 2 \cdot 100 = 2^2 \cdot P_0$
3	$2 \cdot 2^2 \cdot 100 = 2^3 \cdot P_0$
⋮	⋮
n	$2^n \cdot 100 = 2^n \cdot P_0$

Assim:

$$5\,000 = 100 \cdot 2^n \Rightarrow 50 = 2^n \Rightarrow n = \log_2 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 50}{\log 2} \Rightarrow n = \frac{\log 5 + 1}{\log 2} \Rightarrow n = \frac{0,7 + 1}{0,3} \simeq 5,7$$

ou seja, aproximadamente 5,7 ciclos. Como são ciclos de 20 min, temos:

$$5,7 \cdot 20 = 114$$

$$114 \text{ min} = 1 \text{ h } 54 \text{ min}$$

Portanto, é 1 h 54 min o tempo necessário para que se tenha uma população de 5 000 microrganismos.

23. • Para $m = \frac{\sqrt{2}}{50}$, temos:

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{2}}{50} \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{50}\right) = n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log 2^{\frac{1}{2}} - \log 5 - \log 10}{\log 2^{\frac{1}{2}} - \log 2} = n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,3 - 0,7 - 1}{\frac{1}{2} \cdot 0,3 - 0,3} = n - 1 \Rightarrow \frac{31}{3} = n - 1 \Rightarrow n = 11,\overline{3}$$

• Para $m = \frac{2}{25}$, temos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{25} \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{2}{25}\right) = n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log 2 - \log 5^2}{\log 2^{\frac{1}{2}} - \log 2} = n - 1 \Rightarrow \frac{0,3 - 2 \cdot 0,7}{\frac{1}{2} \cdot 0,3 - 0,3} = n - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{22}{3} = n - 1 \Rightarrow n = 8,\overline{3}$$

Portanto, como n é inteiro, o 9º, o 10º e o 11º quadrados dessa sequência têm lado medindo entre $\frac{\sqrt{2}}{50}$ e $\frac{2}{25}$ unidades.

24. a) $\log_7 5^5 + \log \sqrt[3]{4^2} - \log_{0,1}1 \simeq 4,537$

b) $\log\left(\log_6 3^{\frac{1}{8}}\right)^2 \simeq -2,231$

c) $\frac{\log_{\sqrt{10}}15 + \log\sqrt{14}}{\log_5 8} \simeq 2,264$

MODERNA

19 Função inversa e logarítmica

1. a) $f(16) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

b) $g(1) = \log_3\left(\frac{1}{1}\right) = \log_3 1 = 0$

c) $g\left(9^{-2}\right) = \log_3\left(\frac{1}{9^{-2}}\right) = \log_3\left(3^2\right)^2 = 2 \cdot 2 = 4$

d) $\log_2 x = 5 \Rightarrow 2^5 = x \Rightarrow x = 32$

2. a) $f(x) = \log(x + 3)$

$x + 3 > 0 \Rightarrow x > -3$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$

A função é bijetiva. Logo:

$f^{-1}(x) = 10^x - 3$

$Im(f) = D\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \log_8(6 - x)$

$6 - x > 0 \Rightarrow x < 6$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$

A função é bijetiva. Logo:

$f^{-1}(x) = -8^x + 6$

$Im(f) = D\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 5 + \log_4(2x)$

$2x > 0 \Rightarrow x > 0$

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$

A função é bijetiva. Logo:

$f^{-1}(x) = \frac{4^{x-5}}{2}$

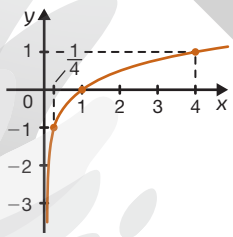
$Im(f) = D\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R}$

3. Conforme os dados do problema, temos:

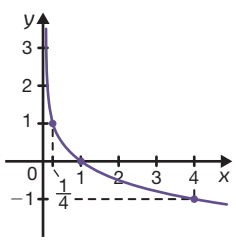
$$N\left(10^{-11}\right) = 10 \cdot \log\left(\frac{10^{-11}}{10^{-12}}\right) = 10 \cdot \log(10) = 10$$

Portanto, o nível sonoro da respiração normal dessa pessoa é 10 dB.

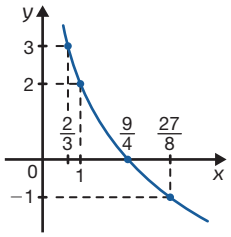
4. a)



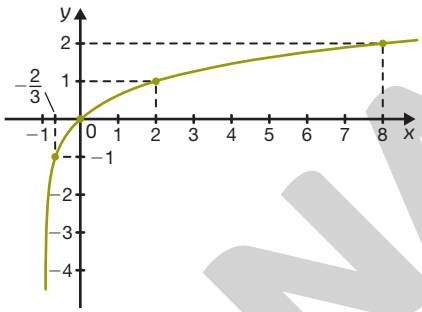
b)



c)



d)



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

5. a) $a = 5$, $a > 1$; crescente

b) $a = 10$, $a > 1$; crescente

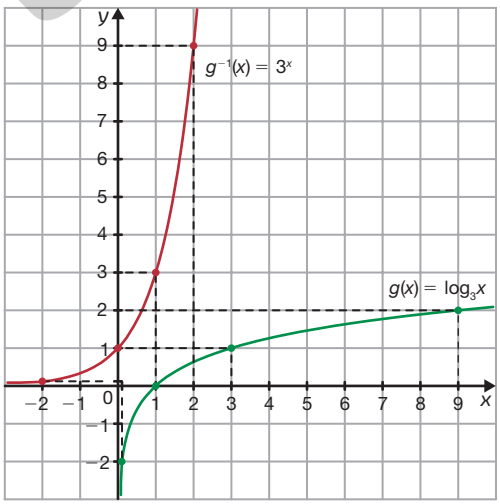
c) $a = \frac{1}{6}$, $0 < a < 1$; decrescente

d) $a = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $0 < a < 1$; decrescente

e) $a = \frac{5}{2}$, $a > 1$; crescente

f) $a = \frac{8}{9}$, $0 < a < 1$; decrescente

6.



SERGIO L. FILHO

7. a) Determinando os valores de a, b, c e d, temos:

$0{,}25 = a^{-2} \Rightarrow \frac{1}{4} = a^{-2} \Rightarrow a = 2$

$0 = \log_2 b \Rightarrow b = 1$

$-3 = \log_2 c \Rightarrow c = 2^{-3} \Rightarrow c = \frac{1}{8}$

$3 = \log_2 d \Rightarrow d = 2^3 \Rightarrow d = 8$

Portanto, a é 2, b é 1, c é $\frac{1}{8}$ e d é 8.

MODERNA

b) Para $f(x)$ temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, para $g(x)$ temos $D(g) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(g) = \mathbb{R}$.

c) Crescentes, pois $a > 1$.

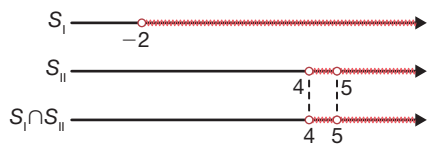
8. a) Espera-se que os alunos respondam $(1, 0)$, $(2, -1)$ e $(8, -3)$.

b) Para $f(x)$ temos $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, para $g(x)$ temos $D(g) = \mathbb{R}_+^*$ e $Im(g) = \mathbb{R}$.

c) Decrescentes.

9. a) $g(x) = \log_{(x-4)}(x + 2)$

- $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$ (I)
- $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$ e $x - 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq 5$ (II)



$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ e } x \neq 5\}$

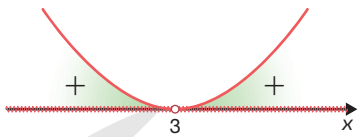
b) $g(x) = \log_{(-x)}(1 + x)$

- $1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$ (I)
- $-x > 0 \Rightarrow x < 0$ e $-x \neq 1 \Rightarrow x \neq -1$ (II)

$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

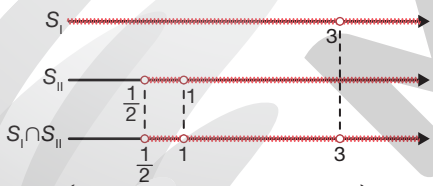
c) $g(x) = \log_{(2x-1)}(x^2 - 6x + 9)$

- $x^2 - 6x + 9 > 0$



$x \neq 3$ (I)

- $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ e $2x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1$ (II)



$D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\right\}$

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

10. a) Condição de existência: $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

Segue que:

$$\log_4(x + 5) = 2 \Rightarrow 4^2 = x + 5 \Rightarrow x = 11$$

Como $x = 11$ satisfaz a condição de existência, então $S = \{11\}$.

b) Condição de existência:

$$\frac{2 + x}{3} > 0 \Rightarrow x > -2$$

Segue que:

$$\log_6 \sqrt{\frac{2 + x}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{6} = \sqrt{\frac{2 + x}{3}} \Rightarrow \frac{2 + x}{3} = 6 \Rightarrow x = 16$$

Como $x = 16$ satisfaz a condição de existência, então $S = \{16\}$.

11. a) $3^{x-1} = 5 \Rightarrow \log_3 5 = x - 1 \Rightarrow \frac{\log 5}{\log 3} = x - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{0{,}699}{0{,}477} = x - 1 \Rightarrow x \simeq 2{,}465$$

b) $20^x = 3^{x-2} \Rightarrow \log 20^x = \log 3^{x-2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(\log 2 + \log 10) = (x - 2)\log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot 1{,}301 = x \cdot 0{,}477 - 0{,}954 \Rightarrow x \simeq -1{,}158$$

c) $6^{x+1} = 9^{\frac{x}{2}} \Rightarrow \log 6^{x+1} = \log 9^{\frac{x}{2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x + 1)(\log 2 + \log 3) = x \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot 0{,}778 + 0{,}778 = x \cdot 0{,}477 \Rightarrow x \simeq -2{,}585$$

12. Conforme os dados do problema, temos:

$$f(x) + g(x) = k \Rightarrow \log_9 2x + \log_9(x + 2) = \log_9 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_9(2x^2 + 4x) = \log_9 30 \Rightarrow 2x^2 + 4x = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 30 = 0 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -5 \text{ (impossível)} \end{cases}$$

Portanto, para $x = 3$ temos $f(x) + g(x) = k$.

13. a) Condição de existência:

- $x > 0$
- $\log^2 10 + \log x > 0$

Segue que:

$$\log_8(\log^2 10 + \log x) = 0 \Rightarrow \log^2 10 + \log x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x = 1 - 1 \Rightarrow x = 1$$

Como $x = 1$ satisfaz a condição de existência, então $S = \{1\}$.

b) Condição de existência: $3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$

Segue que:

$$\log^2(3 - x) = \log(3 - x) \Rightarrow \log^2(3 - x) - \log(3 - x) = 0$$

Substituindo $y = \log(3 - x)$:

$$y^2 - y = 0 \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

Logo:

- $1 = \log(3 - x_1) \Rightarrow 3 - x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = -7$
- $0 = \log(3 - x_2) \Rightarrow 3 - x_2 = 1 \Rightarrow x_2 = 2$

Como $x_1 = -7$ e $x_2 = 2$ satisfazem a condição de existência, então $S = \{-7, 2\}$.

c) Condição de existência:

- $x^2 - 11 > 0 \Rightarrow x < -\sqrt{11}$ ou $x > \sqrt{11}$
- $2 + \log_5(x^2 - 11) > 0$

Segue que:

$$\log_{27}[2 + \log_5(x^2 - 11)] = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 27^{\frac{1}{3}} = 2 + \log_5(x^2 - 11) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 = 2 + \log_5(x^2 - 11) \Rightarrow \log_5(x^2 - 11) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 11 = 5 \Rightarrow x^2 - 16 = 0 \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Como $x_1 = 4$ e $x_2 = -4$ satisfazem as condições de existência, então $S = \{-4, 4\}$.

MODERNA

14. $f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \frac{1}{3}\log_9(19 - 2x) \leqslant \log_{27}(x - 8) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{\log_3(19 - 2x)}{\log_3 9} \leqslant \frac{\log_3(x - 8)}{\log_3 27} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{\log_3(19 - 2x)}{2} \leqslant \frac{\log_3(x - 8)}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3(19 - 2x) \leqslant 2\log_3(x - 8) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3(19 - 2x) \leqslant \log_3(x - 8)^2$

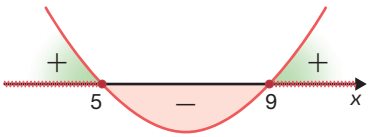
Condição de existência:

- $19 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{19}{2}$ (I)
- $x - 8 > 0 \Rightarrow x > 8$ (II)

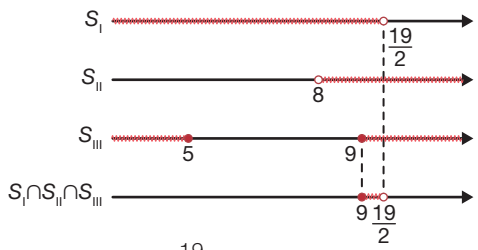
Como $a = 3 > 1$, a desigualdade se mantém.

$19 - 2x \leqslant (x - 8)^2 \Rightarrow 19 - 2x \leqslant x^2 - 16x + 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 14x + 45 \geqslant 0$



$x \leqslant 5$ ou $x \geqslant 9$ (III)



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Portanto, $9 \leqslant x < \frac{19}{2}$.

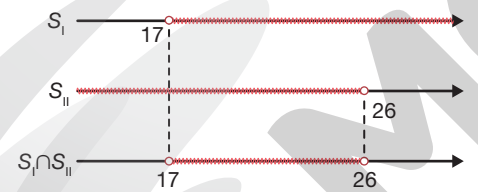
15. **a)** Condição de existência:

$x - 17 > 0 \Rightarrow x > 17$ (I)

Como $a = 3 > 1$, a desigualdade se mantém.

$\log_3(x - 17) < 2 \Rightarrow \log_3(x - 17) < \log_3 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 17 < 9 \Rightarrow x < 26$ (II)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 17 < x < 26\}$

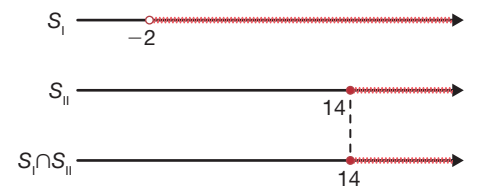
b) Condição de existência:

$\frac{x}{2} + 1 > 0 \Rightarrow x > -2$ (I)

Como $a = 8 > 1$, a desigualdade se mantém.

$1 \leqslant \log_8\left(\frac{x}{2} + 1\right) \Rightarrow \log_8 8 \leqslant \log_8\left(\frac{x}{2} + 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 8 \leqslant \frac{x}{2} + 1 \Rightarrow x \geqslant 14$ (II)



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 14\}$

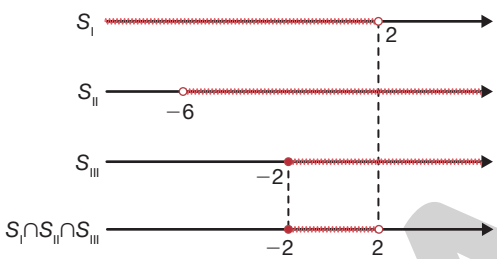
c) Condição de existência:

- $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$ (I)
- $x + 6 > 0 \Rightarrow x > -6$ (II)

Como $a = 0{,}5$ e $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

$\log_{0,5}(2 - x) \geqslant \log_{0,5}(x + 6) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - x \leqslant x + 6 \Rightarrow x \geqslant -2$ (III)



ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 2\}$

16. **a)** A lei de formação para a área invadida por vegetação, em relação ao tempo, indicado por t, é:

$f(t) = 50 \cdot (1{,}35)^t$

b) Determinando o tempo para a vegetação tomar completamente a represa:

$f(t) = 2\,500 \Rightarrow 50(1{,}35)^t = 2\,500 \Rightarrow$

$\Rightarrow (1{,}35)^t = 50 \Rightarrow$

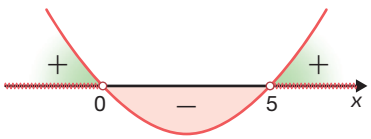
$\Rightarrow \log_{1,35} 50 = t \Rightarrow \frac{\log 5 + \log 10}{\log 1{,}35} = t \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{0{,}699 + 1}{0{,}130} = t \Rightarrow t \simeq 13$

Portanto, a vegetação tomará completamente a represa em, aproximadamente, 13 anos.

17. Condição de existência:

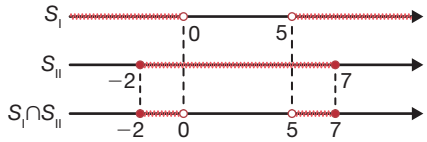
$x^2 - 5x > 0$



$x < 0$ ou $x > 5$ (I)

Segue que:

$9^{\log_9(x^2 - 5x)} \leqslant 14 \Rightarrow x^2 - 5x \leqslant 14 \Rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 7$ (II)



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } 5 < x \leqslant 7\}$

Portanto, a soma dos números inteiros que pertencem a S é:

$(-2) + (-1) + 6 + 7 = 10$

18. • $\log_{\frac{7}{2}}(x + 6) \geqslant 0$

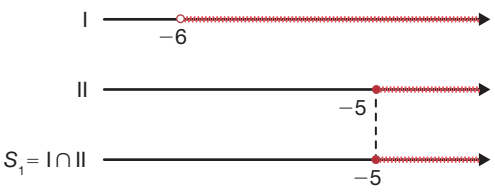
Condição de existência:

$x + 6 > 0 \Rightarrow x > -6$ (I)

MODERNA

Como $a = \frac{7}{2} > 1$, a desigualdade se mantém.

$$\log_{\frac{7}{2}}(x+6) \geqslant 0 \Rightarrow \log_{\frac{7}{2}}(x+6) \geqslant \log_{\frac{7}{2}}1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + 6 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant -5 \qquad \text{(II)}$$

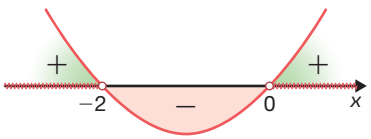


$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -5\}$$

- $\log_3(2x + x^2) \geqslant 1$

Condição de existência:

$$2x + x^2 > 0$$

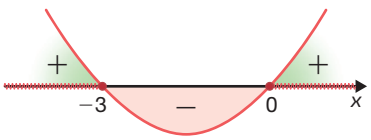


ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI

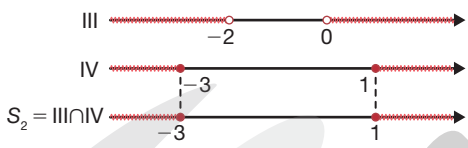
$$x < -2 \text{ ou } x > 0 \qquad \text{(III)}$$

Como $a = 3 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$\log_3(2x + x^2) \geqslant 1 \Rightarrow \log_3(2x + x^2) \geqslant \log_3 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + x^2 \geqslant 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$$

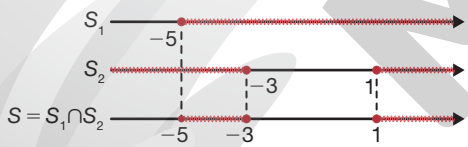


$$x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 1 \qquad \text{(IV)}$$



$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 1\}$$

Segue que:



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant x \leqslant -3 \text{ ou } x \geqslant 1\}$$

Portanto, há três números inteiros negativos que satisfazem as inequações simultaneamente (– 5, – 4 e – 3).

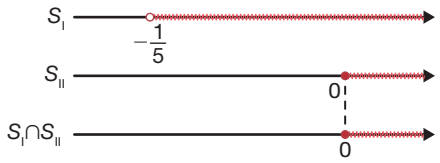
19. a) • $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \qquad$ (I)

- $\log_{0,6}(x-3) > 0 \Rightarrow \log_{0,6}(x-3) > \log_{0,6}1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 3 < 1 \Rightarrow x < 4 \qquad$ (II)

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$$

b) • $5x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{5} \qquad$ (I)

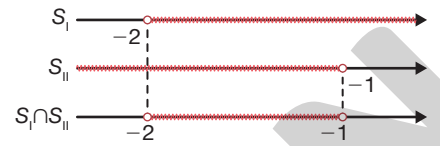
- $\log_9(5x+1) \geqslant 0 \Rightarrow \log_9(5x+1) \geqslant \log_9 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x + 1 \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant 0 \qquad$ (II)



$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$$

c) • $x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \qquad$ (I)

- $\log_{0,7}(x+2) > 0 \Rightarrow \log_{0,7}(x+2) > \log_{0,7}1 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 2 < 1 \Rightarrow x < -1 \qquad$ (II)



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1\}$$

20. A função que determina o valor do imóvel em função do tempo, em anos, é dada por $f(t) = V \cdot (1{,}04)^t$, em que V é o valor inicial. Segue que:

$$f(t) \geqslant 1{,}3 \cdot V \Rightarrow V \cdot (1{,}04)^t \geqslant 1{,}3 \cdot V \Rightarrow (1{,}04)^t \geqslant 1{,}3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t \cdot \log\frac{104}{100} \geqslant \log\frac{13}{10} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t \cdot \left[\log\left(2^3 \cdot 13\right) - \log 10^2\right] \geqslant \log 13 - \log 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t \cdot (3 \cdot 0{,}301 + 1{,}114 - 2) \geqslant 1{,}114 - 1 \Rightarrow t \geqslant 6{,}7$$

Como t é inteiro, então após 7 anos o imóvel terá valorizado mais do que 30%.

21. A função que determina o valor da dívida em função do tempo, em meses, é dada por $M(t) = 708 \cdot (1{,}08)^t$. Logo:

$$M(t) = 1\,200 \Rightarrow 700 \cdot (1{,}08)^t = 1\,200 \Rightarrow (1{,}08)^t = \frac{12}{7} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log_{1,08}\left(\frac{12}{7}\right) = t \Rightarrow \frac{\log\left(\frac{12}{7}\right)}{\log 1{,}08} = t \Rightarrow \frac{0{,}234}{0{,}033} = t \Rightarrow t \simeq 7{,}09$$

Portanto, em aproximadamente 8 meses a dívida será de R$ 1 200,00.

22. a) Como 140 anos correspondem a 5 períodos de meia-vida do estrôncio-90, temos:

$$\frac{n_0 \cdot 2^{-5}}{n_0 \cdot 2^0} = 2^{-5} = 0{,}03125$$

Portanto, a porcentagem na atmosfera será de 3,125%.

b) Temos:

$$700 \cdot 2^{-t} = 50 \Rightarrow 2^{-t} = \frac{5}{70} \Rightarrow \log_2\left(\frac{5}{70}\right) = -7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\log\left(\frac{10}{2}\right) - \log 7 - \log 10}{\log 2} = -t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1 - 0{,}301 - 0{,}845 - 1}{0{,}301} = -t \Rightarrow t \simeq 3{,}81$$

MODERNA

Como t corresponde a um período de 28 anos, temos:

$$28 \cdot 3{,}81 \simeq 107$$

Portanto, após um período aproximado de 107 anos, a massa de estrôncio-90 terá se reduzido a 50 g.

23. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

24. **a)** Calculando a unidade Haugh de um ovo de 56 g:

$$UR = 100 \log\left(6 - 1{,}7 \cdot 56^{0{,}37} + 7{,}6\right) \simeq 78$$

Portanto, a unidade Haugh do ovo é, aproximadamente, 78 g, logo é de excelente qualidade, pois a unidade Haugh é superior a 72.

b) Determinando a altura máxima, temos:

$$UR > 72 \Rightarrow 100 \log\left(A - 1{,}7 \cdot 62^{0{,}37} + 7{,}6\right) > 72 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(A - 0{,}228\right) > \log 10^{\frac{72}{100}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A - 0{,}228 > 10^{\frac{72}{100}} \Rightarrow A > 5{,}48$$

Portanto, a altura mínima deve ser 5,48 mm.

25. **a)** Determinando a quantidade de iodo-131, após 6 períodos de meia-vida:

$$n = 4 \cdot 2^{-6} \Rightarrow n = \frac{4}{2^6} \Rightarrow n = 0{,}0625$$

Portanto, sobrou 0,0625 g de iodo-131.

b) Temos:

$$10 \cdot 2^{-t} < 10^{-2} \Rightarrow 2^{-t} < 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 10^{-3} < -t \Rightarrow -3 \cdot 3{,}3 > -t \Rightarrow t > 9{,}9$$

Como t corresponde a 8 dias, então:

$$9{,}9 \cdot 8 = 79{,}2$$

Portanto, serão necessários, no mínimo, 80 dias.

26. Resposta pessoal.

Resolução do tema 17

17. **a)** • verde:

A cada etapa a área em verde diminui $\frac{1}{4}$ em relação à área da figura anterior. Logo:

$$\left(x^2, \left(\frac{3}{4}\right)x^2, \left(\frac{3}{4}\right)^2 x^2, \left(\frac{3}{4}\right)^3 x^2, \left(\frac{3}{4}\right)^4 x^2\right) = \left(x^2, \frac{3x^2}{4}, \frac{9x^2}{16}, \frac{27x^2}{64}, \frac{81x^2}{256}\right)$$

• amarelo:

A área em amarelo é igual à área total do quadrado menos a área em verde. Logo:

$$\left(0, \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)\right]x^2, \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]x^2, \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right]x^2, \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^4\right]x^2\right) = \left(0, \frac{x^2}{4}, \frac{7x^2}{16}, \frac{37x^2}{64}, \frac{175x^2}{256}\right)$$

b) Uma possível resposta: aquela que representa os valores das áreas em verde, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é uma constante. No caso da outra sequência, esse quociente não é constante.

c) • verde:

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \cdot x^2 \Rightarrow a_{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot x^2$$

• amarelo:

$$a_n = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right] \cdot x^2 \Rightarrow a_{10} = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \cdot x^2$$

MODERNA

Sugestões ao professor

- Nesta seção, apresentamos sugestões de livros e *sites* que podem ser consultados com o objetivo de complementar os conteúdos tratados neste volume, bem como obter subsídios teórico-metodológicos para o trabalho em sala de aula. É importante, também, que seja consultada a seção **Ampliando seus conhecimentos**, onde há sugestões de livros e *sites* para os alunos.

Leituras sobre o ensino de Matemática

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle; SILVA, Karina Pessoa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo. *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto, 2012.

  Este artigo apresenta algumas considerações a respeito da aplicação de uma tarefa sob a ótica da Modelagem matemática para uma turma de 1º ano do Ensino Médio, abordando conceitos de Geometria plana.

- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de et al. *Práticas de modelagem matemática*: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2015.

  Este livro aborda aspectos da Modelagem matemática, apresentando resultados de pesquisas e experiências em sala de aula e destacando a possibilidade de trabalhar com essa metodologia na perspectiva da Educação Matemática.

- ARAÚJO, Jussara de Loiola. *Educação matemática crítica*: reflexões e diálogos. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2007.

  Este livro traz reflexões e diálogos sobre a Educação Matemática crítica, como uma preocupação educacional, incluindo sugestões sobre o que isso pode significar visando à justiça social.

- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho (Org.) *Educação matemática*: pesquisa em movimento. 4. ed. São Paulo: Cortez, 2012.

  Nesta obra os autores tratam a respeito da ambiguidade gerada no processo de pesquisa. Embora os textos de vários autores expressem diferentes perspectivas, no geral convergem para o mesmo significado.

- BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2018.

  O livro apresenta explicações sobre modelo matemático e Modelagem matemática. Também traz algumas orientações sobre como o professor pode proceder para utilizar a Modelagem no ensino de Matemática.

- BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro: Unesp.

  O objetivo do BOLEMA é disseminar a produção de conteúdos relacionados à área da Educação Matemática, cujos trabalhos podem variar desde pesquisas empíricas até ensaios ou outros formatos nesse mesmo domínio do conhecimento.

- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. *Informática e Educação matemática*. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Este livro trata da informática educativa, abordando aspectos que vão desde as políticas governamentais até as questões epistemológicas e pedagógicas. São apresentados exemplos de como usar informática com alunos e professores, bem como questões referentes ao uso de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- BUCK INSTITUTE FOR EDUCATION. *Aprendizagem baseada em projetos*: guia para professores de Ensino Fundamental e Médio. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

  O livro descreve um conjunto de princípios que buscam ajudar os professores a planejar e implementar trabalhos com projetos. Contém, ainda, exemplos de projetos e mostra como desenvolvê-los em sala de aula.

- CAINELLI, Marlene Rosa; TOMAZINI, Elizabete Cristina de Souza. A aula-oficina como campo metodológico para a formação de professores em História: um estudo sobre o Pibid/História/UEL. *História & Ensino*, Londrina, v. 23, n. 2, p. 11-33, 2017.

  Este estudo apresenta a aula-oficina como possibilidade de exercício da docência com base em relatórios e entrevistas concedidas por alunos de iniciação científica do curso de História da Universidade Estadual de Londrina (UEL).

- CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David William; SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Na vida dez, na escola zero*. 16. ed. São Paulo: Cortez, 2015.

  O livro traz considerações sobre o motivo pelo qual muitas pessoas são capazes de utilizar a Matemática para resolver problemas em situações de seu cotidiano, mas, quando se trata da Matemática escolar, elas apresentam dificuldades.

- CURY, Helena Noronha. *Análise de erros*: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro é apresentada uma visão geral sobre a análise de erros, que, segundo a autora, pode ser encarada como uma abordagem de pesquisa e como uma

MODERNA

metodologia de ensino, em ambos os casos, utilizada com o intuito de auxiliar na prática em sala de aula. Também são indicadas pesquisas e sugestões sobre como os erros dos alunos podem ser utilizados nas aulas de Matemática.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2019.

  Nesta obra, o autor propõe a adoção de uma nova abordagem do sistema de ensino e aprendizagem, tecendo considerações sobre aspectos da cognição, da natureza da Matemática e das questões teóricas da educação, além de discutir temas ligados à sala de aula e às inovações na prática docente.

- _____. Etnomatemática, justiça social e sustentabilidade. *Estudos Avançados*, São Paulo, v. 32, n. 94, p. 189-204, set./dez. 2018. p. 189. Disponível em: <https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-40142018000300189>. Acesso em: 13 jun. 2020.

  Este artigo discute as contribuições da Etnomatemática para a formação de indivíduos capazes de produzir conhecimentos e de se comunicarem, colaborando para a superação das desigualdades sociais e garantindo dignidade a todos os cidadãos, independentemente das classes sociais nas quais estão inseridos, e voltados à preservação da natureza por meio da adoção de uma postura que defenda a sustentabilidade.

- FERREIRA, Mariana Kawall Leal (Org.). *Ideias matemáticas de povos culturalmente distintos*. São Paulo: Global, 2002. (Série Antropologia e Educação).

  O livro aborda tópicos relacionados à educação e à Matemática do cotidiano. Também trata a respeito da organização social e da Matemática de povos indígenas no Brasil, e da aritmética e da ornamentação geométrica no Brasil e na África.

- FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. *Investigação em Educação Matemática*: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

  Esta obra é destinada a professores e pesquisadores em Educação Matemática, pois orienta esses profissionais sobre como iniciar uma pesquisa nessa área. O livro traz orientações a respeito do processo de investigação na área, além do surgimento e do desenvolvimento desse componente curricular no Brasil.

- GARDNER, Howard. *Inteligências múltiplas*: a teoria na prática. Trad. Maria A. V. Veronese. Porto Alegre: Artmed, 1995.

  Neste trabalho, o autor explica as ideias fundamentais que desencadeiam uma revolução na aprendizagem e mostra como elas podem ser aplicadas em toda sala de aula onde se espera que os alunos pensem.

- HUETE, J. C. Sánchez; BRAVO, J. A. Fernández. *O ensino da Matemática*: fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2005.

  O livro pode ser usado como uma ferramenta de estudo e análise teórica para a construção do conhecimento matemático e para a resolução de problemas, visando a melhoras nas práticas em sala de aula.

- KNIJNIK, Gelsa et al. *Etnomatemática em movimento*. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro apresenta textos, discussões e reflexões sobre a trajetória e os rumos dos estudos e pesquisas no âmbito da Etnomatemática, tendo como principal referência o professor Ubiratan D'Ambrosio.

- LUCKESI, Cipriano Carlos. *Avaliação da aprendizagem escolar*: estudos e proposições. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

  Este livro pode servir de referência aos professores no sentido de propor uma reflexão sobre a avaliação da aprendizagem escolar em termos sociais e pedagógicos.

- MACHADO, Nilson José. *Matemática e educação*: alegorias, tecnologias, jogo, poesia. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2012. v. 43. (Questões da Nossa Época).

  São abordados, neste livro, tópicos sobre o ensino de Matemática, a avaliação e a informática no currículo.

- MARTINS, Jorge Santos. *O trabalho com projetos de pesquisa*: do Ensino Fundamental ao Ensino Médio. 5. ed. Campinas: Papirus, 2007. (Papirus Educação).

  Neste livro constam ideias de projetos que podem ser adaptadas e desenvolvidas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a integrar os diversos componentes curriculares e a vida cotidiana dos alunos.

- MENDES, Iran Abreu. *Investigação histórica no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

  O livro trata do uso de projetos de investigação histórica como uma alternativa metodológica para o ensino de Matemática. As experiências de tarefas investigativas apresentadas no livro evidenciam a relevância dessa abordagem no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

- MENDES, Iran Abreu. *Matemática e investigação em sala de aula*: tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro contém perspectivas didáticas que buscam contribuir para o ensino e aprendizagem mais significativo da Matemática, ampliando o conhecimento a respeito desse campo.

MODERNA

- MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. *Ensino*: as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1992.

  Neste livro são analisados dez conceitos básicos (homem, mundo, sociedade/cultura, conhecimento, educação, escola, ensino-aprendizagem, professor-aluno, metodologia e avaliação) com cinco abordagens do processo de ensino e aprendizagem (tradicional, cognitivista, comportamentalista, humanista e sociocultural).

- MONTEIRO, Alexandrina; POMPEU JUNIOR, Geraldo. *A Matemática e os temas transversais*. São Paulo: Moderna, 2001. (Educação em Pauta: Temas Transversais).

  O livro tece reflexões sobre transversalidade, ensino de Matemática, ciência e cultura, além de apresentar propostas de como viabilizar a ideia de transversalidade em sala de aula.

- MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria M. M. S. *A formação matemática do professor*: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro aborda questões referentes à formação do professor de Matemática, trazendo aspectos do conhecimento acadêmico e do conhecimento escolar. Para ilustrar sua posição, os autores apresentam como os conjuntos numéricos são trabalhados no nível escolar acadêmico e básico.

- NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Org.). *A formação do professor que ensina matemática*: perspectivas e pesquisas. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

  Neste livro são abordados temas relacionados à formação docente. São apresentadas pesquisas, perspectivas e reflexões sobre, por exemplo, a formação inicial e continuada de professores de Matemática, a relação dos docentes com o saber e com a prática pedagógica e a constituição da identidade profissional.

- ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. *Pesquisa em Educação matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999.

  Este trabalho busca valorizar a interação tanto entre professor e aluno quanto entre os próprios alunos no processo de ensino e aprendizagem, apontando para a importância de as tarefas matemáticas propostas em sala de aula assumirem uma natureza problemática. Além disso, trata da necessidade de o professor ser capaz de estabelecer um ambiente de trabalho estimulante, que propicie a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos.

- PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Este livro levanta questões e propõe reflexões sobre aspectos metodológicos do ensino de Matemática, levando em consideração o saber matemático e os desafios de seu ensino e aprendizagem.

- POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. e adapt. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

  Neste livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

- _____. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1999.

  Este trabalho tece comentários a respeito das maneiras de resolver um problema, no qual o processo de solução é mais importante do que a própria solução em si. Para tanto, Polya estabelece as quatro fases da resolução de um problema: compreendendo o problema, elaborando um plano, executando o plano e fazendo o retrospecto.

- RIBEIRO, Alessandro J.; CURY, Helena N. *Álgebra para a formação do professor*: explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro, os autores discutem a respeito do ensino e da aprendizagem da Álgebra, com enfoque especial aos assuntos relacionados a equações e funções, fazendo uma breve revisão histórica e apresentando pesquisas relacionadas ao tema.

- SADOVSKY, Patricia. *O ensino de matemática hoje*: enfoques, sentidos e desafios. Trad. Antonio de Padua Danesi. São Paulo: Ática, 2007. (Educação em Ação).

  Neste livro são apresentadas propostas para rever e analisar a Matemática e, assim, reformular a relação entre professor e aluno.

- SKOVSMOSE, O. *Educação matemática crítica*: a questão da democracia. Trad. Abgail Lins e Jussara L. Araújo. Campinas: Papirus, 2017.

  O autor aborda a Educação Matemática por meio de uma perspectiva democrática, propondo que trabalhos com projetos de modelagem possam ser encarados como uma possível saída para a questão democrática na sala de aula.

- TOMAZ, Vanessa Sena; DAVID, Maria M. M. S. *Interdisciplinaridade e aprendizagem da Matemática em sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. (Tendências em Educação Matemática).

  Neste livro as autoras esclarecem como lidar com a interdisciplinaridade no ensino de Matemática. São

CÓPIA

tratadas, ainda, situações com diferentes abordagens interdisciplinares sobre os conteúdos escolares que possibilitam ao professor refletir sobre como a Matemática e os demais componentes curriculares auxiliam na formação do aluno como cidadão.

- VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. *Matemática para aprender a pensar*: o papel das crenças na resolução de problemas. Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

  Em textos que aliam teoria e prática em sala de aula, os autores propõem discussões e reflexões sobre as crenças que permeiam o ensino de Matemática e apontam sugestões de como elas podem ser trabalhadas.

- ZALESKI FILHO, Dirceu. *Matemática e Arte*. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. (Tendências em Educação Matemática).

  Com base em uma revisão integrada da História da Matemática e da História da Arte, o autor defende que a conciliação entre essas duas áreas do conhecimento pode ser muito benéfica para o ensino.

- ZIMER, Tania Teresinha Bruns. *Aprendendo a ensinar Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental*. 2008. 299 f. Tese (Doutorado em Educação) — Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-24062008-162627/publico/TeseTaniaBrunsZimer.pdf>. Acesso em: 26 maio 2020.

  A tese apresentada neste documento disserta, entre outros assuntos pedagógicos, a respeito da importância do professor como elemento mediador entre as concepções pessoais e a prática pedagógica.

Leituras sobre a História da Matemática

- ALDER, Ken. *A medida de todas as coisas*: a odisseia de sete anos e o erro encoberto que transformaram o mundo. Rio de Janeiro: Objetiva, 2003.

  Neste livro, o autor relata as expedições – que duraram sete anos – de Pierre François André Méchain e Jean Baptiste Joseph Delambre, que, com o intuito de medir o planeta e estabelecer um padrão comum de medida, seguiram em direções opostas. Nesse contexto foi definida uma nova medida – o metro – como sendo a décima milionésima parte da distância entre o Polo Norte e a linha do Equador.

- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  A História da Matemática é abordada neste livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, e finalmente chegando aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

- CANE, Philip. *Gigantes da ciência*. Rio de Janeiro: Ediouro, [s.d.].

  Biografia de 50 dos grandes nomes da humanidade, incluindo Pitágoras, Aristóteles, Arquimedes, Galileu, Einstein, Leonardo da Vinci, Euclides, bem como alguns inventos relacionados a esses gênios.

- CARVALHO, Luiz Mariano et al. (Org.). *História e tecnologia no ensino da Matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008. v. 2.

  O livro apresenta uma coleção de artigos que relaciona o uso de recursos tecnológicos e a História da Matemática ao ensino de Matemática.

- Coleção Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. São Paulo: Atual.

  Nesta coleção, em que os volumes são assinados por autores diferentes, são abordados conteúdos matemáticos, como Geometria, Álgebra e Trigonometria, com base em seus aspectos históricos.

- DAVIS, Philip J.; HERSH, Reuben. *O sonho de Descartes*: o mundo de acordo com a matemática. Trad. Mário C. Moura. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

  O livro trata de René Descartes e de quatro séculos de avanço matemático após o sonho desse estudioso francês sobre a matematização do mundo. Nesse contexto, são abordados conteúdos matemáticos presentes no cotidiano, como é o caso da utilização da linguagem computacional.

- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

  O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para a resolução.

- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2 v.

  No volume 1, a história dos algarismos é apresentada considerando a origem da representação simbólica

MODERNA

dos números em diversas civilizações, como os gregos, os romanos e os maias. Já no volume 2, é explicado por que a civilização indiana é considerada o berço da numeração moderna e são refeitos os caminhos que levaram o homem a inventar o computador.

- _____. *Os números*: a história de uma grande invenção. 11. ed. Trad. Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 2005.

  O livro aborda uma resumida História da Matemática e acompanha a evolução da arte de calcular, contada desde a Pré-História.

- LEAVITT, David. *O homem que sabia demais*: Alan Turing e a invenção do computador. Ribeirão Preto: Novo Conceito, 2011.

  O livro traz a biografia do matemático Alan Turing, que, por meio da proposta de uma máquina ainda imaginária, abriu as portas para a era dos computadores.

- LOPES, Lidiane Schimitz; FERREIRA, André Luis Andrejew. *Um olhar sobre a história nas aulas de matemática*. Abakós, Belo Horizonte, v. 2, n. 1, p. 75-88, nov. 2013.

  Neste livro, os autores defendem o uso da História da Matemática como metodologia em sala de aula, realizando uma abordagem histórica dos conteúdos como meio de facilitar o entendimento da Matemática.

- MAOR, Eli. *e*: a história de um número. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003.

  O livro traz em ordem cronológica desde o cálculo com logaritmos até descobertas mais recentes relacionadas ao número *e*.

- MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. *História na Educação matemática*: propostas e desafios. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Neste livro, os autores abordam a História da Matemática e a História da Educação Matemática, estabelecendo uma relação entre essas duas áreas e o modo pelo qual elas podem se relacionar com a Educação Matemática.

- MIORIM, Maria Ângela. *Introdução à história da Educação Matemática*. São Paulo: Atual, 1998.

  O texto apresenta as principais questões e os momentos mais significativos do ensino da Matemática ao longo dos tempos.

- ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  O livro aborda a História da Matemática desde a Mesopotâmia até o século XIX. Um dos objetivos principais da autora é mostrar que a Matemática não é essencialmente abstrata e teórica. O livro também apresenta diferentes práticas matemáticas de povos da Antiguidade para a solução de problemas semelhantes.

- SINGH, Simon. *O livro dos códigos*: a ciência do sigilo: do antigo Egito à criptografia quântica. 7. ed. Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2010.

  O texto é uma narrativa sobre códigos e criptografia, bem como sobre os campos onde os códigos são e foram utilizados.

- STEWART, Ian. *Uma história da simetria na Matemática*. Trad. Cláudio Carina. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

  O livro apresenta a busca por soluções de equações algébricas, relatando essa história por meio de uma linha do tempo que vai desde a antiga Babilônia até chegar à Física do século XXI.

Leituras sobre os conteúdos deste volume

- ÁVILA, Geraldo. *Cálculo das funções de uma variável*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. v. 1.

  Obra que visa estimular o interesse do leitor pela Matemática, ao mesmo tempo que oferece uma visão mais completa do papel do Cálculo nos contextos científico, histórico e cultural dos últimos anos.

- BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 11. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  Este livro dá ao professor uma visão ampliada do que ele ensina em sala de aula, mostrando a Geometria euclidiana plana de um ponto de vista que vai além dos tópicos do Ensino Básico.

- BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrindo a geometria fractal*: para a sala de aula. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. (Tendências em Educação Matemática).

  O livro apresenta um estudo dos fractais voltado para a sala de aula. O livro contém características artísticas sem perder a precisão e o rigor matemático.

- CASTANHEIRA, Nelson Pereira. *Noções básicas de matemática comercial e financeira*. Curitiba: Intersaberes, 2012.

  Com o propósito de facilitar o uso de cálculos matemáticos, o autor aborda temas como razão, proporção, regra de três, porcentagem, juros e capitalização, direcionando o conteúdo a profissionais das áreas de finanças, contábeis e logística, bem como a alunos das ciências exatas.

- Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

  A coleção é destinada à formação de professores de Matemática, a alunos de licenciatura ou cursos de aperfeiçoamento de professores. Organizada pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa), esta cole-

MODERNA

ção está disposta em 20 volumes que tratam desde conteúdos relacionados à Matemática até temas sobre ensino e história da Matemática.

- Coleção Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo: Atual, 2013.

  A coleção aborda uma grande variedade de conteúdos e conceitos dispostos em dez volumes direcionados a alunos dos ensinos Médio e Superior.

- COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Albert P. (Org.). *As ideias da álgebra*. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995.

  Esta obra comenta a prontidão para conceitos, equações, expressões, resolução de problemas, utilização de computadores e calculadoras voltados ao aprendizado da Álgebra, entre outros temas de grande importância.

- DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos de matemática elementar*: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.

  Este volume é composto de teorias e exercícios de aplicação, testes de vestibulares atualizados, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- GUEDJ, Denis. *O teorema do papagaio*. Trad. Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

  Em meio a uma rede de intrigas envolvendo a máfia, sequestros e enigmas intelectuais, esse romance desafia o leitor a compreender e organizar a história do pensamento matemático desde a Antiguidade até os nossos dias.

- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*: logaritmos. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v.2.

  Este volume é composto por teorias e exercícios de aplicação envolvendo o conteúdo de logaritmos, testes de vestibulares atualizados, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*: conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v.1.

  Este volume é composto por teorias e exercícios de aplicação sobre conjuntos e funções, além de testes de vestibulares atualizados, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- INSTITUTO NACIONAL DE METROLOGIA, QUALIDADE E TECNOLOGIA (INMETRO). *Sistema Internacional de Unidades*: SI. 8. ed. Rio de Janeiro, 2003.

  Este documento, elaborado pelo Inmetro, apresenta informações a respeito do Sistema Internacional de Unidades, o qual é adotado por todo o Brasil, estando alinhado também com outros países. Dessa forma, estabelece-se um padrão para as principais unidades de medidas adotadas, bem como para as unidades derivadas, além das grafias corretas que devem ser adotadas na representação dessas unidades.

- LIMA, Elon Lages. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. (Coleção do Professor de Matemática).

  O conteúdo desse livro é uma coleção de crônicas e comentários em torno de um tema comum: a Matemática estudada nos últimos três anos que antecedem a universidade.

- LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).

  O foco desta obra é o trabalho com as funções de uma variável, estudadas sem o uso do cálculo infinitesimal. Essa abordagem elementar traz noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números – naturais, inteiros, racionais e reais. Na segunda parte do livro são apresentadas funções variadas: afins, quadráticas, polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

- LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do Ensino Médio*. 7. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 2. (Coleção do Professor de Matemática).

  O livro aborda a Matemática discreta por meio do estudo de Progressões (com aplicações à Matemática financeira), Análise combinatória e Probabilidade, e apresenta exemplos de objetos do mundo real que ilustram conceitos importantes de Geometria espacial.

- MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C. *Progressões e Matemática financeira*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção do Professor de Matemática).

  Além de explorar contextos que fazem parte do dia a dia, este livro traz um apêndice com o passo a passo para calcular a taxa de juros, progressões e fazer planilhas utilizando o Excel, e ensina como usar calculadoras financeiras.

- SAMANEZ, Carlos Patricio. *Matemática financeira*. 5. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2010.

  Esta obra traz atualizações importantes, como as referentes aos títulos públicos federais, e pequenas mudanças pensadas para auxiliar ainda mais no entendimento teórico dos alunos.

EM MODERNA

- STEWART, James. *Cálculo*. 8. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2017. v. 1.

  Dando ênfase à compreensão dos conceitos, o autor inicia a obra oferecendo uma visão geral do assunto e, em seguida, apresenta o tema em detalhes, por meio da formulação de problemas, exercícios, tabelas e gráficos.

- VERAS, Lilia Ladeira. *Matemática financeira*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

  Em linguagem simples e com exemplos práticos, este texto introduz o leitor no campo da Matemática financeira e no uso de sua principal ferramenta de trabalho: a calculadora. Partindo das operações comerciais, que em geral são do conhecimento de todos, procura, por analogia, chegar às operações financeiras em que o valor do dinheiro varia no tempo. São apresentadas muitas aplicações ao mercado financeiro, tanto no que se refere às operações ativas como às passivas.

Sugestões de *sites* para o professor

- **Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação**

  Disponível em: <https://anped.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Neste *site* é possível obter informações sobre pós-graduação e pesquisa na área de educação, acessar publicações e consultar datas e locais de eventos sobre o tema.

- **Centro de Informação e Biblioteca em Educação**

  Disponível em: <http://inep.gov.br/pesquisa-ao-acervo>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  O acervo da biblioteca do Cibec é composto de livros, periódicos, teses, dissertações, folhetos e relatórios de pesquisa, materiais de multimídia, além de obras raras e especiais e documentos a respeito da educação brasileira.

- **Domínio Público – Biblioteca Digital Desenvolvida em *Software* Livre**

  Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/PesquisaObraForm.jsp>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Com este *site*, o Governo Federal visa disponibilizar conhecimentos, colocando à disposição de todos uma biblioteca virtual. Alunos e professores podem utilizá-la para estudos, pesquisas e desenvolvimento profissional.

- **Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec)**

  Disponível em: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/index.php>. Acesso em: 21 maio 2020.

  O *site* contém *softwares* disponíveis para *download*, artigos e atividades que tratam da tecnologia informática no âmbito da educação matemática escolar.

- **Educação Matemática em Revista**

  Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Essa revista tem como foco o trabalho do professor em sua prática de educador matemático.

- **Estudão.mp3 – Funções exponenciais e logarítmicas**

  Podcast que aborda as funções exponenciais e logarítmicas e algumas de suas aplicações nos dias atuais. Disponível em: <https://infograficos.estadao.com.br/focas/por-minha-conta/materia/estudao-seu-podcast-de-revisao-para-se-dar-bem-no-enem>. Acesso em: 3 ago. 2020.

- **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE**

  Disponível em: <https://www.fnde.gov.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Com este *site* o Ministério da Educação busca prover ações para o desenvolvimento da educação, proporcionando ao professor uma fonte de informações sobre os programas gerenciados pelo FNDE, os financiamentos escolares, os projetos e as ações educacionais.

- **Matemática #1: Matemática Financeira**

  Disponível em: <https://podcasts.google.com/feed/aHR0cHM6Ly9icmFzaWxlc2NvbGEudW9sLmNvbS5ici9yc3MtcG9kY2FzdHM/episode/MTI2NjA4?sa=X&ved=0CAoQzslCahcKEwignKntv-HqAhUAAAAAHQAAAAAQAQA>. Acesso em: 22 jul. 2020.

- **Mathema**

  Disponível em: <https://mathema.com.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Neste *site* o professor encontrará informações sobre o Ensino Médio, cursos de aperfeiçoamento profissional, sugestões de livros, revistas, *sites*, *softwares* e vídeos que visam melhorar a prática docente, bem como reflexões sobre temas relacionados à Educação Matemática.

- **Ministério da Educação**

  Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* apresenta informações sobre o órgão governamental responsável pela Educação no Brasil (MEC). Além disso, o professor tem acesso aos projetos desenvolvidos pelo governo para a educação no país.

- **Nova Escola**

  Disponível em: <https://novaescola.org.br/>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A edição *on-line* da revista Nova Escola proporciona ao leitor o acesso a diversas informações sobre a educação em várias áreas do conhecimento. Neste *site* pode-se ter acesso às edições da revista e pesquisar artigos publicados.

MODERNA

- **Portal do Núcleo de Pesquisas das Novas Tecnologias de Comunicação Aplicadas à Educação – Escola do Futuro USP**

  Disponível em: <https://www.futuro.usp.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* proporciona ao professor acesso a novas tecnologias da informação e comunicação, bem como a projetos de pesquisa e a produções científicas.

- **Revista Brasileira de Educação – Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**

  Disponível em: <https://anped.org.br/site/rbe>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  A revista é voltada à publicação de artigos acadêmico-científicos, visando fomentar e facilitar o intercâmbio acadêmico nos âmbitos nacional e internacional. Por meio do *site*, é possível ter acesso às edições da revista, pesquisar, enviar artigos etc.

- **Revista do Professor de Matemática**

  Disponível em: <http://rpm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* abrange informações sobre a publicação da Sociedade Brasileira de Matemática. A revista é destinada àqueles que ensinam Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No *site*, estão disponíveis artigos, edições da revista e informações a respeito da publicação de artigos.

- **Sociedade Brasileira de Educação Matemática**

  Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  Tem como finalidade congregar profissionais (pesquisadores, professores e alunos) da área de Educação Matemática e de áreas afins. No *site*, podem ser encontradas diversas informações sobre a Educação Matemática no Brasil e no exterior.

- **Sociedade Brasileira de Matemática**

  Disponível em: <https://www.sbm.org.br/>. Acesso em: 16 abr. 2020.

  O *site* busca estimular o desenvolvimento da pesquisa e do ensino da Matemática no Brasil. Nele, estão disponíveis ao professor informações sobre eventos e atividades da área.

Referências bibliográficas

- ABRAMOVAY, Miriam; SILVA, Ana Paula da; FIGUEIREDO, Eleonora. *Guia para diretores e professores*: reflexões e práticas sobre violência e convivência escolar: faça você mesmo. Rio de Janeiro: Flacso Brasil/BID, 2018.

  Guia que apresenta orientações aos professores sobre os principais temas da contemporaneidade, relacionados à violência e à convivência escolar, de maneira reflexiva e prática.

- ACTIVE learning strategies. *Berkeley Center for Teaching & Learning.* Disponível em: <https://teaching.berkeley.edu/active-learning-strategies>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Página elaborada pelo Centro de Ensino e Aprendizagem da Universidade da Califórnia, em Berkeley, nos Estados Unidos, que apresenta definições, organização e exemplos de diversas estratégias associadas às metodologias ativas.

- ARAÚJO, Luciene da Costa; VIEIRA, Kay F. L.; COUTINHO, Maria da Penha de Lima. Ideação suicida na adolescência: um enfoque psicossociológico no contexto do ensino médio. *Psico-USF*, Itatiba, v. 15, n. 1, p. 47-57, jan./abr. 2010.

  Artigo que apresenta um estudo sobre as representações sociais da ideação suicida e a presença desse fenômeno em adolescentes do Ensino Médio.

- BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

  Este livro reúne artigos de professores que apresentam conceitos, reflexões, experiências e possibilidades de implementação do ensino híbrido nas escolas.

- BARCA, Isabel. Aula oficina: do projeto à avaliação. In: *Para uma educação de qualidade*: atas da Quarta Jornada de Educação Histórica. Braga, Centro de Investigação em Educação (CIED) / Instituto de Educação e Psicologia, Universidade do Minho, 2004. p. 131-144.

  Artigo que apresenta, de maneira objetiva e estruturada, as etapas de uma aula-oficina.

- BARCELOS, Thiago Schumacher; SILVEIRA, Ismar Frango. Pensamento computacional e educação matemática: relações para o ensino de computação na educação básica. In: *WORKSHOP* SOBRE EDUCAÇÃO EM COMPUTAÇÃO, 20., 2012, Curitiba. Anais... Curitiba: SBC, 2012. p. 1-10. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/256439343_Pensamento_Computacional_e_Educacao_Matematica_Relacoes_para_o_Ensino_de_Computacao_na_Educacao_Basica/link/0deec5228dfbb4d377000000/download>. Acesso em: 22 jul. 2020.

  Artigo que busca discutir as relações entre conhecimento, habilidades e atitudes possíveis de serem estabelecidas entre Matemática e Ciência da Computação.

- _____. Relações entre o pensamento computacional e a matemática através da construção de jogos digitais. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE *GAMES* E ENTRETENIMENTO DIGITAL, 12., 2013, São Paulo. *Anais...* São Paulo: SBC, 2013. p. 52-55. Disponível em: <https://sol.sbc.org.br/index.php/wei/article/view/10222>. Acesso em: 22 jul. 2020.

MODERNA

Esta pesquisa busca estudar a relação entre a Matemática aprendida no Ensino Básico e o sucesso nos cursos de introdução à Ciência da Computação, analisando o modo pelo qual os alunos estimulam as competências matemáticas no processo de desenvolvimento do pensamento computacional, tomando como base as atividades práticas de desenvolvimento de jogos digitais.

- BEFORE, during, or after reading: reflection quick write. *Lakehead University*. Disponível em: <https://teachingcommons.lakeheadu.ca/sites/default/files/inline-files/Quick%20Writes%20explanation.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Texto que apresenta um breve resumo a respeito da metodologia ativa **Quick writing**, publicado na página da Universidade de Lakehead, localizada no Canadá.

- BENINCASA, Miria; REZENDE, Manuel Morgado. Tristeza e suicídio entre adolescentes: fatores de risco e proteção. *Boletim de Psicologia*, São Paulo, v. 55, n. 124, p. 93-110, jun. 2006.

  Artigo que apresenta informações sobre os fatores de risco e proteção relacionados ao suicídio.

- BOUCINHA, Rafael Marimon et al. Construção do pensamento computacional através do desenvolvimento de games. *Renote*, v. 15, n. 1, p. 1-10, jul. 2017. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/renote/article/view/75146>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo apresenta uma proposta metodológica que busca desenvolver o pensamento computacional nos alunos por meio do desenvolvimento de *games*.

- BRACKMANN, Christian Puhlmann. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica*. 2017. 226 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Centro de Estudos Interdisciplinares em Novas Tecnologias na Educação, Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, Porto Alegre, 2017. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Trabalho que busca verificar a possibilidade do desenvolvimento do pensamento computacional na Educação Básica por meio de atividades exclusivamente desplugadas, ou seja, sem o uso de aparatos eletrônicos.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018a. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 21 maio 2020.

  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. Resolução nº 3, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 22 nov. 2018b. p. 21-24. Disponível em: <http://novoensinomedio.mec.gov.br/resources/downloads/pdf/dcnem.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Esta resolução atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, publicadas em 2012. Nela, são apresentadas as mudanças necessárias para a implementação da proposta do Novo Ensino Médio.

- _____. Ministério da Educação. *Diretrizes para a Educação Básica*. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/323-secretarias-112877938/orgaos-vinculados-82187207/12992-diretrizes-para-a-educacao-basica>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Conjunto de pareceres e resoluções que regulamentam a Educação Básica no Brasil.

- _____. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Matriz de referência Enem*. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/download/enem/matriz_referencia.pdf>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Matriz de referência é um termo utilizado especificamente no contexto das avaliações em larga escala para indicar habilidades a serem avaliadas em cada etapa da escolarização e orientar a elaboração de itens de testes e provas, bem como a construção de escalas de proficiência que definem o que e o quanto o aluno realiza no contexto da avaliação.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica*. Brasília: MEC/SEB/Dicei, 2013. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192>. Acesso em: 30 maio 2020.

  As diretrizes reunidas neste documento estabelecem a base nacional comum, que orienta a organização, a articulação, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas de todas as redes de ensino do país.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Resolução CEB nº 3, de 26 de junho de 1998. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para

EM OBRA

o Ensino Médio. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 5 ago. 1998. p. 21. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/rceb03_98.pdf>. Acesso em: 21 maio 2020.

Conjunto de definições sobre princípios, fundamentos e procedimentos a serem observados na organização pedagógica e curricular de cada unidade escolar, objetivando vincular a educação com o mundo do trabalho e com a prática social, consolidando a preparação para o exercício da cidadania e propiciando preparação básica para o trabalho.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Formação de professores do ensino médio, etapa I – caderno II*: o jovem como sujeito do ensino médio. Curitiba: UFPR/Setor de Educação, 2013.

  Nesta obra, voltada à formação de professores, são discutidos diversos temas relacionados ao Ensino Médio. Em um primeiro momento, discute-se o conceito de juventude com o objetivo de propor mudanças nas maneiras de conceber essa faixa etária. Esses textos buscam valorizar o papel do jovem como sujeito de sua história. Em seguida, os textos destacam temas como juventude e tecnologia, questão do mercado de trabalho e projeto de vida, além do papel da escola no processo de formação dos jovens.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 20 maio 2020.

  O objetivo das Orientações Curriculares para o Ensino Médio é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente. A qualidade da escola é a condição essencial de inclusão e democratização das oportunidades no Brasil para oferecer uma educação básica de qualidade, contribuindo com o desenvolvimento do país e a consolidação da cidadania, que é tarefa de todos.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Temas contemporâneos transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC/SEB, 2019. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este documento apresenta o histórico dos Temas Contemporâneos Transversais, sua divisão em seis grandes áreas e a importância desses temas para os currículos da Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial da União*, Brasília, DF, 23 dez. 1996. p. 27833. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/L9394.htm>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Responsável por regulamentar a estrutura e o funcionamento do sistema de educação do país, esta lei definiu os objetivos a serem atingidos e reforçou o caráter federativo da educação brasileira.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.* Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Este documento pretende discutir a condução do aprendizado nos diferentes contextos e condições de trabalho das escolas brasileiras, de modo a responder às transformações sociais e culturais da sociedade contemporânea, levando em conta as leis e diretrizes que redirecionam a Educação Básica.

- _____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/expansao-da-rede-federal/195-secretarias-112877938/seb-educacao-basica-2007048997/12598-publicacoes-sp-265002211>. Acesso em: 20 maio 2020.

  Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio auxiliam as equipes escolares na execução de seus trabalhos, servindo de estímulo e apoio à reflexão sobre a prática pedagógica, ao planejamento de aulas e, sobretudo, ao desenvolvimento do currículo da escola, contribuindo ainda para a atualização profissional.

- _____. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. Departamento de Ações Programáticas e Estratégicas. *Proteger e cuidar da saúde de adolescentes na atenção básica*. 2. ed. Brasília 2018c. Disponível em: <https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/proteger_cuidar_adolescentes_atencao_basica_2ed.pdf>. Acesso em: 27 abr. 2020.

  Este documento do Ministério da Saúde foi elaborado para auxiliar as Equipes de Atenção Básica/Saúde da Família no trabalho com adolescentes, propondo o cuidado com a saúde, a adoção de hábitos saudáveis e a atenção aos principais aspectos clínicos.

- CAMARGO, Fausto; DAROS, Thuinie. *A sala de aula inovadora*: estratégias pedagógicas para fomentar o aprendizado ativo. Porto Alegre: Penso, 2018.

MODERNA

Este livro é organizado em duas partes: a primeira apresenta reflexões dos autores sobre possibilidades de inovação em sala de aula; a segunda aborda mais de 40 estratégias que contribuem para a aplicação dessas metodologias.

- CAMPOS, Herculano Ricardo; CARDOSO, Samia Dayana J. Violência na escola: uma reflexão sobre o *bullying* e a prática educativa. *Em Aberto*, Brasília, v. 23, n. 83, p. 107-128, mar. 2010.

  Artigo que apresenta informações estatísticas sobre o *bullying* na escola e o papel do professor diante de situações como essa.

- CENTRO DE INOVAÇÃO PARA A EDUCAÇÃO BRASILEIRA (CIEB). *Currículo de referência em tecnologia e computação*. Disponível em: <https://curriculo.cieb.net.br/>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  O objetivo deste currículo é oferecer diretrizes e orientações que visam apoiar as escolas a incluir em suas propostas curriculares os temas tecnologia e computação, potencializando o uso da tecnologia na aprendizagem.

- D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

  O autor propicia uma análise do papel da Matemática na cultura ocidental e da noção de que a Matemática é apenas uma forma de Etnomatemática.

- DAYRELL, Juarez (Org.). *Por uma pedagogia das juventudes*: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

  Juarez Dayrell é um pesquisador que investiga questões sobre a juventude e a educação, analisando a importância das culturas juvenis na construção de um cenário educativo mais democrático e significativo. Nessa obra, ele traz algumas experiências vivenciadas no projeto Observatório da Juventude, da Universidade Federal de Minas Gerais (UGMG), que trabalha desde 2003 com a formação de professores e discussões envolvendo a juventude.

- DRIEU, Didier; PROIA-LELOUEY, Nadine; ZANELLO, Fabrice. Ataques ao corpo e traumatofilia na adolescência. *Ágora*, Rio de Janeiro, v. 14, n. 1, p. 9-20, jan./jun. 2011.

  Artigo que apresenta um estudo sobre a relação entre as mudanças que ocorrem na puberdade e os comportamentos suicidas.

- FILATRO, Andrea; CAVALCANTI, Carolina Costa. *Metodologias inov-ativas na educação presencial, a distância e corporativa*. São Paulo: Saraiva Educação, 2018.

  Este livro traz aplicações práticas e estratégias de trabalho com diversos tipos de metodologias que apresentam elementos de inovação nas práticas de ensino e aprendizagem, chamadas pelas autoras de metodologias "inov-ativas".

- FONTES, Maurício de Moraes; FONTES, Dineusa Jesus dos Santos; FONTES, Miriam de Morais. O computador como recurso facilitador da aprendizagem matemática. In: *SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 1., 2009*, Ponta Grossa. *Anais...* Ponta Grossa: UTFPR, 2009. p. 1013-1026.

  Aborda, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, a utilização de recursos de Tecnologia da Informação e Comunicação como tendência em Educação Matemática.

- FORTES, Isabel; MACEDO, Mônica Medeiros Kother. Automutilação na adolescência: – rasuras na experiência de alteridade. *Psicogente*, Barranquilla, v. 20, n. 38, p. 353-367, jul./dez. 2017. Disponível em: <http://revistas.unisimon.edu.co/index.php/psicogente/article/view/2556>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo de reflexão teórica que aborda aspectos do comportamento de automutilação, propondo-se a analisar o tema com base em algumas narrativas em *blogs* de adolescentes.

- FRANÇA, Rozelma; TEDESCO, Patrícia. Desafios e oportunidades ao ensino do pensamento computacional na educação básica no Brasil. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 4., 2015, Maceió. *Anais*... Maceió: SBC, 2015. p. 1464-1473. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/283347058_Desafios_e_oportunidades_ao_ensino_do_pensamento_computacional_na_educacao_basica_no_Brasil>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Este trabalho busca discutir os desafios do ensino do pensamento computacional na Educação Básica, apontando alguns dos principais desafios a serem vencidos, bem como oportunidades de pesquisa na área.

- FRANCISCO, Marcos Vinicius; LIBÓRIO, Renata Maria C. Um estudo sobre *bullying* entre escolares do Ensino Fundamental. *Psicologia*: reflexão e crítica, Porto Alegre, v. 22, n. 2, p. 200-207, 2009.

  Artigo que busca caracterizar o *bullying* em escolas públicas, destacando os efeitos tanto sobre o comportamento quanto sobre o sentimento dos vitimados.

- ILLERIS, Knud (Org.). *Teorias contemporâneas da aprendizagem*. Porto Alegre: Penso, 2013.

  Nesta obra, o pesquisador Knud Illeris reúne diferentes autores e teorias da aprendizagem que têm sido desenvolvidas na contemporaneidade e apresenta um

EM OBRA

conjunto de textos que tratam sobre o tema. Cada pesquisador contribui com suas reflexões, buscando caminhos na compreensão sobre o conceito de educar e sobre como funciona o complexo processo de ensino e aprendizagem na atualidade.

- LEAL, Edvalda Araújo; MIRANDO, Gilberto José; CASA NOVA, Silvia Pereira de Castro. *Revolucionando a sala de aula*: como envolver o estudante aplicando técnicas de metodologias ativas de aprendizagem. São Paulo: Atlas, 2017.

  Este livro aborda algumas metodologias ativas de aprendizagem utilizando tanto estratégias tradicionais quanto estratégias contemporâneas e inovadoras.

- MENTAL health atlas 2017. Genebra: World Health Organization, 2018.

  Documento que reúne uma compilação de dados sobre a saúde mental da população em nível mundial.

- MORAN, José. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, Lilian; MORAN, José (Org.). *Metodologias ativas para uma educação inovadora*: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018. p. 2-25.

  Este artigo apresenta práticas pedagógicas baseadas em metodologias ativas que valorizam o protagonismo dos alunos.

- _____. Mudando a educação com metodologias ativas. In: SOUZA, Carlos Alberto de; MORALES, Ofelia Elisa Torres (Org.). *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. Ponta Grossa: Foca Foto/Proex/UEPG, 2015. v. 2. (Mídias Contemporâneas).

  Esse texto aborda as diferentes facetas das tecnologias educacionais, trazendo reflexões sobre a educação no mundo contemporâneo e as novas concepções de ensino relacionadas às metodologias ativas.

- MORENO, Montserrat et al. *Falemos de sentimentos*: a afetividade como um tema transversal. Trad. Maria Cristina de Oliveira. São Paulo: Moderna, 1999. (Educação em Pauta: Temas Transversais).

  Relacionando aspectos cognitivos e afetivos, este trabalho afirma que é possível aprender em sala de aula características relacionadas à solidariedade, à ajuda mútua e à luta contra a discriminação, com base em ações e reflexões sobre os próprios sentimentos e comportamentos.

- PAIS, Luiz Carlos. *Educação escolar e as tecnologias da informática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Nesta obra é apresentada uma coletânea de ensaios que tratam da inserção da informática na educação escolar, promovendo articulações entre o uso dessa tecnologia e o fenômeno da cognição.

- PARA UMA ABORDAGEM multicultural: o Programa Etnomatemática. Nuno Vieira entrevista Ubiratan D'Ambrosio. Revista Lusófona de Educação, Lisboa, n. 11, p. 163-168, 2008.

  Entrevista realizada com o precursor da Etnomatemática, Professor Doutor Ubiratan D'Ambrosio.

- PAULINO FILHO, Lucival Bento; PELLOSO, João Augusto Grecco; CAETANO, Willyan da Silva. Debates orientados: uma abordagem da aprendizagem ativa no desafio da formação integral. In: ENCONTRO NACIONAL DE JOVENS INVESTIGADORES, 4., 2019, Salvador. *Anais...* Salvador: 2019. Disponível em: <https://www.editorarealize.com.br/artigo/visualizar/57573> Acesso em: 15 abr. 2020.

  Artigo apresentado em evento promovido pela Universidade do Estado da Bahia (Uneb), que aborda a realização de debates sob a perspectiva da aprendizagem ativa.

- PENSAMENTO computacional e programação como ferramentas de aprendizagem. *Instituto Ayrton Senna*, 13 set. 2019. Disponível em: <https://www.institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Nesse texto, o pensamento computacional e a programação são indicados como estratégias eficazes na busca por práticas pedagógicas que promovam o desenvolvimento pleno.

- PIVA JUNIOR, Dilermando. *Sala de aula digital*: uma introdução à cultura digital para educadores. São Paulo: Saraiva, 2013.

  Esta obra discute questões relacionadas à utilização de recursos tecnológicos em ambiente escolar, oferecendo ferramentas para que os educadores possam fundamentar e utilizar a cultura digital a serviço de sua principal atividade: a arte de educar.

- PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2016.

  Nesta obra, os autores apresentam os possíveis modos de introduzir em sala de aula as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos, apontando as vantagens e desvantagens no trabalho com essa perspectiva. Também são analisados os papéis dos alunos e professores em sala de aula ao lidar com problemas relacionados às áreas de Geometria, Estatística e Aritmética.

- RAABE, André. Pensamento computacional na educação: para tod*s, por tod*s! *Computação Brasil,* Porto Alegre, Sociedade Brasileira de Computação (SBC), v. 34, n. 2, p. 54-63, jul. 2017. Disponível em: <https://www.sbc.org.br/component/flippingbook/book/35/1?page=54>. Acesso em: 15 abr. 2020.

EM MODERNA

Com o intuito de apontar para a grande importância da ampliação do pensamento computacional no Ensino Básico, o autor discorre, neste artigo, a respeito dos esforços e das dificuldades encontradas no processo de valorização da Ciência da Computação como área de conhecimento.

- REIS, Angelina Fatima Moreno Vaz dos; BARRETO, Maria Auxiliadora Motta. *Uma experiência com* Think-pair-share *no Ensino Fundamental I*. Práxis, Volta Redonda, v. 9, n. 17, p. 55-67, jun. 2017.

  Este artigo apresenta definições e a organização da estratégia **Think-pair-share** por meio da aplicação dessa abordagem em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental.

- ROCHA, Julciane. *Design thinking* na formação de professores: novos olhares para os desafios da educação. In: BACICH, Lilian; TANZI NETO, Adolfo; TREVISANI, Fernando de Mello (Org.). *Ensino híbrido*: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015. p. 161-163.

  O objetivo é apresentar aos professores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar e, com isso, trazer benefícios para o dia a dia da sala de aula, como engajamento, maior aproveitamento, personalização, comunicação e outros.

- ROCHA, Ricael Spirandeli; CARDOSO, Iara Maria Dâmaso; MOURA, Monthelli Aparecida Estevão de. O uso da *gallery walk* como metodologia ativa em sala de aula: uma análise sistemática no processo de ensino-aprendizagem. Revista Sítio Novo, Palmas, v. 4, n. 1, p. 162-170, jan./mar. 2020.

  Este artigo apresenta possibilidades de aplicação da estratégia **Gallery walk** por meio da análise documental de publicações de sete experiências vivenciadas em salas de aula de Uberaba-MG.

- TARDIF, Maurice. *Saberes docentes e formação profissional*. 17. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

  O livro traz considerações e reflexões sobre os saberes docentes que servem de base para o trabalho dos professores, bem como sobre os fundamentos sociocognitivos do ensino e a análise do trabalho e da formação dos professores.

- TOKARNIA, Mariana. Um em cada dez estudantes no Brasil é vítima frequente de *bullying*. *Agência Brasil,* 19 abr. 2017. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2017-04/um-em-cada-dez-estudantes-no-brasil-e-vitima-frequente-de-bullying>. Acesso em: 27 abr. 2020.

  Diante da realidade das escolas brasileiras, esta reportagem apresenta um levantamento de dados a respeito da ocorrência de situações de *bullying* em escolas da Educação Básica, sustentada por informações coletadas do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) de 2015. O texto discute as causas e consequências envolvendo esse tipo de situação e a atuação de pais, professores e demais estudantes no enfrentamento do *bullying*.

- VALENTE, Jonas. Agência Brasil explica: o que é a tecnologia 5G. *Agência Brasil*, 30 mar. 2020. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2020-03/agencia-brasil-explica-o-que-e-tecnologia-5g>. Acesso em: 5 ago. 2020.

  Esta reportagem mostra as principais características da tecnologia 5G, considerando os benefícios que podem ser obtidos com a implantação dessa nova tecnologia, em diversas áreas da sociedade, além de apresentar as perspectivas para seu desenvolvimento em relação à implantação no Brasil.

- VALENTE, José Armando. Integração do pensamento computacional no currículo da educação básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. *e-Curriculum*, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 864-897, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/curriculum/article/view/29051>. Acesso em: 19 set. 2020.

  Neste artigo, o autor busca analisar as diferentes estratégias de implantação do pensamento computacional no currículo da Educação Básica. Essas estratégias foram classificadas em três categorias: a inclusão de temas relacionados à Ciência da Computação, a inserção de componentes curriculares que exploram os conceitos do pensamento computacional por meio de tecnologias e, por fim, a exploração dos conceitos do pensamento computacional de maneira transversal ao currículo do aluno.

- VIOLÊNCIA escolar e *bullying*: relatório sobre a situação mundial. Brasília: Unesco, 2019.

  Relatório que busca fornecer dados atualizados sobre a violência escolar e *bullying*, destacando sua natureza, abrangência e impactos, assim como apresentar iniciativas para enfrentar esses problemas.

- WING, Jeannette. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. Trad. Cleverson Sebastião dos Anjos. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia,* Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/4711/pdf>. Acesso em: 15 abr. 2020.

  Este artigo traz uma discussão a respeito do pensamento computacional, enfatizando sua importância como habilidade analítica que deve ser desenvolvida nos alunos do Ensino Básico, auxiliando na resolução de quaisquer tipos de problemas.

MODELO

DIÁLOGO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

FUNÇÕES E PROGRESSÕES

Organizadora: Editora Moderna
Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna.

Editora responsável:
Lilian Aparecida Teixeira
Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Norte do Paraná (Uenp).
Licenciada em Física pela Universidade Metropolitana de Santos (Unimes).
Especialista em Educação Especial pelo Instituto de Estudos Avançados e Pós-Graduação (Esap) das Faculdades Integradas do Vale do Ivaí (Ivaiporã-PR).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editora de livros didáticos.

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

1ª edição

São Paulo, 2020

MODERNA

MODERNA

Elaboração dos originais:

André Luiz Steigenberger
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atuou como professor de Matemática em escolas da rede pública de ensino.

Julio Cesar Jovino da Silva
Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como editor de livros didáticos.

Felippe Neves Manjavachi
Graduado em Engenharia Elétrica pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Licenciado com habilitação para o Magistério em Matemática pelo Programa Especial de Formação Pedagógica do Centro Universitário Filadélfia (Unifil-PR).
Atuou como professor de curso técnico do Instituto Federal do Paraná (IFPR) e como professor em escolas das redes pública e particular de ensino.

Alessandra Negrini Dalla Barba
Licenciada e Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Especialista em Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Daiany Cristiny Ramos
Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Lavras (Ufla).
Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).
Atua como professora nos cursos de Licenciatura em Matemática e Engenharia de instituições particulares de Ensino Superior.

Projeto e produção editorial: Scriba Soluções Editoriais
Edição: Denise Maria Capozzi, Lilian Aparecida Teixeira
Assistência editorial: Alisson Henrique dos Santos, Octavio Bertochi Neto
Colaboração técnico-pedagógica: Eduardo Wagner
Gerência de produção: Camila Rumiko Minaki Hoshi
Projeto gráfico: Studio Scriba
Capa: Daniela Cunha
Ilustrações: Otávio dos Santos, Daniela Cunha, 23design/Shutterstock
Gerência de arte: André Leandro Silva
Edição de arte: Camila Carmona, Maryane Vioto Silva
Diagramação: Fernanda Miyabe Lantmann, Leticia Nakadomari Bula
Supervisão de editoração eletrônica: Luiz Roberto Lúcio Correa
Preparação de texto: Equipe Scriba
Revisão de texto: Equipe Scriba
Pesquisa iconográfica: Alessandra Roberta Arias
Tratamento de imagens: Johannes de Paulo

Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Everton L. de Oliveira, Marcio H. Kamoto, Vitória Sousa
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Diálogo : matemática e suas tecnologias / organizadora Editora Moderna ; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna ; editora responsável Lilian Aparecida Teixeira. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2020.

Obra em 6 v.
Conteúdo: Grandezas, Medidas e Matemática financeira -- Geometria plana -- Geometria espacial -- Geometria analítica, Sistemas e Transformações geométricas -- Estatística e Probabilidade -- Funções e Progressões
Bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) 2. Tecnologia educacional I. Teixeira, Lilian Aparecida.

20-37384 CDD-373.19

Índices para catálogo sistemático:

1. Ensino integrado : Livros-texto : Ensino médio 373.19

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.
Todos os direitos reservados

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Vendas e Atendimento: Tel. (0_ _11) 2602-5510
Fax (0_ _11) 2790-1501
www.moderna.com.br
2020
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Para conhecer seu livro

Olhar o mundo à nossa volta e compreendê-lo, interagir e participar criticamente dos rumos de nossa sociedade e do meio ambiente, contribuindo para o bem comum, são apenas algumas das atribuições que temos como cidadãos. Nesse sentido, o conhecimento matemático é essencial.

Ler e interpretar criticamente informações, tomar decisões com base em constatações matemáticas e lidar com os recursos tecnológicos são exemplos da importância da Matemática em nossa vida.

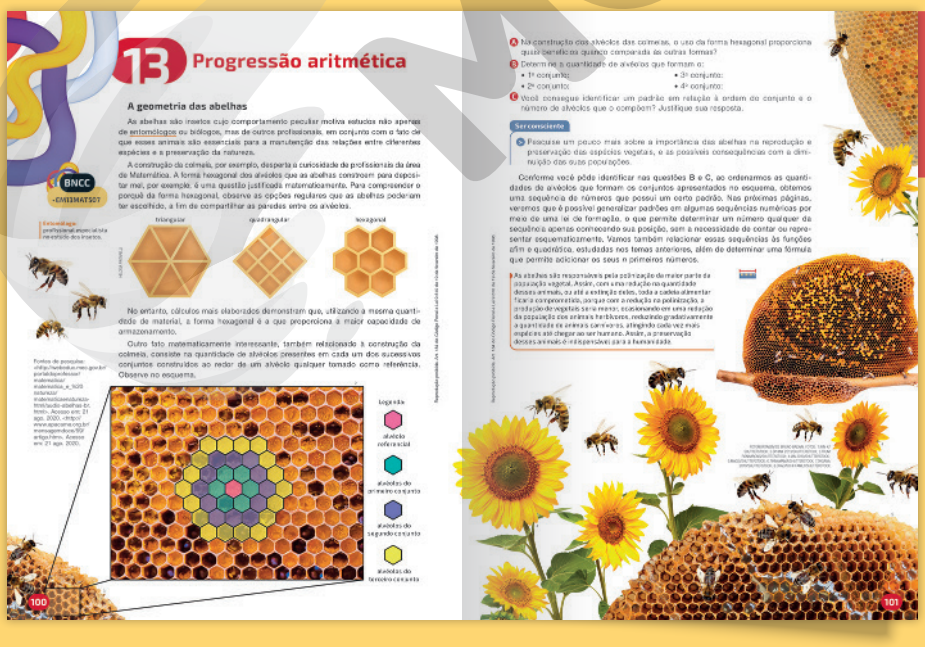
Esta coleção foi elaborada para auxiliá-lo nessa perspectiva e no caminho posterior a esta etapa de ensino, como o ingresso no Ensino Superior e no mercado de trabalho. Para ajudá-lo na compreensão dos assuntos tratados, são apresentados exemplos, exercícios e problemas resolvidos, seguidos de propostas de exercícios e problemas que buscam consolidar a aprendizagem, além de seções que tratam do uso de *softwares* e de linguagem de programação.

Por fim, desejamos a você, aluno ou aluna, que desenvolva suas habilidades matemáticas e, com as orientações de seu professor, faça uso deste material com dedicação, protagonismo e entusiasmo.

Bom estudo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

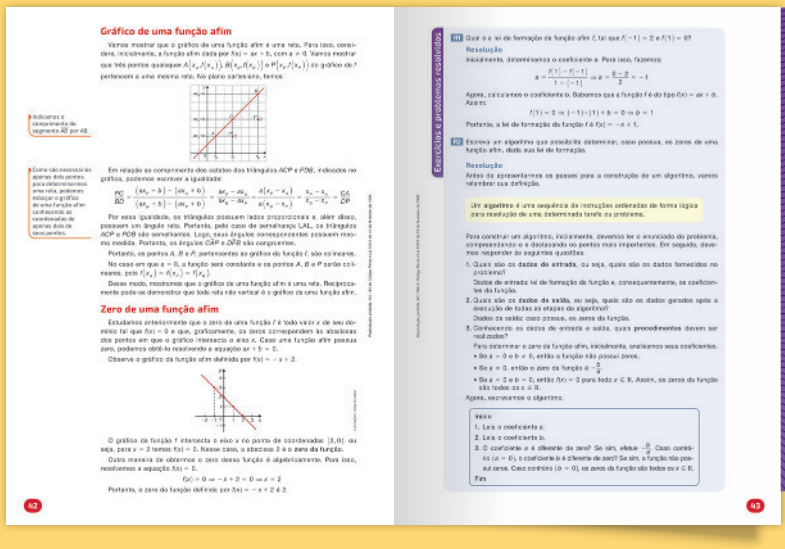
MODERNA


13 Progressão aritmética

A geometria das abelhas

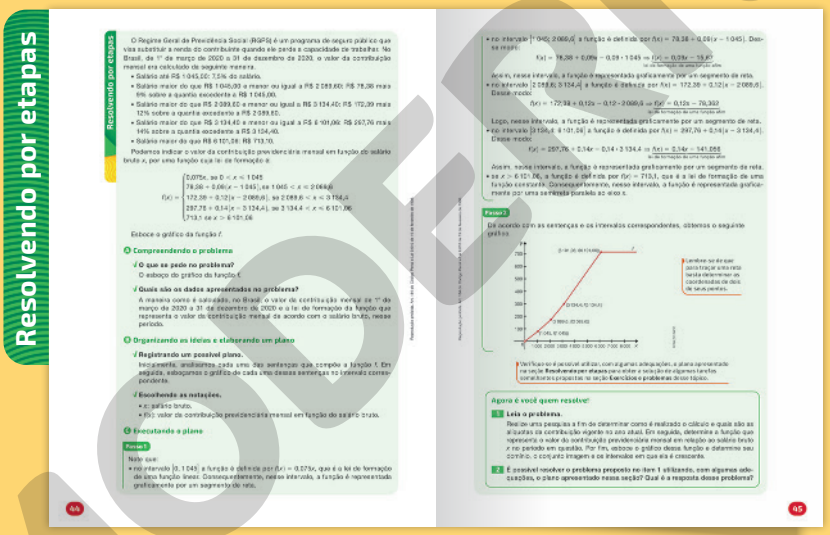
Abertura

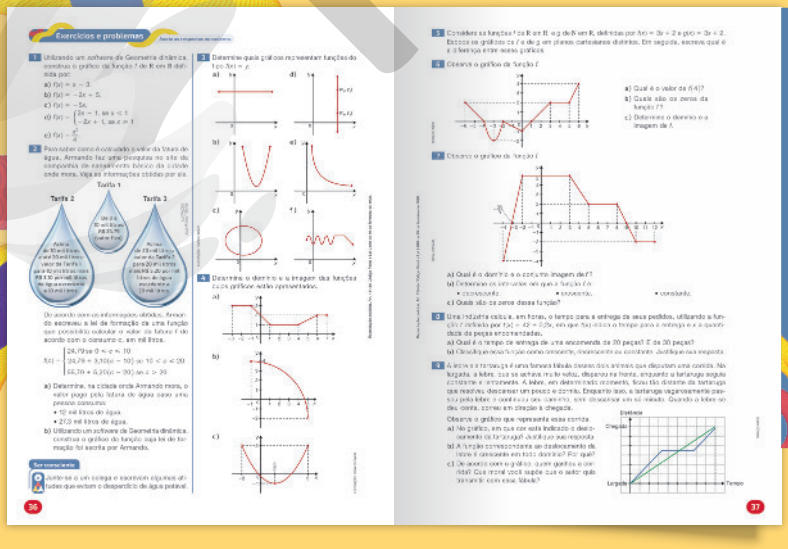
Na abertura de cada tema você terá um contato inicial com os assuntos que serão estudados. Você poderá mostrar o que já sabe e aprimorar seus conhecimentos, trocando ideias com o professor e os colegas sobre diversas temáticas.



Estes exercícios e problemas auxiliam a exercitar habilidades, competências e estratégias para resolver todas as outras tarefas propostas, favorecendo o desenvolvimento de sua autonomia.

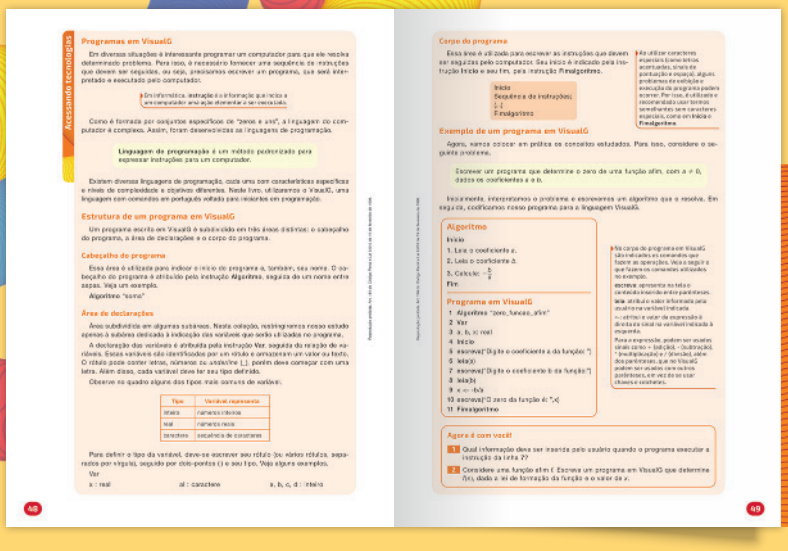
Esta seção apresenta maneiras de organizar o pensamento com o intuito de solucionar um problema. Espera-se que, a partir dela, você seja capaz de desenvolver estratégias para resolver diversos problemas, matemáticos ou não.





Esta seção apresenta exercícios e problemas diversificados para você desenvolver as ideias e os conceitos estudados. Vários deles apresentam relações com outras áreas do conhecimento e outros componentes curriculares, além de questões de provas, como vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.



Acessando tecnologias

Nesta seção, você vai encontrar exemplos e tarefas que complementam o que foi estudado nos temas, utilizando *softwares*, linguagem de programação e aplicativos disponíveis em *sites*.

Ampliando seus conhecimentos

Esta seção apresenta sugestões de livros, vídeos, *sites* e *podcasts* para você conhecer mais sobre o que foi estudado nos temas e para ampliar seus conhecimentos.

Calculadora

As tarefas com destaque **Calculadora** exploram procedimentos para usar os recursos dessa ferramenta.

Em grupo

As tarefas com destaque **Em grupo** serão mais proveitosas se realizadas com a colaboração de um ou mais colegas.

Desafio

As tarefas com destaque **Desafio** possuem caráter desafiador, possibilitando o desenvolvimento de estratégias próprias de resolução.

Elaborando

As tarefas com destaque **Elaborando** exploram o desenvolvimento da escrita, da imaginação, da investigação e da reflexão.

No contexto

As tarefas com destaque **No contexto** estabelecem relações do conteúdo trabalhado com as páginas de abertura do tema.

Ser consciente

Nas tarefas com destaque **Ser consciente** você refletirá a respeito de diferentes assuntos, como ética, educação financeira, saúde, cidadania, entre outros, possibilitando uma avaliação cidadã e social da temática abordada.

Este ícone indica que as cores dos objetos retratados não correspondem às reais.

Este ícone indica que os objetos retratados não estão proporcionais entre si.

No final do livro, você vai encontrar as **Referências bibliográficas** usadas neste volume e a seção **Ampliando seus conhecimentos**, contendo referências complementares de livros, *sites* e *podcasts* para ampliar seus conhecimentos sobre os temas estudados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Objetivos

A finalidade deste volume é ampliar seus conhecimentos a respeito de **Funções e Progressões**. Os conteúdos nele abordados são apresentados de maneira simples e precisa, visando seu protagonismo na aprendizagem e a construção de uma visão integrada da Matemática em diversos contextos.

No que se refere a **Funções**, o objetivo é compreender o conceito da relação de dependência entre duas variáveis, estudando as principais ideias como: produto cartesiano; conceito de função; gráfico de uma função; função crescente, decrescente e constante; função composta; e função inversa, assim como analisar gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem o apoio de tecnologias digitais, construir modelos que empregam função e resolver e elaborar problemas.

Com relação à **Progressões**, o objetivo é identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins e progressões geométricas (PG) a funções exponenciais, ambas com domínios discretos, para a análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Além disso, durante o desenvolvimento dos conteúdos você será desafiado a propor estratégias para modelar soluções de determinados problemas e escrevê-las em uma linguagem de programação.

Base Nacional Comum Curricular - BNCC

Em toda a coleção, visando favorecer o desenvolvimento das Competências Gerais da Educação Básica, das Competências Específicas de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e das Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias, além das habilidades relacionadas a cada uma delas, serão propostas tarefas (problemas, vivências, investigações etc.) para que você as resolva de maneira reflexiva.

A seguir, apresentaremos as competências e as habilidades cujo desenvolvimento é favorecido neste volume.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.

4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Ciências da Natureza e suas Tecnologias: Competências específicas

1. **CE1CNT:** Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

3. **CE3CNT:** Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

Matemática e suas Tecnologias: Competências específicas e habilidades

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

EM13MAT101: Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

EM13MAT302: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

EM13MAT305: Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

EM13MAT401: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

EM13MAT402: Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.

EM13MAT403: Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

EM13MAT404: Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT405: Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

EM13MAT501: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.

EM13MAT502: Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

EM13MAT503: Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT506: Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.

EM13MAT507: Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT508: Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

EM13MAT510: Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

EM13MAT101

- O primeiro par de letras indica a etapa do **Ensino Médio**.
- O primeiro par de números (13) indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio.
- A segunda sequência de letras indica a área ou o componente curricular: **MAT** = Matemática e suas Tecnologias.
- Os números finais indicam a competência específica à qual se relaciona a habilidade (1º número) e a sua numeração no conjunto de habilidades relativas a cada competência (dois últimos números).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

SUMÁRIO

1 Os conjuntos 10

Estudando conjuntos 12
Subconjuntos 14
Exercícios e problemas 14
Conjuntos numéricos 16
Conjunto dos números naturais e inteiros 16
Conjunto dos números racionais 16
Conjunto dos números irracionais 18
Conjunto dos números reais 18
Intervalos 18
Exercícios e problemas 19

2 Números reais no método braille 20

3 Noção intuitiva de função 22

Estudando noção intuitiva de função 23
Exercícios e problemas 25
O conceito de função 26
Exercícios e problemas 27
Estudo do domínio de uma função 28
Exercícios e problemas 29

4 Gráfico de uma função 30

Estudando gráfico de uma função 32
Análise do gráfico de uma função 33
Zero de uma função 33
Funções crescente, decrescente e constante 34
Acessando tecnologias
Gráfico e zero de uma função 35
Exercícios e problemas 36
Taxa de variação média 38
Exercícios e problemas 39

5 Função afim 40

Estudando função afim 41
Gráfico de uma função afim 42
Zero de uma função afim 42
Resolvendo por etapas 44
Exercícios e problemas 46

Acessando tecnologias
Programas em VisualG 48

6 Função afim crescente e função afim decrescente 50

Função crescente e função decrescente 52
Exercícios e problemas 53
Estudo do sinal de uma função afim 54
Exercícios e problemas 54

7 Proporcionalidade e função linear 56

A proporcionalidade e a função linear 58
Exercícios e problemas 59

8 Modelo linear 60

O modelo linear 61
Acessando tecnologias
Modelo de regressão linear 62
Exercícios e problemas 64

9 Função quadrática 66

Estudando função quadrática 67
Gráfico de uma função quadrática 68
Exercícios e problemas 69

10 Coeficientes de uma função quadrática 70

Estudando coeficientes de uma função quadrática 72
Exercícios e problemas 74
Zeros de uma função quadrática 76
Exercícios e problemas 79

11 Vértice de uma parábola 80

O vértice de uma parábola 82
Exercícios e problemas 84
Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática 85

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Resolvendo por etapas 86

Acessando tecnologias
Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática 88

Exercícios e problemas 89

Estudo do sinal de uma função quadrática 91

Exercícios e problemas 93

12 Inequação do 1º e do 2º grau 94

Inequação do 1º grau 96

Inequação do 2º grau 97

Exercícios e problemas 98

13 Progressão aritmética 100

Sequências numéricas 102

Progressão aritmética 102

Fórmula do termo geral de uma PA 103

Exercícios e problemas 105

PA e função afim 107

PA e função quadrática 107

Exercícios e problemas 108

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA 109

Acessando tecnologias
PA na planilha eletrônica 110

Exercícios e problemas 111

14 Função exponencial 112

Potenciação 114

Potência com expoente racional 114

Potência com expoente irracional 114

Potência com expoente real 114

Estudando função exponencial 115

Exercícios e problemas 115

Gráfico de uma função exponencial 116

Exercícios e problemas 117

15 Função exponencial e radioatividade 118

16 Equação e inequação exponencial 120

Equação exponencial 122

Exercícios e problemas 123

Inequação exponencial 124

Exercícios e problemas 125

17 Progressão geométrica 126

Estudando progressão geométrica 128

Exercícios e problemas 130

Fórmula do termo geral de uma PG 131

Exercícios e problemas 133

PG e função 136

Exercícios e problemas 137

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG 137

Exercícios e problemas 139

18 Logaritmo 140

Definição 141

Consequências da definição 141

Exercícios e problemas 142

Propriedades operatórias dos logaritmos 143

Mudança de base 144

Exercícios e problemas 145

19 Função inversa e logarítmica 146

Função inversa 148

Função logarítmica 149

Gráfico de uma função logarítmica 149

Exercícios e problemas 150

Equação logarítmica 150

Inequação logarítmica 151

Exercícios e problemas 152

Ampliando seus conhecimentos 154

Respostas 155

Referências bibliográficas 160

Lista de siglas 160

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

1 Os conjuntos

Muito parecidos e ao mesmo tempo diferentes

O número de espécies de seres vivos presentes na Terra é incerto, mas sabe-se que milhões delas habitam nosso planeta, e, constantemente, novas espécies são encontradas.

Em razão desse grande número, verificou-se a necessidade da criação de um sistema de classificação dos seres vivos. O sistema de classificação atual agrupa os seres vivos a partir de categorias relacionadas às suas semelhanças. As principais categorias de classificação são: reino, filo, classe, ordem, família, gênero e espécie; de modo que espécies semelhantes se agrupam em gêneros que, a partir de suas semelhanças, se reúnem em famílias, e assim por diante, até que filos semelhantes se agrupem em reinos.

O lince, a onça-pintada, o tigre e o guepardo, espécies que estão destacadas a seguir, vivem em regiões distantes uma da outra, do Norte ocidental ao Sul oriental. Apesar disso, as quatro espécies possuem diversas semelhanças e são organizadas em uma mesma família, a dos felídeos (*Felidae*), que por sua vez faz parte da classe dos mamíferos (*Mammalia*), à qual nós, seres humanos, também pertencemos.

Lince da América do Norte

Lynx canadensis

- 14,5 anos
- 72 cm a 120 cm
- 4,5 kg a 17,3 kg
- Espécie nativa do Canadá e parte dos Estados Unidos, vive em florestas e áreas rochosas, com muita neve no inverno.
- Suas patas são grandes e peludas para que não afundem na neve.

Onça-pintada

Panthera onca

- 11 a 12 anos
- 220 cm a 270 cm
- 68 kg a 136 kg
- É presente desde o México, passando pela América Central, até a América do Sul, incluindo grande parte do Brasil, preferindo áreas de floresta densa e chuvosa e evitando áreas abertas.
- Maior felino do continente americano e a maior potência de mordida entre todos os felinos.

MODERNA

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Escreva semelhanças e diferenças entre os animais representados.

A) Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: semelhanças: têm pelos, são mamíferos, apresentam garras e são carnívoros; diferenças: cor, *habitat*.

B Qual dos grupos possui a maior quantidade de seres vivos: a família dos felídeos ou a classe dos mamíferos? Justifique sua resposta. Classe dos mamíferos, pois agrupa, além dos felídeos, outras famílias.

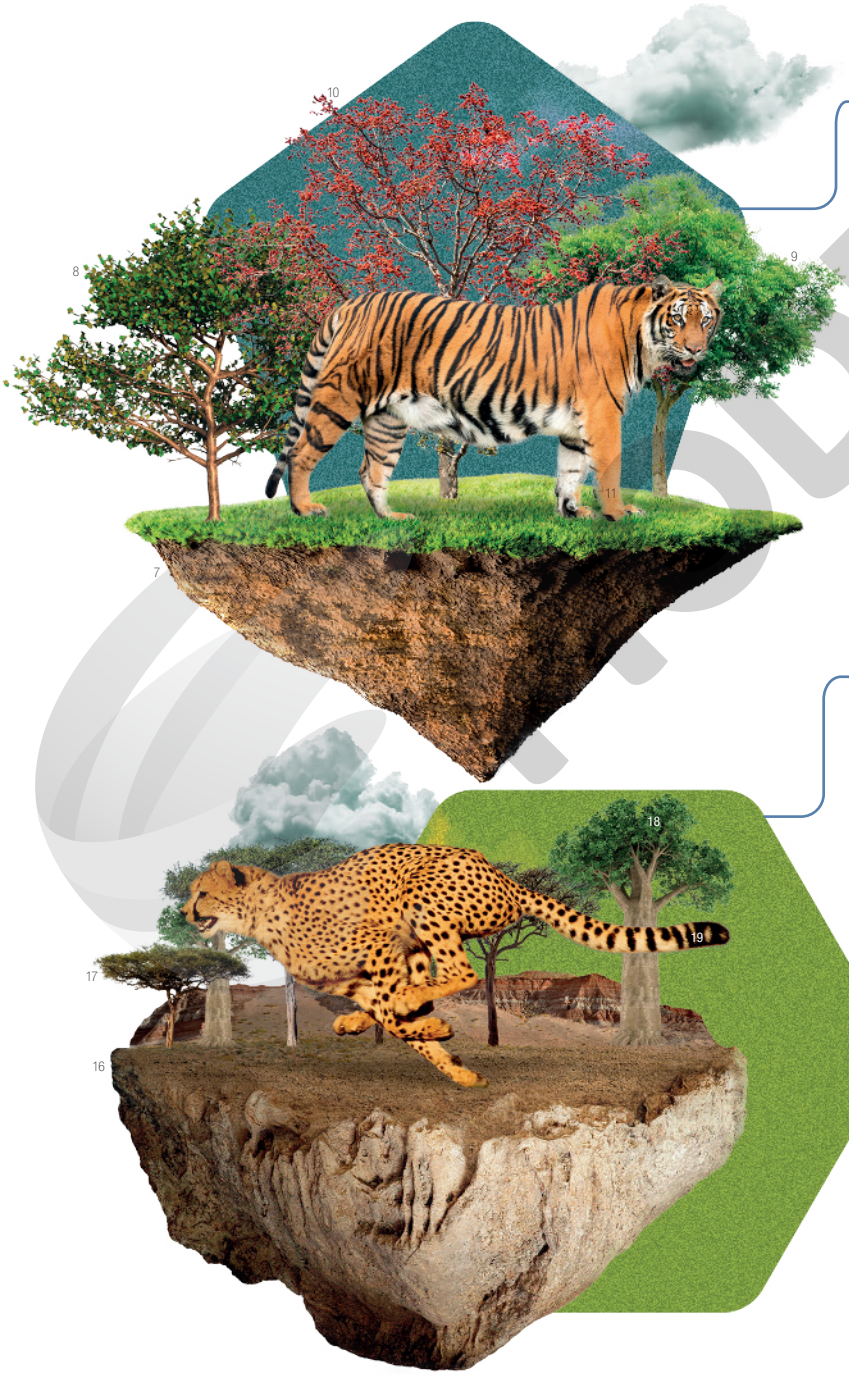
C Escolha uma espécie animal e realize uma pesquisa para identificar a que família ela pertence. Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: o cachorro pertence à família dos canídeos (*Canidae*); o gato, à dos felídeos (*Felidae*); o coelho, à dos leporídeos (*Leporidae*).

A ideia de agrupar os seres vivos a partir de categorias relacionadas às suas semelhanças está intuitivamente relacionada ao conceito de **Conjunto**. Para nos auxiliar na compreensão de algumas situações – como as categorias de classificação dos seres vivos – vamos estudar esse conceito nas próximas páginas, bem como identificar e representar conjuntos utilizando diferentes maneiras, como chaves, diagramas e lei de formação.

Além disso, vamos verificar se um objeto pertence a um conjunto, como a onça-pintada que pertence à família dos felídeos, assim como determinar se um conjunto está contido em outro, como o dos felídeos que está contido no dos mamíferos.

Fonte de pesquisa: VÉRON, Géraldine. *Cap sur les Félins*. Paris: Nathan, 1997.

Veja mais informações sobre a classificação dos animais no *site* disponível em: <https://www.yumpu.com/pt/document/read/18650110/criterios-de-classificacao-dos-seres-vivos-parte-i->. Acesso em: 27 ago. 2020.



Tigre

Panthera tigris

- 8 a 10 anos
- 198 cm a 370 cm
- 91 kg a 423 kg
- Espalhado em vários pontos da Índia e países vizinhos, geralmente entre as árvores e vegetação alta.
- Existem diversas espécies de tigres que correm riscos de serem extintas.

Guepardo

Acinonyx jubatus

- 15 anos
- 191 cm a 231 cm
- 53,5 kg
- Vive na África, península Arábica e no sudoeste da Ásia, em locais de vegetação tipicamente africana, onde são encontradas poucas árvores e muito arbusto e mato rasteiro.
- É o mamífero terrestre mais veloz, capaz de chegar a uma velocidade de 120 km/h.

Longevidade
Comprimento
Massa
Localização
Curiosidade

FOTOMONTAGEM DE MAURICIO PLANEL.
FOTOS: 1.TCHARTS/SHUTTERSTOCK; 2.ZHENGCHENGBAO/SHUTTERSTOCK; 3.HOLLY KUCHERA/SHUTTERSTOCK; 4.JENI FOTO/SHUTTERSTOCK; 5.LEONID IKAN/SHUTTERSTOCK; 6.GENCHO PETKOV/SHUTTERSTOCK; 7.VARUNA/SHUTTERSTOCK; 8.STUDIO BY THE SEA/SHUTTERSTOCK; 9.CHITTAKORN59/SHUTTERSTOCK; 10.TKGGP/SHUTTERSTOCK; 11.ANAN KAEWKHAMMUL/SHUTTERSTOCK; 12.STUDIO VIN/SHUTTERSTOCK; 13.ANA VASILEVA/SHUTTERSTOCK; 14.CHANSOM PANTIP/SHUTTERSTOCK; 15.GAN CHAONAN/SHUTTERSTOCK; 16.RED TIGER/SHUTTERSTOCK; 17.SUSAN SCHMITZ/SHUTTERSTOCK; 18.UKMOONEY/SHUTTERSTOCK; 19.SLOWMOTIONGLI/SHUTTERSTOCK; 20.VADIM ALMIEV/SHUTTERSTOCK

Estudando conjuntos

Ao obter quaisquer coleções de objetos distintos, estamos formando **conjuntos**.

Os animais vertebrados, por exemplo, podem ser divididos em cinco classes: peixes, anfíbios, répteis, aves e mamíferos. Cada uma dessas classes é um conjunto.

Vertebrados

Os vertebrados estão classificados no subfilo *Vertebrata* do filo *Chordata*. Esse grupo é considerado grande e diversificado, e nele todos os animais possuem crânio, e a maioria possui vértebras que formam a coluna vertebral.

Mamíferos

Os mamíferos possuem sangue quente; as fêmeas têm glândulas mamárias, com as quais amamentam os filhotes.

Anfíbios

A maioria das espécies de anfíbios vive parcialmente na água e na terra. Esses animais, em geral, são predadores de insetos e outros invertebrados.

Aves

Uma característica exclusiva das aves é possuir penas. Elas revestem e isolam o corpo, possibilitando a regulação da temperatura e auxiliando no voo.

Peixes

Uma das principais características dos peixes é a respiração por brânquias.

Répteis

Acredita-se que os répteis foram os primeiros vertebrados a adaptarem-se à vida em lugares secos, no ambiente terrestre.

ILUSTRAÇÕES: LEO GIBRAN

Fontes de pesquisa: STORER, Tracy I. et al. *Zoologia geral*. 6. ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2000.
POUGH, F. Harvey; JANIS, Christine M.; HEISER, John B. *A vida dos vertebrados*. São Paulo: Atheneu, 2003.
HICKMAN JR., Cleveland P.; ROBERTS, Larry S.; LARSON, Allan. *Princípios integrados de zoologia*. 11. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 2009.

Na Matemática, a ideia de conjuntos é fundamental e está presente em diversos conceitos. Podemos formar conjuntos a partir de objetos de diferentes naturezas, tais como pessoas e números.

Os conjuntos são formados por **elementos**. Em geral, nomeamos os conjuntos por letras maiúsculas. Uma maneira de representar os elementos de um conjunto é:

$$L = \{a, c, e, i, m, t\}$$

Observe que, nessa notação, os elementos do conjunto são representados entre chaves e separados por vírgula.

MODERNA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exemplos

- Conjunto dos divisores positivos de 12: $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
- Conjunto dos múltiplos positivos de 4: $M = \{4, 8, 12, 16, 20, ...\}$.

No conjunto M, as reticências foram utilizadas para indicar que existe uma infinidade de números maiores do que 20.

Caso os elementos de um conjunto sejam números expressos em sua forma decimal, usaremos ponto e vírgula para separá-los.

Se julgar conveniente, lembre os alunos dos conceitos de múltiplos e divisores.

Os conjuntos L e D são **conjuntos finitos**, pois podemos contar seus elementos, ou seja, associá-los aos números naturais de 1 até certo número n. Já M é um **conjunto infinito**, pois não é finito.

Outra maneira de apresentar os elementos de um conjunto é pela condição que os define, chamada **lei de formação**.

Exemplo

$P = \{x \mid x \text{ é um número primo menor do que } 25\}$

lê-se: tal que

Os elementos de P são os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 e 23.

Indicamos o número de elementos de um conjunto A por $n(A)$. No caso do conjunto P, por exemplo, temos $n(P) = 9$.

Lembre os alunos de que um número primo é aquele que é divisível apenas por 1 e por ele mesmo.

Quando um objeto (que pode ser até outro conjunto) é elemento de um conjunto, dizemos que ele **pertence** ao conjunto. Caso contrário, dizemos que ele **não pertence** ao conjunto. Considerando o conjunto P, sabemos que o número 2 é um de seus elementos e o número 9, por exemplo, não é. Assim:

- 2 pertence a P. Nesse caso, escrevemos:

$$2 \in P$$

lê-se: pertence

- 9 não pertence a P. Nesse caso, escrevemos:

$$9 \notin P$$

lê-se: não pertence

Lembre os alunos de que um número quadrado perfeito é aquele cuja raiz quadrada é um número natural.

Exemplos

Sejam os conjuntos $Q = \{x \mid x \text{ é um número quadrado perfeito entre 10 e 20}\}$ e $N = \{x \mid x \text{ é um número par positivo menor do que 9}\}$. Assim, temos, por exemplo:

- $2 \in N$.
- $5 \notin N$.
- $12 \notin N$.
- $16 \in Q$.
- $12 \notin Q$.
- $9 \notin Q$.

No contexto

Cite cinco animais que pertencem ao conjunto dos vertebrados, mas não pertencem ao conjunto dos mamíferos.

Uma possível resposta: tucano, rã, crocodilo, pirarucu e cobra.

Analisando o conjunto Q descrito no exemplo, é possível perceber que o único número que pertence a Q é o 16, pois é o único quadrado perfeito entre 10 e 20. Nesse caso, dizemos que o conjunto Q é unitário.

Um conjunto A que tem um único elemento é chamado **conjunto unitário**.

Considere, agora, o conjunto $R = \{x \mid x \text{ é um número negativo e } x \geqslant 5\}$. Note que não existem números negativos maiores ou iguais a 5. Nesse caso, dizemos que R é o conjunto vazio.

Dizemos que A é o **conjunto vazio** quando ele não tem elemento algum. Indicamos o conjunto vazio por $\varnothing$ ou $\{\}$.

Por definição, o conjunto vazio é finito.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Determine o número de elementos de cada um dos conjuntos apresentados a seguir.

a) $V = \{x \mid x \neq x\}$ Não possui elementos.

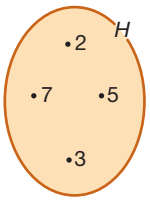
b) $P = \{x \mid x \text{ é um número primo par}\}$ 1 elemento

c) $R = \{x \mid x \text{ é raiz da equação } 3x + 5 = 0\}$ 1 elemento

d) $S = \{x \mid x \text{ é uma letra da palavra ARARA}\}$ 2 elementos

Além das representações até o momento, um conjunto pode ser indicado por meio de uma figura chamada **diagrama de Venn**.

Veja ao lado o conjunto $H = \{x \mid x \text{ é um número primo entre 1 e 8}\}$ representado em um diagrama de Venn.



Subconjuntos

O conjunto A é **subconjunto** do conjunto B se todo elemento de A for elemento de B. Nesse caso, dizemos que A está **contido** em B ou A é **parte** de B. Indicamos esse fato por $A \subset B$. Quando A **não é subconjunto** de B, ou seja, quando existe pelo menos um elemento de A que não é elemento de B, escrevemos $A \not\subset B$.

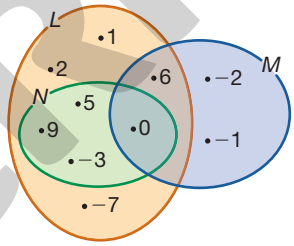
O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto. Essa relação pode ser justificada por redução ao absurdo, ou seja, supondo que $\emptyset \not\subset A$ e obtendo uma contradição na conclusão. Nesse caso, existiria um objeto x pertencente a $\emptyset$ e não pertencente a A. Contudo, isso é um absurdo, pois por definição o conjunto $\emptyset$ não possui elementos. Dessa maneira, $\emptyset \subset A$.

Exemplo

Considere os conjuntos $L = \{-7, -3, 0, 1, 2, 5, 6, 9\}$, $M = \{-2, -1, 0, 6\}$ e $N = \{-3, 0, 5, 9\}$.

Note que:

- $N \subset L$, pois todo elemento de N é elemento de L.
- $M \not\subset L$, pois, por exemplo, $-2 \in M$ e $-2 \notin L$.
- $N \not\subset M$, pois, por exemplo, $-3 \in N$ e $-3 \notin M$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Dois conjuntos A e B são **iguais** quando eles têm os mesmos elementos. Indicamos essa igualdade por $A = B$. Por outro lado, dois conjuntos C e D são **diferentes** quando algum elemento de um dos conjuntos não é elemento do outro conjunto. Nesse caso, escrevemos $C \neq D$.

Exemplo

Considere os conjuntos $J = \{x \mid x \text{ é um número par entre 1 e 7}\}$, $K = \{2, 4, 6\}$ e $I = \{0, 2, 4, 6\}$. Temos:

- $J = K$, pois J e K têm os mesmos elementos.
- $K \neq I$, pois $0 \in I$ e $0 \notin K$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Apresente os elementos de cada conjunto entre chaves e separados por vírgulas (ou ponto e vírgula, se necessário). Em seguida, classifique-os em finito ou infinito.

a) Conjunto das letras que compõem a palavra amizade. {a, m, i, z, d, e}; finito

b) Conjunto dos números ímpares negativos maiores do que −10. {−9, −7, −5, −3, −1}; finito

c) Conjunto dos múltiplos positivos de 7. {7, 14, 21, 28, ...}; infinito

d) Conjunto das raízes da equação $3x = -\frac{9}{7}$. $\left\{-\frac{3}{7}\right\}$; finito

e) Conjunto dos divisores positivos de 18. {1, 2, 3, 6, 9, 18}; finito

f) Conjunto dos números primos pares maiores do que 2. {}; finito

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 Considere os seguintes conjuntos.

$P = \{x \mid x \text{ é divisor positivo de } 3\}$

$Q = \{x \mid x \text{ é um número natural negativo}\}$

$R = \{x \mid x \text{ é positivo e par}\}$

$S = \{x \mid x \text{ é primo e está entre 90 e 100}\}$

Dentre esses conjuntos, qual:

a) é o vazio? Q

b) é unitário? S

c) contém mais do que três elementos? R

No contexto

3 Realize uma pesquisa e escreva o nome de três espécies de vertebrados que pertencem ao conjunto: Uma possível resposta:

a) dos mamíferos. gambá, macaco e homem.

b) dos peixes. tubarão, cascudo e lambari.

c) das aves. arara, papagaio e coruja.

d) dos répteis. jacaré, tartaruga e iguana.

e) dos anfíbios. cobra-cega, sapo e rã.

4 Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 5, 7\}$ e $P = \{x \mid x \text{ é um número par}\}$. Classifique as afirmações a seguir em verdadeira ou falsa.

a) $\{1, 2, 3\} \subset P$ falsa

b) $\{2, 5, 7\} \subset A$ verdadeira

c) $A \subset P$ falsa

d) $\varnothing \not\subset P$ falsa

e) $2 \in A$ verdadeira

f) $7 \in P$ falsa

Para as afirmações que você classificou como falsas, justifique o motivo pelo qual estão incorretas. Resposta no final do livro.

5 Escreva a lei de formação de cada conjunto.

Uma possível resposta:

a) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $A = \{x \mid x \text{ é par positivo e menor do que } 11\}$

b) $B = \{\ldots, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots\}$ $B = \{x \mid x \text{ é múltiplo de } 6\}$

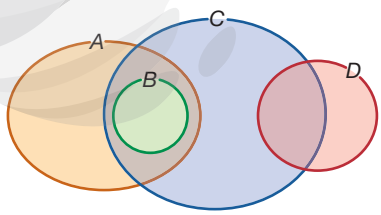
c) $C = \{1, 2, 4, 8\}$ $C = \{x \mid x \text{ é um divisor positivo de } 8\}$

d) $D = \{3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots\}$ $D = \{x \mid x \text{ é ímpar positivo e maior do que } 2\}$

e) $E = \{1, 4, 9, 16\}$ $E = \{x \mid x \text{ é um quadrado perfeito menor ou igual a } 16\}$

f) $F = \{d, e, r, v\}$ $F = \{x \mid x \text{ é uma letra que compõe a palavra verde}\}$

6 Analise o diagrama de Venn apresentado.



RONALDO INÁCIO

Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $B \subset A$ verdadeira

b) $A \subset C$ falsa

c) $C \subset D$ falsa

d) $D = B$ falsa

e) $D \not\subset C$ verdadeira

f) $A \neq D$ verdadeira

7 Considere o conjunto D dos divisores positivos de 24. Com relação a esse conjunto, identifique as alternativas que apresentam afirmativas corretas. alternativas a, d e e

a) $2 \in D$

b) $\{4\} \not\subset D$

c) $6 \notin D$

d) $10 \notin D$

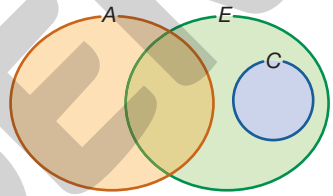
e) $\{1, 4, 24\} \subset D$

f) $D \subset \{2, 16\}$

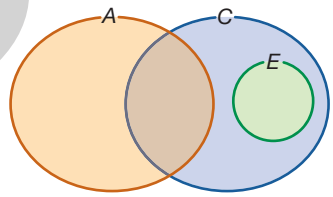
8 Em uma universidade, existem alunos do curso de Administração que também cursam Ciências Contábeis. Além disso, todos os alunos de Economia também cursam Ciências Contábeis, porém, nenhum aluno está matriculado em mais do que dois cursos.

Nomeando por A o conjunto dos alunos de Administração, por C o conjunto dos alunos de Ciências Contábeis e por E o conjunto dos alunos de Economia, qual dos diagramas descreve corretamente as relações entre esses conjuntos? alternativa b

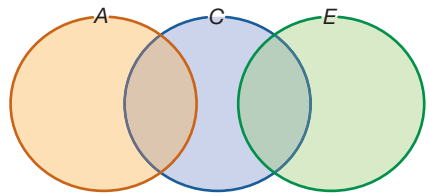
a)



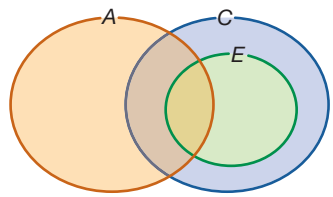
b)



c)



d)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

9 Considere o conjunto:

$Z = \{x \mid x \text{ é positivo, múltiplo de 4 e menor do que } 20\}$

Determine todos os subconjuntos de Z que possuem exatamente três elementos.

$\{4, 8, 12\}$, $\{4, 8, 16\}$, $\{4, 12, 16\}$ e $\{8, 12, 16\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Conjuntos numéricos

Neste tópico, estudaremos alguns dos conjuntos numéricos, os quais serão importantes para estudos posteriores.

Conjunto dos números naturais e inteiros

Os números naturais foram desenvolvidos historicamente em associação ao processo de contagem, o qual foi essencial para que nossos antepassados pudessem acompanhar e contabilizar suas produções e criações, principalmente quando deixaram de ser nômades e passaram a organizar comunidades e criar animais.

Inicialmente a contagem foi estabelecida a partir da correspondência biunívoca, ou associação "um a um", o que permitiu desenvolver os números que, posteriormente, juntamente com o zero formaram o **conjunto dos números naturais** $(\mathbb{N})$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Um importante subconjunto de $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais não nulos.

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Ao realizar subtrações entre os números naturais, há situações em que os elementos desse conjunto não são suficientes para representar os resultados. Por exemplo, a subtração $2 - 5$ resulta em um número que não pertence ao conjunto dos números naturais. Assim, para representar esses números, foi necessário criar outro importante conjunto numérico: o **conjunto dos números inteiros** $(\mathbb{Z})$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Enquanto no conjunto dos números naturais não conseguimos determinar os resultados de operações do tipo $a - b$, em que $a < b$, no conjunto dos números inteiros podemos resolvê-las devido à presença dos números inteiros negativos.

O conjunto dos números naturais é subconjunto do conjunto dos números inteiros, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

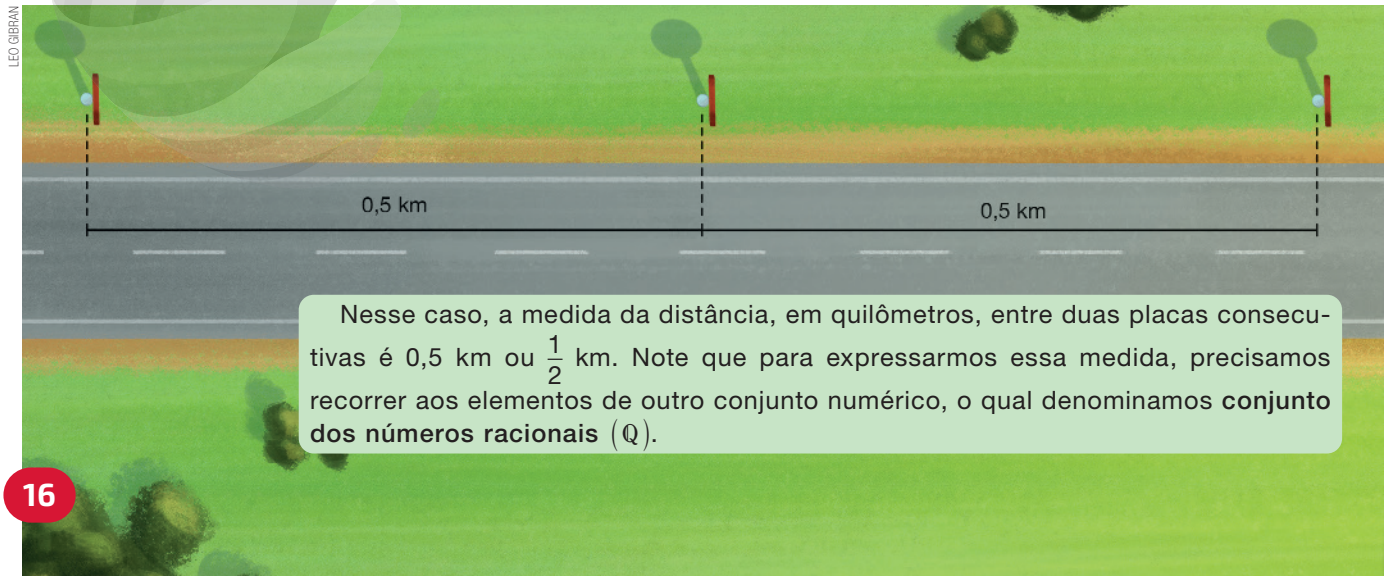
A partir do conjunto dos números inteiros, podemos identificar alguns importantes subconjuntos.

- Conjunto dos números inteiros não nulos: $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- Conjunto dos números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$.
- Conjunto dos números inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -3, -2, -1\}$.

Conjunto dos números racionais

Apesar de o conjunto dos números inteiros ter suprido as dificuldades relativas à operação de subtração, outras necessidades de representação numérica surgiram na resolução de problemas. Considere, por exemplo, que na construção de determinado projeto em um trecho da rodovia, que mede 1 km de comprimento, serão fixadas três placas de sinalização: uma no ponto inicial, uma na metade e outra no final do trecho, mantendo as distâncias constantes.

LEO GIBRAN



Nesse caso, a medida da distância, em quilômetros, entre duas placas consecutivas é 0,5 km ou $\frac{1}{2}$ km. Note que para expressarmos essa medida, precisamos recorrer aos elementos de outro conjunto numérico, o qual denominamos **conjunto dos números racionais** $(\mathbb{Q})$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Os elementos de $\mathbb{Q}$ são os números que podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, em que p e q são números inteiros e $q \neq 0$. Assim:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Alguns exemplos de números racionais são: 0,25; $\frac{2}{3}$; $-0{,}333...$; 0; $-\frac{8}{10}$; $-1{,}75$.

O conjunto dos números naturais e o conjunto dos números inteiros são subconjuntos do conjunto dos números racionais, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Podemos destacar alguns importantes subconjuntos do conjunto dos números racionais: conjunto dos números racionais não nulos $(\mathbb{Q}^*)$, conjunto dos números racionais não negativos $(\mathbb{Q}_+)$, conjunto dos números racionais positivos $(\mathbb{Q}_+^*)$, conjunto dos números racionais não positivos $(\mathbb{Q}_-)$ e conjunto dos números racionais negativos $(\mathbb{Q}_-^*)$.

Um número racional pode ser expresso na forma decimal ou fracionária. Para obter a forma decimal de um número racional expresso na forma fracionária, basta realizar a divisão do numerador da fração pelo denominador. Veja alguns exemplos.

O resultado da divisão ou é um número com representação decimal finita ou é uma dízima periódica. No caso das dízimas periódicas podemos, em sua parte decimal, indicar apenas o algarismo ou grupo de algarismos que se repetem, chamado **período**, com um traço sobrescrito, como uma forma de simplificar sua representação.

- $\frac{2}{5} = 0{,}4$
- $\frac{1}{3} = 0{,}3333... = 0{,}\overline{3}$
- $-\frac{8}{2} = -4$
- $-\frac{75}{4} = -18{,}75$

Agora, vamos obter a forma fracionária de um número racional expresso na forma decimal. Veja dois casos.

- **Caso 1**: número racional com representação decimal finita.
  Seja $x = 3{,}765$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por 1 000, obtemos:

$$1\,000x = 1\,000 \cdot 3{,}765 \Rightarrow 1\,000x = 3\,765 \Rightarrow x = \frac{3\,765}{1\,000} = \frac{735}{200}$$

  Portanto, a forma fracionária do número decimal 3,765 é $\frac{753}{200}$.

- **Caso 2**: dízima periódica. Nesse caso, vamos analisar dois exemplos.

a) $0{,}424242... = 0{,}\overline{42}$

Seja $x = 0{,}\overline{42}$. Assim:

$$100x = 100 \cdot 0{,}\overline{42}$$
$$100x = 42{,}\overline{42}$$
$$100x = 42 + 0{,}\overline{42}$$
$$100x = 42 + x$$
$$99x = 42$$
$$x = \frac{42}{99} = \frac{14}{33}$$

Logo, a forma fracionária é $\frac{14}{33}$.

b) $12{,}9555... = 12{,}9\overline{5}$

Seja $x = 12{,}9\overline{5}$. Desse modo:

$$10x = 12{,}9\overline{5} \cdot 10 \Rightarrow 10x = 129{,}\overline{5} \quad \text{(I)}$$
$$10 \cdot 10x = 129{,}\overline{5} \cdot 10 \Rightarrow 100x = 1\,295{,}\overline{5} \quad \text{(II)}$$

Subtraindo (I) de (II), obtemos:

$$100x - 10x = 1\,295{,}\overline{5} - 129{,}\overline{5}$$
$$90x = 1\,166$$
$$x = \frac{1\,166}{90} = \frac{583}{45}$$

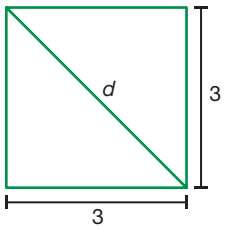
Portanto, a forma fracionária é $\frac{583}{45}$.

A fração que gera a dízima periódica é chamada **fração geratriz**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Conjunto dos números irracionais



Apesar de o desenvolvimento do conjunto dos números racionais estar relacionado às medidas, ao longo da história alguns pensadores identificaram a existência de medidas que não poderiam ser expressas por números racionais. Por exemplo, se tomarmos um quadrado, cujo comprimento do lado mede 3 u.c. (unidade de comprimento), podemos determinar a medida do comprimento de sua diagonal utilizando o Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow d^2 = 18 \Rightarrow d = \sqrt{18} \Rightarrow d = 3\sqrt{2}$$

Note que $d = 3\sqrt{2}$, pois $d > 0$.

A representação decimal do número $3\sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais não periódicas. Esse número não pode ser expresso na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$. Portanto, não é racional.

Os números que não podem ser escritos na forma $\frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, formam o **conjunto dos números irracionais** $(\mathbb{I})$.

Exemplos

$\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ $\quad -2\sqrt{3} = -3{,}46410\ldots$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70710\ldots$

Conjunto dos números reais

O **conjunto dos números reais** $(\mathbb{R})$ é o conjunto cujos elementos são todos os números racionais e todos os números irracionais. Todos os números naturais, inteiros, racionais e irracionais são reais. Nesse caso, temos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \qquad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

Fique atento! O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais não possuem elementos em comum.

Também podemos construir subconjuntos importantes para o conjunto dos números reais: conjunto dos números reais não nulos $(\mathbb{R}^*)$, conjunto dos números reais não negativos $(\mathbb{R}_+)$, conjunto dos números reais positivos $(\mathbb{R}_+^*)$, conjunto dos números reais não positivos $(\mathbb{R}_-)$ e conjunto dos números reais negativos $(\mathbb{R}_-^*)$.

Intervalos

Outro tipo de subconjunto importante de $\mathbb{R}$ são os **intervalos reais**, construídos com base em relações de desigualdades e que podem ser classificados como limitados ou ilimitados.

Sejam os números reais a e b, com $a < b$. Nesse caso, temos os seguintes:

- intervalos limitados.
  - Intervalo fechado: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

  - Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita: $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Na representação geométrica de um intervalo real, utilizamos uma "bolinha vazia" para indicar que o número não pertence ao conjunto e uma "bolinha cheia" para indicar que o número pertence ao conjunto.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

- Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita: $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$

- Intervalo aberto: $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

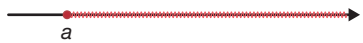
Há outras notações para representar intervalos abertos usando parênteses no lugar de colchetes. Por exemplo:
- $]a, b] = (a, b]$
- $[a, b[= [a, b)$
- $]a, b[= (a, b)$

- intervalos ilimitados.
  - Intervalo ilimitado à esquerda e fechado à direita: $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$

  - Intervalo ilimitado à esquerda e aberto à direita: $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Usamos os símbolos $+\infty$ (lê-se: "mais infinito") e $-\infty$ (lê-se: "menos infinito") para indicar os intervalos ilimitados.

  - Intervalo fechado à esquerda e ilimitado à direita: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$



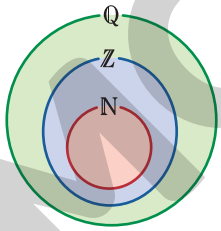
  - Intervalo aberto à esquerda e ilimitado à direita: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

10 Ao representar no diagrama os números indicados no quadro, quais constarão na região:



RONALDO INÁCIO

a) vermelha? 0; 2; 6

b) azul? -1; -3; -7; -11

c) verde? $-10{,}25$; $-\frac{4}{3}$; $0{,}\overline{27}$; $0{,}5$; $8{,}012$

6	0	0,5	-7
-11	$-10{,}25$	-3	$0{,}\overline{27}$
2	-1	$-\frac{4}{3}$	8,012

11 Qual dos números é o maior: $-\frac{3}{7}$ ou $-\frac{4}{5}$? Escreva um número racional, na forma fracionária, e outro, na forma decimal, que estejam entre os números apresentados. $-\frac{3}{7}$. Uma possível resposta: forma fracionária $-\frac{1}{2}$, forma decimal $-0{,}55$.

12 Escreva os números racionais na forma de fração.

a) $0{,}\overline{6}$ $\frac{2}{3}$

b) $0{,}\overline{81}$ $\frac{9}{11}$

c) $1{,}\overline{35}$ $\frac{134}{99}$

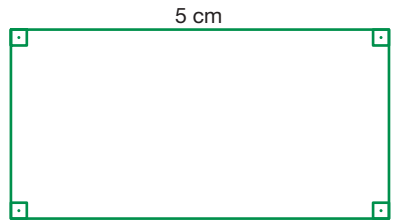
d) $8{,}\overline{3}$ $\frac{25}{3}$

e) $0{,}\overline{125}$ $\frac{125}{999}$

f) $10{,}\overline{36}$ $\frac{114}{11}$

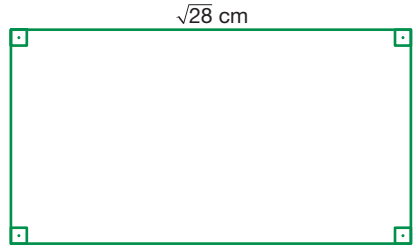
13 Calcule a medida do comprimento da diagonal de cada retângulo e classifique o número que expressa essa medida em racional ou irracional.

a)



$\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm; irracional

b)



6 cm; racional

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

14 O produto entre dois números irracionais será sempre um número irracional? Justifique sua resposta.

14. Não. Espera-se que os alunos justifiquem suas respostas apresentando um contraexemplo, como o produto entre os números irracionais $\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$ que é igual a 4, ou seja, um número racional.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 Números reais no método braille

A inclusão na ponta do dedo

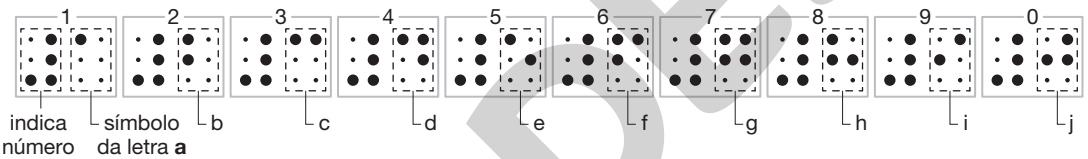
De acordo com o Censo 2010, o Brasil possuía naquele ano cerca de 530 mil pessoas totalmente incapazes de enxergar.

Não poder usufruir da visão pode parecer um grande limitador, porém, na prática, esse obstáculo costuma ser superado pela dedicação, pelo estudo e pelo aprimoramento dos demais sentidos. Com o tato, por exemplo, pessoas podem, utilizando o método braille, ler com agilidade. Esse método foi publicado pela primeira vez em 1829 pelo seu autor, o francês Louis Braille, que ficou cego aos 5 anos de idade e utilizou diferentes métodos de leitura e escrita para que pudesse estudar.

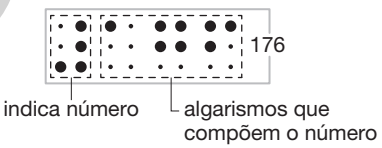
Utilizando células com seis pontos, alguns em alto-relevo, organizados em duas colunas de três pontos cada, esse método permite representar 63 símbolos, entre letras, algarismos e outros caracteres. Para a leitura dos símbolos, é necessário passar a ponta dos dedos sobre eles.

Os algarismos de 1 a 9 são representados por um símbolo especial que indica número, seguido de outro símbolo que também representa as letras de **a** até **i**, respectivamente. O zero é representado pelo símbolo especial, seguido daquele que também representa a letra **j**.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO



Em um número formado por dois ou mais algarismos, apenas o primeiro é precedido pelo símbolo especial. Observe o exemplo.



Convívio social

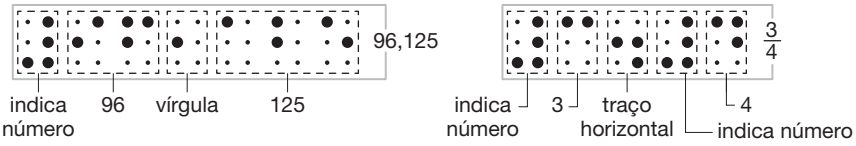
Agir com naturalidade é a receita para o convívio com deficientes visuais. Contudo, algumas ações simples podem ser convenientes, como as indicadas no esquema.

FOTOMONTAGEM DE MARIANA COAN. FOTOS: 1.WICHAI PRASOMSRI1/SHUTTERSTOCK; 2.MACRO VECTOR/SHUTTERSTOCK; 3.PIXEL-SHOT/SHUTTERSTOCK; 4.ONYXPRJ/SHUTTERSTOCK; 5.NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK; 6.HALF POINT/SHUTTERSTOCK; 7.PAITOON PORNSUKSOMBOON/SHUTTERSTOCK; 8.KOSTSOV/SHUTTERSTOCK; 9.LJUPCO SMOKOVSKI/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

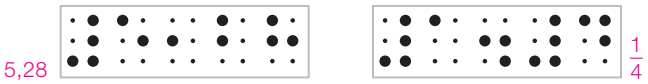
MODERNA

Por meio da utilização de outros símbolos, como os que representam a vírgula e um traço horizontal, podemos escrever números decimais e frações, como nos exemplos abaixo.



Enfim, o método braille permite que as pessoas cegas possam ler, escrever e até mesmo realizar cálculos.

A Quais números estão representados a seguir? A que conjunto numérico esses números pertencem: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{I}$? $\mathbb{Q}$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

B Represente o maior número natural de três algarismos distintos por meio de símbolos do método braille.

A resposta do item **B** representa o número novecentos e oitenta e sete (987).

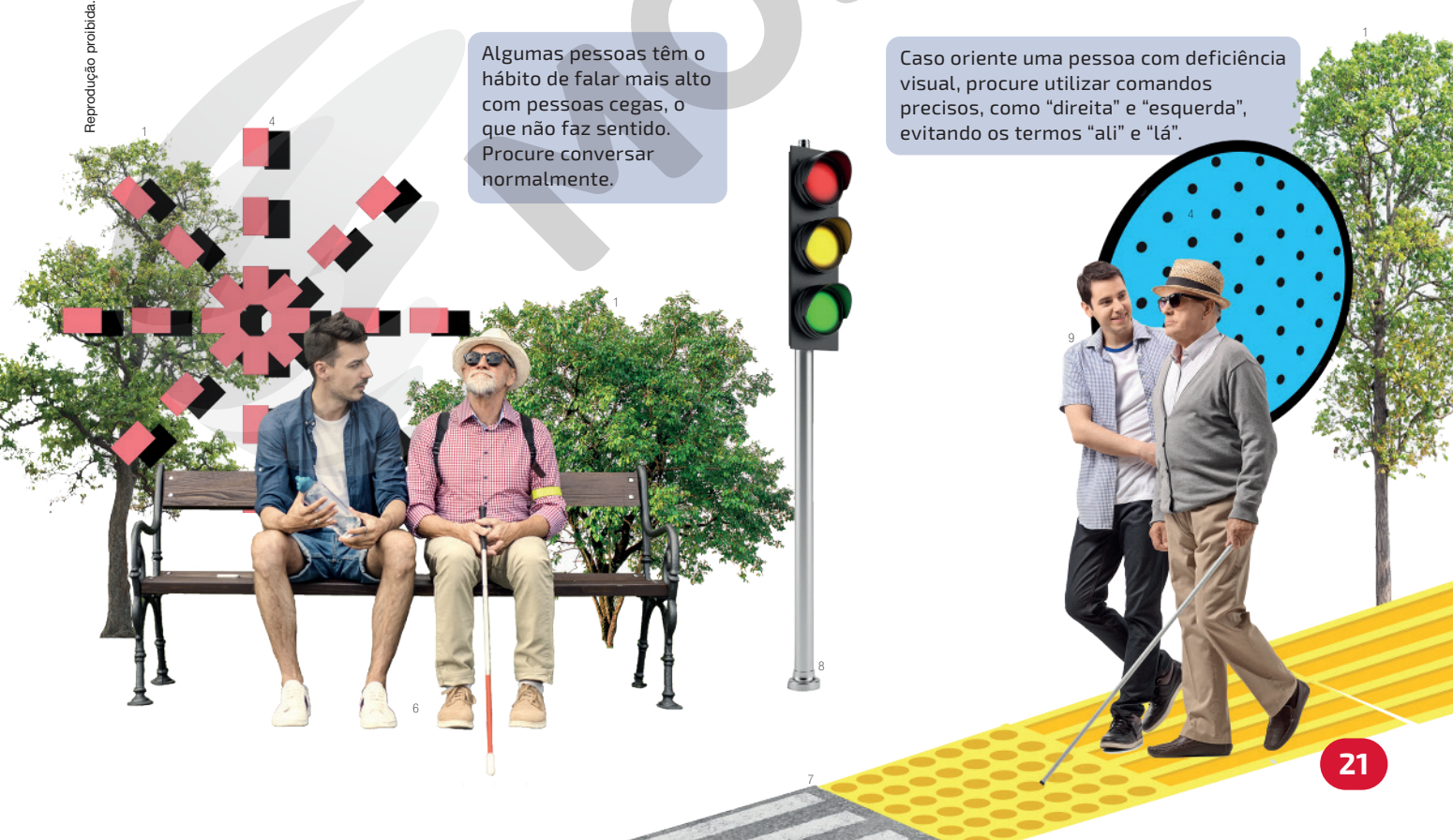
C Utilizando símbolos em braille, represente: Respostas pessoais.

- sua idade;
- sua altura, em metros;
- sua massa, em quilogramas.

Ser consciente

A Você conhece alguma pessoa com deficiência visual? Em caso afirmativo, converse com o professor e os colegas sobre como é seu convívio com ela. Resposta pessoal.

B Diversos produtos, como medicamentos, apresentam em sua embalagem informações em braille. Pesquise e leve para sala de aula algumas dessas embalagens e procure identificar, apenas com o tato, números representados em braille. Ao final, escreva as sensações que teve durante essa experiência. Resposta pessoal.



Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 Noção intuitiva de função

O lixo nosso de cada dia

Quando adquirimos um produto, como um pacote de bolachas, ao consumir esse produto produzimos resíduos sólidos, que no caso seria sua embalagem. A cada produto adquirido temos a produção de algum tipo de resíduo sólido, de modo que, ao aumentar o consumo, teremos cada vez mais resíduos sendo gerados. Desse modo, precisamos adotar uma estratégia de consumo consciente, considerando sempre que toda embalagem que adquirimos terá um impacto na natureza, seja durante a fabricação, seja no descarte.

Considerando apenas os resíduos sólidos urbanos, no ano de 2018 foram produzidos em torno de 79 milhões de toneladas de resíduos. Do total, 91% foram coletados e desses, apenas 59,5% recebeu um destino adequado em aterros sanitários, isto é, 29,5 milhões de toneladas de resíduos foram descartados em locais inadequados, que não contam com sistemas e medidas que permitem proteger a saúde das pessoas e o meio ambiente contra danos e degradações.

Fontes de pesquisa: <http://protegeer.gov.br/rsu/o-que-sao>. Acesso em: 29 jun. 2020. <https://www.mma.gov.br/cidades-sustentaveis/residuos-solidos>. Acesso em: 29 jun. 2020. <https://abrelpe.org.br/panorama/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Quantidade média de lixo produzida por dia/habitante na região Sudeste do Brasil em 2019

Número de pessoas	Quantidade de lixo (em kg)
1	1,23
2	2,46
3	3,69
5	6,15
10	12,3
20	24,6

Fonte de pesquisa: <https://abrelpe.org.br/panorama/>. Acesso em: 29 jun. 2020.

Resíduo sólido: todo material, substância, objeto ou bem descartado resultante de atividades humanas em sociedade, denominado em geral como lixo.

A partir dos dados apresentados na tabela, podemos relacionar o número de pessoas n com a quantidade média q de resíduos produzidos a partir da expressão matemática $q = 1{,}23n$. Desse modo, podemos estimar, por exemplo, a quantidade média de resíduos produzidos em uma cidade com uma determinada quantidade de habitantes.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Na fórmula $q = 1{,}23n$, quais são as variáveis que estão relacionadas?

Quantidade média de resíduos produzidos por dia, em quilogramas e número de pessoas.

B Determine uma estimativa para a quantidade de resíduos produzidos por uma família da região Sudeste, em 2019, composta por quatro pessoas, ao longo de um mês com 30 dias. 147,6 kg.

C Sabendo que um município da região Sudeste em 2019 produz, em média, 6 150 kg de resíduos por dia, estime o número de habitantes dessa cidade. 5 000 habitantes.

Ser consciente

Ser consciente: Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: adotar o consumo consciente, expandir o conhecimento e a prática de tal modo que a população seja conscientizada da importância da coleta seletiva, entre outras medidas.

Em sua opinião, quais medidas podem ser tomadas pelos estados e pela população para melhorar o panorama da coleta e descarte adequado dos resíduos sólidos no Brasil?

Além da produção de resíduos, existem outras situações em nosso dia a dia nas quais podemos identificar grandezas que podem ser relacionadas entre si. Na situação apresentada, identificamos uma associação entre as grandezas "número de pessoas" e "quantidade média de resíduos produzidos por dia", por estarem diretamente relacionadas entre si. Assim como nesse exemplo, em muitas outras situações podemos estudar as relações estabelecidas entre variáveis a partir do conceito de função, que é o assunto das próximas páginas.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.EVAN LORNE/SHUTTERSTOCK; 2.GOTZILA STOCK/SHUTTERSTOCK; 3.STANISLAUV/SHUTTERSTOCK; 4.URSA MAJOR/SHUTTERSTOCK; 5.PHOTKA/SHUTTERSTOCK; 6.JEREMY WHAT/SHUTTERSTOCK; 7.MIMAGEPHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando noção intuitiva de função

Em diversas situações do dia a dia é possível perceber grandezas que, de certa maneira, estão relacionadas. Na página anterior, descrevemos uma relação entre o número de pessoas e a quantidade de lixo produzida na região Sudeste do Brasil em 2019. Outro exemplo ocorre quando abastecemos um veículo, uma vez que as grandezas "quantidade de combustível" e "quantia a pagar" estão diretamente relacionadas.

Muitas dessas relações podem ser descritas por um conceito matemático denominado **função**. Observe exemplos de situações que envolvem esse conceito.

Exemplo 1

O biodiesel é um tipo de biocombustível obtido a partir de gorduras animais e de plantas oleaginosas, como o algodão, o girassol, a mamona e a soja. Entre as vantagens na utilização desse combustível, pode-se destacar a menor emissão de gases poluentes na atmosfera, se comparado ao óleo *diesel* comum, aquele obtido a partir do petróleo.

Fonte de pesquisa: FONTANA, José Domingos. *Biodiesel*: para leitores de 9 a 90 anos. Curitiba: UFPR, 2011.

Observe a relação entre a quantidade de sementes de mamona e a produção de biodiesel.

Quantidade de sementes de mamona (em t)	Quantidade de biodiesel (em ℓ)
1	290
2	580
3	870
4	1 160
...	...
x	$290 \cdot x$

ALF RIBEIRO/SHUTTERSTOCK

Por ser uma planta que pode ser cultivada mesmo em regiões inóspitas, como no semiárido brasileiro, e sua semente apresentar alto teor de óleo, a mamona é uma das oleaginosas utilizadas para a produção de biodiesel.

Note que existe uma relação entre as grandezas "quantidade de sementes de mamona" (x) e "quantidade de biodiesel" (q) produzida. Essa relação é um exemplo de função. Para determinarmos quantos litros de biodiesel são produzidos a partir de certa quantidade de sementes de mamona, podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$q = 290x$$

- q: quantidade de biodiesel (em ℓ)
- 290: quantidade de biodiesel produzida com 1 t de sementes de mamona
- x: quantidade de sementes de mamona (em t)

Podemos calcular, por exemplo, quantos litros de biodiesel são produzidos a partir de 12,5 t de sementes de mamona. Para isso, fazemos:

$$q = 290 \cdot 12{,}5 = 3\,625$$

Portanto, a partir de 12,5 t de sementes de mamona são produzidos 3 625 ℓ de biodiesel.

No exemplo **1**, dizemos que a "quantidade de biodiesel" produzida está em função da "quantidade de sementes de mamona", ou seja, a produção de biodiesel depende da quantidade de sementes de mamona.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

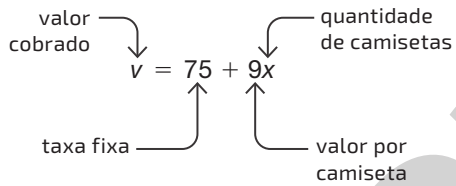
Exemplo 2

Uma estamparia cobra uma taxa fixa, referente ao trabalho de desenvolvimento da estampa padrão, mais um valor por peça de roupa estampada. Para estampar camisetas de certa encomenda, o orçamento calculado estabelecia uma taxa fixa de R$ 75,00 mais R$ 9,00 por camiseta.

Observe:

Quantidade de camisetas	1	2	10	20	50	...	x
Valor cobrado (R$)	$\underbrace{84{,}00}_{75+9}$	$\underbrace{93}_{75+9\cdot 2}$	$\underbrace{165}_{75+9\cdot 10}$	$\underbrace{255}_{75+9\cdot 20}$	$\underbrace{525}_{75+9\cdot 50}$	...	$75+9\cdot x$

A relação entre a quantidade de camisetas e o valor cobrado é descrita por uma função, cuja fórmula é:



Nesse caso, o valor cobrado está expresso em função da quantidade de camisetas. Assim, dizemos que o "valor cobrado" (v) é a **variável dependente** e a "quantidade de camisetas" (x), a **variável independente** da função.

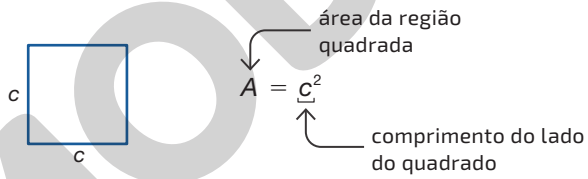
Volte ao exemplo **1** e identifique a variável dependente e a variável independente da função.

variável dependente: quantidade de biodiesel (q); variável independente: quantidade de sementes de mamona (x)

Exemplo 3

Para calcular a medida da área de uma região quadrada, podemos utilizar a fórmula $A = c^2$, em que c indica a medida do comprimento do lado do quadrado que determina a região.

RONALDO NÁOIO



A cada valor que atribuímos ao comprimento do lado do quadrado está associado um valor correspondente à área da região determinada por esse quadrado.

c	$A = c^2$	Área
1 cm	$A = 1^2 = 1$	1 cm²
2 cm	$A = 2^2 = 4$	4 cm²
2,5 cm	$A = 2{,}5^2 = 6{,}25$	6,25 cm²
$\sqrt{10}$ cm	$A = \left(\sqrt{10}\right)^2 = 10$	10 cm²
5 cm	$A = 5^2 = 25$	25 cm²

Nesse caso, a área da região está expressa em função do comprimento do lado do quadrado. Assim, a "área do quadrado" (A) é a variável dependente e o "comprimento do lado do quadrado" (c), a variável independente da função.

A fim de simplificar a escrita:

- não distinguiremos grandezas de suas respectivas medidas. Desse modo, utilizaremos expressões do tipo "o comprimento é 5 cm" quando, na realidade, queremos nos referir à medida do comprimento, que nesse caso é 5 cm.
- vamos dizer, em alguns contextos, "segmento m" quando, na realidade, queremos nos referir à medida do comprimento desse segmento, que nesse caso é m. Por exemplo, em vez de dizer "raio cuja medida do comprimento é r", diremos "raio r".

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 No decorrer do século passado, a população brasileira foi praticamente multiplicada por 10. No ano de 2020, segundo o IBGE, o Brasil possuía mais de 200 milhões de habitantes.

Evolução da população brasileira entre 1900 e 2010

Ano	População (em milhões de habitantes)
1900	17,4
1920	30,6
1940	41,2
1960	71
1970	94,5
1980	121,2
1991	146,9
2000	169,6
2010	190,8

Fonte de pesquisa: <https://censo2010.ibge.gov.br/sinopse/index.php?dados=4&uf=00>. Acesso em: 24 jul. 2020.

RUBENS CHAVES/PULSAR IMAGENS

O Censo 2010 contou com a contratação de mais de 190 mil pessoas, chamadas recenseadores. Na foto podemos observar um recenseador do IBGE na cidade de Itapevi (SP), em 2010.

a) Na tabela, quais as variáveis que se relacionam? ano e população

b) Qual era a população brasileira no ano de 1980? 121,2 milhões de habitantes

2 Elaborando

Junte-se a um colega e escrevam duas situações do dia a dia em que são descritas uma relação entre duas variáveis, como é o caso da seguinte situação.

> O custo de 2 kg de carne e o preço por quilograma de carne.

Em seguida, troquem as situações com outros colegas e peçam a eles que identifiquem, em cada uma delas, quais são as variáveis dependentes e quais são as variáveis independentes.

Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção Exercícios e problemas desse tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

3. a) Variável dependente: quantia depositada (D); variável independente: comissão de vendas mensal recebida por Joana (x).

3 Todos os meses, Joana deposita, em sua conta bancária, uma quantia D, em reais. A quantia D é calculada utilizando a fórmula $D = 0{,}75x + 50$, em que x representa a comissão de vendas mensal recebida por ela.

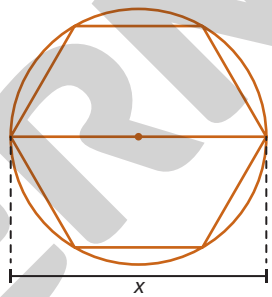
a) Quais são a variável dependente e a variável independente na fórmula descrita?

b) Determine a quantia depositada por Joana em março, sabendo que nesse mês ela recebeu uma comissão de R$ 1 200,00. R$ 950,00

c) Qual deve ser a comissão de Joana para ela depositar R$ R$ 1 250,00? R$ 1 600,00

4 Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência de diâmetro x.

Explique aos alunos que, como o hexágono regular está inscrito na circunferência, então o comprimento do raio dessa circunferência e do lado do hexágono são iguais.



RONALDO INÁCIO

a) Escreva uma fórmula que represente o perímetro P do hexágono em função de x. $P = 6 \cdot \frac{x}{2}$ ou $P = 3x$

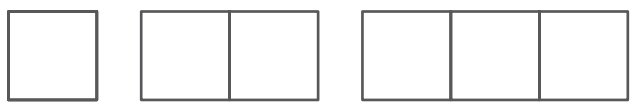
b) A partir da fórmula obtida no item a, calcule o perímetro do hexágono para:

- $x = 2$ m. 6 m
- $x = 12$ m. 36 m

c) Qual deve ser o valor de x para que o perímetro P do hexágono seja:

- 21 m? 7 m
- 10,2 m? 3,4 m

5 (Enem-MEC, 2010) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerantes para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.



RONALDO INÁCIO

Figura I Figura II Figura III

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura? alternativa b

a) $C = 4Q$

b) $C = 3Q + 1$

c) $C = 4Q - 1$

d) $C = Q + 3$

e) $C = 4Q - 2$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O conceito de função

Conforme estudamos nos exemplos apresentados no tópico **Estudando noção intuitiva de função**, a ideia básica de função é a de dois conjuntos não vazios A e B e a relação que associa elementos de A aos elementos de B. Contudo, é preciso associar a cada elemento de A um único elemento de B para ser caracterizada uma "função de A em B".

Sejam os conjuntos A e B não vazios. Uma função f de A em B é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y = f(x) \in B$. Indicaremos essa função por:

$$f: A \to B \text{ (lê-se: função de } A \text{ em } B)$$

O conjunto A chama-se **domínio** $\left(D(f)\right)$ e o B, **contradomínio** $\left(CD(f)\right)$ da função f. Para cada elemento $x \in A$, o elemento $y \in B$ é chamado **imagem** de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in A$. O conjunto formado por todas as imagens é um subconjunto de B, denominado **conjunto imagem** da função f $\left(Im(f)\right)$.

De maneira geral, indicamos uma função por letras minúsculas, como f, g e h.

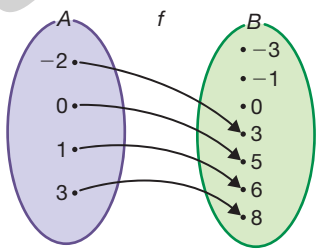
Exemplo

Uma função f de A em B, com $A = \{-2, 0, 1, 3\}$ e $B = \{-3, -1, 0, 3, 5, 6, 8\}$ que associa cada elemento x de A ao elemento $y = x + 5$ em B, pode ser indicada pela fórmula (**lei de formação**) $f(x) = x + 5$ ou $y = x + 5$.

Usando a fórmula $f(x) = x + 5$, podemos determinar a imagem y de cada elemento x de A.

- $f(-2) = -2 + 5 = 3$; a imagem de -2 é 3.
- $f(0) = 0 + 5 = 5$; a imagem de 0 é 5.
- $f(1) = 1 + 5 = 6$; a imagem de 1 é 6.
- $f(3) = 3 + 5 = 8$; a imagem de 3 é 8.

As funções podem ser representadas por uma figura denominada **diagrama de flechas**. No caso da função f de A em B dada por $f(x) = x + 5$, temos o diagrama de flechas apresentado ao lado.



RONALDO INÁCIO

Na função f, temos $D(f) = A$, $CD(f) = B$ e $Im(f) = \{3, 5, 6, 8\}$.

Exercícios e problemas resolvidos

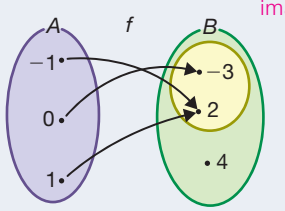
R1 Dada a função f de A em B, com $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{-3, 2, 4\}$, definida por $f(x) = 5x^2 - 3$, determine $Im(f)$ e construa um diagrama de flechas que represente essa função.

Resolução

Temos:

- $f(-1) = 5 \cdot (-1)^2 - 3 = 5 - 3 = 2$
- $f(0) = 5 \cdot 0^2 - 3 = 0 - 3 = -3$
- $f(1) = 5 \cdot 1^2 - 3 = 5 - 3 = 2$

Portanto, $Im(f) = \{-3, 2\}$.



RONALDO INÁCIO

Verifique se os alunos perceberam que, de acordo com a definição, em uma função pode ocorrer de mais de um elemento do domínio ter a mesma imagem no contradomínio.

No diagrama, a parte em amarelo corresponde ao conjunto imagem da função.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

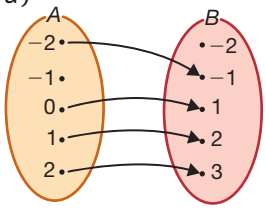
Anote as respostas no caderno.

*Algumas possíveis respostas: vício, pois o cérebro do fumante se adapta e precisa de doses cada vez maiores para manter o mesmo nível de satisfação que tinha no início; causa direta de aproximadamente 50 doenças, como câncer, doenças cardiovasculares e respiratórias.

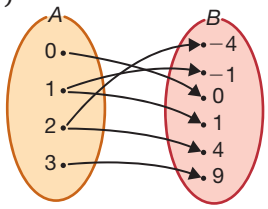
6 Qual diagrama representa uma função de A em B?

alternativa b

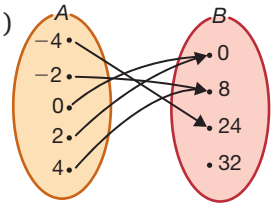
a)



c)



b)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

7 Para que f seja uma função, é necessário apenas que:

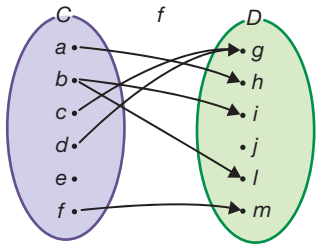
alternativa d

a) exclua-se o elemento e.

b) excluam-se os elementos e e j.

c) exclua-se uma das flechas que partem de b e o elemento j.

d) exclua-se uma das flechas que partem de b e o elemento e.



RONALDO INÁCIO

8 Considere uma função f de A em B em que:

- $D(f) = \{3, 9, 12\}$;
- $CD(f) = \{-3, -1, 0, 5, 10, 15\}$;
- $Im(f) = \{-3, 0, 10\}$;
- $f(3) = -3$;
- $f(9) = 0$;
- $f(12) = 10$.

Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

De acordo com as informações, represente a função f por meio de um diagrama de flechas.

9 Sendo h uma função de $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 5\}$ em $\mathbb{Z}$, determine $Im(h)$ sabendo que h é definida por:

$Im(h) = \{25, 31, 41, 61, 121\}$

a) $h(x) = \frac{120}{x}$.

$Im(h) = \{24, 30, 40, 60, 120\}$

b) $h(x) = \frac{120}{x + 1}$.

$Im(h) = \{20, 24, 30, 40, 60\}$

c) $h(x) = \frac{120}{x} + 1$.

d) $h(x) = \frac{120}{x} - 1$.

$Im(h) = \{23, 29, 39, 59, 119\}$

10 Para deixar seu automóvel em certo estacionamento, Carlos pagará R$ 2,50 por hora.

a) Escreva a lei de formação da função que expressa o preço p pago por Carlos ao deixar seu automóvel nesse estacionamento durante t horas. $p(t) = 2{,}5 \cdot t$

b) Quantos reais Carlos pagará se deixar seu automóvel por 3 horas nesse estacionamento?

R$ 7,50

11 No mundo, de acordo com a Organização Mundial de Saúde (OMS), morrem por hora cerca de 680 pessoas vítimas de doenças relacionadas ao tabagismo.

Fonte de pesquisa: <https://www.paho.org/bra/index.php?option=com_content&view=article&id=5641:folha-informativa-tabaco&Itemid=1097>. Acesso em: 24 jul. 2020.

a) Escreva a lei de formação de uma função que expresse o número p de pessoas mortas por doenças relacionadas ao tabagismo em função do tempo t, em horas. $p(t) = 680t$

b) A partir da lei de formação que você escreveu no item a, calcule e explique o que representa $p(24)$.

Resposta no final do livro.

Ser consciente

Junte-se a um colega e pesquisem sobre os malefícios causados pelo uso do tabaco. Depois, conversem com os colegas e professor sobre as informações obtidas. *

12 Suponha, por exemplo, que entre os anos de 2010 e 2020 a população de um município pudesse ser estimada por meio da função $p: \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } 2010 \leq x \leq 2020\} \to \mathbb{R}$ definida por $p(t) = 2{,}3t - 4\,500$, na qual p representa a quantidade de indivíduos que compõem a população, em milhares de habitantes, no ano t.

a) Determine a população estimada desse município em 2013 e em 2019.

2013: 129 900 habitantes; 2019: 143 700 habitantes

b) É adequado estimar a população desse município em 1950 por meio da fórmula apresentada? Por quê?

13 (Enem, 2020) Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

a) $L(x) = 50x - 1\,200$

b) $L(x) = 50x - 12\,000$

c) $L(x) = 50x + 12\,000$

d) $L(x) = 500x - 1\,200$

e) $L(x) = 1\,200x - 500$

alternativa b

12. b) Espera-se que os alunos digam que não, pois a fórmula apresentada é para estimativas da população no período entre os anos de 2010 e 2020. Caso a utilizássemos para 1950, a população estimada seria −15 000 habitantes, o que não faz sentido.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Em situações contextualizadas, é importante analisar as variáveis envolvidas. Por exemplo, na lei de formação $f(x) = 4x$ que relaciona o perímetro de um quadrado em função do comprimento de seus lados, não faz sentido considerar números negativos no domínio.

Estudo do domínio de uma função

Estudamos que uma função f de A em B apresenta um domínio (A) e um contradomínio (B). Na função f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$, definida por $f(x) = 2x - 10$, por exemplo, o domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o contradomínio é o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, ou seja, $D(f) = \mathbb{N}$ e $CD(f) = \mathbb{Z}$.

Porém, em algumas situações, o domínio e o contradomínio de uma função não estão explícitos, sendo apresentada apenas a lei de formação. Nesses casos, consideramos que o domínio seja o subconjunto mais amplo possível dos números reais $(D \subset \mathbb{R})$ para o qual a lei de formação faz sentido, e o contradomínio, o próprio conjunto dos números reais $(CD = \mathbb{R})$.

Exemplo

- Na função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, como não existe raiz quadrada de números negativos no conjunto dos números reais, consideramos que o domínio seja o conjunto dos números reais não negativos $\mathbb{R}_+$.

$$D(f) = \mathbb{R}_+ \text{ ou } D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$$

- Na função h definida por $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, o domínio da função é dado pelo conjunto dos números reais positivos, pois não está definido em $\mathbb{R}$ frações com denominador zero e raiz quadrada de números negativos.

$$D(h) = \mathbb{R}_+^* \text{ ou } D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

Para realizar o estudo do domínio de uma função, será necessário, em algumas situações, conhecermos a **união** e a **interseção** de conjuntos, que são operações envolvendo conjuntos.

Dados os conjuntos A e B, chamamos **união** de A e B, que indicamos por $A \cup B$, o conjunto formado pelos objetos que são elementos de A ou de B, ou seja:

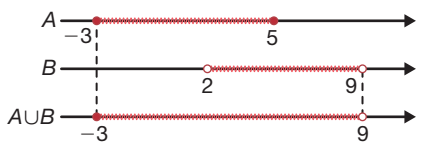
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Dados os conjuntos A e B, chamamos **interseção** de A e B, que indicamos por $A \cap B$, o conjunto formado pelos objetos que são elementos de A e de B simultaneamente, ou seja:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

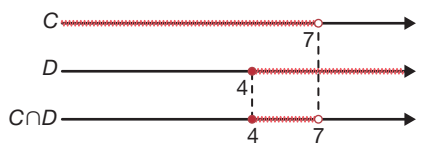
Exemplos

- Se $X = \{1, 2, 4, 7\}$ e $Y = \{3, 5, 6\}$, então $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- Se $P = \{0, 2, 4, 6\}$ e $Q = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então $P \cap Q = \{2, 4\}$.
- Seja $A = [-3, 5]$ e $B =]2, 9[$.



Portanto, $A \cup B = [-3, 9[$ ou $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x < 9\}$.

- Seja $C =]-\infty, 7[$ e $D = [4, +\infty[$.



Portanto, $C \cap D = [4, 7[$ ou $C \cap D = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \leqslant x < 7\}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas resolvidos

R2 Determine o domínio da função f definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$.

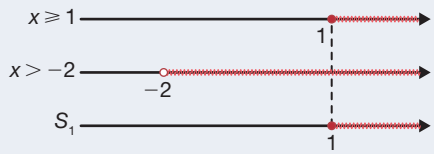
Resolução

Para a condição $\frac{x-1}{x+2} \geqslant 0$, temos duas possibilidades.

- Numerador não negativo e denominador positivo:

$$x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1$$
$$x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2$$

Como as duas inequações devem ser satisfeitas simultaneamente, realizamos a interseção das condições:

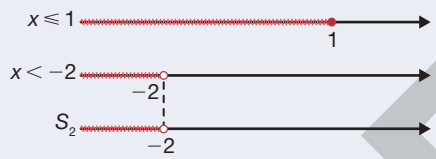


Logo, $x \geqslant 1$.

- Numerador não positivo e denominador negativo:

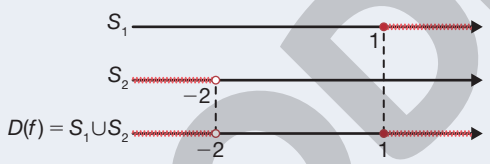
$$x - 1 \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 1$$
$$x + 2 < 0 \Rightarrow x < -2$$

Como as duas inequações devem ser satisfeitas simultaneamente, realizamos a interseção das condições:



Logo, $x < -2$.

O domínio da função é dado pela união das duas soluções.



Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant 1\}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

14 Determine o domínio da função cuja lei de formação é: Respostas no final do livro.

a) $f(x) = \frac{x+1}{2}$.

b) $f(x) = \frac{2}{x+1}$.

c) $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{x-7}$.

d) $f(x) = \sqrt{12 - x}$.

e) $f(x) = \frac{20 - x}{\sqrt{4 - x}}$.

f) $f(x) = \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{3x - 6}}$.

15 O domínio da função f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{-4x-16}}$ é: alternativa b

a) $]-4, 8]$

b) $[-8, -4[$

c) $]-8, -4]$

d) $[-8, -4]$

e) $\mathbb{R}$

16 A professora Marta solicitou aos alunos que determinassem o domínio da função f, definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x-6}{x+2}}$.

Veja a resposta de Aroldo.

16. a) O domínio não está correto. Resposta pessoal. Os alunos podem responder, por exemplo, que Aroldo considerou apenas um dos possíveis casos para que $\frac{x-6}{x+2} \geqslant 0$, nesse caso, quando $x - 6 \geqslant 0$ e $x + 2 > 0$.

> O domínio da função f definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x-6}{x+2}}$ é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 6\}$.

a) O domínio obtido por Aroldo está correto? Em caso negativo, cite um possível erro cometido por ele.

b) Qual é o domínio da função f?
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geqslant 6\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

4 Gráfico de uma função

BNCC
- EM13MAT101
- EM13MAT404

O homem mais rápido do mundo

O Atletismo consiste em uma das práticas esportivas mais antigas por envolver atividades naturais para o homem: corrida, lançamentos e saltos. Dentre as principais modalidades, podemos destacar a corrida dos 100 metros rasos, que consiste em uma prova de velocidade, com uma duração média de 10 segundos, sendo a mais curta dentre as distâncias disputadas em eventos realizados ao ar livre.

Na prova dos 100 metros rasos, o atleta que mais se destacou nos últimos anos foi o jamaicano Usain St. Leo Bolt (1986-), chamado "homem mais rápido do mundo" devido às grandes marcas atingidas por ele nas mais diversas competições. O primeiro recorde mundial atingido por Usain Bolt nessa prova ocorreu em 2008, quando ele percorreu os 100 metros em um tempo de 9,72 segundos em uma competição em Nova York. Esse tempo foi reduzido por ele mesmo, ainda em 2008, na prova de 100 metros dos Jogos Olímpicos que ocorreram poucos meses depois, em Pequim. Mas o tempo mais surpreendente foi obtido em 2009, em Berlim, quando Bolt alcançou a incrível marca de 9,58 segundos.

Apesar de ter sido um dos melhores atletas de sua geração, obtendo marcas históricas, Bolt aposentou-se em 2017 após competir no Mundial de Atletismo desse mesmo ano, em Londres.

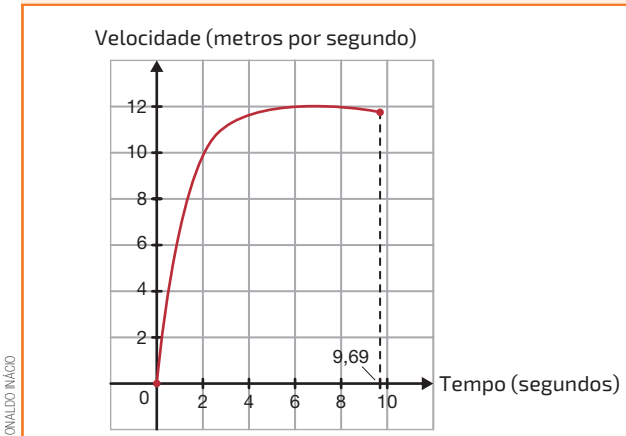
FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI.
FOTOS: 1.PETR TOMAN/SHUTTERSTOCK; 2.AVECTOR/SHUTTERSTOCK; 3.P-FOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK; 4.MALOSEE DOLO/SHUTTERSTOCK; 5.RAIDZTOR/SHUTTERSTOCK; 6.FLAS100/SHUTTERSTOCK

Fonte de pesquisa: <http://usainbolt.com/bio/>. Acesso em: 30 jun. 2020.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Veja a seguir um gráfico que ilustra as velocidades atingidas por Usain Bolt durante a prova de 100 metros rasos, realizada nos Jogos Olímpicos de Pequim em 2008, a qual ele finalizou em apenas 9,69 segundos.

Velocidade atingida por Usain Bolt, em função do tempo, durante a prova dos 100 metros rasos, nos Jogos Olímpicos de Pequim, em 2008



RONALDO INÁCIO

Fonte de pesquisa: YAMASHITA, M. T. Uma breve análise da física da corrida de 100 metros rasos. *Revista da Biologia*. São Paulo: USP, v.11(1), p. 8-11, jan. 2014.

Nos Jogos Olímpicos de Verão Pequim 2008, o atleta Usain Bolt tornou-se um dos maiores velocistas da história ao conquistar três medalhas de ouro e quebrar três recordes mundiais.

No gráfico apresentado são relacionados os valores da velocidade atingida pelo atleta em função do tempo durante a prova. Observe que se fosse conhecida apenas a lei de formação dessa função, para realizar um estudo a respeito do seu comportamento no sentido de verificar, por exemplo, se os valores da velocidade estão crescendo ou decrescendo em relação ao tempo, precisaríamos calcular os valores da variável dependente *y*, a velocidade, para uma série de valores assumidos pela variável independente *x*, o tempo. Porém, com a análise do gráfico podemos obter diversas informações: o domínio da função varia de 0 a 9,69 segundos, o contradomínio consiste no intervalo de 0 a 12 metros por segundo (m/s), aproximadamente, e a curva é mais acentuada no intervalo de 0 a 4 segundos representando um aumento mais intenso na velocidade do atleta nesse intervalo.

Uma informação interessante que também pode ser constatada no gráfico pela queda da velocidade próximo ao final da prova, é que Bolt desacelerou, relaxou os braços, bateu no peito e comemorou antes mesmo de cruzar a linha de chegada. Alguns espectadores disseram que ele "tirou onda" com os adversários, mas, em entrevista, Bolt disse que estava apenas demonstrando sua felicidade.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Faça uma pesquisa a respeito de outros recordes para provas de 100 metros rasos obtidos em outras competições, para atletas do gênero masculino e feminino. Em seguida, compartilhe as informações com os colegas e o professor.

Resposta pessoal.

B Analisando o gráfico apresentado, como você descreveria a velocidade do atleta ao longo da prova de 100 metros rasos?

C Em qual intervalo de tempo a velocidade adotada pelo atleta é aproximadamente constante? de 6 a 8 segundos

Os gráficos têm importância fundamental no estudo de funções, pois como vimos na situação anterior, por meio dos gráficos podemos obter diversas informações sobre o comportamento da função. O estudo dos **gráficos de uma função** e domínios, contradomínios, crescimentos e decrescimentos, bem como de taxas de variação, entre outras propriedades, corresponde aos assuntos que estudaremos nas próximas páginas.

B) Resposta pessoal. Uma possível resposta: no início da prova, no intervalo de 0 a 3 segundos, o atleta aumenta rapidamente sua velocidade até atingir por volta de 11 m/s; em seguida, de 3 a 6 segundos, ele segue aumentando sua velocidade, com menor intensidade, até atingir aproximadamente 12 m/s; seguindo com velocidade praticamente constante até 8 segundos e reduzindo um pouco sua velocidade até finalizar a prova, Usain Bolt conclui a prova em um tempo de 9,69 segundos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Estudando gráfico de uma função

Ao lermos uma revista ou um jornal, assistirmos ao noticiário na televisão ou até mesmo acessarmos um *site*, é possível observar diversos tipos de gráficos. Em geral, esses gráficos são utilizados para facilitar a exposição e compreensão de informações, e muitos deles representam funções.

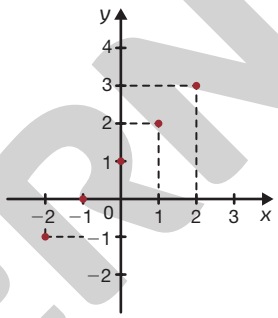
O gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y), com $x \in D(f)$ e $y = f(x)$.

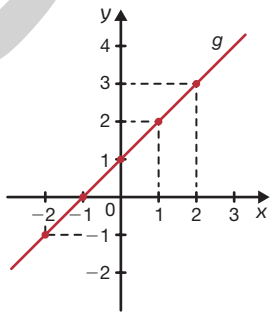
Exemplo 1

Seja a função g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 1$.

Para esboçar o gráfico de g, obtemos inicialmente pares ordenados (x, y) para valores arbitrários de x, e os representamos em um plano cartesiano.

x	$g(x) = x + 1$	(x, y)
-2	$g(-2) = -2 + 1 = -1$	$(-2, -1)$
-1	$g(-1) = -1 + 1 = 0$	$(-1, 0)$
0	$g(0) = 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
1	$g(1) = 1 + 1 = 2$	$(1, 2)$
2	$g(2) = 2 + 1 = 3$	$(2, 3)$





Temos que $D(g) = \mathbb{R}$, ou seja, podemos atribuir infinitos valores para x obtendo, para cada um deles, um único valor de y. Dessa maneira, no gráfico de g existem infinitos pontos entre os indicados no plano cartesiano anterior. Os pontos marcados sugerem que o gráfico de g é uma reta.

A função definida por $g(x) = x + 1$ é um exemplo de função afim, cujo gráfico é uma reta. Estudaremos em mais detalhes esse tipo de função no tema **5** deste livro.

Exemplo 2

Seja a função p de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $p(x) = \begin{cases} 1 - x, \text{ se } x < 1 \\ x^2, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$.

A função p é definida por duas sentenças, uma para $x < 1$ e outra para $x \geqslant 1$.

$x < 1$		
x	$p(x) = 1 - x$	(x, y)
-2	$p(-2) = 1 - (-2) = 3$	$(-2, 3)$
-1	$p(-1) = 1 - (-1) = 2$	$(-1, 2)$
0	$p(0) = 1 - 0 = 1$	$(0, 1)$
$\frac{1}{2}$	$p\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$x \geqslant 1$		
x	$p(x) = x^2$	(x, y)
1	$p(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
$\frac{3}{2}$	$p\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$
2	$p(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$
$\frac{5}{2}$	$p\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

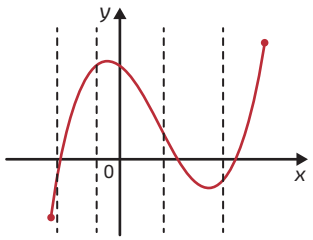
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

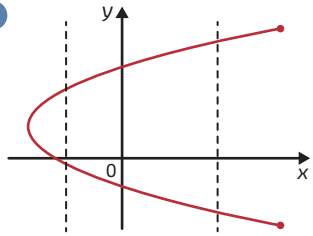
Análise do gráfico de uma função

Estudamos anteriormente que, dados os conjuntos C e D não vazios, uma função f de C em D é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in C$ um único elemento $y = f(x) \in D$. Agora, vamos analisar se certo gráfico representa uma função. Observe os gráficos a seguir.

A



B

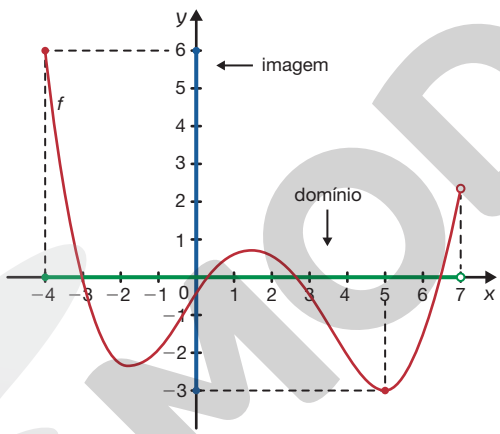


No gráfico **A**, qualquer que seja a reta traçada paralelamente ao eixo y, cortará o gráfico em um único ponto, ou seja, toda abscissa x está associada a uma ordenada y e não há abscissa x associada a mais de uma ordenada y. Dizemos então que o gráfico **A** corresponde a uma função.

Já no gráfico **B**, note que podem ser traçadas retas paralelas ao eixo y cortando o gráfico em dois pontos distintos, ou seja, existe pelo menos uma abscissa x associada a mais de uma ordenada y. Nesse caso, dizemos que o gráfico não corresponde a uma função.

Analisando o gráfico de uma função, podemos, em alguns casos, determinar o domínio e a imagem dessa função.

Para determinarmos o domínio e a imagem da função f, representada pelo gráfico a seguir, por exemplo, projetamos esse gráfico nos eixos x e y.



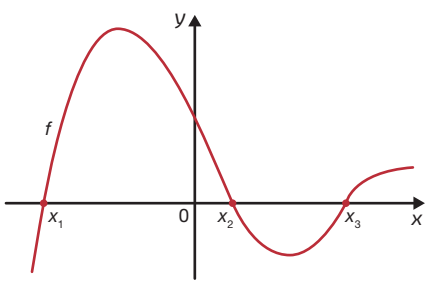
A projeção do gráfico no eixo x corresponde ao domínio de f, e a projeção no eixo y, à imagem de f. Nesse caso:

- $D(f) = [-4, 7[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -4 \leq x < 7\}$
- $Im(f) = [-3, 6]$ ou $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} | -3 \leq y \leq 6\}$.

Zero de uma função

Em uma função f, o valor $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$, é denominado **zero** da função. Graficamente, os zeros da função correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico cruza o eixo x.

Na função f, cujo gráfico está representado ao lado, temos $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Logo, x_1, x_2 e x_3 são zeros da função.



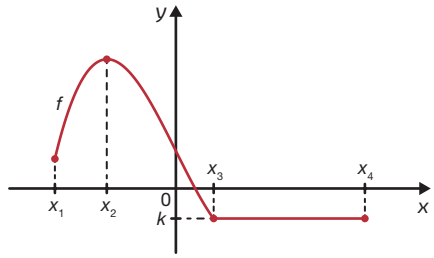
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Funções crescente, decrescente e constante

Considere o gráfico da função *f*.



Analisando esse gráfico, é possível observar que:

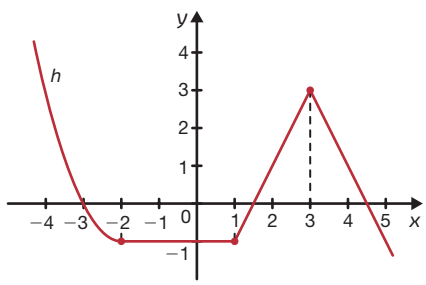
- para $x \in [x_1, x_2]$, quando aumentamos o valor de x, o valor de $f(x)$ também aumenta. Nesse caso, dizemos que essa função é **crescente** em $[x_1, x_2]$.
- para $x \in [x_2, x_3]$, quando aumentamos o valor de x, o valor de $f(x)$ diminui. Nesse caso, dizemos que a função é **decrescente** em $[x_2, x_3]$.
- para qualquer $x \in [x_3, x_4]$, temos $f(x) = k$, sendo k uma constante real. Nesse caso, dizemos que a função é **constante** no intervalo $[x_3, x_4]$.

Dizemos que uma função *f* é:

- **decrescente** em um intervalo contido no domínio de *f* se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_2 > x_1$, temos $f(x_2) < f(x_1)$;
- **crescente** em um intervalo contido no domínio de *f* se, para todo x_1 e x_2 pertencentes a esse intervalo, com $x_2 > x_1$, temos $f(x_2) > f(x_1)$;
- **constante** em um intervalo contido no domínio se, para todo x pertencente a esse intervalo, $f(x) = k$, sendo k uma constante real.

Exemplo 1

Considere a função *h* cujo gráfico está apresentado a seguir.



Analisando esse gráfico, concluímos que *h* é:

- crescente no intervalo $[1, 3]$.
- decrescente nos intervalos $]-\infty, -2]$ e $[3, +\infty[$.
- constante no intervalo $[-2, 1]$.

Note que $f(x) = -1$ para todo $x \in [-2, 1]$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Gráfico e zero de uma função

Nesta seção, vamos construir, com o auxílio do *software* de Geometria dinâmica GeoGebra, o gráfico das seguintes funções.

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x^2 - 3x - 4$.
- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \begin{cases} 0{,}5x^2 - 2, \text{ se } x < 0 \\ 2x - 2, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ 4, \text{ se } x > 3 \end{cases}$.

Veja mais informações sobre o *software* GeoGebra no Suplemento para o professor.

Por fim, determinaremos, caso possuam, os zeros dessas funções.

A Para construir o gráfico da função f, no campo **Entrada**, digite $f(x) = x\text{^}2 - 3x - 4$ e pressione a tecla **Enter**.

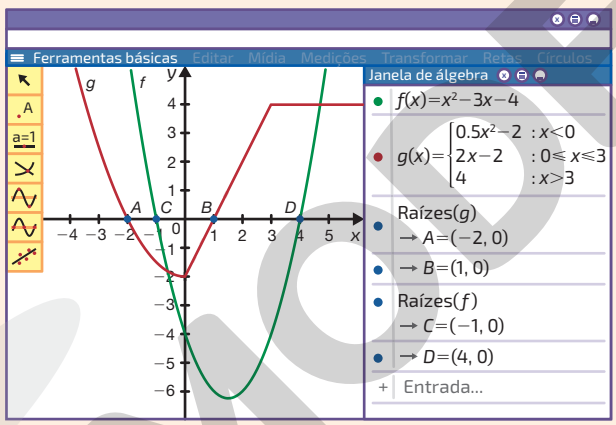
B Para construir o gráfico da função g, digite, no campo **Entrada**:

$$g(x) = \text{Se}\left(x < 0, 0.5x\text{^}2 - 2, \text{Se}\left(0 <= x <= 3, 2x - 2, \text{Se}\left(x > 3{,}4\right)\right)\right)$$

Na sequência, pressione a tecla **Enter**.

C Marque os pontos de interseção entre os gráficos e o eixo x. Para isso, selecione a ferramenta **Raízes** e clique sobre cada um dos gráficos construídos.

Caso não haja interseção entre o gráfico da função e o eixo x, ao executar a etapa **C**, o programa exibirá a mensagem "indefinido".



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

A função f é um exemplo de função quadrática cujo gráfico é uma curva denominada parábola. Estudaremos com mais detalhes esse tipo de função no tema 9.

Os zeros da função f são $x = -1$ e $x = 4$ e os da função g, $x = -2$ e $x = 1$.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Esboce o gráfico das funções cujas leis de formação estão apresentadas a seguir.

a) $f(x) = 3x + 1$

b) $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2$

c) $h(x) = \begin{cases} -3x + 5, \text{ se } x \leqslant 1 \\ 2, \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \\ -\frac{1}{3}x^2 + 5, \text{ se } x > 3 \end{cases}$

Nesse programa, utiliza-se o símbolo / para indicar o traço fracionário. Para compor $\frac{1}{3}$, por exemplo, digita-se 1/3.

2 Determine, caso possuam, os zeros das funções cujos gráficos você esboçou na tarefa **1**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construa o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por: Respostas na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

a) $f(x) = x - 3$.

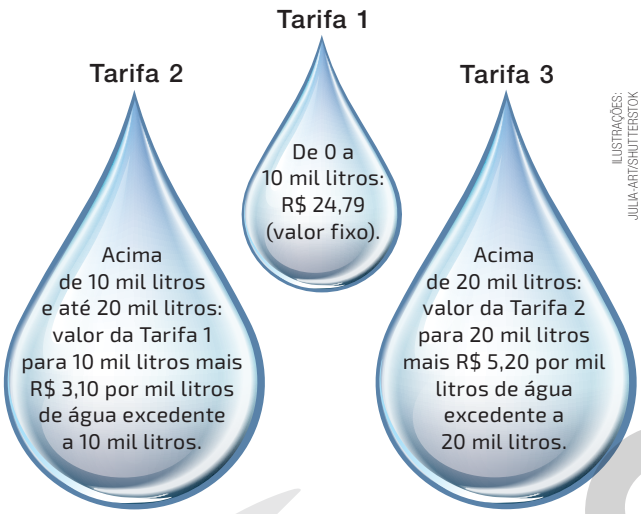
b) $f(x) = -2x + 5$.

c) $f(x) = -5x$.

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x < 1 \\ -2x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$.

e) $f(x) = \frac{x^2}{4}$.

2 Para saber como é calculado o valor da fatura de água, Armando fez uma pesquisa no site da companhia de saneamento básico da cidade onde mora. Veja as informações obtidas por ele.



ILUSTRAÇÕES: JULIA-ART/SHUTTERSTOK

De acordo com as informações obtidas, Armando escreveu a lei de formação de uma função que possibilita calcular o valor da fatura f de acordo com o consumo c, em mil litros.

$$f(c) = \begin{cases} 24{,}79 \text{ se } 0 \leqslant c \leqslant 10 \\ 24{,}79 + 3{,}10(c - 10) \text{ se } 10 < c \leqslant 20 \\ 55{,}79 + 5{,}20(c - 20) \text{ se } c > 20 \end{cases}$$

a) Determine, na cidade onde Armando mora, o valor pago pela fatura de água caso uma pessoa consuma:

- 12 mil litros de água. R$ 30,99
- 27,3 mil litros de água. R$ 93,75

b) Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construa o gráfico da função cuja lei de formação foi escrita por Armando.

Respostas na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

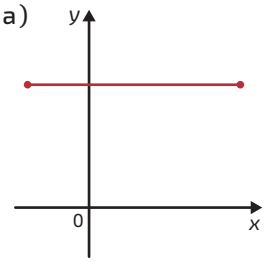
Ser consciente

Junte-se a um colega e escrevam algumas atitudes que evitam o desperdício de água potável.

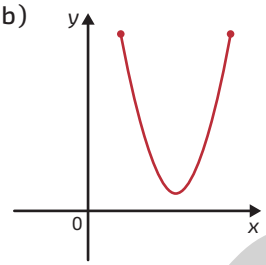
Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: não deixar a torneira pingando; evitar banhos demorados; fechar a torneira enquanto escova os dentes.

3 Determine quais gráficos representam funções do tipo $f(x) = y$. alternativas a, b, e, f

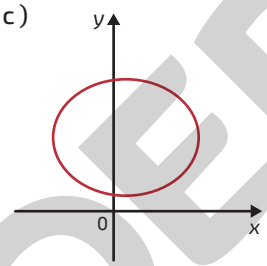
a)



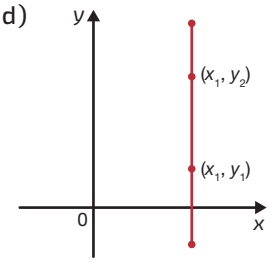
b)



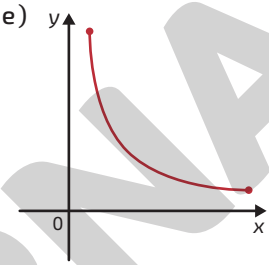
c)



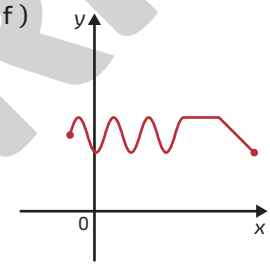
d)



e)



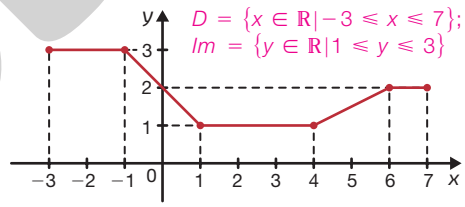
f)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

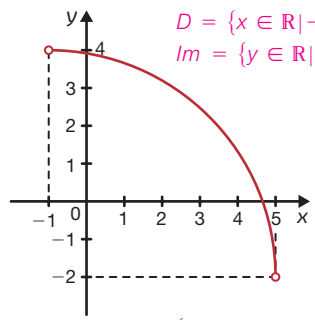
4 Determine o domínio e a imagem das funções cujos gráficos estão apresentados.

a)



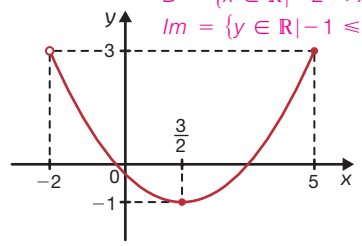
$D = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leqslant x \leqslant 7\}$;
$Im = \{y \in \mathbb{R} | 1 \leqslant y \leqslant 3\}$

b)



$D = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 5\}$;
$Im = \{y \in \mathbb{R} | -2 < y < 4\}$

c)



$D = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \leqslant 5\}$;
$Im = \{y \in \mathbb{R} | -1 \leqslant y \leqslant 3\}$

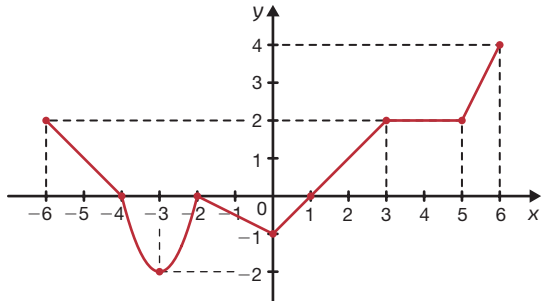
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5 Considere as funções f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e g de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 3x + 2$. Esboce os gráficos de f e de g em planos cartesianos distintos. Em seguida, escreva qual é a diferença entre esses gráficos. Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

6 Observe o gráfico da função f.



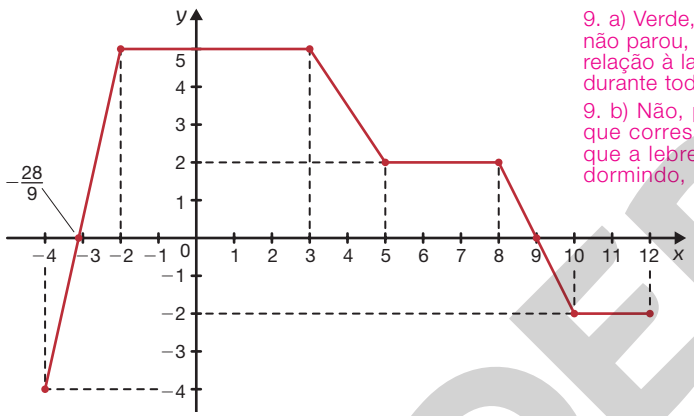
RONALDO INÁCIO

a) Qual é o valor de $f(4)$? $f(4) = 2$

b) Quais são os zeros da função f? $x = -4$, $x = -2$ e $x = 1$

c) Determine o domínio e a imagem de f.
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leq x \leq 6\}$;
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 4\}$

7 Observe o gráfico da função f.



RONALDO INÁCIO

a) Qual é o domínio e o conjunto imagem de f? $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 12\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leq y \leq 5\}$

b) Determine os intervalos em que a função f é:
- decrescente. $[3, 5]$ e $[8, 10]$
- crescente. $[-4, -2]$
- constante. $[-2, 3]$, $[5, 8]$ e $[10, 12]$

c) Quais são os zeros dessa função? $-\frac{28}{9}$ e 9

9. a) Verde, pois, como a tartaruga não parou, sua distância em relação à largada foi crescente durante todo o tempo da corrida.

9. b) Não, pois em certo intervalo, que corresponde ao período em que a lebre permaneceu dormindo, a função é constante.

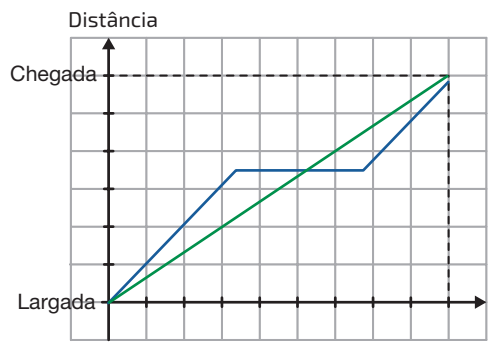
8 Uma indústria calcula, em horas, o tempo para a entrega de seus pedidos, utilizando a função t definida por $t(x) = 42 + 0{,}2x$, em que $t(x)$ indica o tempo para a entrega e x a quantidade de peças encomendadas.

a) Qual é o tempo de entrega de uma encomenda de 20 peças? E de 30 peças? 46 h; 48 h

b) Classifique essa função como crescente, decrescente ou constante. Justifique sua resposta.
Crescente, pois quanto maior for a quantidade de peças encomendadas, maior será o tempo para a entrega.

9 A lebre e a tartaruga é uma famosa fábula desses dois animais que disputam uma corrida. Na largada, a lebre, que se achava muito veloz, disparou na frente, enquanto a tartaruga seguia constante e lentamente. A lebre, em determinado momento, ficou tão distante da tartaruga que resolveu descansar um pouco e dormiu. Enquanto isso, a tartaruga vagarosamente passou pela lebre e continuou seu caminho, sem descansar um só minuto. Quando a lebre se deu conta, correu em direção à chegada.

Observe o gráfico que representa essa corrida.



RONALDO INÁCIO

a) No gráfico, em que cor está indicado o deslocamento da tartaruga? Justifique sua resposta.

b) A função correspondente ao deslocamento da lebre é crescente em todo domínio? Por quê?

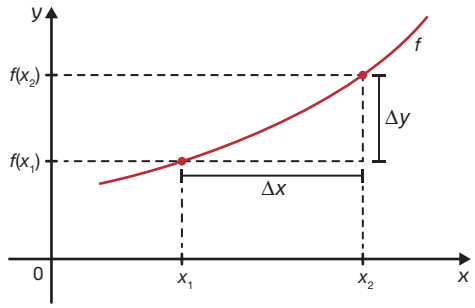
c) De acordo com o gráfico, quem ganhou a corrida? Que moral você supõe que o autor quis transmitir com essa fábula?
tartaruga; Algumas possíveis respostas: quem segue devagar e com constância pode chegar à frente; paciência pode valer mais do que a pressa; nem sempre os mais velozes chegam em primeiro lugar.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Taxa de variação média

Considere a função f, cujo gráfico está representado a seguir.



Se x varia de x_1 para x_2, então a variação de x é:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

A variação correspondente de y é:

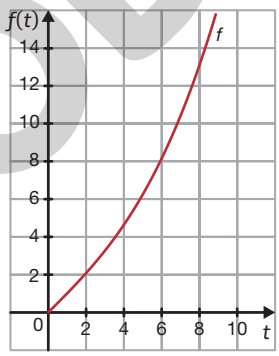
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

A **taxa de variação média** de uma função f em relação a x, no intervalo $[x_1, x_2]$, é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Exemplo

A posição de certo objeto é descrita pela função f dada por $f(t) = 0{,}01t^3 + t$, com $t \geqslant 0$, em que $f(t)$ é o deslocamento do objeto, em metros, a partir da origem no instante t, com t medido em segundos.



Neste exemplo, a taxa de variação média da função f, em relação a t, representa a **velocidade média** do objeto. Considerando o intervalo:

- $[0, 1]$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1{,}01 - 0}{1} = 1{,}01$$

- $[5, 8]$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{f(8) - f(5)}{8 - 5} = \frac{13{,}12 - 6{,}25}{3} = 2{,}29$$

Portanto, no intervalo $[0, 1]$ a velocidade média do objeto é 1,01 m/s e no intervalo $[5, 8]$, é 2,29 m/s.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

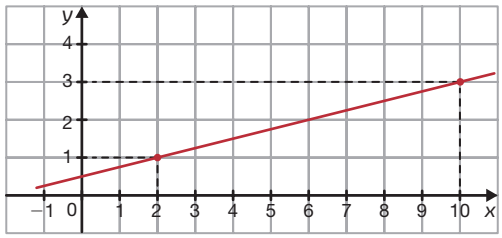
MODERNA

Exercícios e problemas

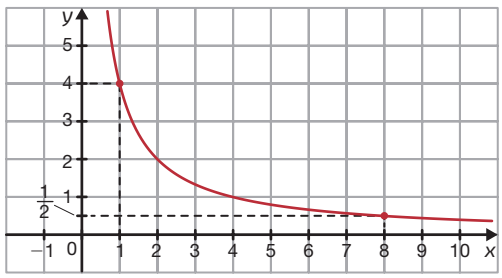
Anote as respostas no caderno.

10 Determine a taxa de variação da função, cujo gráfico é apresentado, no intervalo:

a) $[2, 10]$. taxa de variação média no intervalo: $\frac{1}{4}$

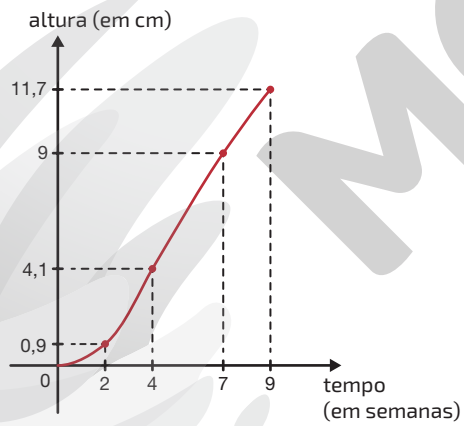


b) $[1, 8]$. taxa de variação média no intervalo: $-\frac{1}{2}$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

11 O gráfico a seguir apresenta a altura de uma planta, em centímetros, no decorrer do tempo *t*, medido em semanas.



RONALDO INÁCIO

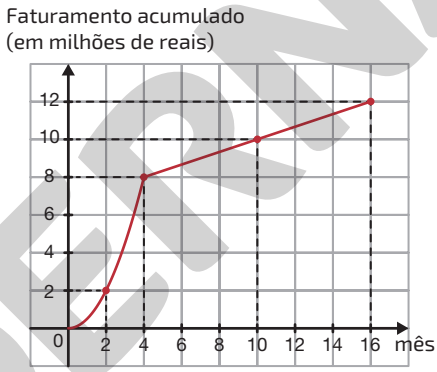
a) Em quantas semanas a planta atingiu 9 cm de altura? 7 semanas

b) A taxa de variação média da função cujo gráfico está apresentado representa, nesse contexto, a taxa média de crescimento dessa planta. Qual é a taxa média de crescimento dessa planta no intervalo $[2, 4]$? E no intervalo $[4, 9]$? 1,6 cm por semana; 1,52 cm por semana

No contexto Espera-se que os alunos concluam que, nesse contexto, a taxa de variação média representa a aceleração escalar média.

12 Estudamos anteriormente algumas informações sobre a velocidade atingida por Usain Bolt, em função do tempo, durante a prova dos 100 metros rasos, nos Jogos Olímpicos de Pequim, em 2008. Realize uma pesquisa para determinar, nesse contexto, o que a taxa de variação média representa. Converse com os colegas e o professor.

13 O gráfico a seguir apresenta o faturamento acumulado de uma empresa desde sua abertura, há 16 meses.



RONALDO INÁCIO

a) Qual é a lei de formação correspondente à função *f* cujo gráfico foi apresentado?
alternativa II

I) $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ se } 0 < x \leq 4 \\ \frac{1}{3}x + \frac{20}{3}, \text{ se } 4 < x \leq 16 \end{cases}$

II) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, \text{ se } 0 < x \leq 4 \\ \frac{1}{3}x + \frac{20}{3}, \text{ se } 4 < x \leq 16 \end{cases}$

III) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, \text{ se } 0 < x \leq 4 \\ x + 4, \text{ se } 4 < x \leq 16 \end{cases}$

IV) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, \text{ se } 0 < x \leq 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{20}{3}, \text{ se } 4 < x \leq 16 \end{cases}$

b) $D(f) = [0,16]$; $Im(f) = [0, 12]$

b) Determine o domínio e a imagem da função *f*.

c) O faturamento acumulado, em milhões de reais por mês, aumentou "mais rápido" no intervalo de 0 a 4 meses ou no intervalo de 4 a 16 meses? Justifique sua resposta.

13. c) De 0 a 4 meses. Espera-se que os alunos justifiquem que aumenta mais rápido nesse intervalo, porque a taxa de variação média da função *f* no intervalo $[0, 4]$ é maior do que a taxa de variação média no intervalo $[4, 16]$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5 Função afim

BNCC
- EM13MAT101
- EM13MAT302
- EM13MAT404
- EM13MAT405
- EM13MAT501

Lâmpadas de LED: acenda essa ideia

Uma medida que evita o desperdício e contribui para a redução do valor da fatura de energia elétrica é optar, quando possível, por um tipo de lâmpada mais eficiente. Os tipos de lâmpadas utilizadas no Brasil são: a incandescente, que apesar de consumir muita energia foi a mais vendida no país por muito tempo; a fluorescente, que se popularizou no final da década de 1990, quando a busca pela economia de energia ganhou maior destaque; e a de LED (do inglês, diodo emissor de luz) que, apesar de ainda apresentar um maior custo em comparação com as demais, possui baixo consumo de energia e alta durabilidade em relação aos demais modelos.

A) Uma possível resposta: incandescente, pois, se comparada às fluorescentes e às de LED equivalentes, ela consome mais energia elétrica, além de ter menor durabilidade.

Explique aos alunos que o símbolo W corresponde à unidade de medida watt e o símbolo kWh, à unidade de medida quilowatt-hora.

Podemos encontrar lâmpadas de LED em TVs, computadores, relógios digitais, rádios, semáforos, luminárias etc.

1kW = 1000 W

	INCANDESCENTES	FLUORESCENTE COMPACTA	LED
Potência	60 W	15 W	10 W
Consumo	0,060 kWh	0,015 kWh	0,010 kWh
Vida útil (média)	1 000 horas	8 000 horas	50 000 horas

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Qual tipo de lâmpada é a menos eficiente? Justifique sua resposta.

B Considere que uma lâmpada ficará acesa 8 h por dia durante 30 dias. Qual será o consumo de energia elétrica se essa lâmpada for do tipo:

- incandescente de 60 W? 14,4 kWh
- LED de 10 W? 2,4 kWh
- fluorescente de 15 W? 3,6 kWh

Ser consciente

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos citem atitudes como escolher aparelhos mais eficientes, reduzir o tempo de uso do chuveiro elétrico, aproveitar a iluminação natural, reduzir o uso de ferro elétrico, não deixar aparelhos ligados e lâmpadas acesas se não houver ninguém usando, entre outras.

> Em sua opinião, além do uso de lâmpadas mais econômicas, quais medidas podem ser tomadas em nossas casas para reduzir o consumo mensal de energia elétrica? Converse com o professor e os colegas.

Ao associar as grandezas tempo e consumo de energia elétrica de cada modelo de lâmpada na questão **B**, você usou, de maneira indireta, uma **função afim**, mais especificamente, uma **função linear**, que são assuntos que estudaremos nas páginas seguintes, bem como suas principais caraterísticas algébricas e gráficas.

FOTOMONTAGEM DE MAURÍCIO PLANEL. FOTOS: 1.ANGARATO/SHUTTERSTOCK; 2.3DMI/SHUTTERSTOCK; 3.ANDREY_POPOV/SHUTTERSTOCK; 4.OLEKSIY MARK/SHUTTERSTOCK; 5.ELENA ELISSEEVA/SHUTTERSTOCK; 6.TATIANA POPOVA/SHUTTERSTOCK; 7.3DMI/SHUTTERSTOCK; 8.UNITED PHOTO STUDIO/SHUTTERSTOCK; 9.TWINSTER PHOTO/SHUTTERSTOCK;10.ALEX LMX/SHUTTERSTOCK; 11.RA2 STUDIO/SHUTTERSTOCK; 12.VVOE/SHUTTERSTOCK; 13.TON WEERAYUT PHOTOGRAPHER/SHUTTERSTOCK; 14.GESHA/SHUTTERSTOCK; 15.PAITOON PORNSUKSOMBOON/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Estudando função afim

A água potável utilizada em propriedades rurais, de modo geral, é retirada de poços com o auxílio de uma bomba-d'água elétrica. Em certo sítio, para abastecer o reservatório de água, é utilizada uma bomba-d'água com capacidade para bombear 15 ℓ por minuto. Essa bomba é ligada automaticamente quando o reservatório está com 250 ℓ de água e desligada ao enchê-lo.

Com essas informações, podemos escrever uma fórmula que permite calcular a quantidade de água contida no reservatório em função do tempo em que a bomba permanece ligada, considerando que não haja consumo de água durante esse período.

Para isso, representamos por y a quantidade de litros de água no reservatório enquanto a bomba permanece ligada, e por x o tempo, em minutos, que a bomba permanece ligada. Assim:

$$y = 15x + 250$$

Utilizando essa fórmula, vamos calcular, por exemplo, a quantidade de água no reservatório 25 minutos após a bomba entrar em funcionamento, ou seja, calcular o valor de y para $x = 25$.

$$y = 15x + 250 \Rightarrow y = 15 \cdot 25 + 250 = 625$$

Portanto, após 25 minutos de funcionamento da bomba, o reservatório estará com 625 ℓ de água.

A fórmula $y = 15x + 250$ é um exemplo de lei de formação de função afim.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $ax + b$, com a e b reais, é chamada **função afim**.

$$x \mapsto ax + b \qquad\qquad f(x) = ax + b$$

As constantes a e b são os **coeficientes** da função.

Exemplo

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 5$. Nesse caso, $a = 1$ e $b = -5$.
- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2x + 1{,}5$. Nesse caso, $a = 2$ e $b = 1{,}5$.

De acordo com os valores dos coeficientes de uma função afim, ela pode receber uma nomenclatura especial. Uma função afim, com:

- $b = 0$, é chamada **função linear**.
- $a = 1$ e $b = 0$, é chamada **função identidade**.
- $a = 0$, é chamada **função constante**.

Considere uma função afim f. Dados os valores de $f(x_1)$ e $f(x_2)$, com $x_1 \neq x_2$, podemos determinar o coeficiente a dessa função. De fato, $f(x_1) = ax_1 + b$ e $f(x_2) = ax_2 + b$. Assim:

$$f(x_2) - f(x_1) = ax_2 + b - (ax_1 + b) \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = ax_2 - ax_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

O número $a = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ é a **taxa de variação** da função afim f no intervalo $[x_1, x_2]$.

*$i(t) = 0{,}06t$, em que $i(t)$ indica o consumo da lâmpada.

**$f(t) = 0{,}015t$, em que $f(t)$ indica o consumo da lâmpada.

No contexto

Escreva a lei de formação de uma função que expresse o consumo de uma lâmpada em relação ao tempo t, em horas, que ela permanece acesa, caso ela seja:

- incandescente. *
- fluorescente. **
- LED. $L(t) = 0{,}01t$, em que $L(t)$ indica o consumo da lâmpada.

O coeficiente b da função afim f é o valor que a função assume quando $x = 0$, ou seja, $f(0) = b$.

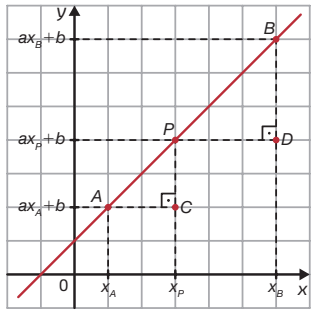
Na função afim, a taxa de variação é constante e, portanto, não depende do intervalo considerado.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Gráfico de uma função afim

Vamos mostrar que o gráfico de uma função afim é uma reta. Para isso, considere, inicialmente, a função afim dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Vamos mostrar que três pontos quaisquer $A\left(x_A, f\left(x_A\right)\right)$, $B\left(x_B, f\left(x_B\right)\right)$ e $P\left(x_P, f\left(x_P\right)\right)$ do gráfico de f pertencem a uma mesma reta. No plano cartesiano, temos:



Indicamos o comprimento do segmento $\overline{AB}$ por AB.

Em relação ao comprimento dos catetos dos triângulos ACP e PDB, indicados no gráfico, podemos escrever a igualdade:

$$\frac{PC}{BD} = \frac{\left(ax_P + b\right) - \left(ax_A + b\right)}{\left(ax_B + b\right) - \left(ax_P + b\right)} = \frac{ax_P - ax_A}{ax_B - ax_P} = \frac{a\left(x_P - x_A\right)}{a\left(x_B - x_P\right)} = \frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{CA}{DP}$$

Como são necessários apenas dois pontos para determinarmos uma reta, podemos esboçar o gráfico de uma função afim conhecendo as coordenadas de apenas dois de seus pontos.

Por essa igualdade, os triângulos possuem lados proporcionais e, além disso, possuem um ângulo reto. Portanto, pelo caso de semelhança LAL, os triângulos ACP e PDB são semelhantes. Logo, seus ângulos correspondentes possuem mesma medida. Portanto, os ângulos $\widehat{CAP}$ e $\widehat{DPB}$ são congruentes.

Portanto, os pontos A, B e P, pertencentes ao gráfico da função f, são colineares.

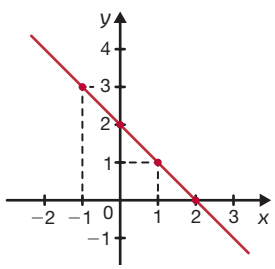
No caso em que $a = 0$, a função será constante e os pontos A, B e P serão colineares, pois $f\left(x_A\right) = f\left(x_P\right) = f\left(x_B\right)$.

Desse modo, mostramos que o gráfico de uma função afim é uma reta. Reciprocamente pode-se demonstrar que toda reta não vertical é o gráfico de uma função afim.

Zero de uma função afim

Estudamos anteriormente que o zero de uma função f é todo valor x de seu domínio tal que $f(x) = 0$ e que, graficamente, os zeros correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x. Caso uma função afim possua zero, podemos obtê-lo resolvendo a equação $ax + b = 0$.

Observe o gráfico da função afim definida por $f(x) = -x + 2$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

O gráfico da função f intersecta o eixo x no ponto de coordenadas $(2, 0)$, ou seja, para $x = 2$ temos $f(x) = 0$. Nesse caso, a abscissa 2 é o **zero da função**.

Outra maneira de obtermos o zero dessa função é algebricamente. Para isso, resolvemos a equação $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, o zero da função definida por $f(x) = -x + 2$ é 2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R1 Qual é a lei de formação da função afim f, tal que $f(-1) = 2$ e $f(1) = 0$?

Resolução

Inicialmente, determinamos o coeficiente a. Para isso, fazemos:

$$a = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \Rightarrow a = \frac{0 - 2}{2} = -1$$

Agora, calculamos o coeficiente b. Sabemos que a função f é do tipo $f(x) = ax + b$. Assim:

$$f(1) = 0 \Rightarrow (-1) \cdot (1) + b = 0 \Rightarrow b = 1$$

Portanto, a lei de formação da função f é $f(x) = -x + 1$.

R2 Escreva um algoritmo que possibilite determinar, caso possua, os zeros de uma função afim, dada sua lei de formação.

Resolução

Antes de apresentarmos os passos para a construção de um algoritmo, vamos relembrar sua definição.

Um **algoritmo** é uma sequência de instruções ordenadas de forma lógica para resolução de uma determinada tarefa ou problema.

Para construir um algoritmo, inicialmente, devemos ler o enunciado do problema, compreendendo-o e destacando os pontos mais importantes. Em seguida, devemos responder às seguintes questões.

1. Quais são os **dados de entrada**, ou seja, quais são os dados fornecidos no problema?

   Dados de entrada: lei de formação da função e, consequentemente, os coeficientes da função.

2. Quais são os **dados de saída**, ou seja, quais são os dados gerados após a execução de todas as etapas do algoritmo?

   Dados de saída: caso possua, os zeros da função.

3. Conhecendo os dados de entrada e saída, quais **procedimentos** devem ser realizados?

   Para determinar o zero da função afim, inicialmente, analisamos seus coeficientes.

   - Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então a função não possui zeros.
   - Se $a \neq 0$, então o zero da função é $-\frac{b}{a}$.
   - Se $a = 0$ e $b = 0$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, os zeros da função são todos os $x \in \mathbb{R}$.

Agora, escrevemos o algoritmo.

Início

1. Leia o coeficiente a.
2. Leia o coeficiente b.
3. O coeficiente a é diferente de zero? Se sim, efetue $-\frac{b}{a}$. Caso contrário $(a = 0)$, o coeficiente b é diferente de zero? Se sim, a função não possui zeros. Caso contrário $(b = 0)$, os zeros da função são todos os $x \in \mathbb{R}$.

Fim

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

O Regime Geral de Previdência Social (RGPS) é um programa de seguro público que visa substituir a renda do contribuinte quando ele perde a capacidade de trabalhar. No Brasil, de 1º de março de 2020 a 31 de dezembro de 2020, o valor da contribuição mensal era calculado da seguinte maneira.

- Salário até R$ 1 045,00: 7,5% do salário.
- Salário maior do que R$ 1 045,00 e menor ou igual a R$ 2 089,60: R$ 78,38 mais 9% sobre a quantia excedente a R$ 1 045,00.
- Salário maior do que R$ 2 089,60 e menor ou igual a R$ 3 134,40: R$ 172,39 mais 12% sobre a quantia excedente a R$ 2 089,60.
- Salário maior do que R$ 3 134,40 e menor ou igual a R$ 6 101,06: R$ 297,76 mais 14% sobre a quantia excedente a R$ 3 134,40.
- Salário maior do que R$ 6 101,06: R$ 713,10.

Podemos indicar o valor da contribuição previdenciária mensal em função do salário bruto x, por uma função cuja lei de formação é:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}075x, \text{ se } 0 < x \leqslant 1\,045 \\ 78{,}38 + 0{,}09(x - 1\,045), \text{ se } 1\,045 < x \leqslant 2\,089{,}6 \\ 172{,}39 + 0{,}12(x - 2\,089{,}6), \text{ se } 2\,089{,}6 < x \leqslant 3\,134{,}4 \\ 297{,}76 + 0{,}14(x - 3\,134{,}4), \text{ se } 3\,134{,}4 < x \leqslant 6\,101{,}06 \\ 713{,}1 \text{ se } x > 6\,101{,}06 \end{cases}$$

Esboce o gráfico da função f.

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

O esboço do gráfico da função f.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

A maneira como é calculado, no Brasil, o valor da contribuição mensal de 1º de março de 2020 a 31 de dezembro de 2020 e a lei de formação da função que representa o valor da contribuição mensal de acordo com o salário bruto, nesse período.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, analisamos cada uma das sentenças que compõe a função f. Em seguida, esboçamos o gráfico de cada uma dessas sentenças no intervalo correspondente.

√ Escolhendo as notações.

- x: salário bruto.
- $f(x)$: valor da contribuição previdenciária mensal em função do salário bruto.

C Executando o plano

Passo 1

Note que:

- no intervalo $]0, 1\,045]$ a função é definida por $f(x) = 0{,}075x$, que é a lei de formação de uma função linear. Consequentemente, nesse intervalo, a função é representada graficamente por um segmento de reta.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

- no intervalo $\left]1\,045;\ 2\,089{,}6\right]$ a função é definida por $f(x) = 78{,}38 + 0{,}09(x - 1\,045)$. Desse modo:

$$f(x) = 78{,}38 + 0{,}09x - 0{,}09 \cdot 1\,045 \Rightarrow \underbrace{f(x) = 0{,}09x - 15{,}67}_{\text{lei de formação de uma função afim}}$$

Assim, nesse intervalo, a função é representada graficamente por um segmento de reta.

- no intervalo $\left]2\,089{,}6;\ 3\,134{,}4\right]$ a função é definida por $f(x) = 172{,}39 + 0{,}12(x - 2\,089{,}6)$. Desse modo:

$$f(x) = 172{,}39 + 0{,}12x - 0{,}12 \cdot 2\,089{,}6 \Rightarrow \underbrace{f(x) = 0{,}12x - 78{,}362}_{\text{lei de formação de uma função afim}}$$

Logo, nesse intervalo, a função é representada graficamente por um segmento de reta.

- no intervalo $\left]3\,134{,}4;\ 6\,101{,}06\right]$ a função é definida por $f(x) = 297{,}76 + 0{,}14(x - 3\,134{,}4)$. Desse modo:

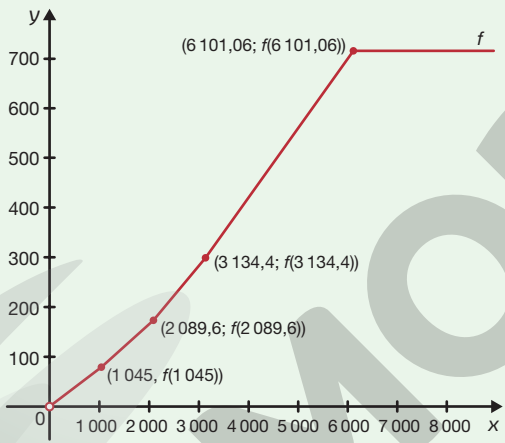
$$f(x) = 297{,}76 + 0{,}14x - 0{,}14 \cdot 3\,134{,}4 \Rightarrow \underbrace{f(x) = 0{,}14x - 141{,}056}_{\text{lei de formação de uma função afim}}$$

Assim, nesse intervalo, a função é representada graficamente por um segmento de reta.

- se $x > 6\,101{,}06$, a função é definida por $f(x) = 713{,}1$, que é a lei de formação de uma função constante. Consequentemente, nesse intervalo, a função é representada graficamente por uma semirreta paralela ao eixo x.

Passo 2

De acordo com as sentenças e os intervalos correspondentes, obtemos o seguinte gráfico.



RONALDO INÁCIO

Lembre-se de que para traçar uma reta basta determinar as coordenadas de dois de seus pontos.

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de algumas tarefas semelhantes propostas na seção **Exercícios e problemas** desse tópico.

Agora é você quem resolve! Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema.**

Realize uma pesquisa a fim de determinar como é realizado o cálculo e quais são as alíquotas da contribuição vigente no ano atual. Em seguida, determine a função que representa o valor da contribuição previdenciária mensal em relação ao salário bruto x no período em questão. Por fim, esboce o gráfico dessa função e determine seu domínio, o conjunto imagem e os intervalos em que ela é crescente.

2 **É possível resolver o problema proposto no item 1 utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nessa seção? Qual é a resposta desse problema?**

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Para auxiliar na resolução da tarefa 6, sugira aos alunos que organizem em um quadro o número n de lados e a soma s das medidas dos ângulos internos dos polígonos apresentados.

1 Classifique cada função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuja lei de formação é apresentada a seguir, em afim, linear, constante ou identidade.

a) $f(x) = \frac{3}{2}x - 5$ função afim

b) $f(x) = x$ função afim, linear e identidade

c) $f(x) = -3x$ função afim e linear

d) $f(x) = -5$ função afim e constante

e) $f(x) = 15 - \frac{4}{5}x$ função afim

f) $f(x) = -x$ função afim e linear

2 A seguir está indicado o perímetro de um pentágono regular em função do comprimento, em centímetros, de seu lado.

Comprimento do lado do pentágono (cm)	Perímetro (cm)
2	10
4	20
5,5	27,5
8	40

a) Dado um pentágono regular de lado 13 cm, determine seu perímetro. 65 cm

b) Escreva uma fórmula que permita calcular o perímetro p do pentágono regular em função do comprimento c do seu lado. $p(c) = 5c$

3 Escreva a lei de formação de uma função afim sabendo que:

a) $f(2) = 1$ e $a = \frac{1}{4}$. $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

b) $f(3) = 11$ e $b = 5$. $f(x) = 2x + 5$

c) $f(1) = 3$ e $f(3) = 5$. $f(x) = x + 2$

d) $f(-2) = 7$ e $f(0) = 3$. $f(x) = -2x + 3$

4 O gafanhoto-do-deserto é um inseto capaz de comer cerca de 1,5 grama de folhas por dia, um número aparentemente pequeno, mas se considerarmos que algumas nuvens desses gafanhotos podem conter cerca de 50 milhões de indivíduos, a devastação alcança grandes proporções.

Fonte de pesquisa: ANIMAIS do deserto II. *Enciclopédia da vida selvagem Larousse*. Rio de Janeiro: Altaya, 1997.

DAVEM HUNT PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

gafanhoto-do-deserto

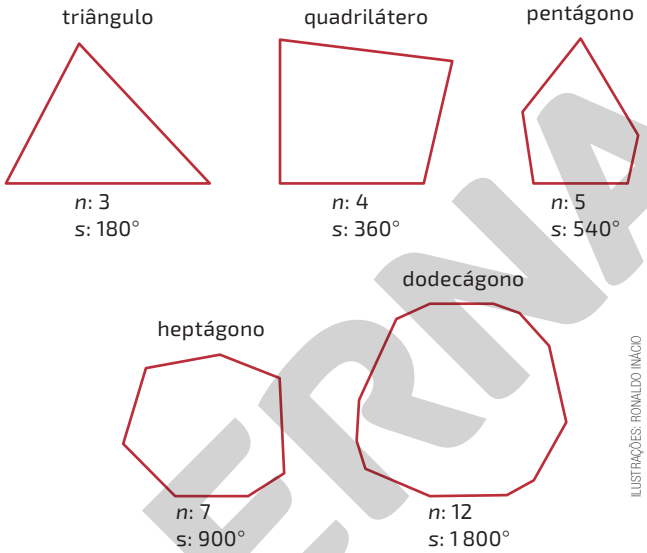
a) Escreva a lei de formação de uma função que relacione a quantidade q de gafanhotos com a massa m, em gramas, de folhas que eles são capazes de comer por dia. $m(q) = 1{,}5q$

b) Quantas toneladas de folhas uma nuvem com 50 milhões de gafanhotos-do-deserto pode comer em um único dia? 75 t

5 Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construa o gráfico da função cuja lei de formação você escreveu no item a da atividade anterior.

Respostas na seção Resolução dos exercícios e problemas do Suplemento para o professor.

6 A seguir estão indicados o número n de lados e a soma s das medidas dos ângulos internos de alguns polígonos em graus.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

a) Escreva uma fórmula que relacione a soma s das medidas dos ângulos internos de um polígono, em graus, em função do número n de lados. $s(n) = 180\,n - 360$

b) De quantos graus é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de 6 lados? 720°

c) Quantos lados tem um polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é igual a 2 340°? 15 lados

7 Em cada um dos quadros estão apresentadas as coordenadas de alguns pontos.

A

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6

B

x	y
1	1
2	8
3	27
4	64

a) Represente no plano cartesiano os pontos cujas coordenadas estão apresentadas nos quadros A e B. Qual desses quadros apresenta pontos que pertencem ao gráfico de uma mesma função afim?

b) Identifique padrões e, para cada quadro, escreva uma expressão algébrica que relacione os números x e y. quadro A: $y = x + 2$; quadro B: $y = x^3$

7. a) Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento do professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

9. c) Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento para o professor.

8 Esboce o gráfico das funções cujas leis de formação estão apresentadas. Em seguida, determine o zero dessas funções.

a) $f(x) = 3x - 12$

b) $f(x) = -x + 9$

c) $f(x) = 2x + \frac{3}{4}$

d) $f(x) = -\frac{1}{5}x - 6$

Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento para o professor.

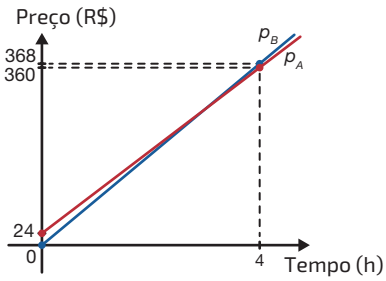
9 Duas das escalas de temperatura mais utilizadas são a Celsius e a Fahrenheit. Para convertermos uma temperatura F medida em Fahrenheit em uma C, medida em Celsius, utilizamos a função dada por $C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$.

a) Quando um termômetro registra 50 °F, a mesma temperatura corresponde a quantos graus Celsius? 10 °C

b) Qual é o zero dessa função? Nesse contexto, o que o zero representa? $F = 32$; A medida, em graus Fahrenheit, correspondente a 0 °C.

c) Esboce o gráfico dessa função.

10 Os gráficos representam o preço p cobrado pelo aluguel de uma pista de boliche nos estabelecimentos A e B, em função do tempo t de jogo.



RONALDO INÁCIO

a) Escreva a lei de formação das funções representadas pelos gráficos. $p_A(t) = 84t + 24$ e $p_B(t) = 92t$

b) A partir de quantas horas de jogo é mais econômico alugar uma pista no estabelecimento A? A partir de 3 h de jogo.

11 Um automóvel movimenta-se com velocidade constante em uma estrada. Abaixo é possível observar sua posição em determinados instantes.

Tempo (h)	0	3	5	7
Posição (km)	20	290	470	650

a) Qual é, no intervalo de tempo apresentado, a velocidade média do automóvel? 90 km/h

b) Esboce o gráfico da função que expresse a posição do automóvel S, em quilômetros, em relação ao tempo t, em horas. Esse gráfico corresponde a uma função afim? Justifique sua resposta.

c) Escreva a lei de formação da função cujo gráfico você esboçou no item **b**. Em seguida, determine o domínio e o conjunto imagem dessa função.

d) Após 10 h, qual é o conjunto posição ocupada pelo automóvel nessa estrada? quilômetro 920

11. b) Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento para o professor.

11. c) $S(t) = 20 + 90t$; $D(S) = \mathbb{R}_+$; $Im(S) = \mathbb{R}_+^*$

12 O peso de um corpo é obtido por meio do produto da sua massa e da aceleração da gravidade que atua sobre ele, ou seja, $P = m \cdot g$, em que m é a massa do corpo (em kg), g é a aceleração da gravidade (em m/s²) e P é o peso, medido em newtons (N). Na Terra, a aceleração da gravidade é de aproximadamente 9,8 m/s², e na Lua essa aceleração é aproximadamente 1,6 m/s².

a) Escreva a lei de formação de uma função T que expresse o peso de um corpo na Terra de acordo com sua massa m, e de uma função L que expresse o peso de um corpo na Lua de acordo com sua massa n. $T(m) = 9{,}8m$; $L(n) = 1{,}6n$

b) Determine, em newtons, o peso de uma pessoa de 75 kg, se esta estivesse sobre a superfície da:

- Lua. 120 N
- Terra. 735 N

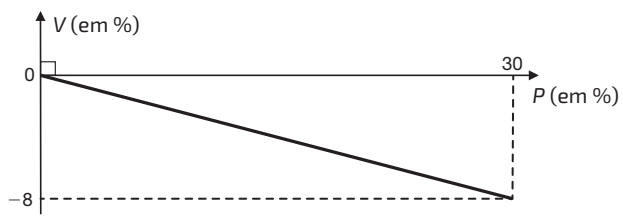
c) Quantos quilogramas tem uma pessoa que pesa, na Lua, 91,2 N? 57 kg

d) Calcule, em newtons, quanto pesa na Terra uma pessoa que, na Lua, tem 96 N. 588 N

e) Esboce, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções cuja lei de formação você escreveu no item **a**. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento para o professor.

13 (UFF-RJ, 2008) A adição do biodiesel ao óleo *diesel* promove pequenas modificações nas propriedades do combustível, as quais, apesar de causarem redução na quantidade de energia fornecida ao motor, promovem um aumento na eficiência com que esta energia é convertida em potência de saída.

O gráfico a seguir, representado por um segmento de reta que une o ponto $(30, -8)$ à origem $(0, 0)$, apresenta a variação V da energia fornecida ao motor com relação ao padrão *diesel* (em %) como função da proporção P de adição de biodiesel na mistura (em %).



RONALDO INÁCIO

Adaptado de Scientific American, Ano 5, Número 53, outubro de 2006.

A única opção correta é: alternativa c

a) $V(2^2) = [V(2)]^2$

b) $V(2) < V(8)$

c) $V(8) = 4V(2)$

d) $\frac{V(8) - V(2)}{8 - 2} = -\frac{15}{4}$

e) $V(8) = V(2) \cdot V(4)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Programas em VisualG

Em diversas situações é interessante programar um computador para que ele resolva determinado problema. Para isso, é necessário fornecer uma sequência de instruções que devem ser seguidas, ou seja, precisamos escrever um programa, que será interpretado e executado pelo computador.

Em informática, **instrução** é a informação que indica a um computador uma ação elementar a ser executada.

Como é formada por conjuntos específicos de "zeros e uns", a linguagem do computador é complexa. Assim, foram desenvolvidas as linguagens de programação.

Linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador.

Existem diversas linguagens de programação, cada uma com características específicas e níveis de complexidade e objetivos diferentes. Neste livro, utilizaremos o VisualG, uma linguagem com comandos em português voltada para iniciantes em programação.

Estrutura de um programa em VisualG

Um programa escrito em VisualG é subdividido em três áreas distintas: o cabeçalho do programa, a área de declarações e o corpo do programa.

Cabeçalho do programa

Essa área é utilizada para indicar o início do programa e, também, seu nome. O cabeçalho do programa é atribuído pela instrução **Algoritmo**, seguida de um nome entre aspas. Veja um exemplo.

Algoritmo "soma"

Área de declarações

Área subdividida em algumas subáreas. Nesta coleção, restringiremos nosso estudo apenas à subárea dedicada à indicação das variáveis que serão utilizadas no programa.

A declaração das variáveis é atribuída pela instrução **Var**, seguida da relação de variáveis. Essas variáveis são identificadas por um rótulo e armazenam um valor ou texto. O rótulo pode conter letras, números ou *underline* (_), porém deve começar com uma letra. Além disso, cada variável deve ter seu tipo definido.

Observe no quadro alguns dos tipos mais comuns de variável.

Tipo	Variável representa
inteiro	números inteiros
real	números reais
caractere	sequência de caracteres

Para definir o tipo da variável, deve-se escrever seu rótulo (ou vários rótulos, separados por vírgula), seguido por dois-pontos (:) e seu tipo. Veja alguns exemplos.

Var

x : real al : caractere a, b, c, d : inteiro

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Corpo do programa

Essa área é utilizada para escrever as instruções que devem ser seguidas pelo computador. Seu início é indicado pela instrução **Inicio** e seu fim, pela instrução **Fimalgoritmo**.

```
Inicio
Sequência de instruções;
(...)
Fimalgoritmo
```

Ao utilizar caracteres especiais (como letras acentuadas, sinais de pontuação e espaço), alguns problemas de exibição e execução do programa podem ocorrer. Por isso, é utilizado e recomendado usar termos semelhantes sem caracteres especiais, como em **Inicio** e **Fimalgoritmo**.

Exemplo de um programa em VisualG

Agora, vamos colocar em prática os conceitos estudados. Para isso, considere o seguinte problema.

> Escrever um programa que determine o zero de uma função afim, com $a \neq 0$, dados os coeficientes a e b.

Inicialmente, interpretamos o problema e escrevemos um algoritmo que o resolva. Em seguida, codificamos nosso programa para a linguagem VisualG.

Algoritmo

Início

1. Leia o coeficiente a.

2. Leia o coeficiente b.

3. Calcule: $-\frac{b}{a}$

Fim

Programa em VisualG

```
1  Algoritmo "zero_funcao_afim"
2  Var
3  a, b, x: real
4  Inicio
5  escreva("Digite o coeficiente a da função: ")
6  leia(a)
7  escreva("Digite o coeficiente b da função:")
8  leia(b)
9  x <- -b/a
10 escreva("O zero da função é: ",x)
11 Fimalgoritmo
```

No corpo do programa em VisualG são indicados os comandos que fazem as operações. Veja a seguir o que fazem os comandos utilizados no exemplo.

escreva: apresenta na tela o conteúdo inserido entre parênteses.

leia: atribui o valor informado pelo usuário na variável indicada.

<-: atribui o valor da expressão à direita do sinal na variável indicada à esquerda.

Para a expressão, podem ser usados sinais como + (adição), - (subtração), * (multiplicação) e / (divisão), além dos parênteses, que no VisualG podem ser usados com outros parênteses, em vez de se usar chaves e colchetes.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Qual informação deve ser inserida pelo usuário quando o programa executar a instrução da linha 7?

2 Considere uma função afim f. Escreva um programa em VisualG que determine $f(x)$, dada a lei de formação da função e o valor de x.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6 Função afim crescente e função afim decrescente

BNCC
- EM13MAT302
- EM13MAT404

Uma gangorra de preços

Imagine a seguinte situação: uma loja fez uma promoção e reduziu o preço de determinado produto, porém, quando você chegou à loja, o estoque desse produto já havia acabado. Provavelmente você já vivenciou uma situação assim ou teve notícias de um fato desse tipo. Tal fenômeno está relacionado aos conceitos de **oferta** e **demanda**, muito estudado pelos campos da Economia, Administração, Ciências Contábeis, entre outros.

Para que possamos compreender fenômenos desse tipo, precisamos entender o significado das leis da oferta e da demanda. Oferta são os produtos ou serviços oferecidos ao consumidor, enquanto demanda está relacionada às quantidades de produtos ou serviços pelos quais as pessoas estão dispostas a pagar.

Quando o preço de um produto é reduzido, geralmente a quantidade de consumidores que estão dispostos a adquiri-lo aumenta. Por outro lado, se o preço do produto é elevado, a demanda reduz, ou seja, o número de consumidores em busca do produto será menor devido seu alto custo. Essa relação entre quantidade demandada e preço do produto representa a lei da demanda, ou lei da procura.

Uma situação nessas condições ocorreu, por exemplo, com os aparelhos celulares. Quando foram lançados, os preços eram elevados e poucas pessoas conseguiam comprar, mas quando os preços começaram a reduzir, cada vez mais pessoas puderam ter acesso a esses equipamentos.

A lei da oferta é a relação entre preço e quantidade de produto ofertado, estando associada, por exemplo, por quanto uma empresa está disposta a vender seus produtos visando lucro. Dessa maneira quando as quantidades demandadas aumentam, os preços também aumentam. Por outro lado, os preços são reduzidos se as quantidades demandadas também reduzem.

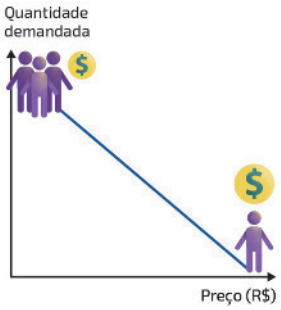
Quando não há tendência nas variações de preço, pode-se dizer que existe um equilíbrio de mercado. Isso ocorre quando a quantidade demandada de um produto é próxima da quantidade ofertada, ou seja, compradores adquirem e vendedores comercializam a quantidade desejada. Quando isso ocorre, dizemos que o equilíbrio de mercado foi atingido.

Na busca por economia, muitos consumidores optam por comprar produtos que são referentes à estação, pois normalmente apresentam preço mais baixo devido à grande produção. Por exemplo, em condições climáticas normais, geralmente observamos uma queda nos preços da laranja entre os meses de agosto e outubro devido ao aumento na produção.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

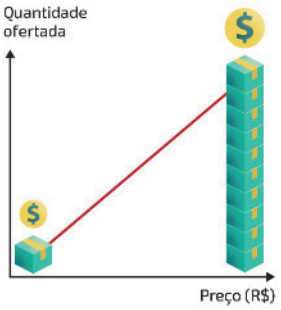
MODERNA

Lei da demanda, lei da oferta e equilíbrio de mercado



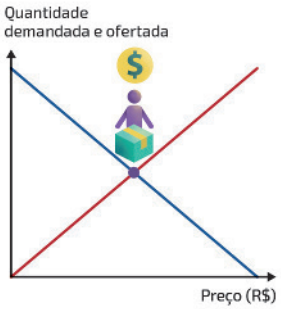
Lei da demanda

Indica que o preço mais baixo atrai mais consumidores dispostos a adquirir um produto e que o preço elevado atrai menos consumidores dispostos a adquiri-lo.



Lei da oferta

Indica que o preço mais baixo tem relação com uma quantidade menor de produtos ofertados e que o preço mais elevado está associado a uma quantidade maior de produtos ofertados.



Equilíbrio de mercado

Indica uma estabilidade entre a demanda e a oferta, ou seja, o preço é razoável e a quantidade ofertada do produto é suficiente para os consumidores interessados em adquiri-lo.

ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Fonte de pesquisa: WESSELS, Walter. *Economia*. Trad. Sara Gedanke. Rev. tec. Celso Seiji Gondo. São Paulo: Saraiva, 1998.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Quando há excesso de oferta de um produto, significa que os vendedores não conseguem vender a quantidade que desejam. Cite uma estratégia que eles podem utilizar para obter a quantidade de vendas esperada.

Resposta pessoal. Uma possível resposta: a redução do preço do produto.

B Se a demanda por determinado produto estiver superior à oferta do mercado, o que isso pode acarretar com relação ao preço do produto?

O preço tenderá a aumentar.

C No quadro a seguir são apresentados o preço e as quantidades diárias demandadas e ofertadas de determinado produto. Com base nessas informações, e denotando o preço por x, construa a lei de formação da função:

- f, que descreve a quantidade diária demandada em função de x;
  $f(x) = -2x + 155$
- g, que descreve a quantidade diária ofertada em função de x.
  $g(x) = 3x - 15$

Preço	Quantidade diária demandada	Quantidade diária ofertada
R$ 45,00	65	120
R$ 40,00	75	105
R$ 35,00	85	90

Ser consciente

> Em algumas situações, o aumento do preço pode ocorrer em associação com algum problema que interfira nas necessidades básicas de um indivíduo. No caso do problema de abastecimento de combustível por conta da greve dos caminhoneiros em 2018, por exemplo, vários postos de combustíveis aumentaram os preços devido à grande demanda. Pelo mesmo motivo, no contexto da pandemia do Covid-19 do ano de 2020, num primeiro momento, alguns vendedores aumentaram o preço do álcool em gel, máscaras e qualquer outro produto ligado à prevenção desse vírus. Na época você percebeu esses aumentos? Acha essa prática abusiva? Converse com o professor e os colegas a respeito.

Resposta pessoal. Aproveite a oportunidade e explique aos alunos que precisamos ficar atentos para que, principalmente em situações incomuns, como desabastecimentos, não paguemos valores abusivos por determinados produtos. O Código de Defesa do Consumidor é uma lei nacional que garante diversos direitos ao consumidor e o protege de várias situações. Assim, é importante conhecer nossos direitos como consumidores, e a quais órgãos podemos recorrer quando nos deparamos com algum tipo de situação que infrinja nossos direitos. As informações sobre o Código de Defesa do Consumidor podem ser acessadas em <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l8078.htm>. Acesso em: 31 ago. 2020.

De modo geral, assim como na questão **C**, para descrever uma função oferta e uma função demanda utilizamos funções afim, crescente no primeiro caso, e decrescente no segundo. Nas páginas a seguir vamos estudar sobre as propriedades das funções afim, especialmente com relação à possibilidade de classificação como função crescente ou decrescente, além do estudo do sinal que pode ser realizado para essa função.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

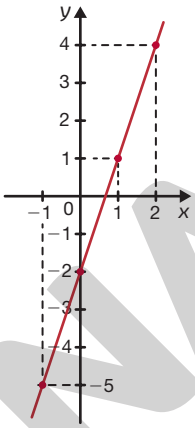
FOTOMONTAGEM DE JULIANA DEL ANHOL AZEVEDO. FOTOS: 1.DOMNITSKY/SHUTTERSTOCK; 2.DENIS TABLER/SHUTTERSTOCK; 3.BOWONPAT SAKAEW/SHUTTERSTOCK; 4.JIANG HONGYAN/SHUTTERSTOCK; 5.ANITA PONNE/SHUTTERSTOCK; 6.BLAN-K/SHUTTERSTOCK; 7.VITYA_M/SHUTTERSTOCK; 8.RHJ PHTOTO AND ILUSTRATION/SHUTTERSTOCK; 9.HAPPY APRIL BOY/SHUTTERSTOCK; 10.AMAZEIN DESIGN/SHUTTERSTOCK; 11.BRASTOCK/SHUTTERSTOCK

Se julgar necessário, peça aos alunos que revisem o conceito de função crescente e função decrescente, apresentado anteriormente.

Função crescente e função decrescente

Estudamos anteriormente que, em certo intervalo de seu domínio, uma função é: crescente se, e somente se, ao aumentarmos os valores de x pertencentes a esse intervalo, os valores correspondentes de y também aumentam; e decrescente se, e somente se, ao aumentarmos os valores de x pertencentes a esse intervalo, os valores correspondentes de y diminuem.

Observe o gráfico da função afim dada por $f(x) = 3x - 2$.



Note que essa função é crescente, pois, à medida que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y também aumentam, ou seja, para dois valores quaisquer distintos, x_1 e x_2, pertencentes ao domínio de f, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$.

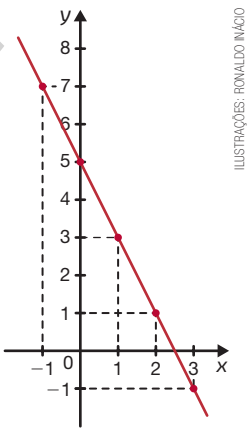
Temos ainda que a taxa de variação de f é maior do que zero $(a > 0)$. No caso de uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, se $a > 0$ e $x_1 < x_2$, então:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 < ax_2 \Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Em uma função afim, se a taxa de variação é maior do que zero $(a > 0)$, a função é **crescente**.

Quando a taxa de variação da função afim for igual a zero $(a = 0)$, a função é constante.

Agora, observe o gráfico da função afim dada por $f(x) = -2x + 5$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO NÁCIO

Note que essa função é decrescente, pois, à medida que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem, ou seja, para dois valores quaisquer distintos, x_1 e x_2, pertencentes ao domínio de f, com $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$.

Temos ainda que a taxa de variação de f é menor do que zero $(a < 0)$. No caso de uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, se $a < 0$ e $x_1 < x_2$, então:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow ax_1 > ax_2 \Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Em uma função afim, se a taxa de variação é menor do que zero $(a < 0)$, a função é **decrescente**.

No contexto

Classifique as funções cuja lei de formação você escreveu no item **C** da página **51** em crescente ou decrescente.

função f: decrescente, pois $a = -2 < 0$;

função g: crescente, pois $a = 3 > 0$

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Dada a função definida por $f(x) = \begin{cases} 3x - 8, \text{ se } x < 2 \\ -x, \text{ se } x > 2 \end{cases}$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

Resolução

Temos duas condições:

- Se $x < 2$, então $f(x) = 3x - 8$. Nesse caso, a taxa de variação de f é positiva $(a > 0)$. Logo, f é crescente.
- Se $x > 2$, então $f(x) = -x$. Nesse caso, a taxa de variação de f é negativa $(a < 0)$. Logo, f é decrescente.

Portanto, f é crescente para $x < 2$ e decrescente para $x > 2$.

RONALDO NÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Marcos vai usar suas economias para pagar a mensalidade da faculdade. A função que representa a quantia em dinheiro das economias de Marcos, após iniciar a faculdade, em função do tempo, em meses, é uma função crescente ou decrescente? decrescente

2 Determinado restaurante *self-service* cobra R$ 36,00 por quilograma de alimento. No entanto, para refeições com mais de 700 g de alimento, o preço é fixado em R$ 25,60.

LEO GIBRAN

a) Quanto custará um prato com 730 g de alimento nesse restaurante? E com 300 g? R$ 25,60; R$ 10,80

b) Determine a lei de formação da função que permite calcular o preço p do prato, em reais, em função da massa m, em quilogramas, de alimento. Resposta no final do livro.

c) Esboce o gráfico da função e determine os intervalos em que ela é crescente, decrescente ou constante. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento do professor.

3 Três bombas-d'água, cada uma com vazão de 3 000 ℓ/h, retiram água de um reservatório que contém 150 mil litros.

a) Com as três bombas ligadas, quantos litros de água serão tirados do reservatório em 3 h? 27 mil litros

b) Escreva a lei da função que representa a quantidade Q de água no reservatório em função do tempo t em que as três bombas permanecem ligadas. $Q(t) = 150\,000 - 9\,000t$

c) Essa função é crescente, decrescente ou constante? decrescente

4 Em duas fábricas, o custo para produzir determinada peça é o mesmo, porém, o custo fixo de cada uma das fábricas é diferente. Em certo mês, a fábrica A produziu 5 000 peças, e o custo total foi R$ 18 000,00; a fábrica B também produziu 5 000 peças, e o custo total foi R$ 20 000,00.

a) Qual é a lei de formação da função h que representa a diferença, em valores absolutos, entre o custo total da fábrica A e o custo total da fábrica B, para x peças produzidas? $h(x) = 2\,000$

b) Classifique a função que você escreveu em crescente, decrescente ou constante. constante

5 No processo de industrialização da cana-de-açúcar, em que podem ser produzidos açúcar e etanol, por exemplo, gera-se um resíduo de cerca de 30% da massa em bagaço.

Uma destinação adequada para o bagaço é a geração de energia elétrica, de maneira que 1 t desse resíduo pode gerar cerca de $\frac{100}{3}$ watts.

PAULO FRIDMAN/PULSAR IMAGENS

Pátio com bagaço de cana-de-açúcar utilizado para produção de energia elétrica em usina, em Cerqueira César (SP), em 2014.

a) Escreva a lei de formação da função que relaciona a quantidade de watts produzida E com a quantidade processada de cana-de-açúcar q, em toneladas. $E(q) = 10q$

b) A lei de formação da função que você escreveu no item a é crescente, decrescente ou constante? crescente

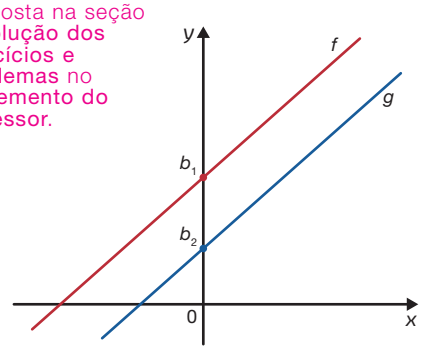
c) Esboce o gráfico da função cuja lei de formação você escreveu no item a. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento do professor.

Ser consciente

Junte-se a dois colegas e façam uma pesquisa sobre as vantagens da geração de energia pelo bagaço da cana-de-açúcar. Em seguida, apresentem os resultados obtidos para os colegas e o professor.*

6 Considere os gráficos das funções afins f e g, definidas por $f(x) = ax + b_1$ e $g(x) = ax + b_2$. Esboce em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções definidas por $h(x) = f(x) - g(x)$ e $m(x) = g(x) - f(x)$. Em seguida, classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento do professor.



RONALDO INÁCIO

*Algumas possíveis respostas: ajuda a poupar os reservatórios de hidrelétricas; quando comparada a combustíveis fósseis, as emissões de gases de efeito estufa são menores; menores perdas e redução em custos associados à transmissão de energia elétrica.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

Estudo do sinal de uma função afim

No estudo do sinal de uma função f, determinamos os valores de x pertencentes ao domínio para os quais $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

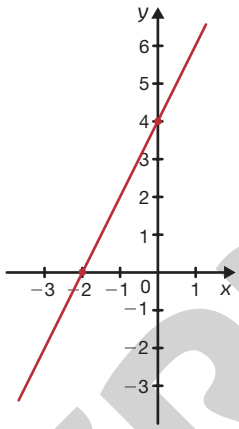
Vamos verificar para quais valores pertencentes ao domínio de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x + 4$, temos $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

Inicialmente, obtemos o zero de f, ou seja, o valor de x para o qual $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow 2x = -4 \Rightarrow x = -2$$

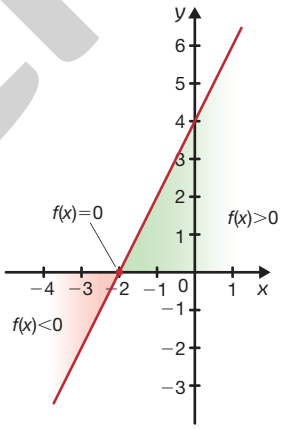
Agora, esboçamos o gráfico de f.

x	$f(x)$
-2	0
0	4



Observando o gráfico, verificamos que essa função é crescente. Podemos verificar também que a função:

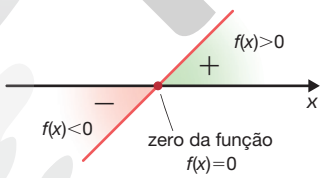
- se anula, ou seja, $f(x) = 0$, quando $x = -2$.
- é positiva, ou seja, $f(x) > 0$, quando $x > -2$.
- é negativa, ou seja, $f(x) < 0$, quando $x < -2$.



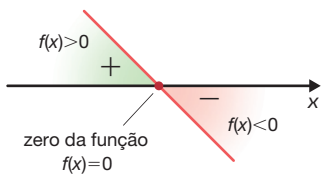
Também podemos afirmar que essa função é crescente pelo fato de o coeficiente a ser maior do que zero.

A função afim dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, pode ser crescente ou decrescente.

- Quando f é crescente $(a > 0)$:



- Quando f é decrescente $(a < 0)$:



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

7 Estude o sinal da função definida por: Respostas no final do livro.

a) $f(x) = 3x + 6$. b) $f(x) = -x - 5$. c) $f(x) = \frac{x}{2} - 3$. d) $f(x) = -3x + 7$.

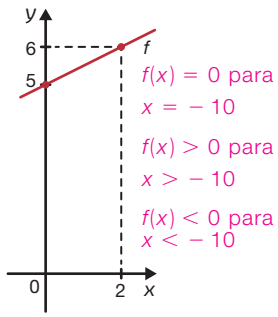
8 Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = -3x + 15$ e $g(x) = 4x - 8$, determine os valores de x em que ambas assumem valores positivos. $x \in]2, 5[$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

9 Realize o estudo do sinal da função, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, representada em cada gráfico.

a)

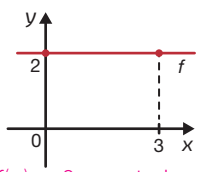


$f(x) = 0$ para $x = -10$

$f(x) > 0$ para $x > -10$

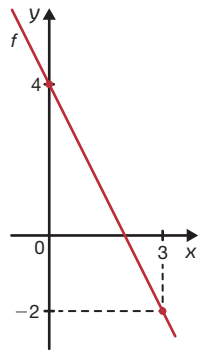
$f(x) < 0$ para $x < -10$

b)



$f(x) > 0$ para todo x real

c)



$f(x) = 0$ para $x = 2$

$f(x) > 0$ para $x < 2$

$f(x) < 0$ para $x > 2$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

10 Um estacionamento oferece duas opções de preço para seus clientes.

> **A** R$ 6,00 fixo mais R$ 4,50 por hora;
>
> **B** R$ 6,50 por hora.

a) Escreva a lei de formação de uma função A que expresse o valor em reais a ser pago ao estacionamento em função do tempo t, medido em horas, caso um cliente decida pela opção A. $A(t) = 4{,}5t + 6$

b) Escreva a lei de formação de uma função B que expresse o valor em reais a ser pago ao estacionamento em função do tempo t, medido em horas, caso um cliente decida pela opção B. $B(t) = 6{,}5t$

c) Quais são os intervalos de tempo em que cada opção é mais vantajosa?

> Uma maneira de resolver o item **c** é estudar o sinal da função F definida por $F(t) = A(t) - B(t)$.

11 (OBM) As seguradoras de automóveis A e B cobram um valor anual (prêmio) mais um valor que o usuário deve pagar em caso de acidente (franquia). Jean quer fazer um seguro para seu automóvel e recebeu as seguintes propostas das seguradoras:

Seguradora A: prêmio anual de R$ 1 500,00 e franquia de R$ 1 400,00.

Seguradora B: prêmio anual de R$ 1 700,00 e franquia de R$ 700,00.

Para que valha a pena contratar a Seguradora A, Jean não deve se acidentar com o carro por pelo menos n anos. O valor de n é: alternativa **c**

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5 e) 6

12 Um representante de vendas recebeu duas propostas para alteração de seu salário.

- 1ª proposta: R$ 1 600,00 de salário base mais 5% de comissão em suas vendas.
- 2ª proposta: R$ 1 100,00 de salário base mais 7,5% de comissão em suas vendas.

a) Escreva a lei de formação que relaciona o salário total S desse representante com o valor total v de suas vendas no mês, para cada proposta. 1ª proposta: $S_1(v) = 1\,600 + 0{,}05v$; 2ª proposta: $S_2(v) = 1\,100 + 0{,}075v$

b) Para quais valores de vendas o salário de cada proposta é mais vantajoso para o representante? Para vendas menores do que R$ 20 000,00, a 1ª proposta é mais vantajosa; para vendas maiores do que R$ 20 000,00, a 2ª proposta é mais vantajosa.

13 Para alugar um automóvel, Paulo consultou duas locadoras. Ele obteve os seguintes preços para o aluguel de um automóvel da mesma categoria:

ILUSTRAÇÕES: LEO GIBRAN

locadora A: $V_A(x) = 82 + 0{,}52x$; locadora B: $V_B(x) = 76 + 0{,}55x$

a) Escreva a lei de formação que relaciona o preço total V a ser pago em função dos quilômetros rodados x para o automóvel de cada locadora.

b) Sabendo que Paulo pretende rodar cerca de 75 km, em qual das locadoras será mais vantajoso alugar o automóvel? locadora B

c) Determine o intervalo de quilômetros rodados em que cada locadora oferece o menor preço. Resposta no final do livro.

14 Com o objetivo de arrecadar dinheiro para sua formatura, os estudantes de uma turma compraram 75 vales *pizza*, pagando por eles R$ 1 500,00. Para facilitar o troco, eles venderam cada vale *pizza* por um valor inteiro, em reais.

a) Qual será o lucro dos estudantes se eles venderam cada vale *pizza* por R$ 30,00? R$ 750,00

b) Escreva a lei de formação de uma função que expresse o lucro/prejuízo L dos estudantes em função do preço v a que eles venderam cada vale *pizza*. $L(v) = 75v - 1\,500$

c) Qual deve ser o preço mínimo de cada vale *pizza* para que haja algum lucro, considerando que todas as *pizzas* sejam vendidas? R$ 21,00

10. c) A opção B é mais vantajosa para um período menor do que 3 h e a opção A, para um período maior do que 3 h. As opções A e B têm o mesmo preço para 3 h.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

7 Proporcionalidade e função linear

BNCC
- EM13MAT302
- EM13MAT401

Por que pagamos tributos?

Você pode até não saber, mas quando alguém compra um perfume nacional está pagando até 70% do seu valor em tributos. Isso significa, por exemplo, que ao comprar um desses itens no valor de R$ 100,00, até R$ 70,00 são recolhidos ao governo. De maneira geral, todos os produtos que compramos têm em seu preço uma porcentagem de tributos, uns mais outros menos. Também pagamos tributos por serviços que adquirimos, como nas tarifas de telefone, água ou energia elétrica. No entanto, você sabe o que são tributos e para que eles servem?

Os tributos cobrados pelos governos municipal, estadual e federal têm a finalidade de custear serviços públicos como saúde, educação, segurança e transporte. Quando os pagamos, estamos cumprindo nosso dever de cidadãos, contribuindo para que a sociedade possa melhorar sua condição de vida ao usufruir de bens e serviços públicos de qualidade. Os impostos caracterizam um tipo de tributo. Veja alguns exemplos:

Temos também o importante papel de fiscalizar a aplicação do dinheiro arrecadado, a fim de que favoreça a sociedade, permitindo melhorias nos serviços públicos.

IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano): é cobrado pelos municípios anualmente e incide sobre propriedades urbanas.

IPVA (Imposto sobre Propriedade de Veículos Automotores): é um tributo estadual que incide sobre a propriedade de veículos automotores, como automóveis, motocicletas e ônibus.

IRPF (Imposto de Renda da Pessoa Física): é cobrado pelo governo federal e incide sobre a renda (salários, pensões, aluguel etc.). Depois da declaração de ajuste anual, em alguns casos, há uma restituição feita pelo governo federal.

ISS (Imposto sobre Serviços de Qualquer Natureza): é cobrado por municípios e pelo governo federal de quem presta serviços. Quem contrata um serviço paga o tributo embutido no valor.

ICMS (Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Prestação de Serviços): é cobrado pelos estados e incide sobre a circulação de produtos. Na maioria dos casos o ICMS já vem embutido nos preços desses produtos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A importância dos tributos está no desenvolvimento social do país e para o crescimento econômico, pois por meio do pagamento de tributos contribuímos para a melhoria de diversos serviços prestados a nós. Vejamos a seguir como os tributos são arrecadados e alguns setores nos quais esses recursos são aplicados.

Arrecadação:

Quando compramos um produto e pedimos a nota ou cupom fiscal, estamos assegurando a arrecadação de tributos que deverão ser revertidos em benefícios aos cidadãos.

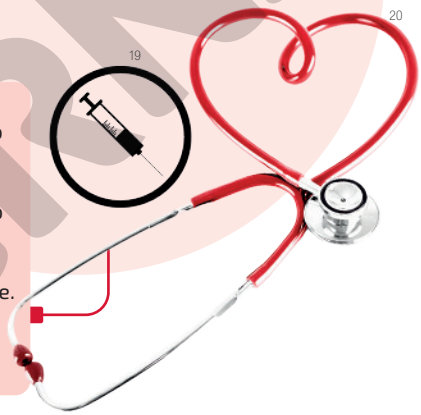
Verifique a possibilidade de levar uma nota ou um cupom fiscal para a sala de aula para que os alunos possam examinar.

Exija sempre a nota ou o cupom fiscal na compra de um produto. Nela, é possível verificar o valor aproximado de tributos referente aos produtos comprados.

Destinação:

Entre os serviços públicos custeados pela arrecadação de tributos está a educação. A destinação de tributos deve propiciar condições de desenvolver uma educação de qualidade aos estudantes brasileiros.

A saúde pública também é custeada pela arrecadação de tributos. Nos postos de saúde, um dos bens oferecidos à sociedade são as vacinas para prevenir diversas doenças, como a vacina contra a poliomielite. Todos devem ficar atentos para tomar as vacinas nas idades recomendadas.



FOTOMONTAGEM DE JULIANA DEL ANHOL AZEVEDO. FOTOS: 1.NADIA GRAPES/SHUTTERSTOCK; 2.GAIDAMASHCHUK/SHUTTERSTOCK; 3.PHOTO MELON/SHUTTERSTOCK; 4.JONES M/SHUTTERSTOCK; 5.POLYGRAPHUS/SHUTTERSTOCK; 6.RAWPIXEL/SHUTTERSTOCK; 7.ANNETTE SHAFF/SHUTTERSTOCK; 8.VITMART/SHUTTERSTOCK; 9.EAKARAT BUANOI/SHUTTERSTOCK; 10.ERIC ISSELEE/SHUTTERSTOCK; 11.BRENDA ROCHA/SHUTTERSTOCK; 12.PPART/SHUTTERSTOCK; 13.PRESSLAB/SHUTTERSTOCK; 14.HOLY POLYGON/SHUTTERSTOCK; 15.BOWRANN/SHUTTERSTOCK; 16.PERFECT VECTORS/SHUTTERSTOCK; 17.RASHAD ASHUR/SHUTTERSTOCK; 18.NATTIKA/SHUTTERSTOCK; 19.OUR WORK/SHUTTERSTOCK; 20.ANDREY_KUZMIN/SHUTTERSTOCK

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Além dos tributos citados no texto, pesquise outros e em quais situações eles são cobrados. Alguns exemplos de tributos: IPI (Imposto sobre Produtos Industrializados), IOF (Imposto sobre Operações Financeiras), IRPJ (Imposto de Renda Pessoa Jurídica) e COFINS (Contribuição para o Financiamento da Seguridade Social).

B Suponha que o ICMS incidente sobre determinado produto corresponda a 17% de seu valor de venda. Se a unidade do produto custa R$ 3,00, calcule o valor desse tributo pago na compra de:

- 1 unidade R$ 0,51
- 5 unidades R$ 2,55
- 35 unidades R$ 17,85

Ser consciente

A Em sua opinião, por que é importante exigirmos a nota ou cupom fiscal quando realizamos uma compra? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que, dentre outros objetivos, para garantir a arrecadação dos tributos e assegurar direitos sobre o produto adquirido, como a troca no caso de um eventual defeito.

B Em sua opinião, os tributos arrecadados no Brasil são adequadamente aplicados, resultando na oferta de serviços públicos de qualidade? Converse com o professor e os colegas sobre esse assunto. Resposta pessoal.

Na questão do item **B**, sobre o ICMS, é possível escrever a função linear dada pela lei de formação $f(x) = 0{,}51x$, que associa a quantidade x de unidades do produto indicado ao valor y do ICMS. Note que, nesse caso, o valor do ICMS é diretamente proporcional à quantidade de unidades de um mesmo produto. Nas páginas a seguir vamos estudar um pouco mais sobre as **funções lineares** e sua relação com a **proporcionalidade**.

MODERNA

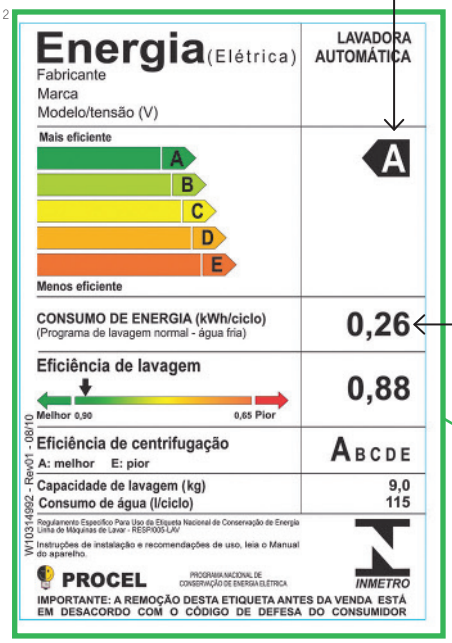
A proporcionalidade e a função linear

Os nomes do fabricante, da marca e do modelo/tensão que aparecem nesta página são fictícios.

Uma maneira de economizar energia elétrica é optar por eletrodomésticos e equipamentos eletrônicos com baixo consumo. Nesse sentido, o consumidor pode, no momento da compra, observar o nível de eficiência energética indicado no selo Procel.

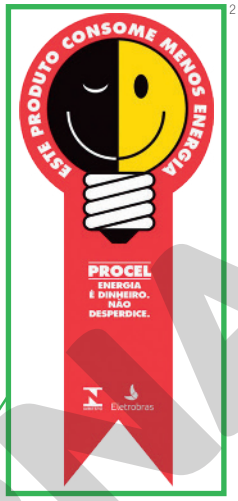
A letra indica a eficiência energética do equipamento.

Indica o consumo de energia, em kWh/ciclo.



lavadora de roupas

FOTOMONTAGEM DE JOHANNES DE PAULO. FOTOS: 1. RAF QUINTERO/SHUTTERSTOCK; 2. PROCEL



O selo Procel tem o objetivo de indicar aos consumidores os produtos com os melhores níveis de eficiência energética em cada categoria.

Certa lavadora de roupas com classificação **A** no selo Procel consome 0,4 kWh em 1 h de funcionamento, que corresponde a um ciclo de lavagem de roupas.

Note que, se dobrarmos o tempo de uso, o consumo também dobrará; se triplicarmos o tempo de uso, o consumo também triplicará; e assim por diante. Nesse caso, dizemos que as grandezas "tempo" e "consumo" são **diretamente proporcionais**. Podemos representar esse consumo com a função definida por:

consumo total de energia elétrica

consumo de energia elétrica da lavadora por hora (em kWh)

$$y = 0{,}4x$$

tempo de uso da lavadora

Você provavelmente estudou em anos anteriores que existem grandezas relacionadas de maneira **inversamente proporcional**, ou seja, quando uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção. Nesse caso, a relação entre essas grandezas não pode ser descrita por uma função linear.

Note que o consumo em quilowatt-hora (y) está em função do tempo em horas (x) de uso da lavadora.

Ao calcularmos a razão $\frac{y}{x}$ (com $x \neq 0$) para os valores correspondentes de x e y, obtemos o mesmo resultado, o qual chamamos de **constante de proporcionalidade**.

$$\frac{0{,}4}{1} = \frac{0{,}8}{2} = \frac{1{,}2}{3} = 0{,}4$$ ← constante de proporcionalidade

De modo geral, na função linear dada por $y = ax$ (com $x \neq 0$), temos $\frac{y}{x} = \frac{ax}{x} = a$, ou seja, a constante de proporcionalidade é igual ao coeficiente a.

No contexto

Considere que, em 2020, a tributação incidente sobre uma lavadora de roupas seja de 43%. Escreva a lei de formação de uma função que expressa o valor V pago de tributos em relação ao preço x da lavadora de roupas. Em seguida, determine qual seria, em 2020, o valor de tributos pago na compra de uma lavadora de roupas cujo preço é R$ 3 250,00.

$a = \frac{0{,}43}{1} \Rightarrow V(x) = 0{,}43x;\ V(3\,250) = 0{,}43 \cdot 3\,250 = 1\,397{,}5;$ R$ 1 397,50

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. a) $P(m) = 39{,}90m$

1 Em cada item, faça o que se pede.

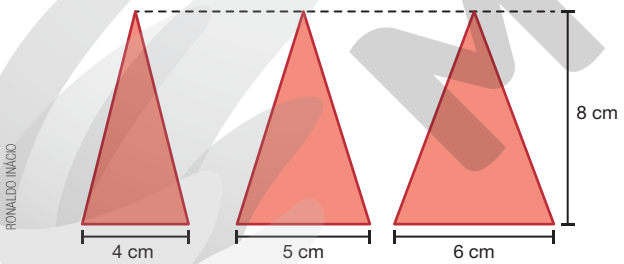
a) Em alguns restaurantes, o preço da refeição varia de acordo com a massa, em quilogramas, da porção de alimento consumida pelo cliente. O preço do quilograma de alimento consumido em determinado restaurante é R$ 39,90. Escreva a lei de formação de uma função que expressa o preço P, em reais, pago por um cliente em função da massa m, em quilogramas, da porção de alimento consumida.

b) Entre as pedras preciosas mais caras do mundo está o raríssimo diamante vermelho. Cada miligrama dele custa cerca de 22 mil reais. Escreva a lei de formação de uma função que expressa o preço aproximado P de um diamante vermelho de acordo com sua massa m, medida em miligramas. $P(m) = 22\,000m$

c) A taxa de entrega cobrada em certa pizzaria consiste de uma taxa fixa de R$ 2,00 mais R$ 0,80 por quilômetro percorrido. Escreva a lei de formação de uma função que expressa a taxa de entrega T, em reais, cobrada em função da distância d percorrida, medida em quilômetros. $T(d) = 0{,}8d + 2$

Agora, esboce o gráfico de cada uma das funções cuja lei de formação você escreveu. Em seguida, indique em quais das situações apresentadas, as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais e determine as constantes de proporcionalidade. Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento do professor**.

2 Observe a sequência de triângulos com mesma altura.



RONALDO INÁCIO

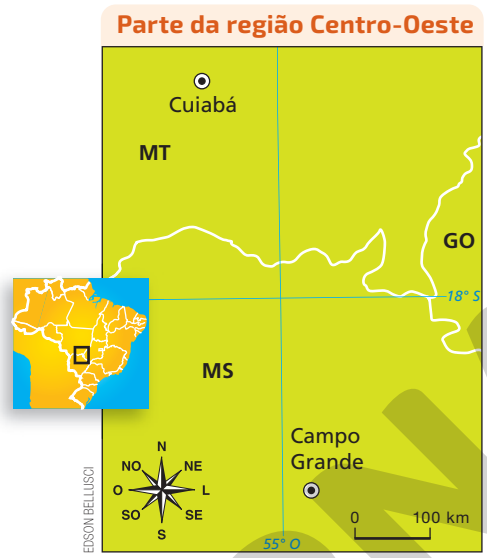
a) Escreva a lei de formação de uma função que expresse a área A de cada um desses triângulos em função do comprimento b de sua base. Nessa situação, as grandezas "área" e "comprimento da base" são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta.

b) Qual é a área de um triângulo nessa sequência, cuja base tem 15 cm de comprimento? 60 cm²

c) Qual é o comprimento da base de um triângulo nessa sequência, sabendo que sua área é 32 cm²? 8 cm

2. a) $A(b) = 4b$. Sim, pois a função que expressa a relação entre a área e o comprimento da base é uma função linear.

3 Observe parte da região Centro-Oeste do Brasil.

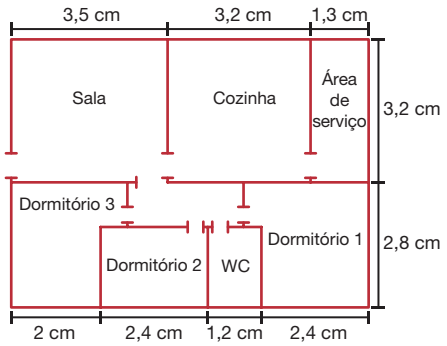


Fonte de pesquisa: *Atlas geográfico escolar*. 8 ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018.

a) Determine a lei de formação de uma função que permite calcular a distância real em quilômetros R, em linha reta, entre as cidades, por meio das distâncias d em centímetros representadas no mapa. $R(d) = 100d$

b) Qual é a distância real aproximada, em linha reta, entre as cidades de Campo Grande e Cuiabá, em quilômetros, sabendo que a distância, nesse mapa, entre essas cidades é 5,63 cm? 563 km

4 Jorge representou a casa onde mora por meio de um esquema. As medidas, em centímetros, usadas para fazer o esquema estão indicadas a seguir, desconsiderando as espessuras das paredes.



RONALDO INÁCIO

a) Quais são as medidas reais da cozinha, sabendo que essa casa tem 10 m de comprimento por 7,5 m de largura? 4 m de comprimento por 4 m de largura

b) Qual foi a escala utilizada por Jorge? 1 cm : 125 cm

c) Escreva a lei de formação de uma função que permita calcular as medidas reais m, em metros, de cada cômodo, por meio das medidas x, em centímetros, indicadas no esquema. $m(x) = 1{,}25x$

d) Qual é a constante de proporcionalidade da função cuja lei de formação você escreveu no item c? 1,25

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

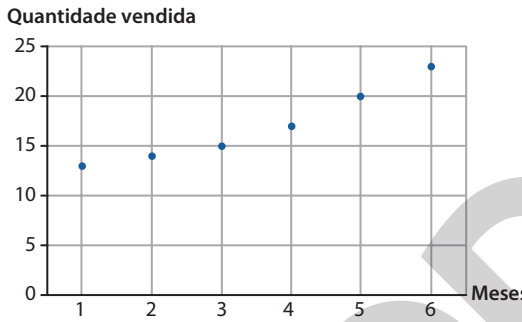
8 Modelo linear

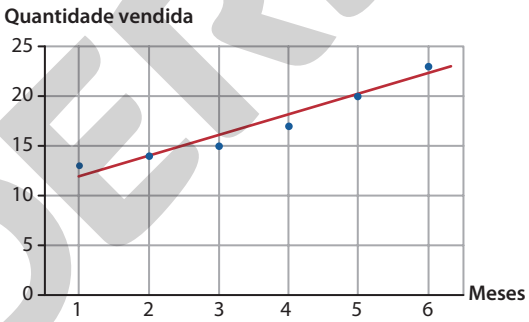
BNCC
- EM13MAT302
- EM13MAT510

É possível prever vendas?

Imagine que você pretende iniciar uma microempresa na área de tecnologia, por exemplo, atuando no ramo de assistência técnica para aparelhos celulares com a venda de peças, serviços, entre outros. Para que você possa abrir e manter seu negócio, obtendo sucesso, é importante planejar a empresa de modo a atender às demandas com qualidade, realizando investimentos, sempre que necessário, e gerando lucro.

Vamos supor que um dos principais serviços atendidos nessa empresa seja a venda de acessórios, como fones de ouvido e carregadores de celular. Considerando que a empresa já esteja em seu sétimo mês de funcionamento e buscando realizar uma previsão para os próximos meses no que se refere aos custos com a aquisição desse tipo de produto, você representou as quantidades vendidas (y) em função do tempo (x), conforme indicado pelos pontos no primeiro gráfico.





Note que os pontos do gráfico estão próximo de uma reta. De maneira aproximada, admitindo que y esteja em função de x, podemos usar técnicas para relacionar as variáveis x e y pela equação $y = 2x + 10$ que descreve uma reta, conforme estudaremos nas próximas páginas.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

> Considerando os dados a respeito da venda de acessórios nos seis primeiros meses, calcule uma estimativa de venda para o sétimo e oitavo mês.

24 unidades, 26 unidades

Evidentemente, essa aproximação será confiável em curtos períodos, desde que não ocorram modificações significativas que alterem a tendência observada. Por outro lado, quando a linha reta não é a mais indicada, há também as curvas de tendência, mas esse tipo de estudo faz parte de um ramo mais amplo da Estatística Aplicada chamado **Análise de Regressão**.

Embora seja um exemplo hipotético, um **modelo linear** ajuda na previsão de vendas futuras, buscando um equilíbrio entre os bens oferecidos e o interesse dos consumidores, conforme você estudou no início do tema **6** sobre oferta e demanda.

ILUSTRAÇÕES: KEITHY MOSTACHI

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.UNKNOWN MAN/SHUTTERSTOCK; 2.HN WORKS/SHUTTERSTOCK; 3.EVGENY KARANDAEV/SHUTTERSTOCK; 4.EA230311/SHUTTERSTOCK; 5.SHOW MUST GO ON/SHUTTERSTOCK; 6.PHOTKA/SHUTTERSTOCK; 7.HN WORKS/SHUTTERSTOCK; 8.ALICE RODNOVA/SHUTTERSTOCK; 9.SEDMI/SHUTTERSTOCK; 10.SILVER TIGER/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

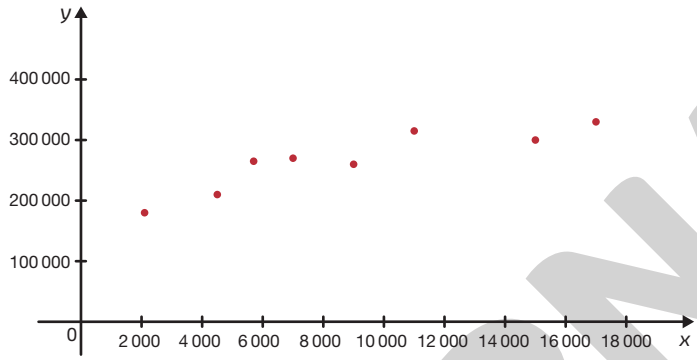
MODERNA

O modelo linear

Na página anterior, optou-se por utilizar um modelo linear para expressar a relação entre os dados apresentados, pois os pontos estão próximo de uma reta. Agora, analisaremos outro exemplo.

O quadro e o gráfico a seguir apresentam o retorno em vendas y de certa empresa em função do investimento em propaganda x.

Investimento em propaganda (em reais)	Retorno em vendas (em reais)
2 100	180 000
4 500	210 000
5 700	265 000
7 000	270 000
9 000	260 000
11 000	315 000
15 000	300 000
17 000	330 000



Novamente, podemos observar que os pontos estão próximo de uma reta. Nesse caso, é possível captar a tendência dos dados utilizando um **modelo linear**, ou seja, um modelo do tipo $y = ax + b$. Existem inúmeras possibilidades de retas para aproximar esses dados, por exemplo, se considerarmos a reta que passa pelos pontos $(2\,100, 180\,000)$ e $(17\,000, 330\,000)$. Nesse contexto, temos:

$$a = \frac{f(17\,000) - f(2\,100)}{17\,000 - 2\,100} \simeq 10{,}07$$

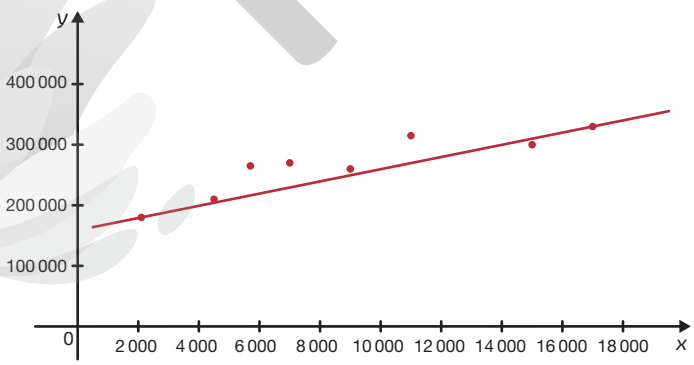
Além disso:

$$f(2\,100) = 10{,}07 \cdot 2\,100 + b \Rightarrow b = 158\,853$$

Assim:

$$y = 10{,}07x + 158\,853$$

Observe, a seguir, o modelo linear passando pelos pontos $(2\,100, 180\,000)$ e $(17\,000, 330\,000)$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Note que o modelo se ajusta razoavelmente aos dados, porém ele fornece valores menores do que a maior parte dos retornos em vendas. No entanto, a fim de obtermos um modelo linear satisfatório, podemos utilizar o procedimento chamado **regressão linear**. Para a situação apresentada, usaremos a planilha eletrônica Calc.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Modelo de regressão linear

As planilhas eletrônicas são tabelas que podem ser preenchidas com diversas informações, como textos, dados numéricos e fórmulas. Uma planilha se divide em regiões retangulares, denominadas células, indicadas pelo cruzamento de uma linha (representada por um número) com uma coluna (representada por uma letra). As planilhas eletrônicas são úteis para tratar de diversos assuntos, como os que estão relacionados à construção de modelos matemáticos. Veja mais informações sobre o Calc no Suplemento para o professor.

A seguir, vamos construir um diagrama de dispersão, tomando como base o conjunto de dados apresentado na página anterior.

> O conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano que representam os dados experimentais é chamado **diagrama de dispersão**.

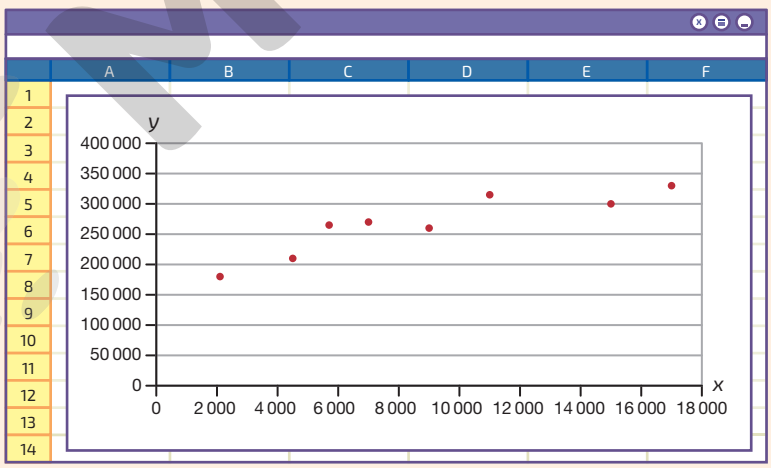
Também obteremos uma linha de tendência e a lei de formação da função que associa as variáveis envolvidas, ou seja, teremos um modelo de regressão linear. Para fazer esse diagrama, usaremos o Calc, que é uma das planilhas eletrônicas disponíveis.

A Com uma planilha eletrônica "aberta", preencha as células com as informações apresentadas no quadro a seguir.

	A	B
1	Investimento em propaganda (em reais)	Retorno em vendas (em reais)
2	2100	180000
3	4500	210000
4	5700	265000
5	7000	270000
6	9000	260000
7	11000	315000
8	15000	300000
9	17000	330000

SERGIO L. FILHO

B Para construir o diagrama de dispersão, selecione o intervalo **A2:B9**. Em seguida, clique na opção **Inserir** e, depois, em **Gráfico**. Na janela **Tipos de gráfico**, selecione a opção **XY (Dispersão)** somente pontos. Na aba **Elementos do gráfico**, desmarque a opção **Exibir legenda**, e nos campos **Eixo X** e **Eixo Y** preencha, respectivamente, *x* e *y*. Por fim, clique em **Concluir**.



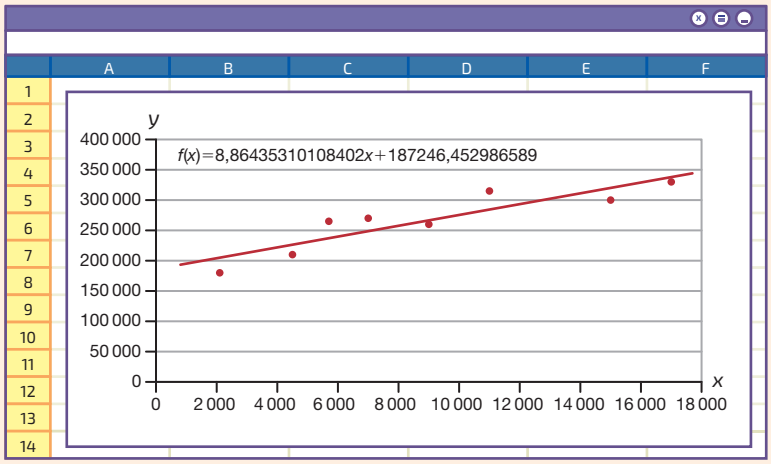
RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

> Os elementos do gráfico podem ser formatados depois de sua construção. É possível alterar, por exemplo, as escalas dos eixos, as linhas de grade e os estilos da linha e dos pontos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

C Construa a linha de tendência e exponha a lei de formação da função que associa as variáveis envolvidas. Para isso, clique com o botão direito do *mouse* sobre um dos pontos do gráfico e selecione a opção **Inserir linha de tendência...**. Em seguida, na aba **Tipo** clique em **Linear**, marque a opção **Mostrar equação** e clique em **OK**.



O programa mostra o modelo com uma aproximação de 14 casas decimais. Nesse caso, o modelo de regressão para a situação apresentada, com aproximação de duas casas decimais, é:

$$y = 8{,}86x + 187\,246{,}45$$

Agora é com você! Respostas no Suplemento para professor.

1 Observe os dados apresentados no quadro a seguir.

x	10	12	14	16	18	20	22	24
y	338	341	344	347	351	354	356	358

Com base nesses dados, construa um diagrama de dispersão.

2 Construa um modelo de regressão linear para os dados apresentados na questão **1**.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Utilizando o modelo obtido na seção **Acessando tecnologias**, estime o retorno em vendas caso essa empresa invista:

- R$ 8 500,00 em propaganda.
- R$ 120 000,00 em propaganda.

Resolução

Utilizando a fórmula $y = 8{,}86x + 187\,246{,}45$ para:

- $x = 8\,500$, obtemos:

$$y = 8{,}86 \cdot 8\,500 + 187\,246{,}45 = 262\,556{,}45$$

Caso a empresa invista R$ 8 500,00 em propaganda, estima-se um retorno em vendas de cerca de 260 mil reais.

- $x = 120\,000$, obtemos:

$$y = 8{,}86 \cdot 120\,000 + 187\,246{,}45 = 1\,250\,446{,}45$$

Caso a empresa invista R$ 120 000,00 em propaganda, estima-se um retorno em vendas de cerca de 1 milhão e 250 mil reais.

A estimativa obtida caso a empresa invista R$ 120 000,00 é arriscada, pois envolve uma quantia muito maior do que as observadas.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

RONALDO INÁCIO E SÉRGIO L. FILHO

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

4. a) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

1 Cristina é uma estudante de Física. Veja os resultados obtidos por ela em um experimento envolvendo duas grandezas *X* e *Y*.

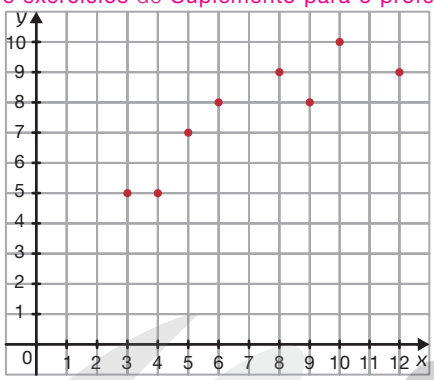
Grandeza *X*	Grandeza *Y*
1	80,5
2	81,6
3	82,1
4	83,7
5	83,9
6	85,0

Construa um modelo linear para os dados apresentados. Uma possível resposta: $Y = 0{,}9X + 79{,}6$

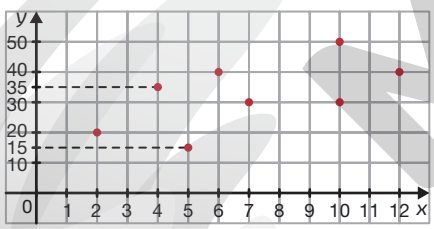
2 Com o auxílio de uma planilha eletrônica, construa um modelo de regressão linear para cada diagrama de dispersão a seguir.

Resposta na seção **Resolução dos problemas e exercícios** do **Suplemento para o professor**.

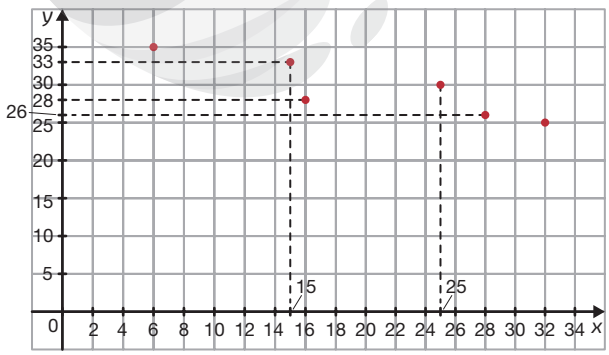
a)



b)



c)



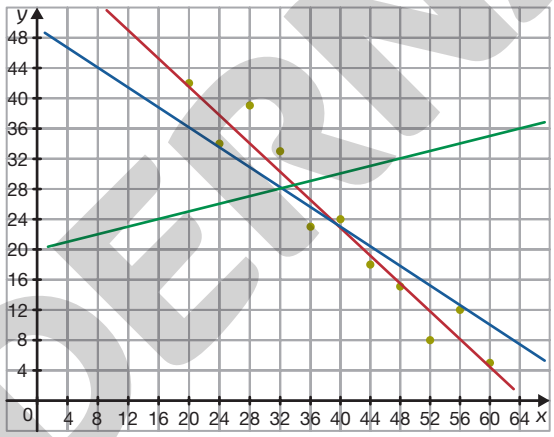
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

3 Os dados no quadro a seguir indicam a quantidade *y* de acidentes causados em uma cidade em função da idade *x*, em anos, dos motoristas.

x	*y*
20	42
24	34
28	39
32	33
36	23
40	24

x	*y*
44	18
48	15
52	8
56	12
60	5

a) Entre as retas apresentadas a seguir, qual delas melhor se ajusta aos dados do quadro?
A reta em vermelho.



RONALDO INÁCIO

b) Qual das fórmulas a seguir corresponde à reta indicada no item anterior? $y = -0{,}925x + 60$

- $y = 0{,}925x + 60$
- $y = -0{,}925x + 48$
- $y = -0{,}925x + 60$

4 Certa empresa realizou um teste de desempenho de um de seus *tablets*. Veja os dados obtidos.

Tempo restante de carga de bateria (*y*)	1 hora	3 horas	6 horas	8 horas
Tempo de uso com a tela ligada (*x*)	12 horas	7 horas	4 horas	3 horas

a) Esboce um diagrama de dispersão com os dados apresentados.

b) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, construa um modelo de regressão linear que descreva a relação entre as variáveis *x* e *y*.
$y = -0{,}73x + 9{,}28$

c) Use a equação obtida no item **b** para prever:

- o tempo restante de carga de bateria, em horas e minutos, após, exatamente, 5 horas de uso. aproximadamente 5 h 38 min
- o tempo necessário de uso com a tela ligada, em horas e minutos, para que a carga da bateria acabe. aproximadamente 12 h 43 min

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

5 O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma unidade de medida utilizada para calcular o progresso a longo prazo em três dimensões básicas do desenvolvimento de uma sociedade: renda, educação e saúde. Veja, na tabela, o IDH anual do Brasil de 2015 a 2019.

IDH brasileiro de 2015 a 2019

Ano	2015	2016	2017	2018	2019
IDH	0,755	0,757	0,760	0,761	0,761

Fontes de pesquisa: <http://hdr.undp.org/en/data>. Acesso em: 4 ago. 2020. <http://hdr.undp.org/en/content/2019-human-development-index-ranking>. Acesso em: 4 ago. 2020.

a) Esboce um diagrama de dispersão com os dados apresentados na tabela sobre o IDH brasileiro. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

b) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, construa um modelo de regressão linear para os dados apresentados. $y = 0{,}0016x - 2{,}47$, em que x e y indicam, respectivamente, o ano e o IDH.

c) O quadro a seguir indica os grupos em que os países são classificados de acordo com seu IDH, considerando 3 casas decimais.

Muito alto desenvolvimento humano	IDH $\geqslant$ 0,800
Alto desenvolvimento humano	0,700 $\leqslant$ IDH $\leqslant$ 0,799
Médio desenvolvimento humano	0,550 $\leqslant$ IDH $\leqslant$ 0,699
Baixo desenvolvimento humano	IDH $<$ 0,550

De acordo com o modelo construído por você no item **b**, estime em qual ano o Brasil será classificado como "Muito alto desenvolvimento humano". aproximadamente em 2044

6 Uma das ferramentas do *marketing* digital é a divulgação de produtos e serviços feita por meio de influenciadores digitais, que disponibilizam, em suas redes sociais, *links* que redirecionam o internauta ao *site* de empresas. Veja na tabela a quantidade de acessos mensais no *site* de certa empresa cujo *link* foi divulgado por diversos influenciadores.

Quantidade de acessos mensais no *site* de certa empresa por meio do *link* divulgado por influenciadores digitais em março de 2020

Quantidade de influenciadores digitais contratados no mês	Quantidade de acessos
6	15 345
8	18 934
10	18 000
15	20 000
16	19 980
18	21 000
19	21 230
22	25 000
25	28 000
30	29 340

Fonte de pesquisa: Departamento de informática da empresa.

As informações apresentadas na tabela são fictícias.

a) Faça um diagrama de dispersão dos dados com base na tabela apresentada.

b) Com o auxílio de uma planilha eletrônica, obtenha um modelo de regressão linear para os dados apresentados. $y = 559{,}61x + 12\,225$

c) De acordo com o modelo obtido por você no item **b**, estime:

- a quantidade de acessos mensais caso a empresa contratasse 23 influenciadores digitais. aproximadamente 25 096 acessos
- a quantidade de influenciadores contratados para que o *site* tenha cerca de 33 mil acessos mensais a partir de *links* divulgados. aproximadamente 37 influenciadores

6. a) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

C) Resposta pessoal. Nesse item, espera-se que o aluno represente o salto do canguru por meio de parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo.

9 Função quadrática

D) Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: trajetória de uma bola lançada de um jogador a outro durante um jogo de futebol, trajetória de uma bala de canhão ou a trajetória do salto de um golfinho.

BNCC
• EM13MAT302

Os maiores saltadores da natureza

Você já disputou uma corrida no saco? É preciso ir pulando, pois é muito difícil mover os pés separadamente. Os cangurus também usam essa técnica ao deslocarem-se por meio de saltos, utilizando suas patas traseiras como se fossem molas e sua longa cauda para manter o equilíbrio.

Em extrema necessidade, os saltos de alguns cangurus podem atingir 3,3 m de altura e cerca de 9 m de comprimento. Essas medidas, para comparação, são maiores do que a altura e o comprimento de diversos modelos de micro-ônibus, por exemplo.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Por que, ao se locomoverem, os cangurus saltam em vez de caminhar?
Porque eles não conseguem mover suas patas separadamente, exceto ao nadar.

B A trajetória dos saltos dos cangurus descreve uma reta ou uma curva?
uma curva

C Represente, no caderno, a possível trajetória do salto de um canguru desde o momento do primeiro impulso até sua aterrissagem no solo.

D Descreva um exemplo de situação em que a trajetória assumida por um objeto ou ser vivo se assemelha à do salto de um canguru.

Sob certas condições, a trajetória descrita pelo salto de um animal ou por um projétil arremessado da superfície da Terra em qualquer direção não vertical, é uma parte de uma **parábola**. O lançamento de uma bola de basquete ou de golfe, sob certas condições, é outro exemplo. Nas próximas páginas, vamos estudar um pouco mais sobre a relação entre essa figura geométrica e a **função quadrática**.

Fonte de pesquisa: Enciclopédia da vida selvagem Larousse. *Animais da savana VII*. Rio de Janeiro: Altaya, 1997.

O termo "marsupial" vem do latim *marsupiu*, que significa pequena bolsa, e está relacionado à presença de uma bolsa de pele, conhecida como marsúpio, que fica no ventre da fêmea. Nessa categoria enquadram-se os cangurus, os gambás, os coalas, entre outros.

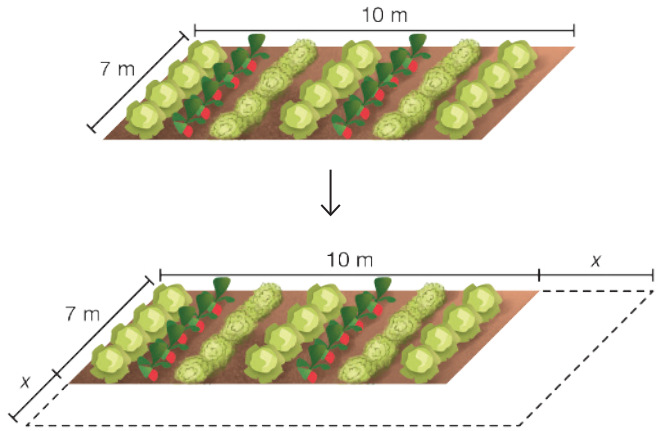
FOTOMONTAGEM DE GUSTAVO PEDROSA. FOTOS: 1.BRADLEY BLACKBURN/SHUTTERSTOCK; 2.CGTERMINAL/SHUTTERSTOCK; 3.MIKROBIUZ/SHUTTERSTOCK; 4.KSYU DENISKA/SHUTTERSTOCK; 5.TGAVRANO/SHUTTERSTOCK; 6.VALENTYNA CHUKHLYEBOVA/SHUTTERSTOCK; 7.WAVEBREAKMEDIA/SHUTTERSTOCK;

MODERNA

Estudando função quadrática

As hortas comunitárias são ótimas alternativas de ocupação para terrenos baldios, espaços muitas vezes utilizados como depósitos de entulhos. Essas hortas oferecem alimentos frescos e saudáveis aos moradores locais, além de, em alguns casos, servirem como fonte de renda.

Em certa horta comunitária, um canteiro de verduras retangular será ampliado em uma mesma medida, tanto no comprimento quanto na largura, como mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

Podemos representar a área $f(x)$ desse canteiro após a ampliação em função da medida x indicada.

$$f(x) = (7 + x)(10 + x)$$
$$f(x) = 70 + 7x + 10x + x^2$$
$$f(x) = x^2 + 17x + 70$$

A área da região determinada pelo retângulo é dada pelo produto do comprimento e da largura.

Se considerarmos $x = 3$, isto é, se o canteiro for ampliado em 3 m na largura e no comprimento, podemos calcular sua área da seguinte maneira:

$$f(3) = 3^2 + 17 \cdot 3 + 70 = 9 + 51 + 70 = 130$$

Portanto, nesse caso, a área do canteiro após a ampliação será 130 m^2.

A fórmula $f(x) = x^2 + 17x + 70$ é um exemplo de lei de formação de função quadrática.

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que a todo número $x \in \mathbb{R}$ associa o número $ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, e $a \neq 0$, é denominada **função quadrática**.

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$
$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ ou } y = ax^2 + bx + c$$

Dizemos que a, b e c são os **coeficientes** da função.

Exemplos

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 2x - 7$. Nesse caso, $a = 1$, $b = 2$ e $c = -7$.
- $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = -x^2 - 9x$. Nesse caso, $a = -1$, $b = -9$ e $c = 0$.
- $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 5x^2 + 1$. Nesse caso, $a = 5$, $b = 0$ e $c = 1$.
- $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $m(x) = -7x^2$. Nesse caso, $a = -7$, $b = 0$ e $c = 0$.

As funções f, g e h, definidas por $f(x) = 6x + 1$, $g(x) = x^3$ e $h(x) = 2^x - 1$ são quadráticas? Por quê?

Não, pois a lei de formação das funções f, g e h não são da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais e $a \neq 0$.

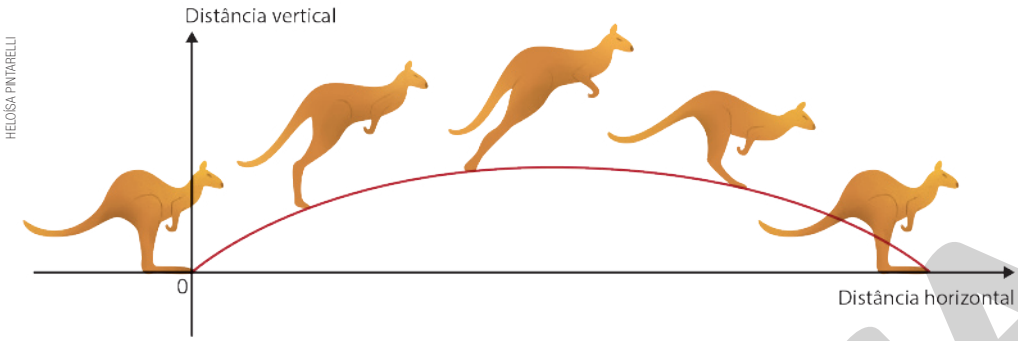
As funções quadráticas em que $b = 0$ e $c = 0$, $b = 0$ e $c \neq 0$, ou $b \neq 0$ e $c = 0$ são denominadas **incompletas**. Nos exemplos acima, g, h e m são funções quadráticas incompletas. Já as funções quadráticas **completas** são aquelas em que $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Nos exemplos acima, f é uma função quadrática completa.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Gráfico de uma função quadrática

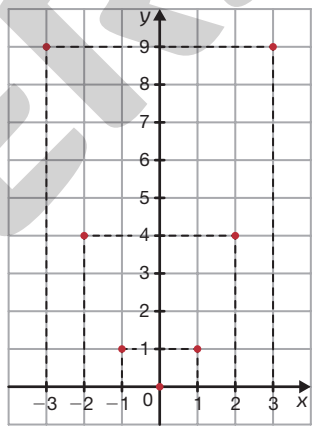
Estudamos anteriormente que o canguru se locomove por meio de saltos. O deslocamento do canguru no salto descreve uma trajetória que se assemelha a uma curva correspondente ao gráfico de uma função quadrática.



HELOÍSA PINTARELLI

De maneira semelhante à função afim, podemos esboçar o gráfico de uma função quadrática utilizando a ideia de representar pares ordenados em um plano cartesiano. Veja a seguir o esboço do gráfico da função quadrática f definida por $f(x) = x^2$.

x	$f(x) = x^2$	(x, y)
-3	$f(-3) = (-3)^2 = 9$	$(-3, 9)$
-2	$f(-2) = (-2)^2 = 4$	$(-2, 4)$
-1	$f(-1) = (-1)^2 = 1$	$(-1, 1)$
0	$f(0) = 0^2 = 0$	$(0, 0)$
1	$f(1) = 1^2 = 1$	$(1, 1)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$f(3) = 3^2 = 9$	$(3, 9)$



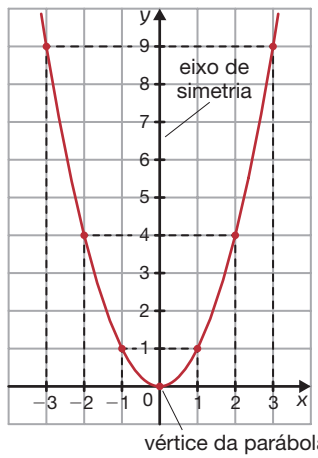
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Note que determinamos apenas alguns pares ordenados que satisfazem essa função. No entanto, como o domínio e o contradomínio de f é o conjunto dos números reais, podemos atribuir infinitos valores para x, obtendo, para cada um deles, um único valor para y e, consequentemente, infinitos pares ordenados (x, y).

Se necessário, relembre os alunos o que é um eixo de simetria, assunto estudado no Ensino Fundamental.

O gráfico da função é o conjunto de todos esses pontos representados no plano cartesiano. Porém, como é impossível calcular as coordenadas de todos eles, calculamos as coordenadas de alguns e traçamos o esboço do gráfico da função.

O gráfico de f é uma curva denominada **parábola**. Toda parábola possui um **eixo de simetria**, que a intersecta em um único ponto, denominado **vértice da parábola**. No caso da função quadrática definida por $f(x) = x^2$, seu eixo de simetria coincide com o eixo y e seu vértice possui coordenadas $(0, 0)$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

alternativas b; c e e

1 Quais das funções a seguir são quadráticas?

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x + 3$.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2 - 8$.

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$.

d) $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $m(x) = 2^x + 5x - 9$.

e) $n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $n(x) = x(7 - x)$.

2 Determine os valores dos coeficientes a, b e c das funções quadráticas cujas leis de formação estão apresentadas a seguir.

a) $f(x) = x^2 + x + 2$ $a = 1$, $b = 1$ e $c = 2$

b) $f(x) = -4x^2 + 2{,}5$ $a = -4$, $b = 0$ e $c = 2{,}5$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{7}x$ $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{7}$ e $c = 0$

d) $f(x) = 3x - 1 - 9x^2$ $a = -9$, $b = 3$ e $c = -1$

e) $f(x) = 7{,}6x^2$ $a = 7{,}6$, $b = 0$ e $c = 0$

f) $f(x) = 2x\left(-x - \frac{5}{x} + 6\right)$ $a = -2$, $b = 12$ e $c = -10$

3 Dadas as funções definidas por $f(x) = 2x^2 - 6x - 4$ e $g(x) = -3x^2 - 5x + 1$, calcule:

a) $f(3)$. -4

b) $f(-2)$. 16

c) $f(0)$. -4

d) $f(-0{,}2)$. $-2{,}72$

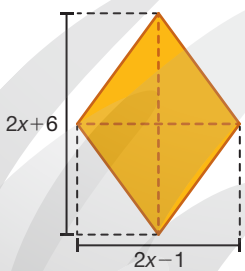
e) $g(1)$. -7

f) $g(-4)$. -27

g) $g(0)$. 1

h) $g\left(\frac{1}{2}\right)$. $-\frac{9}{4}$

4 Considere a região determinada pelo losango. Nela, as medidas estão expressas em centímetros.



RONALDO INÁCIO

A área da região determinada pelo losango pode ser calculada utilizando a fórmula $S = \frac{D \cdot d}{2}$, em que D e d são os comprimentos da diagonal maior e menor, respectivamente.

$S(x) = 2x^2 + 5x - 3$, $x > \frac{1}{2}$

a) Determine a lei de formação da função S que possibilita determinar a área da região determinada por esse losango.

b) Qual é a área dessa região para $x = 3$? E para $x = 8$? $30\ cm^2$; $165\ cm^2$

c) Faz sentido calcular a área dessa região para $x = 0{,}4$? Justifique sua resposta.

5 Dentre os pontos a seguir, quais pertencem ao gráfico da função g definida por $g(x) = -2x^2 + 5x + 3$? B, C e D

- $A(-4, -1)$
- $B(1, 6)$
- $C(3, 0)$
- $D(0, 3)$

6 A partir de 2003, o campeonato brasileiro de futebol da série A passou a ser disputado no sistema de pontos corridos, no qual vence a equipe que somar o maior número de pontos ao final do campeonato. Nesse sistema, todas as equipes se enfrentam e cada uma joga duas vezes contra o mesmo adversário, em turno e returno.

A seguir é apresentado o número de partidas disputadas nesse sistema, em relação ao número de equipes participantes.

Número de equipes	Número de partidas
2	$2(2 - 1) = 2$
3	$3(3 - 1) = 6$
4	$4(4 - 1) = 12$
5	$5(5 - 1) = 20$
...	...
10	$10(10 - 1) = 90$
...	...

a) Escreva a lei de formação da função que relaciona o número p de partidas em função do número n de equipes.

b) Sabendo que na série A do campeonato brasileiro de 2019 participaram 20 equipes, qual foi o número de partidas disputadas? Quantas partidas cada equipe disputou? 380 partidas; 38 partidas

c) Se 25 equipes participarem de um campeonato nesse sistema, quantas partidas serão disputadas? 600 partidas

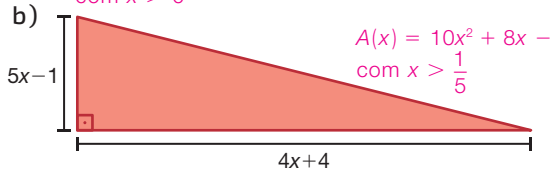
d) Se todas as equipes se enfrentam duas vezes, por que a função p não é definida por $p(n) = n^2$?

7 Escreva a lei de formação de uma função que expressa a área A de cada figura, em função de x.

a)

$A(x) = 4x^2 + 20x$, com $x > 0$

b)



$A(x) = 10x^2 + 8x - 2$, com $x > \frac{1}{5}$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

6. d) Espera-se que os alunos respondam que, dos $n \cdot n = n^2$ jogos, que representam todos contra todos, subtraímos n, que corresponderia aos jogos de "cada equipe contra ela mesma".

6.a) $p(n) = n^2 - n$, com n sendo um número natural maior ou igual a 2.

4. c) Espera-se que os alunos respondam que não, pois o comprimento da diagonal do losango seria expressa por um número negativo $(2x - 1 < 0)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

10 Coeficientes de uma função quadrática

Qual objeto cai mais rapidamente, o mais leve ou o mais pesado?

Ao observar movimentos corriqueiros em nosso dia a dia, cientistas procuram determinar padrões e expressar os resultados em forma matemática. Como exemplo, podemos destacar as leis que regem a queda livre dos corpos, identificadas pelo físico Galileu Galilei (1564-1642), por volta do século XVII. Essa descoberta contrariou o que a maioria acreditava na época, quando tinha como base os ensinamentos do filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), o qual alegava que corpos mais pesados caíam mais rapidamente do que corpos mais leves.

Durante suas reflexões, Galileu concluiu que dois corpos de massas diferentes, quando abandonados de uma mesma altura e desprezando a resistência do ar, alcançam o solo no mesmo instante. Essa conclusão foi obtida a partir da realização de experimentos mentais, conforme cita o historiador Alexandre Koyré (1892-1964), nos quais Galileu simulou a queda de objetos com massas diferentes do alto da torre inclinada de Pisa, localizada em sua cidade natal, observando que eles chegavam ao solo praticamente no mesmo instante.

Além disso, Galileu percebeu que a distância percorrida por um corpo em repouso é proporcional ao quadrado do tempo de queda. Essa relação ficou conhecida como **lei dos corpos em queda** e pode ser descrita por meio da seguinte expressão:

$$d = k \cdot t^2$$

Nela, d representa a distância percorrida pelo objeto, t o tempo de queda e k a constante de proporcionalidade.

FOTOMONTAGEM DE MARIANA COAN. FOTOS: 1.NOPPANUN K/SHUTTERSTOCK; 2.WAGNER SANTOS DE ALMEIDA/SHUTTERSTOCK; 3.SCHANKZ/SHUTTERSTOCK; 4.CHEERS GROUP/SHUTTERSTOCK; 5.KRAKEN IMAGES/SHUTTERSTOCK; 6.ALEVTINA_VYACHESLAV/SHUTTERSTOCK; 7.PRACHAYA ROEKDEETHAWEESAB/SHUTTERSTOCK

O que influencia na queda mais demorada de uma pena em relação à queda de uma maçã, por exemplo, é a resistência do ar, pois no vácuo esses objetos chegariam ao solo ao mesmo tempo.

BNCC
- EM13MAT302
- EM13MAT402
- EM13MAT502
- CE3CNT

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Observe no exemplo do quadro a seguir a relação entre o tempo de queda e a distância percorrida por um corpo. Essas medidas podem ser representadas por meio de um gráfico da distância percorrida pelo objeto (eixo vertical) em função do tempo de queda (eixo horizontal).

Tempo de queda	Distância percorrida
0 s	0 m
1 s	4,9 m
2 s	19,6 m
3 s	44,1 m
4 s	78,4 m

Informe aos alunos que a curva representada no gráfico é parte de um ramo de parábola.

SERGIO L. FILHO

HELOÍSA PINTARELLI

Fontes de pesquisa: GUERRA, Andréia et al. *Galileu e o nascimento da ciência moderna*. São Paulo: Atual, 1997. TREFIL James; HAZEN, M. Robert. *Física viva*: uma introdução à física conceitual. Trad. Ronaldo Sérgio de Biasi. Rio de Janeiro: LTC, 2006. v. 1.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Para os momentos representados no esquema, calcule a razão entre a distância percorrida e o quadrado do tempo de queda do objeto após iniciar o movimento. Que regularidade você pode observar nos resultados obtidos? Por que isso ocorreu?

A) Uma possível resposta: todos os resultados são iguais a 4,9 m/s. Isso ocorre por causa da lei dos corpos em queda, pois a razão corresponde à constante de proporcionalidade.

B Escreva a lei da função que relaciona a distância d percorrida pelo objeto apresentado de acordo com o tempo t de queda. $d(t) = 4{,}9 \cdot t^2$

C Qual é o tipo da função cuja lei de formação você escreveu no item anterior? Com base nessa função, que tipos de informações podem ser obtidos em relação à situação apresentada? Função quadrática. Podem ser obtidas informações a respeito das distâncias percorridas em função do tempo de queda, e vice-versa.

D Junte-se a um colega e pesquisem uma maneira para avaliar a queda livre de um objeto, por exemplo, uma bola de futebol, utilizando tecnologias digitais. Para isso, criem uma apresentação demonstrando o passo a passo de como essa análise foi feita.

Resposta pessoal. Para o desenvolvimento desta questão é sugerido que, em conjunto com os professores da área de Ciências da Natureza, sejam desenvolvidas uma ou mais aulas em que os alunos, a partir dos conhecimentos adquiridos em cada um dos componentes curriculares, tenham condições de fundamentar e defender essas decisões de maneira responsável. No **Suplemento para o professor** há orientações e sugestões sobre como realizar esse trabalho.

De modo geral, a constante de proporcionalidade k da expressão de Galileu nada mais é do que a metade da intensidade da força de atração da gravidade, que é praticamente constante e igual a 9,8 m/s² na superfície da Terra. Conforme você pôde verificar nas questões **A** e **B**, esse valor é um dos coeficientes da função quadrática que descreve a distância d percorrida pelo objeto em função do tempo t de queda. Nas próximas páginas, vamos analisar como os **coeficientes da função quadrática** nos dão informações sobre as características da parábola. Estudaremos ainda os zeros desse tipo de função.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

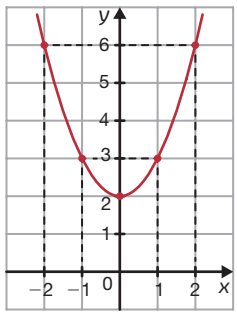
MODERNA

Estudando coeficientes de uma função quadrática

Analisando os coeficientes de uma função quadrática, obtemos informações que nos auxiliam a esboçar o gráfico dessa função.

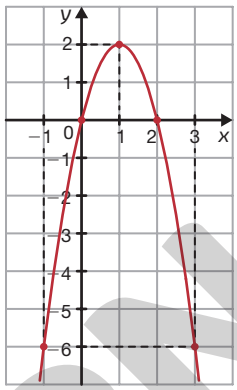
Observando o coeficiente *a* de uma função quadrática, podemos verificar se seu gráfico possui concavidade voltada para cima ou para baixo. Veja os gráficos e algumas informações acerca das funções *f* e *g*.

- $f(x) = x^2 + 2$



A parábola tem concavidade voltada para cima e o coeficiente *a* é maior do que zero $(a > 0)$.

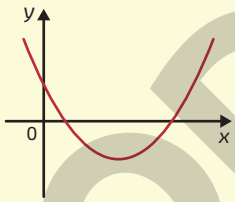
- $g(x) = -2x^2 + 4x$



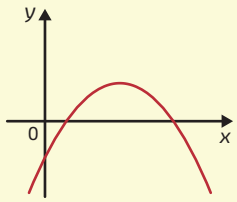
A parábola tem concavidade voltada para baixo e o coeficiente *a* é menor do que zero $(a < 0)$.

Em uma função quadrática, se o coeficiente *a* for:

- maior do que zero $(a > 0)$, então a parábola terá a concavidade voltada para cima.



- menor do que zero $(a < 0)$, então a parábola terá a concavidade voltada para baixo.



O valor absoluto ou módulo de um número real *a*, indicado por $|a|$, é definido como o próprio número *a*, se $a \geqslant 0$, ou como $-a$, se $a < 0$.

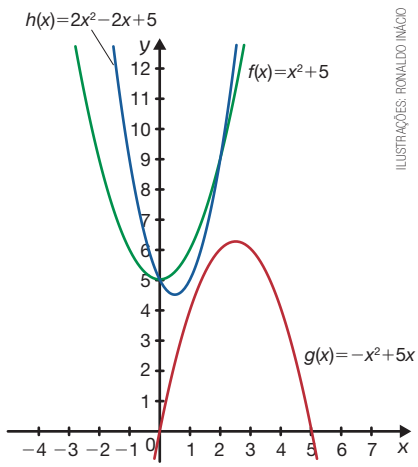
Exemplos:

- $|3| = 3$
- $|-2{,}3| = -(-2{,}3) = 2{,}3$

Analisando o coeficiente *a* de uma função quadrática, também podemos obter informações a respeito da abertura da parábola. Funções quadráticas que têm coeficiente *a* com valores absolutos iguais possuem gráficos com aberturas iguais. Aquelas que possuem diferentes valores absolutos do coeficiente *a* possuem gráficos com aberturas diferentes.

Considere as funções *f*, *g* e *h* representadas no mesmo plano cartesiano.

- Note que, para as funções *f* e *g*, o valor absoluto do coeficiente *a* é o mesmo, ou seja, $|a| = 1$. Nesse caso, os gráficos das funções *f* e *g* possuem a mesma abertura.
- Note que, para as funções *f* e *h*, por exemplo, o valor absoluto dos coeficientes *a* são diferentes. Nesse caso, os gráficos das funções *f* e *h* possuem aberturas diferentes.



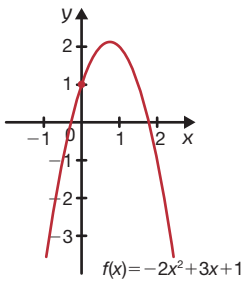
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Podemos verificar que, quanto menor for o valor absoluto do coeficiente *a* de uma função quadrática, maior será a abertura de seu gráfico. A fim de realizar essa verificação, esboce, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, o gráfico de diferentes funções quadráticas em um mesmo plano cartesiano.

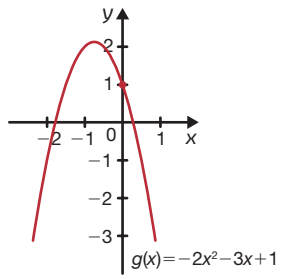
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

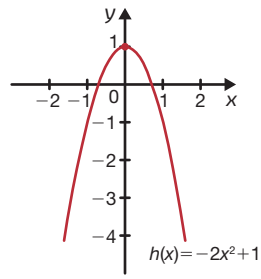
O coeficiente b de uma função quadrática indica se seu gráfico intersecta o eixo y no ramo crescente ou no ramo decrescente. Observe os gráficos das funções f, g e h.



A parábola intersecta o eixo y no ramo crescente e $b > 0$.



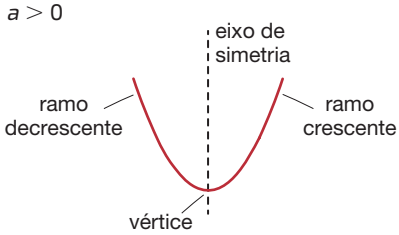
A parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente e $b < 0$.



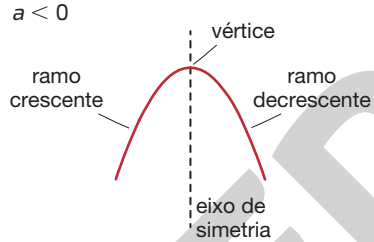
A parábola intersecta o eixo y no vértice e $b = 0$.

Se uma função quadrática é crescente à direita de seu vértice, então ela será decrescente à esquerda desse ponto, e vice-versa, dependendo da concavidade da parábola.

- $a > 0$

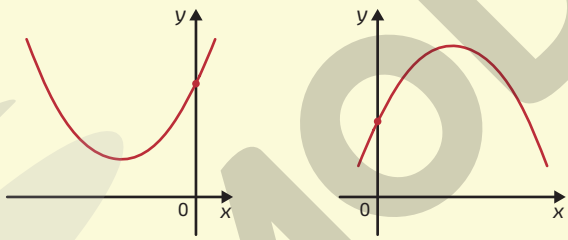


- $a < 0$

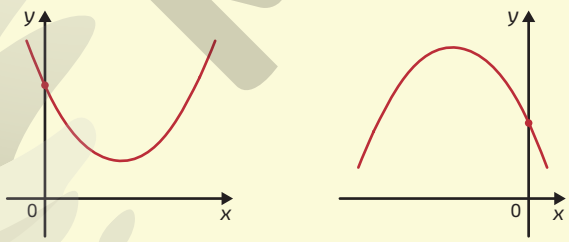


O gráfico de uma função quadrática intersecta o eixo y:

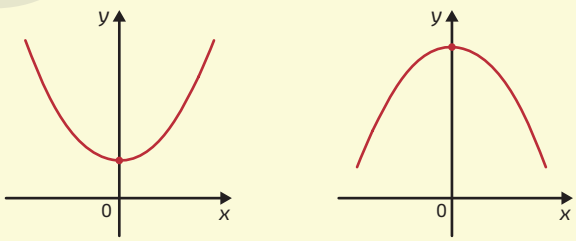
- no ramo crescente se $b > 0$.



- no ramo decrescente se $b < 0$.



- no vértice se $b = 0$.

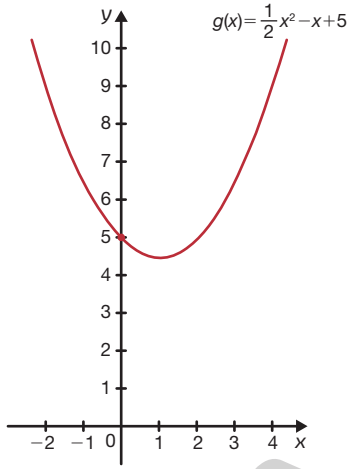


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

O coeficiente c de uma função quadrática corresponde à ordenada do ponto em que seu gráfico intersecta o eixo y. Por exemplo, na função g dada por $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 5$, temos $c = 5$, e o gráfico intersecta o eixo y no ponto $(0, 5)$.



O gráfico de uma função intersecta o eixo y quando $x = 0$. No caso de uma função quadrática:

$f(x) = ax^2 + bx + c$

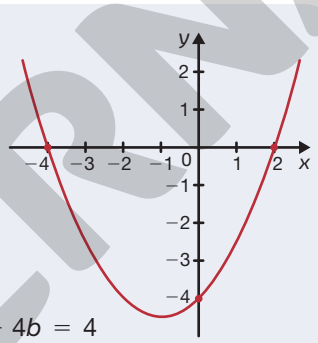
$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$

$f(0) = c$

O gráfico de uma função quadrática, cuja lei de formação é $f(x) = ax^2 + bx + c$, intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Escreva a lei de formação da função quadrática cujo gráfico está representado ao lado.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Resolução

Como a parábola intersecta o eixo y no ponto de ordenada -4, temos $c = -4$. Além disso, sabemos que os pontos $(-4, 0)$ e $(2, 0)$ pertencem ao gráfico. Assim:

$$\begin{cases} f(-4) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) - 4 = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ 4a + 2b = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtido pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ 4a + 2b = 4 \quad (\cdot 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a - 4b = 4 \\ \underline{8a + 4b = 8} \end{cases}$$

$$24a = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$4a + 2b = 4 \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} + 2b = 4 \Rightarrow b = 1$$

Portanto, a lei de formação da função f é $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

R2 Considere a função f definida por $f(x) = (k - 2)x^2 + 2x - 3$, com k real. Qual deve ser o valor de k para que o ponto $X(1, 4)$ pertença ao gráfico da função f?

Resolução

Para que o ponto $X(1, 4)$ pertença ao gráfico da função f deve-se ter $f(1) = 4$. Desse modo:

$$f(1) = 4 \Rightarrow (k - 2) \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 4 \Rightarrow k - 2 + 2 - 3 = 4 \Rightarrow k = 7$$

Portanto, para $k = 7$, o ponto $X(1, 4)$ pertence ao gráfico da função f.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

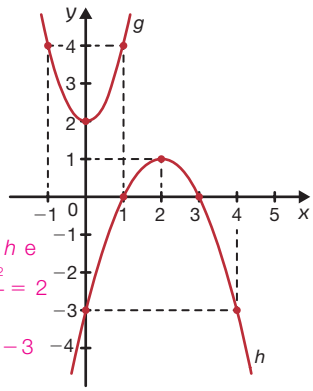
1 Esboce o gráfico da função f dada por $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e determine as coordenadas do ponto em que o eixo de simetria intersecta a parábola. $(1, -4)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

2 Determine a lei de formação das funções quadráticas g e h. $g(x) = 2x^2 + 2$; $h(x) = -x^2 + 4x - 3$

4. a) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

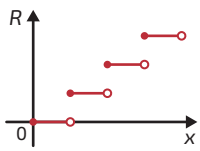


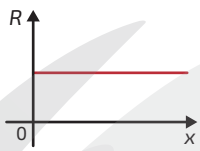
RONALDO INÁCIO

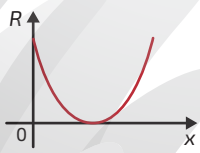
4. b) Nas funções h e m, pois: $\frac{h(x)}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} = 2$ e $\frac{m(x)}{x^2} = \frac{-3x^2}{x^2} = -3$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

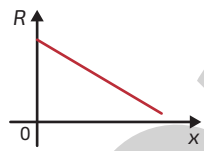
3 (Enem, 2000) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.

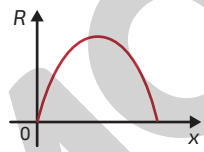
O gráfico cartesiano que melhor representa a função $R(x)$, para x real, é: alternativa **e**

a)


b)


c)


d)


e)


ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

4 Considere as funções f, g, h e m dadas por $f(x) = 3x^2 + 2$, $g(x) = 5x^2 + x$, $h(x) = 2x^2$ e $m(x) = -3x^2$.

a) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, esboce o gráfico das funções f, g, h e m.

b) Se uma grandeza y é diretamente proporcional ao quadrado de uma grandeza $x\,(x \neq 0)$, então existe uma constante k, tal que $\frac{y}{x^2} = k$. Em quais das funções (f, g, h ou m) uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra? Justifique sua resposta.

5 Em cada um dos quadros estão apresentadas as coordenadas de alguns pontos.

A

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

B

x	y
1	0
2	2
3	6
4	12
5	20

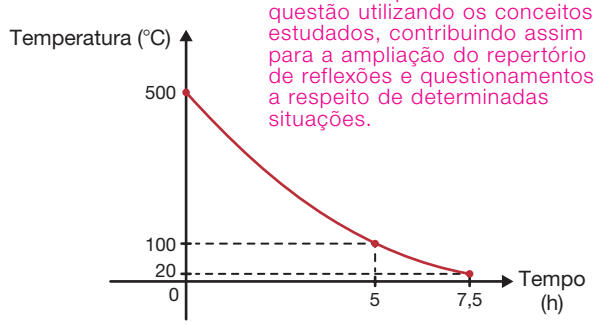
a) Represente no plano cartesiano os pontos cujas coordenadas estão apresentadas nos quadros A e B. Qual desses quadros apresenta pontos que pertencem ao gráfico de uma mesma função quadrática do tipo $f(x) = ax^2$? Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

b) Identifique padrões e escreva, para cada quadro, uma expressão algébrica que relacione os números x e y. Quadro A: $y = x^2$; Quadro B: $y = x^2 - x$

6 Uma vantagem do forno a lenha nas pizzarias é a temperatura, em torno de 550 °C, que é mais alta do que a do forno a gás tradicional, cuja temperatura média máxima é cerca de 300 °C. Devido à alta temperatura do forno a lenha, a *pizza* assa mais rapidamente, o que deixa a massa crocante por fora e macia por dentro.

Após o uso, o forno a lenha de uma pizzaria reduz sua temperatura até a temperatura ambiente de 20 °C, conforme representado no gráfico.

O item **b** da tarefa **6** propõe aos alunos que elaborem uma questão utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.



RONALDO INÁCIO

$t(h) = \frac{32}{5}h^2 - 112h + 500$; $D(t) = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leq h \leq 7{,}5\}$

a) Determine a lei de formação e o domínio da função cujo gráfico foi apresentado.

b) A partir das informações apresentadas, elabore uma questão e troque-a com um colega. Em seguida, verifiquem se as respostas obtidas estão corretas.

6. b) Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem a questão, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Zeros de uma função quadrática

Estudamos anteriormente que o zero de uma função f é todo valor x de seu domínio tal que $f(x) = 0$ e que, graficamente, os zeros correspondem às abscissas dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo x.

Lembre os alunos que essa é a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, conteúdo geralmente estudado nos últimos anos do Ensino Fundamental.

Para determinarmos os zeros de uma função quadrática f, fazemos $f(x) = 0$ e resolvemos a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Essa equação pode ser resolvida utilizando a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ na qual } \Delta = b^2 - 4ac$$

De acordo com os coeficientes da função, temos três possíveis casos para os valores de Δ.

- $\Delta > 0$

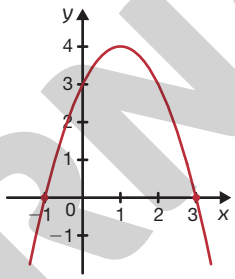
Para determinarmos os zeros da função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, resolvemos a equação $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$

$a = -1;\ b = 2;\ c = 3$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2+4}{-2} = -1 \\ x_2 = \dfrac{-2-4}{-2} = 3 \end{cases}$$



Portanto, -1 e 3 são os zeros de f, e $(-1, 0)$ e $(3, 0)$ são os pontos em que o gráfico dessa função intersecta o eixo x.

Quando $\Delta > 0$:

- a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas **raízes** reais e distintas: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- a função quadrática f possui dois **zeros** reais e distintos;
- o gráfico de f intersecta o eixo x nos pontos $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$.

- $\Delta = 0$

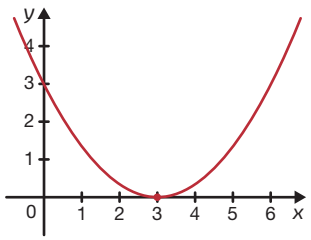
Para determinarmos os zeros da função quadrática definida por $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$, resolvemos a equação $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$

$a = \frac{1}{3};\ b = -2;\ c = 3$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 4 - 4 = 0$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2 \pm 0}{\frac{2}{3}} \begin{cases} x_1 = \dfrac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \\ x_2 = \dfrac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \end{cases}$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Portanto, a função f possui dois zeros iguais a 3 e $(3, 0)$ é o ponto em que o gráfico dessa função intersecta o eixo x.

Na fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ para $\Delta = 0$, temos:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm 0}{2a} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

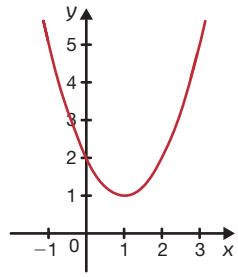
MODERNA

Quando $\Delta = 0$:

- a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas **raízes** reais e iguais: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;
- a função quadrática f possui dois **zeros** iguais;
- o gráfico de f intersecta o eixo x em um único ponto, de abscissa $x_1 = x_2$ e ordenada 0.

- $\Delta < 0$

Para determinarmos os zeros da função quadrática definida por $f(x) = x^2 - 2x + 2$, resolvemos a equação $f(x) = 0$.



$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$

$a = 1;\ b = -2;\ c = 2$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$

Como $\Delta < 0$, a equação não possui raízes reais, pois $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$.

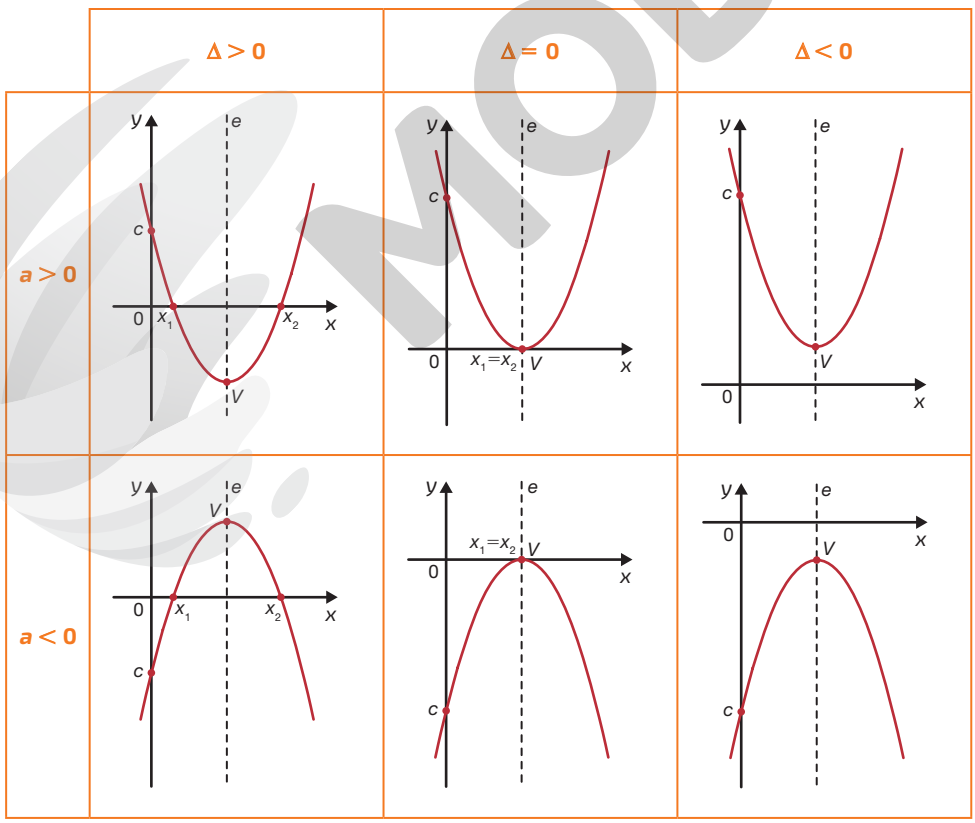
Portanto, f não possui zeros, e o gráfico dessa função não intersecta o eixo x.

Quando $\Delta < 0$:

- a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui **raízes** reais;
- a função quadrática não possui **zeros**;
- o gráfico de f não intersecta o eixo x.

Considerando a função quadrática e algumas características de seu gráfico, podemos organizar o seguinte quadro.

e: eixo de simetria da parábola
V: vértice da parábola



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R3 Determine m, de modo que a função quadrática definida por $f(x) = 3x^2 - 6x + m$ possua:

a) dois zeros distintos. b) dois zeros iguais. c) nenhum zero.

Resolução

Como $a = 3$, $b = -6$ e $c = m$, temos:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3 \cdot m = 36 - 12m$$

a) Para que a função tenha dois zeros distintos, temos:

$$\Delta > 0$$
$$36 - 12m > 0$$
$$-12m > -36$$
$$m < \frac{36}{12} = 3$$
$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid m < 3\}$$

b) Para que a função tenha dois zeros iguais, temos:

$$\Delta = 0$$
$$36 - 12m = 0$$
$$-12m = -36$$
$$m = \frac{36}{12} = 3$$
$$S = \{3\}$$

c) Para que a função não tenha zeros, temos:

$$\Delta < 0$$
$$36 - 12m < 0$$
$$-12m < -36$$
$$m > \frac{36}{12} = 3$$
$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 3\}$$

R4 Mostre que se x_1 e x_2 são zeros da função quadrática f, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, então $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Resolução

Se x_1 e x_2 são zeros da função, então:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Segue que:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Portanto, $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

As relações $S = -\frac{b}{a}$ e $P = \frac{c}{a}$ são chamadas **soma** e **produto** das raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e podem ser utilizadas para determinar os zeros da função quadrática. Veja na tarefa resolvida a seguir a determinação dos zeros da função utilizando soma e produto.

R5 Determine os zeros da função quadrática definida por $f(x) = x^2 - x - 12$.

Resolução

Da tarefa resolvida anteriormente, se x_1 e x_2 são zeros da função, então:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-1)}{1} = 1$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-12}{1} = -12$

Nesse caso, os dois números cuja soma é 1 e o produto é -12 são 4 e -3. Portanto, $x_1 = 4$ e $x_2 = -3$ são os zeros de f.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

7. g) $x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = -1$

7 Determine, caso existam, os zeros das funções cujas leis de formação estão apresentadas.

a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$ $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$

b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$ $x_1 = x_2 = 3$

c) $f(x) = -x^2 + x - 7$ não existem zeros reais

d) $f(x) = -4x^2 + 4$ $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$

e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 6x$ $x_1 = 0$ e $x_2 = -12$

f) $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$ não existem zeros reais

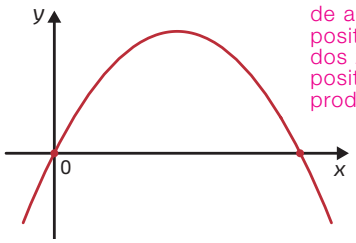
g) $f(x) = 3x^2 + x - 2$

h) $f(x) = -x^2 + 8x - 16$ $x_1 = x_2 = 4$

8 Determine o valor de k para que o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = (k + 2)x^2 + 2x - k$ intersecte o eixo das abscissas em um único ponto. $k = -1$

9 Analisando o gráfico da função quadrática apresentado, responda.

a) Como o gráfico da função intersecta o eixo x em um ponto de abscissa 0 e em um ponto de abscissa positiva, a soma dos zeros é positiva, e o produto, nulo.

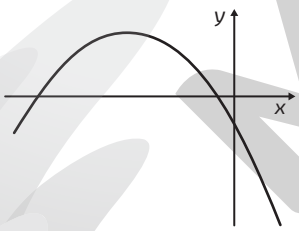


RONALDO INÁCIO

a) A soma e o produto dos zeros dessa função são positivos, negativos ou nulos? Justifique sua resposta.

b) O valor de Δ dessa função é positivo, negativo ou nulo? Justifique sua resposta. Positivo, pois a função possui dois zeros distintos.

10 (UEL-PR) Considere a função real definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é o seguinte:



RONALDO INÁCIO

Com base na situação exposta e nos conhecimentos sobre o tema, considere as seguintes afirmativas:

I) $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

II) $a(b + c) > 0$

III) $f\left(\frac{-b + 2a}{2a}\right) = f\left(\frac{-b - 2a}{2a}\right)$

IV) $a\sqrt{\Delta} > 0$

Escreva a alternativa que contém todas as afirmações corretas. alternativa c

a) I e III c) I, II e III e) II, III e IV

b) III e IV d) I, II e IV

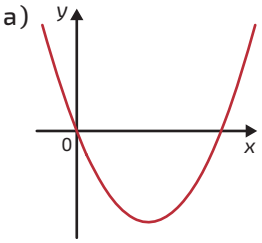
11. alternativa b; A função possui dois zeros distintos, pois $\Delta > 0$. Como $S = 0$, os zeros da função são números opostos e, sabendo que $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

12. b) Sim, pois o eixo de simetria da parábola coincide com o eixo y e $f(0) = 0$, consequentemente, $b = c = 0$.

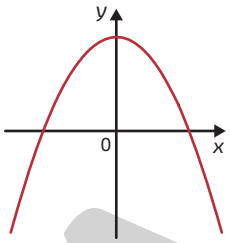
12. d) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** no **Suplemento para o professor**.

11 Qual dos gráficos melhor representa uma função quadrática em que $\Delta > 0$, $S = 0$ (soma dos zeros da função) e o coeficiente $a > 0$? Justifique sua resposta.

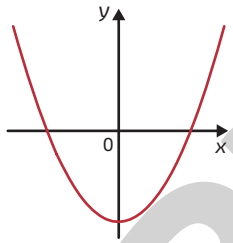
a)



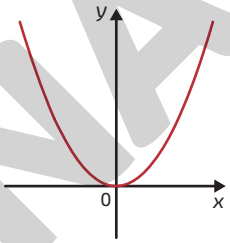
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

12 Pedro escreveu, em seu caderno, a lei de formação de uma função quadrática f. Em seguida, ele calculou $f(x)$ para alguns valores de x. No quadro estão apresentados os valores de x considerados por ele e os respectivos valores de $f(x)$.

x	2	1	0	−1	−2
$f(x)$	−9,2	−2,3	0	2,3	−9,2

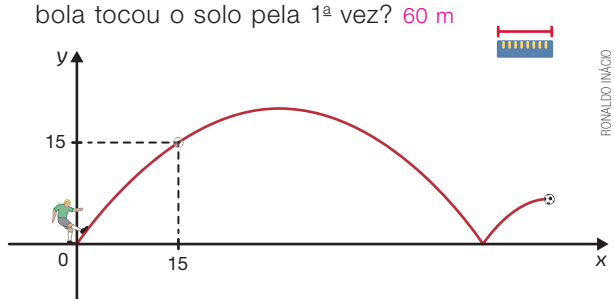
a) Qual é o zero da função f? $x = 0$

b) Analisando os valores do quadro, podemos concluir que a função f é do tipo $f(x) = ax^2$? Justifique sua resposta.

c) Escreva a lei de formação da função f. $f(x) = -2{,}3 \cdot x^2$

d) Esboce o gráfico da função f.

13 Em uma partida de futebol, ao ser chutada por um jogador, a bola descreveu, até tocar o solo, uma trajetória definida pela função f, cuja lei de formação é $f(x) = \frac{4}{3}x - \frac{1}{45}x^2$, em que $f(x)$ indica a altura da bola em relação ao solo após ter percorrido horizontalmente uma distância x. Observando o esquema e considerando as medidas x e y em metros, a qual distância horizontal do jogador a bola tocou o solo pela 1ª vez? 60 m



RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

11 Vértice de uma parábola

Informe aos alunos que os Jogos Olímpicos de Tóquio 2020 foram adiados para 2021 devido à pandemia do novo coronavírus. Porém, o nome do evento, Jogos Olímpicos de Tóquio 2020, foi mantido.

Um dos mais antigos esportes do mundo

A cada quatro anos, atletas de todo o mundo são reunidos em um país predeterminado para a realização dos Jogos Olímpicos. Diversas modalidades estão presentes, desde atividades realizadas individualmente, como arco e flecha, até atividades coletivas, como o futebol. Em determinadas épocas, novas modalidades são incluídas, enquanto outras deixam de compor a lista de esportes presentes nesses jogos. Por exemplo, nos Jogos Olímpicos de Tóquio 2020, foram incluídas as modalidades *surf*, beisebol, *softbol*, karatê, *skate* e escalada.

Dentre as modalidades que estão presentes com frequência nos jogos, algumas delas são praticadas desde a Antiguidade, como é o caso do lançamento de discos. A inspiração para esse esporte tem origem nas atividades dos guerreiros da Antiguidade, os quais jogavam seus escudos antes de atravessar rios para diminuir a massa que teriam de carregar durante a travessia. O lançamento de discos foi a modalidade esportiva que menos sofreu alterações nos Jogos Olímpicos da Era Moderna, sendo a primeira edição realizada em 1896, em Atenas, na Grécia.

BNCC
- EM13MAT302
- EM13MAT503

Como é realizado o lançamento de discos

O atleta fica dentro de uma gaiola de proteção com uma abertura de 40°, por onde é lançado o disco, que pode ser feito de madeira ou de outro material apropriado e deve conter placas circulares de metal embutidas.

O atleta se prepara para o momento do arremesso (A) que é o movimento de giro de uma volta e meia. Ele usa, além do braço, o corpo, para dar maior impulso na liberação do disco, que, ao ser lançado, descreve uma trajetória que pode ser representada por uma parábola.

O lançamento de disco é realizado dentro de uma área circular de 2,5 m de diâmetro. O competidor não pode pisar fora do círculo (B) até que o disco lançado toque o solo.

Fonte de pesquisa: FORTIN, François. *Sports the complete visual reference*. Montreal: Firefly Books, 2000. Disponível em: <https://tokyo2020.org/en/sports/>. Acesso em: 18 jul. 2020.

RONALDO INÁCIO

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO

Considere que a trajetória de um disco após seu lançamento possa ser representada pela função definida por $f(x) = -0{,}01x^2 + 0{,}54x + 1{,}71$ em que $y = f(x)$ representa a altura do disco em relação ao solo durante sua trajetória e x representa a distância horizontal do disco em relação ao atleta, ambos expressos em metros.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Pesquise a respeito dos recordes históricos associados ao lançamento de discos.
Resposta pessoal.

B A partir de que altura, em relação ao solo, o disco foi lançado?
1,71 m

C Após ter percorrido horizontalmente 12 m em relação ao atleta, qual foi a altura atingida pelo disco?
6,75 m

D Qual foi a distância horizontal atingida por esse disco ao tocar o solo?
57 m

Ser consciente

> Que benefícios a prática esportiva pode oferecer para a saúde e a qualidade de vida das pessoas? Resposta pessoal.

Note que a trajetória do disco, durante seu lançamento, assume a forma de uma parábola. Assim, podemos empregar as funções quadráticas como uma forma de representar matematicamente esse trajeto, possibilitando compreender outras características específicas desse tipo de movimento, conforme as questões **B**, **C** e **D**. Outra característica importante a se conhecer nessas situações são as coordenadas do vértice da parábola a partir dos coeficientes da função quadrática, assunto das páginas seguintes.

FOTOMONTAGEM DE MAURÍCIO PLANEL. FOTOS: 1.BLOOMICON/SHUTTERSTOCK; 2.SIMPLE LINE/SHUTTERSTOCK; 3.KJPETERS PHOTO/SHUTTERSTOCK; 4.JSALASBERRY/SHUTTERSTOCK; 5.STEFAN SCHURR/SHUTTERSTOCK; 6.JAMIE ROACH/SHUTTERSTOCK; 7.TEACHER PHOTO/SHUTTERSTOCK; 8.KOVOP58/SHUTTERSTOCK; 9.3D FACTORY/SHUTTERSTOCK; 10.MIROSHNICHENKO TETIANA/SHUTTERSTOCK; 11.COLO ART/SHUTTERSTOCK; 12.REGIEN PAASSEN/SHUTTERSTOCK; 13.VERVERIDIS VASILIS/SHUTTERSTOCK; 14.ELENA PAVLOVICH/SHUTTERSTOCK; 15.VECTOR FUSION ART/SHUTTERSTOCK; 16.CHRISTIAN CANTARELLI/SHUTTERSTOCK; 17.PIXEL EMBARGO/SHUTTERSTOCK

MATERIAL DE DIVULGAÇÃO

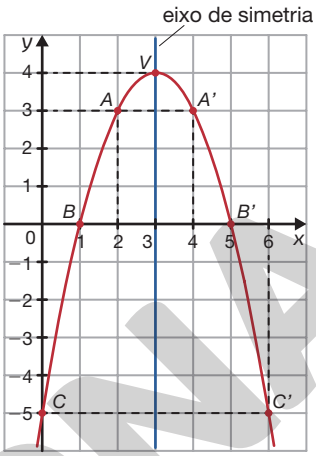
O vértice de uma parábola

Estudamos anteriormente que o eixo de simetria de uma parábola a intersecta em seu vértice. Agora, vamos determinar as coordenadas do vértice de uma parábola.

No gráfico da função f definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ estão destacados alguns pontos. Note que $A(2, 3)$ e $A'(4, 3)$ são pontos da parábola que possuem ordenadas iguais. Quando isso ocorre, dizemos que os pontos são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola.

Quais são os demais pares de pontos em destaque no gráfico que são simétricos em relação ao eixo de simetria da parábola?

$B(1, 0)$ e $B'(5, 0)$; $C(0, -5)$ e $C'(6, -5)$



Ao calcularmos a média aritmética das abscissas dos pontos da parábola simétricos em relação ao eixo, obtemos a abscissa do vértice da parábola. No caso de $A(2, 3)$ e $A'(4, 3)$, temos:

Realize o cálculo da média aritmética das abscissas dos demais pontos simétricos entre si em destaque no gráfico.

abscissa do ponto A — abscissa do ponto A'

$$\frac{2 + 4}{2} = 3$$

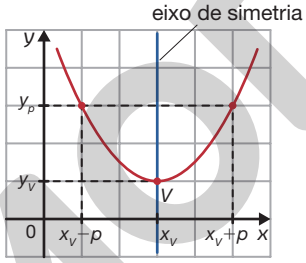
abscissa do vértice

Calculando $f(3)$, obtemos a ordenada do vértice dessa parábola.

$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 5 = 4$$

Portanto, o vértice da parábola é $(3, 4)$.

Para obter as coordenadas do vértice $V(x_V, y_V)$ de uma parábola a partir dos coeficientes de uma função quadrática, consideramos os pontos $(x_V - p, y_p)$ e $(x_V + p, y_p)$, pertencentes à parábola.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Note que os pontos $(x_V - p, y_p)$ e $(x_V + p, y_p)$ são simétricos em relação ao eixo de simetria.

Como $y_p = f(x_V - p)$ e $y_p = f(x_V + p)$, então:

$$\underbrace{f(x_V - p)}_{y_p} = \underbrace{f(x_V + p)}_{y_p}$$

Efetuando os cálculos, temos:

$$f(x_V - p) = f(x_V + p)$$

$$a(x_V - p)^2 + b(x_V - p) + c = a(x_V + p)^2 + b(x_V + p) + c$$

$$a(x_V^2 - 2x_V p + p^2) + b(x_V - p) + c = a(x_V^2 + 2x_V p + p^2) + b(x_V + p) + c$$

$$\cancel{ax_V^2} - 2ax_V p + \cancel{ap^2} + \cancel{bx_V} - bp + \cancel{c} = \cancel{ax_V^2} + 2ax_V p + \cancel{ap^2} + \cancel{bx_V} + bp + \cancel{c}$$

$$-2ax_V p - 2ax_V p = bp + bp$$

$$-4ax_V p = 2bp$$

$$x_V = -\frac{2bp}{4ap}$$

$$x_V = -\frac{b}{2a}$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Para obter a ordenada y_V do vértice, calculamos $f(x_V)$, ou seja, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

$$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

$$y_V = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a}$$

O vértice da parábola correspondente à função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right), \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

Vamos calcular, por exemplo, as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função definida por $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot (-1)} = 3 \qquad y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}{4 \cdot (-1)} = 4$$

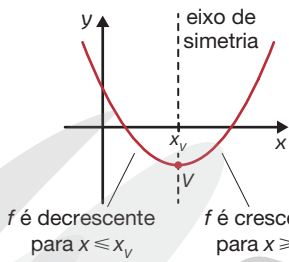
Tal como havíamos obtido anteriormente, o vértice dessa parábola é $V(3, 4)$.

> Escreva um algoritmo que possibilite determinar as coordenadas do vértice do gráfico de uma função quadrática f, dada a lei de formação da função.

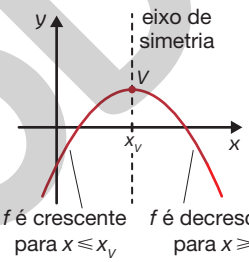
Resposta no Suplemento para o professor.

Na função quadrática, em que x_V é a abscissa do vértice:

- se $a > 0$, então f é decrescente para $x \leqslant x_V$ e crescente para $x \geqslant x_V$.



- se $a < 0$, então f é crescente para $x \leqslant x_V$ e decrescente para $x \geqslant x_V$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

a) Em que ponto o gráfico da função intersecta o eixo y?

b) A parábola que representa a função intersecta o eixo y na parte crescente ou decrescente?

c) A concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo?

d) Qual é o vértice da parábola?

Resolução

a) O gráfico da função intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, -5)$, pois $c = -5$.

b) A parábola intersecta o eixo y na parte crescente, pois $b = 4 > 0$.

c) A concavidade é voltada para cima, pois $a = 1 > 0$.

d) Temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{36}{4 \cdot 1} = -9$$

Portanto, o vértice da parábola é $V(-2, -9)$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Determine as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função definida por:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$. $V(1, 2)$

b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 5$. $V\left(5, -\frac{10}{3}\right)$

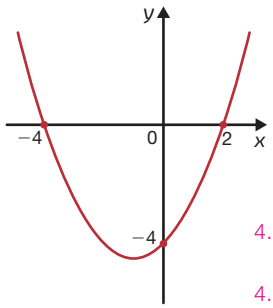
c) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x$. $V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

2 O eixo de simetria da parábola que é o gráfico da função definida por $g(x) = 2x^2 - 4x + 1$ intersecta o eixo x no ponto cuja abscissa é:

a) $x = 1$. b) $x = -1$. c) $x = 3$. d) $x = -2$.

alternativa a

3 Obtenha as coordenadas do vértice da parábola.



RONALDO INÁCIO

$V\left(-1, -\frac{9}{2}\right)$

4. c) $V\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

4. d) $V\left(-\sqrt{5}, 0\right)$

4 Escreva as coordenadas do vértice da parábola correspondente à função definida por:

a) $f(x) = (x - 1)^2$. $V(1, 0)$

b) $f(x) = (x + 3)^2$. $V(-3, 0)$

c) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

d) $f(x) = \left(x + \sqrt{5}\right)^2$.

- Quais regularidades podem ser verificadas nas coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico de uma função do tipo $f(x) = (x + p)^2$, com $p \in \mathbb{R}$? Uma possível resposta: a abscissa sempre será $-p$ e a ordenada, 0.

5 Esboce o gráfico da função definida por $f(x) = -\frac{m}{5}x^2 + mx$, sabendo que $f(1) = 8$. Depois, escreva e indique no gráfico os intervalos de crescimento e decrescimento dessa função.

6 Dada a função quadrática definida por $g(x) = ax^2 + bx + 3$, com $b \neq 0$, a ordenada do vértice $y_v = 2$ da parábola correspondente a essa função, qual número natural mais se aproxima de $\frac{a}{b^2}$? 0

7 (UFPA, 2008) O vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ é o ponto de coordenadas $(-2, 3)$. Sabendo que 5 é a ordenada onde a curva corta o eixo vertical, podemos afirmar que: alternativa d

a) $a > 1$, $b < 1$ e $c < 4$

b) $a > 2$, $b > 3$ e $c > 4$

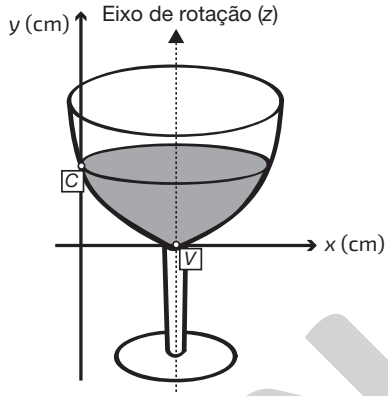
c) $a < 1$, $b < 1$ e $c > 4$

d) $a < 1$, $b > 1$ e $c > 4$

e) $a < 1$, $b < 1$ e $c < 4$

5. Resposta na seção Resolução dos exercícios e problemas no Suplemento para o professor.

8 (Enem, 2013) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



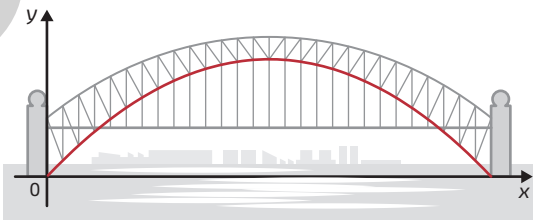
RONALDO INÁCIO

A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, em que C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é: alternativa e

a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6

9 Na construção de edifícios e monumentos podemos observar a presença de formas que se assemelham a uma parábola. Algumas pontes, como no esquema a seguir, apresentam em sua estrutura um arco em forma de parábola.



RONALDO INÁCIO

O arco em vermelho pode ser representado matematicamente pela função definida por $y = -0{,}0021x^2 + 1{,}0563x$, na qual y representa a distância entre o nível do rio e o arco, e x representa a distância em linha reta a partir de uma das extremidades do arco no nível do rio, ambos expressos em metros.

a) Se um pássaro pousar na parte mais alta do arco, representado em vermelho no esquema, qual será a altura que ele atingirá, em relação ao nível do rio? aproximadamente 133 m

b) Qual é a distância entre as extremidades do arco em vermelho representada no esquema, no nível do rio? 503 m

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

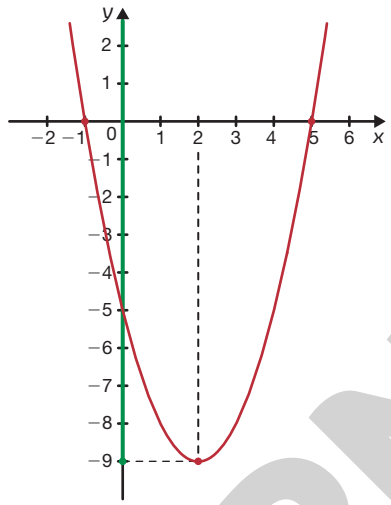
MODERNA

Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática

Conhecendo as coordenadas do vértice de uma parábola, podemos determinar a imagem da função quadrática relacionada a ela e também o **valor máximo** ou **valor mínimo** dessa função.

O gráfico da função definida por $f(x) = x^2 - 4x - 5$ é uma parábola com concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$. O vértice dessa parábola é:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V(2, -9)$$



Como a concavidade é voltada para cima, $V(2, -9)$ é o ponto de mínimo do gráfico de f, e $y_V = -9$ é o valor mínimo de f.

Podemos também determinar o conjunto imagem de f, que, nesse caso, é:

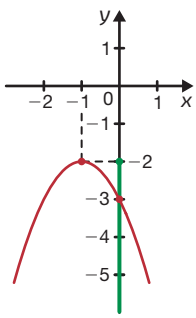
$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -9\} \text{ ou } Im(f) = [-9, +\infty[$$

Na função quadrática f, quando $a > 0$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para cima. Portanto:

- $V(x_V, y_V)$ é o **ponto de mínimo** do gráfico de f.
- $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor mínimo** de f.
- o conjunto imagem de f é: $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$ ou $Im(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right[$.

Agora, considere a função definida por $f(x) = -x^2 - 2x - 3$, cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo, pois $a = -1 < 0$. O vértice dessa parábola é:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow V(-1, -2)$$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Como a concavidade é voltada para baixo, $V(-1, -2)$ é o ponto de máximo do gráfico de f, e $y_V = -2$ é o valor máximo de f.

Podemos também determinar o conjunto imagem de f, que, nesse caso, é:

$$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -2\} \text{ ou } Im(f) =]-\infty, -2]$$

Na função quadrática f, quando $a < 0$, a parábola que a representa tem concavidade voltada para baixo. Portanto:

- $V(x_V, y_V)$ é o **ponto de máximo** do gráfico de f.
- $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$ é o **valor máximo** de f.
- o conjunto imagem de f é: $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant -\frac{\Delta}{4a}\right\}$ ou $Im(f) = \left]-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$.

No contexto

Considerando a função que descreve a trajetória de um disco após seu lançamento, apresentada na página **81**, determine a altura máxima atingida por esse disco. *

*$y_v = -\frac{(0{,}54)^2 - 4 \cdot (-0{,}01) \cdot 1{,}71}{4 \cdot (0{,}01)} = 9$

9 metros

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Resolvendo por etapas

Uma empresa oferece o fretamento de um ônibus de 48 lugares na seguinte condição: cada passageiro vai pagar R$ 42,00 fixos mais R$ 3,00 por lugar vago no ônibus. Por exemplo, se sobrarem seis lugares vagos, cada passageiro vai pagar R$ 60,00 $(42 + 6 \cdot 3 = 60)$.

Para que a empresa consiga arrecadar a maior quantia possível, quantos lugares devem ser ocupados? Nesse caso, qual é a quantia arrecadada pela empresa?

A Compreendendo o problema

√ O que se pede no problema?

A quantidade de lugares que devem ser ocupados no ônibus para que a quantia arrecadada pela empresa seja máxima, além da própria quantia arrecadada, nesse caso.

√ Quais são os dados apresentados no problema?

Quantidade total de lugares no ônibus; quantia paga por passageiro; quantia paga por lugar vago; condição de pagamento.

B Organizando as ideias e elaborando um plano

√ Registrando um possível plano.

Inicialmente, construímos um modelo matemático que possibilita determinar a quantia arrecadada pela empresa de acordo com a quantidade de lugares vagos no ônibus. Em seguida, calculamos a quantia máxima que pode ser arrecadada pela empresa e a quantidade de lugares que devem ser ocupados para que isso ocorra.

√ Escolhendo as notações.

x: quantidade de lugares vagos no ônibus.

$f(x)$: quantia arrecadada pela empresa com o fretamento.

C Executando o plano

Passo 1

A quantidade de lugares ocupados é dada por $48 - x$. Além disso, cada passageiro deverá pagar à empresa a quantia em reais dada por $42 + 3x$. Com isso, a lei de formação da função que expressa a quantia arrecadada pela empresa em relação à quantidade de lugares vagos no ônibus é:

$$f(x) = \underbrace{(48 - x)}_{\substack{\text{quantidade de} \\ \text{lugares ocupados}}} \cdot \overbrace{(42 + 3x)}^{\substack{\text{quantia paga} \\ \text{por passageiro}}} = -3x^2 + 102x + 2\,016$$

Passo 2

Para determinar a quantia máxima que a empresa pode arrecadar com o fretamento do ônibus, calculamos o valor máximo da função f.

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{102^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 2\,016}{4 \cdot (-3)} = 2\,883$$

Passo 3

Agora, determinaremos a quantidade de lugares vagos correspondente à arrecadação máxima, ou seja, calculamos:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{102}{2 \cdot (-3)} = 17$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Passo 4

Desse modo, podemos concluir que a empresa vai arrecadar a quantia máxima caso 17 lugares fiquem vagos no ônibus, ou seja, se forem ocupados 31 lugares, pois:

$$48 - 17 = 31$$

Portanto, para que a empresa consiga arrecadar a maior quantia, ou seja, R$ 2 883,00, é necessário que 31 lugares estejam ocupados.

Verifique se é possível utilizar, com algumas adequações, o plano apresentado na seção **Resolvendo por etapas** para obter a solução de alguns problemas semelhantes propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tópico.

Agora é você quem resolve! Respostas no Suplemento para o professor.

1 **Leia o problema.**

Maria realiza serviços de transporte com sua *van* de 16 lugares. A cada viagem, os passageiros devem pagar um valor fixo de R$ 60,00 mais R$ 15,00 por lugar vago na *van*. Para que Maria arrecade o maior valor possível, quantos lugares devem ser ocupados?

2 **É possível resolver o problema utilizando, com algumas adequações, o plano apresentado nesta seção? Qual é a resposta do problema?**

Exercícios e problemas resolvidos

R2 Determine o conjunto imagem da função definida por $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$.

Resolução

Note que:

- $a = \frac{1}{2} > 0$

  Assim, a parábola possui concavidade voltada para cima.

- $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-3)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = -\frac{5}{2}$

  Logo, o valor mínimo de f é $-\frac{5}{2}$.

Portanto, $Im(f) = \left[-\frac{5}{2}, +\infty\right[$ ou $Im(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{5}{2}\right\}$.

R3 Qual é a área máxima de uma região determinada por um retângulo cujo perímetro é 48 cm?

Resolução

Sejam x e z as dimensões do retângulo que determinam a região. Como o perímetro é 48 cm, então:

$$2x + 2z = 48 \Rightarrow 2z = 48 - 2x \Rightarrow z = 24 - x$$

A função que determina a área da região é dada por:

$$f(x) = x \cdot z = x \cdot (24 - x) = -x^2 + 24x$$

Agora, calculamos a área máxima da região. Para isso, fazemos:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{24^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}{4 \cdot (-1)} = 144$$

Portanto, a área máxima da região é 144 cm^2.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Acessando tecnologias

Valor máximo ou valor mínimo de uma função quadrática

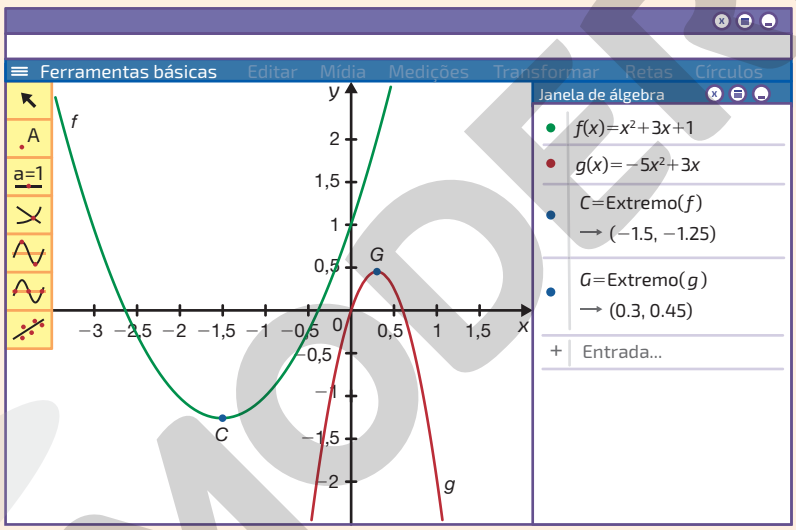
Nesta seção, vamos determinar o valor máximo ou mínimo de uma função quadrática. Para isso, vamos investigar os pontos de máximo e de mínimo do gráfico de funções quadráticas com o auxílio do GeoGebra, *software* de Geometria dinâmica disponível gratuitamente. Veja mais informações sobre o GeoGebra no Suplemento para o professor.

Como exemplo, analisaremos o gráfico das funções definidas por $f(x) = x^2 + 3x + 1$ e $g(x) = -5x^2 + 3x$.

A Inicialmente, conforme apresentado na página **35**, construa os gráficos das funções f e g.

B Na **Janela de Álgebra**, clique sobre os três pontos localizados no campo destinado à lei de formação de f. Em seguida, selecione a opção **Pontos Especiais**. Repita o mesmo procedimento para a função g.

Ao selecionar a opção **Pontos Especiais**, outros pontos também são indicados na **Janela de Álgebra**, como os pontos de interseção entre o gráfico da função e o eixo x. Porém, no exemplo apresentado, exibimos apenas os pontos de máximo ou de mínimo das funções.



RONALDO INÁCIO E SERGIO L. FILHO

O ponto de mínimo do gráfico da função f está indicado por $C = \text{Extremo}(f)$ e o ponto de máximo do gráfico da função g, por $G = \text{Extremo}(g)$.

Portanto, o valor mínimo da função f é $-1{,}25$ e o valor máximo da função g é 0,45.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Com o auxílio do GeoGebra, determine os valores máximos ou mínimos das funções cuja lei de formação é apresentada a seguir.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ b) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ c) $f(x) = -2x^2 - 20x - 2$

2 No problema resolvido **R3**, da página anterior, determinamos a área máxima da região delimitada por um retângulo cujo perímetro é 48 cm. Agora, determine quais são as dimensões do retângulo para que se obtenha a área máxima dessa região.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

Nas tarefas 13, 14, 16, 17, 19, 20 e 22 deste tópico, é solicitado o uso de um *software* de Geometria dinâmica. Se julgar conveniente, proponha o desenvolvimento dessas tarefas logo após o trabalho com a seção **Acessando tecnologias** da página 88.

10. c) $Im(f) =]-\infty, 1] = \{y \in \mathbb{R} | y \leqslant 1\}$

10 Determine o conjunto imagem da função definida por: $Im(f) = [0, +\infty[= \{y \in \mathbb{R} | y \geqslant 0\}$

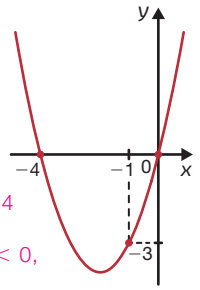
a) $f(x) = 4x^2 - 8x + 4$.

b) $f(x) = -7x^2 + \sqrt{2}x$. $Im(f) = \left]-\infty, \frac{1}{14}\right] =$

c) $f(x) = -6x^2 + 1$. $= \left\{y \in \mathbb{R} | y \leqslant \frac{1}{14}\right\}$

- Quais regularidades podem ser verificadas no conjunto imagem das funções do tipo $f(x) = ax^2 + c$?

11 Analisando o gráfico da função quadrática, determine:



RONALDO INÁCIO

a) a lei dessa função. $y = x^2 + 4x$

b) as coordenadas do vértice da parábola. $V(-2, -4)$

c) o valor mínimo da função. -4

10. • Possível resposta: para $a > 0$, $Im(f) = [c, +\infty[= \{y \in \mathbb{R} | y \geqslant c\}$; para $a < 0$, $Im(f) =]-\infty, c] = \{y \in \mathbb{R} | y \leqslant c\}$.

12 Em cada item, determine os valores de p para que a função quadrática dada por:

a) $f(x) = (2p - 8)x^2 + 5x - 13$ admita valor mínimo. $p > 4$

b) $g(x) = -4x^2 + (p^2 - 1)x + 9$ admita valor máximo para $x = 6$. $p = -7$ ou $p = 7$

c) $h(x) = 3x^2 + 6x - (2 - p)$ admita valor mínimo igual a -8. $p = -3$

13 Em uma metalúrgica, o custo c, em reais, para produzir n peças de metal pode ser calculado por $c(n) = 0{,}04n^2 - 4n + 110$. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine para qual quantidade de peças o custo de produção é mínimo. Qual é esse custo mínimo?
50 peças; R$ 10,00

14 Pedro pretende cercar uma região retangular em sua chácara para criar galinhas. Para isso, ele comprou 80 m de tela e pretende usá-la de modo a obter a maior área possível. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine quais devem ser os comprimentos dos lados e a área máxima desse galinheiro.
Os lados devem ter 20 m de comprimento; 400 m²

15 (FGV-SP, 2010) O transporte aéreo de pessoas entre duas cidades A e B é feito por uma única companhia em um único voo diário. O avião utilizado tem 180 lugares, e o preço da passagem p relaciona-se com o número x de passageiros por dia pela relação $p = 300 - 0{,}75x$. A receita máxima possível por viagem é: alternativa d

a) R$ 30 000,00
b) R$ 29 900,00
c) R$ 29 800,00
d) R$ 29 700,00
e) R$ 29 600,00

16 O lucro (ou prejuízo) L de uma pequena empresa é calculado pela diferença entre a receita R e o custo C. Nessa empresa, a receita e o custo são dados, respectivamente, pelas funções definidas por $R(x) = 180x - x^2$ e $C(x) = 30x + 1\,200$, em reais, em que x representa a quantidade vendida mensalmente de determinados itens.

a) Determine a lei de formação da função lucro L. $L(x) = -x^2 + 150x - 1\,200$

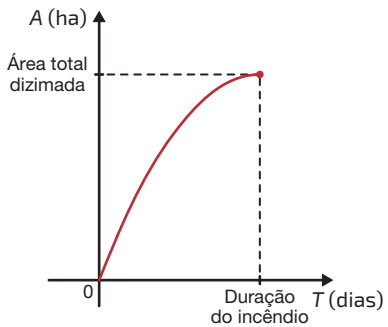
b) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine:

- quantos itens devem ser vendidos nessa empresa para que o lucro seja máximo. 75 itens
- o lucro máximo dessa empresa, em reais. R$ 4 425,00

Receita é o valor total que é recebido ou arrecadado.

17 Uma loja de uniformes escolares vende diariamente uma média de 20 calças, por R$ 80,00 cada. Ao realizar uma promoção, o gerente da loja percebeu que, a cada R$ 0,50 que baixava no preço, a venda de calças aumentava em 1 unidade por dia. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine qual deve ser o preço de cada calça para que se tenha a maior receita. Qual é o valor dessa receita?
R$ 45,00; R$ 4 050,00

18 (UFPA, 2008) Um incêndio numa Reserva Florestal iniciou no momento em que um fazendeiro vizinho à Reserva ateou fogo em seu pasto e o mesmo se alastrou até a reserva. Os prejuízos para o meio ambiente foram alarmantes, pois a área destruída foi crescendo diariamente até que, no 10º dia, tempo máximo de duração do incêndio, foi registrado um total de 16 000 hectares de área dizimada. A figura abaixo é um arco de parábola que representa o crescimento da área dizimada nessa reserva em função do número de dias que durou o incêndio. Nestas condições, a expressão que representa a área dizimada A em função do tempo T, em dias, é: alternativa c



RONALDO INÁCIO

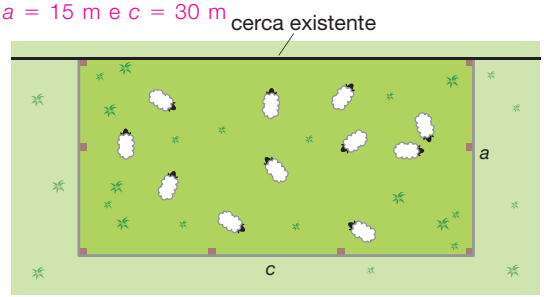
a) $A = -16000T^2 + 10T$
b) $A = 16000T^2 - 3200T$
c) $A = -160T^2 + 3200T$
d) $A = 160T^2 - 3200T$
e) $A = 16000T^2 - 10T$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

EXCLUSIVA

19 José vai cercar uma região retangular de seu sítio para criar carneiros. Ele tem um rolo de arame com 240 m e deseja construir a cerca com quatro fios. Sabendo que ele vai aproveitar uma cerca já existente na propriedade, determine, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, qual deve ser a largura a e o comprimento c para que ele consiga uma área máxima de pastagem para sua criação.

$a = 15$ m e $c = 30$ m



RONALDO INÁCIO

20 Fernanda e Carol estavam disputando uma partida de golfe em um campo plano. Fernanda realizou uma tacada na qual a bola descreveu uma trajetória representada pela função definida por $f(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{x}{5}$. Em seguida, Carol realizou uma tacada na qual a bola descreveu uma trajetória representada pela função definida por $g(x) = -\frac{x^2}{32} + \frac{x}{2}$. Considerando x a distância horizontal e $f(x)$ e $g(x)$ a altura, em metros, de cada tacada, responda às questões propostas com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.

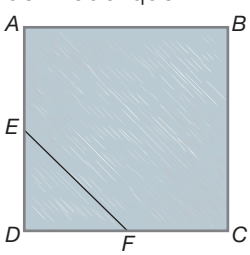
a) Qual das garotas conseguiu fazer com que a bola alcançasse a maior distância horizontal ao tocar o solo? Qual foi essa distância?
Fernanda; 20 m

b) Qual das garotas conseguiu fazer a bola ir mais alto? Qual foi essa altura? Carol; 2 m

21 Um projétil, lançado do nível do solo, atingiu altura máxima de 78,4 m. Sabendo que esse projétil retornou ao solo após um tempo $t = 8$ s, qual das expressões melhor representa a altura desse projétil em função do tempo t? alternativa b

a) $f(t) = -9{,}8t^2 + 39{,}2t$
b) $f(t) = -4{,}9t^2 + 39{,}2t$
c) $f(t) = 4{,}9t^2 - 39{,}2t$
d) $f(t) = -9{,}8t^2 - 4{,}9t$

22 Da chapa metálica quadrada $ABCD$, com área de 9 m^2, deseja-se cortar a região triangular DEF, de modo que $AE = DF$. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine qual deve ser a área do triângulo DEF para que o pentágono $ABCFE$ tenha a menor área possível?

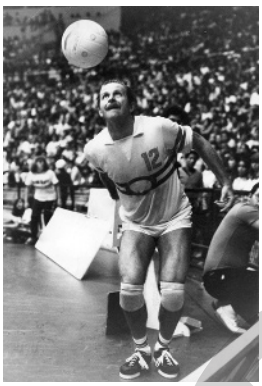


RONALDO INÁCIO

$\frac{9}{8}$ m^2 ou 1,125 m^2

23 A popularização do vôlei no Brasil ocorreu no fim da década de 1970 e início da década de 1980. Um dos responsáveis foi o jogador Bernard Rajzman, que ficou conhecido pelo famoso saque "jornada nas estrelas". Sua estratégia era ficar de lado para a quadra, com o ombro direito paralelo à linha de fundo, lançar a bola suavemente para cima e golpeá-la com o braço direito. A bola alcançava cerca de 25 m, e fazia essa jornada com efeito, o que dificultava a recepção dos adversários.

Explique aos alunos que em ambas as funções apresentadas nesta tarefa considerou-se, por aproximação, que a bola foi golpeada a partir do solo.



RENATA FALZONI/FOLHAPRESS

Bernard executando o saque "jornada nas estrelas" em uma partida da Copa Mundial de Clubes, na cidade de São Paulo (SP), em 1984.

Em uma partida de vôlei, na aula de Educação Física, Rafael utilizou a jogada criada por Bernard, executando o saque "jornada nas estrelas". Desconsiderando-se a altura da bola no momento do saque, a bola descreveu aproximadamente uma trajetória parabólica que pode ser descrita pela função definida por $h(d) = -0{,}398d^2 + 5{,}572d$, em que d representa a distância horizontal em metros, e h, a altura, também em metros.

a) Qual foi a distância horizontal da bola ao tocar o solo após o saque de Rafael? 14 m

b) Qual foi a altura máxima alcançada pela bola no saque de Rafael? aproximadamente 19,5 m

c) Esboce um gráfico relacionando a distância e a altura alcançadas pela bola com $0 \leqslant d \leqslant 14$.

23. c) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** no **Suplemento para o professor**.

24 (Enem, 2000) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.

Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é 44 000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11 000 **c)** 33 000 **e)** 44 000
b) 22 000 **d)** 38 000
alternativa b

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELNA

Estudo do sinal de uma função quadrática

Anteriormente, vimos que no estudo do sinal de uma função afim f determinamos os valores de x do domínio para os quais $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$. Para o estudo do sinal de uma função quadrática, consideraremos três casos.

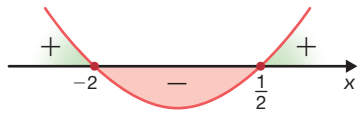
1º caso: $\Delta > 0$

Vamos verificar para quais valores do domínio da função f definida por $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$ temos $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

Inicialmente, verificamos a concavidade da parábola e os zeros da função. Como:

- $a = 2 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;
- $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) = 25 > 0$, a função possui dois zeros distintos, x_1 e x_2.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 5}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

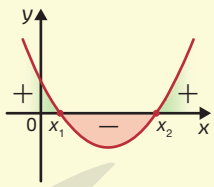


Portanto:

- $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = \frac{1}{2}$.
- $f(x) > 0$ para $x < -2$ ou $x > \frac{1}{2}$.
- $f(x) < 0$ para $-2 < x < \frac{1}{2}$.

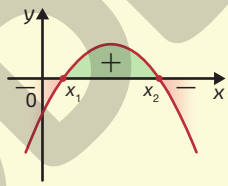
Quando $\Delta > 0$, a função quadrática f possui dois zeros distintos $(x_1 \neq x_2)$ e a parábola intersecta o eixo x em dois pontos. Nesse caso, no estudo do sinal de f, temos:

- $a > 0$



- $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$.
- $f(x) > 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$.
- $f(x) < 0$ para $x_1 < x < x_2$.

- $a < 0$



- $f(x) = 0$ para $x = x_1$ ou $x = x_2$.
- $f(x) > 0$ para $x_1 < x < x_2$.
- $f(x) < 0$ para $x < x_1$ ou $x > x_2$.

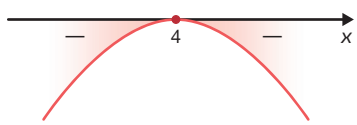
2º caso: $\Delta = 0$

Agora, vamos verificar para quais valores do domínio da função definida por $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8$ temos $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

Inicialmente, verificamos a concavidade da parábola e os zeros da função. Como:

- $a = -\frac{1}{2} < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo;
- $\Delta = 4^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-8) = 0$, a função possui dois zeros iguais, $x_1 = x_2$.

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-4 \pm 0}{-1} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$



Portanto:

- $f(x) = 0$ para $x = 4$.
- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$.
- $f(x) < 0$ $\forall x \neq 4$.

- $\nexists x \in \mathbb{R}$ lê-se "não existe x pertencente aos reais".
- $\forall x \neq 4$ lê-se "para qualquer que seja x diferente de 4".

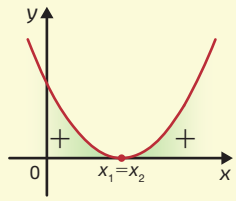
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

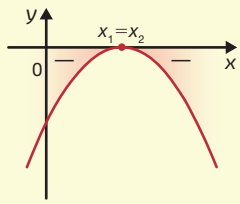
Quando $\Delta = 0$, a função quadrática f possui dois zeros e iguais $(x_1 = x_2)$ e a parábola intersecta o eixo x em um único ponto. Nesse caso, no estudo do sinal de f, temos:

- $a > 0$



- $f(x) = 0$ para $x = x_1 = x_2$.
- $f(x) > 0\ \forall x \neq x_1$.
- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$.

- $a < 0$



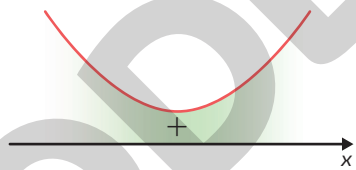
- $f(x) = 0$ para $x = x_1 = x_2$.
- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$.
- $f(x) < 0\ \forall x \neq x_1$.

3º caso: $\Delta < 0$

Vamos verificar para quais valores do domínio da função f definida por $f(x) = x^2 - x + 6$ temos $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$.

Inicialmente, verificamos a concavidade e os zeros da função. Como:

- $a = 1 > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima;
- $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -23 < 0$, a função não possui zeros.

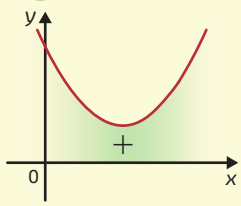


Portanto:

- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.
- $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$.

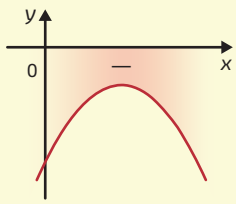
Quando $\Delta < 0$, a função quadrática f não possui zeros e a parábola não intersecta o eixo x. Nesse caso, no estudo do sinal de f, temos:

- $a > 0$



- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.
- $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < 0$.

- $a < 0$



- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$.
- $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$.
- $f(x) < 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas resolvidos

R4 Sejam as funções f e g definidas por $f(x) = x^2 + x - 1$ e $g(x) = 2x^2 + x - 2$. Para quais valores de x temos $f(x) > g(x)$?

Resolução

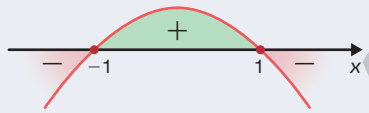
Uma maneira de comparar as funções f e g é estudar o sinal da função h, dada por $h(x) = f(x) - g(x)$. Nesse caso, temos:

$$h(x) = f(x) - g(x) = x^2 + x - 1 - \left(2x^2 + x - 2\right) =$$
$$= x^2 + x - 1 - 2x^2 - x + 2 \Rightarrow h(x) = -x^2 + 1$$

Agora, verificamos a concavidade e os zeros da função h.

- Como $a = -1 < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo.
- A função possui dois zeros distintos, x_1 e x_2.

$$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$



RONALDO NÁOIO

Assim:

- $h(x) = 0$ para $x = -1$ ou $x = 1$. Nesse caso, $f(x) = g(x)$.
- $h(x) > 0$ para $x \in \left]-1, 1\right[$. Nesse caso, $f(x) > g(x)$.
- $h(x) < 0$ para $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$. Nesse caso, $f(x) < g(x)$.

Portanto, para $x \in \left]-1, 1\right[$, temos $f(x) > g(x)$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

25 Realize o estudo do sinal da função definida por:
Respostas no final do livro.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

b) $f(x) = -x^2 + 9$.

c) $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

d) $f(x) = -2x^2 + 8x$.

26 Considere a função quadrática f. Sabendo que $f(x) > 0$ somente para $x < -5$ ou $x > 2$ e que o gráfico dessa função passa pelo ponto de coordenadas $(0, -20)$, determine a lei de f.
$f(x) = 2x^2 + 6x - 20$

27 Determine os valores de k na função definida por $h(x) = -3x^2 - 6x + k$, de modo que $h(x) < 0$ para todo x real. $k < -3$

28 Quais os valores que x pode assumir na função definida por $f(x) = -x^2 + x + 12$ para que $f(x) \geqslant 0$?
$-3 \leqslant x \leqslant 4$

29 Considere as funções definidas por $g(x) = x + 2$ e $h(x) = 6 - 3x$. Para quais valores de x temos $g(x) \cdot h(x) - h(x) \leqslant 6$? $x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$

30 As funções que relacionam a receita R e o custo C de uma fábrica são dadas por $R(n) = -\frac{1}{2}n^2 + 20n$ e $C(n) = n^2 - 40n$, sendo n a quantidade de peças produzidas diariamente. Sabendo que o lucro/prejuízo é a diferença entre a receita e o custo, a partir de que quantidade de peças produzidas diariamente essa fábrica obtém prejuízo?
A partir de 41 peças.

31 Os valores de x para os quais a função definida por $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 15}{2^x + 1}$ é tal que $f(x) < 0$ é dado por: alternativa c

Desafio

a) $2 < x < 4$.

b) $-1 < x \leqslant 0$.

c) $-3 < x < 5$.

d) $x > 5$.

e) $x \leqslant -3$.

32 Alguns alunos consultaram, no *site* do Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos (CPTEC), a temperatura em um município, em vários horários entre as 6 h e as 18 h de certo dia, obtendo como modelo a função dada por $f(x) = -\frac{5}{36}x^2 + \frac{7}{2}x + 4$, em que $f(x)$ representa a temperatura em graus Celsius no horário x.

a) Qual foi aproximadamente a temperatura registrada às 10 h? E às 17 h? 25,11 °C; 23,36 °C

b) Em quais horários a temperatura registrada foi superior a 22 °C? Entre as 7 h 12 min e as 18 h.

c) Em que horário foi registrada a maior temperatura? Qual foi essa temperatura? 12 h 36 min; 26,05 °C

Diga aos alunos que o CPTEC possui um sistema de computadores de última geração que possibilita uma previsão meteorológica confiável para todo o território nacional.

Ser consciente

Junte-se a um colega e discutam acerca da importância das previsões meteorológicas para a agricultura e outras aplicações. Em seguida, registrem as conclusões obtidas. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

12 Inequação do 1º e do 2º grau

Na palma da mão

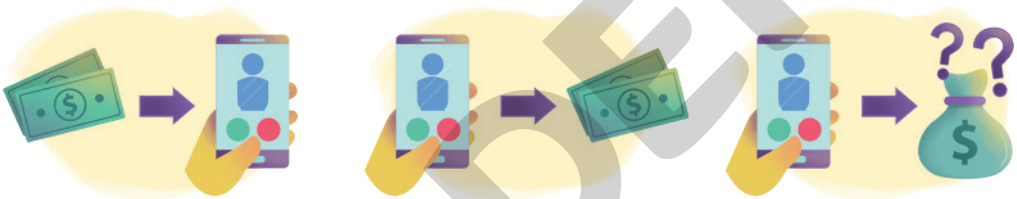
O aparelho celular é, sem dúvidas, um dos equipamentos eletrônicos mais utilizados atualmente, não apenas para realizar ligações, mas para acesso à internet, envio de mensagens, acesso a contas bancárias, armazenamento de informações, como fotos e vídeos, entre outras atividades. Com a redução nos preços dos aparelhos, ocasionada, entre outros fatores, pela concorrência imposta pelas diversas marcas e modelos presentes no mercado, nos últimos anos houve um aumento na quantidade de usuários desse tipo de aparelho no Brasil, conforme constatam as pesquisas realizadas pelo IBGE.

BNCC
- EM13MAT302
- EM13MAT506

Para que uma pessoa consiga utilizar um telefone celular, é preciso contratar um plano de telefonia móvel, vinculado a uma das operadoras de telefonia disponível na região de sua residência. Porém, como existem diversos planos disponíveis, é importante, antes de contratar qualquer um deles, observar as características de cada um, identificando o que melhor se ajusta às necessidades individuais.

Alguns tipos de planos de telefonia

HELOÍSA PINTARELLI



Pré-pago

É necessário adquirir créditos antes de utilizar o aparelho, e essa aquisição pode ser realizada em qualquer momento.

Controle

É pago ao final do mês, mas possui um gasto mensal predeterminado. Se for preciso exceder esse limite mensal, é necessário contratar pacotes adicionais ao longo do mês.

Pós-pago

É pago ao final do mês conforme o consumo mensal, tanto em relação a ligações quanto ao uso de internet.

Quando precisamos escolher um plano de telefonia móvel, é necessário avaliar, inicialmente, se desejamos pagar um valor fixo – sendo mais adequada a opção por um plano pré-pago ou controle – ou se a tarifa mensal pode ser variável – sendo a opção o plano pós-pago. Além disso, é indispensável analisar a frequência com a qual o aparelho será utilizado, tanto em relação às ligações quanto ao uso da Internet, considerando também as vantagens que são oferecidas, como o uso ilimitado de algum tipo de aplicativo.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Pesquise a respeito dos planos de telefonia móvel que são oferecidos pelas diversas empresas que atuam no país. Resposta pessoal.

B Se você precisasse contratar um plano de telefonia móvel, qual seria sua escolha em relação ao tipo de plano: pré-pago, controle ou pós-pago? Por quê? Resposta pessoal.

C Suponha que você precise escolher um entre dois planos de telefonia móvel pré-pago: o primeiro tem uma tarifa de R$ 0,75 por dia utilizado, e você pode fazer a quantidade de ligações que forem necessárias por dia, enquanto o segundo tem uma tarifa de R$ 4,75 por semana, porém, você só pode efetuar ligações por um tempo total de, no máximo, 800 minutos por semana. Por qual desses planos você optaria? O que o levou a tomar essa decisão? Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Coisas para fazer no celular, além da ligação telefônica

FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.SPICYTRUFFEL/SHUTTERSTOCK; 2.MACRO VECTOR/SHUTTERSTOCK; 3.ALEXM STUDIO/SHUTTERSTOCK; 4.DON PABLO/SHUTTERSTOCK; 5.EIVAISLA/SHUTTERSTOCK; 6.VLADIMIR MELNIKOV/SHUTTERSTOCK; 7.PICOSTUDIO/SHUTTERSTOCK; 8.NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK; 9.TATIANA POPOVA/SHUTTERSTOCK; 10.DIBROVA/SHUTTERTOCK; 11.AZAZELLO PHOTO STUDIO/SHUTTERSTOCK; 12.WIND WALK/SHUTTERSTOCK; 13.MEGA PIXEL/SHUTTERSTOCK; 14.OZANUYSAL/SHUTTERSTOCK; 15.VECTOR LIGHT/SHUTTERSTOCK; 16.AIEX VECTOR/SHUTTERSTOCK; 17.RAFID/SHUTTERSTOCK; 18.GR.STOCKS/SHUTTERSTOCK

Ser consciente

> Converse com o professor e os colegas a respeito do crescente avanço das tecnologias de informação e comunicação, inclusive refletindo sobre questões envolvendo o excesso de exposição nas redes sociais. Resposta pessoal.

De maneira geral, alguns planos são oferecidos por valores fixos mais uma taxa para cada minuto de ligação, mensagem ou gigabaite (GB) que exceder a franquia no período, seja em um serviço pré-pago, seja em um pós-pago. Conforme estudaremos nas páginas seguintes, a partir dessas informações é possível resolver uma inequação de primeiro grau com uma incógnita para calcular quantos gigabaites o usuário de um plano telefônico pode usar no mês, para certo valor máximo da fatura, por exemplo. Esse tipo de situação está presente em diversos outros contextos, como aluguel de veículos, corrida de táxi, energia elétrica, entre outros.

Franquia: quantia fixa, em minutos ou gigabaites, que representa um limite para ligações ou consumo de dados.

Gigabaite (GB): unidade de medida em informática, referente à capacidade de armazenamento de dados.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Inequação do 1º grau

Observe certo plano oferecido por uma companhia telefônica.

HELOÍSA PINTARELLI

Nessas condições, quantos pacotes adicionais de "300 mega" um usuário desse plano telefônico pode contratar no mês, para que o valor da fatura seja no máximo R$ 120,00?

Para responder a essa questão, vamos, inicialmente, escrever uma expressão que permita calcular o total a ser pago pela fatura em função da quantidade de pacotes adicionais de "300 mega" contratados. Indicando por v o valor a ser pago e por t a quantidade de pacotes adicionais de "300 mega", temos:

$$v = 9t + 84$$

Agora, devemos obter os valores de t para os quais $v \leqslant 120$. Para isso, fazemos:

$$v \leqslant 120 \Rightarrow 9t + 84 \leqslant 120 \Rightarrow 9t \leqslant 120 - 84 \Rightarrow t \leqslant \frac{120 - 84}{9} \quad 4$$

Portanto, para que o valor da fatura seja no máximo R$ 120,00, a quantidade de pacotes adicionais de "300 mega" contratados no mês deve ser menor ou igual a 4.

Para resolver esse problema, utilizamos uma desigualdade envolvendo uma expressão do tipo $ax + b$, ou seja, utilizamos uma inequação do 1º grau.

No contexto

Quantos pacotes adicionais de "500 mega" um usuário desse plano telefônico pode contratar no mês, para que o valor da fatura seja no máximo R$ 185,00?

Indicando por v o valor a ser pago e por t a quantidade de pacotes adicionais de "500 mega", temos:
$v = 84 + 15{,}90t$
Assim:
$v \leqslant 185 \Rightarrow$
$\Rightarrow 84 + 15{,}9t \leqslant 185 \Rightarrow$
$\Rightarrow t \leqslant \frac{101}{15{,}9} \simeq 6{,}35$
6 pacotes

Chamamos de **inequação do 1º grau** toda desigualdade que, quando reduzida, possui uma das seguintes formas:

- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$
- $ax + b \geqslant 0$
- $ax + b \leqslant 0$

em que a e b são constantes reais, com a diferente de zero.

Exemplos

- $-2x - \frac{1}{2} > 0$
- $\frac{x}{3} + 2 < 0$
- $x + 4 \leqslant 5$
- $3x > 3$
- $7x + 8 \geqslant 3x - 5$
- $5x + 1 \leqslant 2x + 3$
- $\sqrt{3}x > x + 1$
- $x + 1 \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}x$

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Resolva, no conjunto dos números reais, as inequações.

a) $9x - 2 \leqslant 4x$

b) $4{,}5t + 6 > 6{,}5t$

Resolução

a) $9x - 2 \leqslant 4x \Rightarrow 9x - 4x \leqslant 2 \Rightarrow 5x \leqslant 2 \Rightarrow x \leqslant \frac{2}{5}$

Portanto, $S = \left]-\infty, \frac{2}{5}\right]$ ou $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leqslant \frac{2}{5}\right\}$.

Resolver uma inequação é obter os valores da variável que a tornam verdadeira. Esses valores são chamados **soluções da inequação** e o conjunto das soluções recebe o nome de **conjunto verdade** ou **conjunto-solução** (S).

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

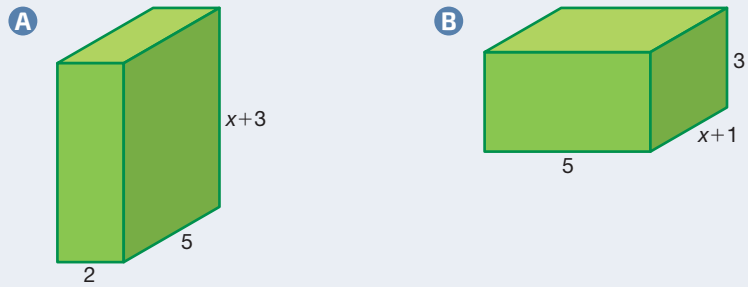
MODERNA

b) $4{,}5t + 6 > 6{,}5t \Rightarrow 4{,}5t - 6{,}5t > -6 \Rightarrow -2t > -6 \Rightarrow 2t < 6 \Rightarrow t < 3$.

> Quando multiplicamos ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo, devemos inverter o sentido da desigualdade.

Portanto, $S =]-\infty, 3[$ ou $S = \{t \in \mathbb{R} \mid t < 3\}$.

R2 Considere os paralelepípedos reto retângulos **A** e **B**, cujas dimensões estão expressas em uma mesma unidade de medida.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Para quais valores de x o volume do paralelepípedo **B** é maior do que o volume do paralelepípedo **A**?

Resolução

Sejam V_A e V_B os volumes dos paralelepípedos **A** e **B**, respectivamente. Assim:

- $V_A = 2 \cdot 5 \cdot (x + 3) = 10x + 30$
- $V_B = 5 \cdot (x + 1) \cdot 3 = 15x + 15$

Segue que:

$$V_B > V_A \Rightarrow 15x + 15 > 10x + 30 \Rightarrow 15x - 10x > 30 - 15 \Rightarrow 5x > 15 \Rightarrow x > 3$$

Portanto, para $x > 3$, o volume do paralelepípedo **B** é maior do que o volume do paralelepípedo **A**.

Inequação do 2º grau

Estudamos anteriormente que resolver uma inequação é determinar os valores de x que tornam a desigualdade verdadeira, ou seja, obter o conjunto-solução da inequação. Nesse tópico, resolveremos inequações do 2º grau por meio do estudo do sinal da função quadrática correspondente.

Denominamos inequação do 2º grau toda desigualdade que, quando reduzida, possui uma das seguintes formas:

- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \geqslant 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

em que a, b e c são constantes reais, com a diferente de zero.

Exemplos

- $x^2 + 4x - \frac{1}{3} < 0$
- $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 10 \leqslant 3$
- $-x^2 - \frac{1}{2}x < 2x^2 - \frac{1}{2}x$
- $-x^2 + 4 \geqslant -2$
- $x^2 \geqslant 0$
- $-\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{2}x < 2x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}x$
- $2x - 5 > x^2 - 5$
- $3x^2 + 2 < x^2 - 2x$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas resolvidos

R3 Resolva, no conjunto dos números reais, as inequações.

a) $3x^2 - 2x - 1 \geqslant 0$ b) $4x^2 + 2x + 1 < 0$ c) $-2x^2 + 12x - 18 < 0$

Resolução

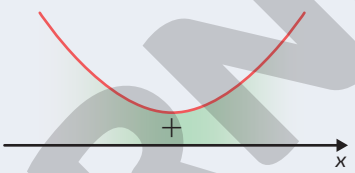
a) Consideramos a função f dada por $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Fazendo o estudo do sinal de f, segue que:

- $a = 3 > 0$
- $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16$
- $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \dfrac{2 \pm 4}{6} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\dfrac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$.

b) Consideramos a função g dada por $g(x) = 4x^2 + 2x + 1$. Fazendo o estudo do sinal de g, segue que:

- $a = 4 > 0$
- $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = -12 < 0$
  Logo, g não possui zeros.



Portanto, $S = \{\}$ ou $S = \varnothing$.

c) Consideramos a função h dada por $h(x) = -2x^2 + 12x - 18$. Fazendo o estudo do sinal de h, segue que:

- $a = -2 < 0$
- $\Delta = 12^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-18) = 0$
- $x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-2)} = 3$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1. c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -1\}$

1 Resolva, no conjunto dos números reais, as inequações. 1. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$

a) $5x + 8 > -12$

b) $3 - 5x \leqslant 8$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$

c) $3x^2 + 18x + 15 < 0$

d) $(x - 6)^2 \geqslant 0$ $S = \mathbb{R}$

2 Segundo as informações nutricionais contidas no rótulo de determinado biscoito, cada unidade tem 47 quilocalorias (kcal). 2. a) 470 kcal

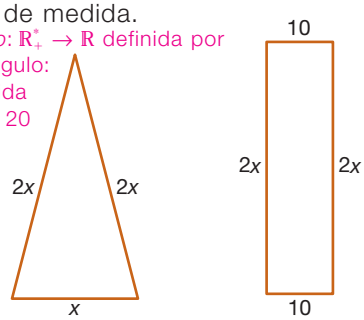
a) Uma pessoa que come 10 unidades desse biscoito está ingerindo quantas quilocalorias?

b) Escreva a lei de formação de uma função que expresse a quantidade de quilocalorias ingeridas q, em função da quantidade n de biscoitos consumidos. $q(n) = 47n$

c) Qual é o número mínimo de biscoitos que devem ser consumidos para que sejam ingeridas 350 kcal? 8 biscoitos

3 No triângulo e no retângulo estão indicados os comprimentos de seus lados em uma mesma unidade de medida.

3. a) triângulo: $p: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = 5x$; retângulo: $p: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = 4x + 20$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

a) Qual é a lei de formação da função que expressa o perímetro p de cada figura, em relação à medida x?

b) Qual é o maior valor inteiro que x pode assumir para que o perímetro do triângulo seja menor do que o do retângulo? $x = 19$

MODERNA

7. a) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

4 Desafio

Em um cinema, o preço da sessão varia de acordo com o dia da semana. Nas sextas-feira, sábados e domingos são cobrados R$ 27,00 por pessoa; nos outros dias da semana, R$ 21,00. Sabendo que, em uma semana, o número total de pessoas que vão a esse cinema na sexta-feira, no sábado e no domingo é o triplo do número total de pessoas que vão nos outros dias da semana, determine o número mínimo total de pessoas que devem ir a esse cinema, durante uma semana, para que a arrecadação seja maior ou igual a R$ 178 500,00. 7 000 pessoas

5 Para a produção de bolos, uma confeitaria tem uma despesa mensal de R$ 3 500,00 em mercadorias e mais R$ 2 500,00 em outros gastos. Cada bolo produzido nessa confeitaria é vendido por R$ 40,00. a) $L: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $L(q) = 40q - 6\,000$

a) Escreva a lei de formação da função que determine o lucro L dessa confeitaria em função da quantidade q de bolos vendidos.

b) Para quais valores de q a função que você escreveu no item **a** assume valores positivos? O que podemos concluir nesse caso? Resposta no final do livro.

6 Uma bomba-d'água envia 1 500 ℓ de água por minuto para um reservatório. Qual é o tempo mínimo de funcionamento dessa bomba para que ela envie uma quantidade maior ou igual a 22 500 ℓ de água para o reservatório? 15 min

7 Para oferecer planos diferentes dos que são disponibilizados no mercado, uma concessionária de energia elétrica criou dois planos com tarifas mensais fixas.

- No plano **A**, a tarifa mensal fixa é R$ 88,00, com direito ao consumo de até 70 kWh. Caso ultrapasse essa quantia será cobrado R$ 1,20 a cada kWh excedente.
- No plano **B**, a tarifa mensal fixa é R$ 110,00, com direito ao consumo de até 100 kWh. Caso ultrapasse essa quantia será cobrado R$ 1,80 a cada kWh excedente.

a) Em um plano cartesiano, esboce os gráficos das funções que representam o custo para o consumidor em função do consumo de energia elétrica, do plano **A** e do plano **B**.

b) Em qual intervalo de consumo o plano **B** é mais vantajoso para o consumidor quando comparado ao plano **A**? entre $88,\overline{3}$ kWh e $123,\overline{3}$ kWh

8 Dada a função f definida por $f(x) = -3x^2 + x + 7$, determine os valores reais de x para que se tenha $f(-1) \geqslant f(x + 3)$.

9 Para quais valores inteiros de k a inequação $5x^2 + 2kx - k > 0$ é satisfeita para todo x real? $-4, -3, -2$ e -1

8. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant -\frac{5}{3}\right\}$

10 Qual é o domínio da função h definida por $h(x) = \sqrt{-x^2 + 3x + 10}$? $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$

11 Considere um triângulo cujos comprimentos da base e da altura são, em centímetros, respectivamente, $4p$ e $(p - 1)$, e um retângulo cujas dimensões são, em centímetros, $(p + 2)$ e p. Para quais valores de p a área determinada pelo triângulo é maior do que a determinada pelo retângulo? $p > 4$

12 Considere um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular com lados medindo x cm de comprimento. *$x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

a) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, represente graficamente a área e o perímetro desses polígonos em função do comprimento de seu lado. O que você pode observar? Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

b) As representações gráficas obtidas por você no item **a** correspondem a funções afins ou quadráticas? perímetros: funções afins; áreas: funções quadráticas

c) Considere um retângulo cujas dimensões são 5 cm e x cm. Para quais valores de x:

- o perímetro do quadrado é maior do que o do retângulo? $x > 5$
- a área da região determinada pelo hexágono é maior do que a área determinada pelo retângulo? $x > \frac{10\sqrt{3}}{9}$
- a área da região determinada pelo triângulo é igual a área determinada pelo retângulo? *

Lembre os alunos de que o raio de uma circunferência inscrita em um polígono regular corresponde ao apótema do polígono.

13 Desafio

Considere um octógono regular inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio é r. Sabendo que o comprimento do lado e do apótema desse octógono é x cm e $\frac{r\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ cm, respectivamente, e que $x = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$, resolva. 13. b) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

a) Escreva uma expressão que possibilite calcular:

- o perímetro P do octógono em função do comprimento de seu lado. $P = 8x$
- a área A do octógono em função do comprimento de seu lado. $A = 2x^2\left(1 + \sqrt{2}\right)$

b) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, represente graficamente a área e o perímetro desse polígono em função do comprimento de seu lado.

c) As representações gráficas obtidas por você no item **b** correspondem a funções afins ou quadráticas? perímetro: função afim; área: função quadrática.

d) Para quais valores de x a área da região determinada por esse octógono é maior do que a área da região determinada por um retângulo cujas dimensões são 5 cm e 3 cm? $x > \sqrt{\frac{15\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

13 Progressão aritmética

BNCC
• EM13MAT507

A geometria das abelhas

As abelhas são insetos cujo comportamento peculiar motiva estudos não apenas de entomólogos ou biólogos, mas de outros profissionais, em conjunto com o fato de que esses animais são essenciais para a manutenção das relações entre diferentes espécies e a preservação da natureza.

A construção da colmeia, por exemplo, desperta a curiosidade de profissionais da área de Matemática. A forma hexagonal dos alvéolos que as abelhas constroem para depositar mel, por exemplo, é uma questão justificada matematicamente. Para compreender o porquê da forma hexagonal, observe as opções regulares que as abelhas poderiam ter escolhido, a fim de compartilhar as paredes entre os alvéolos.

triangular

quadrangular

hexagonal

HELOÍSA PINTARELLI

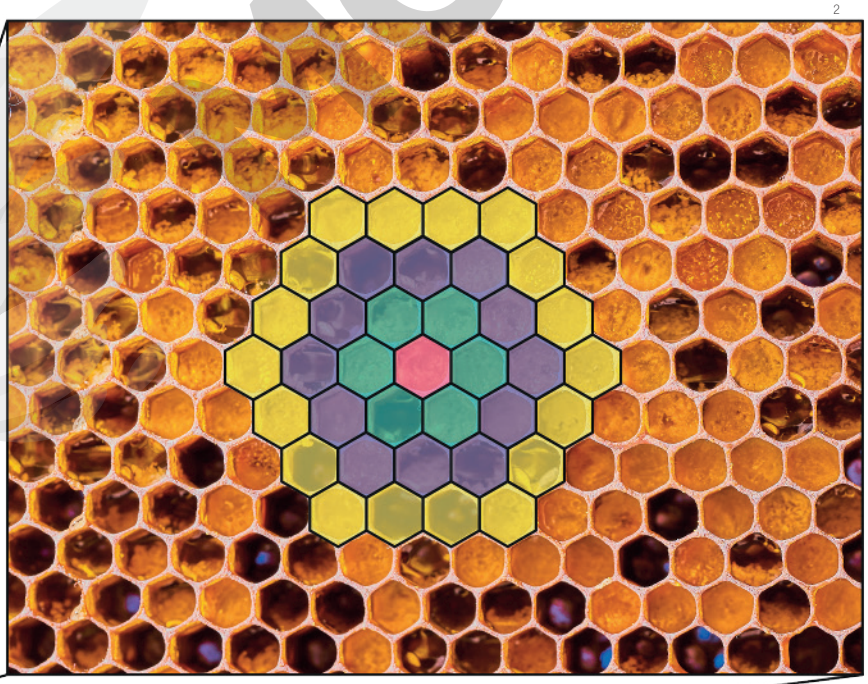
Entomólogo: profissional especialista no estudo dos insetos.

1

Fontes de pesquisa: <http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/matematica_e_%20natureza/matematicaenatureza-html/audio-abelhas-br.html>. Acesso em: 21 ago. 2020. <http://www.apacame.org.br/mensagemdoce/59/artigo.htm>. Acesso em: 21 ago. 2020.

No entanto, cálculos mais elaborados demonstram que, utilizando a mesma quantidade de material, a forma hexagonal é a que proporciona a maior capacidade de armazenamento.

Outro fato matematicamente interessante, também relacionado à construção da colmeia, consiste na quantidade de alvéolos presentes em cada um dos sucessivos conjuntos construídos ao redor de um alvéolo qualquer tomado como referência. Observe no esquema.



2

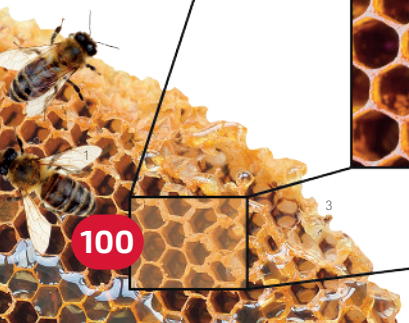
Legenda:

alvéolo referencial

alvéolos do primeiro conjunto

alvéolos do segundo conjunto

alvéolos do terceiro conjunto



1

3

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Na construção dos alvéolos das colmeias, o uso da forma hexagonal proporciona quais benefícios quando comparada às outras formas? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que a forma hexagonal proporciona, utilizando a mesma quantidade de material, uma maior capacidade de armazenamento.

B Determine a quantidade de alvéolos que formam o:

- 1º conjunto: 6
- 2º conjunto: 12
- 3º conjunto: 18
- 4º conjunto: 24

C Você consegue identificar um padrão em relação à ordem do conjunto e o número de alvéolos que o compõem? Justifique sua resposta.

Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que o número de alvéolos de um conjunto específico é igual ao número de alvéolos do conjunto anterior adicionado a 6 unidades, ou que o número de alvéolos de um conjunto é igual ao produto entre 6 e a ordem do conjunto.

Ser consciente

> Pesquise um pouco mais sobre a importância das abelhas na reprodução e preservação das espécies vegetais, e as possíveis consequências com a diminuição das suas populações. Resposta pessoal.

Conforme você pôde identificar nas questões **B** e **C**, ao ordenarmos as quantidades de alvéolos que formam os conjuntos apresentados no esquema, obtemos uma sequência de números que possui um certo padrão. Nas próximas páginas, veremos que é possível generalizar padrões em algumas sequências numéricas por meio de uma lei de formação, o que permite determinar um número qualquer da sequência apenas conhecendo sua posição, sem a necessidade de contar ou representar esquematicamente. Vamos também relacionar essas sequências às funções afim e quadrática, estudadas nos temas anteriores, além de determinar uma fórmula que permite adicionar os seus *n* primeiros números.

As abelhas são responsáveis pela polinização da maior parte da população vegetal. Assim, com uma redução na quantidade desses animais, ou até a extinção deles, toda a cadeia alimentar ficaria comprometida, porque com a redução na polinização, a produção de vegetais seria menor, ocasionando em uma redução da população dos animais herbívoros, reduzindo gradativamente a quantidade de animais carnívoros, atingindo cada vez mais espécies até chegar ao ser humano. Assim, a preservação desses animais é indispensável para a humanidade.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.IRIN-K/SHUTTERSTOCK; 2.SPHINX 2013/SHUTTERSTOCK; 3.TRUM RONNARONG/SHUTTERSTOCK; 4.IAN 2010/SHUTTERSTOCK; 5.MAGSI/SHUTTERSTOCK; 6.7INNAMAMA/SHUTTERSTOCK; 7.OKSANA 2010/SHUTTERSTOCK; 8.CRAEVSCHII FAMILY/SHUTTERSTOCK

Sequências numéricas

Antes de iniciarmos nosso estudo sobre progressões aritméticas, exemplo interessante de sequência numérica, vamos definir uma sequência de números reais.

Uma **sequência de números reais** é uma função $a: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que associa a cada número natural não nulo n um número real a_n.

Nesta coleção, consideraremos apenas sequências de números reais. Desse modo, a fim de simplificarmos a escrita, quando dissermos sequência numérica, estamos nos referindo a uma sequência de números reais.

Usualmente, indicamos uma sequência por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$. Os números a_1, $a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ são chamados **termos da sequência**. O número a_1 é o primeiro termo, a_2 é o segundo termo e assim sucessivamente. O número a_n é o n-ésimo termo da sequência.

Outro conceito que será importante em nossos estudos é o de sequências finitas.

Uma **sequência finita** é uma função cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}^*$, cuja forma é $I_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Indicaremos um sequência finita por $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ e diremos que ela possui n termos.

Quando uma sequência não é finita, dizemos que ela é infinita.

Progressão aritmética

Considere a sequência $(4, 8, 12, 16, \ldots)$, em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior mais 4.

$$a_2 = a_1 + 4 = 8$$

$$a_3 = a_2 + 4 = 12$$

$$a_4 = a_3 + 4 = 16$$

$$\vdots$$

Sequências com essa característica são chamadas progressões aritméticas.

Chamamos de **progressão aritmética** (PA) toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior adicionado a uma constante r, chamada **razão** da progressão.

- Se $r = 0$, então PA é **constante**.
- Se $r < 0$, então PA é **decrescente**.
- Se $r > 0$, então PA é **crescente**.

A razão da PA $(4, 8, 12, 16, \ldots)$ é 4.

Exemplos

- Na PA $(9, 9, 9, 9, 9, \ldots)$, temos $r = 0$. Portanto, essa PA é constante.
- Na PA $(-5, -1, 3, 7, 11, \ldots)$, temos $r = 4$. Portanto, essa PA é crescente.
- Na PA $(12, 9, 6, 3, 0, \ldots)$, temos $r = -3$. Portanto, essa PA é decrescente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Considerando a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, temos:

$a_2 = a_1 + r$ $\quad$ $a_3 = a_2 + r$ $\quad$ $a_4 = a_3 + r$ $\quad$ ...

De maneira geral:

O n-ésimo termo de uma PA, em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, é dado pela fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} + r$$

Em uma PA, $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, então:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Considerando a_{n-1}, a_n e a_{n+1} três termos consecutivos de uma PA, o termo central a_n é igual à média aritmética dos outros dois.

Veja duas maneiras de representar uma PA de razão r e termos desconhecidos.

- Se $a_1 = x$, temos $(x, x + r, x + 2r, \ldots)$.
- Se $a_1 = x - r$, temos $(x - r, x, x + r, \ldots)$.

Também podemos escrever os termos de uma PA em função de outros termos e de sua razão. Exemplos:

$a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_1 + 3r$

$a_6 = a_2 + 4r$

$a_{18} = a_8 + 10r$

$a_{18} = a_{20} - 2r$

Fórmula do termo geral de uma PA

Considere a PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ de razão r. Nesse caso, temos:

$a_1 = a_1 + 0r$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 + r} + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 + 2r} + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

$a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1 + 3r} + r \Rightarrow a_5 = a_1 + 4r$

$\vdots$

$a_n = a_{n-1} + r \Rightarrow a_n = a_1 + (n - 1)r$

$\vdots$

Note que qualquer termo de uma PA pode ser escrito em função de a_1 e r.

A fórmula do termo geral de uma PA é:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Nessa fórmula:

- a_n: n-ésimo termo.
- a_1: primeiro termo.
- n: ordem do termo.
- r: razão.

> Escreva um algoritmo que possibilite calcular um termo qualquer de uma PA de razão r, dados o primeiro termo, a ordem do termo e a razão r.
Resposta no Suplemento para o professor.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R1 Determine o 65º termo da PA $(-45, -52, -59, \ldots)$.

Resolução

Temos $a_1 = -45$ e $r = -7$.

Determinamos a_{65} aplicando a fórmula do termo geral para $n = 65$.

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{65} = -45 + (65-1) \cdot (-7) = -45 - 448 \Rightarrow a_{65} = -493$

Portanto, o termo $a_{65} = -493$.

R2 Qual é o número de termos da PA $(9, 13, 17, \ldots, 149)$?

Resolução

Temos $a_1 = 9$, $r = 4$ e $a_n = 149$.

Obtemos a posição n do último termo da PA aplicando a fórmula do termo geral.

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 149 = 9 + (n-1) \cdot 4 \Rightarrow 140 = 4n - 4 \Rightarrow 4n = 144 \Rightarrow n = 36$

Portanto, a PA possui 36 termos.

R3 Quantos múltiplos de 5 existem entre os números 12 e 71?

Resolução

Os múltiplos de 5 no intervalo dado formam a sequência $(15, 20, 25, \ldots, 70)$. Note que a sequência é uma PA tal que $a_1 = 15$, $r = 5$ e $a_n = 70$.

Utilizando a fórmula do termo geral da PA, obtemos a posição n do último termo.

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 70 = 15 + (n-1) \cdot 5 \Rightarrow$

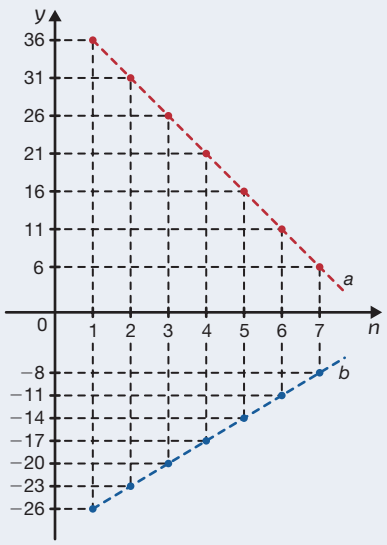
$\Rightarrow 55 = 5n - 5 \Rightarrow 5n = 60 \Rightarrow n = 12$

Portanto, existem 12 múltiplos de 5 entre 12 e 71.

Os múltiplos de 5 entre 12 e 71 são: 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 e 70.

R4 Observe a representação gráfica das progressões aritméticas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

Uma PA é uma **função afim** definida por $a(n) = a_1 + (n-1)r$ de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$. Assim, a representação gráfica dos termos da PA é formada pelos pares ordenados $(n, a(n))$.



RONALDO INÁCIO

a) Classifique cada PA em crescente, decrescente ou constante.

b) Determine o 1º termo negativo da PA: $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

c) Determine o 1º termo positivo da PA: $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

d) A partir de qual termo $b_n > a_n$?

Resolução

a) Sejam r_a e r_b as razões de $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, respectivamente. Observando o gráfico, temos:

$r_a = a_2 - a_1 = 31 - 36 = -5$

$r_b = b_2 - b_1 = -23 - (-26) = 3$

Como $r_a < 0$ e $r_b > 0$, então $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ é decrescente e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$ é crescente.

Note que o coeficiente a de cada função é igual à razão da PA. Logo, a função definida por:

- $a(n)$ é decrescente, pois $r_a < 0$
- $b(n)$ é crescente, pois $r_b > 0$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

b) Inicialmente, escrevemos a fórmula do termo geral da PA.

$$a_n = a_1 + (n-1)r_a \Rightarrow a_n = 36 + (n-1)\cdot(-5) \Rightarrow a_n = 41 - 5n$$

Em seguida, determinamos a posição do primeiro termo, tal que $a_n < 0$.

$$a_n < 0 \Rightarrow 41 - 5n < 0 \Rightarrow -5n < -41 \Rightarrow n > \frac{41}{5} \Rightarrow n > 8{,}2$$

O menor inteiro que satisfaz a condição é $n = 9$. Segue que:

$$a_9 = 41 - 5 \cdot 9 = -4$$

Portanto, $a_9 = -4$ é o primeiro termo negativo da PA $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

c) Temos:

$$b_n = b_1 + (n-1)r_b \Rightarrow b_n = -26 + (n-1)\cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_n = 3n - 29$$

Logo, para $b_n > 0$, segue:

$$b_n > 0 \Rightarrow 3n - 29 > 0 \Rightarrow 3n > 29 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{29}{3} \Rightarrow n > 9{,}666\ldots$$

O menor inteiro que satisfaz a condição é $n = 10$.

$$b_{10} = 3 \cdot 10 - 29 = 1$$

Portanto, $b_{10} = 1$ é o primeiro termo positivo da PA $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.

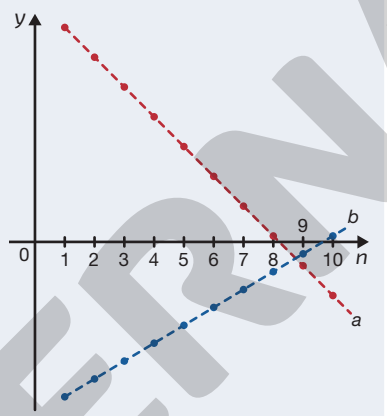
d) Resolvendo a inequação $b_n > a_n$, temos:

$$b_n > a_n \Rightarrow 3n - 29 > 41 - 5n \Rightarrow 8n > 70 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n > \frac{70}{8} \Rightarrow n > 8{,}75$$

O menor inteiro que satisfaz a condição é $n = 9$. Portanto, a partir do 9º termo, $b_n > a_n$.

Representando mais alguns termos da PA, podemos observar no gráfico as conclusões dos itens **b**, **c** e **d**.



RONALDO INÁCIO

R5 Interpole nove meios aritméticos entre -7 e 23.

Interpolar meios aritméticos significa colocar números reais entre dois números dados, de modo que a sequência formada por todos esses números seja uma PA.

Resolução

Inicialmente, devemos considerar a PA tal que $a_1 = -7$ e $a_{11} = 23$, conforme o esquema a seguir.

$$\underbrace{-7}_{a_1},\ \underbrace{\_,\ \_,\ \_,\ \_,\ \_,\ \_,\ \_,\ \_,\ \_}_{\text{9 meios aritméticos}},\ \underbrace{23}_{a_{11}}$$

$$a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10}$$

Utilizando a fórmula do termo geral da PA, calculamos a razão r.

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_{11} = a_1 + (11-1)r \Rightarrow 23 = -7 + 10r \Rightarrow 10r = 30 \Rightarrow r = 3$$

Portanto, a sequência é $(-7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23)$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Calcule a razão das progressões aritméticas.

a) (3, 10, 17, ...) 7

b) (42, 39, 36, ...) -3

c) $(-7, -3, 1, \ldots)$ 4

d) (5, –3, –11, ...) -8

e) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \ldots\right)$ $\frac{1}{4}$

f) $(2{,}3;\ 1{,}4;\ 0{,}5)$ $-0{,}9$

2 Escreva uma PA de 6 termos em que: $(9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19)$

a) $a_1 = 4$ e $r = 9$. $(4, 13, 22, 31, 40, 49)$

b) $a_1 = 23$ e $a_2 = 18$. $(23, 18, 13, 8, 3, -2)$

c) $a_6 = 19$ e $r = 2$.

d) $a_4 = 3$ e $r = \frac{5}{2}$. $\left(-\frac{9}{2}, -2, \frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8\right)$

e) $a_6 = -10$ e $r = -6$. $(20, 14, 8, 2, -4, -10)$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

3 Determine:

a) o 20º termo da PA $(2, 7, \ldots)$. 97

b) a razão da PA em que $a_1 = 17$ e $a_{32} = -45$. -2

4 Obtenha os três primeiros termos da PA na qual $a_{12} = 7$ e $a_{14} = -9$. 95, 87, 79

5 Desafio

Mônica colocou um recipiente graduado vazio, com capacidade para 1,5 ℓ, a fim de acumular a água que goteja de uma torneira. Após algum tempo, ela observa que a água acumulada no recipiente era 260 mℓ. A partir daí, Mônica registra a quantidade de água no recipiente a cada 10 min, conforme as anotações a seguir.

Medição	Quantidade de água
1	260 mℓ
2	300 mℓ
3	340 mℓ
4	380 mℓ

SERGIO L. FILHO

Considerando que seja mantido o ritmo de gotejamento, deduza uma fórmula que relacione a quantidade de água no balde em função da medição realizada por Mônica. Em seguida, responda.

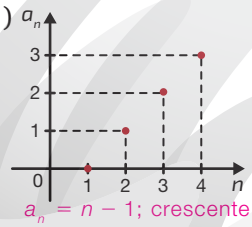
a) Quantos minutos passaram desde que Mônica colocou o recipiente abaixo da torneira até realizar a primeira medição? 65 min

b) A partir do momento em que Mônica colocou o recipiente abaixo da torneira, quantos minutos foram necessários para que ele ficasse completamente cheio? 375 min

6 Determine a fórmula do termo geral e classifique cada PA representada graficamente em crescente, decrescente ou constante.

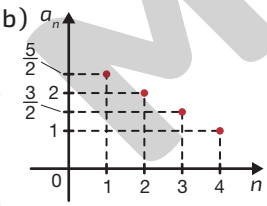
ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

a)



$a_n = n - 1$; crescente

b)



7 O computador de Marcela foi comprado em 1º de março de 2017 e sofreu depreciação de R$ 25,00 a cada mês. Sabendo que em 1º de março de 2019 esse computador foi avaliado em R$ 800,00, escreva uma fórmula que expresse seu valor a cada mês. Depois, determine o valor desse computador em 1º de julho de 2017.

$a_n = 1\,400 + (n - 1) \cdot (-25)$; R$ 1 300,00

8 Um professor de Matemática pediu aos alunos da sala que escrevessem uma PA. Duas progressões aritméticas escritas por eles foram $(2, 8, 14, \ldots, 458)$ e $(6, 10, 14, \ldots, 386)$. Quantos termos em comum possuem essas progressões?

32 termos

9 Um sinalizador eletrônico contém três lâmpadas nas cores vermelha, azul e branca. Essas lâmpadas piscam respectivamente a cada 4, 3 e 7 segundos.

Uma pessoa observa que exatamente às 13 h as três lâmpadas piscaram juntas.

a) Quais lâmpadas piscaram juntas às 13 h 3 min 24 s? E seis segundos depois? vermelha e azul; azul e branca

b) Até as 14 h, quantas vezes a lâmpada branca terá piscado? 514 vezes

c) Escreva os horários exatos das três últimas piscadas da lâmpada branca até as 14 h. 13 h 59 min 58 s; 13 h 59 min 51 s; 13 h 59 min 44 s

d) A lâmpada azul piscou junto com a branca em algum dos horários que você determinou no item anterior? Em qual? Sim, às 13 h 59 min 51 s.

e) A lâmpada vermelha piscou junto com a branca em algum dos horários determinados no item **c**? Em qual? Sim, às 13 h 59 min 44 s.

10 Observe no quadro o montante obtido em uma aplicação a juro simples em função do tempo.

Tempo	1	2	3	...	n	...
Montante	M_1	M_2	M_3	...	M_n	...

a) Mostre que a sequência dos montantes $(M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots)$ é uma PA. Resposta no final do livro.

b) Utilizando a relação entre PA e função afim, mostre que $M = C(1 + it)$, em que M, C, i e t $(t > 0)$ indicam, respectivamente, o montante, o capital, a taxa de juro (na forma decimal) e o tempo. Resposta no final do livro.

11 Existem 6 praças de pedágio entre as cidades **X** e **Y**, que distam 420 km uma da outra. As praças de pedágio estão à mesma distância uma da outra, e essa distância também é a mesma entre as cidades **X** e **Y** e suas respectivas praças de pedágio mais próximas. Considerando as informações, calcule a distância percorrida por um automóvel que se desloca da 2ª à 5ª praça de pedágio. 180 km

12 Determine a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 5 termos entre 3 e 27. 4

13 Interpole 11 meios aritméticos entre -16 e 20 e calcule o valor de $a_5 + a_6 + a_8$. 0

14 Deseja-se interpolar 5 meios aritméticos entre cada termo da PA $(1, 3, 5)$.

a) Determine a razão da PA obtida. $\frac{1}{3}$

b) Qual é a quantidade de termos dessa PA? 13 termos

c) Quantos e quais são os termos dessa nova PA que pertencem a $\mathbb{N}$? 5 termos: 1, 2, 3, 4 e 5

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

6. b) $a_n = \frac{5}{2} + (n - 1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; decrescente

PA e função afim

Considere a PA $(-2, 0, 2, 4, 6, \ldots)$ de razão 2 e a função afim definida por $f(x) = 3x + 5$. Vamos verificar que a sequência $\big(f(-2), f(0), f(2), f(4), f(6), \ldots\big)$ também é uma PA. De fato:

$$f(-2) = 3 \cdot (-2) + 5 = -1$$
$$f(0) = 3 \cdot 0 + 5 = 5$$
$$f(2) = 3 \cdot 2 + 5 = 11$$
$$f(4) = 3 \cdot 4 + 5 = 17$$
$$f(6) = 3 \cdot 6 + 5 = 23$$
$$\vdots$$

Note que $(-1, 5, 11, 17, 23, \ldots)$ é uma PA de razão 6. A razão dessa nova PA é igual ao produto entre o coeficiente a $(a = 3)$ da função afim e a razão da PA anterior $(r = 2)$, ou seja, $6 = 3 \cdot 2$.

Considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots$ elementos de uma PA de razão r, f será uma função afim, definida por $f(x) = ax + b$, se, e somente se, $\big(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots, f(x_n), \ldots\big)$ for uma PA de razão $a \cdot r$.

Exemplos

- Sejam a função afim definida por $f(x) = 4x - 2$ e a PA $(-6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots)$ de razão 5. A sequência $\big(f(-6), f(-1), f(4), f(9), f(14), f(19), \ldots\big)$, dada por $(-26, -6, 14, 34, 54, 74, \ldots)$, é uma PA de razão $20 = 4 \cdot 5$.
- Sejam a função afim definida por $f(x) = \frac{2}{3}x + 1$ e a PA $(12, 6, 0, -6, -12, -18, \ldots)$ de razão -6. A sequência $\big(f(12), f(6), f(0), f(-6), f(-12), f(-18), \ldots\big)$, dada por $(9, 5, 1, -3, -7, -11, \ldots)$, é uma PA de razão $-4 = \frac{2}{3} \cdot (-6)$.

PA e função quadrática

Considere a PA $(1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$ de razão 1 e a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2$. Nesse caso, a sequência $\big(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), \ldots\big)$ não é uma PA, ou seja, a diferença entre termos consecutivos não é constante. Observe:

$$f(2) - f(1) = 8 - 2 = 6$$
$$f(3) - f(2) = 18 - 8 = 10$$
$$f(4) - f(3) = 32 - 18 = 14$$
$$f(5) - f(4) = 50 - 32 = 18$$
$$\vdots$$

Porém, a sequência $(6, 10, 14, 18, \ldots)$, formada por essas diferenças, é uma PA, nesse caso, de razão 4.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será uma função quadrática se, e somente se, para toda PA $\big(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots\big)$ de razão não nula r, a sequência $\big(f(x_2) - f(x_1), f(x_3) - f(x_2), f(x_4) - f(x_3), \ldots, f(x_n) - f(x_{n-1}), \ldots\big)$ for uma PA de razão $2ar^2$.

As propriedades apresentadas nesta página podem ser demonstradas, porém, nesta coleção, apenas as enunciaremos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exemplos

- Sejam a função quadrática definida por $f(x) = -x^2 + 2x - 2$ e a PA $(3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots)$ de razão 2. A sequência $(f(5) - f(3), f(7) - f(5), f(9) - f(7), f(11) - f(9), f(13) - f(11), \ldots)$, dada por $(-12, -20, -28, -36, -44, \ldots)$, é uma PA de razão $-8 = 2 \cdot (-1) \cdot 2^2$.
- Sejam a função quadrática definida por $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ e a PA $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, \ldots)$ de razão 6. A sequência $(f(-6) - f(-12), f(0) - f(-6), f(6) - f(0), f(12) - f(6), f(18) - f(12), \ldots)$, dada por $(78, 42, 6, -30, -66, \ldots)$, é uma PA de razão $-36 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6^2$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

15 Calcule o valor de a para o qual a função definida por $f(x) = ax + 7$ determina uma PA de razão -10, a partir da PA $(-8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots)$. $a = -2$

16 Em uma promoção, certa concessionária vendeu 35 automóveis em 5 domingos de feirão. A quantidade de veículos comercializados em cada feirão forma uma PA de razão r. O número de pessoas que visitou o feirão em cada domingo é dado pela função cuja lei de formação é $f(x) = 8x - 3$, em que x é a quantidade de veículos comercializados.

a) Se no 1º domingo de feirão a concessionária vendeu 3 veículos, determine a quantidade de veículos que foi vendida a mais no 2º domingo. O que esse valor representa em relação à PA de razão r? 2 veículos; razão

b) Escreva os termos da PA que representa a quantidade de veículos vendidos. (3, 5, 7, 9, 11)

c) Determine a sequência da quantidade de visitantes nos 5 domingos. (21, 37, 53, 69, 85)

17 Dizemos que uma partícula está em movimento retilíneo uniforme quando ela se desloca com velocidade constante em uma linha reta. Cada um dos quadros apresenta a posição de uma partícula, que está em movimento retilíneo uniforme, em função do tempo.

Partícula A

Tempo (s)	0	1	2	3
Posição (m)	5	10	15	20

Partícula B

Tempo (s)	0	2	4	6
Posição (m)	0	13	26	39

Escreva uma fórmula que expresse a posição p, em metros, de cada uma dessas partículas em função do tempo t, em segundos.
Partícula A: $p(t) = 5t + 5$; Partícula B: $p(t) = \frac{13}{2}t$

18 A função definida por $f(x) = 2x - 4$ determina os termos de uma PA a partir da PA $(-4, -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17)$. Quanto a essa nova PA, determine seus termos e sua razão.
$(-12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30)$; 6

19 Escreva a lei da função afim que determina a PA $(-26, -5, 16, \ldots)$ a partir da PA $(10, 3, -4, \ldots)$. $f(x) = -3x + 4$

20 Sabendo que a sequência (x_1, x_2, x_3, x_4) é uma PA, verifique quais das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ a seguir podem ser quadráticas. f; h

a) $f(x_1) = 2, f(x_2) = 7, f(x_3) = 33$ e $f(x_4) = 80$

b) $g(x_1) = 6, g(x_2) = 7, g(x_3) = 12$ e $g(x_4) = 15$

c) $h(x_1) = -15, h(x_2) = -4, h(x_3) = -15$ e $h(x_4) = -48$

21 Sejam a PA $(f(x_2) - f(x_1), f(x_3) - f(x_2), f(x_4) - f(x_3), \ldots)$ de razão 64 e $f(x) = 2x^2 - 3$ a lei de formação de uma função quadrática. Determine a razão da PA $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$.
4 ou -4

22 Considere a PA (x_1, x_2, x_3) de razão 7 e f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quadrática tal que $f(x_1) = -4$, $f(x_2) = 3$ e $f(x_3) = -88$. A função f possui valor de máximo ou de mínimo? Justifique sua resposta. Máximo, pois $a = -1 < 0$.

23 Verifique numericamente que a afirmação a seguir é verdadeira. Justifique sua resposta.

Se f for uma função quadrática e $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$ for uma PA de razão r, então a razão da PA $(f(x_2) - f(x_1), f(x_3) - f(x_2), f(x_4) - f(x_3), \ldots, f(x_n) - f(x_{n-1}), \ldots)$ será $2ar^2$.

Respostas na seção Resolução dos Exercícios e problemas do no Suplemento para o professor.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Em certo teatro, as poltronas estão dispostas em 14 filas, e a 1ª fila possui 20 poltronas; a 2ª fila, 24 poltronas; a 3ª fila, 28 poltronas; e assim por diante, formando a seguinte PA de razão 4.

$$(20, 24, 28, 32, \ldots, 60, 64, 68, 72)$$

Podemos calcular a quantidade total de poltronas desse teatro realizando a adição a seguir. Com isso, obteremos a soma dos termos de uma PA.

$$20 + 24 + 28 + 32 + \ldots + 60 + 64 + 68 + 72$$

De acordo com a quantidade de termos da PA, esse cálculo pode ser muito trabalhoso, se realizado termo a termo. Outra maneira de obter esse resultado é por meio de uma fórmula.

Antes de obtermos essa fórmula, analisaremos a seguinte propriedade: em uma PA finita, adicionando os termos extremos ou os termos equidistantes dos extremos, obtemos o mesmo resultado. Na PA apresentada anteriormente, temos, por exemplo:

$$(\underbrace{20}, \underbrace{24}, \underbrace{28}, \underbrace{32}, \ldots, \underbrace{60}, \underbrace{64}, \underbrace{68}, \underbrace{72})$$

$32 + 60 = 92$

$28 + 64 = 92$

$24 + 68 = 92$

$20 + 72 = 92$

Em uma PA finita, a_1 e a_n são chamados **termos extremos**; os termos a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, a_4 e a_{n-3}, e assim por diante, são chamados **termos equidistantes** dos extremos.

Oriente os alunos a escrever a resposta no caderno.

A Junte-se a dois colegas e, utilizando a relação entre PA e função afim, mostrem que $a_1 + a_n = a_x + a_y$, tal que a_x e a_y são termos equidistantes dos extremos, ou seja, que a afirmação apresentada a seguir é verdadeira.

Resposta no Suplemento para o professor.

> Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Agora, obteremos uma fórmula que permite calcular a soma dos *n* primeiros termos de uma PA. Indicamos a soma dos *n* primeiros termos de uma PA por S_n. Escrevendo essa soma de duas maneiras, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{(I)}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \quad \text{(II)}$$

Adicionando I e II membro a membro, temos:

$$+ \begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1 \end{array}$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + \underbrace{(a_2 + a_{n-1})}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_3 + a_{n-2})}_{a_1 + a_n} + \ldots + \underbrace{(a_{n-2} + a_3)}_{a_1 + a_n} + \underbrace{(a_{n-1} + a_2)}_{a_1 + a_n} + (a_n + a_1)}_{n \text{ vezes}}$$

Note que existem *n* parcelas $(a_1 + a_n)$, então podemos escrever essa igualdade da seguinte maneira:

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

A fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA é:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Nessa fórmula:

- S_n: soma dos n primeiros termos
- a_1: primeiro termo
- a_n: n-ésimo termo
- n: quantidade de termos

No contexto

Qual é o total de alvéolos existentes em uma região da colmeia formada por 8 conjuntos consecutivos de alvéolos?

$A_8 = 6 + (8 - 1) \cdot 6 \Rightarrow A_8 = 48$

$S_8 = \frac{8 \cdot (6 + 48)}{2} \Rightarrow S_8 = 216$

$216 + 1 = 217$

217 alvéolos

Exemplo

Na PA $(20, 24, 28, 32, \ldots, 68, 72)$, apresentada na página anterior, $a_n = 72$, $a_1 = 20$ e $n = 14$. Calculando S_n, temos:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_{14} = \frac{14 \cdot (20 + 72)}{2} = 644$$

Assim, a quantidade de poltronas do teatro é 644.

B Escreva um algoritmo que possibilite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PA de razão r, dados o primeiro termo, o número n de termos e a razão r.

Resposta no Suplemento para o professor.

Acessando tecnologias

PA na planilha eletrônica

Com o auxílio da planilha eletrônica Calc, vamos obter a soma dos 50 primeiros termos de uma PA, em que $a_1 = 3$ e $r = 2$.

Veja mais informações sobre o Calc no Suplemento para o professor.

A Selecione o intervalo de células **A1:A50**. Em seguida, acesse o menu **Planilha**, clique em **Preencher células** e, depois, em **Preencher séries...**.

B Será aberta a caixa de diálogo **Série de preenchimento**. Digite o 1º termo da PA $(a_1 = 3)$ no campo **Valor inicial** e a razão $(r = 2)$ no campo **Incremento**. Ao clicar em **OK**, os 50 primeiros termos da PA $(3, 5, 7, 9, \ldots)$ serão exibidos na coluna **A**.

O campo **Valor final** é opcional e serve para limitar os valores da sequência. Como deixamos esse campo em branco, todas as células do intervalo serão preenchidas.

	A	B
28	57	
29	59	
30	61	
31	63	
32	65	
33	67	
34	69	
35	71	
36	73	
37	75	
38	77	
39	79	
40	81	
41	83	
42	85	
43	87	
44	89	
45	91	
46	93	
47	95	
48	97	
49	99	
50	101	2600
51		

SERGIO L. FILHO

C Agora, obteremos a soma dos 50 primeiros termos dessa PA. Para isso, na célula **B50**, digite $=$ SOMA(A1:A50).

Portanto, a soma dos 50 primeiros termos da PA $(3, 5, 7, 9, \ldots)$ é 2 600.

Agora é com você! Respostas no Suplemento para o professor.

1 Utilizando uma planilha eletrônica, obtenha os 70 primeiros termos da PA $(3{,}4;\ 4{,}1;\ 4{,}8;\ \ldots)$.

2 Obtenha a soma dos 65 primeiros termos da PA apresentada na questão **1**.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

24 Leia o texto a seguir sobre o alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), considerado o maior matemático do século XIX.

THE GRANGER COLLECTION/GLOW IMAGES – COLEÇÃO PARTICULAR

Carl Friedrich Gauss

[...] Há uma história segundo a qual o professor de Carl na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor surpreso verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta, 5 050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Carl havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$ observando que $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, $98 + 3 = 101$ e assim por diante com os cinquenta pares possíveis dessa maneira, sendo a soma portanto $50 \cdot 101 = 5\,050$. [...]

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 519.

De maneira semelhante a Gauss, realize a soma dos números naturais de 1 a 1 000. Depois, converse com um colega sobre o feito de Gauss e os cálculos que vocês realizaram.
500 500; Resposta pessoal.*

25 Calcule a soma dos primeiros:

a) 15 termos da PA $(5, 9, 13, \ldots)$. 495

b) 36 termos da PA $(17, 11, 5, \ldots)$. −3 168

26 Determine a soma dos termos de cada PA.

a) $(3, 11, 19, \ldots, 115)$ 885

b) $(86, 83, 80, \ldots, 35)$ 1 089

c) $(-8, -5, -2, \ldots, 22)$ 77

27 A soma dos 25 termos iniciais de uma PA é 225. Calcule o 18º termo dessa progressão sabendo que a razão é 4. 29

28 Na PA $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_7)$, de razão -7, a soma de todos os termos é 0. Determine a_1. 21

29 Sabendo que o 21º termo de uma PA é 32 e sua razão equivale a 5% do 1º termo, verifique qual das afirmativas é verdadeira. alternativa a

a) O 1º termo é um quadrado perfeito.

b) A soma dos 11 primeiros termos é um quadrado perfeito.

c) a_{44} é maior do que 550.

30 Determine o valor de x na equação:

a) $(x + 1) + (x + 2) + \ldots + (x + n) + \ldots + (x + 100) = 7\,450$ $x = 24$

b) $(3x + 2) + (3x + 5) + \ldots + (3x + 3n - 1) + \ldots + (3x + 59) = 630$ $x = \frac{1}{3}$

31 (Enem, 2013) As projeções para a produção de arroz no período de 2012-2021, em uma determinada região produtora, apontam para uma perspectiva de crescimento constante da produção anual. O quadro apresenta a quantidade de arroz, em toneladas, que será produzida nos primeiros anos desse período, de acordo com essa projeção.

Ano	Projeção da produção (t)
2012	50,25
2013	51,50
2014	52,75
2015	54,00

A quantidade total de arroz, em toneladas, que deverá ser produzida no período de 2012 a 2021 será: alternativa d

a) 497,25 c) 502,87 e) 563,25

b) 500,85 d) 558,75

32 Qual é o valor do produto $(a) \cdot (ab) \cdot (ab^2) \cdot (ab^3) \cdot (ab^4) \cdot \ldots \cdot (ab^{n-1})$? $a^n \cdot b^{\frac{n(n-1)}{2}}$

33 Observe os esquemas.

I) 2
$2 + 4 = 6$
$2 + 4 + 6 = 12$
$2 + 4 + 6 + 8 = 20$
$2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$
⋮

II) 1
$1 + 3 = 4$
$1 + 3 + 5 = 9$
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$
⋮

a) A sequência $(2, 6, 12, 20, 30, \ldots)$ é uma PA? E a sequência $(1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$? Justifique sua resposta. não; não; Ambas não possuem razões constantes.

b) Determine a fórmula do termo geral das sequências citadas no item a. $n(n + 1)$; n^2

c) Determine o 20º termo de ambas as sequências e explique o que esses termos representam.
Resposta no final do livro.

34 Determine a soma dos 50 primeiros termos de uma PA sabendo que a soma dos 18 primeiros termos é 540 e a soma dos 30 primeiros termos também é 540. −100

35 Considere a soma dos n primeiros termos da PA $(47, 41, 35, \ldots)$. Qual é o menor valor de n para que essa soma seja negativa? 17

*Converse com os alunos sobre as dificuldades na execução da tarefa que supostamente o professor de Gauss propôs, uma vez que naquela época não havia disponíveis equipamentos eletrônicos de cálculo, como computadores e calculadoras.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

14 Função exponencial

Menores e mais “poderosos”

O armazenamento de informações em dispositivos, como computadores ou *smartphones*, tem se tornado indispensável ao cotidiano de alguns indivíduos, pois muitos os utilizam tanto para atividades diárias como no armazenamento de contatos importantes, fotos ou anotações, até mesmo para gerenciar empresas, acompanhar vendas e contratos, entre outras informações.

No entanto, cada vez mais as pessoas buscam por equipamentos mais velozes e menores, de modo a facilitar o transporte e sua manipulação. Se analisarmos, por exemplo, a evolução dos *notebooks*, ou computadores portáteis, as primeiras versões, comercializadas em torno de quarenta anos atrás, apresentavam mais de 10 kg, enquanto os equipamentos atuais possuem versões com menos do que 1 kg. Desse modo, os computadores são exemplos do intenso desenvolvimento tecnológico dos tempos atuais, pois, cada vez mais, comportam grande quantidade de informações, processando-as em alta velocidade e armazenando-as em dispositivos cada vez menores.

BNCC
• EM13MAT304

Os primeiros computadores eram enormes, precisavam de uma sala específica para eles. Eram destinados basicamente a funções de cálculos.

O termo “microcomputador” surgiu quando as máquinas começaram a pesar menos de 20 kg.

Os *notebooks* estão ganhando mais espaço pela portabilidade e baterias com autonomia cada vez maiores.

Existem *smartphones* mais “poderosos” do que os computadores de cinco anos atrás.

HD é a abreviação da expressão em inglês *Hard Disk*, que significa “disco rígido”. É o componente do computador onde são armazenados programas e arquivos.

No entanto, não são apenas os computadores que armazenam informações por meio de seus HDs. Outros equipamentos, como *smartphones*, *tablets* e relógios inteligentes, também têm essa capacidade. Apesar de muitos possuírem armazenamento interno, em vários deles podem ser utilizados dispositivos externos para expandir essa capacidade.

Entre os principais dispositivos externos que armazenam informações, um dos destaques são os cartões SD, também encontrados nos formatos micro SD e mini SD, geralmente utilizados em câmeras fotográficas, *smartphones* ou *tablets*. Apesar das pequenas dimensões – alguns exemplares têm 11 mm × 15 mm × 1 mm – esses equipamentos são capazes de armazenar grandes quantidades de informações, inclusive comparáveis às de alguns *notebooks*.

Comparativo dos cartões SD, mini SD e micro SD em tamanho real.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Transistores

A constatação desse desenvolvimento nos remete a uma previsão, feita em 1965, que ficou conhecida como **Lei de Moore**, em homenagem ao seu criador, Gordon Moore. A lei afirma que, em determinada área, o número de transistores (dispositivos semicondutores) que compõem *chips* e microprocessadores dobraria a cada 2 anos.

Os transistores são dispositivos condutores de corrente elétrica, fundamentais para a construção dos mais variados dispositivos eletrônicos modernos, como os *chips* de computadores, presentes nos cartões SD.

Essa lei tem acompanhado a produção dos microprocessadores até os dias atuais e possibilitou não somente *chips* cada vez menores, mas também maior velocidade de processamento. No entanto, alguns pesquisadores já começam a dizer que essa Lei não é eterna, pois é difícil que transistores aumentem para um número muito maior do que já são atualmente.

Para ter noção do crescimento do número de transistores em uma mesma área, podemos comparar o primeiro microprocessador, criado em 1971, com 2 300 transistores, a outro, fabricado em 2014, quarenta e três anos mais tarde, com 1,3 bilhão de transistores.

Fontes de pesquisa: <http://www.clickciencia.ufscar.br/portal/edicao14/materia4_detalhe.php>. Acesso em: 8 jul. 2020; <http://www.lsi.usp.br/~chip/index.html>. Acesso em: 8 jul. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

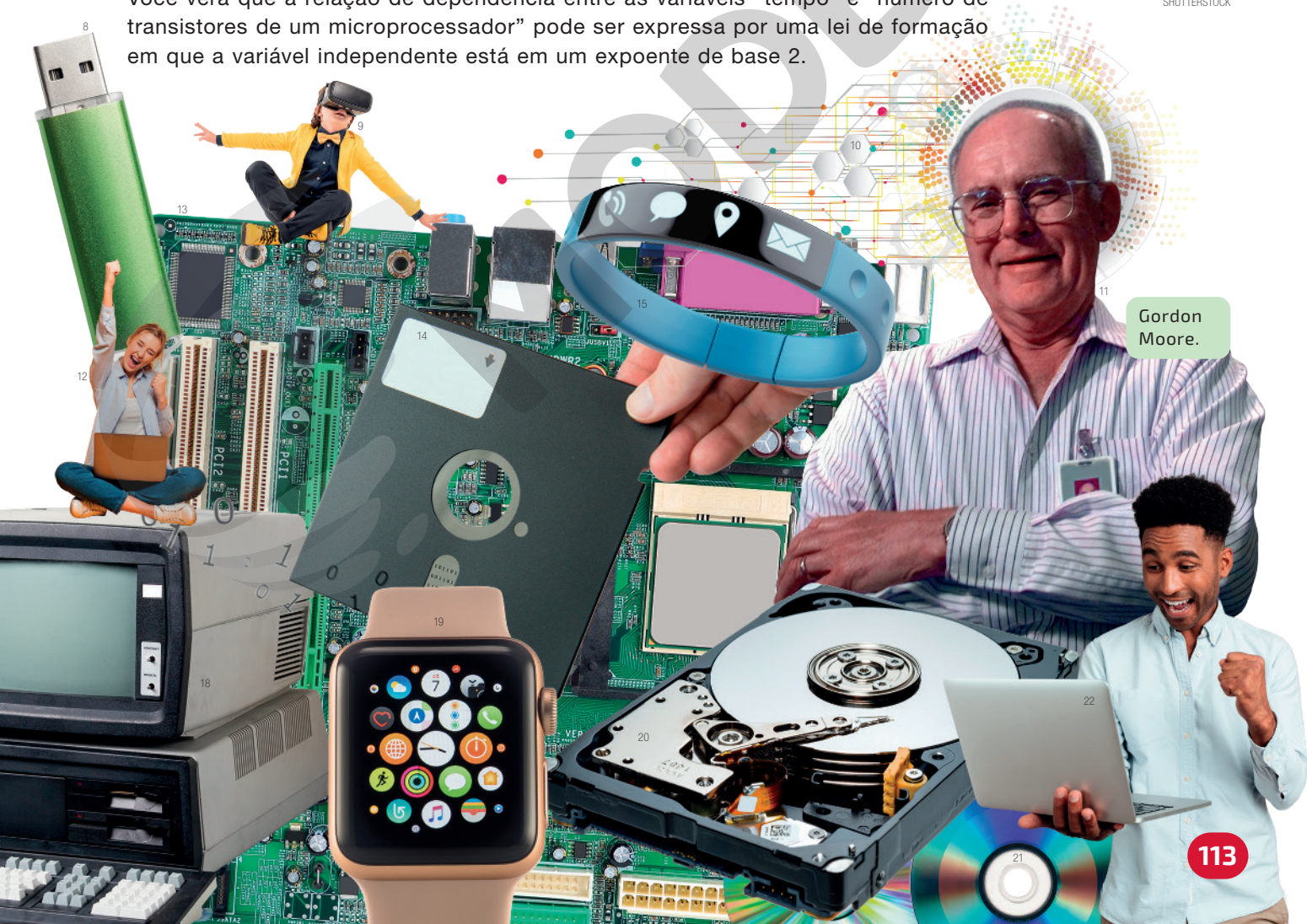
A Escreva o nome de aparelhos eletrônicos que armazenam informações, como os descritos no texto. Algumas possíveis respostas: *pen drive* e HD.

B O que afirma a Lei de Moore? A lei afirma que, em determinada área de um *chip*, o número de transistores dobraria a cada 2 anos.

C Se o número de transistores de um microprocessador aumentasse exatamente segundo a Lei de Moore, qual seria, em uma mesma área, o número de transistores em 2021, tomando como base o primeiro microprocessador de 1971? $2\,300 \cdot 2^{25}$

Ao identificarmos uma relação entre a variação da quantidade de transistores nos microprocessadores comparando-a à chamada Lei de Moore, estamos usando ideias do conceito de **função exponencial**, que é assunto das próximas páginas. Você verá que a relação de dependência entre as variáveis "tempo" e "número de transistores de um microprocessador" pode ser expressa por uma lei de formação em que a variável independente está em um expoente de base 2.

FOTOMONTAGEM DE MAURÍCIO PLANEL. FOTOS: 1.GRAEME DAWES/SHUTTERSTOCK; 2.DJA65/SHUTTERSTOCK; 3.OMELCHENKO/SHUTTERSTOCK; 4.OLEKSANDR LYSENKO/SHUTTERSTOCK; 5.IFONG/SHUTTERSTOCK; 6.CINCILA/SHUTTERSTOCK; 7.NOOPERV22/SHUTTERSTOCK; 8.ANTON STARIKOV/SHUTTERSTOCK; 9.LIGHTFIELD STUDIOS/SHUTTERSTOCK; 10.MALOSEE DOLO/SHUTTERSTOCK; 11.AP PHOTO/PAUL SAKUMA/GLOW IMAGES; 12.DEAN DROBOT/SHUTTERSTOCK; 13.UNKAS PHOTO/SHUTTERSTOCK; 14.S.VIDAL/SHUTTERSTOCK; 15.KOSTSOV/SHUTTERSTOCK; 16.ZIRCONICUSSO/SHUTTERSTOCK; 17.JAKUB KRECHOWICZ/SHUTTERSTOCK; 18.ARTSPLAV/SHUTTERSTOCK; 19.OLEG GAWRILOFF/SHUTTERSTOCK; 20.PORNANUN K/SHUTTERSTOCK; 21.KAK2S/SHUTTERSTOCK; 22.DEAN DROBOT/SHUTTERSTOCK



MODELO

Potenciação

Provavelmente, você já estudou sobre potenciação no Ensino Fundamental. Agora, antes de definirmos a função exponencial, apresentaremos as potências com expoentes racionais e irracionais.

Potência com expoente racional

Dado um número real a positivo diferente de zero e o número racional $\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$, temos $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Para calcular a raiz n-ésima de a, com a real e $n > 1$, devemos considerar os seguintes casos:
- se n for par e $a \geqslant 0$, então $\sqrt[n]{a}$ é um número b, com $b \geqslant 0$, tal que $b^n = a$.
- se n for par e $a < 0$, não existe $\sqrt[n]{a}$ no conjunto dos número reais.
- se n for ímpar, então $\sqrt[n]{a}$ é um número b, tal que $b^n = a$.

Exemplos

- $6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$
- $12^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{12^3}$
- $\sqrt{51} = 51^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt[5]{7^2} = 7^{\frac{2}{5}}$

Potência com expoente irracional

Estudaremos potência com expoentes irracionais por meio de aproximações. Para calcularmos $2^{\sqrt{6}}$, por exemplo, inicialmente obtemos valores aproximados do número irracional $\sqrt{6}$, de maneira que elas sejam menores do que $\sqrt{6}$.

2 2,4 2,44 2,449 2,4494 ...

Em seguida, definimos as potências de base 2 e expoente com essas aproximações.

2^2 $2^{2,4}$ $2^{2,44}$ $2^{2,449}$ $2^{2,4494}$ ...

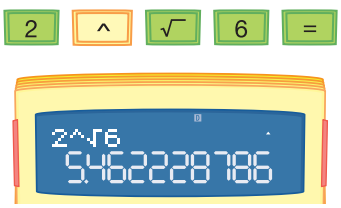
Quando o expoente se aproxima de $\sqrt{6}$, o resultado se aproxima de $2^{\sqrt{6}}$. Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular essas potências.

- $2^2 = 4$
- $2^{2,4} \simeq 5{,}278031643$
- $2^{2,44} \simeq 5{,}42641731$
- $2^{2,449} \simeq 5{,}460374872$
- $2^{2,4494} \simeq 5{,}461889019$

...

Assim, obtemos alguns valores aproximados para $2^{\sqrt{6}}$, isto é, uma potência a^m, na qual $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m \in \mathbb{I}$. Potências desse tipo sempre correspondem a um número real positivo.

Utilizando uma calculadora científica, podemos calcular um valor aproximado de $2^{\sqrt{6}}$ digitando a seguinte sequência de teclas:



SERGIO L. FILHO

Informe aos alunos que as propriedades apresentadas a seguir – provavelmente estudadas no Ensino Fundamental –, são válidas para potências com expoente real. Sejam os números reais a, b, m e n.

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, com $a \neq 0$ se $n \leqslant 0$ ou $m \leqslant 0$.
- $a^n : a^m = a^{n-m}$, com $a \neq 0$.
- $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, com $a \cdot b \neq 0$ se $m \leqslant 0$.
- Se $b \neq 0$, então $(a : b)^m = a^m : b^m$, com $a \neq 0$ se $m \leqslant 0$.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, com $a \neq 0$ se $n \leqslant 0$ ou $m \leqslant 0$.

Além disso, se $a \neq 0$, então $a^0 = 1$ e $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Quando $a = 0$ ou $a < 0$, a potência com expoente real pode ou não estar definida no conjunto dos números reais.

Potência com expoente real

Como os elementos do conjunto dos números reais são todos os números racionais e todos os números irracionais, podemos agora calcular potências de base positiva com expoentes reais quaisquer, isto é, potências do tipo a^m, em que $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $m \in \mathbb{R}$.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Estudando função exponencial

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$ ou $y = a^x$, com a real positivo diferente de um, é denominada **função exponencial**.

Exemplos

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = 7^x$.
- $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $h(x) = \left(\sqrt{16}\right)^x$.

Na definição, as restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ são necessárias, pois, caso contrário, não seria possível caracterizar uma função exponencial para todo o domínio.

- Se $a = 1$, então a função f definida por $f(x) = a^x$ é constante.
  $f(x) = 1^x = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Se $a \leqslant 0$, então $f(x) = a^x$ não é definida para todo $x \in \mathbb{R}$, como desejado.
  Para $a = -3$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, temos $f\left(\frac{1}{2}\right) = (-3)^{\frac{1}{2}}$ e $(-3)^{\frac{1}{2}}$ não está definido em $\mathbb{R}$.
  Para $a = 0$ e $x = -7$, por exemplo, temos $f(-7) = 0^{-7}$ e 0^{-7} não está definido em $\mathbb{R}$.

Existem outras funções cujas leis também apresentam a variável x no expoente de alguma potência, como as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definidas por $f(x) = b \cdot a^x + c$, com a, b e c reais, tais que $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$. Essas funções serão tratadas como **funções do tipo exponencial**.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

A tarefa **5** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

1 Considere as funções definidas por $f(x) = 3^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$. Determine:

a) $f(0)$. 1 b) $f(1)$. 3 c) $f(-4)$. $\frac{1}{81}$ d) $g(2)$. $\frac{1}{16}$ e) $g\left(\frac{1}{2}\right)$. $\frac{1}{2}$ f) $g(-3)$. 64

No contexto

2 Considerando que a quantidade de transistores de um microprocessador aumente exatamente segundo a Lei de Moore, escreva a lei de formação de uma função f que expresse a quantidade de transistores em um aparelho fabricado no ano t, tomando como base o primeiro microprocessador de 1971. Uma possível resposta: considerando que $t = 0$ representa o ano de 1971, temos $f(t) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$.

3 Certo banco oferece um investimento, no sistema de juro composto, que rende uma taxa de 6% ao ano. Observe a simulação de um investimento de R$ 1 500,00 em um período de três anos.

Ano (n)	Juro (J)	Montante (M)
1	1 500,00 · 0,06 = 90,00	1 500,00 + 90,00 = 1 590,00
2	1 590,00 · 0,06 = 95,40	1 590,00 + 95,40 = 1 685,40
3	1 685,40 · 0,06 ≃ 101,12	1 685,40 + 101,12 = 1 786,52

a) Qual das expressões determina o montante M obtido ao final do ano n, ao se aplicar R$ 1 500,00 nesse investimento? $M = 1\,500 \cdot (1{,}06)^n$
- $M = 1\,500 \cdot (6)^n$
- $M = 1\,500 + 6^n$
- $M = 1\,500 \cdot (1{,}06)^n$
- $M = 1\,500 + (1{,}06)^n$

b) Qual será o montante ao final de quatro anos? E de seis anos? R$ 1 893,72; R$ 2 127,78

4 A divisão celular denominada mitose é um processo que ocorre quando uma célula, chamada célula-mãe, duplica seu conteúdo e, então, se divide em outras duas células, chamadas células-filhas. Cada célula-filha, por sua vez, repete esse processo, totalizando, após a 2ª divisão, quatro células-filhas.

a) Determine o número total de células-filhas obtidas a partir de uma única célula-mãe após:
- 3 divisões. 8 células-filhas
- 4 divisões. 16 células-filhas
- 7 divisões. 128 células-filhas

b) Escreva a lei de formação de uma função que associe a quantidade total de células-filhas y, obtida a partir de uma única célula-mãe, após uma quantidade x $(x > 0)$ de divisões. $y = 2^x$

5 Realize uma pesquisa sobre contextos nos quais há a aplicação das funções exponenciais, por exemplo, a Matemática Financeira. Com base nos resultados dessa pesquisa, elabore um problema envolvendo os conceitos estudados e troque com um colega para que ele o resolva. Em seguida, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

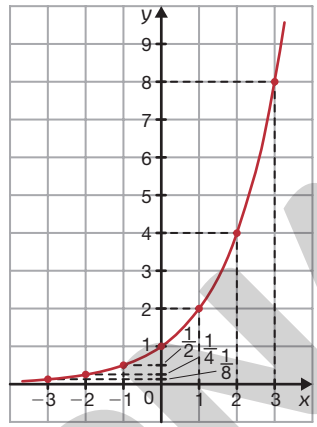
MODELO

Gráfico de uma função exponencial

Vamos esboçar o gráfico das funções exponenciais f e g dadas por $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Para isso, atribuímos alguns valores para x e calculamos os valores correspondentes de y, determinando pares ordenados (x, y). Em seguida, representamos esses pares ordenados em um plano cartesiano.

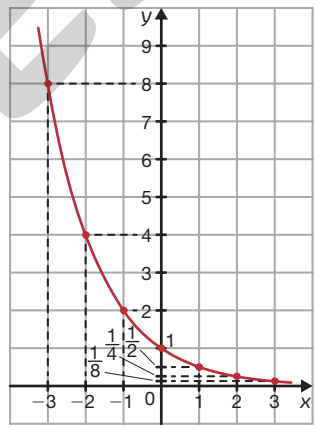
- $f(x) = 2^x$

x	$f(x) = 2^x$	(x, y)
-3	$f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\left(-3, \frac{1}{8}\right)$
-2	$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$	$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
0	$f(0) = 2^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$f(1) = 2^1 = 2$	$(1, 2)$
2	$f(2) = 2^2 = 4$	$(2, 4)$
3	$f(3) = 2^3 = 8$	$(3, 8)$



- $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	(x, y)
-3	$g(-3) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$	$(-3, 8)$
-2	$g(-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$	$(-2, 4)$
-1	$g(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$	$(-1, 2)$
0	$g(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$	$(0, 1)$
1	$g(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$	$\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$g(2) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$\left(2, \frac{1}{4}\right)$
3	$g(3) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$	$\left(3, \frac{1}{8}\right)$



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

As funções f e g são exponenciais, ou seja, são da forma $y = a^x$. Note que f é crescente e $a = 2 > 1$. Já a função g é decrescente e $a = \frac{1}{2}$, ou seja, $0 < a < 1$. Além disso, os gráficos de f e g intersectam o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e não intersectam o eixo x, sendo definidos acima dele.

Uma função exponencial é:

- **crescente** se $a > 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y aumentam, isto é, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$.
- **decrescente** se $0 < a < 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem, isto é, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow a^{x_2} < a^{x_1}$.

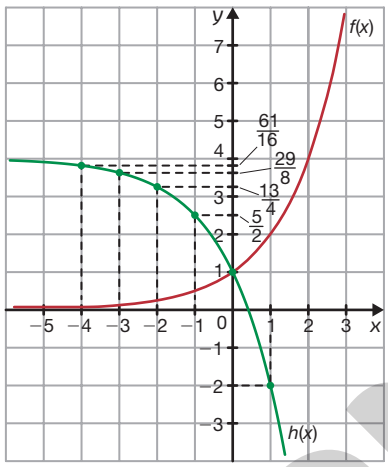
O gráfico de uma função exponencial é denominado **curva exponencial**, intersecta o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 1)$ e não intersecta o eixo x, sendo definido acima desse eixo.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

As funções do tipo exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definidas por $f(x) = b \cdot a^x + c$, com a, b e c reais, tais que $a > 0$, $a \neq 1$ e $b \neq 0$, têm como gráficos curvas exponenciais semelhantes às das funções exponenciais. Esses gráficos podem ser obtidos a partir do gráfico da função definida por $f(x) = a^x$. Veja, por exemplo, como podemos esboçar o gráfico da função h definida por $h(x) = (-3) \cdot 2^x + 4$ e compare com o gráfico da função definida por $f(x) = 2^x$, esboçado na página anterior.

x	$h(x) = (-3) \cdot 2^x + 4$	(x, y)
-4	$h(-4) = (-3) \cdot 2^{-4} + 4 = \frac{61}{16}$	$\left(-4, \frac{61}{16}\right)$
-3	$h(-3) = (-3) \cdot 2^{-3} + 4 = \frac{29}{8}$	$\left(-3, \frac{29}{8}\right)$
-2	$h(-2) = (-3) \cdot 2^{-2} + 4 = \frac{13}{4}$	$\left(-2, \frac{13}{4}\right)$
-1	$h(-1) = (-3) \cdot 2^{-1} + 4 = \frac{5}{2}$	$\left(-1, \frac{5}{2}\right)$
0	$h(0) = (-3) \cdot 2^0 + 4 = 1$	$(0, 1)$
1	$h(1) = (-3) \cdot 2^1 + 4 = -2$	$(1, -2)$



RONALDO INÁCIO

A tarefa **10** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

6 Classifique as funções exponenciais, cuja lei de formação é apresentada, em crescente ou decrescente. crescentes: alternativas **a** e **c**; decrescentes: alternativas **b** e **d**

a) $f(x) = \left(\frac{9}{5}\right)^x$

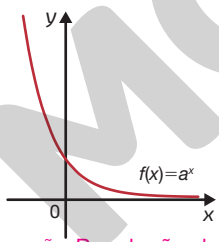
b) $f(x) = 6^{-x}$

c) $f(x) = 4^{\frac{x}{2}}$

d) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$

7 Observe o gráfico da função exponencial definida por $f(x) = a^x$.

Com base nessa imagem, é possível concluir que a pertence a qual intervalo? alternativa **c**



RONALDO INÁCIO

a) $]-\infty, -1[$

b) $[-1, 0]$

c) $]0, 1[$

d) $]1, +\infty[$

9. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** no **Suplemento para o professor**.

8 Para quais valores reais de k a função f dada por $f(x) = \left(\frac{5}{k}\right)^x$ é decrescente. $k > 5$

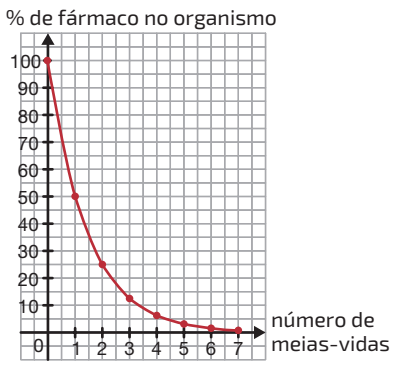
9 Esboce o gráfico da função definida por:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. **b)** $g(x) = 2 \cdot 3^x$. **c)** $h(x) = 9^{\frac{x}{3}}$.

10 De acordo com os resultados obtidos na pesquisa realizada na tarefa **5**, elabore um problema envolvendo o gráfico de uma função exponencial. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva e, por fim, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas.

Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

11 (Enem, 2007) A duração do efeito de alguns fármacos está relacionada à sua meia-vida, tempo necessário para que a quantidade original do fármaco no organismo se reduza à metade. A cada intervalo de tempo correspondente a uma meia-vida, a quantidade de fármaco existente no organismo no final do intervalo é igual a 50% da quantidade no início desse intervalo.



RONALDO INÁCIO

O gráfico acima representa, de forma genérica, o que acontece com a quantidade de fármaco no organismo humano ao longo do tempo.

F. D. Fuchs e Cher I. Wannma. *Farmacologia Clínica*. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1992, p. 40.

A meia-vida do antibiótico amoxicilina é de 1 hora. Assim, se uma dose desse antibiótico for injetada às 12 h em um paciente, o percentual dessa dose que restará em seu organismo às 13 h 30 min será aproximadamente de: alternativa **d**

a) 10% **c)** 25% **e)** 50%

b) 15% **d)** 35%

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELNA

15 Função exponencial e radioatividade

Radiação: amiga ou inimiga?

Em 1896, o físico Antoine Henri Becquerel (1852-1908) descobriu a radioatividade enquanto estudava minerais que continham urânio. Após essa descoberta, diversos estudos foram realizados acerca de elementos radioativos. Atualmente, sabe-se que a radiação pode trazer tanto malefícios quanto benefícios aos indivíduos. Se, por um lado, a exposição prolongada à radiação pode causar danos em relação ao funcionamento do organismo, por outro, o uso de elementos radioativos permite aos médicos e cientistas realizarem diagnósticos a respeito de doenças e estudarem as funções do corpo humano.

BNCC
• EM13MAT304

Alguns benefícios do uso de elementos radioativos

- Geração de energia por meio de usinas nucleares, em que a fissão nuclear é utilizada para aquecer a água, fazendo-a entrar em ebulição. O vapor de água formado com esse aquecimento gira uma turbina ligada a um gerador elétrico, transformando a energia do movimento em energia elétrica.
- Utilização dos elementos radioativos na chamada Medicina nuclear, área que utiliza os isótopos para diagnóstico e radioterapia, como a utilização do césio-137 para destruir células de tumores e o uso do iodo-131 para radiodiagnóstico da tireoide.
- Na indústria, os isótopos radioativos são utilizados na radiografia de peças metálicas ou gamagrafia industrial, que serve para detectar se há rachaduras no corpo das peças.

Radioterapia: uma das técnicas aplicadas no combate ao câncer e tem seu funcionamento baseado em submeter o paciente a doses controladas de radiação. Nesse processo, a radiação, aplicada em sessões, é direcionada à região no corpo do paciente na qual está localizado o tumor.

Outro benefício é o uso da radioatividade para determinar a idade de um fóssil. Esse método, conhecido como datação absoluta, é realizado observando a relação entre os elementos radioativos presentes no fóssil.

Sabe-se que toda substância radioativa sofre transmutação, ou seja, um decaimento radioativo, tendo sua quantidade de átomos, e consequentemente sua massa e atividade, diminuída com o passar do tempo.

Para acompanhar esse decaimento, foi estabelecido como padrão o período necessário para que a quantidade de átomos radioativos, a massa e a atividade de um elemento sejam reduzidas à metade em relação à quantidade anterior, o que é designado por meia-vida. Em determinado momento, sua quantidade de átomos radioativos se torna tão insignificante que não permite mais distinguir suas radiações das presentes no meio ambiente.

O carbono-14, por exemplo, é utilizado na determinação da idade aproximada de fósseis de seres vivos e possui tempo de meia-vida de 5 730 anos. Passado esse tempo, metade da quantidade continua como carbono-14 e a outra metade se transforma em carbono-12. O carbono-14 é indicado para determinar a idade de organismos que viveram até 70 000 anos atrás. Para organismos que viveram mais do que esse tempo, são utilizados outros elementos como o potássio-40 e o urânio-238, com meia-vida de 1,25 bilhão de anos e 4,47 bilhões de anos, respectivamente.

Fontes de pesquisa: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/1903/becquerel/biographical/>. Acesso em: 8 jul. 2020. BRADY, James E.; RUSSELL, Joel W.; HOLUM, John R. *Química: a matéria e suas transformações*. Trad. J. A. Souza. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Considerando uma amostra com 3 g de iodo-131, cuja meia-vida é 8 dias, quantos gramas de iodo-131 ainda haveria nessa amostra após:

- 8 dias? 1,5 g
- 16 dias? 0,75 g
- 24 dias? 0,375 g
- 32 dias? 0,1875 g

B Qual das expressões determina a quantidade $f(x)$ de iodo-131 na amostra após x dias? alternativa II

I) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ II) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{8}}$ III) $f(x) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{8x}$

C Utilizando a meia-vida do carbono-14, é possível afirmar que certo organismo viveu há cerca de 100 000 anos? Por quê? Não, porque a meia-vida do carbono-14 é relativamente curta, cerca de 5 730 anos. Para essa afirmação, é necessário recorrer a outro elemento radioativo de meia-vida mais longa.

D Escreva a lei de formação de uma função do tipo exponencial que expresse a massa m de carbono-14 de determinado fóssil, em um dado período de tempo t, em anos, considerando que inicialmente esse organismo possuía massa m de carbono-14. $f(t) = m \cdot 2^{\left(-\frac{t}{5\,730}\right)}$

E Qual é a datação de um resíduo de organismo que tem 12,5% do carbono-14 original? 17 190 anos

F Em sua opinião, qual é a importância de se determinar a datação de um fóssil? Resposta pessoal. Uma possível resposta: determinando a idade de um fóssil é possível estudar condições próprias da época em que o ser era vivo, como o clima e o meio ambiente, conhecimentos que podem ser utilizados em situações atuais.

Ser consciente

Conforme citado no texto, a radiação pode trazer tanto malefícios quanto benefícios aos indivíduos. Alguns benefícios já foram apresentados. Junte-se a um colega e pesquisem alguns contextos em que o uso de elementos radioativos trouxe malefícios, como a destruição das cidades japonesas de Hiroshima e Nagasaki por bombas atômicas lançadas por aviões estadunidenses, o acidente nuclear na usina norte-americana Three Mile Island, na Pensilvânia, em 1979, a explosão de um dos quatro reatores da usina nuclear de Chernobyl, na Ucrânia, em 1986, o pior acidente nuclear registrado até os dias atuais, e o acidente com césio-137 em Goiânia (GO), em 1987, em que sucateiros violaram uma cápsula de césio-137. Conversem com o professor e os colegas sobre esses e outros casos que envolvem elementos radioativos sem medidas de controle e podem levar à ampla exposição, deformações e até mortes.

Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.KRIKKIAT/SHUTTERSTOCK; 2.BIZROUG/SHUTTERSTOCK; 3.VALDIS TORMS/SHUTTERSTOCK; 4.THANASSTUDIO/SHUTTERSTOCK; 5.VCHAL/SHUTTERSTOCK; 6.HEIN NOUWENS/SHUTTERSTOCK; 7.TON BANGKEAW/SHUTTERSTOCK; 8.ROOK76/SHUTTERSTOCK; 9.TRIFF/SHUTTERSTOCK; 10.GSTRAUB/SHUTTERSTOCK; 11.MARKO ALIAKSANDR/SHUTTERSTOCK; 12.LYNEA/SHUTTERSTOCK

16 Equação e inequação exponencial

Tabaco: livre-se de seus males!

O tabagismo é caracterizado como a principal causa de morte evitável do mundo. Segundo relatório da Organização Mundial da Saúde (OMS) sobre Epidemia Global do Tabaco (2019), o tabaco mata mais de 8 milhões de pessoas por ano, dos quais em torno de 1,2 milhão são fumantes passivos. Muitos pensam que "só experimentar" cigarro ou outro derivado de tabaco não causa dependência, porém, a maioria dos fumantes adultos começaram a fumar com 18 anos ou menos. A Pesquisa Nacional de Saúde do Escolar – 2015, realizada com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, apontou que 18,4% dos adolescentes já haviam experimentado cigarro.

BNCC
• EM13MAT304

Uma prática mais recente entre os jovens é o uso do narguilé, habitualmente compartilhado em rodas de amigos, que muitas vezes desconhecem os prejuízos à saúde causados por ele. No entanto, é importante saber que o uso do narguilé, em um período que dure entre 20 e 80 minutos, corresponde à exposição aos componentes tóxicos da fumaça de 100 a 200 cigarros. Além disso, ao compartilhá-lo, os usuários podem ser expostos ao vírus do herpes, hepatite C, tuberculose, covid-19, entre outras doenças infectocontagiosas.

O narguilé, também conhecido como cachimbo d'água, é um dispositivo no qual o tabaco é aquecido e a fumaça gerada passa por um filtro de água antes de ser aspirada pelo fumante, por meio de uma mangueira. Por utilizar mecanismos de filtragem, o consumo de narguilé é considerado erroneamente menos nocivo à saúde pela população. Porém, estudos associam o uso de narguilé ao desenvolvimento de câncer de pulmão, doenças respiratórias, doença periodontal (da gengiva), aterosclerose, doença coronariana, entre outras, além das infectocontagiosas.

O tabagismo é uma doença caracterizada pela dependência da droga nicotina presente em qualquer derivado de tabaco, como cigarro, narguilé, cigarro de palha, charuto, entre outros. A quantidade de nicotina presente no corpo de uma pessoa reduz pela metade a cada duas horas aproximadamente. Desse modo, quando os neurônios sentem falta dessa substância, provocam agitação, nervosismo e falta de concentração, levando a pessoa a fumar novamente repetindo, assim, o ciclo. A cada cigarro consumido, o organismo absorve aproximadamente 1 mg de nicotina.

Ao consumir derivados do tabaco, aproximadamente 4 720 substâncias tóxicas são introduzidas no organismo. No Brasil, existem leis que estabelecem normas para uso e venda de derivados do tabaco. Para evitar doenças relacionadas ao seu uso, o melhor é não o consumir.

O fumante passivo inala uma combinação de dois tipos de fumaça: a principal, exalada pela pessoa que está fumando, e a secundária, emitida pela ponta final de um cigarro acesso. Essa última contém em média o triplo de nicotina e monóxido de carbono e até 50 vezes mais substâncias cancerígenas. Assim, o fumante passivo chega a consumir o equivalente a quatro cigarros por dia e tem um risco 30% maior de desenvolver câncer de pulmão do que alguém não exposto à fumaça.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Qual expressão representa a quantidade y de nicotina (em mg) presente no corpo de uma pessoa t horas após o consumo de um único cigarro, desconsiderando uma quantidade inicial que porventura se tenha no organismo? $y = 2^{-\frac{t}{2}}$

- $y = 2^{t}$
- $y = 2^{\frac{t}{2}}$
- $y = 2^{-\frac{t}{2}}$
- $y = 2^{-t}$

B Qual é a quantidade de nicotina presente no organismo, proveniente daquele único cigarro, após 4 h do consumo? 0,25 mg

Ser consciente

A Quais são as desvantagens de consumir produtos derivados do tabaco? Resposta pessoal. Espera-se que os alunos respondam que aproximadamente 4 720 substâncias tóxicas são introduzidas no organismo.

B Se o tabagismo é a principal causa de morte evitável do mundo, na sua opinião, por que ainda há um alto índice de fumantes? Converse com seus colegas e o professor. Resposta pessoal.

Nesse contexto, podemos utilizar a função que representa a quantidade y de nicotina do item **A** para calcular o tempo mínimo necessário para que a quantidade y de nicotina seja inferior a 0,125 g, por exemplo. No entanto, esse tipo de problema envolve igualdades (ou desigualdades) em que a incógnita está no exponente, denominada **equação exponencial** (ou **inequação exponencial**). Nas próximas páginas, veremos que uma maneira de resolver equações e inequações exponenciais é reduzir os dois membros da equação a potências de mesma base.

A Lei nº 12.546, de 14 de dezembro de 2011, institui a proibição do uso de cigarros, dentre outros produtos derivados ou não do tabaco, em locais coletivos fechados ou parcialmente fechados, sendo eles privados ou públicos. Com isso, os estabelecimentos que não atenderem às regras poderão receber advertências, multas de até R$ 1,5 milhão ou ainda serem interditados e terem sua autorização de funcionamento cancelada. Também é proibida a venda de derivados do tabaco para menores de 18 anos.

A nicotina está presente nas folhas da planta *Nicotiana tabacum*, que é a planta do tabaco. Desde o manuseio na lavoura é necessário evitar o contato das folhas com a pele, o que pode causar intoxicação, provocando mal-estar e a doença da folha verde.

Fontes de pesquisa: <https://www.inca.gov.br/tabagismo>. Acesso em: 18 ago. 2020. <https://www.inca.gov.br/en/node/1743>. Acesso em: 18 ago. 2020. <http://portalarquivos.saude.gov.br/campanhas/leiantifumo/index.html>. Acesso em: 18 ago. 2020. <https://www.inca.gov.br/publicacoes/livros/narguile-o-que-sabemos>. Acesso em: 18 ago. 2020. <https://www.pfizer.com.br/noticias/ultimas-noticias/fumante-passivo-pode-consumir-ate-quatro-cigarros-por-dia>. Acesso em: 18 ago. 2020.

FOTOMONTAGEM DE MAURÍCIO PLANEL. FOTOS: 1.GAUDI LAB/SHUTTERSTOCK; 2.LUIS MOLINERO/SHUTTERSTOCK; 3.OLESCHWANDER/SHUTTERSTOCK; 4.RAIZY KOPILOWITZ/SHUTTERSTOCK; 5.NNATTALLI/SHUTTERSTOCK; 6.SMEILOV SERGEY/SHUTTERSTOCK; 7.RISTOH/SHUTTERSTOCK; 8.GEMINI25/SHUTTERSTOCK; 9.PROSTOCK-STUDIO/SHUTTERSTOCK; 10.ATSTOCK PRODUCTIONS/SHUTTERSTOCK; 11.ROMAN SAMBORSKYI/SHUTTERSTOCK; 12.WACOMKA/SHUTTERSTOCK; 13.FOTOS PLASH/SHUTTERSTOCK; 14.PIXEL-SHOT/SHUTTERSTOCK; 15.GARFIELD BIGBERM/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

PODER

Equação exponencial

Uma equação que apresenta incógnita apenas no expoente é denominada **equação exponencial**.

Exemplos

- $3^x = 27$
- $2^{x-15} = 16$
- $\left(\frac{1}{5}\right)^x = 625$
- $49^2 = \sqrt{49^x}$
- $3^{2x} = 3^x + 21$

Para resolver uma equação exponencial, reduzimos os dois membros a potências de mesma base. Depois, utilizamos as propriedades das potências. Quando isso não é possível, utilizamos alguns artifícios de cálculo.

Observe, a seguir, a resolução de algumas equações exponenciais.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Resolva as equações.

a) $3^x = 27$

b) $2^{x-15} = 16$

c) $7^{x^2-9} = 1$

d) $25^{2x+1} = 125^{-x+2}$

e) $10^{x+2} \cdot 100^{-3x} = 10\,000\,000$

f) $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^x} = 0,\overline{6}$

Resolução

Nessas equações, podemos reduzir os dois membros a potências de mesma base.

a) $3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

Portanto, $S = \{3\}$.

b) $2^{x-15} = 16 \Rightarrow 2^{x-15} = 2^4 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 15 = 4 \Rightarrow x = 19$

Portanto, $S = \{19\}$.

c) $7^{x^2-9} = 1 \Rightarrow 7^{x^2-9} = 7^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 9 = 0 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Portanto, $S = \{-3, 3\}$.

d) $25^{2x+1} = 125^{-x+2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(5^2\right)^{2x+1} = \left(5^3\right)^{-x+2} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^{4x+2} = 5^{-3x+6} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 2 = -3x + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 7x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{7}$

Portanto, $S = \left\{\frac{4}{7}\right\}$.

e) $10^{x+2} \cdot 100^{-3x} = 10\,000\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{x+2} \cdot \left(10^2\right)^{-3x} = 10^7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10^{x+2-6x} = 10^7 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5x + 2 = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow -5x = 5 \Rightarrow x = -1$

Portanto, $S = \{-1\}$.

f) $\sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^x} = 0,\overline{6} \Rightarrow \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^x\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \Rightarrow x = 1$

Portanto, $S = \{1\}$.

R2 Determine a solução da equação $49^x - 6 \cdot 7^x = 7$.

Resolução

Nessa equação, não é possível reduzir os dois membros a potências de mesma base. Nesse caso, é necessário utilizar alguns artifícios de cálculo.

Temos:

$49^x - 6 \cdot 7^x = 7 \Rightarrow \left(7^2\right)^x - 6 \cdot 7^x - 7 = 0 \Rightarrow \left(7^x\right)^2 - 6 \cdot 7^x - 7 = 0$

Substituímos $y = 7^x$ para resolver a equação: $y^2 - 6y - 7 = 0 \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 7 \end{cases}$

Retornamos os valores de y_1 e y_2 na igualdade $y = 7^x$.

- $y_1 = -1 \Rightarrow 7^{x_1} = -1$ (impossível)
- $y_2 = 7 \Rightarrow 7^{x_2} = 7^1 \Rightarrow x_2 = 1$

Portanto, $S = \{1\}$.

Note que $\left(7^2\right)^x = 7^{2x} = \left(7^x\right)^2$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

7. c) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

1 Resolva as equações.

a) $3^{x+1} = 27$ $S = \{2\}$

b) $(0{,}25)^{2x+3} = 4^{x-1}$ $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

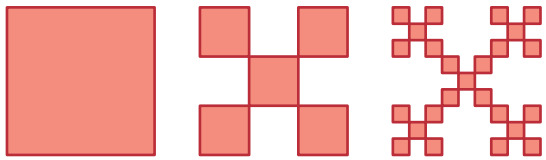
c) $\sqrt{7^x} = 343$ $S = \{6\}$

d) $5^{\frac{3}{2}x} = 125^4$ $S = \{8\}$

e) $\sqrt[6]{1\,000} \cdot 10^x = 0{,}001$ $S = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$

f) $\frac{8^x}{2^{x+2}} = 256$ $S = \{5\}$

2 A sequência de figuras apresenta vários níveis na composição de um fractal.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

a) Utilizando uma malha quadriculada, construa a figura correspondente ao próximo nível dessa sequência. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

b) Qual expressão relaciona o número y de quadradinhos existentes na figura de nível x dessa sequência? $y = 5^{x-1}$

- $y = 5^{x+1}$
- $y = 5^x$
- $y = 5^{x-1}$

c) Em qual nível da sequência o número de quadradinhos da figura será:

- 3 125? nível 6
- 78 125? nível 8

3 Nas páginas **112** e **113**, estudamos que Gordon Moore, em 1965, previa que o número de transistores que compõem *chips* e microprocessadores dobraria a cada dois anos. Essa previsão ficou conhecida como Lei de Moore.

De acordo com a lei de formação escrita por você na tarefa **2** do tema **14**, responda às questões.

a) Qual é a estimativa da quantidade de transistores, de acordo com a Lei de Moore, de um microprocessador em 1989? E em 2014? 1 177 600 transistores; 6 821 387 842 transistores

b) Sabendo que em 1989 e em 2014 foram lançados microprocessadores com, respectivamente, 1 200 000 e 1 300 000 000 transistores aproximadamente, pode-se afirmar, comparando com os resultados obtidos no item **a**, que esses processadores acompanharam a Lei de Moore?

No contexto

4 De acordo com a lei de formação indicada por você na questão **A** da página **121**, determine após quanto tempo haverá 0,125 mg de nicotina no organismo, proveniente de um único cigarro, desconsiderando uma quantidade inicial que, porventura, se tenha no organismo. 6 horas

5 Determine o valor de x para que a igualdade $3^{5x+1} \cdot \left(0{,}\overline{3}\right)^{x+8} = 243^{x-3}$ seja verdadeira. $x = 8$

6 (UFMG, 2004) A população de uma colônia da bactéria *E. coli* dobra a cada 20 minutos. Em um experimento, colocou-se, inicialmente, em um tubo de ensaio, uma amostra com 1 000 bactérias por mililitro. No final do experimento, obteve-se um total de $4{,}096 \cdot 10^6$ bactérias por mililitro.

Assim, o tempo do experimento foi de: alternativa **d**

a) 3 horas e 40 minutos.

b) 3 horas.

c) 3 horas e 20 minutos.

d) 4 horas.

7 Considere as funções definidas por $f(x) = 2 \cdot (0{,}5)^x$ e $g(x) = 4^x$.

a) Classifique essas funções em crescente ou decrescente. f: decrescente; g: crescente

b) Para qual valor de x, temos $f(x) = g(x)$? $x = \frac{1}{3}$

c) Esboce em um mesmo plano cartesiano os gráficos das funções f e g, indicando as coordenadas do ponto em que eles se intersectam.

8 É correto afirmar que a equação $(0{,}5)^{x^2-6} = 8$: alternativa **d**

a) não possui solução real.

b) possui infinitas soluções reais.

c) possui apenas uma solução real.

d) possui apenas duas soluções reais.

9 Resolva as equações.

a) $9^{2x-1} = 1$ $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

b) $6 \cdot 7^{x-3} = 294$ $S = \{5\}$

c) $3^{1+x} = 324 - 3^x$ $S = \{4\}$

d) $2^{x+2} + 2^{x-1} = 36$ $S = \{3\}$

e) $\frac{25^x + 5}{6} - 5^x = 0$ $S = \{0, 1\}$

f) $\left(4^{x+1} - 4^x\right)^2 = 144$ $S = \{1\}$

10 **Elaborando**

Dois organismos distintos, **A** e **B**, iniciaram o processo de divisão celular no mesmo instante $(t = 0)$. Um estudo estimou que a quantidade de células do organismo **A** pode ser descrita pela função dada por $y = 10 + 5t$, em que t representa o período de tempo, em horas, decorrido desde o início do processo, e y representa a quantidade de células do organismo no instante t. Já o organismo **B** apresenta, a cada hora, o triplo da quantidade de células de **A**. Com base nessas informações, elabore um problema envolvendo função exponencial e equação exponencial. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva e, por fim, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas.

10. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros em problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.
A tarefa **10** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

11 Determine o valor de x para que $4^{x+1} - 12 = 2^{x+1}$. $x = 1$

3. b) Espera-se que os alunos respondam que a quantidade de transistores do microprocessador lançado em 1989 aproxima-se da estimada pela Lei de Moore. Já o microprocessador de 2014 apresenta uma quantidade muito inferior à estimada pela Lei de Moore.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Inequação exponencial

Uma desigualdade que apresenta a incógnita apenas no expoente é denominada **inequação exponencial**.

Exemplos

- $3^x > 81$
- $5^{x-3} < 125$
- $\left(\frac{1}{8}\right)^x \geqslant 256$
- $7^{x^2-1} \leqslant \sqrt{49^x}$

Para resolver uma inequação exponencial, reduzimos os dois membros a potências de mesma base. Em seguida, sabendo que a função exponencial definida por $f(x) = a^x$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, aplicamos a seguinte propriedade:

- se $a > 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$.
- se $0 < a < 1$: $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$.

Note que, quando $a > 1$, a desigualdade se mantém, e quando $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

Veja, a seguir, a resolução de algumas inequações exponenciais.

Exercícios e problemas resolvidos

R3 Resolva as inequações.

a) $3^x < 81$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geqslant \frac{1}{4}$

c) $25^{x^2-3} \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^2$

Resolução

a) Temos $3^x < 81 \Rightarrow 3^x < 3^4$.

Como $a = 3 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$3^x < 3^4 \Rightarrow x < 4$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$.

b) Temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geqslant \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Como $a = \frac{1}{2}$ e $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x+1} \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow -x + 1 \leqslant 2 \Rightarrow x \geqslant -1$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$.

c) Temos:

$$25^{x^2-3} \leqslant \left(\frac{1}{5}\right)^2 \Rightarrow$$

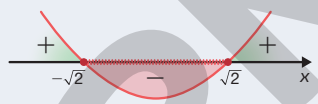
$$\Rightarrow \left(5^2\right)^{x^2-3} \leqslant \frac{1}{5^2} \Rightarrow 5^{2x^2-6} \leqslant 5^{-2}$$

Como $a = 5 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$5^{2x^2-6} \leqslant 5^{-2} \Rightarrow 2x^2 - 6 \leqslant -2 \Rightarrow 2x^2 - 4 \leqslant 0$$

Agora, fazemos o estudo do sinal da função definida por $f(x) = 2x^2 - 4$.

- A parábola tem concavidade voltada para cima.
- $f(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2} \\ x_2 = \sqrt{2} \end{cases}$



RONALDO INÁCIO

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}\right\}$.

R4 Resolva a inequação dupla $49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7}$.

Resolução

Temos:

$$49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7} \Leftrightarrow \begin{cases} 49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x \\ \left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7} \end{cases}$$

Resolvemos cada inequação.

- $49^{x-1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x \Rightarrow \left(7^2\right)^{x-1} < \left(7^{-1}\right)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow 7^{2x-2} < 7^{-x}$

Como $a = 7 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$7^{2x-2} < 7^{-x} \Rightarrow 2x - 2 < -x \Rightarrow x < \frac{2}{3}$$

Logo, $S_1 = \left]-\infty, \frac{2}{3}\right[$.

- $\left(\frac{1}{7}\right)^x < \sqrt{7} \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^x < \left[\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{7}\right)^x < \left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$

Como $a = \frac{1}{7}$ e $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

$$\left(\frac{1}{7}\right)^x < \left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$$

Logo, $S_2 = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

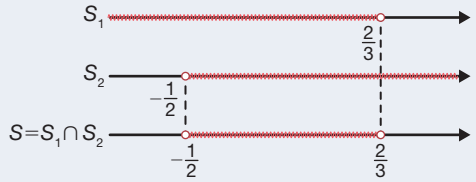
MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Fazemos a interseção de S_1 e S_2.

Portanto, $S = \left]-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right[$ ou

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}\right\}$.



RONALDO INÁCIO

R5 Qual é o domínio da função definida por $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{49^{\frac{4-x}{3}} - \sqrt[3]{7}}}$?

Resolução

O domínio da função é dado pela seguinte inequação:

$$49^{\frac{4-x}{3}} - \sqrt[3]{7} > 0 \Rightarrow \left(7^2\right)^{\frac{4-x}{3}} > 7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow 7^{\frac{8-2x}{3}} > 7^{\frac{1}{3}}$$

Como $a = 7 > 1$, a desigualdade se mantém.

$$7^{\frac{8-2x}{3}} > 7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{8-2x}{3} > \frac{1}{3} \Rightarrow 8 - 2x > 1 \Rightarrow -2x > -7 \Rightarrow x < \frac{7}{2}$$

Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < \frac{7}{2}\right\}$.

A tarefa **18** propõe aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

12 Resolva as inequações.

a) $27^x \geqslant 3$

b) $(0{,}8)^{2x-3} < (0{,}8)^5$ $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$

c) $3 \cdot 4^x \leqslant 72 - 6 \cdot 4^x$

d) $4^{x+1} \cdot 2^{x-1} < 128$ $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$

e) $25 \geqslant \dfrac{5}{5^x}$

f) $3^{x(x+1)} > 3^{x^2+1}$ $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$

13 Qual é o conjunto-solução da inequação $3 \cdot 2^{x+2} - 2^{2x} > 32$? alternativa **b**

a) $]4, 8[$ b) $]2, 3[$ c) $[4, 8]$ d) $[2, 3]$

14 Sendo f definida por $f(x) = 2^x + 2^{x+1}$, calcule x, de modo que $f(x) \leqslant 96$. $x \leqslant 5$

15 Determine o domínio da função definida por:

- $f(x) = \sqrt{3^{x-2} - 1}$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 2\}$
- $g(x) = 5\sqrt{2^{2x-1} - 8}$. $D(g) = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 2\}$
- $h(x) = \left(\sqrt[4]{4^x - 2^{x+4}}\right)^2$. $D(h) = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant 4\}$

16 Para quais valores de x a desigualdade $(0{,}4)^x < (0{,}4)^{\frac{x-3}{2}}$ é verdadeira? $x > -3$

17 Considere as funções definidas por $f(x) = 8^x - 2^{x+1}$ e $g(x) = -4^x$. Para quais valores de x temos $f(x) + g(x) > 0$? $x > 1$

18 Elabore um problema envolvendo função exponencial e inequação exponencial. Em seguida, troque com um colega para que ele o resolva e, por fim, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas. Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem o problema, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

19 Qual dos intervalos representa o conjunto-solução da inequação $0{,}5 \leqslant 8^{2x} < 4$? alternativa **d**

a) $\left]-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right[$

b) $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right[$

c) $\left]-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right[$

d) $\left[-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right[$

e) $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right[$

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

20 Para qual subconjunto do domínio da função definida por $f(x) = (0{,}6)^{2x+1}$ temos $\frac{27}{125} < f(x) \leqslant 1$? alternativa **a**

a) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right[$

b) $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$

c) $\left]-\frac{1}{2}, 1\right]$

d) $\left]-\frac{1}{2}, 1\right[$

21 (UFPB, 2006) O total de indivíduos, na n-ésima geração, de duas populações P e Q, é dado, respectivamente, por $P(n) = 4^n$ e $Q(n) = 2^n$. Sabe-se que, quando $\dfrac{P(n)}{Q(n)} \geqslant 1\,024$, a população Q estará ameaçada de extinção. Com base nessas informações, essa ameaça de extinção ocorrerá a partir da alternativa **a**

a) décima geração.
b) nona geração.
c) oitava geração.
d) sétima geração.
e) sexta geração.

12. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geqslant \frac{1}{3}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leqslant \frac{3}{2}\right\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geqslant -1\}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

17 Progressão geométrica

BNCC
• EM13MAT508

Dengue: não fique parado!

A dengue é uma doença viral que afeta milhares de brasileiros todos os anos e é um dos principais problemas de saúde pública. Em 2020, somente nas primeiras 20 semanas, o número de casos prováveis no Brasil foi em torno de 750 000, causando 321 mortes. Em geral, a dengue é mais comum em países tropicais e subtropicais, onde o clima é propício para a proliferação do mosquito *Aedes aegypti,* seu principal transmissor.

Quando uma pessoa é picada por um mosquito infectado, os sintomas da doença começam a aparecer entre 3 e 15 dias, sendo a média de 5 ou 6 dias. Entre os sintomas, podemos citar febre alta, dores no corpo (principalmente nos ossos e articulações), dores de cabeça e atrás dos olhos, manchas e erupções na pele, náuseas e vômito, tontura, extremo cansaço e perda de paladar e apetite.

Ao suspeitar que está com dengue, observando alguns desses sintomas, é importante consultar um médico em um hospital ou Unidade Básica de Saúde (UBS), a fim de realizar o tratamento adequado. Também é indicado ingerir bastante líquido durante o período da doença, para evitar a desidratação.

A maneira mais eficaz de prevenir a dengue é por meio de ações que combatam o acúmulo de água, pois é o local propício para a procriação do *Aedes aegypti*. Os órgãos públicos devem ter iniciativas para esse fim, como a visitação às casas por agentes de saúde que verificam a existência de focos e orientam os moradores. Portanto, a contribuição da população é essencial para o controle e combate da proliferação do mosquito. Veja no esquema algumas ações que contribuem para o combate à dengue.

Apenas as fêmeas do mosquito picam, já que elas fazem isso para amadurecer seus ovos. Sua saliva tem substâncias analgésicas e anticoagulantes para que não seja notado enquanto suga o maior volume de sangue possível. As partículas de vírus são injetadas na corrente sanguínea da pessoa, junto com a saliva.

Maneiras de combater os criadouros do mosquito

Se tiver plantas em casa, encha de areia os pratinhos que ficam embaixo dos vasos.

Nunca descarte lixo na rua ou em terrenos baldios. Armazene-os em sacos plásticos e lixeiras bem tampadas.

MODERNA

Prevenir a dengue é adotar simples ações que evitem que a água parada se torne criadouro do mosquito *Aedes aegypti*. Apesar dos ovos do mosquito serem depositados preferencialmente em locais que acumulem água limpa e parada, existem estudos que indicam a possibilidade de encontrar focos do mosquito em água suja também, por isso a importância em impedir o acúmulo de água parada, seja ela limpa ou não.

Veja na parte inferior da página algumas das medidas que devem ser adotadas para evitar o acúmulo de água parada e, consequentemente, impedir a proliferação do mosquito e a transmissão da dengue e demais doenças.

Fontes de pesquisa: <https://www.saude.gov.br/images/pdf/2020/May/25/Boletim-epidemiologico-SVS-21.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2020. <http://www.saude.gov.br/saude-de-a-z/dengue/descricao-da-doenca>. Acesso em: 18 ago. 2020. <https://www.saude.gov.br/saude-de-a-z/combate-ao-aedes>. Acesso em: 18 ago. 2020. <http://www.saude.gov.br/saude-de-a-z/dengue#:~:text=A%20melhor%20forma%20de%20preven%C3%A7%C3%A3o,recipientes%20pequenos%2C%20como%20tampas%20de>. Acesso em: 25 ago. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

> Suponha que uma fêmea do mosquito *Aedes aegypti* (1ª geração), com o vírus da dengue, coloque 200 ovos em um reservatório com água parada no quintal de uma casa. Além disso, considere que nas gerações futuras:
>
> - metade das crias serão fêmeas;
> - 30% das fêmeas nascerão infectadas com o vírus;
> - as crias se reproduzirão no mesmo local e com a mesma proporção de sua mãe.
>
> Qual será a quantidade de fêmeas do *Aedes aegypti* infectadas nesse reservatório na 2ª geração? E na 3ª geração? 30; 900

De maneira semelhante ao que fizemos com as progressões aritméticas em temas anteriores, nas próximas páginas veremos que é possível generalizar padrões em sequências numéricas por meio de uma lei de formação que permite calcular, por exemplo, a quantidade de fêmeas do *Aedes aegypti* de acordo com os critérios da questão anterior. O que muda nessas novas sequências é que, a constante não é dada pela diferença entre um termo e seu antecedente, a partir do segundo, mas sim, pelo quociente. Essa sequência recebe o nome **progressão geométrica**.

Ser consciente

A) Que consequências pode haver se deixarmos água parada em alguns locais de nossa residência?

B) Realize uma pesquisa sobre outras ações que devemos ter para evitar criadouros do *Aedes aegypti* em residências. Com base nisso, verifique se sua residência está protegida desses criadouros. Em caso negativo, busque auxílio e realize as ações propostas e pesquisadas para protegê-la. Resposta pessoal. Algumas possíveis respostas: manter pneus velhos sem água e em local coberto, protegido da chuva; manter tonéis e barris com água bem tampados; lavar com escova e sabão tanques utilizados para armazenar água; higienizar ralos que são raramente utilizados na residência.

PONG MOJI/SHUTTERSTOCK

O *Aedes aegypti* é um mosquito originário da África que, apesar de ter sido eliminado do Brasil na história do controle da dengue em 1955, retornou em 1976 por falhas de cobertura de ações do controle. Além de ser transmissor da dengue, essa espécie de mosquito é responsável pela transmissão das doenças zika e chikungunya, podendo ocasionar em outras enfermidades, como microcefalia e Guillain-Barré.

Ser consciente
A) Resposta pessoal. Espera-se que os alunos digam que esses locais podem tornar-se criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, possibilitando a transmissão da dengue para as pessoas que moram na residência e em regiões próximas, além da proliferação do mosquito para outras regiões.

FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.DONATAS1205/SHUTTERSTOCK; 2.MARIJUS AURUSKEVICIUS/SHUTTERSTOCK; 3.IM_VISUALS/SHUTTERSTOCK; 4.DEWIN ID/SHUTTERSTOCK; 5.SANIT FUANGNAKHON/SHUTTERSTOCK; 6.271 EAK MOTO/SHUTTERSTOCK; 7.YURIY SELEZNEV/SHUTTERSTOCK; 8.SURACHAI PUNG/SHUTTERSTOCK; 9.VALENTIN AGAPOV/SHUTTERSTOCK; 10.ALLSTARS/SHUTTERSTOCK; 11.SMSPSY/SHUTTERSTOCK; 12.ORTIS/SHUTTERSTOCK; 13.ROB ATHERTON/SHUTTERSTOCK; 14.GRAJA/SHUTTERSTOCK

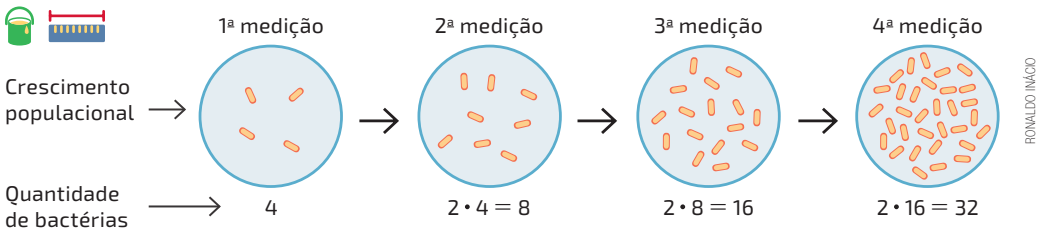
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Estudando progressão geométrica

Se julgar conveniente, retome com os alunos os conceitos sobre sequências apresentados na página 102.

Em certo experimento, foi observado que a quantidade de bactérias de uma amostra duplica a cada dia, conforme o esquema.



A quantidade de bactérias dessa amostra, a cada dia, pode ser representada por meio da sequência $(4, 8, 16, 32, 64, \ldots)$.

Note que cada termo dessa sequência, a partir do segundo, é igual ao termo anterior multiplicado por 2.

$$a_2 = a_1 \cdot 2 = 8$$
$$a_3 = a_2 \cdot 2 = 16$$
$$a_4 = a_3 \cdot 2 = 32$$
$$a_5 = a_4 \cdot 2 = 64$$
$$\vdots$$

A razão da PG é igual a 2.

Sequências com essa característica são chamadas progressões geométricas.

Chamamos **progressão geométrica** (PG) toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante q, chamada **razão** da progressão.

- Se $q = 1$, então a PG é **constante**.
- Se $q > 1$ e $a_1 > 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$, então a PG é **crescente**.
- Se $q > 1$ e $a_1 < 0$ ou $0 < q < 1$ e $a_1 > 0$, então a PG é **decrescente**.
- Se $q < 0$, então a PG é **alternante**.

Exemplos

- Na PG $(5, 5, 5, 5, 5, \ldots)$, temos $q = 1$. Assim, essa PG é constante.
- Na PG $\left(-8, -4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$, temos $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = -8$. Como $0 < q < 1$ e $a_1 < 0$, essa PG é crescente.
- Na PG $(-3, -9, -27, -81, -243, \ldots)$, temos $q = 3$ e $a_1 = -3$. Como $q > 1$ e $a_1 < 0$, essa PG é decrescente.
- Na PG $\left(\frac{1}{25}, -\frac{1}{5}, 1, -5, 25, \ldots\right)$, temos $q = -5$. Como $q < 0$, essa PG é alternante.

Considerando a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$, temos:

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_2 \cdot q$$
$$a_4 = a_3 \cdot q$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$
$$\vdots$$

Também podemos escrever os termos de uma PG em função de outros termos e de sua razão.

- $a_4 = \underbrace{a_2 \cdot q}_{a_3} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_2 \cdot q^2$
- $a_5 = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$
- $a_9 = \frac{a_{10}}{q}$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

De maneira geral:

O n-ésimo termo de uma PG em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q é dado pela fórmula de recorrência:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q, \text{ para } n \text{ natural com } n \geqslant 2$$

Em uma PG, $a_n : a_{n-1} = a_{n+1} : a_n$, então:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$$

Considerando a_{n-1}, a_n, a_{n+1} termos consecutivos de uma PG, o termo central a_n é igual a $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$.

Veja algumas maneiras de representar uma PG de razão q e termos desconhecidos.

- Se $a_1 = x$, temos $(x, x \cdot q, x \cdot q^2, \ldots)$.
- Se $a_1 = \frac{x}{q}$, temos $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q, \ldots\right)$.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Determine a razão da PG de cinco termos, tal que $a_1 + a_4 = 505$ e $a_2 + a_5 = 2\,525$.

Resolução

Inicialmente, escrevemos a PG em função do termo a_1.

- $a_2 = a_1 \cdot q$
- $a_3 = a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2$
- $a_4 = a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3$
- $a_5 = a_4 \cdot q = (a_1 \cdot q^3) \cdot q = a_1 \cdot q^4$

Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 505 \\ a_2 + a_5 = 2\,525 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q^3 = 505 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^4 = 2\,525 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 + q^3) = 505 \\ a_1 \cdot q(1 + q^3) = 2\,525 \end{cases}$$

Utilizando o método da substituição, isolamos a_1 na primeira equação e substituímos na segunda.

- $a_1(1 + q^3) = 505 \Rightarrow a_1 = \frac{505}{(1 + q^3)}$
- $a_1 \cdot q(1 + q^3) = 2\,525 \Rightarrow \frac{505}{\cancel{(1 + q^3)}} \cdot q \cancel{(1 + q^3)} = 2\,525 \Rightarrow q = \frac{2\,525}{505} = 5$

Portanto, a razão dessa PG é 5.

R2 Escreva os seis primeiros termos da PG crescente tal que $a_3 = 8$ e $a_5 = 32$.

Resolução

Inicialmente, determinamos a razão da PG escrevendo a_5 em função de a_3.

$$a_5 = \underbrace{a_3 \cdot q}_{a_4} \cdot q \Rightarrow a_5 = a_3 \cdot q^2 \Rightarrow 32 = 8 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{32}{8} \Rightarrow q^2 = 4 \begin{cases} q_1 = -2 \\ q_2 = 2 \end{cases}$$

Como a PG é crescente $(q > 0)$, então $q = 2$.

Em seguida, substituímos o valor de q e obtemos a_1.

$$a_3 = \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow 8 = a_1 \cdot 2^2 \Rightarrow a_1 = \frac{8}{4} = 2$$

Portanto, os seis primeiros termos da PG são, nessa ordem: 2, 4, 8, 16, 32 e 64.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

A tarefa 4 propõe aos alunos que elaborem duas questões utilizando os conceitos estudados, contribuindo para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

7. $(2, -6, 18)$ e $q = -3$ ou $(18, -6, 2)$ e $q = -\frac{1}{3}$

1 Determine a razão de cada PG e classifique-a em crescente, decrescente, constante ou alternante.

a) $(5, 10, 20, \ldots)$ $q = 2$; crescente

b) $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$ $q = 1$; constante

c) $\left(3, 2, \frac{4}{3}, \ldots\right)$ $q = \frac{2}{3}$; decrescente

d) $(27, -18, 12, \ldots)$ $q = -\frac{2}{3}$; alternante

e) $(-12, -6, -3, \ldots)$ $q = \frac{1}{2}$; crescente

2 Identifique em cada item se a sequência cuja lei dada é uma PG. Nos casos em que for PG, determine sua razão.

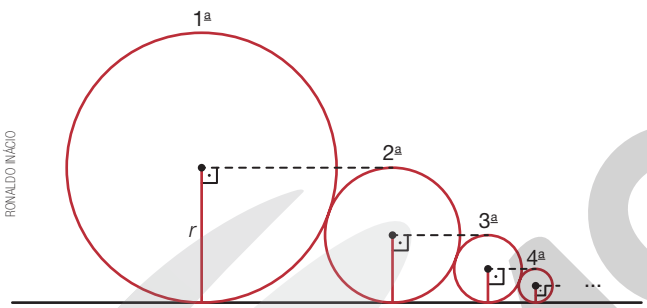
a) $a_n = 5(-1)^n, n \in \mathbb{N}^*$ sim; $q = -1$

b) $a_n = -3n, n \in \mathbb{N}^*$ não

c) $a_n = 4^n, n \in \mathbb{N}^*$ sim; $q = 4$

3 A partir da imagem, determine, em função de r, os cinco primeiros termos da sequência:

- dos comprimentos dos raios das circunferências.
- dos comprimentos das circunferências.
- das áreas dos círculos delimitados pelas circunferências.



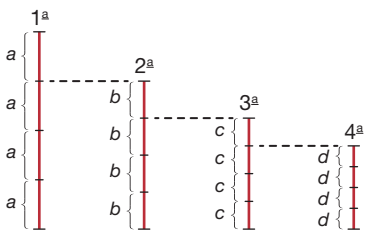
RONALDO INÁCIO

As sequências que você escreveu são progressões geométricas? Se forem, determine a razão de cada uma delas. Respostas no final do livro.

O comprimento C de uma circunferência de raio r e a área A de um círculo delimitado por ela são dados, respectivamente, por $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$, em que r é o comprimento do raio da circunferência.

4 Elaborando

A partir das imagens, elabore duas questões acerca de progressões geométricas e dê para um colega resolver.



RONALDO INÁCIO

Resposta pessoal. Antes de os alunos elaborarem as questões, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem.

5 Sabendo que os termos da PG $(x-3, x-1, x+5, \ldots)$ são números reais, escreva os sete primeiros termos numéricos dessa progressão.

1, 3, 9, 27, 81, 243 e 729.

6 Classifique a PG $(8 - 5b, 14 + b, 18 + 5b)$ em crescente, decrescente, constante ou alternante.

$b = -1$, PG constante; $b = -2$, PG decrescente

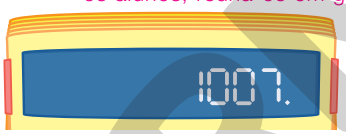
7 A soma dos três termos de uma PG é 14, e o produto, -216. Determine essa PG e sua razão.

8 Calculadora

Veja como podemos determinar, com a ajuda de uma calculadora, os termos de uma PG em que $a_1 = 1\,000$ e $q = 1{,}007$, ou seja, os termos de uma PG cujos valores crescem a uma taxa de 0,7%.

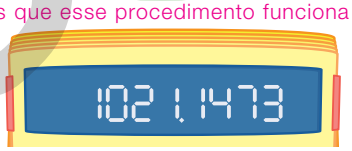
- Temos $a_1 = 1\,000$. Efetuando $1{,}007 \cdot 1\,000$, obtemos a_2.

Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a tarefa ou, então, veja a possibilidade de trazer algumas calculadoras para a sala de aula.



- Digitando a tecla [=] pela 2ª vez, obtemos a_3.

- Digitando a tecla [=] pela 3ª vez, obtemos a_4.



ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Diga aos alunos que esse procedimento funciona em uma calculadora comum, algo que pode não ocorrer em uma calculadora científica ou na calculadora de um *smartphone*, por exemplo.

Assim, para calcular a_n, devemos digitar a tecla [=] uma quantidade de vezes correspondente a $(n-1)$.

Segundo estimativas do IBGE, no ano de 2018 a população brasileira era de aproximadamente 208 494 900 habitantes, enquanto no ano de 2019, aproximadamente 210 147 125 habitantes, o que representou uma taxa de crescimento de, aproximadamente, 0,79% de um ano para o outro.

Fonte de pesquisa: <https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pesquisa/53/49645>. Acesso em: 11 ago. 2020.

Supondo que essa taxa se mantenha no decorrer dos anos, e utilizando os procedimentos apresentados, responda às questões.

a) Qual era a quantidade aproximada de habitantes no Brasil em 2020? aproximadamente 211 807 287 habitantes

b) Em qual ano a população brasileira ultrapassará os 220 milhões de habitantes? 2025

c) Você considera importante a existência de políticas públicas que incentivem o controle da natalidade? Justifique sua resposta. Resposta pessoal.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Fórmula do termo geral de uma PG

Considere a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ e de razão q. Nesse caso, temos:

$$a_1 = a_1 \cdot q^0$$
$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = \underbrace{a_2}_{a_1 \cdot q} \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = \underbrace{a_3}_{a_1 \cdot q^2} \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^2 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_5 = \underbrace{a_4}_{a_1 \cdot q^3} \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^3 \cdot q \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\vdots$$

Note que qualquer termo de uma PG pode ser escrito em função de a_1 e q.

A fórmula do termo geral de uma PG é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Nessa fórmula:

- a_n: n-ésimo termo
- a_1: primeiro termo
- n: ordem do termo
- q: razão

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

> Escreva um algoritmo que possibilite calcular um termo qualquer de uma PG de razão q, dados o primeiro termo, a ordem do termo e a razão q.

Resposta no **Suplemento para o professor**.

Exercícios e problemas resolvidos

R3 Qual é o 8º termo da PG $(3, 12, 48, \ldots)$?

Resolução

Inicialmente, determinamos a razão da PG.

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{12}{3} = 4$$

Em seguida, calculamos a_8 utilizando a fórmula do termo geral.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_8 = 3 \cdot 4^{8-1} = 3 \cdot 4^7 = 3 \cdot 16\,384 = 49\,152$$

Portanto, o 8º termo dessa PG é 49 152.

R4 Determine o número de termos da PG $\left(81, 27, 9, \ldots, \frac{1}{9}\right)$.

Resolução

Temos $a_1 = 81$, $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{27}{81} = \frac{1}{3}$ e $a_n = \frac{1}{9}$.

Aplicando a fórmula do termo geral, obtemos a posição do último termo da PG.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{9} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{9 \cdot 81} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{3^2 \cdot 3^4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3^{2+4}}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow 6 = n - 1 \Rightarrow n = 7$$

Portanto, a PG possui 7 termos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R5 Interpole três meios geométricos entre 1 e 625.

Interpolar **meios geométricos** significa colocar números reais entre dois números dados, de tal modo que a sequência formada por todos esses números seja uma PG.

Resolução

Inicialmente, devemos considerar a PG tal que $a_1 = 1$ e $a_5 = 625$, conforme o esquema.

$$\underbrace{1}_{a_1},\ \underbrace{\_\_,\ \_\_,\ \_\_}_{\text{3 meios geométricos}},\ \underbrace{625}_{a_5}$$

Utilizando a fórmula do termo geral da PG, calculamos a razão q.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \Rightarrow 625 = 1 \cdot q^4 \Rightarrow 625 = q^4 \Rightarrow q = \pm \sqrt[4]{625}$$

Nesse caso, temos $q = 5$ ou $q = -5$.

Portanto, são duas sequências possíveis:

- para $q = 5$, a sequência é crescente $(1, 5, 25, 125, 625)$;
- para $q = -5$, a sequência é alternante $(1, -5, 25, -125, 625)$.

R6 Certo investimento a juro composto é remunerado mensalmente a uma taxa fixa de 0,65%. Por exemplo, se uma pessoa investiu R$ 100,00, com índice do mês em 0,65%, após um mês será aplicada a seguinte correção:

$$100 \cdot \underbrace{1{,}0065}_{100{,}65\%} = 100{,}65$$

Nesse caso, os R$ 100,00 renderam R$ 0,65 em 1 mês.

Qual será a quantia obtida ao final de dois anos por um capital de R$ 12 000,00 aplicado nesse investimento?

Resolução

Inicialmente, calculamos a quantia (com todas as casas decimais) obtida ao final do:

- 1º mês: $12\,000 \cdot 1{,}0065 = 12\,078$
- 2º mês: $12\,078 \cdot 1{,}0065 = 12\,156{,}507$
- 3º mês: $12\,156{,}507 \cdot 1{,}0065 = 12\,235{,}5243$

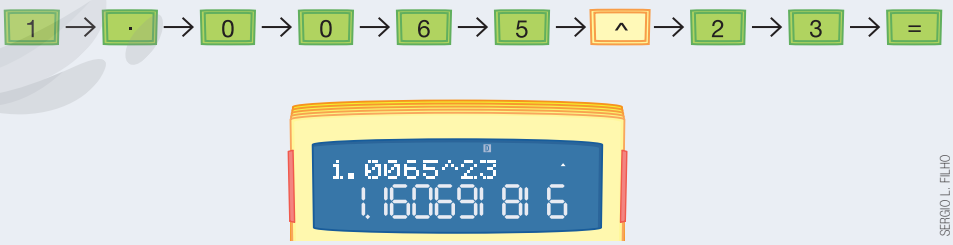
A partir do segundo mês, a quantia obtida é calculada sobre o capital do mês anterior.

A sequência $(12\,078; 12\,156{,}507; 12\,235{,}5243; \ldots)$ é uma PG, tal que $a_1 = 12\,078$ e $q = 1{,}0065$. Desse modo, ao final do 24º mês (2 anos), teremos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_{24} = 12\,078 \cdot 1{,}0065^{24-1} = 12\,078 \cdot 1{,}0065^{23} \Rightarrow a_{24} \simeq 14\,018{,}84$$

Portanto, a quantia obtida ao final de dois anos será R$ 14 018,84.

O cálculo aproximado de $1{,}0065^{23}$ pode ser feito com uma calculadora científica.



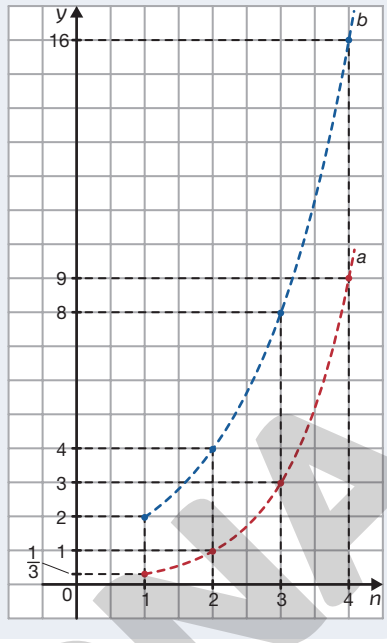
SERGIO L. FILHO

Em algumas calculadoras, a tecla x^y substitui a tecla ^.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

R7 Observe a representação gráfica das progressões geométricas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$.



RONALDO INÁCIO

> Uma PG é uma **função do tipo exponencial** definida por $a(n) = a_1 \cdot q^{n-1}$ de domínio $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}$. Assim, a representação gráfica dos termos da PG é formada pelos pares ordenados $(n, a(n))$.

Qual PG tem uma razão maior?

Resolução

Sejam q_a e q_b as razões das progressões geométricas $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ e $(b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots)$, respectivamente. Observando o gráfico, temos:

- $q_a = \dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{1}{\frac{1}{3}} = 3$
- $q_b = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{4}{2} = 2$

Assim, $q_a > q_b$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

9 Determine a fórmula do termo geral e calcule o valor de a_6 em cada PG. Respostas no final do livro.

a) $(2, 8, 32, \ldots)$

b) $(-48, -24, -12, \ldots)$

c) $(-7, 14, -28, \ldots)$

d) $\left(\frac{64}{25}, \frac{8}{5}, 1, \ldots\right)$

10 Qual termo da PG $(729, 2\,430, 8\,100, \ldots)$ é igual a 1 000 000? a_7

11 Dada a PG $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$, determine a razão e o valor de a_5: a_7. $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2

12 Em uma progressão geométrica de n termos, $a_5 = 648$, $a_n = 2\,187$ e $q = 1{,}5$. Determine a quantidade de termos dessa PG. $n = 8$

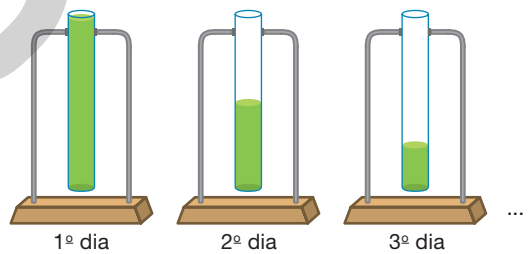
13 Júlio realiza um tratamento médico no qual deve ingerir doses semanais de certo medicamento, durante seis semanas. Nesse tratamento, a dose do medicamento deve aumentar semanalmente conforme uma PG. Sabe-se que na primeira semana Júlio ingeriu 32 mg desse medicamento, e na terceira semana, 72 mg.

a) Qual é a PG que representa a quantidade de medicamento ingerido por Júlio semanalmente, durante todo o tratamento?

b) O que representa o quarto termo dessa sequência? A quantidade de medicamento ingerida por Júlio na quarta semana de tratamento.

c) Escreva uma fórmula que expresse a dose do medicamento, em miligramas, em função do tempo, medido em semanas. $a_n = 32 \cdot (1{,}5)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leq 6$

14 Um cientista observou que certa substância volátil, ao ficar exposta ao ambiente, perde uma porcentagem x do seu volume a cada dia. O volume inicial da substância é dado por v_1; passado um dia, o volume é dado por v_2; mais um dia, por v_3; e assim sucessivamente.



RONALDO INÁCIO

a) A sequência $(v_1, v_2, v_3, \ldots)$ é uma PA ou uma PG? PG

b) Sabendo que $v_6 = 800$ mm³ e $v_7 = 400$ mm³, determine v_{10}. $v_{10} = 50$ mm³

c) De acordo com os dados do item **b**, calcule o volume inicial dessa substância. 25 600 mm³

d) Escreva uma fórmula que expresse o volume da substância em função do tempo, medido em dias.

> **Volátil:** que tem a propriedade de vaporização à pressão e à temperatura ambientes.

15 Calcule o valor de b de modo que cada sequência seja uma PG.

a) $(45, b, 20)$ 30 ou −30

b) $(b + 3, b + 17, b + 59)$ 4

c) $(b + 1, b - 3, b - 15)$ −3

16 Que número devemos adicionar a 3, 18 e 48 para que, nessa ordem, formem uma PG? 12

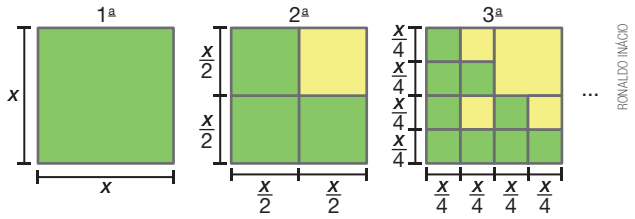
13. a) $(32, 48, 72, 108, 162, 243)$

14. d) $v_n = 25\,600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

17 Observe a sequência de figuras.



RONALDO INÁCIO

a) Escreva, em função de x, os 5 primeiros termos da sequência que representa áreas em:
- verde. Respostas no final do livro.
- amarelo.

b) Qual das sequências que você escreveu é uma PG? Justifique sua resposta. Resposta no final do livro.

c) Determine o 10º termo de cada uma dessas sequências. Resposta no final do livro.

18 Considerando a PA de razão $r = 25$ e 1º termo $a_1 = 100$, e a PG de razão $q = 2$ e 1º termo $b_1 = 1$, é correto afirmar que: alternativa b

a) $\frac{a_3}{b_3} = 10a_7$.

b) $a_n < b_n$, para $n \geq 10$.

c) Os termos da PG passam a ser maiores do que os termos da PA só a partir do 11º termo.

19 Cláudia recebeu de um banco duas propostas de aplicação financeira. Na 1ª aplicação, R$ 10 000,00 renderão uma quantia fixa de R$ 260,00 a cada trimestre. Na 2ª aplicação, o mesmo capital renderá juros mensais a uma taxa de 0,83%.

a) Em qual das aplicações os montantes obtidos ao final de cada período formarão uma PG? 2ª aplicação

b) Qual das aplicações é mais rentável ao final de dois anos de investimento? Justifique sua resposta. 19. b) 2ª aplicação; O montante obtido ao final de dois anos na 1ª e na 2ª aplicação é, respectivamente, R$ 12 080,00 e R$ 12 194,23.

c) Escreva, para cada uma das aplicações, uma fórmula que expresse o montante em função do tempo, medido em meses. Resposta no final do livro.

No contexto 20. a) (1, 30, 900, 27 000, 810 000); PG

20 Vimos nas páginas 126 e 127 que, se uma fêmea do mosquito *Aedes aegypti* colocar 200 ovos em um reservatório com água, dadas certas condições, a quantidade de fêmeas infectadas na 2ª e 3ª gerações é igual a 30 e 900, respectivamente.

a) Considerando essas informações, escreva a sequência das quantidades de fêmeas infectadas nas 5 primeiras gerações. Essa sequência é uma PA ou uma PG?

b) Escreva uma fórmula que expresse a quantidade de fêmeas infectadas em função da geração. Em seguida, com o auxílio de uma calculadora, determine a quantidade de fêmeas infectadas na 8ª geração.

$i_n = 30^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$; $2{,}187 \cdot 10^{10}$ fêmeas infectadas

21 Em 1798, o economista inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834) desenvolveu uma teoria na qual afirmava que a população mundial tenderia a crescer em progressão geométrica, e a produção de alimentos, em progressão aritmética, o que levaria a população mundial a passar fome.

Até o século XX, a teoria de Malthus não pôde ser comprovada – pois a produção mundial de alimentos foi suficiente para o número de habitantes do planeta. De acordo com economistas, Malthus teria ignorado, por exemplo, que os avanços tecnológicos permitiriam que a curva da produção de alimentos se mantivesse acima da curva de crescimento da população.

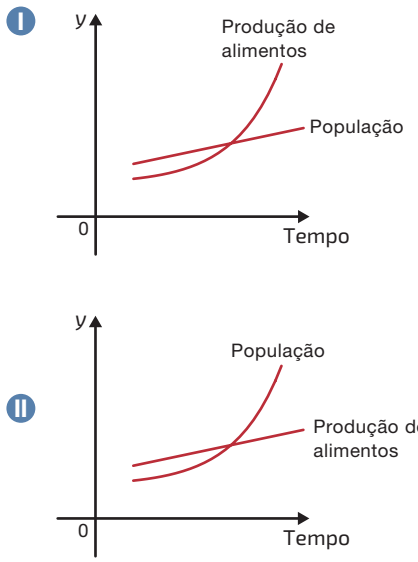
Outro fator que não comprovou a teoria de Malthus foi o crescimento populacional, que não aumentou no ritmo esperado por ele. Os dados para a época eram limitados e Malthus apoiou suas conclusões apenas observando o comportamento demográfico de uma determinada região. Na década de 1960, por exemplo, a população mundial crescia, em média, cerca de 2% ao ano e, de 2005 a 2015, a população cresceu, em média, aproximadamente 1,2% ao ano.

a) Escreva os 10 primeiros termos da:
- PA, em que $a_1 = 2$ e $r = 2$. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20
- PG, em que $a_1 = 2$ e $q = 2$. 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 e 1 024

b) Observando as sequências obtidas no item a, em qual há um crescimento maior quando comparamos um termo qualquer ao seu anterior? PG

c) A partir da resposta ao item b, explique com suas palavras a conclusão de Malthus de que, se a população mundial crescesse em PG e a de alimentos em PA, a população mundial passaria fome a partir de determinado momento. Resposta pessoal.

d) Qual dos gráficos a seguir pode representar a lei de Malthus? gráfico II



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODELO

22 (Enem, 2008) **Fractal** (do latim *fractus*, fração, quebrado) – objeto que pode ser dividido em partes que possuem semelhança com o objeto inicial. A geometria fractal, criada no século XX, estuda as propriedades e o comportamento dos fractais – objetos geométricos formados por repetições de padrões similares.

O triângulo de Sierpinski, uma das formas elementares da geometria fractal, pode ser obtido por meio dos seguintes passos:

1. comece com um triângulo equilátero (figura 1);
2. construa um triângulo em que cada lado tenha a metade do tamanho do lado do triângulo anterior e faça três cópias;
3. posicione essas cópias de maneira que cada triângulo tenha um vértice comum com um dos vértices de cada um dos outros dois triângulos, conforme ilustra a figura 2;
4. repita sucessivamente os passos 2 e 3 para cada cópia dos triângulos obtidos no passo 3 (figura 3).

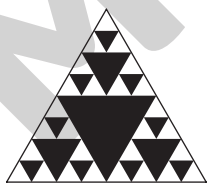
Figura 1

Figura 2

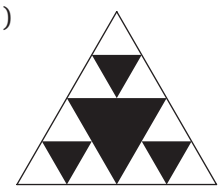
Figura 3

De acordo com o procedimento descrito, a figura 4 da sequência apresentada acima é: alternativa c

a)

d)


b)

e)


c)

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

23 Interpole 4 meios geométricos entre 3 e 96. (3, 6, 12, 24, 48, 96)

24 Ao inserir 3 meios geométricos entre 2 e 8, tem-se uma PG crescente. Calcule a razão dessa PG. $\sqrt{2}$

25 Com folhas de papel de 0,1 mm de espessura são feitas pilhas, da seguinte maneira.

- 1ª pilha: colocam-se 6 folhas e, em seguida, retiram-se 5.
- 2ª pilha: colocam-se 18 folhas e, em seguida, retiram-se 10.
- 3ª pilha: colocam-se 54 folhas e, em seguida, retiram-se 15.

⋮

a) Quantas folhas há na 10ª pilha? 118 048 folhas

b) Qual é a altura, em centímetros, da 10ª pilha? 1 180,48 cm

26 Observe no quadro o montante obtido em uma aplicação a juro composto em função do tempo.

Tempo	1	2	3	...	n	...
Montante	M_1	M_2	M_3	...	M_n	...

a) A sequência dos montantes $(M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots)$ é uma PG? Justifique sua resposta. Resposta no final do livro.

b) Mostre que $M = C(1 + i)^t$, em que M, C, i e $t(t > 0)$ indicam, respectivamente, o montante, o capital, a taxa de juro (na forma decimal) e o tempo. Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

27 Considere a PG $(1, 2, 4, 8, \ldots, 1\,024, 2\,048, 4\,096, 8\,192)$. Nela, multiplicando os termos extremos ou os termos equidistantes dos extremos, obtemos o mesmo resultado. Observe.

$(1, 2, 4, 8, \ldots, 1\,024, 2\,048, 4\,096, 8\,192)$

$8 \cdot 1\,024 = 8\,192$

$4 \cdot 2\,048 = 8\,192$

$2 \cdot 4\,096 = 8\,192$

$1 \cdot 8\,192 = 8\,192$

a) Determine a_7 e a_8. Qual é o valor de $a_7 \cdot a_8$? $a_7 = 64$ e $a_8 = 128$; 8 192

b) Junte-se a dois colegas e, utilizando a relação entre PG e função exponencial, mostrem que $a_1 \cdot a_n = a_x \cdot a_y$, tal que a_x e a_y são termos equidistantes dos extremos, ou seja, que a afirmação apresentada a seguir é verdadeira. Resposta no final do livro.

> Em uma PG finita, o produto entre dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

PG e função

Considere a PA $(0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$ de razão 2, e a função do tipo exponencial definida por $f(x) = 2 \cdot 3^x$. Podemos verificar que a sequência $\left(f(0), f(2), f(4), f(6), f(8), \ldots\right)$ é uma PG. Observe:

$$f(0) = 2 \cdot 3^0 = 2 \cdot 1 = 2$$
$$f(2) = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18$$
$$f(4) = 2 \cdot 3^4 = 2 \cdot 81 = 162$$
$$f(6) = 2 \cdot 3^6 = 2 \cdot 729 = 1\,458$$
$$f(8) = 2 \cdot 3^8 = 2 \cdot 6\,561 = 13\,122$$
$$\vdots$$

Além disso:

$$\frac{18}{2} = \frac{162}{18} = \frac{1\,458}{162} = \frac{13\,122}{1\,458} = 9$$

Portanto, $(2, 18, 162, 1\,458, 13\,122, \ldots)$ é uma PG de razão 9.

A razão dessa PG é igual ao coeficiente a da função definida por $f(x) = b \cdot a^x$ elevado à razão r da PA, ou seja, $a^r = 3^2 = 9$.

A propriedade apresentada nesta página pode ser demonstrada, porém, nesta coleção, apenas a enunciaremos.

Dados a função do tipo exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = b \cdot a^x$ e a PA $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n, \ldots)$ de razão r, a sequência $\left(f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), \ldots, f(x_n), \ldots\right)$ é uma PG de razão a^r.

Exercícios e problemas resolvidos

R8 Sejam a PA $(5, -1, -7, \ldots)$ de razão $r = -6$ e a função definida por $f(x) = 7 \cdot 2^x$. Determine os cinco primeiros termos da PG $\left(f(5), f(-1), f(-7), \ldots\right)$ e sua razão.

Resolução

Inicialmente, obtemos os cinco primeiros termos da PA: $5, -1, -7, \underbrace{-13}_{-7 + (-6)}$ e $\overbrace{-19}^{-13 + (-6)}$.

Agora, calculamos os cinco primeiros termos da PG.

x	5	-1	-7	-13	-19
$f(x) = 7 \cdot 2^x$	224	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{128}$	$\frac{7}{8\,192}$	$\frac{7}{524\,288}$

Logo, os cinco primeiros termos da PG são, nessa ordem:

$$224, \frac{7}{2}, \frac{7}{128}, \frac{7}{8\,192} \text{ e } \frac{7}{524\,288}$$

A razão da PG é:

$$q = a^r \Rightarrow q = 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

A razão da PG também pode ser obtida por:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{7}{2}}{224} = \frac{1}{64}$$

R9 Determine o valor de a de modo que a função do tipo exponencial definida por $f(x) = 2 \cdot a^x$, aplicada aos termos de uma PA de razão $r = 3$, gere uma PG de razão $q = 125$.

Resolução

A razão da PG é igual ao coeficiente a da função elevado à razão r da PA. Assim:

$$q = a^r \Rightarrow 125 = a^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{125} = 5$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

28 Sejam a PA $(-4, -1, 2, 5, 8)$ e as funções f e g definidas por $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = 3 \cdot 2^x$. Para cada sequência a seguir, calcule o valor dos seus termos, classifique-as em PA ou PG e determine suas razões. Respostas no final do livro.

a) $\big(f(-4), f(-1), f(2), f(5), f(8)\big)$

b) $\big(g(-4), g(-1), g(2), g(5), g(8)\big)$

29 Em um laboratório, observou-se que o número de indivíduos de uma colônia de bactérias dobrava a cada hora. A função que representa a quantidade de bactérias em função do tempo t, em horas, é dada por $f(t) = x \cdot a^t$, em que x é a quantidade de bactérias no instante inicial $(t = 0)$.

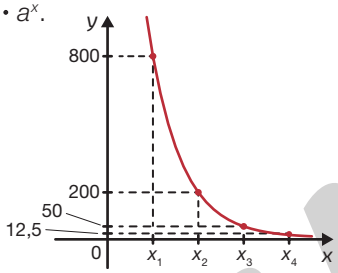
a) Determine o valor de a. $a = 2$

b) Escreva a PG que represente a quantidade de indivíduos dessa colônia no início de cada uma das quatro primeiras horas. $(x, 2x, 4x, 8x)$

c) Qual era a quantidade de indivíduos no início da 10ª hora? $512x$

30 Sabendo que $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ é uma PA de razão 3, determine a razão da PG $\big(f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots\big)$, em que $f(x) = -2 \cdot 9^x$. 729

31 Observe o gráfico da função definida por $f(x) = b \cdot a^x$.



RONALDO INÁCIO

Sabendo que $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = x_4 - x_3 = 2$, calcule o valor de a. $a = \frac{1}{2}$

32 Daniel comprou um terreno de R$ 180 000,00 em uma região da cidade cuja valorização média é aproximadamente 12% ao ano. Calcule o valor aproximado do terreno de Daniel ao final de cinco anos. R$ 317 221,50

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Assim como obtivemos uma fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PA, também podemos determinar uma fórmula para obter a soma dos n primeiros termos de uma PG. Para isso, vamos considerar a PG $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ de razão q.

Também indicamos a soma dos n primeiros termos de uma PG por S_n. Escrevendo essa soma, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{(I)}$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade pela razão q, obtemos:

$$S_n \cdot q = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + a_4 \cdot q + \ldots + a_{n-2} \cdot q + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \quad \text{(II)}$$

Realizando, membro a membro, a subtração $(\text{I}) - (\text{II})$, temos:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \\ -\ S_n \cdot q = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n \cdot q \\ \hline S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q \end{array}$$

Sabemos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Logo:

$$S_n - S_n \cdot q = a_1 - a_n \cdot q \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - a_1 \cdot \underbrace{q^{n-1} \cdot q}_{q^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n(1 - q) = a_1 - a_1 \cdot q^n \Rightarrow S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ para } q \neq 1$$

A fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PG é:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ para } q \neq 1$$

Nessa fórmula:

- S_n: soma dos n primeiros termos
- n: quantidade de termos
- a_1: primeiro termo
- q: razão

Se realizássemos $(\text{II}) - (\text{I})$, obteríamos $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, para $q \neq 1$. Essa fórmula pode ser escrita como $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, para $q \neq 1$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

R10 Calcule a soma dos termos da PG $(5, 15, 45, \ldots, 3\,645)$.

Resolução

Temos $a_1 = 5$, $q = \frac{15}{5} = 3$ e $a_n = 3\,645$.

Aplicando a fórmula $S_n = \frac{a_n \cdot q - a_1}{q - 1}$, segue que:

$$S_n = \frac{3\,645 \cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{10\,935 - 5}{2} = \frac{10\,930}{2} = 5\,465$$

Portanto, a soma dos termos da PG é 5 465.

R11 Eduardo recebeu um *e-mail* dizendo "Ganhe dinheiro fácil", com a seguinte proposta: ele deveria ser vendedor de uma empresa e recrutar 10 novos vendedores (1º nível), sendo que cada um desses recrutaria mais 10 vendedores (2º nível), e assim sucessivamente. Ao atingir o 10º nível, Eduardo ganharia uma grande quantia em dinheiro. Sabendo que cada vendedor pode ser recrutado uma única vez e que a população mundial é menor do que 8 bilhões de pessoas, é possível que Eduardo ganhe esse dinheiro?

Resolução

Inicialmente, calculamos o número de vendedores recrutados nos primeiros níveis.

- 1º nível: $1 \cdot 10 = 10 \rightarrow$ 10 vendedores
- 2º nível: $10 \cdot 10 = 100 \rightarrow$ 100 vendedores
- 3º nível: $100 \cdot 10 = 1\,000 \rightarrow$ 1 000 vendedores

Note que a sequência $(10, 100, 1\,000, \ldots)$ é uma PG, tal que $a_1 = 10$ e $q = 10$.

No 10º nível, o total de vendedores recrutados é:

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q} \Rightarrow S_{10} = \frac{10 \cdot \left(1 - 10^{10}\right)}{1 - 10} = \frac{10 \cdot (-9\,999\,999\,999)}{-9} =$$

$$= \frac{-99\,999\,999\,990}{-9} = 11\,111\,111\,110$$

Assim, no 10º nível, o total de vendedores é maior do que 11 bilhões.

Portanto, não é possível que Eduardo ganhe esse dinheiro, pois a quantidade de vendedores que devem ser recrutados é superior à população mundial.

Embora o que é proposto nesse tipo de *e-mail* possa ser tentador para muitos, em geral, as metas solicitadas são inatingíveis.

R12 Em uma PG de cinco termos, a razão é $q = 1$ e a soma de seus termos é $S_5 = 175$. Escreva os termos dessa PG.

Resolução

Adicionando termo a termo na PG, temos:

$$S_5 = a_1 + \underbrace{a_1 \cdot q}_{a_2} + \underbrace{a_1 \cdot q^2}_{a_3} + \underbrace{a_1 \cdot q^3}_{a_4} + \underbrace{a_1 \cdot q^4}_{a_5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 175 = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + a_1 \cdot 1^3 + a_1 \cdot 1^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 175 = 5a_1 \Rightarrow a_1 = 35$$

Portanto, a PG é $(35, 35, 35, 35, 35)$.

De modo geral, se uma PG tem razão $q = 1$, então:

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot 1 + a_1 \cdot 1^2 + \ldots + a_1 \cdot 1^{n-1} \Rightarrow S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n \text{ parcelas}} \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

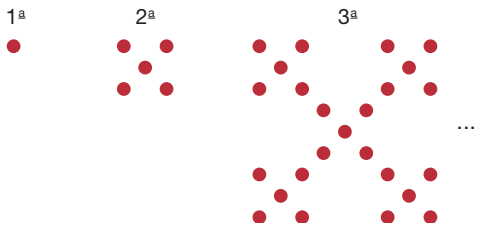
33 Determine a soma dos oito primeiros termos de cada PG.

a) $(3, 12, 48, \ldots)$ 65 535

b) $(-4, 8, -16, \ldots)$ 340

c) $(5\,000, 500, 50, \ldots)$ 5 555,5555

34 Débora desenhou uma sequência de pontos conforme a imagem apresentada.



RONALDO INÁCIO

a) Determine a quantidade de pontos da 5ª figura da sequência. 625 pontos

b) Quantos pontos Débora terá desenhado ao concluir a 5ª figura da sequência? 781 pontos

35 A soma dos n primeiros termos da PG $(3, -6, 12, \ldots)$ é 129. Qual é o valor de n? $n = 7$

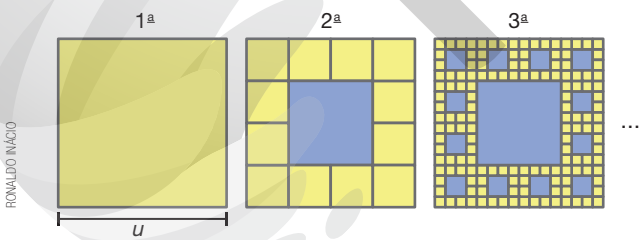
36 Calcule o valor de x e a quantidade de termos da PG $(2x, 8x, \ldots, 512x)$, sabendo que a soma dos seus termos é $-1\,364$. $x = -2$; $n = 5$

37 Em uma PG temos $S_6 = 756$. Se a razão dessa PG é 2, determine a_1. 12

38 As figuras da sequência são formadas por regiões quadradas. Considerando as 5 primeiras figuras, determine a soma das áreas em:

a) amarelo. $\frac{781}{256}u^2$

b) azul. $\frac{499}{256}u^2$



RONALDO INÁCIO

39 Uma bola, a uma altura de 18 m, cai em queda livre e, a cada vez que se choca com o solo, recupera apenas 40% de sua altura anterior.

a) Determine a altura máxima aproximada, em metros, atingida pela bola logo após o 3º choque. 1,152 m

b) Calcule a distância total mínima percorrida pela bola quando ela tiver se chocado com o solo pela 3ª e pela 4ª vez. 38,16 m; 40,464 m

40 Para o controle de populações de baratas, certo laboratório desenvolveu um veneno em que uma barata contaminada por ele, enquanto viva, contamina todas as que entrarem em contato com ela.

Supondo que uma barata contaminada leve um minuto para morrer e que, nesse período, contamine outras três baratas, e estas a outras três cada uma, e assim por diante, determine:

a) a quantidade mínima de baratas mortas em 5 min numa população de 300 baratas. 121 baratas

b) o tempo máximo para que morram 300 baratas. 6 min

41 Desafio

Há indícios de que a civilização babilônica já conhecia fórmulas gerais para a soma de progressões geométricas. Em uma tábula babilônica datada por volta de 300 a.C., Otto Neugebauer encontrou um problema com a seguinte afirmação (em notação atual):

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1$$

a) Em relação à PG, cuja soma é apresentada acima:

- qual é o primeiro termo? $a_1 = 1$
- qual é a razão? $q = 2$
- quantos termos são? $n = 10$

b) Mostre, por meio de cálculos, que a igualdade obtida pelos babilônios está correta.

42 Certo programa de televisão ofereceu prêmios em dinheiro às pessoas que participassem de uma gincana de perguntas e respostas. O apresentador do programa faria a primeira pergunta e, se o participante respondesse corretamente, ganharia R$ 100,00. Caso ele continuasse respondendo corretamente às perguntas, ganharia R$ 200,00 pela segunda pergunta, R$ 400,00 pela terceira, e assim sucessivamente. Quando o participante errasse a resposta, sua participação se encerraria e ele levaria apenas as quantias ganhas anteriormente.

a) Se um participante responder corretamente apenas seis perguntas, qual será o valor de sua premiação? R$ 6 300,00

b) Sabendo que nesse jogo o maior valor que se paga por uma resposta correta é R$ 51 200,00, qual a quantidade máxima de perguntas que podem ser realizadas a um mesmo participante? 10 perguntas

c) Se um participante responder corretamente a todas as perguntas que lhe forem propostas, sendo esta a quantidade máxima, qual será o valor de sua premiação? R$ 102 300,00

41. b) $S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{10}}{-1} = 2^{10} - 1 = 2 \cdot 2^9 - 1 = 2^9 + 2^9 - 1$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

18 Logaritmo

Microrganismos

Um dos perigos na alimentação humana são as contaminações por microrganismos, como bactérias, vírus, fungos e alguns parasitas, que costumam se reproduzir rapidamente em ambientes favoráveis. Essas contaminações, que em geral causam diversas doenças, podem ser prevenidas com cuidados a serem tomados durante o preparo e armazenamento dos alimentos.

Entre esses microrganismos está a bactéria *salmonella*, que é transmitida ao homem por meio da ingestão de alimentos contaminados, principalmente os de origem animal, como leite, carnes e ovos, além de preparações que envolvam a utilização de ovos não pasteurizados ou ovos crus, como molhos ou sobremesas. Os principais sintomas das pessoas infectadas por essa bactéria são: diarreia, dor abdominal, náuseas, vômitos e febre.

Para evitar a transmissão da chamada Salmonelose, algumas medidas podem ser adotadas, como:

- cozinhar bem ovos e carnes e ferver o leite antes de ingeri-los;
- verificar se o estabelecimento que fornece alimentação segue as normas da vigilância sanitária;
- lavar bem as mãos antes do manuseio de qualquer alimento;
- não misturar alimentos crus com cozidos.

A higiene é uma medida fundamental para evitar a contaminação dos alimentos e a transmissão de doenças.

Fontes de pesquisa: <http://www.blog.saude.gov.br/35051-higiene-no-preparo-de-alimentos-evita-contaminacao-por-salmonella>. Acesso em: 18 ago. 2020. <http://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/cuidado_alimentos.pdf>. Acesso em: 18 ago. 2020. <https://saude.gov.br/saude-de-a-z/Salmonella>. Acesso em: 18 ago. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

> Sabendo que certo microrganismo se prolifera dobrando sua população a cada 30 min, estime em quantas horas uma população desse microrganismo pode atingir 1 000 indivíduos a partir de apenas um deles. aproximadamente 5 horas

Ser consciente

> Segundo a Secretaria de Vigilância em Saúde, integrante do Ministério da Saúde, a maioria das contaminações alimentares ocorre dentro da própria casa dos brasileiros. E nesse contexto, os alimentos mais perigosos para intoxicação são ovos, carnes (frango e boi), leite e queijos não pasteurizados, vegetais crus e frescos, doces e água. Quais cuidados você tem com esses alimentos, ou pretende adotar, para evitar a contaminação de doenças por microrganismos?
Resposta pessoal.

Nos temas anteriores, vimos situações em que os valores dobram a cada período de tempo, como a altura de uma planta ou a população de certo microrganismo. Nesses casos, podemos resolver as equações exponenciais transformando cada lado da igualdade em potências de mesma base, com o objetivo de igualar os expoentes. No entanto, nem sempre é possível reduzir os dois membros em uma mesma base. Em casos como esses, utilizamos os **logaritmos**, assunto das próximas páginas. Veremos também algumas propriedades dos logaritmos, que serão úteis nos cálculos envolvendo função, equação e inequação logarítmicas do próximo tema.

FOTOMONTAGEM DE BÁRBARA SARZI. FOTOS: 1.K.-U. HAESSLER/SHUTTERSTOCK; 2.MOTOR OLKA/SHUTTERSTOCK; 3.CHEERS GROUP/SHUTTERSTOCK; 4.IADAMS/SHUTTERSTOCK; 5.USTYNA SHEVCHUK/SHUTTERSTOCK; 6.VALENTINA RAZUMOVA/SHUTTERSTOCK; 7.GTS/SHUTTERSTOCK; 8.MIGUEL G. SAAVEDRA/SHUTTERSTOCK; 9.AKR11_SS/SHUTTERSTOCK; 10.MARAZE/SHUTTERSTOCK; 11.JUMPOT THARUNGSRI/SHUTTERSTOCK; 12.NATTIKA/SHUTTERSTOCK; 13.MACRO VECTOR/SHUTTERSTOCK; 14.BAIBAZ/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Definição

Antes de definirmos precisamente o que é logaritmo, resolveremos algumas equações exponenciais.

- $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 3^4 \Rightarrow x = 4$

  Dizemos que 4 é o logaritmo de 81 na base 3, que pode ser indicado por $\log_3 81 = 4$.

- $5^x = \frac{1}{125} \Rightarrow 5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 5^x = 5^{-3} \Rightarrow x = -3$

  Dizemos que -3 é o logaritmo de $\frac{1}{125}$ na base 5, que pode ser indicado por $\log_5\left(\frac{1}{125}\right) = -3$.

Sejam os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$. Denomina-se **logaritmo** de b na base a o expoente c, tal que $b = a^c$, isto é:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Nessa representação, a é a base do logaritmo, b é o logaritmando e c é o logaritmo.

Exemplos

- $\log_4 64 = 3 \Leftrightarrow 4^3 = 64$
- $\log_{\frac{1}{4}} 16 = -2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$
- $\log_9 1 = 0 \Leftrightarrow 9^0 = 1$

A partir da definição de logaritmos, temos $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$ e $b \in \mathbb{R}_+^*$. Assim, não são definidos, por exemplo:

- $\log_4(-12)$.
- $\log_{-3} 27$.
- $\log_1 49$.
- $\log_8 0$.
- $\log_0 9$.
- $\log_{-6}(-36)$.

Os logaritmos cuja base é 10 são denominados **logaritmos decimais**. Neles, costuma-se não indicar a base. O logaritmo $\log_{10} 7$, por exemplo, pode ser indicado por $\log 7$.

Consequências da definição

De acordo com a definição de logaritmo, podemos estabelecer que:

- $\log_a a = 1$

  Fazendo $\log_a a = x$, temos $a^x = a^1 \Rightarrow x = 1$.

- $\log_a 1 = 0$

  Fazendo $\log_a 1 = x$, temos $a^x = 1 \Rightarrow a^x = a^0 \Rightarrow x = 0$.

- $\log_a a^n = n$

  Fazendo $\log_a a^n = x$, temos $a^x = a^n \Rightarrow x = n$.

- $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

  Mostraremos inicialmente que $\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c$. De fato, fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a c = x$, temos: $a^x = b$ e $a^x = c$. Consequentemente, $b = c$. Agora, mostraremos que $b = c \Rightarrow \log_a b = \log_a c$. Fazendo $\log_a b = x$, pela definição de logaritmo segue que $b = a^x$. Como $b = c$, $c = a^x$. Sendo assim, $x = \log_a c$. Portanto, $\log_a b = \log_a c$.

- $a^{\log_a b} = b$

  Fazendo $\log_a b = x$, temos $a^x = b$.
  Substituindo $x = \log_a b$ em $a^x = b$, temos $a^{\log_a b} = b$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 De acordo com a definição de logaritmos e suas consequências, calcule.

a) $\log_{21} 1$ 0

b) $\log 10\,000$ 4

c) $8^{\log_8 19}$ 19

d) $\log 0{,}1$ −1

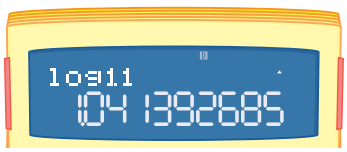
2 Calculadora

Veja como podemos calcular logaritmos decimais utilizando uma calculadora científica.

Para calcular o logaritmo decimal de 11, por exemplo, procedemos da seguinte maneira.

Inicialmente, digitamos a tecla logaritmo [log], registramos o número 11 e, em seguida, digitamos a tecla [=].

[log] → [1] → [1] → [=]



Em alguns modelos de calculadoras científicas, o cálculo do logaritmo decimal de 11 deve ser realizado da seguinte maneira.

[1] → [1] → [log] → [=]

Seja $\log b = 0{,}95$. Para calcularmos o logaritmando b desse logaritmo decimal, por exemplo, digitamos [SHIFT] e a tecla [10^x log], registramos o número 0,95 e digitamos a tecla [=].

[SHIFT] → [10^x log] → [0] → [·] → [9] → [5] → [=]

ILUSTRAÇÕES: SERGIO L. FILHO

Utilizando uma calculadora científica, calcule em cada equação o valor de x com aproximação de uma casa decimal.

a) $\log 7 = x$ $x \simeq 0{,}8$

b) $\log x = 0{,}903$ $x \simeq 8$

c) $\log 13 = x$ $x \simeq 1{,}1$

d) $\log x = 1{,}322$ $x \simeq 21{,}0$

e) $\log 20 - \log 17 = x$ $x \simeq 0{,}1$

f) $\log x = 3 + \log 25$ $x = 25\,000$

3 Desenvolva as expressões.

a) $\log_3 \sqrt[4]{9} - 4^{\log_4 5}$ $-\frac{9}{2}$

b) $2\log_9 1 + \left[\log_{0{,}5}\left(\frac{1}{8}\right)\right]^2$ 9

c) $6^{2 + \log_6 7} - \log(\log 10)$ 252

d) $4\log_8 2\sqrt{2} + \log_{\frac{1}{5}} 0{,}04$ 4

4 O logaritmo de certo número em determinada base é igual a 4, e o logaritmo desse mesmo número com base igual ao triplo da anterior é igual a 2. Qual é esse número? 81

5 Cientistas observaram que determinada colônia de bactérias aumenta sua população em 20% a cada hora. Considerando a taxa de crescimento constante e $\log_{1{,}2} 2 = 3{,}81$, calcule aproximadamente quantas horas serão necessárias para que essa população dobre. 3 h 49 min

6 Para quais valores de x está definido:

a) $\log_6(x - 9)$? $x > 9$

b) $\log_{(2x + 8)} 0{,}05$? $x > -4$ e $x \neq -\frac{7}{2}$

c) $\log_5(1 - x) + \log_{(x + 0{,}3)} 9$? $-0{,}3 < x < 1$ e $x \neq 0{,}7$

d) $\log_{13}\left(\frac{3x - 6}{2 - 4x}\right)$? $\frac{1}{2} < x < 2$

e) $\frac{\log(x - 10)}{\log_{(x + 1)} 25}$? $x > 10$

7 Sendo $\log_{(2a - 10)} 2 = \log_{(4 + a)}\left(\frac{b}{3} - 1\right)$ e $\log_b\left(8 - \frac{a}{2}\right) = 0$, qual é o valor de $y = 8^{\log_5 17 \cdot \log_8 (a - b)}$? $y = 17$

8 Quando digitamos a tecla [log] de uma calculadora científica e inserimos um número maior do que zero, ao pressionarmos a tecla [=], obtemos um número real no visor da calculadora. Qual é a relação entre o número inserido inicialmente e o número real obtido?

9 Bruno digitou em sua calculadora científica a tecla [$\sqrt{\ }$], pressionou duas vezes [log] e inseriu certo número natural n. Ao digitar a tecla [=], obteve no visor da calculadora o número zero. Determine o número n digitado por Bruno. $n = 10$

8. Espera-se que os alunos respondam que o número 10, que é a base do logaritmo, elevado ao número real que obtemos é igual ao número inserido inicialmente.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Propriedades operatórias dos logaritmos

Neste tópico, vamos estudar as propriedades dos logaritmos, que serão úteis em diversos cálculos. Para estudar essas propriedades, considere os números reais positivos a, b e c, com a diferente de 1.

- **Logaritmo do produto**

Em uma mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração

Considerando $\log_a b = m$, $\log_a c = n$ e $\log_a(b \cdot c) = p$, temos, pela definição:

- $\log_a b = m \Leftrightarrow a^m = b$
- $\log_a c = n \Leftrightarrow a^n = c$
- $\log_a(b \cdot c) = p \Leftrightarrow a^p = b \cdot c$

Substituindo $b = a^m$ e $c = a^n$ em $a^p = b \cdot c$, temos:

$$a^p = a^m \cdot a^n \Rightarrow a^p = a^{m+n} \Rightarrow \underbrace{p}_{\log_a(b \cdot c)} = \overbrace{m}^{\log_a b} + \underbrace{n}_{\log_a c} \Rightarrow \log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Note que $\log_a b \cdot c$ é diferente de $\log_a(b \cdot c)$. Em $\log_a b \cdot c$, temos um número c multiplicando $\log_a b$; em $\log_a(b \cdot c)$, o logaritmando é $b \cdot c$, o que possibilita a aplicação da propriedade do logaritmo do produto.

- **Logaritmo do quociente**

Em uma mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença dos logaritmos de cada um desses números.

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração

Considerando $\log_a b = m$, $\log_a c = n$ e $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = q$, temos, pela definição:

- $\log_a b = m \Leftrightarrow a^m = b$
- $\log_a c = n \Leftrightarrow a^n = c$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = q \Leftrightarrow a^q = \frac{b}{c}$

Substituindo $b = a^m$ e $c = a^n$ em $a^q = \frac{b}{c}$, temos:

$$a^q = \frac{a^m}{a^n} \Rightarrow a^q = a^{m-n} \Rightarrow \underbrace{q}_{\log_a\left(\frac{b}{c}\right)} = \overbrace{m}^{\log_a b} - \underbrace{n}_{\log_a c} \Rightarrow \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

- **Logaritmo da potência**

O logaritmo de uma potência de base positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Demonstração

Considerando $\log_a b = c$ e $\log_a b^n = d$, temos, pela definição:

- $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
- $\log_a b^n = d \Leftrightarrow a^d = b^n$

Substituindo $b = a^c$ em $a^d = b^n$, temos:

$$a^d = (a^c)^n \Rightarrow a^d = a^{c \cdot n} \Rightarrow \underbrace{d}_{\log_a b^n} = n \cdot \underbrace{c}_{\log_a b} \Rightarrow \log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Exemplos

- $\log_6(9 \cdot 7) = \log_6 9 + \log_6 7$
- $\log(3 \cdot 1) = \log 3 + \log 1 = \log 3 + 0 = \log 3$
- $\log\left(\frac{4}{9}\right) = \log 4 - \log 9$
- $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 1 - \log_2 2 = 0 - 1 = -1$
- $\log 2^7 = 7 \cdot \log 2$
- $\log 0{,}1 = \log 10^{-1} = -1 \cdot \log 10 = -1 \cdot 1 = -1$

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Mudança de base

Em alguns casos, temos de efetuar cálculos com logaritmos de bases diferentes. Para isso, podemos realizar a mudança de base do logaritmo de maneira conveniente.

Veja como podemos transformar $\log_a b$ em um logaritmo de base c, com a, b e c reais positivos, tais que $a \neq 1$ e $c \neq 1$:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração

Considerando $\log_a b = p$, $\log_c b = m$ e $\log_c a = n$, temos, pela definição:

• $\log_a b = p \Leftrightarrow a^p = b$ • $\log_c b = m \Leftrightarrow c^m = b$ • $\log_c a = n \Leftrightarrow c^n = a$

Como $a^p = b$ e $c^m = b$, então $a^p = c^m$.

Substituindo $a = c^n$ em $a^p = c^m$, temos:

$$(c^n)^p = c^m \Rightarrow c^{n \cdot p} = c^m \Rightarrow \underbrace{n}_{\log_c a} \cdot \overbrace{p}^{\log_a b} = \underbrace{m}_{\log_c b} \Rightarrow \log_c a \cdot \log_a b = \log_c b \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos

• Mudando para 3 a base de $\log_7 25$, temos: $\log_7 25 = \frac{\log_3 25}{\log_3 7}$.

• Mudando para 10 a base de $\log_9 13$, temos: $\log_9 13 = \frac{\log 13}{\log 9}$.

Na igualdade $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, quando $b = c$, temos:

$$\log_a b = \frac{\overbrace{\log_b b}^{1}}{\log_b a} \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ ou } \log_b a \cdot \log_a b = 1$$

Exemplo

• $\log_2 32 = 5 \Leftrightarrow \log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

Como $\log_2 32 \cdot \log_{32} 2 = 5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, então $\log_2 32$ e $\log_{32} 2$ são números inversos.

De maneira geral, dizemos que $\log_c a$ e $\log_a c$, quando existirem, são números inversos.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Dados $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 5 = 0{,}699$, calcule $\log_2 15$ e $\log_{500} 30\,000$.

Resolução

• $\log_2 15 = \log_2 (3 \cdot 5) = \overbrace{\log_2 3 + \log_2 5}^{\text{mudança de base}} = \frac{\log 3}{\log 2} + \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0{,}477}{0{,}301} + \frac{0{,}699}{0{,}301} \simeq 3{,}907$

• $\log_{500} 30\,000 = \underbrace{\log_{5 \cdot 10^2} \left(3 \cdot 10^4\right) = \frac{\log\left(3 \cdot 10^4\right)}{\log\left(5 \cdot 10^2\right)}}_{\text{mudança de base}} = \frac{\log 3 + \overbrace{\log 10^4}^{4}}{\log 5 + \underbrace{\log 10^2}_{2}} = \frac{0{,}477 + 4}{0{,}699 + 2} = \frac{4{,}477}{2{,}699} \simeq 1{,}659$

R2 Escreva a expressão $\log_7 12 - \log_7 3$ utilizando logaritmos decimais.

Resolução

$$\log_7 12 - \log_7 3 = \log_7 \left(\frac{12}{3}\right) = \log_7 4 = \frac{\log 4}{\log 7}$$

R3 Resolva a equação exponencial $7^{2x-1} = 3$. Para isso, considere $\log 3 = 0{,}48$ e $\log 7 = 0{,}85$.

Resolução

Aplicamos a definição de logaritmo e utilizamos a mudança de base.

$$7^{2x-1} = 3 \Rightarrow 2x - 1 = \log_7 3 \Rightarrow 2x - 1 = \frac{\log 3}{\log 7} \Rightarrow 2x - 1 = \frac{0{,}48}{0{,}85} \Rightarrow x = \frac{\frac{0{,}48}{0{,}85} + 1}{2} \Rightarrow x \simeq 0{,}782$$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

10 Utilizando as propriedades, desenvolva cada logaritmo. $\frac{1}{5}\log_2 a - \log_2 b - 2\log_2 c$

a) $\log\left(b\sqrt{c}\right)$ $\log b + \frac{1}{2}\log c$ **b)** $\log\left(\frac{a^2 b}{c}\right)$ $2\log a + \log b - \log c$ **c)** $\log_2\left(\frac{\sqrt[5]{a}}{b \cdot c^2}\right)$

11 Escreva na forma de um único logaritmo.

a) $\log_4 5 + \log_4 9$ $\log_4 45$

b) $8\log 1 + \log 0{,}77 - \log 0{,}11$ $\log 7$

12 Calcule o valor da expressão $x + y - z$, sabendo que $x = \log 0{,}001^6$, $y = \log_3 243$ e $z = \log_3 \sqrt{27}$. $-\frac{29}{2}$

13 Com o auxílio de uma calculadora científica, determine a solução das equações exponenciais.

a) $3^{x+4} = 15$ $S = \{-1{,}535\}$ **b)** $27^x = 125$ $S = \{1{,}465\}$ **c)** $225 = 9^{\frac{x}{4}-1}$ $S = \{13{,}86\}$

14 Qual é o valor de x para que seja satisfeita a igualdade $\log_c xb^3 = \frac{1}{2} \cdot \log_c a + 4 \cdot \log_c b$? $x = b\sqrt{a}$

15 A desvalorização que certo modelo de automóvel sofre pode ser calculada por meio da fórmula $v = n\left(\frac{9}{10}\right)^t$, em que v é o valor futuro, n é o valor atual e t é o período de tempo, a cada dois anos, no qual o automóvel sofre a desvalorização.

a) Qual é a taxa de desvalorização desse automóvel a cada dois anos? 10%

b) Se o valor atual de mercado desse automóvel é n reais, após quantos anos, aproximadamente, seu valor será reduzido à metade? 13 anos

16 Um investimento bancário, no sistema de juro composto, rende 1% ao mês. Se forem investidos R$ 500,00, quantos meses serão necessários para que se obtenha R$ 50,00 de juros? Se necessário, utilize uma calculadora científica para auxiliá-lo nos cálculos. 10 meses

17 Reduza as expressões a razões de logaritmos decimais.

a) $\log_{12} 2 + \log_{12} 4$ $\frac{\log 8}{\log 12}$

b) $\log_2 3 + \log_2 1 - \log_2 7$ 17. b) $\frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 2}$

c) $\log_{17} 18 - \log_{17} 12 + \log_{17} \frac{4}{3}$ $\frac{\log 2}{\log 17}$

18 Considerando $\log a = x$ e $\log b = y$, calcule o valor das expressões.

a) $\log_a b \cdot \log_b a$ 1 **b)** $\log_{\sqrt{b}} a^3$ $\frac{6x}{y}$, com $y \neq 0$

19 Determine o valor de $z \cdot w$, sabendo que $z = \log_6 27 \cdot \log_3 36$ e $w = \log_4 10 \cdot \log \sqrt[3]{16}$. 4

20 Calcule o número de algarismos da potência 50^{14}. Se necessário, utilize $\log 2 = 0{,}301$. 24 algarismos

21 Determine o valor de $\log_8 \left[\frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2}{(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}\right]$, sabendo que a e b são números positivos e $a + b = 30\sqrt{a \cdot b}$. alternativa b

a) 0,6 **b)** $1{,}\overline{6}$ **c)** $2{,}\overline{8}$ **d)** 3,9 **e)** 4

No contexto

22 Na página **140**, estudamos informações sobre o crescimento populacional de alguns microrganismos e os cuidados que devemos ter para evitar a contaminação de alimentos com bactérias, por exemplo.

Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 min, determine, com o auxílio de uma calculadora científica, em quanto tempo, aproximadamente, uma população de 100 microrganismos passará a ser composta de 5 000 indivíduos. 1 h 54 min

23 Em um quadrado, se traçarmos segmentos de reta ligando os pontos médios de seus lados, obteremos um novo quadrado; ligando os pontos médios dos lados desse novo quadrado, obteremos outro quadrado. Esse processo pode ser realizado indeterminadas vezes, gerando uma sequência de quadrados. Considerando o quadrilátero inicial com lado unitário, o comprimento do lado de um quadrado é dado pela fórmula $m = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$, em que n é a posição do quadrado na sequência.

RONALDO INÁCIO

Com o auxílio de uma calculadora científica, determine quais quadrados dessa sequência têm lados com comprimento entre $\frac{\sqrt{2}}{50}$ e $\frac{2}{25}$ unidades de comprimento. 9º, 10º e 11º quadrados

24 Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule o valor de cada expressão com aproximação de três casas decimais.

a) $\log_7 5^5 + \log \sqrt[3]{4^2} - \log_{0,1} 1$ aproximadamente 4,537

b) $\log\left(\log_6 3^{\frac{1}{8}}\right)^2$ aproximadamente $-2{,}231$

c) $\frac{\log_{\sqrt{10}} 15 + \log \sqrt{14}}{\log_5 8}$ aproximadamente 2,264

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

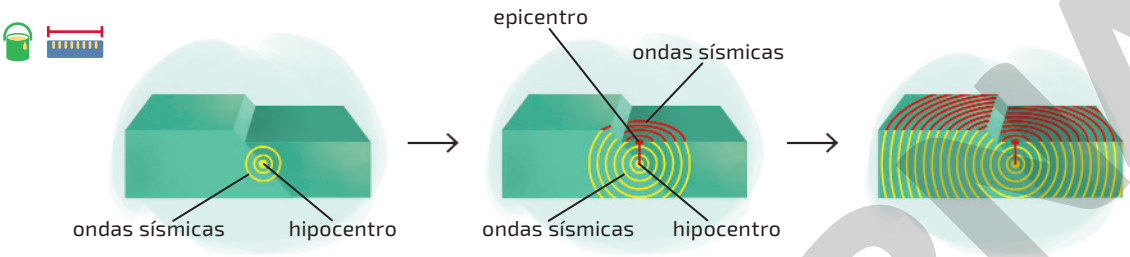
MODERNA

19 Função inversa e logarítmica

O poder de um terremoto

O terremoto é um fenômeno natural decorrente de movimentos da crosta terrestre, geralmente resultantes do choque entre duas **placas tectônicas**, que liberam grande quantidade de energia e ocasionam tremores na terra.

O terremoto gerado pelo movimento das placas tectônicas



O ponto de origem de um terremoto no interior da Terra é chamado **hipocentro** ou **foco**. A energia acumulada pelo movimento das placas tectônicas é liberada sob a forma de ondas sísmicas.

O ponto localizado diretamente acima do hipocentro na superfície terrestre é denominado **epicentro**. A partir do epicentro, as ondas sísmicas se propagam sobre a superfície terrestre.

As vibrações de um terremoto podem resultar em danos leves, moderados ou até mesmo graves, causando a destruição de pequenas regiões ou, inclusive, de cidades inteiras.

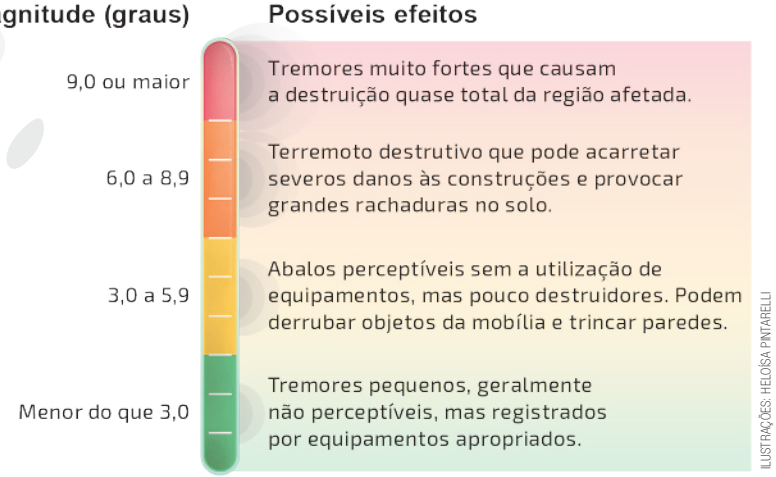
Placas tectônicas: blocos rochosos que compõem a superfície terrestre e sustentam os continentes e oceanos.

Com base na quantidade de energia liberada por um terremoto, é possível determinar, utilizando um aparelho chamado **sismógrafo**, sua magnitude na escala Richter.

Escala Richter

Os *tsunamis* podem ser provocados por terremotos submarinos, os quais deslocam a crosta oceânica, empurrando a massa de água para cima, gerando as ondas gigantes.

A escala Richter foi desenvolvida em 1935 pelo sismólogo estadunidense Charles Richter (1900-1985) e tem por objetivo medir a intensidade de um terremoto. Nessa escala, construída a partir da escala logarítmica, foi atribuído aos terremotos mais fracos, que já haviam sido registrados, valores próximo de zero. Os valores associados a cada tipo de terremoto são chamados **magnitude** e são medidos em graus. Conforme o grau de magnitude registrado na escala Richter, diversos efeitos podem ser gerados, conforme o esquema seguinte.



ILUSTRAÇÕES: HELOÍSA PINTARELLI

BNCC
- EM13MAT305
- EM13MAT403
- CE1CNT
- CE3CNT

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Terremotos ao longo da história

Nos últimos anos, os terremotos provocaram estragos que puderam ser vivenciados pela população de diversos países. Em abril de 2015, por exemplo, um terremoto de 7,8 graus na escala Richter, seguido por um outro de magnitude 7,2 graus, atingiu o Nepal, localizado no continente asiático, ocasionando a morte de, aproximadamente, 8 500 pessoas, além de deixar milhares de desabrigados.

No Brasil, também existem registros de tremores de terra em diferentes estados. Por exemplo, em maio de 2019 um terremoto com magnitude de 3,9 graus atingiu uma região perto da cidade de Delfinópolis, em Minas Gerais, sendo um dos maiores tremores de terra ocorrido no sul do estado nos últimos 10 anos, ocasionando alguns estragos em imóveis, mas sem o registro de feridos.

Diante disso, apesar do enorme progresso já realizado pelos cientistas no sentido de identificar as causas de terremotos e desenvolver aparelhos que informam sua magnitude e origem, o empenho tem sido, principalmente, em encontrar uma maneira de prevê-los, de modo a alertar a população para que medidas de segurança necessárias sejam tomadas antes de sua ocorrência.

Fonte de pesquisa: <http://moho.iag.usp.br/reports/>. Acesso em: 16 jul. 2020.

Oriente os alunos a escrever as respostas no caderno.

A Qual é o nome do ponto pelo qual se propaga o terremoto na superfície terrestre?
epicentro

B Pesquise sobre a magnitude, na escala Richter, de outros terremotos já registrados e suas consequências. Resposta pessoal.

A função que expressa a magnitude de um terremoto em função da energia liberada por ele é denominada **função logarítmica**, assunto que será trabalhado nas próximas páginas. Vamos, ainda, relacionar funções exponenciais e logarítmicas como **inversas**, mas, antes, estudaremos as condições para que uma função qualquer admita inversa.

FOTOMONTAGEM DE BRUNO BADAIN. FOTOS: 1.ERMESS/SHUTTERSTOCK; 2.RYAN JANSSENS/SHUTTERSTOCK; 3.SPYARM/SHUTTERSTOCK; 4.SDUBI/SHUTTERSTOCK; 5.VLADICZECH/SHUTTERSTOCK; 6.MINERVA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 7.NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK; 8.NUDPHON PHUENGSUWAN/SHUTTERSTOCK; 9.AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK; 10.MICHAEL L BROWN/SHUTTERSTOCK; 11.OLEKSANDR_DELYK/SHUTTERSTOCK; 12.ROMARIOIEN/SHUTTERSTOCK; 13.GMSTOCKSTUDIO/SHUTTERSTOCK; 14.KEVIN TICHENOR/SHUTTERSTOCK; 15.TUKKATAMOJI/SHUTTERSTOCK

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

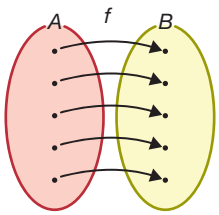
Função inversa

Antes de iniciarmos nossos estudos sobre funções inversas, definiremos um conceito importante.

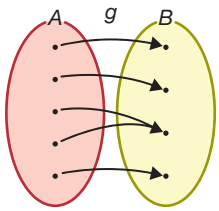
Uma função f é bijetiva se, e somente se, para todo $x_1 \in D(f)$ e $x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, tivermos $f(x_1) \neq f(x_2)$ e $CD(f) = Im(f)$.

Dentre as funções representadas a seguir, apenas a função f é bijetiva.

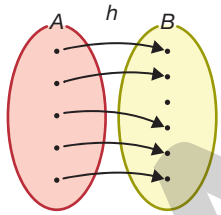
Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$. Se $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$, temos $x_1 \neq x_2$, porém $f(x_1) = f(x_2) = 10$. Portanto, a função f não é bijetiva.



A função f é bijetiva.



A função g não é bijetiva, pois existem $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tal que $x_1 \neq x_2$ e $g(x_1) = g(x_2)$.

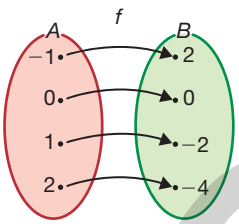


h não é bijetiva, pois $CD(h) \neq Im(h)$.

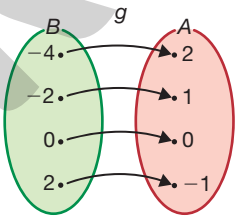
Se julgar conveniente, diga aos alunos que é possível verificar que a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ não é bijetiva observando que nem todo elemento y pertencente ao contradomínio está associado a um elemento x do domínio. Por exemplo, $-3 \in CD(f)$, mas não está associado a nenhum elemento x do domínio, ou seja, $-3 \notin Im(f)$. Logo, $CD(f) \neq Im(f)$.

Dadas as funções bijetivas f de A em B e g de B em A definidas por $f(x) = -2x$ e $g(x) = -\frac{x}{2}$, com $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-4, -2, 0, 2\}$, podemos representá-las pelos seguintes diagramas.

- $f(-1) = 2$
- $f(0) = 0$
- $f(1) = -2$
- $f(2) = -4$



- $g(-4) = 2$
- $g(-2) = 1$
- $g(0) = 0$
- $g(2) = -1$

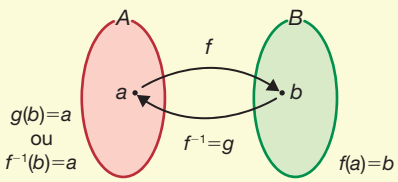


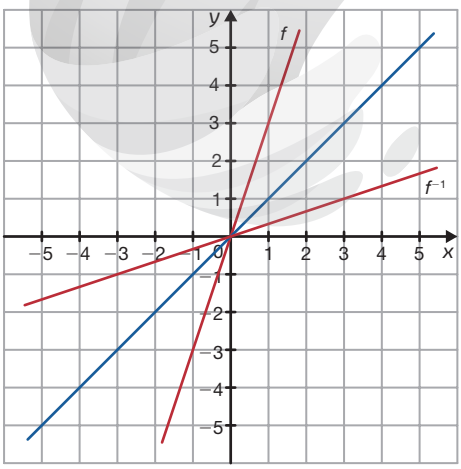
Note que:

- $D(f) = Im(g)$ e $D(g) = Im(f)$
- para todo $x \in A$ e $y \in B$, tal que $f(x) = y$, tem-se $g(y) = x$.

Nessas condições, dizemos que g é a função **inversa** de f.

Seja uma função bijetiva f de A em B. Dizemos que uma função g de B em A é inversa de f se, para todo $a \in A$ e $b \in B$, tal que $f(a) = b$, tem-se $g(b) = a$. Em geral, indicamos a função inversa de f por f^{-1}, ou seja, $f^{-1} = g$.





ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Para determinarmos a inversa da função bijetiva f, definida por $f(x) = y = 3x$, por exemplo, inicialmente isolamos a variável x:

$$y = 3x \Rightarrow x = \frac{y}{3}$$

Como, de maneira geral, quando representamos o gráfico de uma função em um plano cartesiano a variável independente x é indicada no eixo das abscissas e a variável dependente y no eixo das ordenadas, é comum permutar as variáveis x e y para expressar a função f^{-1}, que é a inversa de f. Assim: $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

Note que os gráficos de f e f^{-1} são simétricos em relação à reta em azul, que corresponde à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano. É possível demonstrar que os gráficos de duas funções inversas quaisquer são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Função logarítmica

Estudamos anteriormente que uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$, com a real positivo diferente de 1 é denominada **função exponencial**. Essa função é bijetiva e, consequentemente, possui inversa.

Agora, vamos determinar a inversa f^{-1} da função exponencial. Pela definição de logaritmo, segue que:

$$y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$$

Permutando as variáveis x e y, temos $\log_a x = y$. Portanto, $f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ é definida por $f^{-1}(x) = \log_a x$. Essa função é denominada função logarítmica.

Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ ou $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada **função logarítmica**.

> Qual é o domínio da função logarítmica? E o conjunto imagem? $\mathbb{R}_+^*$; $\mathbb{R}$.

Exemplos

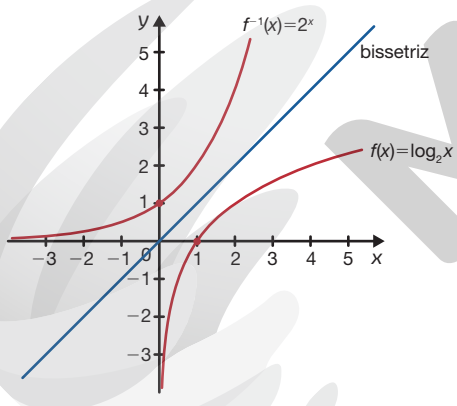
- $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log x$.
- $m: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $m(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Gráfico de uma função logarítmica

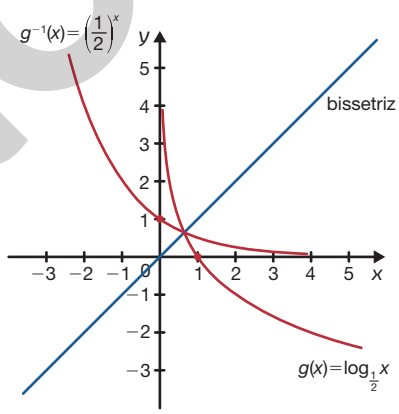
Como a função exponencial e a função logarítmica são inversas, os gráficos que as representam são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrante.

Como já estudamos o gráfico da função exponencial, esboçaremos o gráfico da função logarítmica da seguinte maneira.

- $a > 1$.



- $0 < a < 1$.



ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

De maneira geral, é possível demonstrar que:

- uma função logarítmica é crescente se $a > 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y aumentam, isto é, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$;
- uma função logarítmica é decrescente se $0 < a < 1$. Sempre que aumentamos os valores de x, os valores correspondentes de y diminuem, isto é, $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$.

*$y = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{7 \cdot 10^9}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot \log 10^{12} \Rightarrow y = 8$

8 graus na escala Richter. Uma possível resposta: as construções podem sofrer danos severos e podem ocorrer grandes rachaduras no solo.

No contexto

Sabendo que a magnitude y de um terremoto na escala Richter pode ser expressa pela função definida por $y = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$, em que x representa a energia liberada em quilowatts-hora, pelo terremoto, determine a magnitude de um terremoto que libera $7 \cdot 10^9$ kWh de energia. Quais são suas possíveis consequências? *

A bissetriz pode ser representada pela função identidade, ou seja, pela função definida por $f(x) = x$.

Se $a > 0$ e $a \neq 1$, temos $a^0 = 1$ e, consequentemente, $\log_a 1 = 0$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

1 Dadas as funções f e g definidas por $f(x) = \log_2 x$ e $g(x) = \log_3\left(\frac{1}{x}\right)$, calcule:

a) $f(16)$. 4

b) $g(1)$. 0

c) $g\left(9^{-2}\right)$. 4

d) $f^{-1}(5)$. 32

2 Determine o domínio e o conjunto imagem das funções definidas por:

a) $f(x) = \log(x + 3)$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$; $Im(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \log_8(6 - x)$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$; $Im(f) = \mathbb{R}$

c) $f(x) = 5 + \log_4(2x)$. $D(f) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(f) = \mathbb{R}$

3 O nível sonoro de um ambiente, em decibéis (dB), pode ser calculado pela lei de Weber-Fechner, que é dada por $N = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$, em que I é a intensidade sonora medida em watts por metro quadrado $\left(W/m^2\right)$.

Qual é o nível sonoro da respiração normal de uma pessoa que tem intensidade de 10^{-11} W/m^2? 10 dB

4 Esboce o gráfico da função definida por:

a) $y = \log_4 x$.

b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

c) $y = \log_3(x + 1)$.

Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

5 Classifique, em crescente ou decrescente, a função definida por: crescentes: a, b, e; decrescentes: c, d, f

a) $f(x) = \log_5 x$.

b) $f(x) = \log x$.

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{6}} x$.

d) $f(x) = \log_{\frac{2}{\sqrt{7}}} x$.

e) $f(x) = \log_{\frac{5}{2}} x$.

f) $f(x) = \log_{\frac{8}{9}} x$.

6 Considere a função g definida por $g(x) = \log_3 x$. Esboce, em um mesmo plano cartesiano, o gráfico das funções g e g^{-1}, identificando se são crescentes ou decrescentes.

Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**.

7.b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; $D(g) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(g) = \mathbb{R}$

7 Observe os quadros.

x	-2	0	3	5
$f(x) = a^x$	0,25	1	8	32

x	b	c	$4c$	d
$g(x) = \log_a x$	0	-3	-1	3

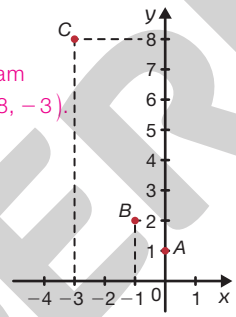
a) Determine o valor de a, b, c e d. $a = 2$; $b = 1$; $c = \frac{1}{8}$ e $d = 8$

b) Qual é o domínio e a imagem das funções f e g?

c) As funções f e g são crescentes ou decrescentes? Justifique sua resposta.
Crescentes, pois $a > 1$.

8 Os pontos A, B e C representados no plano cartesiano pertencem ao gráfico da função definida por $f(x) = a^x$, com a real positivo diferente de 1.

8.a) Espera-se que os alunos respondam $(1, 0)$, $(2, -1)$ e $(8, -3)$.



RONALDO INÁCIO

8.b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; $D(g) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(g) = \mathbb{R}$

a) Determine três pontos que pertencem ao gráfico da função g definida por $g(x) = \log_a x$.

b) Qual é o domínio e a imagem das funções f e g?

c) As funções f e g são crescentes ou decrescentes? decrescentes

9 Obtenha o domínio da função definida por:

a) $g(x) = \log_{(x-4)}(x + 2)$. $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ e } x \neq 5\}$

b) $g(x) = \log_{(-x)}(1 + x)$. $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$

c) $g(x) = \log_{(2x-1)}(x^2 - 6x + 9)$.

$D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\right\}$

Equação logarítmica

Lembre-se de que $\log_a b = c$ existe quando a e b são números reais positivos e $a \neq 1$.

Toda equação cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos é denominada **equação logarítmica**.

Exemplos

- $\log_3(x - 4) = 27$
- $\log_2(x + 6) + \log_2(x - 1) = 2$
- $\log_{5x} 12 = 18$

Ao resolvermos uma equação desse tipo, devemos verificar as condições de existência do logaritmo.

Além dessa verificação, aplicaremos a seguinte propriedade:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c, \text{ com } a > 0,\ b > 0,\ c > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Veja, na próxima página, a resolução de algumas equações logarítmicas.

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Exercícios e problemas resolvidos

R1 Resolva em $\mathbb{R}$ as seguintes equações.

a) $\log_2(x-3) = 1$

b) $\log_{x-2}(2x-4) = 2$

c) $\log(x^2-1) = \log(2x-1)$

Resolução

a) $\log_2(x-3) = 1$

Condição de existência: $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

Resolvendo a equação, temos:

$$\log_2(x-3) = 1 \Rightarrow 2^1 = x - 3 \Rightarrow x = 5$$

Como $x = 5$ satisfaz a condição de existência, temos $S = \{5\}$.

b) $\log_{x-2}(2x-4) = 2$

Condições de existência:

- $2x - 4 > 0 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$ (I)
- $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ e $x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 3$ (II)

Logo, as condições de existência são $x > 2$ e $x \neq 3$.

Resolvendo a equação, temos:

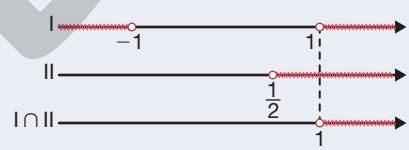
$$\log_{x-2}(2x-4) = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 2x - 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Nesse caso, como somente x_2 satisfaz as condições de existência, temos $S = \{4\}$.

c) $\log(x^2-1) = \log(2x-1)$

Condições de existência:

- $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1$ ou $x > 1$ (I)
- $2x - 1 > 0 \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$ (II)



Logo, a condição de existência é $x > 1$.

Resolvendo a equação, temos:

$$\log(x^2-1) = \log(2x-1) \Rightarrow x^2 - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Nesse caso, como somente x_2 satisfaz a condição de existência, temos $S = \{2\}$.

ILUSTRAÇÕES: RONALDO INÁCIO

Inequação logarítmica

Toda desigualdade cuja incógnita está no logaritmando, na base ou em ambos é denominada **inequação logarítmica**.

Exemplos

- $\log_2(5-x) > 27$
- $\log_4(\log_2 x) \geq 0$
- $-\log_{0,5}(x^2 - 6x) < 4$
- $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} 8$

Para resolver uma inequação desse tipo, reduzimos os dois membros a logaritmos de mesma base. Depois, sabendo que a função logarítmica definida por $f(x) = \log_a b$ é crescente quando $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$, aplicamos as seguintes propriedades:

- se $a > 1$: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1$.
- se $0 < a < 1$: $x_2 > x_1 \Leftrightarrow \log_a x_2 < \log_a x_1$.

Veja, na próxima página, a resolução de uma inequação logarítmica.

Note que, quando $a > 1$, a desigualdade se mantém e, quando $0 < a < 1$, a desigualdade é invertida.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Exercícios e problemas resolvidos

R2 Determine a solução da inequação $\log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geqslant 2$.

Resolução

$\log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geqslant 2$

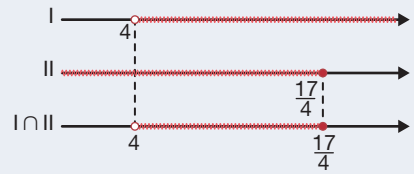
Condição de existência: $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$ (I)

Como $a = \frac{1}{2}$ e $0 < a < 1$, o sentido da desigualdade é invertido.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geqslant 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geqslant 2 \cdot \underbrace{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}}_{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-4) \geqslant \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x - 4 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{4} + 4 \Rightarrow x \leqslant \frac{17}{4} \quad \text{(II)}$$

A solução da inequação é dada pela interseção de **I** e **II**.



RONALDO INÁCIO

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x \leqslant \frac{17}{4}\right\}$.

Exercícios e problemas

Anote as respostas no caderno.

10 Resolva as equações logarítmicas.

a) $\log_4(x+5) = 2$ $S = \{11\}$

b) $\log_6\sqrt{\frac{2+x}{3}} = \frac{1}{2}$ $S = \{16\}$

11 Com o auxílio de uma calculadora científica, resolva as equações exponenciais.

a) $3^{x-1} = 5$ $x \simeq 2{,}465$

b) $20^x = 3^{x-2}$ $x \simeq -1{,}158$

c) $6^{x+1} = 9^{\frac{x}{2}}$ $x \simeq -2{,}585$

12 Sejam as funções f e g dadas por $f(x) = \log_9 2x$ e $g(x) = \log_9(x+2)$, e k uma constante, tal que $k = \log_9 30$. Determine para quais valores de x obtém-se $f(x) + g(x) = k$. $x = 3$

13 Determine o conjunto-solução de cada equação.

a) $\log_8\left(\log^2 10 + \log x\right) = 0$ $S = \{1\}$

b) $\log^2(3-x) = \log(3-x)$ $S = \{-7, 2\}$

c) $\log_{27}\left[2 + \log_5\left(x^2 - 11\right)\right] = \frac{1}{3}$ $S = \{-4, 4\}$

14 Sejam as funções f e g dadas por $f(x) = \frac{1}{3} \cdot \log_9(19 - 2x)$ e $g(x) = \log_{27}(x-8)$. Para quais valores de x temos $f(x) \leqslant g(x)$? $9 \leqslant x < \frac{19}{2}$

15 Resolva as inequações logarítmicas.

a) $\log_3(x-17) < 2$

b) $1 \leqslant \log_8\left(\frac{x}{2} + 1\right)$

c) $\log_{0,5}(2-x) \geqslant \log_{0,5}(x+6)$

16 Uma represa de 2 500 m² de área usada para a criação de peixes foi invadida por certa espécie de vegetação aquática. Por prejudicar o crescimento dos peixes, o proprietário contratou especialistas para realizar um estudo. Ao analisar os 50 m² já invadidos pela vegetação, concluiu-se que, se nenhuma providência fosse tomada, a vegetação aquática aumentaria 35% ao ano.

a) Escreva a lei de formação de uma função f que determine a área invadida pela vegetação, em função do tempo t em anos, considerando que o proprietário não tome providência.

b) Com o auxílio de uma calculadora científica, determine em quantos anos a vegetação tomará completamente a represa. aproximadamente 13 anos

17 Calcule a soma dos números inteiros que são soluções da inequação $9^{\log_9\left(x^2 - 5x\right)} \leqslant 14$. 10

18 Quantos números inteiros negativos satisfazem simultaneamente as inequações $\log_{\frac{7}{2}}(x+6) \geqslant 0$ e $\log_3\left(2x + x^2\right) \geqslant 1$? 3 números

19 Determine o domínio da função definida por:

a) $f(x) = \log_5\left[\log_{0,6}(x-3)\right]$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$

b) $f(x) = \sqrt{\log_9(5x+1)}$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{\log\left[\log_{0,7}(x+2)\right]}$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1\}$

15. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 17 < x < 26\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 14\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 2\}$

16. a) $f(t) = 50(1{,}35)^t$

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

20 Se considerarmos que um imóvel foi comprado e que a cada ano se valoriza 4% em relação ao ano anterior, quantos anos são necessários para que esse imóvel se valorize em mais de 30% em relação ao valor da compra? Se necessário, utilize uma calculadora científica. 7 anos

21 Calculadora

Ao fazer uso do limite de crédito da conta-corrente, o correntista está utilizando um empréstimo disponibilizado pelo banco, que normalmente cobra juros altos por esse serviço. Supondo que um banco cobre juros de 8% ao mês, se um cliente utilizar R$ 700,00 do limite de crédito, em quantos meses, aproximadamente, a dívida será de R$ 1 200,00? 8 meses

22 Um dos maiores acidentes nucleares da história aconteceu em 1986 na central atômica de Chernobyl, localizada na cidade de Prypiat, Ucrânia (antiga União Soviética). Nesse acidente, houve uma explosão que contaminou, com radiação acima do índice máximo tolerado, uma região de cerca de 160 000 km^2. A cidade de Prypiat foi abandonada às pressas, o que a tornou uma "cidade fantasma". Milhares de pessoas contaminadas pela radioatividade continuaram morrendo ao longo dos anos, principalmente em decorrência de câncer. Com a explosão, foram liberados na atmosfera vários elementos radioativos, entre eles o estrôncio-90, cuja meia-vida é de cerca de 28 anos.

Fonte de pesquisa: BRADY, James E.; RUSSELL, Joel W.; HOLUM, John R. *Química*: a matéria e suas transformações. Trad. J. A. Souza. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

a) Usando a função n definida por $n(t) = n_0 \cdot 2^{-t}$, em que $n(t)$ é a quantidade restante de átomos radioativos, n_0 é a quantidade inicial e t é o número de períodos de meia-vida, determine a porcentagem de átomos radioativos de estrôncio-90 que se encontrará na atmosfera 140 anos após o acidente em Chernobyl. 3,125%

b) Considerando uma massa de 700 g de estrôncio-90 lançada na atmosfera, quanto tempo, aproximadamente, é necessário para que essa massa se reduza a 50 g? Se necessário, utilize uma calculadora científica. 107 anos

23 Elaborando

O pH, ou potencial hidrogeniônico, permite expressar a acidez, neutralidade ou basicidade de uma solução aquosa por meio da concentração de íons hidrogênio, em mol por litros. Junte-se a um colega e realizem uma pesquisa sobre a maneira de expressar o pH de uma substância utilizando logaritmo e, também, sobre a escala do pH de diversas substâncias presentes em nosso dia a dia. Em seguida, com base nos resultados obtidos, elaborem um problema que envolva funções logarítmicas e o resolva. Resposta pessoal.

24 Existem vários métodos para determinar a qualidade dos ovos. Um dos mais utilizados é a unidade de Haugh, que se baseia na massa do ovo e na altura do albúmen (clara), quando quebrado em uma superfície plana.

Para calcular a unidade Haugh (*UR*), usa-se a fórmula $UR = 100 \cdot \log\left(A - 1{,}7M^{0{,}37} + 7{,}6\right)$, em que A é a altura do albúmen em milímetros e M é a massa em gramas. Para que um ovo seja considerado de excelente qualidade, a unidade Haugh deve ser superior a 72.

a) Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule a unidade Haugh de um ovo com massa de 56 g e altura do albúmen de 6 mm. Podemos afirmar que esse ovo é de excelente qualidade? Por quê? aproximadamente 78; Sim, pois a unidade Haugh é superior a 72.

b) Qual deve ser a altura mínima aproximada, com duas casas decimais, do albúmen de um ovo de 62 g para que seja considerado de excelente qualidade? 5,48 mm

25 A tireoide é uma glândula responsável por regular a "velocidade" do funcionamento do organismo. Essa glândula produz os chamados hormônios tiroidianos, como a tri-iodotironina (T3) e a tiroxina (T4). Os altos e baixos desses hormônios são as principais causas das doenças de tireoide: hipertiroidismo e hipotiroidismo, respectivamente. Para exames de tireoide, é utilizado o elemento químico radioativo iodo-131, que tem meia-vida de oito dias, ou seja, em oito dias metade do número de átomos radioativos se desintegram. A fórmula que calcula a quantidade de material radioativo em função do tempo de meia-vida do elemento é $n = n_0 \cdot 2^{-t}$, em que n é a quantidade restante, n_0 é a quantidade inicial do elemento radioativo e t é o número de períodos de meia-vida.

Fonte de pesquisa: BRADY, James E.; RUSSELL, Joel W.; HOLUM, John R. *Química*: a matéria e suas transformações. Trad. J. A. Souza. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

a) Qual é a quantidade de iodo-131 restante de um material contaminado com 4 g, passados seis períodos de meia-vida? 0,0625 g

b) Suponha que uma clínica especializada em exames de tireoide tenha em seu estoque 10 g de iodo-131. No mínimo, quantos dias aproximadamente serão necessários para que o mesmo fique abaixo de 10^{-2} g? 80 dias

26 De acordo com o conteúdo estudado neste tema, elabore um problema envolvendo funções logarítmicas e troque com um colega para que ele o resolva. Em seguida, verifiquem se as respostas apresentadas estão corretas. Resposta pessoal.

Antes de os alunos elaborarem os problemas das tarefas 23 e 26, peça a eles que analisem os contextos propostos na seção **Exercícios e problemas** deste tema e, se julgar conveniente, oriente-os a investigar outros problemas disponíveis em provas de vestibular e Enem. Essas tarefas propõem aos alunos que elaborem um problema utilizando os conceitos estudados, contribuindo assim para a ampliação do repertório de reflexões e questionamentos a respeito de determinadas situações.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Ampliando seus conhecimentos

Nesta seção, apresentamos as referências complementares com sugestões de livros, *sites* e *podcasts* que propiciam a melhor compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula, envolvendo conteúdos que, de maneira geral, abordam a Matemática e suas Tecnologias de forma lúdica, curiosa e interessante.

Para ler

- **A Matemática das coisas**

  CRATO, Nuno. *A Matemática das coisas*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro apresenta diversos exemplos da importância da Matemática na vida do ser humano, como o funcionamento do Sistema de Posicionamento Global (GPS) e a relação da Matemática com outras áreas do conhecimento.

- **A Matemática nas profissões**

  BARELLA, Elaine S.; MARTINS, Laura M. R. (Org.). *A Matemática nas profissões*. São Paulo: Portal Editora, 2010.

  Resultado de pesquisas e entrevistas, o livro apresenta o relato de profissionais de diversas áreas sobre a relação deles com a Matemática em suas rotinas de trabalho.

- **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**

  GARBI, Gilberto G. *A rainha das ciências*: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática. 4. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

  O livro é um relato de quatro milênios da história da Matemática, apresentado de maneira simples e compreensível.

- **O universo e a xícara de chá**

  COLE, K. C. *O universo e a xícara de chá*. Trad. Elizabeth Leal. Rio de Janeiro: Record, 2006.

  O livro mostra como a Matemática transcende os números e está presente em muitas situações do dia a dia. Mostra, ainda, como enxergar a lógica presente nessas situações, cuja compreensão nos torna mais aptos a tomar decisões e permite o melhor entendimento do mundo em que vivemos.

Para navegar

- **Edumatec**

  Disponível em: <http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Este *site* apresenta e disponibiliza material que relaciona Matemática e informática. Na seção *softwares*, são disponibilizados diferentes programas computacionais que permitem, por exemplo, a construção de gráficos ou de figuras geométricas.

- **Enem**

  Disponível em: <https://enem.inep.gov.br/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Neste *site* é possível fazer a inscrição para o Enem e acessar os resultados, os simulados e as provas aplicadas em anos anteriores, assim como a matriz de referência dos conhecimentos avaliados no exame.

Para ouvir

- **Resumov**

  Disponível em: <https://www.resumov.com.br/podcast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Criado por Susane Ribeiro, o Resumov é um *podcast* que dá dicas de estudos para quem deseja ter uma boa nota no Enem ou passar nos vestibulares mais difíceis do país.

- **Scicast**

  Disponível em: <https://www.deviante.com.br/podcasts/scicast/>. Acesso em: 2 jun. 2020.

  Esse *podcast* é voltado para aquele que precisa dar um gás nos estudos da área de Ciências exatas e naturais. Nele, o apresentador utiliza de situações do dia a dia para explicar Matemática, Química e Física de uma maneira mais didática.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

1 Os conjuntos

1 a) $\{a, m, i, z, d, e\}$; finito
b) $\{-9, -7, -5, -3, -1\}$; finito
c) $\{7, 14, 21, 28, \ldots\}$; infinito
d) $\left\{-\frac{3}{7}\right\}$; finito
e) $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$; finito
f) $\{\}$; finito

2 a) Q b) S c) R

3 Uma possível resposta:
a) gambá, macaco e homem.
b) tubarão, cascudo e lambari.
c) arara, papagaio e coruja.
d) jacaré, tartaruga e iguana.
e) cobra-cega, sapo e rã.

4 a) Falsa, pois 1 e 3 não são números pares.
b) verdadeira
c) Falsa, pois 1, 5 e 7 não são pares.
d) Falsa, pois o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.
e) verdadeira
f) Falsa, pois o elemento 7 não é par, logo não pertence a P.

5 Uma possível resposta:
a) $A = \{x \mid x$ é par positivo e menor do que $11\}$
b) $B = \{x \mid x$ é múltiplo de $6\}$
c) $C = \{x \mid x$ é um divisor positivo de $8\}$
d) $D = \{x \mid x$ é ímpar positivo e maior do que $2\}$
e) $E = \{x \mid x$ é um quadrado perfeito menor ou igual a $16\}$
f) $F = \{x \mid x$ é uma letra que compõe a palavra verde$\}$

6 a) verdadeira d) falsa
b) falsa e) verdadeira
c) falsa f) verdadeira

7 alternativas a, d, e

8 alternativa b

9 $\{4,8,12\}$, $\{4,8,16\}$, $\{4,12,16\}$ e $\{8,12,16\}$

10 a) 0; 2; 6
b) $-1; -3; -7; -11$
c) $-10{,}25; -\frac{4}{3}; 0{,}\overline{27}; 0{,}5; 8{,}012$

11 $-\frac{3}{7}$. Uma possível resposta: forma fracionária $-\frac{1}{2}$, forma decimal $-0{,}55$.

12 a) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{134}{99}$ e) $\frac{125}{999}$
b) $\frac{9}{11}$ d) $\frac{25}{3}$ f) $\frac{114}{11}$

13 a) $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ cm; irracional
b) 6 cm; racional

14 Não.

3 Noção intuitiva de função

1 a) ano e população
b) 121,2 milhões de habitantes

3 a) A variável dependente é D e a independente é x.
b) R$ 100,00.
c) R$ 1 600,00.

4 a) $P = 6 \cdot \frac{x}{2}$ ou $P = 3x$
b) • 6 m • 36 m
c) • 7 m • 3,4 m

5 alternativa b **7** alternativa d

6 alternativa b

9 a) $Im(h) = \{24, 30, 40, 60, 120\}$
b) $Im(h) = \{20, 24, 30, 40, 60\}$
c) $Im(h) = \{25, 31, 41, 61, 121\}$
d) $Im(h) = \{23, 29, 39, 59, 119\}$

10 a) $p(t) = 5t$, se $t \leqslant 2$, e $p(t) = 8 + t$, se $t > 2$.
b) R$ 11,00.

11 a) $p(t) = 680t$
b) $p(24) = 680 \cdot 24 \Rightarrow p(24) = 16\,320$
• Algumas possíveis respostas: vício, pois o cérebro do fumante se adapta e precisa de doses cada vez maiores para manter o mesmo nível de satisfação que tinha no início; causa direta de aproximadamente 50 doenças, como câncer, doenças cardiovasculares e respiratórias.

12 a) 2013: 129 900 habitantes; 2019: 143 700 habitantes

13 alternativa b.

14 a) $D(f) = \mathbb{R}$
b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$
c) $D(f) = \mathbb{R} - \{7\}$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 7\}$
d) $D(f) =]-\infty, 12]$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 12\}$
e) $D(f) =]-\infty, 4[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$
f) $D(f) =]2, +\infty[$ ou $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

15 alternativa b

16 a) O domínio não está correto.
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 6$ ou $x < -2\}$.

4 Gráfico de uma função

2 a) • R$ 30,99
• R$ 93,75

3 alternativas a, b, e, f

4 a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 7\}$;
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 3\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$;
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y < 4\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leqslant 5\}$;
$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$

6 a) $f(4) = 2$
b) $x = -4$, $x = -2$ e $x = 1$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 \leqslant x \leqslant 6\}$;
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\}$

7 a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 12\}$ e
$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant y \leqslant 5\}$
b) • $[3, 5]$ e $[8, 10]$
• $[-4, -2]$
• $[-2, 3]$, $[5, 8]$ e $[10, 12]$
c) $-\frac{28}{9}$ e 9

8 a) 46 h; 48 h
b) Crescente, pois quanto maior for a quantidade de peças encomendadas, maior será o tempo para a entrega.

9 a) Verde, pois, como a tartaruga não parou, sua distância em relação à largada foi crescente durante todo o tempo da corrida.
b) Não, pois em certo intervalo, que corresponde ao período em que a lebre permaneceu dormindo, a função é constante.
c) tartaruga; Algumas possíveis respostas: quem segue devagar e com constância pode chegar à frente; paciência pode valer mais do que a pressa; nem sempre os mais velozes chegam em primeiro lugar.

10 a) taxa de variação média no intervalo: $\frac{1}{4}$
b) taxa de variação média no intervalo: $-\frac{1}{2}$

11 a) 7 semanas
b) 1,6 cm por semana; 1,52 cm por semana

13 a) alternativa II
b) $D(f) = [0, 16]$; $Im(f) = [0, 12]$
c) De 0 a 4 meses.

5 Função afim

1 a) função afim
b) função afim, linear e identidade
c) função afim e linear
d) função afim e constante
e) função afim
f) função afim e linear

2 a) 65 cm
b) $p(c) = 5c$

MODERNA

3 a) $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
b) $f(x) = 2x + 5$
c) $f(x) = x + 2$
d) $f(x) = -2x + 3$

4 a) $m(q) = 1{,}5q$ b) 75 t

6 a) $s(n) = 180n - 360$
b) 720°
c) 15 lados

7 b) quadro A: $y = x + 2$;
quadro B: $y = x^3$

9 a) 10 °C
b) $F = 32$; A medida, em graus Fahrenheit, correspondente a 0 °C.

10 a) $p_A(t) = 84t + 24$ e $p_B(t) = 92t$
b) A partir de 3 h de jogo.

11 a) 90 km/h
c) $S(t) = 20 + 90t$;
$D(S) = \mathbb{R}_+$; $Im(S) = \mathbb{R}_+^*$
d) quilômetro 920

12 a) $T(m) = 9{,}8m$; $L(n) = 1{,}6n$
b) • 120 N • 735 N
c) 57 kg
d) 588 N

13 alternativa **c**

6 Função afim crescente e função afim decrescente

1 decrescente

2 a) R$ 25,60; R$ 10,80
b) $p(m) = \begin{cases} 36m, \text{ se } m \leqslant 0{,}7 \\ 25{,}60, \text{ se } m > 0{,}7 \end{cases}$

3 a) 27 mil litros
b) $Q(t) = 150\,000 - 9\,000t$
c) decrescente

4 a) $h(x) = 2\,000$ b) constante

5 a) $E(q) = 10q$
b) crescente
• Algumas possíveis respostas: ajuda a poupar os reservatórios de hidrelétricas; quando comparada a combustíveis fósseis, as emissões de gases de efeito estufa são menores; menores perdas e redução em custos associados à transmissão de energia elétrica.

7 a) A função se anula, ou seja, $f(x) = 0$ para $x = -2$, a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$ para $x > -2$ e a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$ para $x < -2$.
b) A função se anula, ou seja, $f(x) = 0$ para $x = -5$; a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$ para $x < -5$; e a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$ para $x > -5$.
c) A função se anula, ou seja, $f(x) = 0$, quando $x = 6$; a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$, quando $x > 6$; e a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$, quando $x < 6$.
d) A função se anula, ou seja, $f(x) = 0$ para $x = \frac{7}{3}$; a função é positiva, ou seja, $f(x) > 0$ para $x < \frac{7}{3}$; e a função é negativa, ou seja, $f(x) < 0$ para $x > \frac{7}{3}$.

8 $x \in]2, 5[$

9 a) $f(x) = 0$ para $x = -10$, $f(x) > 0$ para $x > -10$ e $f(x) < 0$ para $x < -10$
b) $f(x) > 0$ para todo x real
c) $f(x) = 0$ para $x = 2$, $f(x) > 0$ para $x < 2$ e $f(x) < 0$ para $x > 2$

10 a) $A(t) = 4{,}5t + 6$
b) $B(t) = 6{,}5t$
c) A opção **B** é mais vantajosa para um período menor do que 3 h e, a opção **A**, para um período maior do que 3 h. As opções **A** e **B** têm o mesmo preço para 3 h.

11 alternativa **c**

12 a) 1ª proposta: $S_1(v) = 1\,600 + 0{,}05v$;
2ª proposta: $S_2(v) = 1\,100 + 0{,}075v$
b) Para vendas menores do que R$ 20 000,00, a 1ª proposta é mais vantajosa. Para vendas maiores do que R$ 20 000,00, a 2ª proposta é mais vantajosa.

13 a) locadora A: $V_A(x) = 82 + 0{,}52x$;
locadora B: $V_B(x) = 76 + 0{,}55x$
b) locadora B
c) Portanto, para rodar menos de 200 km, a locadora **B** oferece o menor preço; para rodar mais de 200 km, a locadora **A** oferece o menor preço; para rodar 200 km, as locadoras oferecem o mesmo preço.

14 a) R$ 750,00
b) $L(v) = 75v - 1\,500$
c) R$ 21,00

7 Proporcionalidade e função linear

1 a) $P(m) = 39{,}90m$
b) $P(m) = 22\,000m$
c) $T(d) = 0{,}8d + 2$

2 a) $A(b) = 4b$. Sim, pois a função que expressa a relação entre a área e o comprimento da base é uma função linear.
b) 60 cm²
c) 8 cm

3 a) $R(d) = 100d$
b) 563 km

4 a) 4 m de comprimento por 4 m de largura
b) 1 cm : 125 cm
c) $m(x) = 1{,}25x$
d) 1,25

8 Modelo linear

1 Uma possível resposta:
$Y = 0{,}9X + 79{,}6$

3 a) A reta em vermelho.
b) $y = -0{,}925x + 60$

4 b) $y = -0{,}73x + 9{,}28$
c) • aproximadamente 5 h 38 min
• aproximadamente 12 h 43 min

5 b) $y = 0{,}0016x - 2{,}47$, em que x e y indicam, respectivamente, o ano e o IDH.
c) aproximadamente em 2044

6 b) $y = 559{,}61x + 12\,225$
c) • aproximadamente 25 096 acessos
• aproximadamente 37 influenciadores

9 Função quadrática

1 alternativas **b**, **c** e **e**

2 a) $a = 1$, $b = 1$ e $c = 2$
b) $a = -4$, $b = 0$ e $c = 2{,}5$
c) $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{7}$ e $c = 0$
d) $a = -9$, $b = 3$ e $c = -1$
e) $a = 7{,}6$, $b = 0$ e $c = 0$
f) $a = -2$, $b = 12$ e $c = -10$

3 a) -4 d) $-2{,}72$ g) 1
b) 16 e) -7 h) $-\frac{9}{4}$
c) -4 f) -27

4 a) $S(x) = 2x^2 + 5x - 3$; $x > \frac{1}{2}$
b) 30 cm²; 165 cm²

5 *B*, *C* e *D*

6 a) $p(n) = n^2 - n$, com n natural maior ou igual a 2.
b) 380 partidas; 38 partidas
c) 600 partidas

7 a) $A(x) = 4x^2 + 20x$, com $x > 0$
b) $A(x) = 10x^2 + 8x - 2$, com $x > \frac{1}{5}$

10 Coeficiente de uma função quadrática

1 $(1, -4)$

2 $g(x) = 2x^2 + 2$; $h(x) = -x^2 + 4x - 3$

3 alternativa **e**

4 b) Nas funções h e m, pois:
$\frac{h(x)}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} = 2$ e $\frac{m(x)}{x^2} = \frac{-3x^2}{x^2} = -3$
para todo $x \in \mathbb{R}^*$.

5 b) Quadro A: $y = x^2$;
Quadro B: $y = x^2 - x$

6 a) $t(h) = \frac{32}{5}h^2 - 112h + 500$;
$D(t) = \{h \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant h \leqslant 7{,}5\}$

7 a) $x_1 = 2$ e $x_2 = 5$
b) $x_1 = x_2 = 3$

MODERNA
Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

c) não existem zeros reais
d) $x_1 = -1$ e $x_2 = 1$
e) $x_1 = 0$ e $x_2 = -12$
f) não existem zeros reais
g) $x_1 = \frac{2}{3}$ e $x_2 = -1$
h) $x_1 = x_2 = 4$

8 $k = -1$

9 a) Como o gráfico da função intersecta o eixo x em um ponto de abscissa 0 e em um ponto de abscissa positiva, a soma dos zeros é positiva, e o produto nulo.
b) Positivo, pois a função possui dois zeros distintos.

10 alternativa **c**

11 alternativa **b**; A função possui dois zeros distintos, $\Delta > 0$. Como $S = 0$, os zeros da função são números opostos e, sabendo que $a > 0$, a concavidade da parábola é voltada para cima.

12 a) $x = 0$
b) Sim, pois o eixo da simetria da parábola coincide com o eixo y e $f(0) = 0$, consequentemente, $b = c = 0$.
c) $f(x) = -2{,}3 \cdot x^2$

13 60 m

11 Vértice de uma parábola

1 a) $V(1, 2)$
b) $V\left(5, -\frac{10}{3}\right)$
c) $V\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

2 alternativa **a**

3 $V\left(-1, -\frac{9}{2}\right)$

4 a) $V(1, 0)$
b) $V(-3, 0)$
c) $V\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
b) $V\left(-\sqrt{5}, 0\right)$
• Uma possível resposta: a abscissa sempre será $-p$ e a ordenada, 0.

6 0

7 alternativa **d**

8 alternativa **e**

9 a) aproximadamente 133 m
b) 503 m

10 a) $\text{Im}(f) = [0, +\infty[= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
b) $Im(f) = \left]-\infty, \frac{1}{14}\right] = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq \frac{1}{14}\right\}$
c) $Im(f) =]-\infty, 1] = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$
• Possível resposta: para $a > 0$, $Im(f) = [c, +\infty[= \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq c\}$; para $a < 0$, $Im(f) =]-\infty, c] = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq c\}$

11 a) $y = x^2 + 4x$ c) -4
b) $V(-2, -4)$

12 a) $p > 4$ c) $p = -3$
b) $p = -7$ ou $p = 7$

13 50 peças; R$ 10,00

14 Os lados devem ter 20 m de comprimento; 400 m²

15 alternativa **d**

16 a) $L(x) = -x^2 + 150x - 1\,200$
b) • 75 itens • R$ 4 425,00

17 R$ 45,00; R$ 4 050,00

18 alternativa **c**

19 $a = 15$ m e $c = 30$ m

20 a) Fernanda; 20 m
b) Carol; 2 m

21 alternativa **b**

22 $\frac{9}{8}$ m² ou 1,125 m²

23 a) 14 m
b) aproximadamente 19,5 m

24 alternativa **b**

25 a) $f(x) = 0$ para $x = 2$ ou $x = 4$,
$f(x) > 0$ para $x < 2$ ou $x > 4$ e
$f(x) < 0$ para $2 < x < 4$
b) $f(x) = 0$ para $x = -3$ ou $x = 3$,
$f(x) > 0$ para $-3 < x < 3$ e
$f(x) < 0$ para $x < -3$ ou $x > 3$
c) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
d) $f(x) = 0$ para $x = 0$ ou $x = 4$,
$f(x) > 0$ para $0 < x < 4$ e
$f(x) < 0$ para $x < 0$ ou $x > 4$

26 $f(x) = 2x^2 + 6x - 20$

27 $k < -3$

28 $-3 \leq x \leq 4$

29 $x \leq 0$ ou $x \geq 1$

30 A partir de 41 peças.

31 alternativa **c**

32 a) 25,11 °C; 23,36 °C
b) Entre as 7 h 12 min e as 18 h.
c) 12 h 36 min; 26,05 °C

12 Inequação do 1º e do 2º grau

1 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -4\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -1\}$
d) $S = \mathbb{R}$

2 a) 470 kcal
b) $q(n) = 47n$
c) 8 biscoitos

3 a) triângulo: $p: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = 5x$; retângulo: $p: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = 4x + 20$
b) $x = 19$

4 7 000 pessoas

5 a) $L: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definida por $L(q) = 40q - 6\,000$
b) $q > 150$; A confeitaria terá lucro quando forem vendidos mais de 150 bolos.

6 15 min

7 b) entre 88,$\overline{3}$ kWh e 123,$\overline{3}$ kWh

8 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq -\frac{5}{3}\right\}$

9 $-4, -3, -2$ e -1

10 $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 5\}$

11 $p > 4$

12 b) perímetros: funções afim; áreas: funções quadráticas.
c) • $x > 5$ • $x > \frac{10\sqrt{3}}{9}$ • $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

13 a) • $P = 8x$ • $A = 2x^2\left(1 + \sqrt{2}\right)$
c) perímetro: função afim; área: função quadrática
d) $x > \sqrt{\frac{15\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}}$

13 Progressão aritmética

1 a) 7 c) 4 e) $\frac{1}{4}$
b) -3 d) -8 f) $-0{,}9$

2 a) $(4, 13, 22, 31, 40, 49)$
b) $(23, 18, 13, 8, 3, -2)$
c) $(9, 11, 13, 15, 17, 19)$
d) $\left(-\frac{9}{2}, -2, \frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8\right)$
e) $(20, 14, 8, 2, -4, -10)$

3 a) 97 b) -2

4 95, 87, 79

5 a) 65 min
b) 375 min

6 a) $a_n = n - 1$; crescente
b) $a_n = \frac{5}{2} + (n-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$; decrescente

7 $a_n = 1\,400 + (n-1) \cdot (-25)$; R$ 1 300,00

8 32 termos

9 a) vermelha e azul; azul e branca
b) 514 vezes
c) 13 h 59 min 58 s; 13 h 59 min 51 s; 13 h 59 min 44 s
d) Sim, às 13 h 59 min 51 s.
e) Sim, às 13 h 59 min 44 s.

10 a) $r = M_1 - C \Rightarrow r = (C + C \cdot i) - C \Rightarrow$
$\Rightarrow r = C \cdot i$, $r = M_2 - M_1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (C + 2C \cdot i) - (C + C \cdot i) \Rightarrow$
$\Rightarrow r = C \cdot i$ e $r = M_3 - M_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (C + 3C \cdot i) - (C + 2C \cdot i) \Rightarrow$
$\Rightarrow r = C \cdot i$. Logo, a sequência $(C, M_1, M_2, \ldots)$ é uma PA de razão $r = C \cdot i$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

b) $M(t) = C \cdot i \cdot t + C$, o montante resulta da soma do capital C e o juro $(C \cdot i \cdot t)$ obtido em determinado tempo, ou seja, o montante depende do tempo em que o Capital fica aplicado a uma certa taxa fixa i. O tempo é a variável independente.

11 180 km **12** 4 **13** 0

14 a) $\frac{1}{3}$
b) 13 termos
c) 5 termos: 1, 2, 3, 4 e 5

15 $a = -2$

16 a) 2 veículos; razão
b) $(3, 5, 7, 9, 11)$
c) $(21, 37, 53, 69, 85)$

17 Partícula A: $p(t) = 5t + 5$;
Partícula B: $p(t) = \frac{13}{2}t$

18 $(-12, -6, 0, 6, 12, 18, 24, 30)$; 6

19 $f(x) = -3x + 4$

20 f; h **21** 4 ou -4

22 Máximo, pois $a = -1 < 0$.

24 500 500

25 a) 495 b) $-3\,168$

26 a) 885 c) 77
b) 1 089

27 29 **28** 21

29 alternativa a

30 a) $x = 24$ b) $x = \frac{1}{3}$

31 alternativa d

32 $a^n \cdot b^{\frac{n(n-1)}{2}}$

33 a) não; não; Ambas não possuem razões constantes.
b) $n(n + 1)$; n^2
c) 420 e 400; Os termos representam a soma dos 20 primeiros números pares e dos 20 primeiros números ímpares positivos, respectivamente.

34 -100 **35** 17

14 Função exponencial

1 a) 1 c) $\frac{1}{81}$ e) $\frac{1}{2}$
b) 3 d) $\frac{1}{16}$ f) 64

2 Uma possível resposta: considerando que $t = 0$ representa o ano de 1971, temos: $f(t) = 2\,300 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$

3 a) $M = 1\,500 \cdot (1{,}06)^n$
b) R$ 1 893,72; R$ 2 127,78

4 a) • 8 células-filhas
• 16 células-filhas
• 128 células-filhas
b) $y = 2^x$

6 crescentes: alternativas a e c; decrescentes: alternativas b e d

7 alternativa c **11** alternativa d

8 $k > 5$

16 Equação e inequação exponencial

1 a) $S = \{2\}$ d) $S = \{8\}$
b) $S = \{-\frac{2}{3}\}$ e) $S = \{-\frac{7}{2}\}$
c) $S = \{6\}$ f) $S = \{5\}$

2 b) $y = 5^{x-1}$
c) • nível 6 • nível 8

3 a) 1 177 600 transistores; 6 821 387 842 transistores

4 6 horas **5** $x = 8$

6 alternativa d

7 a) f: decrescente; g: crescente
b) $x = \frac{1}{3}$

8 alternativa d

9 a) $S = \{\frac{1}{2}\}$ d) $S = \{3\}$
b) $S = \{5\}$ e) $S = \{0, 1\}$
c) $S = \{4\}$ f) $S = \{1\}$

11 $x = 1$

12 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{3}\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{2}\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

13 alternativa b

14 $x \leqslant 5$

15 • $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
• $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
• $D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$

16 $x > -3$ **20** alternativa a

17 $x > 1$

19 alternativa d **21** alternativa a

17 Progressão geométrica

1 a) $q = 2$; crescente
b) $q = 1$; constante
c) $q = \frac{2}{3}$; decrescente
d) $q = -\frac{2}{3}$; alternante
e) $q = \frac{1}{2}$; crescente

2 a) sim; $q = -1$
b) não
c) sim; $q = 4$

3 As sequências são progressões geométricas e suas razões são dadas por:
• raios: $q = \frac{1}{2}$
• comprimento: $q = \frac{1}{2}$
• áreas: $q = \frac{1}{4}$

5 1, 3, 9, 27, 81, 243 e 729

6 $b = -1$, PG constante; $b = -2$, PG decrescente

7 $(2, -6, 18)$ e $q = -3$ ou $(18, -6, 2)$ e $q = -\frac{1}{3}$

8 a) aproximadamente 211 807 287 habitantes
b) 2025

9 a) $a_n = 2 \cdot 4^{n-1}$; $a_6 = 2\,048$
b) $a_n = -48 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $a_6 = -1{,}5$
c) $a_n = -7(-2)^{n-1}$; $a_6 = 224$
d) $a_n = \frac{64}{25} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$; $a_6 = \frac{125}{512}$

10 a_7 **12** $n = 8$

11 $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2

13 a) $(32, 48, 72, 108, 162, 243)$
b) A quantidade de medicamento ingerida por Júlio na quarta semana de tratamento.
c) $a_n = 32 \cdot (1{,}5)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $n \leqslant 6$

14 a) PG
b) $v_{10} = 50\ \text{mm}^3$
c) $25\,600\ \text{mm}^3$
d) $v_n = 25\,600 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

15 a) 30 ou -30
b) 4
c) -3

16 12

17 a) • verde: $\left(x^2, \frac{3x^2}{4}, \frac{9x^2}{16}, \frac{27x^2}{64}, \frac{81x^2}{256}\right)$
• amarelo: $\left(0, \frac{x^2}{4}, \frac{7x^2}{16}, \frac{37x^2}{64}, \frac{175x^2}{256}\right)$
b) Uma possível resposta: aquela que representa os valores das áreas em verde, pois, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é uma constante. No caso da outra sequência, esse quociente não é constante.
c) • verde: $a_{10} = \left(\frac{3}{4}\right)^9 \cdot x^2$
• amarelo: $a_{10} = \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^9\right] \cdot x^2$

18 alternativa b

19 a) 2ª aplicação

MODERNA

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

b) 2ª aplicação; O montante obtido ao final de dois anos na 1ª e na 2ª aplicação é, respectivamente, R$ 12 080,00 e R$ 12 194,23.

c) 1ª aplicação:
$M_n = 10\,260 + (n-1) \cdot 260$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
2ª aplicação:
$M_n = 10\,083 \cdot (1{,}0083)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

20 a) $(1, 30, 900, 27\,000, 810\,000)$; PG
b) $i_n = 30^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $2{,}187 \cdot 10^{10}$ fêmeas infectadas

21 a) • 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20
• 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 e 1 024
b) PG
d) gráfico II

22 alternativa c **24** $\sqrt{2}$

23 $(3, 6, 12, 24, 48, 96)$

25 a) 118 048 folhas b) 1 180,48 cm

26 a) Cada termo da sequência, a partir do segundo, é obtido pela multiplicação do termo anterior por uma constante, nesse caso $1 + i$, então a sequência dos montantes é uma PG de razão $q = 1 + i$.

27 Resposta no final da página.

28 a) A sequência é uma PA e $r = 9$
b) A sequência é uma PG e $q = 8$

29 a) $a = 2$
b) $(x, 2x, 4x, 8x)$
c) $512x$

30 729 **31** $a = \frac{1}{2}$

32 R$ 317 221,50

33 a) 65 535 c) 5 555,5555
b) 340

34 a) 625 pontos b) 781 pontos

35 $n = 7$

36 $x = -2{,}5; n = 5$ **37** 12

38 a) $\frac{781}{256}u^2$ b) $\frac{499}{256}u^2$

39 a) 1,152 m
b) 38,16 m; 40,464 m

40 a) 121 baratas b) 6 min

41 a) • $a_1 = 1$ • $q = 2$ • $n = 10$
b) $S_{10} = \frac{1 \cdot (1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{1 - 2^{10}}{-1} =$
$= 2^{10} - 1 = 2 \cdot 2^9 - 1 = 2^9 + 2^9 - 1$

42 a) R$ 6 300,00 c) R$ 102 300,00
b) 10 perguntas

18 Logaritmo

1 a) 0 b) 4 c) 19 d) –1

2 a) $x \simeq 0{,}8$ d) $x \simeq 21{,}0$
b) $x \simeq 8$ e) $x \simeq 0{,}1$
c) $x \simeq 1{,}1$ f) $x = 25\,000$

3 a) $-\frac{9}{2}$ c) 252
b) 9 d) 4

4 81 **5** 3 h 49 min

6 a) $x > 9$
b) $x > -4$ e $x \neq -\frac{7}{2}$
c) $-0{,}3 < x < 1$ e $x \neq 0{,}7$
d) $\frac{1}{2} < x < 2$
e) $x > 10$

7 $y = 17$ **9** $n = 10$

10 a) $\log b + \frac{1}{2}\log c$
b) $2\log a + \log b - \log c$
c) $\frac{1}{5}\log_2 a - \log_2 b - 2\log_2 c$

11 a) $\log_4 45$ b) $\log 7$

12 $-\frac{29}{2}$

13 a) $S = \{-1{,}535\}$
b) $S = \{1{,}465\}$
c) $S = \{13{,}86\}$

14 $x = b\sqrt{a}$

15 a) 10% b) 13 anos

16 10 meses

17 a) $\frac{\log 8}{\log 12}$
b) $\frac{\log\left(\frac{3}{7}\right)}{\log 2}$
c) $\frac{\log 2}{\log 17}$

18 a) 1 b) $\frac{6x}{y}$, com $y \neq 0$

19 4 **21** alternativa b

20 24 algarismos **22** 1 h 54 min

23 9º, 10º e 11º quadrados

24 a) aproximadamente 4,537
b) aproximadamente –2,231
c) aproximadamente 2,264

19 Função inversa e logarítmica

1 a) 4 b) 0 c) 4 d) 32

2 a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -3\}$; $Im(f) = \mathbb{R}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 6\}$; $Im(f) = \mathbb{R}$
c) $D(f) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(f) = \mathbb{R}$

3 10 dB

5 crescentes: a, b, e;
decrescentes: c, d, f

7 a) $a = 2$; $b = 1$; $c = \frac{1}{8}$ e $d = 8$
b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; $D(g) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(g) = \mathbb{R}$
c) Crescentes, pois $a > 1$.

8 b) $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$; $D(g) = \mathbb{R}_+^*$; $Im(g) = \mathbb{R}$
c) decrescentes

9 a) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4 \text{ e } x \neq 5\}$
b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0\}$
c) $D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2} \text{ e } x \neq 1 \text{ e } x \neq 3\right\}$

10 a) $S = \{11\}$ b) $S = \{16\}$

11 a) $x \simeq 2{,}465$ c) $x \simeq -2{,}585$
b) $x \simeq -1{,}158$

12 $x = 3$

13 a) $S = \{1\}$ c) $S = \{-4, 4\}$
b) $S = \{-7, 2\}$

14 $9 \leqslant x < \frac{19}{2}$

15 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 17 < x < 26\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 14\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 2\}$

16 a) $f(t) = 50(1{,}35)^t$
b) aproximadamente 13 anos

17 10 **18** 3 números

19 a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4\}$
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1\}$

20 7 anos **22** a) 3,125%

21 8 meses b) 107 anos

24 a) aproximadamente 78; Sim, pois a unidade Haugh é superior a 72.
b) 5,48 mm

25 a) 0,0625 g b) 80 dias

Resposta da tarefa **27** do tema **17**

a) $a_7 = 64$ e $a_8 = 128$; 8 192

b) Sejam a_x e a_y termos equidistantes de uma PG com n termos. Assim, temos $x + y = n + 1$. A partir da fórmula do termo geral de uma PG, temos as seguintes relações: $a_x = a_1 \cdot q^{x-1}$ e $a_y = a_1 \cdot q^{y-1}$.

Logo: $a_x \cdot a_y = \left(a_1 \cdot q^{x-1}\right) \cdot \left(a_1 \cdot q^{y-1}\right) = a_1 \cdot \left(a_1 \cdot q^{x+y-2}\right) = a_1 \cdot \underbrace{\left(a_1 \cdot q^{n-1}\right)}_{a_n} = a_1 \cdot a_n$.

Portanto, $a_x \cdot a_y = a_1 \cdot a_n$.

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

Referências bibliográficas

- BOYER, Carl B; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. 3. ed. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

  A História da Matemática é abordada neste livro desde as origens primitivas até o século XX, passando por informações relacionadas ao último Teorema de Fermat e à conjectura de Poincaré, e finalmente chegando aos avanços recentes na teoria dos grupos finitos e demonstrações que contam com o auxílio do computador. Também são descritos fatos sobre a vida e as obras de alguns matemáticos famosos, como Euler, Newton e Bernoulli.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Base Nacional Comum Curricular*. Versão final. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 3 jun. 2020.

  A BNCC é o documento que norteia os currículos dos sistemas e redes de ensino das Unidades Federativas e as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas, estabelecendo os principais conhecimentos, competências e habilidades que os alunos devem desenvolver em cada etapa da Educação Básica.

- EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.

  O livro é dividido em duas partes: antes do século XVII e depois do século XVII. Além de contar a história da Matemática, o livro apresenta, no decorrer do texto, tarefas de cunho matemático, com respostas e sugestões para a sua resolução.

- IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*: logaritmos. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. v.2.

  Este volume é composto por teorias e exercícios de aplicação envolvendo o conteúdo de logaritmos, testes de vestibulares atualizados, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*: conjuntos, funções. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v.1.

  Este volume é composto por teorias e exercícios de aplicação sobre conjuntos e funções, além de testes de vestibulares atualizados, selecionados criteriosamente e ordenados por grau de dificuldade, acompanhados das respostas correspondentes. Há ainda uma série de artigos sobre História da Matemática relacionados aos temas abordados.

- IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz e Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. 2. v.

  No volume 1, a história dos algarismos é apresentada considerando a origem da representação simbólica dos números em diversas civilizações, como a dos gregos, dos romanos e dos maias. Já no volume 2, é explicado por que a civilização indiana é considerada o berço da numeração moderna, e são refeitos os caminhos que levaram o homem a inventar o computador.

- LIMA, Elon Lages. *Números e funções reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção Profmat).

  O foco desta obra é o trabalho com as funções de uma variável, estudadas sem o uso do cálculo infinitesimal. Essa abordagem elementar traz noções sobre conjuntos, a ideia geral de função e as diferentes categorias de números – naturais, inteiros, racionais e reais. Na segunda parte do livro, são apresentadas funções variadas: afins, quadráticas, polinomiais, trigonométricas, exponenciais e logarítmicas.

Lista de siglas

ENEM: Exame Nacional do Ensino Médio

FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas

OBM: Olimpíada Brasileira de Matemática

UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina

UFF-RJ: Universidade Federal Fluminense

UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais

UFPA: Universidade Federal do Pará

UFPB: Universidade Federal da Paraíba

Reprodução proibida. Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998.

MODERNA

ISBN 978-65-5779-081-6

MODERNA