ÊNIO SILVEIRA

8º ano

MANUAL DO PROFESSOR

Desafios da Matemática com Ênio Silveira

Componente curricular: MATEMÁTICA

MODERNA

ÊNIO SILVEIRA
Engenheiro mecânico pela Universidade Federal do Ceará.
Engenheiro eletricista pela Universidade de Fortaleza.
Diretor de escola particular.
Autor de obras didáticas de Matemática.

Desafios da Matemática com Ênio Silveira

8º ano

MANUAL DO PROFESSOR

Componente curricular: MATEMÁTICA

1ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay, Mateus Coqueiro Daniel de Souza
Edição de texto: Carlos Eduardo Marques, Daniel Vitor Casartelli Santos, Mateus Coqueiro Daniel de Souza, Paulo César Rodrigues dos Santos
Assistência editorial: Cintia Alessandra Valle Burkert Machado, Kátia Takahashi, Maria Ângela de Camargo, Selene Coletti, Thaís Marinho Ramalho de Souza Garcia
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Noctua Art, Vinícius Rossignol Felipe
Capa: Douglas Rodrigues José, Bruno Tonel, Daniela Cunha, Apis *Design*
Foto: Adolescentes jogando *games* de computador.
FG Trade/Getty Images
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Editoração eletrônica: Grapho Editoração, Pavoá Editorial
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero
Revisão: Cecília Oku, Desirée Aguiar, Denise de Almeida, Dirce Y. Yamamoto, Márcia Leme, ReCriar Editorial, Renato da Rocha
Coordenação de pesquisa iconográfica: Flávia Aline de Morais
Pesquisa iconográfica: Pâmela Nogueira, Pamela Rosa
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silveira, Ênio
Desafios da matemática com Ênio Silveira : 8º ano: manual do professor. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-16-13556-0

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

22-114737 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

A imagem da capa mostra adolescentes jogando *games* de computador. Um *game* é um sistema no qual jogadores se engajam em um desafio definido por regras, interatividade e *feedback*. Apreciado por crianças e adolescentes, os *games* exploram o raciocínio lógico e o pensamento computacional.

Apresentação

Professor, esta Coleção tem como objetivo principal servir de apoio didático para suas aulas. No *Manual do Professor*, você encontra algumas reflexões sobre o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Observe que falamos "de ensino e de aprendizagem", separadamente, pois entendemos que são processos que se articulam, mas são distintos: processo de ensino mais processo de aprendizagem. Na escola, buscamos sempre que ambos andem juntos, complementem-se, e esse pressuposto guia a organização desta Coleção. Lembramos você, professor, que a escolha do livro didático deve ser feita sempre com base no conhecimento de sua realidade escolar. E, já que escolheu trabalhar com esta Coleção, queremos ajudá-lo a atingir seus objetivos didáticos, valorizando a autonomia pedagógica na organização e gestão de suas aulas.

Partimos do pressuposto que o professor é o grande mediador na relação entre os estudantes e a Matemática escolar: ele planeja, organiza, elabora as situações de aprendizagem e faz a gestão do trabalho, sempre buscando que seus estudantes adquiram conhecimentos para serem aplicados em situações presentes e futuras, tanto no âmbito escolar como na vida fora dos muros da escola.

Esta Coleção atende aos requisitos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), abrangendo o desenvolvimento das competências e habilidades tanto nos conteúdos quanto nas atividades e seções complementares. A Coleção também traz à tona aspectos relacionados à interdisciplinaridade, aos temas contemporâneos transversais (TCTs), à utilização da história da Matemática, ao uso significativo das tecnologias digitais no ensino desta disciplina, ao pensamento computacional, entre outros.

Organizamos este *Manual do Professor* em duas partes:

- Na primeira parte (*Orientações gerais*), há considerações em relação à BNCC e ao modo como as competências e habilidades previstas neste documento são desenvolvidas na Coleção. São apresentadas também reflexões acerca da interdisciplinaridade, dos temas contemporâneos transversais, do uso de tecnologias digitais, do pensamento computacional, de avaliações e das características dos estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental com orientações de como ajudá-los a desenvolver as capacidades de criticar, criar, propor, argumentar e inferir. Há também sugestões de avaliações formativas relacionadas aos capítulos do *Livro do Estudante*, uma sugestão de avaliação de preparação para exames de larga escala, resoluções e comentários de todas as atividades propostas no *Livro do Estudante* e sugestões de leitura, *sites* e vídeos.
- Na segunda parte (*Orientações*), disposta em formato de U, há a reprodução comentada das páginas do *Livro do Estudante*. Nela, também são apresentadas as competências e habilidades da BNCC desenvolvidas em cada tópico ou seção, os objetivos traçados com a justificativa da pertinência de cada um e, também, sugestões de como diagnosticar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes e de como conduzir as aulas iniciais com base nesses diagnósticos. Além disso, estão presentes nestas *Orientações* sugestões de atividades interdisciplinares, de combate ao *bullying* e que auxiliam na promoção da saúde mental dos estudantes.

De modo geral, as orientações e sugestões deste *Manual do Professor* buscam auxiliar o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam de maneira significativa para uma formação mais integral, humana e crítica do estudante e do professor. Queremos que os estudantes pensem matematicamente, resolvam problemas diversos e concluam essa etapa da Educação Básica preparados para continuar seus estudos.

Sumário

Orientações gerais

A BNCC E O ENSINO DE MATEMÁTICA

A BNCC é um documento do Ministério da Educação (MEC) que define as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Tais aprendizagens são organizadas com base em competências e habilidades que direcionam a formação integral de todos os estudantes em suas variadas dimensões (intelectual, afetiva, ética, física, sociopolítica etc.).

Prevista nos principais documentos que regulam a educação do país, como a Constituição (1988), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN 9.394/1996) e o Plano Nacional de Educação (2014), sua aprovação e a implementação visam garantir uma educação de qualidade e mais igualitária a todos os estudantes brasileiros.

Na BNCC, a Matemática é considerada uma área do conhecimento essencial para que estudantes resolvam problemas, investiguem, estabeleçam conjecturas, troquem ideias e desenvolvam projetos em que possam aplicar os conceitos e procedimentos estudados de maneira crítica e significativa. Nesse sentido, é importante que as competências gerais e as competências específicas da área sejam mobilizadas por meio de atividades frequentes e intencionais. Colocar estudantes diante de situações que os convidem a usar a Matemática para desenvolver suas capacidades intelectuais, bem como as habilidades de observação, exploração, análise e reflexão, favorece a formação integral em suas variadas dimensões. Dessa forma, a BNCC é trabalhada de forma efetiva.

Na BNCC, o ensino e a aprendizagem da área são organizados em cinco Unidades temáticas que se correlacionam: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Observe o esquema a seguir.

UNIDADES TEMÁTICAS

NÚMEROS
Finalidade: desenvolver o pensamento numérico e aplicar conceitos da Matemática Financeira.
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: resolver problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas. Calcular porcentagens. Reconhecer, comparar e ordenar números reais.

ÁLGEBRA
Finalidade: desenvolver o pensamento algébrico (generalizar ideias matemáticas).
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: compreender os diferentes significados das letras em uma expressão. Generalizar propriedade. Investigar a regularidade de uma sequência numérica. Estabelecer a variação entre duas grandezas. Relacionar variável e função; incógnita e equação. Resolver equações e inequações de maneira algébrica e gráfica. Traduzir uma situação dada em diferentes linguagens.

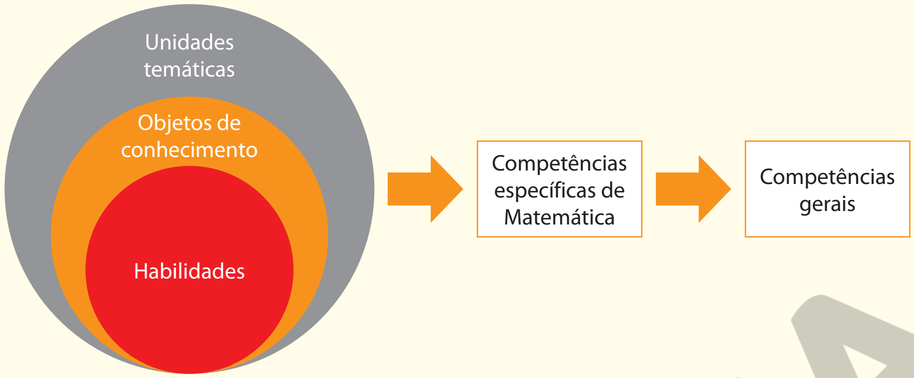
GEOMETRIA
Finalidade: desenvolver o pensamento geométrico (investigar propriedades, estabelecer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes).
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: estudar as figuras geométricas e suas propriedades. Desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Reconhecer e representar figuras simétricas.

GRANDEZAS E MEDIDAS
Finalidade: estudar as relações métricas e articular os pensamentos numérico, geométrico e algébrico.
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: resolver problemas envolvendo diferentes grandezas (comprimento, tempo, massa, área, volume, capacidade etc.) e suas respetivas unidades de medida. Explorar as unidades de medida de armazenamento de computadores.

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
Finalidade: estudar a incerteza e o tratamento de dados.
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas, incluindo medidas de tendência central e tabelas e/ou gráficos de diferentes tipos.

Para desenvolver o que se espera em cada unidade temática, a BNCC prevê um conjunto de objetos de conhecimento e habilidades relacionadas. É o trabalho com estes objetos e habilidades que vai assegurar o desenvolvimento das competências específicas de Matemática que, por sua vez, promoverá o desenvolvimento das competências gerais, conforme mostra o esquema a seguir.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Relação entre unidades temáticas, objetos de conhecimento, habilidades e competências.

A seguir, vamos nos debruçar sobre as competências gerais, as competências específicas de Matemática e as habilidades do 8º ano.

Competências gerais

A BNCC elenca um conjunto de dez competências gerais que devem ser desenvolvidas de forma integrada aos componentes curriculares, ao longo de toda a Educação Básica. Define-se competência como um atributo que permite mobilizar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, permitindo o pleno exercício da cidadania. Esse direcionamento está ligado aos princípios éticos, estéticos e políticos das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) e da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB).

Reproduzimos a seguir o texto das competências gerais, segundo a BNCC.

COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Competência geral 1	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
Competência geral 2	Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
Competência geral 3	Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
Competência geral 4	Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
Competência geral 5	Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
Competência geral 6	Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
Competência geral 7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
Competência geral 8	Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo- se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
Competência geral 9	Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
Competência geral 10	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9-10. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

Podemos sintetizar as 10 competências gerais da BNCC, por meio do seguinte esquema:

1. Conhecimento
Valorizar e utilizar os conhecimentos sobre o mundo físico, social, cultural e digital.

2. Pensamento científico, crítico e criativo
Exercitar a curiosidade intelectual e utilizar as ciências com criticidade e criatividade.

3. Repertório cultural
Valorizar as diversas manifestações artísticas e culturais.

4. Comunicação
Utilizar diferentes linguagens.

5. Cultura digital
Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de forma crítica, significativa e ética.

6. Trabalho e projeto de vida
Valorizar e apropriar-se de conhecimentos e experiências.

7. Argumentação
Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis.

8. Autoconhecimento e autocuidado
Conhecer-se, compreender-se na diversidade humana e apreciar-se.

9. Empatia e cooperação
Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação.

10. Responsabilidade e cidadania
Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação.

CAIO MARTINELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Esquema adaptado do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)

Competências específicas de Matemática

A BNCC estabelece também as competências específicas para cada componente curricular. Em articulação com as competências gerais da Educação Básica descritas na BNCC, a Matemática deve garantir aos estudantes o desenvolvimento das seguintes competências específicas.

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL	
Competência específica 1	Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
Competência específica 2	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
Competência específica 3	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
Competência específica 4	Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
Competência específica 5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
Competência específica 6	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
Competência específica 7	Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
Competência específica 8	Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 267. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

Habilidades

As habilidades presentes na BNCC dizem respeito às aprendizagens essenciais que devem ser garantidas aos estudantes nos diferentes contextos escolares. O desenvolvimento delas visa promover a igualdade educacional, levando em consideração as particularidades do meio no qual cada escola está inserida.

O quadro a seguir relaciona cada unidade temática com seus objetos de conhecimento e as habilidades essenciais de Matemática a serem desenvolvidas no 8º ano, segundo a BNCC.

Unidades temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Notação científica	**(EF08MA01)** Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
	Potenciação e radiciação	**(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
	O princípio multiplicativo da contagem	**(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
	Porcentagens	**(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
	Dízimas periódicas: fração geratriz	**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
Álgebra	Valor numérico de expressões algébricas	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$	**(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
	Sequências recursivas e não recursivas	**(EF08MA10)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.
		(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	**(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
		(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
Geometria	Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	**(EF08MA14)** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
	Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	**(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.
		(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

Unidades temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	**(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.
Grandezas e medidas	Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
	Volume de bloco retangular Medidas de capacidade	**(EF08MA20)** Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.
		(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.
Probabilidade e estatística	Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	**(EF08MA22)** Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
	Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados	**(EF08MA23)** Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
	Organização dos dados de uma variável contínua em classes	**(EF08MA24)** Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
	Medidas de tendência central e de dispersão	**(EF08MA25)** Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.
	Pesquisas censitária ou amostral Planejamento e execução de pesquisa amostral	**(EF08MA26)** Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).
		(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 312-315. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

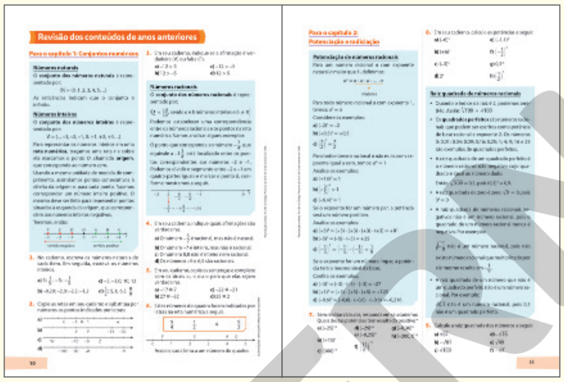
A BNCC E A COLEÇÃO

Esta Coleção é organizada em quatro volumes. Cada volume está dividido em quatro Unidades compostas de dois ou mais capítulos. Os volumes e os capítulos foram estruturados de modo a favorecer o desenvolvimento das competências gerais e específicas bem como das habilidades propostas para a Matemática, indicadas na BNCC.

As competências gerais e específicas de Matemática na Coleção

Ao longo da Coleção, o desenvolvimento das competências gerais e específicas de Matemática é proporcionado de diferentes maneiras, por meio de textos teóricos, atividades, seções especiais, boxes etc. A seguir, oferecemos informações detalhadas sobre as seções e os boxes da Coleção e, também, sobre como as competências gerais e específicas podem ter o seu desenvolvimento favorecido na proposta de cada um.

Seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*

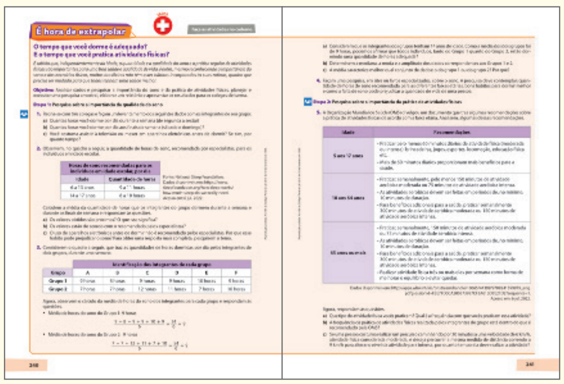


Presente no início de cada volume, esta seção traz resumos seguidos de atividades dos principais conceitos e procedimentos estudados em anos anteriores. A seção é estruturada para cada um dos capítulos do *Livro do Estudante* a fim de que o professor explore seu conteúdo antes de iniciar o trabalho com cada capítulo. No entanto, caso o professor julgue oportuno, o conteúdo da seção também pode ser todo trabalhado no início do ano letivo. É importante enfatizar que o professor pode e deve se sentir à vontade para adaptar o conteúdo da seção à realidade e às necessidades da turma e da escola.

Competências gerais: a seção traz atividades que exploram diferentes linguagens (competência geral **4**). Algumas delas incentivam a argumentação e o diálogo e oferecem aos estudantes a oportunidade de exercitar a empatia (competências gerais **7** e **9**).

Competências específicas: algumas atividades propostas desenvolvem o raciocínio lógico e o espírito de investigação (competência específica **2**). Outras permitem aos estudantes relacionar conceitos de diferentes unidades temáticas (competência específica **3**), utilizar processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas (competência específica **5**) e empregar distintos registros e linguagens (competência específica **6**). Além disso, são propostas atividades que estimulam a interação dos estudantes com seus pares e que os colocam diante de situações em que devem investigar, organizar, representar e comunicar informações (competências específicas **4** e **8**).

Abertura de Unidade e seção *É hora de extrapolar*



A abertura de Unidade apresenta a lista de capítulos que a integram, além de uma cena acompanhada de algumas questões que têm por objetivo instigar a curiosidade dos estudantes para os assuntos que serão estudados na Unidade. A cena e as questões estão relacionadas com o conteúdo da seção *É hora de extrapolar*, que fecha a Unidade. As questões não precisam ser respondidas em um primeiro momento, pois elas serão retomadas ao final da Unidade para que os estudantes reflitam sobre o que aprenderam.

Competências gerais: as aberturas de Unidade estimulam a curiosidade, a reflexão e o diálogo entre os estudantes (competências gerais **2** e **9**). Alguns dos contextos trazidos possibilitam a valorização da diversidade de saberes e vivências (competência geral **6**), a argumentação com base em fatos, dados e informações confiáveis (competência geral **7**) e levam os estudantes a refletir e cuidar da sua saúde física e emocional (competência geral **8**).

Competências específicas: as situações e questões trazidas nas aberturas evidenciam como a Matemática e as outras áreas do conhecimento se integram (competência específica **3**) e oferecem aos estudantes a oportunidade de fazer observações de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais (competência específica **4**). As questões também fazem com que os estudantes enfrentem situações-problema em múltiplos contextos (competências específicas **2** e **6**) e utilizem ferramentas matemáticas para resolvê-las (competência específica **5**), bem como promovem a interação deles com os colegas (competência específica **8**).

Ao final de cada Unidade, é proposta a seção *É hora de extrapolar*. Nela, os estudantes são convidados a realizar um trabalho colaborativo, como um pequeno projeto explorando a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um produto final (embalagens, cartazes, obras de arte e revistas), que será compartilhado com a turma ou com a comunidade escolar. Com a finalidade de organizar o trabalho, a seção é dividida em etapas, as quais promovem:

- entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado;
- pesquisa individual ou coletiva;
- elaboração, em grupo, do produto proposto;
- apresentação e exposição do produto;
- reflexão sobre a atuação do grupo e síntese do trabalho.

É nesta seção, ainda, que são retomadas as questões feitas na abertura de Unidade correspondente.

As etapas de pesquisa e elaboração do produto podem ser feitas extraclasse. Será necessário que o professor oriente-os com relação ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho.

É recomendável trabalhar a seção depois de estudar os capítulos, mas, se o professor preferir trabalhar as etapas da seção à medida que os capítulos forem estudados, deverá atentar para os conhecimentos prévios necessários.

Competências gerais: os trabalhos propostos na seção possibilitam aos estudantes investigar, refletir, analisar criticamente, imaginar e criar (competência geral **2**). Em algumas seções eles terão a oportunidade de explorar obras de arte e pesquisar sobre diferentes manifestações culturais (competência geral **3**). Na seção, os estudantes também utilizam distintas linguagens para elaborar o produto final ou expô-lo (competência geral **4**); podem recorrer à internet para pesquisar ou disseminar informações (competência geral **5**); argumentam com base em fatos, dados e informações confiáveis (competência geral **7**) e exercitam a empatia e o diálogo (competência geral **9**).

Competências específicas: a seção desperta o espírito investigativo, a capacidade de argumentar e traz à tona a relação entre os diferentes campos da Matemática e também da Matemática com outras áreas do conhecimento, (competências específicas **2** e **3**). Para concretizar alguns trabalhos, os estudantes deverão utilizar processos e ferramentas matemáticas e enfrentar situações-problema em múltiplos contextos (competências específicas **5** e **6**). Algumas das propostas abordam assuntos de urgência social e dão aos estudantes a oportunidade de discuti-las (competências específicas **7** e **8**).

Seção *Trocando ideias*

A seção *Trocando ideias* "abre" cada um dos capítulos e traz à tona temas do cotidiano que visam despertar o interesse dos estudantes para o que será estudado no capítulo e também busca, por meio de questões, identificar os conhecimentos prévios deles. A ideia é que as questões sejam discutidas coletivamente.

Competências gerais: os contextos e as questões propostos na seção despertam a curiosidade dos estudantes (competência geral **2**), permitem a eles valorizar diferentes manifestações artísticas e culturais (competência geral **3**) e, em alguns casos, mobilizam diferentes linguagens (competência geral **4**). Há também propostas que proporcionam aos estudantes argumentarem com base em dados e informações confiáveis (competência geral **7**) e refletem sobre situações relacionadas à saúde física e emocional (competência geral **8**). Além disso, incentiva o diálogo (competência geral **9**).

Competências específicas: a seção tem como características promover a interação entre os estudantes (competência específica **8**), despertar a capacidade de argumentar (competência específica **2**) e trazer à tona a relação entre os campos da Matemática e também entre a Matemática e outras áreas (competências específicas **3**). Os estudantes também analisam aspectos quantitativos e qualitativos do cotidiano (competência específica **4**) e utilizam ferramentas matemáticas para responder a alguma questão proposta (competência específica **5**). A mobilização de diferentes registros e linguagens é exigência de algumas propostas que exploram, por exemplo, a leitura e a interpretação de gráficos e fluxogramas (competência específica **6**).

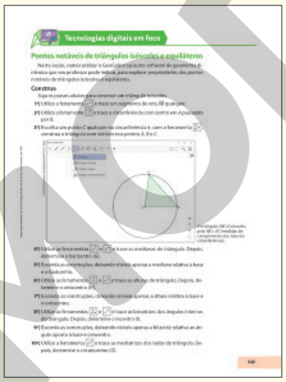
Seção *Lendo e aprendendo*

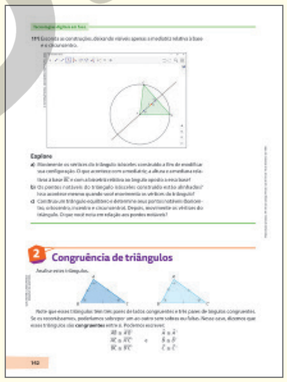
A seção *Lendo e aprendendo* aparece no decorrer das Unidades e traz textos de jornais, revistas ou da internet que abordam temas atuais e de urgência social. O objetivo da seção é desenvolver a compreensão leitora por meio do desenvolvimento de vocabulário, fluência em leitura oral, compreensão de textos e produção de escrita. Além disso, a seção leva os estudantes a refletir sobre os temas tratados e discuti-los.

Competências gerais: os estudantes lidam com diferentes manifestações artísticas (competência geral **3**), valorizam a diversidade de saberes e vivências culturais (competência geral **6**), argumentam com base em fatos, dados e informações confiáveis (competência geral **5**) e exercitam a empatia, o diálogo e a cooperação (competência geral **9**).

Competências específicas: a seção contribui para que os estudantes compreendam as relações entre conceitos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento (competência específica **3**) e para que discutam diferentes questões com seus pares (competência específica **8**).

Seção *Tecnologias digitais em foco*



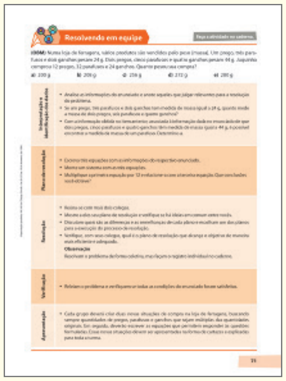


A seção *Tecnologias digitais em foco* aparece no decorrer de alguns capítulos e explora conteúdos de Matemática por meio de tecnologias digitais, como *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, calculadoras etc. A seção é, em geral, dividida em duas etapas denominadas *Construa* e *Explore*. Em *Construa*, são apresentados passos para que os estudantes construam, por exemplo, figuras geométricas. Em *Explore*, eles utilizam as ferramentas do *software*, para investigar e testar hipóteses a respeito de alguma característica ou propriedade da figura que construíram.

Competências gerais: o uso de tecnologias digitais exercita a curiosidade intelectual dos estudantes e os coloca diante de situações em que devem investigar, refletir e analisar (competências gerais **2** e **5**). A seção também permite que os estudantes exercitem a empatia e o diálogo (competência geral **9**).

Competências específicas: a seção ajuda os estudantes a desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de argumentar (competência específica **2**). Ainda por meio desta seção, os estudantes utilizam as tecnologias digitais para resolver problemas e validar resultados (competência específica **5**) e lidam com diferentes registros e linguagens (competência específica **6**). A interação dos estudantes com seus pares ocorre principalmente nas tarefas propostas na etapa *Explore* (competência específica **8**).

Seção *Resolvendo em equipe*

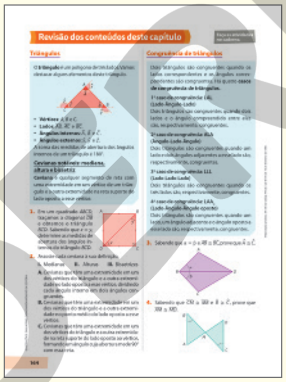


Alguns capítulos apresentam esta seção que destaca as etapas que encaminham a resolução de problemas, as quais devem ser analisadas e discutidas com os estudantes. O trabalho em equipe é muito importante sob diversos pontos de vista: permite ao estudante aprender com os colegas, explicitar conhecimentos e dúvidas, facilitando a ação do professor, e validar o raciocínio construído por meio do diálogo com os colegas. Além disso, saber trabalhar em equipe é uma competência exigida nas mais diversas profissões.

Competências gerais: a seção contribui para que os estudantes resolvam problemas (competência geral **2**), utilizem diferentes linguagens (competência geral **4**), argumentem com base em dados e informações confiáveis (competência geral **7**) e exercitem a empatia (competência geral **9**). É preciso, ainda, que diante da pluralidade de ideias, os estudantes sejam flexíveis (competência geral **10**).

Competências específicas: os problemas a serem resolvidos desenvolvem o raciocínio lógico (competência específica **2**), alguns envolvem conceitos e procedimentos de diferentes campos da Matemática (competência específica **3**) e outros precisam de processo e ferramentas matemáticas para serem solucionados (competência específica **5**). Os contextos dos problemas são diversos e envolvem diferentes registros (competência específica **6**). Além disso, o encaminhamento proposto incentiva os estudantes a compartilhar suas estratégias e conclusões (competência específica **2**).

Seção *Revisão dos conteúdos deste capítulo*

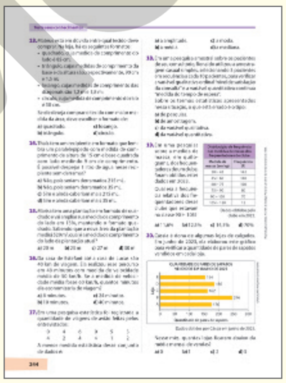


Presente no final de cada capítulo, esta seção traz resumos seguidos de atividades dos principais conceitos e procedimentos estudados no capítulo. As revisões e atividades podem ser exploradas aos poucos, conforme se avança no estudo do capítulo, ou podem ser trabalhadas ao final com o objetivo de verificar o que os estudantes aprenderam e as principais dificuldades que ainda enfrentam.

Competências gerais: a seção traz atividades que exploram diferentes linguagens (competência geral **4**). Algumas delas incentivam a argumentação e o diálogo e oferecem aos estudantes a oportunidade de exercitar a empatia (competências gerais **7** e **9**).

Competências específicas: na seção, são propostas atividades que desenvolvem o raciocínio lógico e o espírito de investigação (competência específica **2**), outras que demandam a utilização de processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas (competência específica **5**) e ainda outras que fazem com que os estudantes mobilizem diferentes registros e linguagens (competência específica **6**).

Seção *Teste seus conhecimentos*



Presente no final de cada volume, esta seção propõe questões de múltipla escolha com o objetivo de avaliar os conhecimentos adquiridos pelos estudantes no decorrer do ano letivo e prepará-los para a realização de exames de larga escala.

Competências gerais: algumas questões da seção possibilitam aos estudantes refletir e analisar (competência geral **2**) e outras utilizam diferentes registros (competência geral **4**). São propostas ainda questões em que os estudantes devem avaliar dados e informações confiáveis (competência geral **7**).

Competências específicas: questões que estimulam o raciocínio lógico (competência específica **2**) e que envolvem conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (competência específica **3**) estão presentes nesta seção. Além disso, são propostos problemas cuja solução se dá via utilização de processos e ferramentas matemáticas e também problemas envolvendo diferentes registros (competências específicas **5** e **6**).

Boxe *Veja que interessante*

Boxe que complementa e enriquece o conteúdo estudado. Ao final, é proposta uma atividade para o estudante.

Competências gerais: o boxe traz temas diversos relacionados ao mundo físico, social, cultural e digital (competência geral **1**), exercita a curiosidade dos estudantes por meio de atividades sobre esses temas (competência geral **2**) e, em algumas propostas, os estudantes têm a oportunidade de apreciar manifestações artísticas e culturais (competência geral **3**). O boxe possibilita, ainda, em alguns momentos a valorização da diversidade de saberes (competência geral **6**) e coloca os estudantes diante de situações em que devem argumentar com base em informações confiáveis (competência geral **7**). Algumas atividades solicitam aos estudantes que dialoguem com os colegas, e isso permite que desenvolvam a empatia e a capacidade de agirem com flexibilidade (competências gerais **9** e **10**).

Competências específicas: alguns textos desse boxe possibilitam aos estudantes reconhecer como a Matemática contribui para solucionar problemas (competências específicas **1** e **2**). Outros trazem à tona a relação da Matemática com as demais áreas do conhecimento (competência específica **3**), e a atividade promove a interação entre os estudantes (competência específica **8**).

Boxe *Um pouco de história*

Boxe que traz textos relacionados à história da Matemática para contextualizar alguns assuntos. Ao final, é proposta uma atividade para o estudante.

Competências gerais: é inerente à proposta desse boxe a valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos (competência geral **1**). A curiosidade, a investigação e a resolução de problemas são incentivados por meio das atividades propostas (competência geral **2**). Os estudantes têm ainda a oportunidade de argumentar e dialogar com base em fatos e informações confiáveis a respeito da história da Matemática (competências gerais **7** e **10**).

Competências específicas: os textos e as atividades propostos no boxe têm por objetivo levar os estudantes a reconhecer a Matemática como uma ciência viva que é resultado das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos (competência específica **1**). A capacidade de argumentar (competência específica **2**), de relacionar os campos da Matemática (competência específica **3**), de lidar com diferentes registros e linguagens (competência específica **6**) e de escultar os colegas com atenção e empatia (competência específica **8**) são capacidades que podem ser desenvolvidas por meio das propostas desse boxe.

O quadro a seguir mostra as competências gerais e específicas de Matemática desenvolvidas em cada capítulo do volume 8 desta Coleção.

QUADRO DAS COMPETÊNCIAS GERAIS E ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA DO VOLUME 8

Capítulos	Competências gerais	Competências específicas
1 – Conjuntos numéricos	1, 3, 4, 7 e 9.	1, 3, 4 e 8.
2 – Potenciação e radiciação	9.	3, 5 e 8.
3 – Sistemas de equações do 1º grau	2, 4, 5, 9 e 10.	2, 3, 5, 6, 7 e 8.
4 – Ângulos e transformações geométricas	2, 5, 6, 7, 9 e 10.	2, 3 e 8.
5 – Polígonos	2, 4, 3, 6, 9 e 10.	5 e 8.
6 – Probabilidade	4, 7, 9 e 10.	5, 6, 7 e 8.
7 – Triângulos e quadriláteros	2, 3, 5, 6 e 9.	2, 3 e 8.
8 – Área, volume e capacidade	2, 4, 6, 7 e 9.	2 e 8.
9 – Equações do 2º grau	2, 4, 8 e 9.	2, 3, 5, 6 e 8.
10 – Grandezas e proporcionalidade	2 e 9.	2 e 8.
11 – Medidas de tendência central e pesquisa estatística	1, 7 e 9.	1, 2, 3, 4 e 8.
12 – Gráficos estatísticos	2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.	2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.

As habilidades da BNCC na Coleção

A Matemática trabalhada nos Anos Finais do Ensino Fundamental não tem um fim em si mesma; além de aprofundar e sistematizar as aprendizagens anteriores dos estudantes, abre as portas para novas aprendizagens, considerando as diversas áreas do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento intelectual do estudante.

Nesta Coleção, a seleção dos conteúdos foi feita nessa perspectiva, e as abordagens propostas pressupõem o desenvolvimento de atitudes relacionadas à formação cidadã do estudante. Escolhemos abordar conceitos e procedimentos (seleção e abordagem) tanto para aprofundar e retomar os conhecimentos prévios dos estudantes quanto para iniciar a aquisição de novos conhecimentos a serem consolidados em anos posteriores de escolaridade.

O professor pode acrescentar atividades, questionamentos, de modo a atender as especificidades de seus estudantes: o livro didático não pode ser uma amarra para o professor, mas, sim, um facilitador de seu trabalho.

O quadro a seguir apresenta uma visão geral de como as habilidades do 8º ano foram desenvolvidas em cada Unidade, capítulo a capítulo.

HABILIDADES DO 8º ANO		
Unidades	**Capítulos**	**Habilidades**
1	1 – Conjuntos numéricos	EF08MA04, EF08MA05, EF08MA10 e EF08MA11.
	2 – Potenciação e radiciação	EF08MA01 e EF08MA02.
	3 – Sistemas de equações do 1º grau	EF08MA06, EF07MA07 e EF08MA08.
2	4 – Ângulos e transformações geométricas	EF08MA15, EF08MA17 e EF08MA18.
	5 – Polígonos	EF08MA15 e EF08MA16.
	6 – Probabilidade	EF08MA03 e EF08MA22.
3	7 – Triângulos e quadriláteros	EF08MA14 e EF08MA15.
	8 – Área, volume e capacidade	EF08MA06, EF08MA19, EF08MA20 e EF08MA21.
	9 – Equações do 2º grau	EF08MA06 e EF08MA09.
4	10 – Grandezas e proporcionalidade	EF08MA12 e EF08MA13.
	11 – Medidas de tendência central e pesquisa estatística	EF08MA25 e EF08MA26.
	12 – Gráficos estatísticos	EF08MA04, EF08MA23, EF08MA24 e EF08MA27.

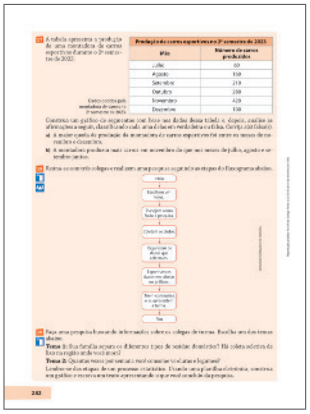
Exemplos concretos de trabalho com competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC na Coleção

Uma das finalidades do trabalho com as habilidades é assegurar o desenvolvimento das competências específicas de Matemática que, por sua vez, podem promover o desenvolvimento de competências gerais.

O quadro a seguir mostra, por meio de exemplos concretos da Coleção, a diferença de se trabalhar com competências gerais, específicas e habilidades.

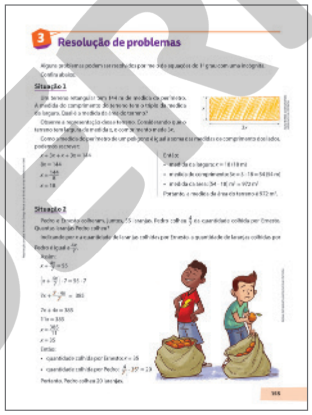
Página 282 do capítulo 12 do volume 6

Nas **atividades 18** e **19** da página 282, os estudantes vão realizar uma pesquisa estatística, o que permite o desenvolvimento da habilidade **EF06MA33**. Ambas as propostas envolvem o uso de tecnologias digitais para a organização dos dados coletados o que favorece o desenvolvimento da competência específica **5**. Além disso, as pesquisas podem estar relacionadas à questões de urgência social e para serem realizadas é necessário que os estudantes interajam com seus pares, o que pressupõe o desenvolvimento das competências específicas **7** e **8**. Por meio destas competências específicas desenvolvem-se as competências gerais **7**, **9** e **10**, que versam sobre argumentação, exercício da empatia e agir com flexibilidade e resiliência.



Página 155 do capítulo 6 do volume 7

No tópico *Resolução de problemas* são apresentados exemplos de problemas que podem ser resolvidos por meio de equações do 1º grau com uma incógnita. Também são propostos problemas para os estudantes resolverem e isso favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA18**. Esses problemas permitem aos estudantes mobilizar conceitos e procedimentos de diferentes campos da Matemática, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **3**. A competência específica **5** também tem o seu desenvolvimento favorecido porque os problemas propostos são modelados e resolvidos por meio de equações. Já a variedade de problemas propostos é o que contribui para o desenvolvimento da competência específica **6**. Essas competências específicas, por sua vez, contribuem para que as competências gerais **2** e **4** tenham o seu desenvolvimento favorecido, uma vez que estão relacionadas à resolução de problemas e ao uso de diferentes linguagens, respectivamente.

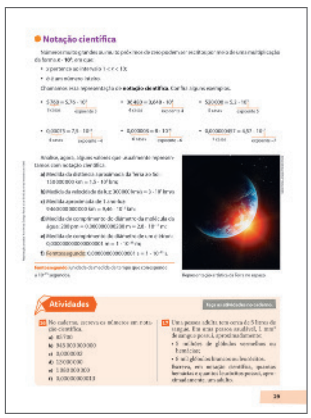


Página 77 do capítulo 4 do volume 8

O estudo das composições de transformações geométricas desenvolve a habilidade **EF08MA18**. Por meio desse estudo, os estudantes têm a oportunidade de verificar como Matemática e Arte se relacionam, contribuindo para que a competência específica **3** tenha o seu desenvolvimento favorecido. É por meio dessa competência que se desenvolvem as competências gerais **1**, **2**, **3**, **4** e **6**.

Página 29 do capítulo 1 do volume 9

Ao trabalhar a representação dos números em notação científica, desenvolve-se a habilidade **EF09MA04**. O trabalho com essa habilidade possibilita aos estudantes reconhecer como esse conceito é empregado para expressar números muito grandes ou muito pequenos em diversas áreas como Astronomia e Química, o que contribui para o desenvolvimento da competência específica **3** de Matemática, que, por sua vez, contribui para o desenvolvimento das competências gerais **4** e **7**.



OS ESTUDANTES NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

O estudante que se encontra nos Anos Finais do Ensino Fundamental está inserido na transição entre a infância e a adolescência, período marcado por intensas e profundas mudanças nos aspectos físico, psicológico, social e emocional. Ele é um sujeito "em desenvolvimento, com singularidades e formações identitárias e culturais próprias, que demandam práticas escolares diferenciadas, capazes de contemplar suas necessidades e diferentes modos de inserção social" (BRASIL, 2018, p. 60).

Por isso, é preciso compreendê-lo, e para tanto é necessário aprender a ouvi-lo por meio da comunicação afetiva, em um movimento de aproximação, trocando experiências, vivências e histórias, em um ressignificar do processo de ensino e de aprendizagem.

É importante também estar atento às interações que eles estabelecem com os grupos sociais dos quais fazem parte, o que permite entender seus modos de agir e suas necessidades.

Assim, o ambiente escolar precisa refletir o clima de diálogo, do saber ouvir, da empatia e da boa convivência, combatendo toda forma de violência, como a prática do *bullying*, comportamento intencional e agressivo na forma de insultos, xingamentos, apelidos, ameaças, difamação, isolamento e exclusão social. Enfim, fazer do ambiente escolar um espaço inclusivo em todos os sentidos, pensando na formação do estudante como um sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem e agente de transformação da sociedade.

A fim de garantir que isso aconteça diante da heterogeneidade das turmas, o professor precisa estar atento a tais necessidades, revendo sua prática e refletindo sobre as estratégias utilizadas.

Uma das formas de se trabalhar com grupos grandes de forma mais eficaz é pensar nas tarefas matemáticas propostas. A professora Jo Boaler, autora do livro *Mentalidades Matemáticas*, propõe o uso das **tarefas abertas**, pois permite a participação de toda a turma. Segundo ela, toda tarefa pode ser transformada numa tarefa aberta desde que se pergunte aos estudantes "sobre suas diferentes maneiras de ver e resolver questões matemáticas e encorajando a discussão dos diversos modos de ver os problemas" (2018, p. 83). Outro ponto é oferecer **distintas opções de tarefa** com diferentes níveis e áreas da matemática envolvidos, as quais são escolhidas pelo estudante, e não pelo professor. É uma mudança de ponto de vista, o que possibilitará ao estudante escolher suas próprias rotas de aprendizagem, "encontrando conteúdo individualizado, acompanhado por oportunidades para o trabalho em grupo e colaboração" (2018, p. 104).

Esta mesma autora também sugere o uso das **estratégias equitativas** com o objetivo de tornar a Matemática mais inclusiva. Como forma de melhorar o desempenho coletivo, ela propõe que se ofereçam conteúdos matemáticos de alto nível a todos os estudantes, e não somente àqueles que sempre tiram as melhores notas. Isso está imbricado à outra ideia que precisa ser mudada: a de que somente alguns podem ter êxito na Matemática. Por isso, oportunizar a todos o pensar profundamente a Matemática. Isso implica, por sua vez, trazer experiências práticas, um currículo baseado em projetos e com aplicabilidade na vida real, além de trabalhar colaborativamente, fato que precisa ser ensinado. Trabalhar em grupo é fundamental para um bom desempenho matemático. E por último, é preciso rever a ideia do dever de casa. Para a autora, é necessário mudar a natureza das tarefas, fazendo "perguntas que os incentivem a pensar na Matemática da aula e focar as ideias fundamentais" que são importantes para a aprendizagem (2018, p. 94).

Isso tudo dialoga com outra proposta de trabalho, conectada com as atuais necessidades das diferentes turmas de estudante: as **metodologias ativas**, que, segundo José Moran (2019, p. 7), são "alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e de aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital)".

São exemplos de metodologias ativas a **aprendizagem baseada em problemas**, **aprendizagem baseada em projetos** e a **sala de aula invertida**.

- **Aprendizagem baseada em problemas:** é uma metodologia organizada por temas em torno de problemas e não de disciplinas. Nela os estudantes combinam teoria e prática para solucionar problemas.
- **Aprendizagem baseada em projetos:** é uma metodologia em que os estudantes se envolvem para resolver um problema ou desenvolver um projeto que tenha relação com a sua vida fora da sala de aula. Nesta metodologia, eles lidam com questões interdisciplinares e trabalham em equipe.
- **Sala de aula invertida:** o estudante se apropria do conteúdo previamente, e a aula torna-se o lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões e atividades práticas. O professor pode explorar as dificuldades dos estudantes em vez de expor o conteúdo da disciplina.

Em todas elas, os recursos tecnológicos podem ou não estar presentes. Quando presentes, o seu uso pode auxiliar o desenvolvimento da autonomia, empatia, protagonismo, responsabilidade, participação e cooperação.

Nesse contexto, é importante também levar em consideração elementos da cultura juvenil (*funk*, *hip-hop*, grafite, tatuagem, esportes, entre outros) e os comportamentos construídos por eles nos diferentes contextos sociais e culturais dos quais participam. Ao fazer isso, o processo de construção de conhecimento é enriquecido. Uma das formas de se trabalhar as culturas juvenis com os estudantes é por meio da aprendizagem baseada em projetos que, nesta Coleção, são sugeridos principalmente na seção *É hora de extrapolar*. Outras possibilidades são as discussões em sala de aula e os fóruns promovidos pela escola. Essa inserção da cultura juvenil ressignifica o espaço escolar, intensifica o processo de reflexão e crítica e promove a aprendizagem.

Assim, é possível vislumbrar possibilidades de aprendizagem para toda a turma, aguçando o olhar inclusivo do professor, que, ao acolher as dificuldades, busca meios para atendê-las, sem deixar de lado os diferentes níveis de conhecimento que habitam a sala de aula.

Capacidade de criticar, criar e propor

A criatividade e o pensamento crítico vêm ganhando cada vez mais espaço nas pautas de discussões sobre o que precisamos desenvolver nos estudantes. A criatividade tem relação com o potencial do ser humano para enfrentar o novo e seguir avançando na ciência, na tecnologia, na comunicação, na arte e em outras áreas do conhecimento. Pode ser compreendida também como a elaboração de ideias, processos e/ou produtos que apresentem algum grau de ineditismo, mesmo que seja para a própria pessoa. O pensamento crítico, por sua vez, é a competência de a pessoa se posicionar de modo racional e analítico diante de diferentes situações cotidianas.

A Matemática é uma área do conhecimento com potencial para desenvolver as capacidades de criticar, criar e propor, na medida em que coloca os estudantes diante de situações em que devem resolver problemas, generalizar propriedades, analisar dados, construir figuras etc. Para resolver um problema, por exemplo, o estudante precisa, primeiro, entender o enunciado e analisá-lo de maneira crítica. Depois, precisa imaginar como vai solucioná-lo. Em seguida, deve colocar em prática as ideias e, por fim, testar e refletir sobre o que fez.

O infográfico a seguir traz algumas orientações de como ajudar os estudantes a produzir análises críticas, criativas e propositivas:

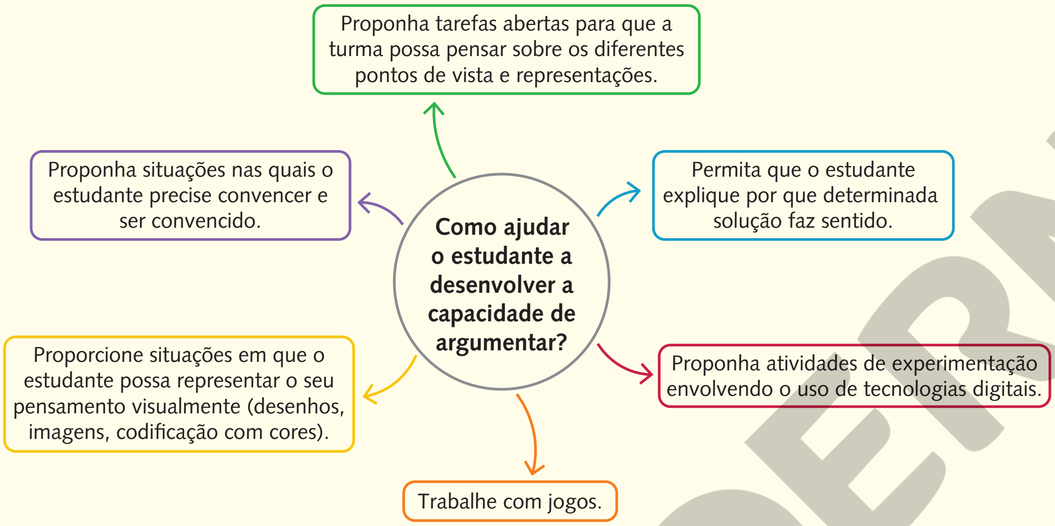
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Capacidade de argumentar

A aprendizagem em Matemática muitas vezes é um processo dialógico, ou seja, pressupõe o desenvolvimento da capacidade de argumentar. Na BNCC, essa capacidade está prevista nas competências específicas **2** e **4** de Matemática e na competência geral **7** e tem relação com a capacidade do indivíduo de explicar sua forma de pensar verbalmente ou por escrito.

Em Matemática, os estudantes são incentivados a argumentar quando são colocados diante de situações que devem resolver problemas, demonstrar propriedades, realizar experimentações, validar ou generalizar resultados, analisar erros, ler e interpretar dados representados em tabelas e/ou gráficos, construir figuras utilizando instrumentos de desenhos etc.

O esquema a seguir traz algumas sugestões de como auxiliar os estudantes a desenvolver a capacidade de argumentar.

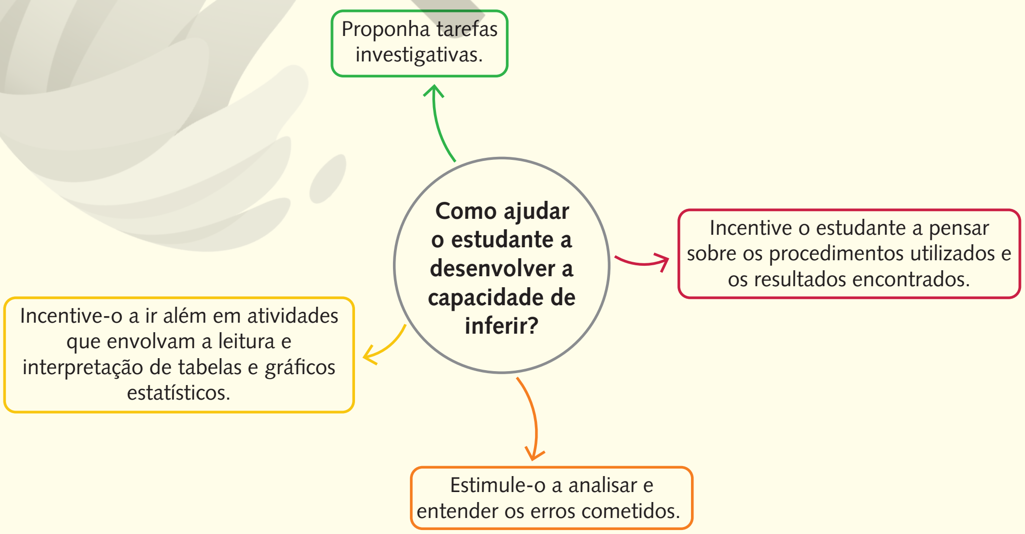


Capacidade de inferir

Inferir é tirar conclusões com base em uma ou mais proposições utilizando o raciocínio lógico. Essa é uma habilidade essencial que pode propiciar aprendizagens significativas não só na Matemática, como em outras áreas do conhecimento.

Em Matemática, os estudantes podem inferir informações embasadas em dados estatísticos representados em tabelas e/ou gráficos. Também podem analisar sequências numéricas e inferir a regra de formação delas ou, ainda, inferir quando realizam tarefas investigativas.

O esquema a seguir traz algumas sugestões de como contribuir para que os estudantes desenvolvam a capacidade de inferir.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

A INCLUSÃO DOS ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA

A Lei Brasileira de Inclusão de Pessoa com Deficiência instituiu o Estatuto da Pessoa com Deficiência (Lei 13.146/2015), garantindo, entre outros aspectos, o acesso à educação, e assegurando a inclusão escolar em todos os níveis e modalidades de ensino de acordo com os interesses e as necessidades de aprendizagem de cada um.

Com base nas premissas da lei, uma escola inclusiva é aquela que acolhe e inclui a todos sem discriminação, respeitando as diferenças e dificuldades, acreditando que todos podem aprender e que o processo de aprendizagem de cada pessoa é único, daí ser necessário adequar as estratégias e as condições para que todos possam aprender e desenvolver seu potencial.

As diferentes deficiências (visual, auditiva, intelectual, física, múltiplas) devem ser trabalhadas na sua especificidade para que possa ser garantida a aprendizagem de cada um. As altas habilidades ou superdotação também precisam de um olhar pontual.

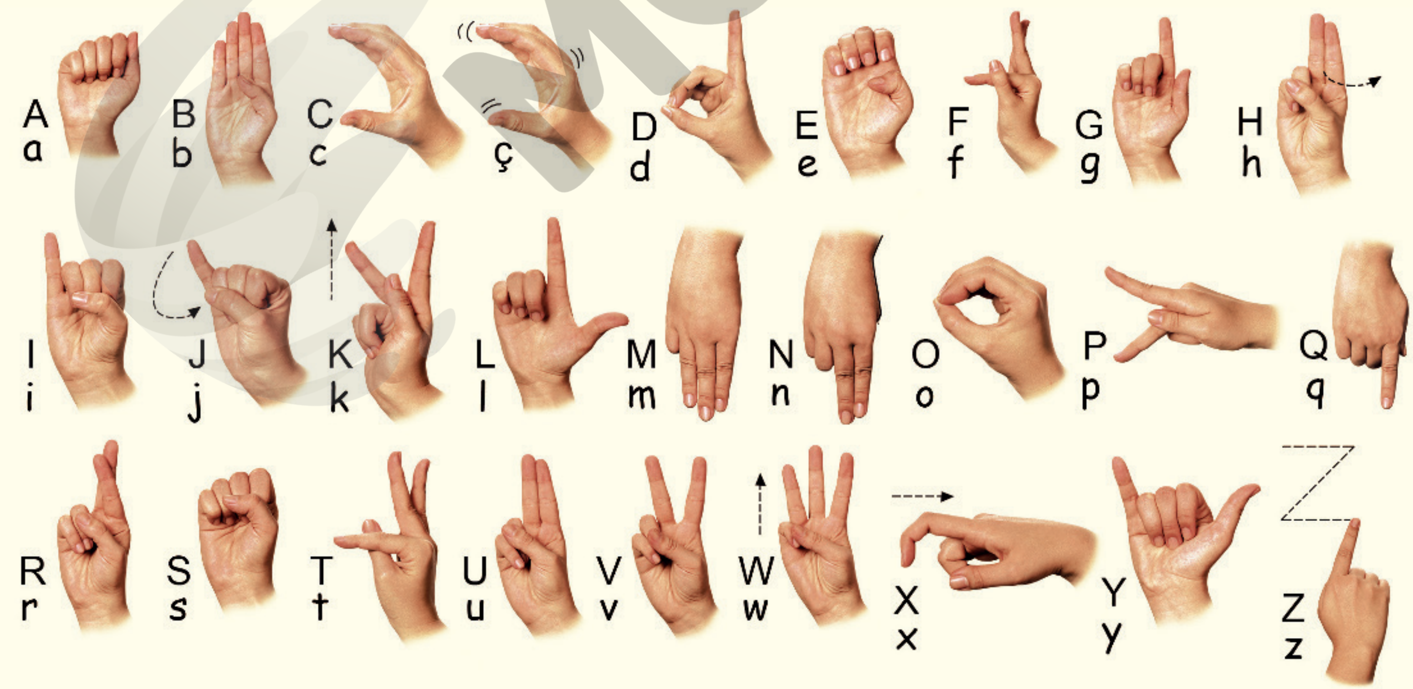
Nesse sentido, são grandes os desafios enfrentados pela escola como um todo e pela equipe escolar em particular. Em muitos casos, faz-se necessário a existência de equipe multidisciplinar para orientar as possibilidades de trabalho de acordo com uma necessidade específica. Além, é claro, do investimento na formação continuada do professor e de todos que vão trabalhar com determinado tipo de deficiência ou dificuldade a fim de criar uma rede de apoio, aprimorando os conhecimentos, flexibilizando os materiais e as intervenções com estes e os demais alunos.

Outro ponto a ser destacado refere-se à existência de um projeto pedagógico inclusivo, ou seja, que contenha ações que viabilizem a aquisição de materiais necessários ao atendimento de todas as diferenças bem como a flexibilização do currículo para acolher a realidade de cada um.

A contribuição do professor de Matemática

Cada professor dentro da sua especificidade e com a ajuda da equipe encontrará os melhores meios para adequar as propostas a fim de promover o desenvolvimento da aprendizagem de todos. Contudo, disponibilizar momentos de trocas entre os membros da equipe escolar permitirá aumentar as estratégias e os materiais que possam contribuir para as dificuldades referentes à inclusão.

O professor precisa estar atento ao tipo da deficiência para planejar seu trabalho e fazer as adequações necessárias. Em se tratando de deficiência auditiva, é possível o uso da Língua Brasileira de Sinais (Libras), instituída pela Lei 10.436/2002, a qual é uma combinação do movimento das mãos e de pontos no corpo e no espaço em que os sinais são feitos.



PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

Os algarismos também são representados por sinais. Como são menos, é mais fácil memorizá-los, e você poderá utilizá-los para as explicações:


0


1


2


3


4


5


6

RICARDO SIWEC/ARQUIVO DA EDITORA


7


8


9

O ideal seria que todo estudante com deficiência auditiva tivesse um intérprete de Libras que pudesse traduzir as aulas. Outra possibilidade para incluir estes estudantes, é a utilização de vídeos relativos aos conteúdos que contenham intérprete de Libras.

Quando se trata de deficiência visual, pode-se utilizar o Braille: sistema de sinalização ou de comunicação tátil. Este sistema possibilita escrever as atividades e complementar as explicações. Para tanto, é necessário o uso da máquina de escrever Braille. Vale lembrar que outros meios podem ser utilizados pelas pessoas com deficiência visual, como caracteres ampliados, linguagem escrita e oral, dispositivos multimídia, sistemas auditivos e os meios de voz digitalizados.

No que se refere às deficiências intelectuais, é preciso adequar as propostas tendo em vista a idade e as necessidades de cada estudante. O uso de materiais manipulativos é uma estratégia que contribui bastante nesses casos. Neles estão inclusos tampinhas, ábaco, colar de contas, material dourado para a contagem e a construção da ideia de número, canudos, linhas, palitos, massinha para a Geometria Espacial; geoplano, entre outros.

Jogos de tabuleiro, quebra-cabeças e jogos de memória são também ferramentas que possibilitam o trabalho de diferentes conteúdos matemáticos e podem ser adequados aos diferentes graus de dificuldades da turma. As propostas precisam conter desafios possíveis de serem executados, aumentando, posteriormente, as regras, os números de participantes e, até mesmo, o grau de complexidade.

Também, há muitos *softwares* e programas que podem ser utilizados e que tornam ainda mais significativo o processo de ensino e de aprendizagem quando se trata da inclusão.

Além disso, o uso das metodologias ativas pode ser bastante inclusivo, uma vez que poderá fortalecer o protagonismo dos estudantes por meio de "desafios, atividades e jogos colaborativos; uso de tecnologias; realização de projetos; aprendizado através de problemas e situações reais (informação contextualizada); e a sala de aula invertida" (PAVÃO, A. C. O.; PAVÃO, S. M. O., 2021, p. 30). Cabe a cada professor adequar as propostas de acordo com a realidade de sua turma.

A inclusão é um direito. É importante acolher os estudantes com deficiência e dar a eles todas as condições necessárias para que se sintam motivados a desenvolver o seu potencial.

O PROFESSOR E SEU LOCAL DE FALA

Uma das missões do professor é criar ambientes que acolham os estudantes e forneçam uma boa experiência de aprendizado. Nesse contexto, a interação professor/estudantes é fundamental, pois possibilita compreender como vivem, suas necessidades, seus anseios, seu projeto de vida e o que pode motivá-los para ter uma aprendizagem significativa. Por meio dessa interação, é possível explorar problemas reais e buscar as informações de maneira coletiva, reconhecendo que os próprios estudantes podem ser a fonte de conhecimento. É importante encorajar a troca e a construção entre eles e se envolver nas discussões e nos trabalhos.

Esta relação com os estudantes também é uma forma de criar, valorizar e manter uma cultura de paz dentro das salas de aula e, consequentemente, na comunidade escolar como um todo. De acordo com as orientações da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), para promover a cultura de paz nas escolas é preciso construir, no dia a dia, um ambiente pacífico e conciliador. Nesse âmbito, o professor pode desempenhar papel fundamental criando um ambiente de confiança, colocando-se à disposição para ouvir os estudantes e fornecendo condições para que tenham uma conduta respeitosa entre si na sala de aula e além dos muros da escola.

Trabalhar de forma colaborativa com outros professores da escola e também com os demais profissionais da comunidade escolar como secretários, inspetores, merendeiras etc. (caso estes tenham interesse) permite criar uma comunidade de aprendizagem que pode ser propícia para a concepção e execução de projetos que respondam às demandas do desenvolvimento humano integral e podem trazer retorno para a própria comunidade ao redor da escola.

INTERDISCIPLINARIDADE

Partindo do pressuposto que o conhecimento não é compartimentado, é necessário investir numa visão interdisciplinar da sua concepção a fim de garantir sua construção de uma forma global. A interdisciplinaridade, tão discutida desde o século passado, é quando dois ou mais componentes curriculares se relacionam para aprofundar o conhecimento, integrando os saberes e superando essa visão fragmentada.

Podemos dizer que é uma forma de encontrar conexões entre as áreas do conhecimento para o estudo de um tema de interesse, objetivando responder aos questionamentos por ele gerados. Esse processo dá significação e significado à aprendizagem, permitindo ao estudante estabelecer também ligações com conceitos já estudados e com o seu cotidiano. O que reforça a ideia de que interdisciplinaridade e aprendizagem significativa caminham imbricadas entre si.

Quando um estudante se defronta com um problema, o conhecimento adquirido previamente acerca da situação apresentada não se limita à abordagem unicamente disciplinar, mas ultrapassa-a. Maingain e Dufour (2002) observam que o conhecimento é global, pautado em multidimensão, que não necessariamente se restringem aos componentes curriculares; entretanto, um campo disciplinar oferece as sistematizações necessárias. A combinação das multidimensões e das sistematizações constrói representações de uma situação particular, sendo, portanto, compreendida como uma perspectiva interdisciplinar. Em outras palavras, pensar a interdisciplinaridade na Educação Básica significa estabelecer relação entre as diferentes áreas do conhecimento para além da mera justaposição, mas aquém de uma fusão e, consequentemente, da desintegração do saber disciplinar.

Assim, nesta Coleção, são favorecidas situações de aprendizagem que, para além dos limites de cada componente curricular, incentivam a participação social, a cooperação e a tomada de decisão.

Tudo isso corrobora com a visão interdisciplinar e estabelece um diálogo com a BNCC e as competências gerais de aprendizagem, uma vez que permite, também, compreender a realidade, investigar, levantar hipóteses, defender ideias, respeitar a si e ao outro, contextualizando a aprendizagem com as necessidades e os interesses do estudante e favorecendo a tomada de decisões pautadas na ética.

Dessa maneira, o professor, que é pesquisador de sua prática, buscará os melhores caminhos para planejar boas estratégias e exercitar a interdisciplinaridade.

Um deles é o uso das **metodologias ativas**, como a aprendizagem baseada em projetos. A seção *É hora de extrapolar*, por exemplo, oferece oportunidades para que sejam desenvolvidos projetos que envolvam temáticas com potencial de mobilizar conhecimentos de diferentes áreas.

Vale ressaltar que, utilizando a ótica de escuta e observação, também é possível elaborar sequências de atividades envolvendo temas de interesse dos estudantes, sem constituir um projeto, mas com o foco interdisciplinar.

Atitudes interdisciplinares

Para que a interdisciplinaridade seja colocada em prática, é necessário que a escola invista na **formação continuada** de todos os segmentos, de forma a promover o estudo das necessidades prementes da turma e das novas estratégias para serem colocadas em prática. Aprofundar o conhecimento do professor nas metodologias ativas, por exemplo, permite a prática interdisciplinar.

Criar momentos de interações e trocas entre as equipes gestoras e os professores abre espaço para a discussão das diferentes ideias e da própria prática, por meio de experiências exitosas que permitirão ressignificá-la. Além disso, investir nas reflexões sobre a **gestão do tempo** em sala de aula é uma forma de buscar organizar as atividades.

Planejar as sequências do que será trabalhado seja em conjunto com outros professores, seja consigo mesmo é fundamental, bem como garantir momentos para replanejar o que não está dando certo ou que precisa de ajustes.

Outro ponto é trabalhar a **pesquisa**, aspecto que requer bastante atenção, uma vez que este é um procedimento que precisa ser ensinado e retomado constantemente. Aprender a pesquisar ajuda a investigar as hipóteses e encontrar as soluções.

O uso da **gamificação** é também uma forma de promover a interdisciplinaridade. A gamificação consiste em utilizar elementos de jogos e técnicas de *design* de jogos em contextos diferentes. Em atividades ou propostas gamificadas, espera-se que os estudantes se engajem na resolução de problemas ou na superação de desafios, que aceitem as regras do jogo, que concordem em jogar com pessoas diferentes e que aceitem *feedback* corretivo para alcançar o resultado desejado. Em resumo, a gamificação não é transformar qualquer atividade em um *game*, mas, sim, aprender a partir dos *games*, ou seja, aproveitar elementos dos *games* que podem melhorar uma experiência de aprendizagem sem ignorar o mundo real.

O trabalho interdisciplinar só é efetivo se for desenvolvido por uma equipe comprometida. Além disso, os professores, mediadores do trabalho interdisciplinar, devem se preocupar mais com o processo do que com o produto. Para auxiliar nesse processo, esta Coleção sugere possibilidades de trabalhos interdisciplinares ao longo das *Orientações*, mas é importante ressaltar que compete a cada escola e a cada equipe de profissionais definir o projeto que será desenvolvido de acordo com a sua realidade. Nesse sentido, cabe a reflexão e a discussão coletiva para que se realize um trabalho interdisciplinar consistente e coerente com as propostas da escola e que seja enriquecedor para o estudante.

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS (TCTs)

Em 1996, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) traziam os temas transversais, os quais contemplavam temáticas relacionadas à vida cotidiana e à vida das pessoas. Não eram novas disciplinas curriculares, mas sim áreas do conhecimento que perpassavam os campos disciplinares. Em outras palavras, buscavam inserir questões sociais como objeto de aprendizagem.

Com a BNCC, tais conceitos foram ampliados, e os temas contemporâneos transversais foram introduzidos, objetivando explicitar a ligação entre os diferentes componentes curriculares e as situações vivenciadas pelo estudante no cotidiano. Essas situações podem ser relacionadas aos problemas do mundo atual que afligem os estudantes, afetando a vida humana em escala local, regional e global.

Os TCTs estão distribuídos em seis macroáreas temáticas: *Cidadania e Civismo*, *Ciência e Tecnologia*, *Economia*, *Meio Ambiente*, *Multiculturalismo* e *Saúde*, englobando 15 temas contemporâneos.

2019 © ACERVO DO MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. p. 13 . Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

Para que o trabalho aconteça em sala de aula, é imprescindível refletir sobre o que estamos ensinando e o que os estudantes precisam aprender no que se refere a estas temáticas, mapeando quais TCTs poderão ser trabalhados atendendo a tais necessidades. Analisar como esses temas podem perpassar a área de conhecimento a partir do conteúdo a ser trabalhado é outro aspecto importante. Por exemplo, ao trabalhar porcentagem em Matemática é possível discutir o consumo e o consumismo (o que realmente necessitamos obter e o que compramos desnecessariamente), bem como a distribuição da renda e o trabalho.

Para isto **a leitura e a pesquisa** são fundamentais juntamente com as trocas estabelecidas a partir **do trabalho em grupo**, a socialização das ideias e a sistematização de discussões.

Os TCTs na Coleção

Os TCTs são abordados em diferentes momentos da Coleção: seções, boxes e atividades diversas. Nesse trabalho, os estudantes são incentivados a refletir, defender suas opiniões e a pesquisar sobre diferentes assuntos. O trabalho muitas vezes dialoga com as competências específicas e gerais da BNCC.

Na Coleção, utilizam-se ícones para identificar a possibilidade de trabalho com os TCTs.

Ícones que indicam o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais

Cada um destes ícones se relaciona com uma das macroáreas temáticas conforme mostra o quadro a seguir.

RELAÇÃO ENTRE AS MACROÁREAS TEMÁTICAS E OS ÍCONES DA COLEÇÃO						
Macroáreas temáticas	Meio ambiente	Economia	Saúde	Cidadania e civismo	Multiculturalismo	Ciência e tecnologia
Ícones da Coleção	MEIO AMBIENTE	EDUCAÇÃO FINANCEIRA	SAÚDE	FORMAÇÃO CIDADÃ	PLURALIDADE CULTURAL	CIÊNCIA E TECNOLOGIA

O quadro a seguir apresenta um panorama geral de como o trabalho com os temas contemporâneos transversais é distribuído ao longo dos capítulos do volume 8.

O TRABALHO COM OS TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS NO VOLUME 8					
MEIO AMBIENTE	EDUCAÇÃO FINANCEIRA	SAÚDE	FORMAÇÃO CIDADÃ	PLURALIDADE CULTURAL	CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Capítulo 8.	Capítulos 8, 11 e 12	Capítulos 1, 6, 9, 10 e 12.	Capítulos 3, 4, 6, 8, 9 e 12.	Capítulos 4 e 7.	Capítulos 1, 2 e 11.

Além dos momentos sinalizados no *Livro do Estudante*, outros são sugeridos nas *Orientações* presentes neste *Manual do Professor*, podendo enriquecer ainda mais as atividades propostas.

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A abordagem de episódios da história da Matemática permite aos estudantes a percepção de que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada. Ela se desenvolveu ao longo do tempo e continua se desenvolvendo. Textos breves que trazem informações sobre fatos e pessoas ligadas ao seu desenvolvimento permitem ao professor promover discussões e sugerir pesquisas aos estudantes, com o objetivo de promover a compreensão do desenvolvimento histórico de diferentes conceitos e, consequentemente, ampliar os horizontes da aprendizagem matemática.

No estudo de conteúdos da Geometria, por exemplo, o trabalho com pesquisas que permitam conhecer elementos sobre sua história, os locais onde a Geometria se desenvolveu, as características sociais e geográficas desses locais pode contribuir para a compreensão do contexto no qual o objeto matemático em estudo se desenvolveu.

A aprendizagem matemática tem, assim, como ferramenta didática disponível a história da Matemática, junto à resolução de problemas e à modelagem. Nesta Coleção, o boxe *Um pouco de história* busca trazer informações que podem servir de ponto de partida para a complementação e o aprofundamento dos conteúdos abordados.

AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão presentes na sociedade, moldando a comunicação, o meio de transporte, as relações interpessoais e influenciando a vida das pessoas. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente, e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e da educação.

A prontidão para a atuação profissional compreende o conhecimento de diversas tecnologias e linguagens, e a escola é um dos ambientes mais propícios para a construção de tal conhecimento. Não cabe ao Ensino Fundamental o preparo de mão de obra especializada. No entanto, em uma época em que as tecnologias digitais estão mais acessíveis, haja vista a quantidade de telefones celulares no Brasil, a escola não pode ficar alheia a essa realidade, deixando de instrumentalizar os estudantes para o uso dessas tecnologias, especialmente para que conheçam os bons e os maus usos delas e que saibam se prevenir.

No que diz respeito à utilização das tecnologias digitais no ensino de Matemática, deseja-se que este uso possibilite a expansão das oportunidades de aquisição de conhecimento – por exemplo, a calculadora e os *softwares* para a aprendizagem da Matemática devem favorecer, entre outras coisas, a busca por novas estratégias para a resolução de problemas ou o desenvolvimento do raciocínio lógico. Sobre esse assunto, discorre Aguiar (2008), p. 64.

> A utilização e a exploração de aplicativos e/ou *softwares* computacionais em Matemática podem desafiar o estudante a pensar sobre o que está sendo feito e, ao mesmo tempo, levá-lo a articular os significados e as conjecturas sobre os meios utilizados e os resultados obtidos, conduzindo-o a uma mudança de paradigma com relação ao estudo, na qual as propriedades matemáticas, as técnicas, as ideias e as heurísticas passem a ser objeto de estudo.

É importante que o uso do computador na escola não se limite apenas à função do uso dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma ampliação das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas também referente à elaboração de soluções para problemas cotidianos simples ou complexos de qualquer natureza.

Nesta Coleção, o uso de tecnologias digitais é incentivado por meio da seção *Tecnologias digitais em foco* e também por meio de atividades identificadas pelo ícone *Calculadora e* softwares:

Calculadora e
softwares

A intenção é colocar os estudantes diante de situações em que devem resolver problemas, experimentar, formular hipóteses e argumentar. As propostas podem envolver estratégias como o uso de calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de Geometria dinâmica como o GeoGebra. Nesse contexto, espera-se criar um ambiente favorável para que eles se sintam motivados a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos da disciplina.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que pudesse ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- **Decomposição:** consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulte na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou uma situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- **Reconhecimento de padrões:** ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- **Abstração:** no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e os dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários. Permite-se, assim, uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.
- **Algoritmo:** a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para desenvolver o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador.

O pensamento computacional na Coleção

A BNCC considera que a aprendizagem de Álgebra contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes, uma vez que precisam mobilizar diferentes linguagens para traduzir situações-problema. Além disso, o documento destaca que:

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos (BRASIL, 2018, p. 271).

Nesta Coleção, são propostas diferentes atividades envolvendo construção, leitura e interpretação de fluxogramas. Essas atividades favorecem o desenvolvimento da competência especifica **6** de Matemática e da competência geral **4** da BNCC e são identificadas pelo ícone *Pensamento computacional*.

Pensamento
computacional

Na Coleção, os fluxogramas também são utilizados na sistematização de alguns conteúdos.

De modo geral, o pensamento computacional também está presente, na Coleção, por meio da aplicação de algoritmos e procedimentos (algoritmos das operações, métodos para determinar o mmc ou mdc de números naturais, aplicação da fórmula resolutiva de equações do 2º grau etc.), reconhecimento de padrões em sequências numéricas ou de figuras e, também, quando se propõe a elaboração e/ou resolução de problemas.

SUGESTÕES DE CRONOGRAMAS

O quadro a seguir oferece ao professor possibilidades de trabalho com os capítulos do volume 8 da Coleção durante o ano letivo. O professor pode e deve se sentir à vontade para adaptar as sugestões aqui indicadas de acordo com a realidade e as necessidades da turma e da escola, uma vez que a aprendizagem depende da combinação de muitos fatores e, por conseguinte, os métodos e as estratégias que se mostram eficientes com um grupo de estudantes podem não ter o mesmo resultado com outro.

O arranjo desse quadro possibilita ao professor a previsão de uma organização bimestral, trimestral ou semestral.

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">SUGESTÕES DE CRONOGRAMAS (BIMESTRAL, TRIMESTRAL E SEMESTRAL)</th></tr>
<tr><th></th><th>Capítulos do volume 8</th><th>Bimestres</th><th>Trimestres</th><th>Semestres</th></tr>
<tr><td rowspan="3">UNIDADE 1</td><td>Capítulo 1 – Conjuntos numéricos</td><td rowspan="3">1º bimestre</td><td rowspan="4">1º trimestre</td><td rowspan="6">1º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 2 – Potenciação e radiciação</td></tr>
<tr><td>Capítulo 3 – Sistemas de equações do 1º grau</td></tr>
<tr><td rowspan="3">UNIDADE 2</td><td>Capítulo 4 – Ângulos e transformações geométricas</td><td rowspan="3">2º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 5 – Polígonos</td><td rowspan="4">2º trimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 6 – Probabilidade</td></tr>
<tr><td rowspan="3">UNIDADE 3</td><td>Capítulo 7 – Triângulos e quadriláteros</td><td rowspan="3">3º bimestre</td><td rowspan="6">2º semestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 8 – Área, volume e capacidade</td></tr>
<tr><td>Capítulo 9 – Equações do 2º grau</td><td rowspan="4">3º trimestre</td></tr>
<tr><td rowspan="3">UNIDADE 4</td><td>Capítulo 10 – Grandezas e proporcionalidade</td><td rowspan="3">4º bimestre</td></tr>
<tr><td>Capítulo 11 – Medidas de tendência central e pesquisa estatística</td></tr>
<tr><td>Capítulo 12 – Gráficos estatísticos</td></tr>
</table>

ORIENTAÇÕES PARA AVALIAÇÃO

Avaliar é algo complexo e muito discutido entre as equipes escolares, principalmente quando almeja-se uma avaliação focada na evolução e no desenvolvimento das aprendizagens dos estudantes. Para isso, é necessário ir além da simples demonstração dos resultados, trazendo o "percurso, os obstáculos e os novos caminhos a serem percorridos para o alcance dos objetivos ainda não atingidos".

A BNCC vem propor uma ressignificação da avaliação, uma vez que há uma progressão na aquisição das habilidades, o que implica buscar mecanismos que mostrem o desenvolvimento do estudante no processo de ensino e de aprendizagem, no que se refere à aquisição ou não de tais habilidades.

Para isso é preciso refletir sobre o que avaliar e como fazê-lo. O professor precisa ter claro o que espera que cada turma aprenda em cada situação didática planejada. Necessita planejar intervenções que levem em consideração as orientações nacionais, mas também as necessidades de cada turma e cada estudante em particular.

É importante que as avaliações sejam aplicadas de forma contínua ao longo do processo educativo. A análise dos dados obtidos ao longo desse caminhar permitirá ao professor reorientar o processo de ensino e de aprendizagem. Ao estudante, fornecerá elementos para reforçar e incentivar a aprendizagem, tornando-se, assim, parte ativa do seu processo de aprendizagem.

Vários são os instrumentos que permitem ao professor obter as informações necessárias para o melhor planejamento, assim como atender à necessidade de quantificação da aprendizagem: atribuir uma nota ou um conceito. Destaca-se a importância da utilização de vários instrumentos simultaneamente, de forma a melhorar as oportunidades para que o estudante mostre efetivamente o que aprendeu (ou o que não aprendeu e precisa ser retomado pelo professor). Por exemplo: provas, relatórios, autoavaliação, trabalhos em equipe, participação em discussões orais, abertura para expor dúvidas e, especialmente, a possibilidade de discutir seus erros, compreender por que errou e corrigi-los.

Cabe ao professor, com base no conhecimento que tem de suas turmas, escolher os instrumentos mais adequados aos objetivos fixados em seu plano de ensino. Algumas dessas medidas são subjetivas, mas os critérios utilizados devem ser explicitados aos estudantes.

Entretanto, independentemente do instrumento escolhido, é necessário registrar os resultados obtidos por meio de pautas de observação, registros escritos ou audiovisuais e portfólios, a fim de acompanhar o desenvolvimento de cada um. A seguir, apresentamos uma sugestão de quadro que você pode utilizar para avaliar algumas capacidades desenvolvidas pelos estudantes ao longo do ano letivo.

SUGESTÃO DE QUADRO PARA REGISTRO DA AVALIAÇÃO DE CAPACIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ESTUDANTES

Nome: ______________________________

Turma: ____________ **Data:** ___/___/___

Capacidade avaliada	Desempenho individual		
	Plenamente satisfatório	Satisfatório	Insatisfatório
Elaborar e resolver problemas.			
Compreender conceitos e procedimentos.			
Realizar cálculos mentais.			
Mobilizar diferentes linguagens e registros.			
Compreender textos publicados em diferentes mídias.			
Mobilizar conhecimentos de diferentes unidades temáticas.			
Realizar investigações utilizando tecnologias digitais.			
Criticar, criar e propor.			
Argumentar.			
Inferir.			
Construir, ler e interpretar tabelas e gráficos estatísticos.			
Trabalhar em equipe.			

O professor pode e deve se sentir à vontade para definir o critério que vai utilizar durante o preenchimento do quadro e até mesmo pode mudar as capacidades avaliadas, de acordo com a realidade da sua turma ou da escola em que trabalha. Também podem ser feitas versões similares do mesmo quadro, levando em consideração as habilidades e competências da BNCC.

Outro ponto é a necessidade de não limitar a avaliação aos aspectos cognitivos, uma vez que a formação do estudante deve ser a mais completa: aspectos comportamentais, atitudinais, também, devem ser considerados. Lembramos que um objetivo a ser fixado é o de uma educação democrática, inclusiva, e a avaliação tem papel fundamental nesse processo.

Na Coleção, as atividades da seção *Revisão de conteúdos de anos anteriores* podem compor avaliações diagnósticas e as atividades da seção *Revisão dos conteúdos deste capítulo*, por sua vez, podem servir para que sejam elaboradas avaliações formativas.

Propomos a seguir sugestões de avaliações de caráter formativo (uma relacionada a cada capítulo do *Livro do Estudante*) e uma sugestão de avaliação de preparação para exames de larga escala.

Sugestões de avaliação formativa

Para o capítulo 1: Conjuntos numéricos

Questões	Objetivos
1	Analisar conjuntos numéricos.
2	Analisar sequência numérica recursiva.
3	Comparar números racionais.
4	Resolver situação-problema envolvendo porcentagem.

1. Avalie cada afirmação a seguir sobre conjuntos numéricos como verdadeira ou falsa.

a) Todo número natural tem antecessor.
b) Todo número racional é real.
c) Todo número irracional é real.
d) O menor número inteiro que existe é o 0.

2. Considere a lei de formação de uma sequência dada por $a_1 = -2$ e $a_{n+1} = (a_n)^2 + 1$. A soma dos quatro primeiros termos dessa sequência é:

a) 677
b) 706
c) 709
d) 710

3. Copie cada sentença em seu caderno, trocando ■ por > ou <.

a) 4,0 ■ 1,4
b) –5,12 ■ 3,5
c) –8,29 ■ –8,3
d) –1,0 ■ 0,95

4. Luana é dona de uma loja de eletrodomésticos. Em uma promoção, ela pretende mudar o preço de certo produto de R$ 1 325,00 para R$ 1 166,00. Para isso, ela deve dar um desconto de:

a) 12%
b) 14%
c) 86%
d) 88%

Respostas

1. **a)** Falsa **b)** Verdadeira **c)** Verdadeira **d)** Falsa

2. alternativa b

3. **a)** > **b)** < **c)** > **d)** <

4. alternativa a

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA05**. Essa questão avalia o conhecimento dos estudantes sobre as relações entre os conjuntos numéricos e os elementos que os compõem. Espera-se que eles percebam que o 0 não tem antecessor no conjunto dos números naturais e que os números negativos são menores do que 0 no conjunto dos números inteiros. Eles podem cometer equívocos ao analisar essas relações ou considerar os números irracionais como não sendo números reais. Em caso de dificuldades, convém retomar cada conjunto numérico e apresentar exemplos de seus elementos.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA11**. Essa questão avalia o conhecimento dos estudantes sobre a determinação de elementos de uma sequência numérica recursiva a partir da lei de formação. Eles precisam determinar os quatro primeiros termos dessa sequência. Espera-se que percebam que o segundo termo é obtido elevando o primeiro termo ao quadrado e adicionando 1. Utilizando esse raciocínio, conseguem determinar também o terceiro e o quarto termos. Além disso, precisam calcular a soma desses quatro termos. Eles podem cometer equívocos ao calcular essa soma, não atentando ao sinal negativo do primeiro termo. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de sequência recursiva.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA05**. Essa questão apresenta pares de números racionais na forma decimal para que os estudantes possam comparar. Espera-se que eles fiquem atentos aos sinais dos números para decidir qual deles é o maior. Eles podem cometer equívocos ao utilizar os sinais de comparação ou não compreender a ordem dos números racionais. Nesse caso, convém utilizar a reta numérica para realizar a comparação dos números.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA04**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar os preços do produto antes e depois da mudança para calcular o percentual desse desconto. Para isso, podem calcular o quociente de 1 166 : 1 325 e descobrir que o novo preço será 88% do preço antigo, ou seja, o desconto percentual a ser dado deve ser de 12%. Eles podem cometer equívocos ao calcular o quociente com outros valores ou não analisar o percentual encontrado. Nesse caso, convém retomar o conceito de cálculo de porcentagem.

Para o capítulo 2: Potenciação e radiciação

Questões	Objetivos
1	Analisar potências de base real e expoente inteiro.
2	Escrever números em notação científica.
3	Analisar propriedades da potenciação.
4	Representar raiz como potência de expoente fracionário.

1. Em relação ao número –1,1, avalie cada afirmação como verdadeira ou falsa.

a) $-1{,}1^2 = -1{,}21$
b) $(-1{,}1)^0 = -1$
c) $(-1{,}1)^4 = -1{,}4641$
d) $-1{,}1^{-1} = -\frac{1}{1{,}1}$

2. Vítor estudou os planetas do Sistema Solar e descobriu que a distância média entre Marte e o Sol mede cerca de 228 milhões de quilômetros. Essa medida pode ser indicada em notação científica por:

a) $2{,}28 \cdot 10^{-8}$ km.
b) $2{,}28 \cdot 10^{6}$ km.
c) $228 \cdot 10^{6}$ km.
d) $2{,}28 \cdot 10^{8}$ km.

3. Observe as sentenças que Vilma escreveu a seguir.

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^6 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1}{4}^{6:(-2)}$
b) $(0{,}2)^{-5} \cdot (0{,}2)^4 = 0{,}2^{-5+4}$
c) $(4 + 3 - 2)^6 = 4^2 + 3^2 - 2^2$
d) $(-18 : 6)^4 = (-18)^4 : 6^4$
e) $[(12{,}7)^5]^2 = 12{,}7^{5 \cdot 2}$

Identifique as sentenças verdadeiras.

4. O número $\sqrt[4]{21 + \sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{16}}}}$ pode ser representado como:

a) $3^{\frac{3}{4}}$
b) $3^{\frac{4}{3}}$
c) $17^{\frac{1}{4}}$
d) 17^{4}

Respostas

1. **a)** Verdadeira
   b) Falsa
   c) Falsa
   d) Verdadeira
2. alternativa d
3. itens b, d, e
4. alternativa a

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA01**. Essa questão apresenta potências de base real com expoente inteiro para que os estudantes avaliem se cada afirmação é verdadeira ou falsa. Espera-se que eles recordem que todo número real não nulo elevado a 0 é igual a 1 e prestem atenção ao sinal da base em cada item. Eles podem cometer equívocos, por exemplo, ao considerar que o sinal do **item a** deve ser positivo, entretanto, o sinal negativo da base não está elevado ao quadrado. Em caso de dificuldades, convém retomar o conceito de potenciação de base real com expoente inteiro.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA01**. Essa questão apresenta a medida da distância média de Marte até o Sol, em quilômetro, para que os estudantes identifiquem a notação científica correspondente. Eles podem cometer equívocos ao considerar a quantidade de casas decimais ou ao não considerar que a notação científica deve ser escrita como o produto de um número entre 1 e 10 por uma potência de base 10. Em caso de dificuldades, convém retomar o conceito de notação científica.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA01**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar cada sentença para verificar se Vilma aplicou corretamente as propriedades da potenciação para potências de base real com expoente inteiro. Espera-se que eles percebam que a sentença será verdadeira se os dois membros da igualdade representarem o mesmo valor. Para isso, não há necessidade de realizar os cálculos, basta recordar as propriedades estudadas. Em caso de dificuldades, pode-se retomar essas propriedades com exemplos mais simples.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA02**. Nessa questão, os estudantes precisam simplificar o número apresentado calculando a raiz a partir de 16 e realizando as operações internas às outras raízes. Com isso, devem chegar a $\sqrt[4]{27}$. Ao escrever essa raiz como potência de expoente fracionário, conseguem identificar o item que apresenta o número equivalente ao número dado. Eles podem cometer equívocos ao simplificar a raiz ou escrever a raiz como potência de expoente fracionário. Nesse caso, convém retomar esse conceito.

Para o capítulo 3: Sistemas de equações do 1º grau

Questões	Objetivos
1	Localizar pontos no plano cartesiano.
2	Escrever equação do 1º grau com duas incógnitas para representar situações.
3	Resolver situação-problema envolvendo sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

1. Luís representou um plano cartesiano e marcou os pontos $A(-3, 5)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$ e $D(5, 5)$. Depois, ele uniu esses pontos em ordem alfabética, obtendo:
   a) uma reta.
   b) o contorno de um triângulo.
   c) o contorno de um quadrilátero.
   d) o contorno de um pentágono.

2. Muniz quer representar um retângulo cuja altura mede x cm e o comprimento mede o quádruplo da altura. Considerando a medida do comprimento igual a y cm, avalie cada afirmação como verdadeira ou falsa.
   a) Se a altura mede 16 cm, então o comprimento mede 4 cm.
   b) As medidas do comprimento e da altura podem se relacionar por meio da equação $\frac{y}{4} - x = 0$.
   c) Se o comprimento mede 20 cm, então a altura mede 5 cm.
   d) A equação $y = x + 4$ relaciona as medidas do comprimento e da altura.

3. Regina foi ao banco retirar 215 reais em dinheiro. Ela pediu à atendente que desse apenas cédulas de 20 reais e de 5 reais. Sabendo que ela saiu do banco com 22 cédulas, determine a quantidade de cada tipo de cédula.

Respostas

1. alternativa b
2. **a)** Falsa
   b) Verdadeira
   c) Verdadeira
   d) Falsa
3. 7 cédulas de 20 reais e 15 cédulas de 5 reais.

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA07**. Essa questão verifica o conhecimento dos estudantes sobre localização de pontos no plano cartesiano a partir de pares ordenados. Eles precisam perceber que são dados quatro pares ordenados e que os pontos B, C e D estão alinhados. Assim, ao unir os quatro pontos, obtêm o contorno de um triângulo. Eles podem cometer equívocos ao não analisar a posição dos pontos, considerando apenas a quantidade. Em caso de dificuldades, pode-se retomar a localização de pontos no plano cartesiano.

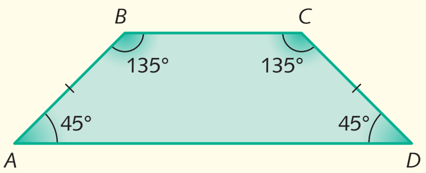
A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA06**. Nessa questão, os estudantes precisam identificar a relação que há entre as medidas do comprimento y e da altura x do retângulo que Muniz quer representar, ou seja, $y = 4x$. A partir da manipulação algébrica, eles podem encontrar outras equações equivalentes e analisar a relação entre essas medidas em cada item. Podem cometer equívocos durante essa manipulação ou não compreender a relação entre as medidas do comprimento e da altura. Nesse caso, convém retomar o conceito de equação do 1º grau com duas incógnitas para representar situações.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA08**. Nessa questão, os estudantes podem resolver a situação-problema apresentada considerando que Regina saiu do banco com x cédulas de 20 reais e y cédulas de 5 reais, em que x e y são números naturais. Assim, podem montar e resolver um sistema de equações, sabendo que $20x + 5y = 215$ e $x + y = 22$, utilizando qualquer um dos métodos estudados. Eles podem cometer equívocos ao interpretar o enunciado ou não compreender o significado da solução encontrada. Em caso de dificuldades, convém retomar a resolução desse tipo de sistema.

Para o capítulo 4: Ângulos e transformações geométricas

Questões	Objetivos
1	Analisar ângulos e simetria em um trapézio.
2	Reconhecer propriedades da mediatriz.
3	Realizar a translação de um polígono.
4	Realizar rotações de um ponto no plano cartesiano.

1. Observe o trapézio que Elis desenhou e avalie cada afirmação como verdadeira ou falsa.



a) Esse trapézio tem dois ângulos obtusos e dois ângulos agudos.

b) Os ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ são congruentes.

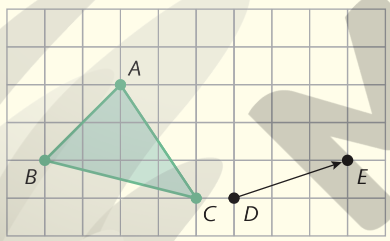
c) Ao traçar a bissetriz do ângulo $C\hat{D}A$, obtêm-se dois ângulos cuja abertura mede 90°.

d) Esse trapézio é simétrico em relação à mediatriz de $\overline{BC}$.

2. Ronaldo desenhou um segmento de reta e traçou a mediatriz desse segmento. Depois, ele uniu um ponto da mediatriz às extremidades do segmento. Com base nessas informações, indique quais destas figuras geométricas ele pode obter:

- segmento de reta;
- quadrado;
- triângulo isósceles;
- triângulo escaleno;
- triângulo equilátero.

3. No caderno, copie a malha quadriculada a seguir, o triângulo *ABC* e o vetor. Depois, represente a figura obtida pela translação do triângulo *ABC* no sentido, na direção e na distância do vetor dado.



4. Tiago realizou algumas rotações no plano cartesiano. Acompanhe os procedimentos dele:

1º) Marcou o centro de rotação na origem do plano cartesiano.

2º) Marcou o ponto *A*(2, 4).

3º) Rotacionou o ponto *A* no sentido anti-horário em um giro de 180°, obtendo um ponto *A'*.

4º) Rotacionou o ponto *A'* no sentido horário em um giro de 135°, obtendo um ponto *A''*.

Para obter o ponto *A''* realizando uma única rotação do ponto *A* com centro na origem do plano cartesiano, Ronaldo poderia ter realizado:

a) um giro de 45° no sentido horário.

b) um giro de 45° no sentido anti-horário.

c) um giro de 225° no sentido horário.

d) um giro de 225° no sentido anti-horário.

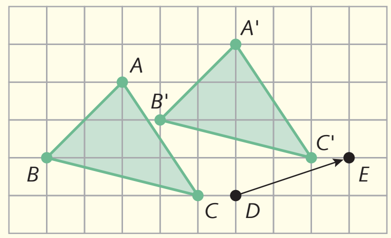
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Respostas

1. **a)** Verdadeira
b) Falsa
c) Falsa
d) Verdadeira

2. Segmento de reta, triângulo isósceles ou triângulo equilátero.

3.



4. alternativa b

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA15**, **EF08MA17** e **EF08MA18**. Essa questão apresenta um trapézio isósceles. Os estudantes precisam analisar cada item para avaliar a relação entre os ângulos mencionados, além de perceber a existência de uma simetria ao traçar determinada mediatriz. Eles podem cometer equívocos ao utilizar conceitos de bissetriz, mediatriz e ângulos congruentes. Nesse caso, convém recordar cada um desses conceitos.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA17**. Essa questão verifica o conhecimento dos estudantes sobre mediatriz. Espera-se que eles percebam que o enunciado não menciona exatamente qual ponto da mediatriz foi tomado. Se o ponto pertencer ao segmento de reta, obtém-se um segmento de reta; se o ponto da mediatriz não pertencer ao segmento de reta, então forma-se um triângulo, que pode ser equilátero, dependendo das medidas de comprimento dos três lados, mas com certeza é isósceles, devido à definição da mediatriz como lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de dois pontos fixos dados. Em caso de dificuldades, convém retomar mediatriz e essa definição dela como lugar geométrico.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA18**. Nessa questão, os estudantes precisam identificar os vértices do triângulo *ABC* e, considerando o lado de cada quadradinho como unidade de medida de comprimento, perceber que o vetor indica que cada vértice deve ser transladado três unidades de medida de comprimento para a direita e uma unidade de medida de comprimento para cima. Assim, podem determinar a localização dos três vértices após a translação e unir os pontos obtidos, encontrando o triângulo transladado. Em caso de dificuldades, convém retomar o conceito de translação de polígonos.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA18**. Nessa questão, os estudantes podem fazer um esboço da situação para verificar o que ocorre com o ponto a cada rotação que Tiago fez. Eles precisam ficar atentos ao sentido e às medidas de abertura dos ângulos rotacionados. Espera-se que eles percebam que a primeira rotação equivale a uma reflexão do ponto *A* em relação à origem do plano cartesiano, já que a abertura do ângulo de rotação mede 180°. Ao realizar essa rotação no sentido anti-horário e uma nova rotação com giro de 135° no sentido horário, tem-se uma rotação do ponto *A* em relação à origem do plano cartesiano com giro de 45° (180° – 135°) no sentido anti-horário para obter o ponto *A''*. Em caso de dificuldades, convém retomar o conceito de rotação.

Para o capítulo 5: Polígonos

Questões	Objetivos
1	Analisar características de polígonos.
2	Calcular o número de diagonais de um polígono.
3	Reconhecer a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono.
4	Calcular medidas de abertura do ângulo interno e do ângulo externo de polígono regular.

1. Considere um pentágono e um octógono quaisquer para avaliar cada afirmação como verdadeira ou falsa.

a) O pentágono tem mais diagonais do que o octógono.

b) A soma das medidas das aberturas dos ângulos internos do pentágono é 900°.

c) A soma das medidas das aberturas dos ângulos externos do pentágono é igual à soma das medidas das aberturas dos ângulos externos do octógono.

d) Se os dois polígonos forem regulares, a medida de abertura de cada ângulo interno do octógono é maior do que a medida de abertura de cada ângulo interno do pentágono.

2. Evandro trabalha com composições artísticas. Ele vai construir um polígono de 14 lados e colorir cada diagonal com uma cor de tonalidade diferente. Para esse trabalho, ele vai precisar de quantas cores?

a) 63 **c)** 77

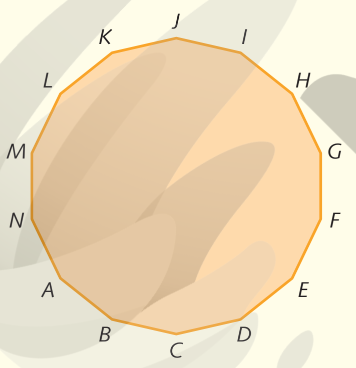
b) 70 **d)** 84

3. Um polígono cuja soma das medidas das aberturas de seus ângulos internos é 3 420° tem:

a) 19 lados. **c)** 22 lados.

b) 21 lados. **d)** 23 lados.

4. Bruna vai utilizar o seguinte polígono regular como molde para construir uma mesa que será utilizada em uma peça teatral. Determine a medida de abertura aproximada com duas casas decimais de cada ângulo interno e de cada ângulo externo desse molde sem utilizar instrumentos de medição.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Respostas

1. **a)** Falsa

b) Falsa

c) Verdadeira

d) Verdadeira

2. alternativa c

3. alternativa b

4. Medida de abertura do ângulo interno: 154,29°; medida de abertura do ângulo externo: 25,71°

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA15** e **EF08MA16**. Essa questão avalia o conhecimento dos estudantes sobre diagonais, ângulos internos e ângulos externos de um polígono qualquer. Eles precisam perceber que o pentágono é um polígono formado por 5 lados, enquanto o octógono é formado por 8 lados. Assim, podem descobrir a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de cada polígono. Eles podem cometer equívocos ao considerar que o octógono tem soma das medidas das aberturas dos ângulos externos maior do que a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos do pentágono ou não perceber a relação entre a quantidade de lados e as medidas das aberturas de ângulos internos no caso de polígonos regulares. Em caso de dificuldades, convém retomar os conceitos envolvidos nessa questão.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA15** e **EF08MA16**. Nessa questão, os estudantes precisam calcular o número de diagonais de um polígono de 14 lados. Espera-se que eles recordem que esse número pode ser obtido ao multiplicar o número de lados pelo número de lados menos 3 unidades e ao calcular metade desse produto. Em caso de dificuldades, convém recordar esse cálculo.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA15** e **EF08MA16**. Nessa questão, os estudantes precisam recordar que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono pode ser obtida multiplicando o número de lados menos 2 unidades por 180°. Assim, podem obter uma equação do 1º grau para descobrir o número de lados n do polígono: $3\,420° = (n - 2) \cdot 180°$. Em caso de dificuldades, convém recordar o cálculo da soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA15** e **EF08MA16**. Nessa questão, os estudantes precisam observar que o molde apresentado tem 14 lados. Com isso, podem calcular a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos desse polígono (2 160°) e dividir pelo número de lados para descobrir a medida da abertura de cada ângulo interno. Considerando que o ângulo interno e o externo correspondente são suplementares, conseguem descobrir a medida da abertura do ângulo externo. Eles também podem se lembrar que a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos é 360°. Em caso de dificuldades, convém recordar esses conceitos.

Para o capítulo 6: Probabilidade

Questões	Objetivos
1	Identificar os possíveis resultados de um experimento aleatório.
2	Aplicar o princípio multiplicativo.
3	Comparar a quantidade de possibilidades utilizando o princípio multiplicativo.
4	Calcular uma probabilidade.

1. Amanda está participando de um jogo de tabuleiro em que a cada rodada é jogada uma “moeda honesta” e um “dado honesto” de quatro faces numeradas com os primeiros números ímpares. Escreva quais são os possíveis resultados em uma rodada.

2. Uma senha é formada, nesta ordem, por dois algarismos diferentes de 0 a 9 e um símbolo, dos que são disponibilizados ao usuário. Sabendo que o número de possibilidades de formar essa senha é 5 400, a quantidade de símbolos disponibilizados ao usuário é:

a) 54 **b)** 60 **c)** 66 **d)** 75

3. Para proteger o computador com uma senha, Ricardo está em dúvida nas seguintes possibilidades:

A: senha com três algarismos quaisquer de 0 a 9.

B: senha com dois algarismos quaisquer de 0 a 9 e uma das 26 letras do alfabeto.

C: senha com um algarismo qualquer de 0 a 9 e duas letras das 26 do alfabeto, sendo a primeira uma vogal e a segunda uma consoante.

Qual dessas possibilidades é a mais segura?

4. O professor Fernando vai realizar um sorteio para decidir qual dos 3 grupos de estudantes (amarelo, azul ou vermelho) começará a apresentar uma pesquisa realizada. Para isso, ele escreverá o nome de cada estudante em um pedaço de papel, colocará em uma urna e retirará um aleatoriamente para identificar qual grupo começará a apresentação. Sabendo que o grupo amarelo tem 8 estudantes, o grupo azul tem 6 e o grupo vermelho tem 10, qual é a probabilidade de começar com o grupo azul?

a) 25% **b)** 33% **c)** 42% **d)** 50%

Respostas

1. (cara, 1), (cara, 3), (cara, 5), (cara, 7), (coroa, 1), (coroa, 3), (coroa, 5), (coroa, 7)
2. alternativa b
3. Possibilidade B
4. alternativa a

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA03**. Essa questão apresenta uma situação comum envolvendo um jogo de tabuleiro. Os estudantes precisam perceber que há duas possibilidades para a moeda (cara ou coroa) e quatro possibilidades para o dado (1, 3, 5 ou 7). Ao escrever os resultados possíveis da moeda e do dado juntos, eles obtêm a lista com as 8 possibilidades. Eles podem cometer equívocos ao considerar números pares ou não compreender o enunciado. Nesse caso, convém recordar o conceito de número de possibilidades com outras situações.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA03**. Nessa questão, os estudantes precisam reconhecer o princípio multiplicativo e considerar que a senha é formada por dois algarismos diferentes; portanto, para o primeiro algarismo há 10 possibilidades e para o segundo há 9 possibilidades. Ao multiplicar 90 pelo número de possibilidades x dos símbolos, chega-se a 5 400, ou seja, eles podem resolver a equação $90x = 5\,400$ para descobrir a quantidade de símbolos. Podem cometer equívocos ao considerar que os algarismos podem se repetir ou que não pode ter algarismo 0 no início da senha. Nesse caso, convém retomar o enunciado e o conceito de princípio multiplicativo.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA03**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar cada possibilidade e calcular quantas senhas é possível obter em cada caso. Espera-se que eles percebam que a mais segura é formada pela maior quantidade de possibilidades de senha. Para a possibilidade A, precisam calcular $10 \cdot 10 \cdot 10$; para a possibilidade B, precisam calcular $10 \cdot 10 \cdot 26$; para a possibilidade C, precisam calcular $10 \cdot 5 \cdot 21$. Eles podem cometer equívocos ao não considerar as restrições indicadas para cada caso. Se isso ocorrer, convém retomar o princípio multiplicativo com foco nas restrições do enunciado.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA22**. Nessa questão, os estudantes precisam recordar que a probabilidade é calculada pela razão entre o número de casos favoráveis do evento e o número de elementos do espaço amostral. Ao calcular o total de estudantes (soma dos participantes dos grupos), chega-se ao número de elementos do espaço amostral (24). Como deseja-se calcular a probabilidade de sortear o grupo azul, consideram-se os 6 participantes desse grupo como os casos favoráveis do evento. Os estudantes podem cometer equívocos ao interpretar incorretamente o enunciado ou ao realizar o cálculo de probabilidade. Nesse caso, convém retomar esse conceito.

Para o capítulo 7: Triângulos e quadriláteros

Questões	Objetivos
1	Classificar triângulos quanto às medidas de comprimento dos lados e de abertura dos ângulos.
2	Reconhecer os pontos notáveis de um triângulo.
3	Reconhecer casos de congruência de triângulos.

1. Leia o que cada estudante afirmou sobre classificação de triângulos.

Aline: "Triângulo retângulo é aquele que tem dois ângulos internos retos."

Caio: "Todo triângulo equilátero é também isósceles."

Luana: "Se um triângulo é escaleno, então ele é obtusângulo."

Maciel: "No triângulo acutângulo, a soma das medidas de abertura dos ângulos internos é menor que 180°."

Quais estudantes fizeram uma afirmação errada?

2. Associe cada definição ao respectivo ponto notável.

I. Ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo.
II. Ponto de encontro das retas suporte das alturas de um triângulo.
III. Ponto de encontro das medianas de um triângulo.
IV. Ponto de encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo.

A. Baricentro. **C.** Circuncentro.
B. Ortocentro. **D.** Incentro.

3. Identifique qual das afirmações a seguir **não** se refere a um caso de congruência de triângulos.

a) Dois triângulos são congruentes quando têm três lados correspondentes congruentes.
b) Dois triângulos são congruentes quando um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado são, respectivamente, congruentes.
c) Dois triângulos são congruentes quando têm três ângulos correspondentes congruentes.
d) Dois triângulos são congruentes quando dois lados e o ângulo compreendido entre eles são, respectivamente, congruentes.

Respostas

1. Aline, Luana e Maciel.

2. I-D; II-B; III-A; IV-C.

3. alternativa c

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA14**. Essa questão apresenta classificações de triângulos quanto às medidas de comprimento dos lados e quanto às medidas de abertura dos ângulos internos. Espera-se que os estudantes recordem que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de todo triângulo é igual a 180°, portanto, ele não pode ter dois ângulos retos, apenas um. Eles podem cometer equívocos ao não perceber que um triângulo equilátero tem três lados de mesma medida de comprimento, logo, tem pelo menos dois lados congruentes, ou seja, é isósceles. Além disso, espera-se que lembrem que escaleno é uma classificação referente às medidas de comprimento dos lados, podendo ser acutângulo, obtusângulo ou retângulo. Em caso de dificuldades, convém retomar as classificações de triângulos quanto às medidas de comprimento dos lados e de abertura dos ângulos.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA14**. Essa questão avalia o conhecimento dos estudantes sobre os pontos notáveis de um triângulo, relacionando-os às medianas, às alturas, às bissetrizes ou às mediatrizes de um triângulo. Em caso de dificuldades, convém retomar essas definições.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA14**. Nessa questão, os estudantes precisam recordar quais são os casos que garantem a congruência entre dois triângulos sem a necessidade de analisar todos os ângulos e os lados correspondentes. Espera-se que percebam que é possível desenhar dois triângulos que tenham ângulos correspondentes congruentes, mas com diferentes medidas de comprimento dos lados. Em caso de dificuldades, pode-se retomar os casos de congruência de triângulos.

Para o capítulo 8: Área, volume e capacidade

Questões	Objetivos
1	Calcular a medida de área de quadrado e retângulo.
2	Comparar as medidas de área de triângulo e paralelogramo.
3	Calcular a medida de área de trapézio e losango.
4	Calcular a medida de área de coroa circular e setor circular.
5	Resolver problema que envolva o cálculo da medida de capacidade de recipiente com formato de paralelepípedo.

1. Bruno tem um tapete com formato de quadrado e pretende trocar por um tapete com formato de retângulo de mesma medida de área e que tenha 1,5 m de medida do comprimento. Sabendo que o comprimento do lado do tapete quadrado mede 1,2 m, qual deve ser a medida da largura do novo tapete?

a) 0,72 m **b)** 0,96 m **c)** 1,25 m **d)** 1,80 m

2. Para avaliar cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa, considere um triângulo cujo comprimento da base mede *b* e o comprimento da altura mede *a*, e um paralelogramo cujo comprimento da base mede *a* e o comprimento da altura mede *b*.

a) A medida da área do triângulo é $\frac{1}{2}ab$.

b) A medida da área do triângulo é equivalente à medida da área do paralelogramo.

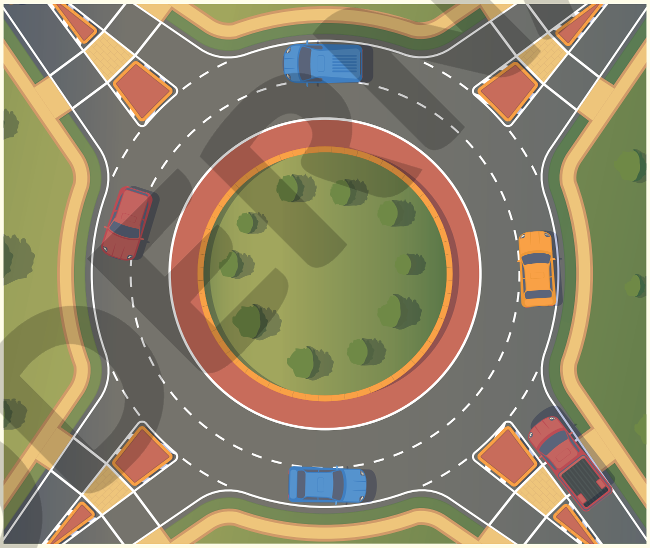
c) O paralelogramo tem o dobro da medida da área do triângulo.

d) O triângulo tem o dobro da medida da área do paralelogramo.

3. Para a decoração da festa de aniversário do filho de Mônica, será montado um painel formado por um trapézio e dois losangos idênticos. No trapézio, o comprimento da base maior mede 3 m, o comprimento da base menor mede 2 m e o comprimento da altura mede 1,5 m. Nos losangos, as diagonais medem 2 m e 1 m de comprimento. Sabendo que esse painel será feito com apenas uma camada de papel e que cada metro quadrado desse papel custa R$ 8,00, copie o texto a seguir no caderno substituindo cada ■ pelo valor adequado.

Mônica vai precisar de ■ m² de papel para o trapézio e ■ m² para cada um dos losangos. No total, ela precisará de ■ m² de papel para o painel, custando R$ ■.

4. A imagem a seguir mostra uma região circular com grama cuja medida de comprimento do raio é 6 m e uma coroa circular vermelha cuja medida de comprimento do raio maior é 8 m. A partir do centro do gramado será construído um setor circular com ângulo central de 36° de medida de abertura para fazer um canteiro de flores. Considere $\pi = 3$ e avalie cada afirmação como verdadeira ou falsa.



ILYA KOVSHIK/SHUTTERSTOCK

a) A medida de área da coroa circular vermelha é 21 m².

b) A medida de área atual ocupada pelo gramado circular é 108 m².

c) O canteiro de flores a ser construído terá medida de área aproximada de 38,88 m².

d) O canteiro de flores vai ocupar uma área menor do que a área pintada de vermelho.

5. Giovani precisa construir um recipiente com formato de paralelepípedo de modo que a largura interna meça 20 cm e o comprimento meça 35 cm. Sabendo que esse recipiente deve armazenar exatamente 10,5 litros de água, a altura deve medir:

a) 0,15 cm
b) 1,5 cm
c) 10,5 cm
d) 15 cm

Respostas

1. alternativa b

2. **a)** Verdadeira **b)** Falsa **c)** Verdadeira **d)** Falsa

3. 3,75; 1; 5,75; 46,00

4. **a)** Falsa
b) Verdadeira
c) Falsa
d) Verdadeira

5. alternativa d

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA06** e **EF08MA19**. Nessa questão, os estudantes precisam recordar que a medida de área de um quadrado é calculada elevando ao quadrado a medida de comprimento do lado; logo, a medida de área do tapete quadrado é 1,44 m^2. Como Bruno quer trocar por um tapete retangular com mesma medida de área, para calcular a medida da largura, basta dividir a medida de área encontrada por 1,5 m. Os estudantes podem cometer equívocos ao relacionar as duas medidas de área. Em caso de dificuldades, convém recordar o cálculo das medidas de área dessas figuras planas.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA06** e **EF08MA19**. Essa questão avalia o conhecimento dos estudantes sobre o cálculo da medida de área de triângulos e paralelogramos a partir de expressões algébricas. Espera-se que recordem que a medida de área de um triângulo é calculada pela metade do produto das medidas de comprimento da altura e da base, enquanto a medida de área de um paralelogramo é calculada pelo produto das medidas de comprimento da altura e da base. Na questão, a medida de área do triângulo é $\frac{1}{2}ab$ e a do paralelogramo é ab. Eles podem cometer equívocos ao comparar essas medidas de área, não reconhecendo a relação entre elas. Em caso de dificuldades, convém retomar o cálculo dessas medidas de área.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA06** e **EF08MA19**. Nessa questão, os estudantes precisam compreender que o painel será formado por três figuras planas: um trapézio e dois losangos congruentes. Basta calcular a medida de área de cada figura e adicioná-las para descobrir a quantidade de papel necessária. Multiplicando o preço de cada metro quadrado pela medida da área do painel, eles devem descobrir o valor a ser pago por Mônica. Eles podem cometer equívocos ao calcular a medida de área de cada figura ou não compreender a quantidade necessária de papel para descobrir o custo. Em caso de dificuldades, convém recordar o cálculo das medidas de área de trapézios e losangos.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA06** e **EF08MA19**. Essa questão avalia o conhecimento dos estudantes sobre resolução de situações-problema envolvendo coroa circular e setor circular. Eles precisam compreender o contexto envolvendo essas partes do círculo e recordar como calcular suas medidas de área. Podem ocorrer equívocos durante esse cálculo ao não perceber que as medidas dadas no enunciado são do comprimento do raio de cada círculo. Em caso de dificuldades, convém recordar como calcular as medidas de área da coroa circular e do setor circular.

A **questão 5** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA20** e **EF08MA21**. Nessa questão, os estudantes precisam recordar que a medida do volume de um paralelepípedo é calculada pelo produto das medidas de comprimento, largura e altura, e que 1 dm^3 = 1 L. Considerando as medidas do comprimento e da largura do recipiente, respectivamente, como 3,5 dm e 2 dm e x como a medida da altura, em dm, podem resolver a seguinte equação: $3{,}5 \text{ dm} \cdot 2 \text{ dm} \cdot x = 10{,}5 \text{ dm}^3$. Eles podem cometer equívocos durante os cálculos ou no tratamento com as unidades de medida. Em caso de dificuldades, convém recordar o cálculo da medida de volume de um paralelepípedo.

Para o capítulo 9: Equações do 2º grau

Questões	Objetivos
1	Identificar equação do 2º grau.
2	Analisar a raiz de uma equação do 2º grau.
3	Resolver equação do 2º grau da forma $ax^2 + c = 0$.
4	Resolver situação-problema utilizando equação do 2º grau.

1. Analise cada equação a seguir e a classifique em EC (equação do 2º grau completa), EI (equação do 2º grau incompleta) ou N (não é equação do 2º grau). Se necessário, reescreva a equação para sua análise.
a) $-2x^2 - 4x + (x + 2)^2 = 0$
b) $x^2 + 12x - x^3 = x^2$
c) $\frac{2}{5}x^2 - 4x = 8$
d) $x^2 - 121 = 0$

2. Considere a equação $3x^2 - 15x = 0$ e avalie cada afirmação como verdadeira ou falsa.
a) Essa equação tem duas raízes positivas.
b) O número 0 é raiz dessa equação.
c) O número -5 é raiz dessa equação.
d) Se a equação fosse $3x^2 + 15x = 0$, então -5 seria raiz dessa equação.

3. Considerando o conjunto dos números reais como conjunto universo, associe cada equação a suas raízes.
I. $4x^2 - 256 = 0$
II. $-2x^2 + 162 = 0$
III. $4x^2 + 256 = 0$
IV. $15x^2 + 1\,215 = 1\,215 - 10x^2$
a. Não tem raízes reais.
b. 0
c. -8 ou 8
d. -9 ou 9

4. Fabrício tem um terreno com formato de quadrado. Ele quer comprar o terreno de seu vizinho cuja área mede 640 m^2 e equivale a 40% da medida da área de seu terreno. Qual é a medida de comprimento do lado do terreno de Fabrício?
a) 8 m
b) 10 m
c) 16 m
d) 40 m

Respostas

1. **a)** EI
b) N
c) EC
d) EI

2. **a)** Falsa
b) Verdadeira
c) Falsa
d) Verdadeira

3. I-c; II-d; III-a; IV-b.

4. alternativa d

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA06** e **EF08MA09**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar cada equação apresentada e reescrevê-la, se necessário, para identificar se é uma equação do 2º grau completa, uma equação do 2º grau incompleta ou não é uma equação do 2º grau. Espera-se que eles percebam que, no **item a**, temos a equação $-x^2 + 4 = 0$ e, no **item b**, temos $-x^3 + 12x = 0$. Eles podem cometer equívocos ao analisar os expoentes das equações. Caso isso ocorra, convém recordar a definição de equação do 2º grau.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA06** e **EF08MA09**. Essa questão avalia o conhecimento dos estudantes sobre raiz de uma equação. Espera-se que eles observem que estão diante de uma equação do 2º grau incompleta. Espera-se que percebam que 0 e 5 são raízes dessa equação, ou seja, uma raiz é nula e a outra é positiva. Em caso de dificuldades, convém recordar o conceito de raiz de uma equação do 2º grau.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA06** e **EF08MA09**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar e resolver cada equação para identificar as raízes correspondentes. Espera-se que eles percebam que, em todos os casos apresentados, pode-se isolar x^2 para calcular a raiz quadrada do número que está do outro lado da igualdade. Caso ele seja negativo, não existe raiz no conjunto dos números reais. Em caso de dificuldades, convém retomar a resolução de equações incompletas do 2º grau da forma $ax^2 + c = 0$.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA06** e **EF08MA09**. Nessa questão, os estudantes podem resolver a situação-problema considerando que o comprimento do lado do terreno quadrado de Fabrício mede x. Como o terreno do vizinho corresponde a 40% da medida da área do terreno de Fabrício, então a área dele mede $0{,}4x^2$. Assim, pode-se chegar à seguinte equação: $0{,}4x^2 = 640$. Os estudantes podem cometer equívocos ao não interpretar corretamente a situação-problema ou não encontrar uma equação que a represente. Nesse caso, convém apresentar outras situações-problema similares para que eles analisem.

Para o capítulo 10: Grandezas e proporcionalidade

Questões	Objetivos
1	Identificar a relação de proporcionalidade entre grandezas.
2	Resolver situação envolvendo grandezas diretamente proporcionais.
3	Resolver situação envolvendo grandezas inversamente proporcionais.
4	Analisar representação da relação de grandezas inversamente proporcionais no plano cartesiano.

1. Leia cada afirmação sobre proporcionalidade entre grandezas e avalie como verdadeira ou falsa.

a) A velocidade média e o espaço percorrido são grandezas inversamente proporcionais.

b) Não há proporcionalidade entre o número de gols feitos por um time e o tempo de duração do jogo de futebol.

c) O valor pago e o comprimento de um tecido são grandezas diretamente proporcionais.

d) A massa corporal e a idade de uma pessoa são grandezas diretamente proporcionais.

2. Elisângela trabalha com a impressão 3D de carrinhos em miniatura. Observe os dados obtidos por ela sobre a produção da fábrica.

Número de miniaturas impressas	Medida de tempo de funcionamento da impressora 3D
15	8 h 45 min
24	14 h

A medida de tempo de impressão para que essa impressora 3D imprima 18 miniaturas é:

a) 10 h 21 min
b) 10 h 30 min
c) 11 h 15 min
d) 12 h 35 min

3. Em um experimento com duas grandezas proporcionais A e B, constataram-se as seguintes informações.

A	1,5	6	24
B	18	x	1,125

Com base nessas informações, o valor x é:

a) 4,5 **b)** 5,625 **c)** 6,375 **d)** 8,4375

4. Mariana representou a relação entre duas grandezas inversamente proporcionais em um plano cartesiano. Sabendo que ela marcou os pontos (4,2; 28) e (21; 5,6), determine a abscissa do ponto cuja ordenada é 1,12.

Respostas

1. **a)** Falsa
b) Verdadeira
c) Verdadeira
d) Falsa

2. alternativa b

3. alternativa a

4. 105

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA12**. Essa questão apresenta pares de grandezas e afirma a relação de proporcionalidade que há entre elas. Os estudantes precisam analisar se, de fato, aquela relação é válida. Espera-se que eles pensem em valores numéricos para cada situação, a fim de facilitar a comparação das grandezas. Em caso de dificuldades, convém retomar o conceito de proporcionalidade direta ou indireta e não proporcionalidade entre grandezas.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA12** e **EF08MA13**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar os valores apresentados no enunciado e perceber que as grandezas são diretamente proporcionais. Ao calcular a constante de proporcionalidade, podem concluir que essa impressora 3D produz uma miniatura a cada 35 minutos, portanto, 18 miniaturas são produzidas em 630 minutos, o que equivale a 10 h 30 min. Eles podem cometer equívocos ao calcular a constante de proporcionalidade. Nesse caso, convém retomar situações envolvendo grandezas diretamente proporcionais.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA12** e **EF08MA13**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar os valores apresentados pelas duas grandezas para perceber que se trata de grandezas inversamente proporcionais. À medida que os valores da grandeza A quadruplicam, os valores da grandeza B são reduzidos à quarta parte. Com isso, é possível calcular o valor de x, sendo um quarto de 18. Em caso de dificuldades, convém recordar a relação de grandezas inversamente proporcionais.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA12** e **EF08MA13**. Essa questão avalia o conhecimento dos estudantes sobre pontos no plano cartesiano que representam a relação de grandezas inversamente proporcionais. Espera-se que eles percebam que o produto dos valores correspondentes de duas grandezas inversamente proporcionais é constante, ou seja, o produto das coordenadas de cada ponto é constante. Assim, tem-se a seguinte relação: $4{,}2 \cdot 28 = 21 \cdot 5{,}6 = x \cdot 1{,}12$. Em caso de dificuldades, convém recordar a relação entre os pares ordenados da representação de grandezas inversamente proporcionais no plano cartesiano.

Para o capítulo 11: Medidas de tendência central e pesquisa estatística

Questões	Objetivos
1	Analisar o tipo de amostragem realizada.
2	Analisar variáveis qualitativas.
3	Avaliar o tipo de variável utilizada em uma pesquisa.
4	Analisar amplitude, mediana e média de um conjunto de dados.

1. Leia a descrição de cada pesquisa amostral a seguir e indique se a técnica utilizada para obter a amostra foi sistemática (S), casual simples (CS) ou estratificada (E).

a) Para saber a opinião dos estudantes sobre a qualidade dos lanches vendidos em uma escola com 500 estudantes, durante uma semana foi entregue um papel com número para cada estudante diferente que comprou algo na cantina. Com o auxílio de um *software*, foram sorteados 120 números. Os estudantes que estavam associados a esses números foram entrevistados.

b) Para saber a opinião dos clientes sobre o atendimento de um caixa de supermercado, foi decidido que, a cada 10 clientes que passassem por aquele caixa, seria entregue um papel para avaliação.

c) O curso técnico em edificações precisava avaliar qual seria a nova matéria a ser inserida no currículo, entre duas opções possíveis, de acordo com a opinião dos estudantes. Para isso, selecionaram-se 33% dos estudantes da manhã, 33% dos estudantes da tarde e 34% dos estudantes da noite para avaliar as duas opções.

2. Classifique cada variável qualitativa a seguir como ordinal ou nominal.

a) Cidade em que trabalha.
b) Grau de proficiência em alemão.
c) Meio de transporte utilizado para ir à escola.
d) Estado civil.
e) Nível técnico ocupado em uma empresa (I, II ou III).

3. Para a realização de uma atividade de Educação Física, o professor vai separar os estudantes por faixas de medida da altura. Para descobrir em que faixa cada estudante vai ficar, foi necessário perguntar a medida da altura de todos. Ao fazer essa pesquisa, o professor está tratando com uma variável:

a) qualitativa ordinal.
b) qualitativa nominal.
c) quantitativa discreta.
d) quantitativa contínua.

4. Uma pesquisa realizada em uma loja de jogos eletrônicos questionou a idade, em ano, das 10 pessoas que mais compram nessa loja. Observe os dados obtidos:

16 24 22 17 45 22 18 42 36 20

Sobre essa situação, avalie cada afirmação como verdadeira ou falsa.

a) A amplitude desse conjunto de dados é 45 anos.
b) A mediana desse conjunto de dados é 22 anos.
c) A mediana desse conjunto de dados é maior do que a média aritmética.
d) Se retirarmos a maior idade, a mediana desse conjunto de dados continuará a mesma.

Respostas

1. **a)** CS **b)** S **c)** E

2. **a)** Nominal **b)** Ordinal **c)** Nominal **d)** Nominal **e)** Ordinal

3. alternativa d

4. **a)** Falsa **b)** Verdadeira **c)** Falsa **d)** Verdadeira

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA26** e **EF08MA27**. Essa questão avalia o conhecimento dos estudantes sobre a técnica de amostragem utilizada. Espera-se que eles percebam as características que diferenciam cada caso apresentado para decidir como a amostra é selecionada. Eles podem cometer equívocos ao não compreender o conceito de cada técnica. Nesse caso, convém retomar essas técnicas, apresentando outros exemplos.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA26** e **EF08MA27**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar cada variável qualitativa para decidir se é nominal ou ordinal. Espera-se que eles recordem que esse tipo de variável representa uma característica ou atributo, sendo ordinal quando os valores podem ser ordenados e nominal quando não há possibilidade de ordenação. Em caso de dificuldades, convém recordar esses conceitos e apresentar mais exemplos para que eles possam classificar.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA26** e **EF08MA27**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar a situação apresentada e perceber que a variável envolvida se trata da medida da altura dos estudantes, podendo ser expressa por números reais, por exemplo, 1,56 m e 1,64 m. É um tipo de questão em que os estudantes precisam recordar a diferença entre variáveis qualitativas e quantitativas, além dos tipos referentes a cada uma dessas variáveis. Em caso de dificuldades, convém retomar o conceito de cada variável.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA25**. Nessa questão, os estudantes precisam recordar que a mediana de um conjunto de dados é obtida ao ordená-los e identificar o elemento que está na posição central (no caso de uma quantidade ímpar de dados) ou a média dos elementos que ocupam as duas posições centrais (no caso de uma quantidade par de dados). Espera-se que eles percebam que a mediana desse conjunto de dados é 22 anos, enquanto a média aritmética é 26,2 anos. No **item d**, ao retirar a maior idade (45 anos), a mediana continua sendo 22 anos. Em caso de dificuldades, convém retomar os conceitos de amplitude, mediana e média de um conjunto de dados.

Para o capítulo 12: Gráficos estatísticos

Questões	Objetivos
1	Interpretar tabela de distribuição de frequência.
2	Identificar moda em gráfico de barras horizontais.
3	Analisar gráfico de setores.

1. Observe a seguir a tabela de distribuição de frequência da variável idade em uma pesquisa realizada com frequentadores de uma academia no período matutino em 2023.

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA DAS IDADES DOS FREQUENTADORES DA ACADEMIA NO PERÍODO MATUTINO	
Idade (em ano)	Frequência (*F*)
18 ⊢— 28	16
28 ⊢— 38	12
38 ⊢— 48	10
48 ⊢— 58	9
58 ⊢— 68	8
68 ⊢— 78	4
78 ⊢— 88	1

Dados obtidos pela academia em 2023.

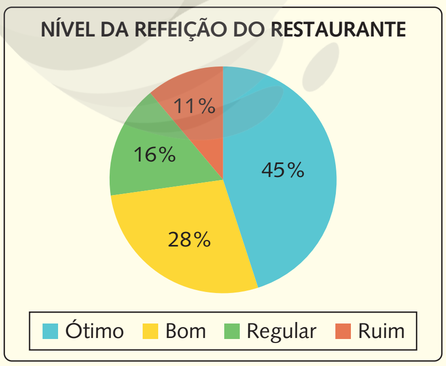
Sobre essa situação, avalie cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa.

a) A amplitude de cada classe é 70 anos.
b) No período matutino, 60 pessoas frequentam essa academia.
c) A frequência relativa da classe 28 ⊢— 38 é 20%.
d) A classe 48 ⊢— 58 apresenta a maior frequência.

2. Para identificar a moda de um conjunto de dados expresso em um gráfico de barras horizontais, é necessário localizar:

a) o menor valor expresso no gráfico.
b) o maior valor expresso no gráfico.
c) o valor que aparece com maior frequência no gráfico.
d) o valor central que aparece expresso no gráfico.

3. O gráfico de setores a seguir mostra o resultado de uma pesquisa feita com clientes que frequentaram certo restaurante durante o primeiro fim de semana de 2024. Cada pessoa escolheu apenas uma resposta quando lhe foi perguntado sobre o nível da refeição daquele restaurante.



Dados obtidos pelo restaurante durante o primeiro fim de semana de 2024.

Sabendo que foram entrevistadas 2 400 pessoas, no caderno, complete a quantidade de pessoas que respondeu cada nível no lugar de cada ■.

Ótimo: ■ pessoas.
Bom: ■ pessoas.
Regular: ■ pessoas.
Ruim: ■ pessoas.

Respostas

1. **a)** Falsa
b) Verdadeira
c) Verdadeira
d) Falsa

2. alternativa c

3. 1 080; 672; 384; 264

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF08MA24**. Essa questão avalia a interpretação dos estudantes de uma tabela de distribuição de frequência que mostra as frequências absolutas das classes de idades dos frequentadores de uma academia. Espera-se que eles saibam calcular a frequência relativa, considerando o total de frequentadores do período matutino (60). Em caso de dificuldades, convém retomar o conceito de tabela de distribuição de frequência.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA23** e **EF08MA27**. Essa questão retoma o conceito de moda, estudado no capítulo anterior, e avalia como os estudantes localizam essa medida de tendência central em um gráfico de barras horizontais. Os estudantes devem identificar que o valor que aparece com maior frequência é a moda. Em caso de dificuldades, convém retomar gráficos de barras.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF08MA23** e **EF08MA27**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar as porcentagens apresentadas em cada setor do gráfico da questão e interpretar a legenda para poder calcular a quantidade de pessoas que votaram em cada opção. Essa questão também relembra o cálculo de porcentagem, pois os estudantes precisam utilizar isso para descobrir a quantidade de pessoas. Em caso de dificuldades, convém retomar a interpretação de gráfico de setores e o cálculo de porcentagem.

Sugestão de avaliação para a preparação para exames de larga escala

Questões	Objetivos
1	Resolver problemas envolvendo cálculo de porcentagens.
2	Efetuar cálculos com potências de expoente inteiro.
3	Associar uma equação do 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.
4	Aplicar o conceito de lugar geométrico na resolução de problemas.
5	Reconhecer propriedades de hexágonos regulares e de triângulos na resolução de problemas.
6	Reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
7	A partir das propriedades de paralelogramos e de congruência de triângulos, identificar as medidas de abertura de ângulos.

Questões	Objetivos
8	Resolver problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas (quadriláteros e triângulos) correspondentes ao formato de terrenos.
9	Resolver problemas relacionados a medidas de área que possam ser representados por equações do 2º grau da forma $ax^2 + c = 0$.
10	Identificar se duas grandezas são diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais.
11	Identificar as medidas de tendência central (média, moda e mediana) e a amplitude de um conjunto de dados.
12	Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

1. Pesquisando preços na internet, Pedro viu no *site* de uma loja que o celular que ele queria custava R$ 490,00 e um aparelho de TV custava 20% a mais que o celular. No dia seguinte, quando foi à loja, Pedro notou que o preço do aparelho de TV estava 10% mais barato que o preço indicado no *site* e que o preço do celular estava 8% mais caro. Considerando essas informações, é possível afirmar que:

a) Pedro pagará R$ 1 078,00 pelos dois produtos se comprar na loja.
b) o novo preço do celular é igual ao novo preço do aparelho de TV na loja.
c) comprando os dois produtos na loja, Pedro economizará pelo menos R$ 50,00.
d) para comprar esses dois produtos na loja, Pedro gastará mais do que se comprar pelo *site*.

2. Considerando que a é um número racional diferente de zero, a professora Júlia propôs à turma a seguinte expressão:

$$[a^6 \cdot (a^2)^2 : a^{-3}]^{-2} : (a^6 : a^2)^3$$

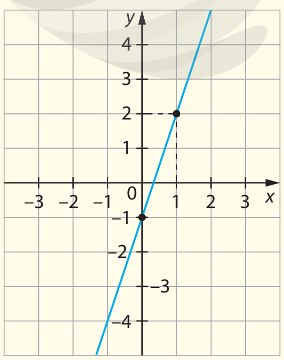
Qual das alternativas abaixo apresenta a simplificação dessa expressão?

a) a^4
b) a^{10}
c) $\left(\frac{1}{a}\right)^{22}$
d) $\left(\frac{1}{a}\right)^{38}$

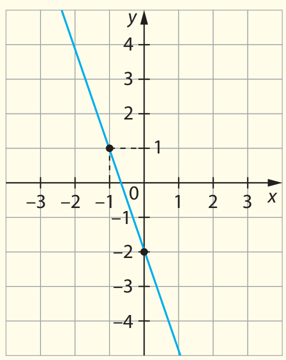
3. Lívia escreveu a seguinte equação de 1º grau com duas incógnitas: $2x - y = 2$

Assinale a representação gráfica dessa equação, em que x e y são números reais.

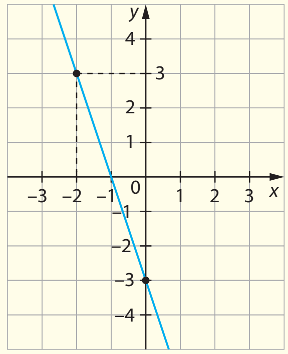
a)



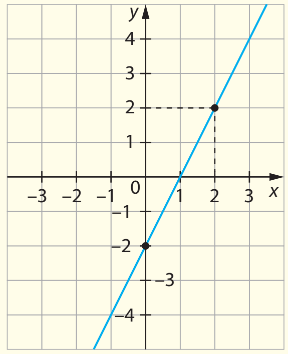
b)



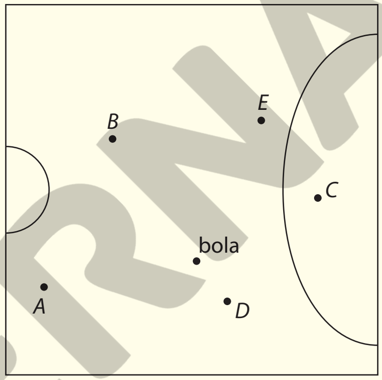
c)



d)



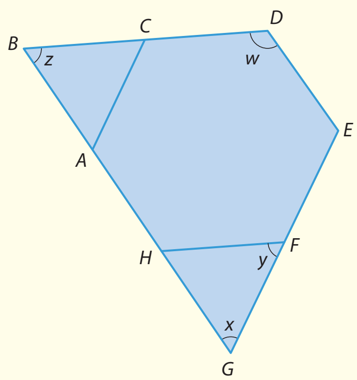
4. O esquema a seguir representa a metade de uma quadra de futebol de salão. Observe a posição de 5 jogadores (A, B, C, D e E) e a posição da bola.



Quais jogadores estão à mesma medida da distância da bola? Para responder, copie a figura no caderno e utilize o conceito de lugar geométrico.

a) B e D
b) A e C
c) A e E
d) B e C

5. Observe o quadrilátero $BDEG$ representado a seguir.



Sabendo que a figura definida por $ACDEFH$ é um hexágono regular, a soma das medidas de abertura x, y, z e w é:

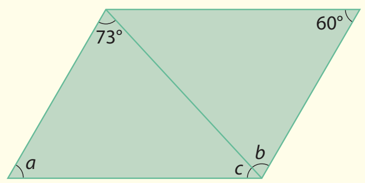
a) 260° **b)** 300° **c)** 180° **d)** 540°

6. Para fazer uma brincadeira com seus amigos, Natália colocou 10 bolinhas em uma urna, sendo 4 azuis, 4 amarelas e 2 vermelhas. Qual é a probabilidade de, sem olhar, um dos amigos retirar, entre as 10 bolinhas, uma bolinha azul, amarela ou vermelha?

a) $\frac{2}{10}$, ou seja, 0,2
b) $\frac{4}{10}$, ou seja, 0,4
c) $\frac{8}{10}$, ou seja, 0,8
d) $\frac{10}{10}$, ou seja, 1

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

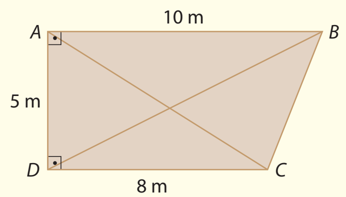
7. Observe o paralelogramo representado a seguir.



Podemos concluir que a soma das medidas de abertura a, b e c é igual a:

a) 123°
b) 180°
c) 220°
d) 243°

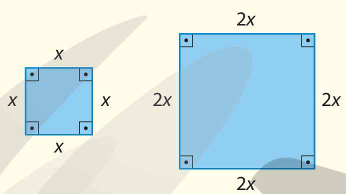
8. A família de Lucas comprou um terreno e pretende dividi-lo conforme a representação a seguir.



De acordo com essa representação, assinale a alternativa correta.

a) Esse terreno tem medida de área igual à de um terreno retangular cujos lados medem 8 m e 5 m de comprimento.
b) A medida de área da parte indicada por *CDA* corresponde à metade da medida de área do terreno.
c) A medida de área da parte indicada por *ABD* é igual à medida de área da parte *BCD*.
d) A medida de área do terreno *ABCD* é igual a 45 m².

9. Observe os quadrados representados a seguir com suas medidas de comprimento dos lados.



Sabendo que a medida de área do quadrado maior é igual a 400 m², qual é a medida do perímetro, em metro, e a medida da área, em metro quadrado, do quadrado menor?

a) A medida do perímetro é 100 m e a medida da área é 100 m².
b) A medida do perímetro é 40 m e a medida da área é 100 m².
c) A medida do perímetro é 100 m e a medida da área é 40 m².
d) A medida do perímetro é 40 m e a medida da área é 40 m².

10. Observe este quadro, que mostra os valores de duas grandezas.

A	*B*
8	4
16	2
64	0,5
4	8

Comparando esses valores, podemos afirmar que:

a) não há proporcionalidade direta entre as duas grandezas.
b) as grandezas *A* e *B* são diretamente proporcionais.
c) as grandezas *A* e *B* são inversamente proporcionais.
d) a constante de proporcionalidade entre os valores das grandezas *A* e *B* é 16.

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

11. A gerente de uma escola de idiomas registrou a quantidade de novas matrículas feitas durante 20 dias de certo mês. Observe esses dados no quadro abaixo.

1	11	6	2	0	2	5	3	4	6
4	2	1	0	5	9	2	6	3	7

De acordo com os dados registrados pela gerente, é possível afirmar que:

a) a moda desse conjunto de dados é 11 e 9.
b) a mediana desse conjunto de dados é 5.
c) a amplitude desse conjunto de dados é 6.
d) a média aritmética simples desse conjunto de dados é 3,95.

12. Em uma reunião da empresa onde trabalha, Alice pretende apresentar, em um mesmo gráfico, o resultado das vendas em cada mês dos dois últimos anos. Nesse caso, qual é o tipo de gráfico mais apropriado para Alice utilizar?

a) Gráfico de setores.
b) Gráfico de segmentos.
c) Gráfico de barras verticais.
d) Gráfico de barras horizontais.

Respostas

1. alternativa b
2. alternativa d
3. alternativa d
4. alternativa c
5. alternativa b
6. alternativa d
7. alternativa b
8. alternativa d
9. alternativa b
10. alternativa c
11. alternativa d
12. alternativa b

Comentários da avaliação

Na **questão 1**, se julgar necessário, solicite aos estudantes que calculem o valor de cada produto anunciado no *site* e anunciado na loja e, depois, analisem as afirmações. Espera-se que obtenham os seguintes valores:

	Preço no *site*	Preço na loja
Celular	R$ 490,00	R$ 529,20
Aparelho de TV	R$ 588,00	R$ 529,20

Caso ocorra algum erro, é provável que haja algum problema de interpretação. Nesse caso, acompanhe a resolução para identificar possíveis equívocos.

Na **questão 2**, caso os estudantes assinalem a **alternativa a**, é possível que tenham adicionado os expoentes no cálculo de potências de potências. Nesse caso, retome as propriedades da potenciação com expoentes inteiros.

Na **questão 3**, caso ocorra algum equívoco, retome com os estudantes a representação de uma equação de 1º grau com duas incógnitas como uma reta no plano cartesiano. Além disso, verifique se eles notam que pode ser escrita uma equação equivalente à equação dada, por exemplo: $y = 2x - 2$. Eles podem identificar pontos nos gráficos e conferir se as coordenadas desses pontos satisfazem a equação.

Na **questão 4**, verifique se os estudantes percebem que podem aplicar o conceito de circunferência ou de mediatriz como lugar geométrico para resolver esse problema. Para a circunferência, a bola será o ponto fixo (centro) e os dois jogadores serão pontos da circunferência, ou seja, pontos do plano que equidistam do ponto fixo; para a mediatriz, os dois jogadores serão os pontos fixos (extremidades de um segmento de reta) e a bola será o ponto da mediatriz, ou seja, um ponto do plano equidistante dos dois pontos fixos. Em caso de dificuldades, retome esses conceitos.

Na **questão 5**, verifique se os estudantes conseguem identificar que, por ser um hexágono regular, a medida de abertura w, ou de qualquer outro ângulo interno desse polígono, é igual a 120°. Como o ângulo $G\hat{F}H$ é suplementar a um dos ângulos internos do hexágono, sua medida de abertura y é igual a 60°. Sabendo que o ângulo $F\hat{H}G$ também é suplementar a um ângulo interno do hexágono e que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é 180°, é possível calcular que a medida de abertura x é igual a 60°. Considerando que os ângulos $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}B$ também são suplementares a ângulos internos do hexágono, então, determinamos que a medida de abertura do ângulo z é igual a 60°. Portanto, a soma das medidas de abertura x, y, z e w é dada por: $60° + 60° + 60° + 120° = 300°$

Se julgar necessário, retome com os estudantes o estudo sobre ângulos suplementares e medidas de abertura de ângulos internos de polígonos regulares.

Na **questão 6**, confira se os estudantes identificam que o número de casos favoráveis (bolinha azul, amarela ou vermelha) é 10, mesmo número de elementos do espaço amostral. Permita que eles resolvam a questão identificando também separadamente a probabilidade de cada cor de bolinha ser retirada da urna:

- bolinha azul: $\frac{4}{10}$;
- bolinha vermelha: $\frac{2}{10}$.
- bolinha amarela: $\frac{4}{10}$;

Depois, devem adicionar essas probabilidades para obter a resposta:

$$\frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{2}{10} = \frac{10}{10}$$

Caso tenham dúvidas, retome o conceito de probabilidade.

Na **questão 7**, considerando que a diagonal do paralelogramo forma dois triângulos, os estudantes podem notar que esses triângulos são congruentes pelo caso LLL, pois lados opostos de paralelogramos são congruentes e a diagonal é lado comum dos triângulos.

Assim, ficará mais fácil a identificação de que a medida de abertura a é igual a 60° e a medida de abertura b é igual 73°. Para determinar a medida de abertura c, basta os estudantes relembrarem que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. Portanto, devem concluir que a medida de abertura c é igual a 47° e que $a + b + c = 180°$. Se julgar necessário, retome os estudos sobre os casos de congruência de triângulos e a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo.

Na **questão 8**, para analisar as afirmações de cada alternativa, os estudantes devem calcular medidas de área de quadriláteros e triângulos. Caso apresentem dificuldades, retome o estudo do cálculo de medidas de área de figuras geométricas planas.

Na **questão 9**, verifique se os estudantes conseguem escrever a equação do 2º grau correspondente à medida de área do quadrado maior ($4x^2 = 400$) e, com base nela, determinar a medida de comprimento x do lado do quadrado menor. Sabendo esse valor, espera-se que eles calculem a medida do perímetro e a medida de área do quadrado menor. Caso tenham dúvidas, retome o estudo sobre medidas de perímetro e de área de um quadrado.

Na **questão 10**, os estudantes devem analisar os valores das grandezas no quadro para verificar se há alguma relação entre eles. Se julgar necessário, oriente-os a reorganizar os valores no quadro para que a análise seja facilitada. Por exemplo:

A	*B*
4	8
8	4
16	2
64	0,5

Desse modo, é mais fácil verificar que, ao dobrar um valor da grandeza A, o valor correspondente da grandeza B se reduz pela metade, sendo possível identificar que essas grandezas são inversamente proporcionais. Caso os estudantes apresentem dúvidas, retome o conceito de grandezas direta ou inversamente proporcionais e o cálculo da constante de proporcionalidade.

Na **questão 11**, se os estudantes tiverem dificuldades, é provável que não tenham clareza sobre o conceito das medidas de tendência central e de amplitude. Nesse caso, retome o estudo sobre média, moda, mediana e amplitude.

Na **questão 12**, converse com os estudantes sobre o que Alice pretende representar no gráfico e saliente que é preciso fazer essa avaliação para escolher o tipo de gráfico mais adequado. Destaque a eles que diferentes tipos de gráficos podem ser usados para representar os mesmos dados, mas alguns são mais adequados para transmitir determinadas informações. Leve-os a perceber que um gráfico de setores não seria adequado para a situação pois os dados não são partes de um todo, e que os gráficos de barras poderiam ser usados, mas não possibilitam a visualização de crescimentos ou decrescimentos ao longo do tempo tão bem como o gráfico de segmentos.

SUGESTÕES PARA PESQUISA OU CONSULTA PARA O PROFESSOR

Sugestões de livros

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução de: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro aponta por que a Matemática é vista como vilã pelas pessoas. Por meio de pesquisas, mostra aos professores e pais como ajudar os estudantes a transformar as experiências negativas com a Matemática em mentalidades de crescimento. Aborda ainda a questão do erro como uma forma de crescimento e traz atividades práticas que podem ser aplicadas dentro e fora da sala de aula.

BOALER, J.; MUNSON, J.; Willian, C. **Mentalidades matemáticas na sala de aula**: ensino fundamental. Porto Alegre: Penso, 2019.

Este livro traz atividades práticas e desafiadoras – alinhadas à BNCC – que permitem ao professor engajar seus estudantes a partir de uma nova concepção de Matemática, mais aberta e criativa e que promove o protagonismo dos estudantes.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: UFRGS, 2017.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores). Nesse trabalho encontram-se diferentes sugestões de atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. (org.). **O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica [livro eletrônico]**: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018.

A obra compartilha propostas de sala de aula relacionadas ao Pensamento Algébrico que vão da Educação Infantil ao Fundamental II. Traz tarefas elaboradas e colocadas em prática, bem como os resultados obtidos com esse trabalho nas diferentes turmas pelos integrantes do Grucomat (Grupo Colaborativo de Matemática). O *link* de acesso para a obra está disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf.

PONTE, J. P. *et al*. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e as dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

TORRES, J. D. S. **Jogos de Matemática e de Raciocínio Lógico**. 2 ed. Petrópolis: Vozes, 2013.

O livro apresenta uma coletânea de jogos de matemática e raciocínio lógico, que podem ser propostos em qualquer momento do ano letivo. São propostos jogos com números, jogos com xadrez e dominó, sofismas e diferentes tipos de enigma.

Sugestões de *sites*

- Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM):

http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/
Acesso em: 5 jun. 2022.
Disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de educação matemática.

- Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec):

http://www.edumatec.mat.ufrgs.br
Acesso em: 5 jun. 2022.
O *site* oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- Laboratório de Ensino de Matemática (LEM):

http://www.usp.br/line/lem1.html
Acesso em: 5 jun. 2022.
Site do Laboratório de Ensino de Matemática, objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- Plataforma Laplace

https://www.bancolaplace.com.br/
Acesso em: 5 jun. 2022.
A plataforma traz questões com resoluções completas, jogos, resumos teóricos e videoaulas por assunto ou habilidade. O professor pode ainda gerar provas digitais e simulados dos principais vestibulares com correção automática.

- Plataforma Youcubed:

https://www.youcubed.org/pt-br/
Acesso em: 5 jun. 2022.
A plataforma foi desenvolvida pela Universidade de Stanford, pelas professoras Jo Boaler e Cathy Willians. Foi traduzido pelo Instituto Sidarta e Itaú Social. Traz conteúdos como atividades, jogos, aplicativos e videoaulas para ensinar Matemática de forma criativa. É baseado nas ideias do livro *Mentalidades matemáticas*, de Jo Boaler.

- Rede Mentalidades Matemáticas (Rede MM):

https://mentalidadesmatematicas.org.br/
Acesso em: 19 jul. 2022.
O *site* é uma criação do Instituto Sidarta em parceria com o Centro de Pesquisas Youcubed, da Universidade de Stanford, com o suporte do Itaú Social. Traz informações, recursos, cursos, artigos científicos e atividades variadas para a aplicação das ideias das mentalidades matemáticas, propagadas pela professora Jo Boaler.

- *Site* oficial da família e dos admiradores do matemático Malba Tahan:

https://malbatahan.com.br/
Acesso em: 19 jul. 2022.
O *site* traz teses, dissertações, artigos e relatos referentes a esse matemático que esteve à frente do seu tempo, propondo uma Matemática com significado. Possui desafios matemáticos.

- Nova escola:

https://novaescola.org.br/conteudo/12858/inclusao-voce-ja-ouviu-falar-em-tecnologias-assistivas
Acesso em: 8 ago. 2022.
Disponibiliza diversos recursos digitais gratuitos que poderão ajudá-lo na inclusão de estudantes com deficiência.

Sugestões de vídeos

- Coleção Matemática Multimídia, da Universidade de Campinas (Unicamp):

https://m3.ime.unicamp.br/
Acesso em: 5 jun. 2022.
O *site* traz diversos vídeos com conteúdos de Matemática voltados para o Ensino Médio. Alguns desses conteúdos podem ser trabalhados com estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental e são acompanhados de um “Guia do Professor”. Além dos vídeos, no *site* é possível encontrar experimentos, *softwares* e áudios.

Resoluções e comentários das atividades

Revisão dos conteúdos de anos anteriores

Para o capítulo 1 – Conjuntos numéricos

Página 10

1. Para identificar os números naturais e inteiros em cada item, os estudantes devem levar em consideração os sinais e a representação de cada número.

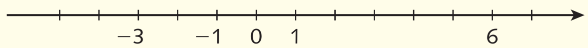
a) Número natural: 5; números inteiros: 5 e –5.

b) Não há número natural; números inteiros: -2, 0.

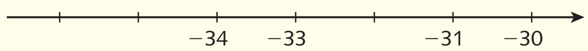
c) Número natural: 10 e 12; números inteiros: todos.

d) Nenhum número natural; nenhum número inteiro.

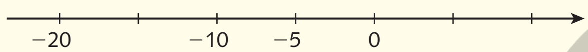
2. **a)** $A = 6$; $C = -3$



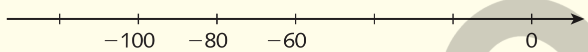
b) $X = -34$; $Y = -33$



c) $W = -20$; $Z = 0$



d) $M = -60$; $N = 0$



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

3. **a)** Falsa, -12 é menor que 5.

b) Verdadeira.

c) Falsa, -12 é menor que -5.

d) Verdadeira.

4. **a)** Verdadeira.

b) Falsa, -7 é um número inteiro e também é um número racional $\left(\text{pode ser escrito como } -\dfrac{7}{1}\right)$.

c) Falsa, 8,8 não é inteiro, mas é racional, pois $8{,}8 = \dfrac{88}{10}$.

d) Verdadeira.

Apenas as afirmações dos itens **a** e **d** são verdadeiras.

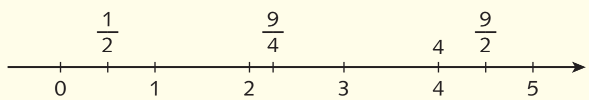
5. **a)** $-12 < 5$

b) $2{,}7 > -5$

c) $-2{,}2 < -2{,}1$

d) $-\dfrac{1}{5} > -\dfrac{1}{2}$

6.



A: 4. A letra A representa o ponto que corresponde ao número 4.

$B : \dfrac{1}{2}$. O número correspondente ao ponto B é maior que 0 e menor do que 1. O único número nestas condições presente no quadro é o $\dfrac{1}{2}$. Portanto, o ponto B corresponde ao número $\dfrac{1}{2}$.

$C : \dfrac{9}{4}$. O número correspondente ao ponto C é maior que 2 e menor do que 3. O único número do quadro nestas condições é o $\dfrac{9}{4}$. Portanto, o ponto C corresponde ao número $\dfrac{9}{4}$.

$D : \dfrac{9}{2}$. O número correspondente ao ponto D é maior que 4 e menor do que 5. O único número que sobrou nestas condições é o $\dfrac{9}{2}$. Portanto, o ponto D corresponde ao número $\dfrac{9}{2}$.

Para o capítulo 2 – Potenciação e radiciação

Páginas 11 e 12

7. Temos que:

a) $(-25)^{10} > 0$, pois o expoente é um número par.

b) $(+15)^1 = 15 > 0$

c) $(300)^{12} > 0$, pois o expoente é um número par.

d) $(-29)^{63} < 0$, pois o expoente é um número ímpar e a potência terá o mesmo sinal da base, que é negativo.

e) $(-0{,}25)^9 < 0$, pois o expoente é um número ímpar e a potência terá o mesmo sinal da base, que é negativo.

f) $\left(\dfrac{15}{8}\right)^{15} > 0$, pois o expoente é um número ímpar e a potência terá o mesmo sinal da base, que é positivo.

g) $(-0{,}36)^0 = 1 > 0$

h) $(-200, 1)^{55} < 0$, pois o expoente é um número ímpar e a potência terá o mesmo sinal da base, que é negativo.
Portanto, as potências que têm resultados positivos são as dos itens **a**, **b**, **c**, **f** e **g**.

8.

a) $(-6)^4 = (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = +1296$

b) $(+6)^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

c) $(-3)^6 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = +729$

d) $2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$

e) $(-1{,}1)^3 = (-1{,}1) \cdot (-1{,}1) \cdot (-1{,}1) = -1{,}331$

f) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3 = \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{8}$

g) $0{,}3^4 = 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}0081$

h) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 = \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{32}$

9. **a)** $\sqrt{64} = 8$, pois $8^2 = 64$.

b) $-\sqrt{81} = -9$, pois $-9^2 = -81$.

c) $\sqrt{100} = 10$, pois $10^2 = 100$.

d) $-\sqrt{16} = -4$, pois $-4^2 = -16$.

e) $\sqrt{49} = 7$, pois $7^2 = 49$.

f) $-\sqrt{4} = -2$, pois $-2^2 = -4$.

10. Calculando as raízes, temos as associações:

A) $\sqrt{0{,}0001} = \sqrt{\dfrac{1}{10\,000}} = \dfrac{1}{100} = 0{,}01 \rightarrow A - II$

B) $\sqrt{1{,}44} = \sqrt{\dfrac{144}{100}} = \dfrac{12}{10} = 1{,}2 \rightarrow B - I$

C) $\sqrt{0{,}81} = \sqrt{\dfrac{81}{100}} = \dfrac{9}{10} = 0{,}9 \rightarrow C - IV$

D) $\sqrt{0{,}25} = \sqrt{\dfrac{25}{100}} = \dfrac{5}{10} = 0{,}5 \rightarrow D - III$

11. **a)** $\sqrt{\dfrac{4}{25}} = \sqrt{\dfrac{2^2}{5^2}} = \dfrac{2}{5}$

b) $\sqrt{\dfrac{9}{64}} = \sqrt{\dfrac{3^2}{8^2}} = \dfrac{3}{8}$

c) $-\sqrt{\dfrac{100}{4}} = -\sqrt{\dfrac{10^2}{2^2}} = -\dfrac{10}{2} = -5$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{16}} = \sqrt{\dfrac{1^2}{4^2}} = \dfrac{1}{4}$

12. **a)** Verdadeira, pois $10^2 = 100$.

b) Falsa, pois 0 é um quadrado perfeito: $0^2 = 0$.

c) Falsa, pois não existe número inteiro ao quadrado que resulte em $\dfrac{35}{10}$.

d) Verdadeira, pois 0,4 não é um quadrado perfeito.

13. **a)** $\sqrt{W} = 4$, logo $W = 4^2 = 16$.

b) $\sqrt{X} = 9$, logo $X = 9^2 = 81$.

c) $\sqrt{Y} = 8$, logo $Y = 8^2 = 64$.

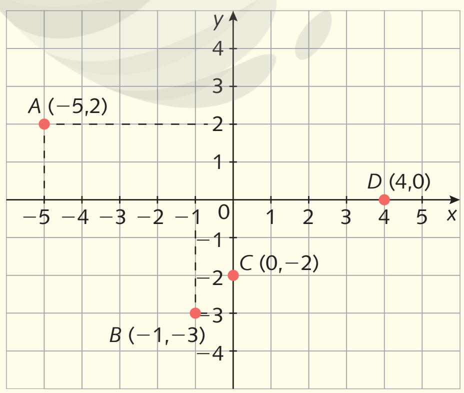
d) $\sqrt{Z} = 0{,}04$, logo $Z = (0{,}2)^2 = 0{,}04$.

Para o capítulo 3 – Sistemas de equações do 1º grau

Página 12

14. Observando o plano cartesiano, temos M (2, 5); N (−3, 1); P (0, −6) e Q (4, −6).

15.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Para o capítulo 4 – Ângulos e transformações geométricas

Páginas 12 a 14

16. **a)** Falsa. A abertura de um ângulo reto mede 90°.

b) Verdadeira. Dois ângulos retos têm a mesma medida de abertura (90°). Portanto, são sempre congruentes.

c) Verdadeira. A medida de abertura de um ângulo obtuso é maior que 90°.

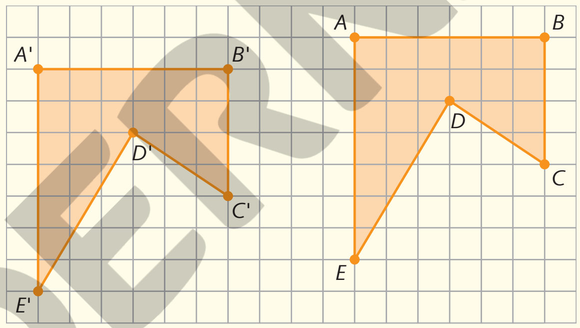
d) Falsa. A medida de abertura de um ângulo agudo é menor que 90°.

17. Observando a figura, temos que os ângulos $E\hat{O}D$ e $D\hat{O}C$ têm a mesma medida de abertura, assim como os ângulos $C\hat{O}B$ e $B\hat{O}A$. Portanto, $E\hat{O}D \cong D\hat{O}C$ e $C\hat{O}B \cong B\hat{O}A$.

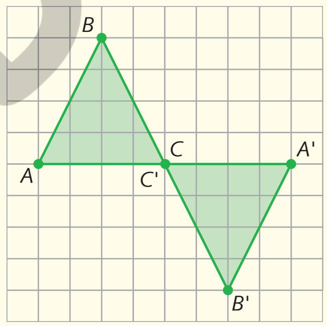
18. **a)** Reflexão, pois as figuras são congruentes e os pontos correspondentes estão a uma mesma medida de distância da reta *r*.

b) A reta *r* é o eixo de simetria.

19. **a)**



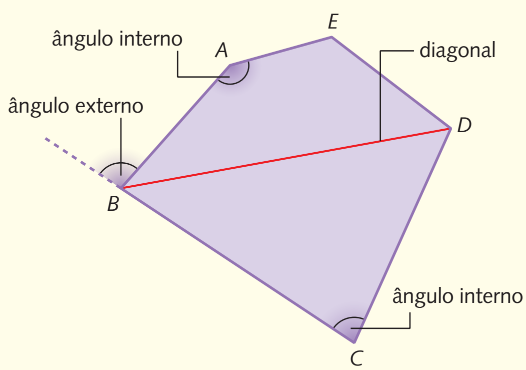
b)



Para o capítulo 5 – Polígonos

Páginas 15 e 16

20. Exemplo de resposta.



21. **a)** $x + 75° + 43° = 180°$

$x + 118° = 180°$

$x = 180° - 118°$

$x = 62°$

b) $2x + 130° + 2x + 130° = 2 \cdot 180°$

$4x + 260° = 360°$

$4x = 360° - 260°$

$4x = 100°$

$x = \dfrac{100°}{4}$

$x = 25°$

c) $x + 90° + 98° + 90° + 152° = 3 \cdot 180°$

$x + 430° = 540°$

$x = 540° - 430°$

$x = 110°$

22. O polígono do item **a**, pois todos os ângulos internos têm mesma medida de abertura e todos os lados têm mesma medida de comprimento.

23. **a)** Se cada ângulo interno mede 90º, a soma das medidas dos ângulos internos é 360º, então concluímos que este polígono pode ser decomposto em 2 triângulos. Portanto, este polígono regular é um quadrilátero, ou seja, um quadrado.

b) Se cada ângulo externo mede 120º, cada ângulo interno mede 60º . Como a soma das medidas dos ângulos internos é 180º, o polígono regular é um triângulo equilátero.

Para o capítulo 6 - Probabilidade

Página 16

24. **a)** Falsa, as chances são iguais pois a moeda é "honesta".

b) Verdadeira.

c) Verdadeira, pois em um "dado honesto" com as faces numeradas de 1 a 6, não há uma face com número maior que 6. Portanto, a probabilidade de sair um número maior que 6 é igual a 0.

25. **a)** A probabilidade é de 2 em 12 ou $\dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

b) A probabilidade é de 3 em 12 ou $\dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$.

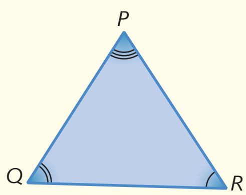
c) A probabilidade é de 6 em 12 ou $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$.

d) A probabilidade é de 1 em 12 ou $\dfrac{1}{12}$.

Para o capítulo 7 - Triângulos e quadriláteros

Páginas 16 e 17

26. Exemplo de resposta.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

27. **a)** Verdadeira.

b) Falsa, $\overline{MJ}$ é um lado do triângulo *IMJ*.

c) Verdadeira.

d) Falsa, *J* é vértice do triângulo *IMJ*.

28. **a)** Trapézio, pois tem apenas um par de lados paralelos.

b) Outro quadrilátero, pois não apresenta lados paralelos.

c) Paralelogramo, pois tem dois pares de lados paralelos.

d) Trapézio, pois tem apenas um par de lados paralelos.

29. **a)** Verdadeira, pois os 4 ângulos internos de um quadrado são retos.

b) Falsa, nem todo retângulo tem lados com a mesma medida de comprimento.

c) Verdadeira.

d) Verdadeira.

e) Falsa, todos os losangos têm os quatro lados congruentes.

f) Falsa, nem todo retângulo tem lados com a mesma medida de comprimento. Portanto, nem todo retângulo é um quadrado.

Apenas as afirmações dos itens **a**, **c** e **d** são verdadeiras.

Para o capítulo 8 - Área, volume e capacidade

Páginas 17 e 18

30. **a)** $A = \dfrac{(28\text{ cm} + 15\text{ cm}) \cdot 16\text{ cm}}{2} = \dfrac{43\text{ cm} \cdot 16\text{ cm}}{2} =$

$= \dfrac{688\text{ cm}^2}{2} = 344\text{ cm}^2$

b) $A = \dfrac{10\text{ cm} \cdot 21\text{ cm}}{2} = \dfrac{210\text{ cm}}{2} = 105\text{ cm}^2$

c) $A = 9{,}5\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} = 142{,}5\text{ cm}^2$

d) $A = \dfrac{5\text{ cm} \cdot 2{,}9\text{ cm}}{2} = \dfrac{14{,}5\text{ cm}^2}{2} = 7{,}25\text{ cm}^2$

31. $V = 5\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} \cdot 7\text{ cm} = 525\text{ cm}^3$

A medida do volume do paralelepípedo é igual a 525 cm^3.

32. A medida do volume de um cubo é obtida calculando o cubo da medida de comprimento de uma de suas arestas. Assim:

a) $V = (12\text{ cm})^3 = 1728\text{ cm}^3$

b) $V = (0{,}4\text{ m})^3 = 0{,}064\text{ m}^3$

c) $V = (9\text{ cm})^3 = 729\text{ cm}^3$

Para o capítulo 9 - Equações do 2º grau

Páginas 18 a 20

33. A sentença do item **b** não é uma equação, pois não tem incógnita. A sentença do item **d** também não é uma equação, pois não é uma igualdade. Portanto, somente as sentenças dos itens **a** e **c** são equações.

34. **a)** Falsa, pois não é uma igualdade.

b) Verdadeira. É um equação do 1º grau na incógnita *t*.

c) Falsa, apesar ser uma equação, 4 não é uma incógnita.

d) Verdadeira.

e) Verdadeira, pois o expoente da incógnita *k* é 3 (é uma equação de 3º grau).

São verdadeiras as afirmações dos itens **b**, **d** e **e**.

35. Substituindo x por -1 nas equações, teremos:

a) $-3 = 5 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1)$

$-3 = -5 + 2$

$-3 = -3$ (sentença verdadeira)

$S = \{-1\}$ é o conjunto solução da equação $-3 = 5x - 2x$.

b) $8 \cdot (-1) - 10 \neq -2$

$-8 - 10 = -2$

$-18 = -2$ (sentença falsa)

$S = \{-1\}$ não é o conjunto solução da equação $8x - 10 = -2$.

c) $5 \cdot (-1) - 14 \neq 12 \cdot (-1)$

$-5 - 14 = -12$

$-19 = -12$ (sentença falsa)

$S = \{-1\}$ não é o conjunto solução da equação $5x - 14 = 12x$.

d) $-\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$

$-\frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$ (sentença verdadeira)

$S = \{-1\}$ é o conjunto solução da equação $\frac{x}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$.

36. $-8x + 23 = 23 + x$

$0 = 9x$

$x = 0$

Como 0 é um número real e é raiz da equação, temos que $S = \{0\}$.

Alternativa **a**.

37. a) $5x + 10 = -10$

$5x = -10 - 10$

$5x = -20$

$x = -\frac{20}{5}$

$x = -4$

Como -4 é um número real e é raiz da equação, então $S = \{-4\}$.

b) $x - 12 = 29$

$x = 29 + 12$

$x = 41$

Como 41 é um número real e é raiz da equação, então $S = \{41\}$.

c) $2x = -2 + 6x$

$2 = 6x - 2x$

$2 = 4x$

$x = \frac{2}{4}$

$x = \frac{1}{2}$

Como $\frac{1}{2}$ é um número real e é raiz da equação, então $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

38. a) Verdadeira. Resolvendo a equação, encontramos:

$2x + 3 = -8 + x$ $\qquad$ $x = -11$

Como -11 não é um número natural, então $S = \varnothing$.

b) Falsa. Substituindo x por 10 na equação, temos:

$9 + 5 \cdot 10 = 5{,}9$

$9 + 50 = 5{,}9$

$50 = 5{,}9$ (sentença falsa)

Portanto, $S = \{10\}$ não é o conjunto solução da equação $9 + 5x = 5{,}9$.

c) Verdadeira. Substituindo x por 12 na equação, temos:

$-48 = 3 \cdot 12 - 7 \cdot 12$

$-48 = 36 - 84$

$-48 = -48$ (sentença verdadeira)

Portanto, $S = \{12\}$ é o conjunto solução da equação $-48 = 3x - 7x$.

Para o capítulo 10 – Grandezas e proporcionalidade

Páginas 20 e 21

39. a) $\frac{30}{3} = 10$

b) $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

c) $\frac{90}{123} = \frac{30}{41}$

40. a) Existe proporção, pois $11 \cdot 18 = 22 \cdot 9 = 198$.

b) Não apresenta proporção.

c) Existe proporção, pois $36 \cdot 600 = 100 \cdot 216 = 21\,600$.

d) Não apresenta proporção.

41. Utilizando a propriedade fundamental das proporções, temos:

a) $x = \frac{3 \cdot 10}{2} = 15$

b) $x = \frac{15 \cdot 8}{4} = 30$

c) $x = \frac{100 \cdot 13}{26} = 50$

42. a)

X	Y
5	12
10	24
2,5	6
15	36

X e Y são diretamente proporcionais. Assim:

$\frac{2{,}5}{15} = \frac{6}{x}$

$2{,}5x = 15 \cdot 6$

$2{,}5x = 90$

$x = 36$

b)

X	Y
0,2	16
1	80
10	800
0,1	8

X e Y são diretamente proporcionais. Assim:

$\frac{0{,}2}{1} = \frac{16}{y}$

$0{,}2y = 16 \cdot 1$

$y = 16 : 0{,}2 = 80$

43. $24 \cdot 4 = 96 \cdot 1$

Assim, valor de N será 96 quando M for 1.

Para o capítulo 11 – Medidas de tendência central e pesquisa estatística

Página 21

44. $\frac{\text{R\$ } 36{,}80 + \text{R\$ } 42{,}90 + \text{R\$ } 39{,}90 + \text{R\$ } 31{,}80 + \text{R\$ } 40{,}00}{5} =$

$= \frac{\text{R\$ } 191{,}40}{5} = \text{R\$ } 38{,}28$

O preço médio desse produto será R$ 38,28.

45. $A = \dfrac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 1 \cdot 7}{2 + 3 + 1} = \dfrac{14 + 24 + 7}{6} = \dfrac{45}{6} = 7{,}5$

$B = \dfrac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot 7}{2 + 3 + 1} = \dfrac{16 + 21 + 7}{6} = \dfrac{44}{6} \simeq 7{,}3$

Pontuação média da marca A: 7,5. Pontuação média da marca $B \approx 7{,}3$.

Para o capítulo 12 – Gráficos estatísticos

Página 22

46. Espera-se que os estudantes interpretem: do gráfico de barras, que o equipamento mais usado para acessar a internet é o celular; do gráfico de segmentos, que os salários das mulheres são muito menores que os salários dos homens; do gráfico de setores, que a maior parte do consumo de energia elétrica no Brasil é industrial, mas que o percentual do consumo residencial também é elevado.

Unidade 1

Capítulo 1 – Conjuntos numéricos

Trocando ideias – Página 24

- Resposta pessoal. Espera–se que os estudantes citem: ficar dentro de casa, procurar refúgio em edifícios, ficar longe de áreas descampadas, afastar-se de árvores isoladas, entre outras.
- Sim, 78 000 000 é um número inteiro e um número racional.
- 0,000001 e 0,001 não são números inteiros, mas são racionais. $\left(0{,}000001 = \dfrac{1}{1000000} \text{ e } 0{,}001 = \dfrac{1}{1000}\right)$.
- Resposta pessoal. Os estudantes podem citar o número Pi (π) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ etc.

Atividades – Página 27

1. Para determinar o antecessor de um número, subtraímos 1 do número e, para determinar o sucessor, adicionamos 1 ao número. Assim:

a) antecessor: 16 $(17 - 1 = 16)$ e sucessor: 18 $(17 + 1 = 18)$.

b) antecessor: 998 $(999 - 1 = 998)$ e sucessor: 1 000 $(999 + 1 = 1\,000)$.

c) antecessor: 999 $(1\,000 - 1 = 999)$ e sucessor: 1 001 $(1\,000 + 1 = 1\,001)$.

d) antecessor: 12 988 $(12\,989 - 1 = 12\,988)$ e sucessor: 12 990 $(12\,989 + 1 = 12\,990)$.

2. a) Os números devem ser maiores que 4 e menores que 9; são: 5, 6, 7, 8.

b) Não existe um número maior que 11 e menor que 2 ao mesmo tempo.

3. a) $a_4 = a_2 + a_3 = 4 + 6 = 10$;

$a_5 = a_3 + a_4 = 6 + 10 = 16$;

$a_6 = a_4 + a_6 = 10 + 16 = 26$.

Logo, os termos faltantes são: 10, 16 e 26.

b) $a_7 = 1 + (7 - 1) \cdot (21 - 17) = 1 + 6 \cdot 4 = 25$

$a_8 = 1 + (8 - 1) \cdot (25 - 21) = 1 + 7 \cdot 4 = 29$

Logo, os termos faltantes são: 25 e 29.

4. Resposta pessoal. Exemplo de resposta.
2, 5, 8, 11, 14, ...

Questão proposta na legenda – Página 27

Como a medida de temperatura indicada no termômetro tem o sinal de menos e as pessoas da imagem estão agasalhadas, espera-se que os estudantes respondam que a medida de temperatura registrada é abaixo de zero grau.

Atividades – Página 28

5. a) São números naturais: 0, 5, 14, 57.

b) São números inteiros: -100, -18, -8, -1, 0, 5, 14, 57.

c) Sim, todo número natural é um número inteiro.

6. a) Falsa. Por exemplo, não há um número inteiro entre 3 e 2.

b) Verdadeira.

c) Falsa. Todo número natural é também um número inteiro.

7. a) 1, 3, 5, 7 e 9.

b) -4, -3, -2 e -1.

c) Exemplo de resposta: -21, -22, -23.

d) Somente naturais: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

8. a) O sucessor de 100 é o número 101, pois $100 + 1 = 101$.

b) O sucessor de -30 é o número -29, pois $-30 + 1 = -29$.

c) $n + 1$, em que n é um número inteiro.

d) $a - 1$, em que a é um número inteiro.

9. Para descobrir o valor do depósito realizado, fazemos:
R$ 970,00 + R$ 380,00 = R$ 1 350,00

Pedro realizou um depósito de R$ 1 350,00.

10. a) Há sete números inteiros: -4, -3, -2, -1, 0, 1 e 2.

b) O maior inteiro negativo desta sequência é o -1. Os estudantes podem utilizar a reta numérica como auxílio para realizar a atividade.

Um pouco de história – Página 31

Os estudantes devem dividir o numerador pelo denominador das frações com o auxílio de uma calculadora. Os resultados podem ser registrados de maneira aproximada.

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL
1	$0{,}888\ldots = 0{,}\overline{8}$	0,79012346	0,75	$0{,}666\ldots = 0{,}\overline{6}$

LÁ	SI	DÓ
$0{,}592592\ldots = 0{,}\overline{592}$	0,52674897	0,5

Atividades – Página 34

11. a) Verdadeira, todo número inteiro é racional, pois pode ser representado como uma fração cujo denominador é igual a 1.

b) Falsa, nem todo número racional é um número inteiro. Por exemplo, 0,1 é um número racional, mas não é um número inteiro.

c) Falsa, nem todo número racional é um número natural. Por exemplo, 0,25 é racional e não é natural.

d) Verdadeira, entre dois racionais existem infinitos números racionais.

12. **a)** Exemplo de resposta: 3,4588.

b) Exemplo de resposta: 1,05123.

- Há infinitas respostas, pois entre dois números racionais há infinitos números racionais.

13. **a)** $\frac{6}{5} = 1,2$

```
6     | 5
1 0    1, 2
  0
```

b) $\frac{157}{100} = 1,57$

c) $\frac{7}{3} = 2,333... = 2,\overline{3}$

```
7      | 3
1 0     2,33
  1 0
    1
```

d) $\frac{13}{11} = 1,181818... = 1,\overline{18}$

```
1 3      | 11
  2 0     1,1818
    9 0
      2 0
        9 0
```

e) $-\frac{5}{8} = -0,625$

```
5 0      | 8
  2 0     0,625
    4 0
      0
```

f) $-\frac{15}{90} = -0,166666... = -0,1\overline{6}$

```
1 5 0     | 90
  6 0 0    0,166
    6 0 0
      6 0
```

g) $\frac{1}{55} = 0,0181818... = 0,0\overline{18}$

```
1 0 0     | 55
  4 5 0    0,0181
    1 0 0
      4 5
```

h) $-\frac{3}{4} = -0,75$

```
3 0      | 4
  2 0     0,75
    0
```

- São dízimas periódicas: $\frac{7}{3}, \frac{13}{11}, -\frac{15}{90}$ e $\frac{1}{55}$.

14. **a)** Período 7, dízima periódica composta, pois entre a vírgula e o período existe uma parte não periódica, o algarismo 4.

b) Período 3, dízima periódica simples, pois o período aparece logo após a vírgula.

c) Período 5, dízima periódica composta, pois entre a vírgula e o período existe uma parte não periódica, o algarismo 0.

d) Período 32, dízima periódica simples, pois o período aparece logo após a vírgula.

15. **a)** De maio a dezembro temos 8 meses. Corresponde a $\frac{8}{12}$ de um ano.

b) $8 \cdot \frac{\text{R\$ } 2514,50}{12} = \frac{\text{R\$ } 20116,00}{12} \simeq \text{R\$ } 1676,33$

O valor do décimo terceiro salário recebido foi R$ 1676,33.

16. **a)** Não; exemplo de explicação: a pessoa se esqueceu de apertar a tecla para indicar a vírgula no valor R$ 329,18.

b) R$ 329,18 + R$ 2 231,11 = R$ 2 560,29

O valor correto seria R$ 2560,29.

17. **a)** $\frac{12}{100} \cdot 144 = \frac{1728}{100} = 17,28$

b) $\frac{25}{100} \cdot 1\,024 = \frac{25\,600}{100} = 256$

c) $\frac{1}{100} \cdot 123\,587\,600 = 1\,235\,876$

d) $\frac{24}{100} \cdot 72 = \frac{1728}{100} = 17,28$

18. **a)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que a planilha é a mesma, e as diferenças estão nos valores e percentuais para o aumento.

b)

	A	B	C	D
1	Valor de compra	Porcentagem para o aumento	Valor do aumento	Valor de venda
2	R$ 60,00	23%	0,23 · R$ 60,00 = = R$ 13,80	R$ 60,00 + + R$ 13,80 = = R$ 73,80
3	R$ 80,00	23%	0,23 · R$ 80,00 = = R$ 18,40	R$ 80,00 + + R$ 18,40 = = R$ 98,40
4	R$ 100,00	23%	0,23 · R$ 100,00 = = R$ 23,00	R$ 100,00 + + R$ 23,00 = = R$ 123,00

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Lendo e aprendendo – Página 36

1. **a)** Em maio de 2021.

b) É um indicador social e de saúde que mostra o tempo que a população de determinado local vive, em média.

c) De acordo com o texto, em 2020 era de 74,8 anos, enquanto em 2019 era de 76,7 anos.

d) De acordo com o texto, a expectativa de vida do brasileiro caiu porque houve um alto número de mortes causadas pela Covid-19.

e) Segundo o texto, o Japão tinha a expectativa de vida mais alta em 2020, enquanto a República Centro-Africana tinha a expectativa de vida mais baixa no mesmo período.

2. a) Verdadeira, todos os números são racionais.

b) Falsa, os números 2013, 2019 e 2020 são números racionais.

c) Verdadeira, enquanto a expectativa de vida dos japoneses era de 84,6 anos, a da população da República Centro-Africana era de 53,3 anos.

d) Falsa, os números 2020, 2013 e 2019 aparecem no texto e são números inteiros.

3. a) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes observem que o acesso ao trabalho remoto foi maior para classes com maior renda (A e B) e maior escolaridade.

b) Respostas pessoais. Os estudantes responderão sobre as questões da pandemia de suas famílias.

Atividades - Página 38

19. a) $0,\overline{8} = \dfrac{8}{9}$

$$\begin{aligned} 10x &= 8,\overline{8} \\ -x &= 0,\overline{8} \\ \hline 9x &= 8 \\ x &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$

d) $0,\overline{007} = \dfrac{7}{999}$

$$\begin{aligned} 1000x &= 7,\overline{007} \\ -x &= 0,\overline{007} \\ \hline 999x &= 7 \\ x &= \frac{7}{999} \end{aligned}$$

b) $3,\overline{15} = \dfrac{312}{99}$

$$\begin{aligned} 100x &= 315,\overline{15} \\ -x &= 3,\overline{15} \\ \hline 99x &= 312 \\ x &= \frac{312}{99} \end{aligned}$$

e) $2,4\overline{7} = \dfrac{223}{90}$

$$\begin{aligned} x &= 2,4\overline{7} \\ 100x &= 247,\overline{7} \\ -10x &= 24,\overline{7} \\ \hline 90x &= 223 \\ x &= \frac{223}{90} \end{aligned}$$

c) $0,05\overline{2} = \dfrac{47}{900}$

$$\begin{aligned} x &= 0,05\overline{2} \\ 1000x &= 52,\overline{2} \\ -100x &= 5,\overline{2} \\ \hline 900x &= 47 \\ x &= \frac{47}{900} \end{aligned}$$

f) $0,1\overline{4} = \dfrac{13}{90}$

$$\begin{aligned} x &= 0,1\overline{4} \\ 100x &= 14,\overline{4} \\ -10x &= 1,\overline{4} \\ \hline 90x &= 13 \\ x &= \frac{13}{90} \end{aligned}$$

20. a) $5 + 0,777... = 5,777...$

b) $8 + 0,333... = 8,333...$

c) $0,6 + 0,222... = 0,8222...$

d) $1,5 + 0,555... = 1 + 0,5 + 0,555... =$
$= 1 + 1,0555... = 2,0555...$

21. a) 0,5 + 0,555... = 1,0555...

b) $27 \cdot 6 = 162 \Rightarrow 2,7 \cdot 0,06 = 0,162$

$277 \cdot 6 = 1662 \Rightarrow 2,77 \cdot 0,06 = 0,1662$

$2777 \cdot 6 = 16662 \Rightarrow 2,777 \cdot 0,06 = 0,16662$

Logo, $2,\overline{7} \cdot 0,06 = 0,16666...$

22. Utilizando uma calculadora, os estudantes encontrarão os resultados apresentados a seguir:

a) 0,8888...

b) 0,8888...

c) 0,8888...

d) 0,272727...

e) 0,272727...

f) 0,272727...

- Espera–se que os estudantes percebam que os itens **a**, **b** e **c** têm o mesmo resultado e que isso ocorre porque essas divisões, se fossem escritas na forma de fração, seriam frações equivalentes. O mesmo ocorre com os itens **d**, **e** e **f**.

Veja que interessante - Página 39

A resposta dependerá do período que a pesquisa foi feita. Porém, em abril de 2022, o recorde era da Universidade de Ciências Aplicadas de Graubünden, na Suíça, por determinar 62,8 trilhões de casas decimais de π em agosto de 2021.

Atividades - Páginas 39 e 40

23. São irracionais o número π e as raízes que não podem ser expressas como decimal exato ou dízima periódica. Portanto, são irracionais os números dos itens **b**, **d**, **f** e **k**.

24. Os estudantes deverão realizar os cálculos em uma calculadora, adaptando-os conforme o tipo utilizado (científica ou comum).

a) 3,15

b) –0,32

c) 2,45

d) 0,32

25. Os estudantes deverão realizar os cálculos em uma calculadora, adaptando-os conforme o tipo utilizado (científica ou comum).

a) 3,16228

b) 3,16049

c) 3,14286

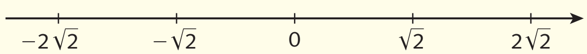
d) 3,14159

e) 3,14626

f) 3,14159

- Os valores mais próximos de π são dados por $\dfrac{355}{113}$ e $\dfrac{13\sqrt{146}}{50}$.

26. Os pontos correspondentes aos números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são simétricos em relação à origem, assim como os pontos correspondentes aos números $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$. Além disso, a medida da distância do ponto que corresponde a $2\sqrt{2}$ à origem é igual ao dobro da medida da distância do ponto que corresponde a $\sqrt{2}$ à origem. O mesmo ocorre com os pontos correspondentes a $-2\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$.



27. Sabendo que $2\sqrt{2} \simeq 2,8$; $\sqrt{3} \simeq 1,7$; $\dfrac{10}{3} \simeq 3,3$ e $\dfrac{4}{3} \simeq 1,3$; temos:

$-1,2; 0,5; \dfrac{4}{3}; \sqrt{3}; 2\sqrt{2}; \dfrac{10}{3}$

Atividades - Página 40

28. a) $\dfrac{40}{5}$ é um número natural, pois $\dfrac{40}{5} = 8$.

b) $\frac{40}{5}$ e -35 são números inteiros.

c) $\frac{40}{5}$; -35; 1,222...; 0,444... e $\frac{1}{7}$ são números racionais.

d) π, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{2}$ são números irracionais.

e) Todos são números reais.

f) -35; $-\sqrt{2}$; $\frac{1}{7}$; 0,444...; 1,222...; $\sqrt{3}$; π; $\frac{40}{5}$

29. a) Exemplo de resposta: 2,1.

b) Exemplo de resposta: π.

c) Não existe número inteiro e não natural maior que 4, pois todo inteiro maior que 4 é um número natural.

30. Todos os números pertencem ao conjunto dos números reais.

31. a) -14, -13 e -12.

b) Exemplo de resposta: $-\frac{7}{10}$; $-\frac{6}{10}$ e $-\frac{55}{100}$.

c) Exemplo de resposta: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.

d) A resposta dependerá das respostas dos itens anteriores. Exemplo de resposta: $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $-\frac{55}{100}$; $-\frac{6}{10}$; $-\frac{7}{10}$; -12; -13 e -14.

32. a) Verdadeira, todo número inteiro é racional, pois pode ser representado por uma fração cujo denominador é igual a 1.

b) Falsa, nem todo número real é um número racional. Por exemplo, $\sqrt{2}$ é um número real que não é racional.

c) Verdadeira, toda dízima periódica tem uma fração geratriz. Logo, é um número racional.

d) Verdadeira, todo número irracional é um número real por definição.

e) Falsa, as dízimas periódicas têm infinitas casas decimais e são números racionais.

f) Falsa, nem todo número real é irracional.

g) Verdadeira, o 0 pertence ao conjunto dos números reais, inteiros e racionais.

Revisão dos conteúdos deste capítulo - Página 41

1. Os estudantes devem copiar apenas a afirmação do item **a**. A afirmação do item **b** é falsa, pois –5 é um inteiro negativo.

2. a) antecessor: 210 ($211 - 1 = 210$); sucessor: 212 ($211 + 1 = 212$).

b) antecessor: 198 ($199 - 1 = 198$); sucessor: 200 ($199 + 1 = 200$).

c) antecessor: 299 ($300 - 1 = 299$); sucessor: 301 ($300 + 1 = 301$).

3. $a_3 = a_1 + a_2 = 2 + 5 = 7$

$a_4 = a_2 + a_3 = 5 + 7 = 12$

$a_5 = a_3 + a_4 = 7 + 12 = 19$

$a_6 = a_4 + a_5 = 12 + 19 = 31$

Logo, a sequência é dada por: 2, 5, 7, 12, 19, 31,...

4. a) 8, 9, 10, 11 b) -10 e -9

5. $-$R\$ 610,00 + R\$ 3 200,00 = R\$ 2 590,00

O novo saldo da conta bancária de Marcos é R\$ 2 590,00.

6. -4, 0 e $\frac{1}{4}$ são números racionais.

7. a) $\frac{1}{2} = 0,5$

```
1 0 |_2__
  0   0,5
```

b) $\frac{3}{5} = 0,6$

```
3 0 |_5__
  0   0,6
```

c) $\frac{123}{100} = 1,23$

d) $-\frac{10}{9} = -1,111\ldots = -1,\overline{1}$

```
1 0    |_9___
  1 0    1,11
    1 0
      1
```

8. a) $0,\overline{5} = \frac{5}{9}$

$$\begin{aligned} 10x &= 5,\overline{5} \\ -x &= 0,\overline{5} \\ \hline 9x &= 5 \\ x &= \frac{5}{9} \end{aligned}$$

b) $0,1\overline{3} = \frac{12}{90}$

$$\begin{aligned} x &= 0,1\overline{3} \\ 100x &= 13,\overline{3} \\ -10x &= 1,\overline{3} \\ \hline 90x &= 12 \\ x &= \frac{12}{90} \end{aligned}$$

c) $1,\overline{23} = \frac{122}{99}$

$$\begin{aligned} 100x &= 123,\overline{23} \\ -x &= 1,\overline{23} \\ \hline 99x &= 122 \\ x &= \frac{122}{99} \end{aligned}$$

d) $0,02\overline{4} = \frac{22}{900}$

$$\begin{aligned} x &= 0,02\overline{4} \\ 1\,000x &= 24,\overline{4} \\ -100x &= 2,\overline{4} \\ \hline 900x &= 22 \\ x &= \frac{22}{900} \end{aligned}$$

9. a) Verdadeira. Como $3,2 = \frac{32}{10}$, então 3,2 é um número racional.

b) Falsa, $\sqrt{16} = 4$ e 4 é um número racional.

c) Falsa, $-\sqrt{3}$ é um número irracional.

d) Verdadeira, $-\sqrt{7}$ é um número irracional.

10. a) $\frac{15}{3}$ pertence ao conjunto dos números naturais, pois $\frac{15}{3} = 5$.

b) -12 e $\frac{15}{3}$ pertencem ao conjunto dos números inteiros.

c) $\frac{15}{3}$; -12; 1,88 e $\frac{3}{7}$ pertencem ao conjunto dos números racionais.

d) $\sqrt{7}$ e π pertencem ao conjunto dos números irracionais.

e) Todos os números pertencem ao conjunto dos números reais.

Capítulo 2 - Potenciação e radiciação

Trocando ideias - Página 42

- Resposta pessoal. Os estudantes relatarão a experiência que tem com armazenamento em nuvem.
- Aproximadamente 15 000 000 000 *bytes* ou $1,5 \cdot 10^{10}$ *bytes*.

Atividades - Página 46

1. a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

c) $2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{125}$

e) $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

f) $10^3 = 1\ 000$

g) $(0,1)^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = 10^2 = 100$

h) $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2} = \left(-\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9}$

i) $10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1\ 000}$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

k) $0^{10} = 0$

l) $0,1818\ldots = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$; assim, temos:

$(0,181818\ldots)^2 = \left(\frac{2}{11}\right)^2 = \frac{4}{121}$

2. a) $3 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) + 5 =$

$= 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 + 1 + 5 = -3 - 2 + 1 + 5 = 1$

b) $(-1)^8 - 3 \cdot (-1)^5 + (-1)^{16} = 1 - 3 \cdot (-1) + 1 =$

$= 1 + 3 + 1 = 5$

c) $2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2^1 + 2^0 =$

$= 64 - 32 + 16 - 8 + 4 - 2 + 1 = 43$

3. Não, pois $(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$, enquanto $-9^2 = -(9) \cdot (9) = -81$.

4. a) $5\ 400 = 5,4 \cdot 10^3$

b) $0,0025 = 2,5 \cdot 10^{-3}$

c) $300\ 000\ 000 = 3,0 \cdot 10^8$

d) $0,00000637 = 6,37 \cdot 10^{-6}$

5. $A = \left(\frac{1}{1}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$

$= 1^2 + \frac{1}{4} + 3^2 + \frac{1}{16} + 5^2 =$

$= 1 + \frac{1}{4} + 9 + \frac{1}{16} + 25 = 35 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 35 + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} =$

$= 35 + \frac{5}{16} = 35\frac{5}{16}$

$B = \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 =$

$= 1^2 + 2^2 + \frac{1}{9} + 4^2 + \frac{1}{25} =$

$= 1 + 4 + \frac{1}{9} + 16 + \frac{1}{25} = 21 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} = 21 + \frac{25}{225} + \frac{9}{225} =$

$21 + \frac{34}{225} = 21\frac{34}{225}$

O valor de *A* é maior que o valor de *B*.

6. Substituindo *g* por 10 m/s² e *t* por 12 s na fórmula, teremos:

$$\frac{10\ \text{m/s}^2 \cdot (12\ \text{s})^2}{2} = \frac{10\ \text{m/s}^2 \cdot 144\ \text{s}^2}{2} = \frac{1\,440\ \text{m}}{2} = 720\ \text{m}$$

O paraquedista percorre 720 m em queda livre durante os 12 primeiros segundos.

7.

MEDIDAS DAS DISTÂNCIAS MÉDIAS DE ALGUNS PLANETAS ATÉ O SOL

Planeta	Medida da distância média ao Sol (km)	Medida expressa em notação científica (km)
Saturno	1 429 400 000	$1,4294 \cdot 10^9$
Vênus	108 200 000	$1,082 \cdot 10^8$
Urano	2 870 990 000	$2,87099 \cdot 10^9$
Mercúrio	57 910 000	$5,791 \cdot 10^7$

Dados obtidos em: https://planetario.ufsc.br/o-sistema-solar/. Acesso em: 4 jul. 2022.

Atividades - Página 48

8. a) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6 = 2^{3+4+5+6} = 2^{18}$

b) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$

c) $(6 : 3)^3 = 2^3$

d) $10^3 \cdot 10 \cdot 10 = 10^{3+1+1} = 10^5$

e) $(3^4)^{-3} = 3^{4 \cdot (-3)} = 3^{-12}$

f) $6^4 : 6^2 = 6^{4-2} = 6^2$

g) $(2 \cdot 3)^3 = 6^3$

h) $7^{15} : 7^{10} = 7^{15-10} = 7^5$

i) $10^{-1} \cdot 10^2 \cdot 10^{-1} = 10^{-1+2-1} = 10^0$

9. a) $\frac{2^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^6} = \frac{2^{17}}{2^{11}} = 2^6 = 64$

b) $(7 \cdot 4)^2 = 28^2 = 784$

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \frac{1}{64}$

d) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

10. Temos que:

$$\begin{array}{rl} 16,666 = 10x & \\ 1,6666 = x & - \\ \hline 15 = 9x & \end{array}$$

$\frac{15}{9} = \frac{5}{3} = x$

Assim:

$(1,6666\ldots)^{-1} + \frac{(3^{10} \cdot 3^{-5})^3}{9^8} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-1} + \frac{(3^5)^3}{(3^2)^8} =$

$= \frac{3}{5} + \frac{3^{15}}{3^{16}} = \frac{3}{5} + 3^{-1} = \frac{3}{5} + \frac{1}{3} = \frac{9}{15} + \frac{5}{15} = \frac{14}{15}$

11. **a)** $3^2 \cdot 4^1 - 2^0 + 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 9 \cdot 4 - 1 + 3^6 =$

$= 36 - 1 + 729 = 764$

b) $(-2)^{-6} \cdot 8^2 + 3^0 = \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 64 + 1 =$

$= \frac{1}{64} \cdot 64 + 1 = 1 + 1 = 2$

c) $6^1 \cdot 3^{-2} + 4^{-1} - 4 \cdot 7^0 = 6 \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - 4 \cdot 1 = \frac{6}{9} + \frac{1}{4} - 4 =$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - 4 = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} - \frac{48}{12} = -\frac{37}{12}$

d) $8^4 \cdot 8^3 \cdot 8^4 : 8^8 = 8^{11} : 8^8 = 8^3 = 512$

12. **a)** Temos que:

$(2 \cdot 5)^3 = 10^3 = 1000$ e $2^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 125 = 1\,000$.

Portanto, a sentença é verdadeira.

b) Temos que:

$(2 + 5)^3 = 7^3 = 343$ e $2^3 + 5^3 = 8 + 125 = 133$.

Portanto, a sentença é falsa.

c) Temos que:

$(17 - 1)^2 = 16^2 = 256$ e $17^2 - 1^2 = 289 - 1 = 288$.

Portanto, a sentença é falsa.

Atividades – Página 52

13. **a)** $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$

b) $\sqrt{0} = 0$

c) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{2^2}{5^2}} = \frac{2}{5}$

d) $\sqrt{144} = \sqrt{12^2} = 12$

e) $\sqrt{1} = 1$

f) $\sqrt{\frac{64}{169}} = \sqrt{\frac{8^2}{13^2}} = \frac{8}{13}$

g) $\sqrt{\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{1^2}{4^2}} = \frac{1}{4}$

h) $\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$

i) $\sqrt{0{,}49} = \sqrt{0{,}7^2} = 0{,}7$

14. **a)** Como $6 < \sqrt{40} < 7$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 6 e 7, com uma casa decimal:

$(6{,}1)^2 = 37{,}21$

$(6{,}2)^2 = 38{,}44$

$(6{,}3)^2 = 39{,}69$

$(6{,}4)^2 = 40{,}96$

Portanto, $\sqrt{40} \simeq 6{,}3$.

b) Como $8 < \sqrt{65} < 9$, temos:

$8^2 = 64$

$(8{,}1)^2 = 65{,}61$

Portanto, $\sqrt{65} \simeq 8{,}1$.

c) Como $9 < \sqrt{85} < 10$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 9 e 10, com uma casa decimal:

$(9{,}1)^2 = 82{,}81$

$(9{,}2)^2 = 84{,}64$

$(9{,}3)^2 = 86{,}49$

Portanto, $\sqrt{85} \simeq 9{,}2$.

d) Como $9 < \sqrt{93} < 10$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 9 e 10, com uma casa decimal:

$(9{,}5)^2 = 90{,}25$

$(9{,}6)^2 = 92{,}16$

$(9{,}7)^2 = 94{,}09$

Portanto, $\sqrt{93} \simeq 9{,}6$.

e) Como $11 < \sqrt{122} < 12$, temos:

$11^2 = 121$

$(11{,}1)^2 = 123{,}21$

Portanto, $\sqrt{122} \simeq 11{,}0$.

f) Como $11 < \sqrt{140} < 12$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 11 e 12, com uma casa decimal:

$(11{,}9)^2 = 141{,}61$

$(11{,}8)^2 = 139{,}24$

Portanto, $\sqrt{140} \simeq 11{,}8$.

g) Como $28 < \sqrt{800} < 29$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 28 e 29, com uma casa decimal:

$(28{,}1)^2 = 789{,}61$

$(28{,}2)^2 = 795{,}24$

$(28{,}3)^2 = 800{,}89$

$(28{,}4)^2 = 806{,}56$

Portanto, $\sqrt{800} \simeq 28{,}3$.

h) Como $30 < \sqrt{940} < 31$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 30 e 31, com uma casa decimal:

$(30{,}5)^2 = 930{,}25$

$(30{,}6)^2 = 936{,}36$

$(30{,}7)^2 = 942{,}49$

$(30{,}8)^2 = 948{,}64$

Portanto, $\sqrt{940} \simeq 30{,}7$.

i) Como $31 < \sqrt{1\,010} < 32$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 31 e 32, com uma casa decimal:

$(31{,}9)^2 = 1\,017{,}61$

$(31{,}8)^2 = 1\,011{,}24$

$(31{,}7)^2 = 1\,004{,}89$

Portanto, $\sqrt{1\,010} \simeq 31{,}8$.

j) Como $32 < \sqrt{1\,050} < 33$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 32 e 33, com uma casa decimal:

$(32{,}5)^2 = 1\,056{,}25$

$(32{,}3)^2 = 1\,043{,}29$

$(32{,}4)^2 = 1\,049{,}76$

Portanto, $\sqrt{1\,050} \simeq 32{,}4$.

15. Decompondo os números, teremos:

a) $\sqrt{1\,225} = \sqrt{7^2 \cdot 5^2} = 35$

1225	5
245	5
49	7
7	7
1	

b) $\sqrt{2\,401} = \sqrt{7^2 \cdot 7^2} = 49$

2401	7
343	7
49	7
7	7
1	

c) $\sqrt{3\,136} = \sqrt{2^6 \cdot 7^2} =$

$= \sqrt{(2^3 \cdot 7)^2} = 56$

3136	2
1568	2
784	2
392	2
196	2
98	2
49	7
7	7
1	

d) $\sqrt{6\,561} = \sqrt{3^8} =$

$= \sqrt{(3^4)^2} = 81$

6561	3
2187	3
729	3
243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

e) $\sqrt{6\,400} = \sqrt{64 \cdot 100} =$

$= \sqrt{8^2 \cdot 10^2} = 80$

f) $\sqrt{7\,744} = \sqrt{2^6 \cdot 11^2} =$

$= \sqrt{(2^3 \cdot 11)^2} = 88$

7744	2
3872	2
1936	2
968	2
484	2
242	2
121	11
11	11
1	

16. a) $\sqrt{1,44} = \sqrt{\dfrac{144}{100}} = \dfrac{12}{10} = 1,2$

b) $\sqrt{12,96} = \sqrt{\dfrac{1\,296}{100}} = \dfrac{36}{10} = 3,6$

c) $\sqrt{30,25} = \sqrt{\dfrac{3\,025}{100}} = \dfrac{55}{10} = 5,5$

d) $\sqrt{72,25} = \sqrt{\dfrac{7\,225}{100}} = \dfrac{85}{10} = 8,5$

e) $\sqrt{39,69} = \sqrt{\dfrac{3\,969}{100}} = \dfrac{63}{10} = 6,3$

f) $\sqrt{94,09} = \sqrt{\dfrac{9\,409}{100}} = \dfrac{97}{10} = 9,7$

17. Os estudantes utilizarão uma calculadora para obter os resultados e depois devem arredondar os valores obtidos para apresentar o resultado com duas casas decimais.

a) $\sqrt{30} \simeq 5,48$

b) $\sqrt{8,6} \simeq 2,93$

c) $\sqrt{77} \simeq 8,77$

d) $\sqrt{110} \simeq 10,49$

e) $\sqrt{95} \simeq 9,75$

f) $\sqrt{50,8} \simeq 7,13$

g) $\sqrt{150} \simeq 12,25$

h) $\sqrt{86,25} \simeq 9,29$

i) $\sqrt{94} \simeq 9,70$

j) $\sqrt{125} \simeq 11,18$

18. a) $\sqrt{2} + \sqrt{3} \simeq 1,4 + 1,7 = 3,1$

b) $\sqrt{5} + \sqrt{7} \simeq 2,23 + 2,64 \simeq 4,87 \simeq 4,9$

c) $\sqrt{3} + \sqrt{5} \simeq 1,73 + 2,23 = 3,96 \simeq 4,0$

d) $\sqrt{7} + \sqrt{11} \simeq 2,64 + 3,32 = 5,96 \simeq 6,0$

19. Temos que:

$360 = 36 \cdot 10.$

36 é um quadrado perfeito.

Multiplicando os dois lados da igualdade por 10, temos:

$36 \cdot 10 \cdot 10 = 36 \cdot 100 = 3\,600$

Como 36 e 100 são quadrados perfeitos, então 3 600 é também um quadrado perfeito.

Portanto, o menor número é o 10.

20. $\sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}} =$

$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}}}$

$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}}} =$

$= \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{16}}}} = \sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{25}}} =$

$= \sqrt{43 + \sqrt{36}} = \sqrt{49} = 7$

21. x é maior que 6. Vamos calcular os quadrados de alguns números maiores que 6, com uma casa decimal:

$(6,1)^2 = 37,21$

$(6,2)^2 = 38,44$

Portanto, $x \simeq 6,1$.

22. Temos que:

$\sqrt{4} = 2$ $\quad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\quad \dfrac{4}{5} = 0,8$ $\quad \dfrac{7}{2} = 3,5$

Assim,

$\dfrac{4}{5} < \sqrt{4} < \sqrt{8} < \dfrac{7}{2}$

23. Este número é 225, pois $\sqrt{225} = 15$.

24. Como $7\sqrt{60} < 8$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 7 e 8, com uma casa decimal:

$(7,9)^2 = 62,41$

$(7,8)^2 = 60,84$

$(7,7)^2 = 59,29$

Para uma maior aproximação, podemos calcular os quadrados de números de duas casas decimais situados entre 7,7 e 7,8:

$(7,75)^2 = 60,06$

$(7,74)^2 = 59,91$

Portanto, $\sqrt{60} \simeq 7,75$.

A medida do comprimento do lado do quadrado é de aproximadamente 7,75 cm.

Atividades - Página 53

25. Sabemos que $\sqrt[3]{216} = 6$, então:

$7^3 = 343$

Assim, o número procurado é 343.

26. Como $5\sqrt[3]{200} < 6$, vamos calcular os cubos de alguns números situados entre 5 e 6, com uma casa decimal:

$(5,9)^3 = 205,379$

$(5,8)^3 = 195,112$

Portanto, $\sqrt[3]{200} \simeq 5,8$ dm.

27. **a)** $\sqrt[3]{64} = 4$, pois $(4)^3 = 64$.

b) $\sqrt[3]{-27} = -3$, pois $(-3)^3 = -27$.

c) $\sqrt[6]{64} = 2$, pois $(2)^6 = 64$.

d) $\sqrt[3]{0{,}343} = \sqrt[3]{\dfrac{343}{1\,000}} = \dfrac{7}{10} = 0{,}7$

e) $\sqrt[5]{243} = 3$, pois $(3)^5 = 243$.

f) $\sqrt[4]{\dfrac{16}{625}} = \dfrac{2}{5}$, pois $\left(\dfrac{2}{5}\right)^4 = \dfrac{16}{625}$.

Veja que interessante - Página 54

a) $0{,}16^{\frac{1}{2}} - 0{,}027^{\frac{1}{3}} = \sqrt{0{,}16} - \sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}1$

b) Exemplo de resposta: $\sqrt[6]{64} = 64^{\frac{1}{6}}$

c) Exemplo de resposta:

a) Escrevendo como potência de expoente fracionário:

$\sqrt{625} = \sqrt{5^4} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2 = 25$

Utilizando a decomposição em fatores primos e as propriedades da potenciação:

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

$\sqrt{625} = \sqrt{5^2 \cdot 5^2} =$

$= \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{5^2} =$

$= 5 \cdot 5 = 25$

b) Escrevendo como potência de expoente fracionário:

$\sqrt{81} = \sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$

Utilizando a decomposição em fatores primos e as propriedades da potenciação:

81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$\sqrt{81} = \sqrt{3^2 \cdot 3^2} =$

$= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3^2} =$

$= 3 \cdot 3 = 9$

c) Escrevendo como potência de expoente fracionário:

$\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11^{\frac{2}{2}} = 11$

Utilizando a decomposição em fatores primos e as propriedades da potenciação:

121	11
11	11
1	

$\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$

Revisão dos conteúdos deste capítulo - Páginas 55 e 56

1. **a)** $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

b) $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$

c) $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$

d) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}$

e) $\left(-\dfrac{4}{5}\right)^{-2} = \left(-\dfrac{5}{4}\right)^2 = \left(-\dfrac{5}{4}\right) \cdot \left(-\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{25}{16}$

f) $5^0 = 1$

g) $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

h) $2^1 = 2$

2. **a)** $3 \cdot (-1)^2 - (-1)^{-1} + 2 = 3 \cdot 1 - (-1)^1 + 2 = 3 + 1 + 2 = 6$

b) $(-1)^2 - 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = 1 - 3 \cdot (-2)^2 =$

$= 1 - 3 \cdot 4 = 1 - 12 = -11$

c) $2^0 + 4^2 \cdot 3^1 : \left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 + 16 \cdot 3 \cdot \dfrac{2}{1} = 1 + 96 = 97$

3. **a)** $0{,}27 = 2{,}7 \cdot 10^{-1}$

b) $895 = 8{,}95 \cdot 10^2$

c) $3\,600 = 3{,}6 \cdot 10^3$

d) $0{,}0012 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}$

e) $50\,000\,000 = 5{,}0 \cdot 10^7$

f) $0{,}000000044 = 4{,}4 \cdot 10^{-8}$

4. Aplicando as propriedades de potenciação, temos:

a) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^9 = 3^{2+4+3+9} = 3^{18}$

b) $\left(5^2\right)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

c) $\left(2^3\right)^{-2} = 2^{3 \cdot (-2)} = 2^{-6}$

d) $8^3 : 8^5 = 8^{3-5} = 8^{-2}$

e) $2^1 \cdot 4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^0 = 2^1 \cdot \left(2^2\right)^1 \cdot \left(2^2\right)^2 \cdot \left(2^2\right)^0 = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^0 = 2^7$

5. **a)** $4^4 : 4^3 + 3 \cdot 3^2 = 4^1 + 3^3 = 4 + 27 = 31$

b) $\left(2^3\right)^2 - \left(2^3\right)^2 = 2^6 - 2^6 = 0$

c) $(-1)^3 + 3^4 : 3^4 = -1 + 3^0 = -1 + 1 = 0$

d) $3^0 + 5^3 : 5^2 = 1 + 5^1 = 1 + 5 = 6$

e) $\left(2^4\right)^2 : 4^1 + 3^0 - 3^2 = 2^8 : \left(2^2\right)^1 + 1 - 9 = 2^8 : 2^2 + 1 - 9 =$

$= 2^6 + 1 - 9 = 64 + 1 - 9 = 56$

6. **a)** $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

b) $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

c) $\sqrt{169} = \sqrt{13^2} = 13$

d) $\sqrt{225} = \sqrt{15^2} = 15$

e) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{2^2}{3^2}} = \dfrac{2}{3}$

f) $\sqrt{\dfrac{16}{49}} = \sqrt{\dfrac{4^2}{7^2}} = \dfrac{4}{7}$

g) $\sqrt{\dfrac{121}{100}} = \sqrt{\dfrac{11^2}{10^2}} = \dfrac{11}{10}$

h) $\sqrt{\dfrac{4}{169}} = \sqrt{\dfrac{2^2}{13^2}} = \dfrac{2}{13}$

7. Os estudantes utilizarão uma calculadora para obter os resultados e depois devem arredondar os valores obtidos para apresentar o resultado com duas casas decimais.

a) $\sqrt{27} \simeq 5{,}20$

b) $\sqrt{300} \simeq 17{,}32$

c) $\sqrt{6} \simeq 2{,}45$

d) $\sqrt{2{,}5} \simeq 1{,}58$

8. **a)** Como $8 < \sqrt{75} < 9$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 8 e 9, com uma casa decimal:

$(8{,}5)^2 = 72{,}25$

$(8{,}6)^2 = 73{,}96$

$(8{,}7)^2 = 75{,}69$

Portanto, $\sqrt{75} \simeq 8{,}7$.

b) Como $2 < \sqrt{7} < 9$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 2 e 9, com uma casa decimal:

$(2{,}5)^2 = 6{,}25$

$(2{,}6)^2 = 6{,}76$

$(2{,}7)^2 = 7{,}29$

Portanto, $\sqrt{7} \simeq 2{,}6$.

c) Como $1 < \sqrt{3,57} < 2$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 1 e 2, com uma casa decimal:

$(1,9)^2 = 3,61$ Portanto, $\sqrt{3,57} \simeq 1,9$.

$(1,8)^2 = 3,24$

d) Como $22 < \sqrt{500} < 23$, vamos calcular os quadrados de alguns números situados entre 22 e 23, com uma casa decimal:

$(22,5)^2 = 506,25$ $(22,3)^2 = 497,29$

$(22,4)^2 = 501,76$ Portanto, $\sqrt{500} \cong 22,4$.

9. a) $\sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{1,21} + \sqrt{1,44} + \sqrt{0,49} + \sqrt{0,16} + \sqrt{0,36} =$

$= 1,1 + 1,2 + 0,7 + 0,4 + 0,6 = 4$

c) $\sqrt{16} + \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{1}{4}} + 7^1 - 12^0 = 4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 7 - 1 =$

$= 10 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{60}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{65}{6}$

10. a) O menor quadrado perfeito de cinco algarismos é 10 000 ($100^2 = 10\,000$); logo $99^2 = 9\,801$ é o maior número inteiro quadrado perfeito de quatro algarismos.

b) Para descobrir a raiz quadrada de 11 236, vamos calcular o quadrado de alguns números maiores que 100:

$(105)^2 = 11\,025$

$(106)^2 = 11\,236$

Logo, $\sqrt{11\,236} = 106$.

Outra possibilidade é decompor 11 236 em fatores primos e perceber que $11\,236 = 2^2 \cdot 53^2$.

c) Temos que:

$\frac{\sqrt{x}}{3} = 12$, em que x é um número real positivo.

Assim:

$\sqrt{x} = 36$

Portanto, $x = 36^2 = 1\,296$.

11. a) $\sqrt[3]{-729} = \sqrt[3]{(-9)^3} - 9$

b) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

c) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{(3^2)^2} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

d) $\sqrt[6]{\frac{729}{4\,096}} = \sqrt[6]{\frac{3^6}{4^6}} = \frac{3}{4}$

12. $\frac{\sqrt[2]{\sqrt{16} + 5\sqrt[3]{1\,000} + 10^1}}{\sqrt[3]{-343}} = \frac{\sqrt[2]{4 + 5 \cdot 10 + 10}}{-7} = \frac{\sqrt[2]{64}}{-7} = -\frac{8}{7}$

Capítulo 3 – Sistemas de equações do 1º grau

Trocando ideias – Página 57

- Espera-se que os estudantes reconheçam que as vagas reservadas para veículos que transportam pessoas com alguma deficiência física ou visual facilitam o dia a dia delas, porque, além da garantia de que vão conseguir estacionar seus veículos, essas vagas ficam próximas de entradas e acesso a rampas, escadas rolantes e elevadores.
- Vagas reservadas e não reservadas:

a) $x + y = 500$

b) Valores naturais, porque x e y correspondem ao número de vagas de estacionamento.

c) Para determinar y é preciso calcular 2% de 500:

$0,02 \cdot 500 = 10$

Logo, $y = 10$.

Substituindo y por 10 em $x + y = 500$, determinamos o valor de x:

$x + 10 = 500$

$x = 500 - 10 = 490$

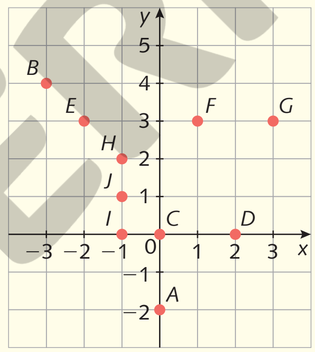
São 10 vagas reservadas para veículos que transportam pessoas com alguma deficiência física ou visual e 490 vagas não reservadas.

Atividades – Página 59

1. Observando o gráfico, temos:

$A(3, 2)$;	$E(-4, 3)$;	$I(4, -1)$;
$B(1, 3)$;	$F(-2, 1)$;	$J(2, -4)$.
$C(0, 1)$;	$G(-2, -2)$;	
$D(-3, 4)$;	$H(-5, -3)$;	

2.



3. Exemplo de respostas:

a) A_1 (5, 5); A_2 (6, 6); A_3 (7, 7); A_4 (8, 8); A_5 (9, 9);

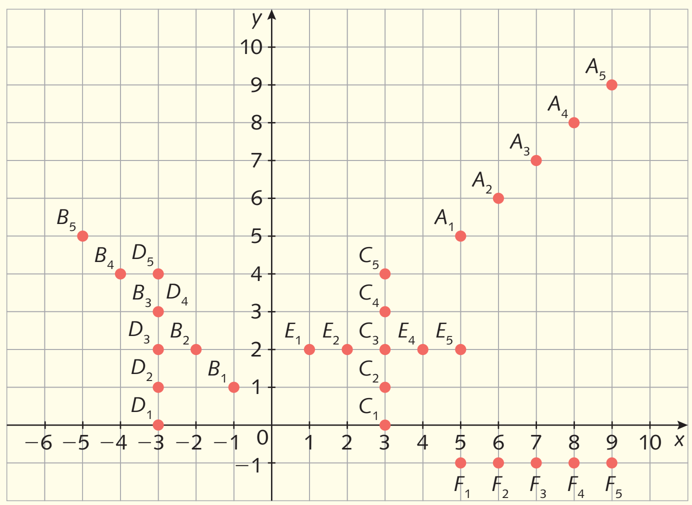
b) B_1 (–1, 1); B_2 (–2, 2); B_3 (–3, 3); B_4 (–4, 4); B_5 (–5, 5);

c) C_1 (3, 0); C_2 (3, 1); C_3 (3, 2); C_4 (3, 3); C_5 (3, 4);

d) D_1 (–3, 0); D_2 (–3, 1); D_3 (–3, 2); D_4 (–3, 3); D_5 (–3, 4);

e) E_1 (1, 2); E_2 (2, 2); E_3 (3, 2); E_4 (4, 2); E_5 (5, 2);

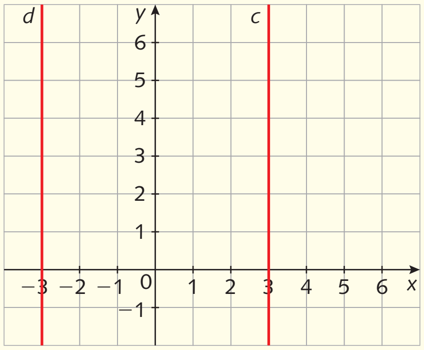
f) F_1 (5, –1); F_2 (6, –1); F_3 (7, –1); F_4 (8, –1); F_5 (9, –1).



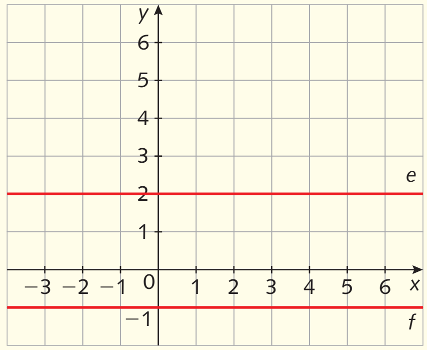
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

4. a) Sim, por dois pontos passa uma reta.

b) São retas perpendiculares.



c) São retas paralelas.



Atividades - Página 60

5. a) $28x + 30y = 300$ b) $4x + y = 75$

6. a) $2x + 2y = 48$ b) $x = y + 9$ c) $x + y = 20$ d) $5x - 3y = 68$

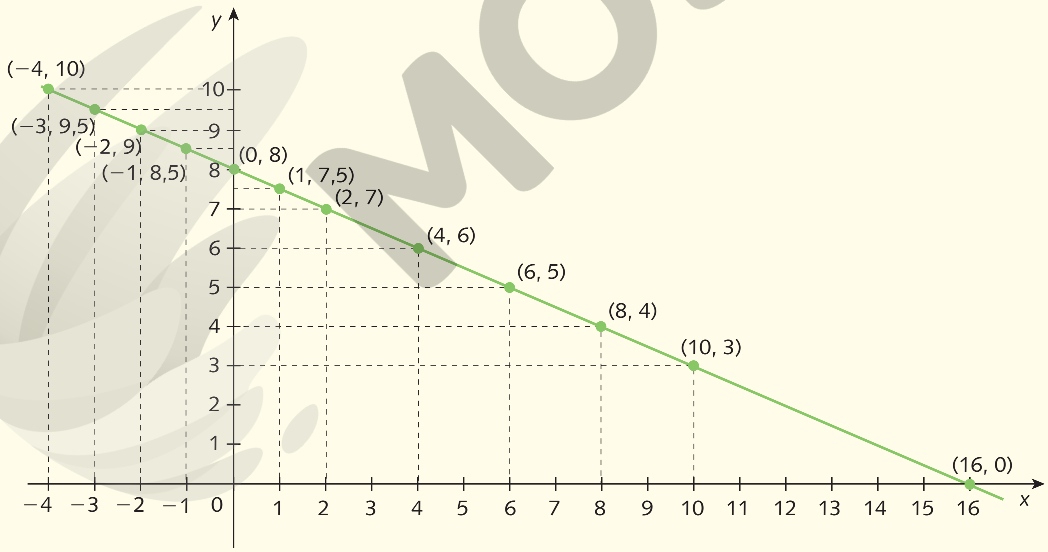
7. $2x + 4y = 140$

Atividades - Página 62

8.

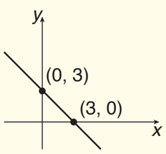
Valor atribuído a *x*	Equação em *y*	Valor de *y*	Par ordenado (*x*, *y*)
–1	$-1 + 2y = 16$	8,5	(–1; 8,5)
–3	$-3 + 2y = 16$	9,5	(–3; 9,5)
1	$1 + 2y = 16$	7,5	(1; 7,5)
8	$8 + 2y = 16$	4	(8, 4)
6	$6 + 2y = 16$	5	(6, 5)

Exemplo de construção de gráfico.

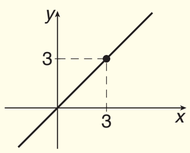


Sim, todos os pontos estão alinhados.

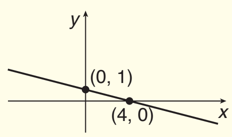
9. a)



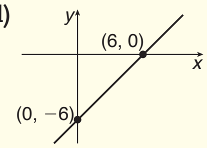
b)



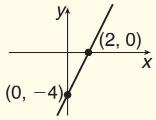
c)



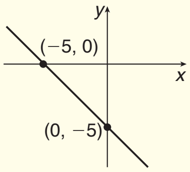
d)



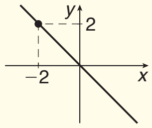
e)



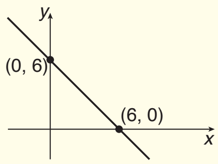
f)



g)



h)



Atividades – Páginas 65 e 66

10. **a)** Valores naturais, porque x e y correspondem ao número de vitórias do time de Cássio e do time de Leonardo, respectivamente.

b) Atribuindo valores para x e y, os estudantes deverão encontrar $x = 5$ e $y = 7$. Substituindo estes valores nas duas equações, obtemos sentenças verdadeiras:

Substituindo x por 5 e y por 7 em $y - 1 = x + 1$, temos:

$7 - 1 = 5 + 1$ (sentença verdadeira)

Substituindo x por 5 e y por 7 em $y + 1 = 2(x - 1)$, temos:

$7 + 1 = 2(5 - 1)$ (sentença verdadeira)

11. $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

$$\begin{aligned} x - y &= -5 \\ x + 5 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3(x + 5) &= 10 \\ 2x + 3x + 15 &= 10 \\ 5x &= 10 - 15 \\ x &= -\frac{5}{5} \\ x &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 5 &= y \\ -1 + 5 &= y \\ 4 &= y \end{aligned}$$

Sim, a solução também é o par ordenado (–1, 4).

12. **a)** $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - y = 26 \end{cases}$

Aplicando o método da substituição, temos:

$$\begin{aligned} x + y &= -2 \\ x &= -2 - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x - y &= 26 \\ 2(-2 - y) - y &= 26 \\ -4 - 2y - y &= 26 \\ -4 - 3y &= 26 \\ -4 - 26 &= 3y \\ -\frac{30}{3} &= y \\ -10 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= -2 - (-10) \\ x &= -2 + 10 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (8, –10).

b) $\begin{cases} 3x - y = -11 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$

Aplicando o método da substituição, temos:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ x &= 8 - 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - y &= -11 \\ 3(8 - 2y) - y &= -11 \\ 24 - 6y - y &= -11 \\ 24 - 7y &= -11 \\ 24 + 11 &= 7y \\ \frac{32}{8} &= y \\ 5 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 8 - 2y \\ x &= 8 - 2 \cdot 5 \\ x &= 8 - 10 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (–2, 5).

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$

Aplicando o método da substituição, temos:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 4 \\ 2y &= 4 - 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 1 \\ 3x - (4 - 2x) &= 1 \\ 3x - 4 + 2x &= 1 \\ 5x &= 1 + 4 \\ 5x &= 5 \\ x &= \frac{5}{5} \\ x &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= 4 - 2x \\ 2y &= 4 - 2 \cdot 1 \\ 2y &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (1, 1).

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$

Aplicando o método da substituição, temos:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 9 \\ 2x &= 9 - 3y \\ x &= \frac{9 - 3y}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x - 5y &= 7 \\ 4\left(\frac{9 - 3y}{2}\right) - 5y &= 7 \\ 2(9 - 3y) - 5y &= 7 \\ 18 - 6y - 5y &= 7 \\ 18 - 11y &= 7 \\ 18 - 7 &= 11y \\ \frac{11}{11} &= y \\ 1 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{9 - 3y}{2} \\ x &= \frac{9 - 3 \cdot 1}{2} \\ x &= \frac{6}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (3, 1).

13. Podemos indicar por x a idade de Ronaldo, e por y a idade de Pedro. Assim:

$\begin{cases} x = 2y - 4 \\ x - 10 = 3(y - 10) \end{cases}$

$$\begin{aligned} x - 10 &= 3(y - 10) \\ 2y - 4 - 10 &= 3y - 30 \\ 2y - 14 &= 3y - 30 \\ 30 - 14 &= 3y - 2y \\ 16 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2y - 4 \\ x &= 2 \cdot 16 - 4 \\ x &= 32 - 4 \\ x &= 28 \end{aligned}$$

Ronaldo tem 28 anos, e Pedro tem 16 anos.

14. Podemos indicar a quantidade de tiros acertados por x, e a quantidade de tiros errados por y. Assim:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 5x - 3y = 68 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ x &= 20 - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 3y &= 68 \\ 5(20 - y) - 3y &= 68 \\ 100 - 5y - 3y &= 68 \\ 100 - 8y &= 68 \\ 100 - 68 &= 8y \\ 32 &= 8y \\ \frac{32}{8} &= y \\ 4 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 20 - y \\ x &= 20 - 4 \\ x &= 16 \end{aligned}$$

Julinho acertou 16 tiros.

15. Sendo x a quantidade de automóveis no estacionamento, e y a de bicicletas, temos:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ 4x + 2y = 88 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 32 \\ x &= 32 - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 88 \\ 4(32 - y) + 2y &= 88 \\ 128 - 4y + 2y &= 88 \\ 128 - 2y &= 88 \\ 128 - 88 &= 2y \\ 40 &= 2y \\ \frac{40}{2} &= y \\ 20 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 32 - y \\ x &= 32 - 20 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

O estacionamento tem 12 automóveis e 20 bicicletas.

16. **a)** Indicando por x o número de vitórias do time Boa Esperança e por y o número de vitórias do time Camisa Verde, temos:

$$\begin{cases} y - 1 = x \\ y + 1 = 2x \end{cases}$$

b) $y - 1 = x$

$$\begin{aligned} y + 1 &= 2x \\ y + 1 &= 2 \cdot (y - 1) \\ y + 1 &= 2y - 2 \\ 1 + 2 &= 2y - y \\ 3 &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y - 1 &= x \\ 3 - 1 &= x \\ x &= 2 \end{aligned}$$

O time Boa Esperança teve 2 vitórias, enquanto o time Camisa Verde teve 3 vitórias.

17. Indicando por x o valor do ingresso infantil e y o valor do ingresso adulto, temos:

$$\begin{cases} 6x + y = 71 \\ 7x + 4y = 131 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 6x + y &= 71 \\ y &= 71 - 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x + 4y &= 131 \\ 7x + 4 \cdot (71 - 6x) &= 131 \\ 7x + 284 - 24x &= 131 \\ 284 - 17x &= 131 \\ 284 - 131 &= 17x \\ 153 &= 17x \\ \frac{153}{17} &= x \\ 9 &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 71 - 6x \\ y &= 71 - 6 \cdot 9 \\ y &= 71 - 54 \\ y &= 17 \end{aligned}$$

O ingresso infantil tem valor R$ 9,00 e o ingresso adulto tem valor R$ 17,00.

18. Indicando por x o número de avestruzes e por y o número de coelhos, temos:

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ 2x + 4y = 110 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 35 \\ x &= 35 - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 110 \\ 2(35 - y) + 4y &= 110 \\ 70 - 2y + 4y &= 110 \\ 2y &= 110 - 70 \\ 2y &= 40 \\ y &= \frac{40}{2} \\ y &= 20 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 35 - y \\ x &= 35 - 20 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

15 avestruzes e 20 coelhos.

19. Exemplo de problema que pode ser elaborado: Joaquim fez uma retirada no caixa eletrônico de R$ 230,00. Sacou 7 cédulas. Sabendo que nesse caixa eletrônico só tinha cédulas de R$ 20,00 e R$ 50,00, quantas cédulas de cada valor Joaquim sacou?

$x \rightarrow$ indica a quantidade de cédulas de 20 reais

$y \rightarrow$ indica a quantidade de cédulas de 50 reais

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ 20x + 50y = 230 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 7 \\ x &= 7 - y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20x + 50y &= 230 \\ 20(7 - y) + 50y &= 230 \\ 140 - 20y + 50y &= 230 \\ 140 + 30y &= 230 \\ 30y &= 230 - 140 \\ y &= \frac{90}{30} \\ y &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 7 - y \\ x &= 7 - 3 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

São 4 cédulas de 20 reais e 3 cédulas de 50 reais.

20. Exemplo de problema que pode ser elaborado: Os primos Alberto e João têm idades diferentes, a soma de suas idades é 34 e a diferença entre elas é 2. Qual a idade deles?

$x \rightarrow$ indica a idade do primo mais velho

$y \rightarrow$ indica a idade do primo mais novo

$$\begin{cases} x + y = 34 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x &= 2 + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 34 \\ (2 + y) + y &= 34 \\ 2 + y + y &= 34 \\ 2y &= 34 - 2 \\ y &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2 + y \\ x &= 2 + 16 \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Portanto, a idade dos primos é 16 e 18 anos.

Tecnologias digitais em foco – Páginas 68 e 69

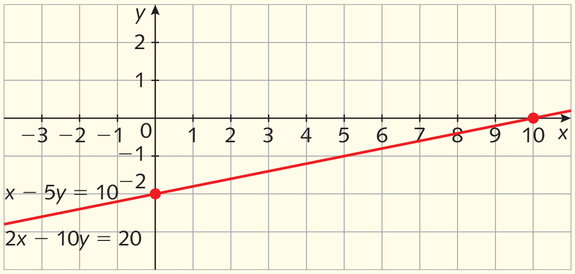
- Possível e determinado, porque as retas que representam as soluções de cada uma das equações são concorrentes.
- Impossível, porque as retas que representam as soluções de cada uma das equações são paralelas.
- As retas ficaram coincidentes.

Atividades - Página 70

21. a) Sistema possível e indeterminado

$x - 5y = 10$		
x	**y**	**(x, y)**
0	–2	(0, –2)
10	0	(10, 0)

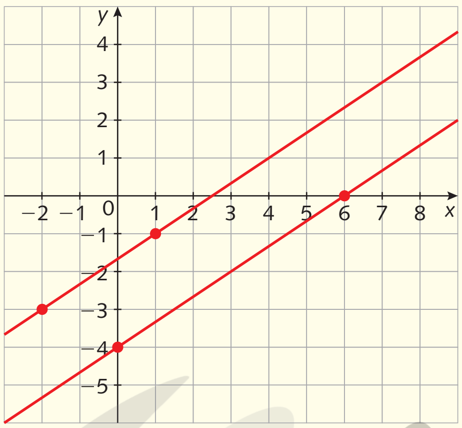
$2x - 10y = 20$		
x	**y**	**(x, y)**
0	–2	(0, –2)
10	0	(10, 0)



b) Sistema impossível

$2x - 3y = 12$		
x	**y**	**(x, y)**
0	– 4	(0, – 4)
6	0	(6, 0)

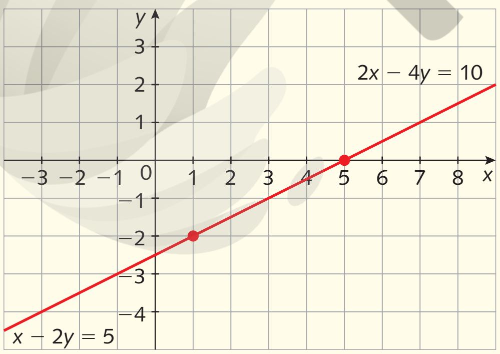
$4x - 6y = 14$		
x	**y**	**(x, y)**
–1	–3	(–1, –3)
5	1	(5, 1)



c) Sistema possível e indeterminado

$2x - 4y = 10$		
x	**y**	**(x, y)**
1	–2	(1, –2)
5	0	(5, 0)

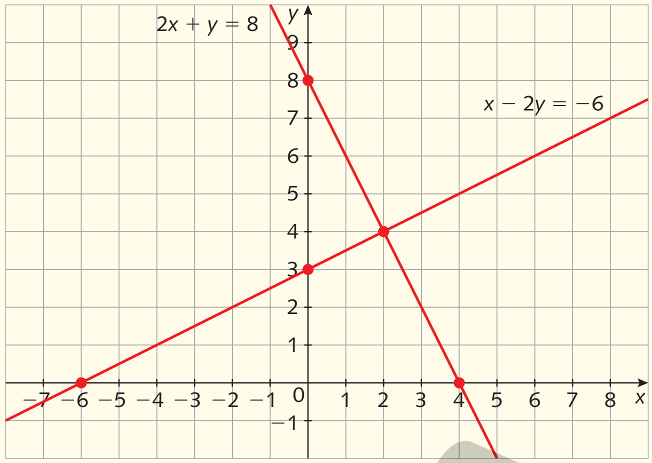
$x - 2y = 5$		
x	**y**	**(x, y)**
1	–2	(1, –2)
5	0	(5, 0)



d) Sistema possível e determinado, (2, 4).

$2x + y = 8$		
x	**y**	**(x, y)**
4	0	(4, 0)
0	8	(0, 8)

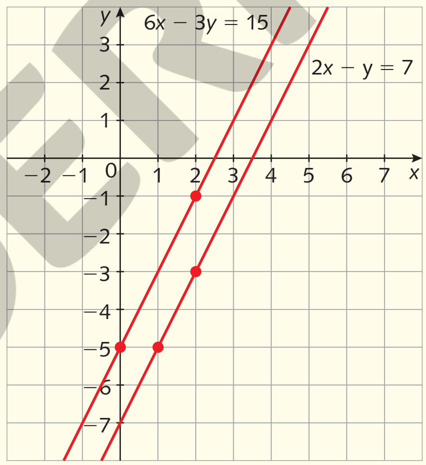
$x - 2y = -6$		
x	**y**	**(x, y)**
–6	0	(–6, 0)
0	3	(0, 3)



e) Sistema impossível

$2x - y = 7$		
x	**y**	**(x, y)**
2	–3	(2, –3)
1	–5	(1, –5)

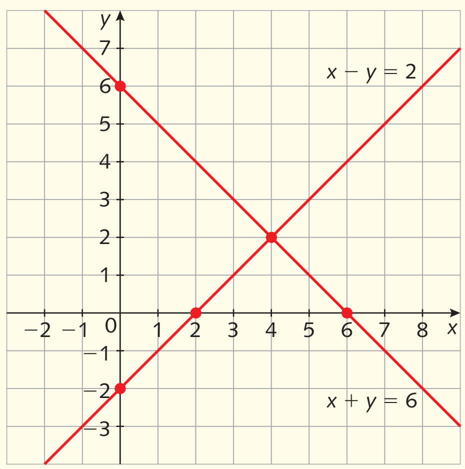
$6x - 3y = 15$		
x	**y**	**(x, y)**
2	–1	(2, –1)
0	–5	(0, –5)



f) Sistema possível e determinado, (4, 2).

$x + y = 6$		
x	**y**	**(x, y)**
0	6	(0, 6)
6	0	(6, 0)

$x - y = 2$		
x	**y**	**(x, y)**
0	–2	(0, –2)
2	0	(2, 0)



22. O sistema I, porque o par ordenado correspondente ao ponto (1, 1) da resolução gráfica é solução de ambas as equações do sistema.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4 \\ 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 4 \\ -3 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \neq 12 \end{cases}$$

23. O gráfico II, porque o par ordenado correspondente ao ponto (0, 2) da resolução gráfica é solução de ambas as equações do sistema.

$$\begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ -4x - 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4 \\ -4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4 \end{cases}$$

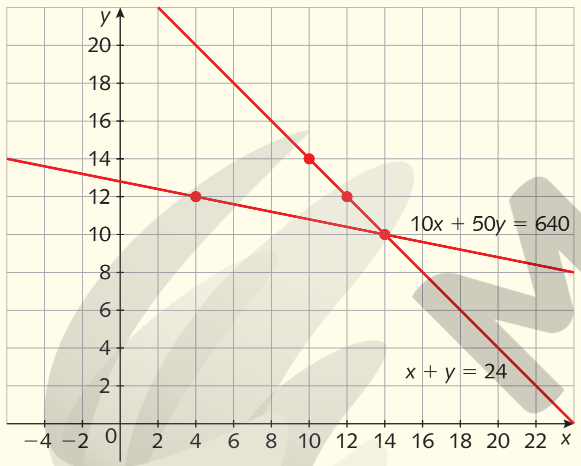
24. a) Indicando por x o número de cédulas de R$ 10,00 e por y o número de cédulas de R$ 50,00, podemos representar a situação pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ 10x + 50y = 640 \end{cases}$$

b) Vamos traçar em um mesmo plano cartesiano as retas que representam as soluções das equações.

x + y = 24		
x	***y***	***(x, y)***
12	12	(12, 12)
10	14	(10, 14)

10x + 50y = 640		
x	***y***	***(x, y)***
14	10	(14, 10)
4	12	(4, 12)



Nesse caso, as retas são concorrentes e o par ordenado (14, 10) é a única solução do sistema. Portanto, o sistema é possível e determinado.

c) Observando o gráfico, a solução é (14, 10). Logo, Joana tinha 14 cédulas de R$ 10,00 e 10 cédulas de R$ 50,00.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Resolvendo em equipe – Página 71

Indicando por x a medida da massa do prego, por y a medida da massa do parafuso e por z a medida da massa do gancho. Assim:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 24 \\ 2x + 5y + 4z = 44 \\ 12x + 32y + 24z = P \end{cases}$$

Para determinar a massa de um parafuso, podemos tomar as duas primeiras equações e resolver:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 24 \\ 2x + 5y + 4z = 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 6y + 4z = 48 \\ 2x + 5y + 4z = 44 \end{cases} \Rightarrow y = 4$$

Portanto, a medida da massa de um parafuso é 4 g.

Seguindo os passos indicados no **Plano de resolução**, temos:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 24 \cdot (12) \\ 2x + 5y + 4z = 44 \\ 12x + 32y + 24z = P \cdot (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 36y + 24z = 288 \\ -12x - 32y - 24z = -P \end{cases}$$

Somando a 1ª equação com a 3ª equação, temos:

$4y = 288 - P$

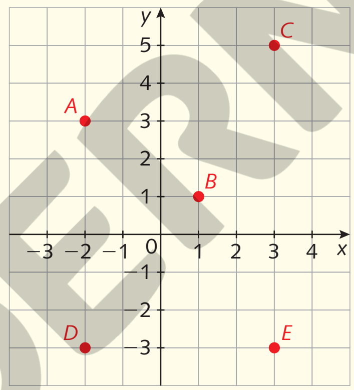
Assim, se a medida da massa de um parafuso é 4 g, temos:

$y = 4 \Rightarrow 4 \cdot 4 = 288 - P \Rightarrow P = 288 - 16 \Rightarrow P = 272.$

Alternativa **d**.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – Página 72

1.



2. Indicando por x o número de cédulas de R$ 5,00 e por y o número de cédulas de R$ 10,00, podemos representar a situação pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 5x + 10y = 140 \end{cases}$$

Dividindo a equação 5x + 10y = 140 por (–5), obtemos coeficientes opostos para *x*.

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 5x + 10y = 140 \div (-5) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 20 \\ -x - 2y = -28 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações x + y = 20 e –x –2y = –28, temos:

$-y = -8 \Rightarrow y = 8$

Substituindo y por 8 na equação x + y = 20, determinamos o valor de *x*:

$x + y = 20$

$x + 8 = 20$

$x = 12$

Portanto, há 12 cédulas de R$ 5,00 e 8 cédulas de R$ 10,00.

3. a) Método da substituição:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Isolando x na equação x – y = 1, temos:

$x = 1 + y$

Substituindo x por $1 + y$ na equação $x + y = 5$, temos:
$x + y = 5$
$1 + y + y = 5$
$2y = 5 - 1$
$2y = 4$
$y = 2$
Substituindo y por 2 em uma das equações, obtemos o valor de x:
$x - y = 1$
$x - 2 = 1$
$x = 3$
Método da adição:
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
Adicionando membro a membro as equações $x + y = 5$ e $x - y = 1$, temos:
$2x = 6$
$x = 3$
Substituindo x por 3 na equação $x + y = 5$, determinamos o valor de y:
$x + y = 5$
$3 + y = 5$
$y = 2$
Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (3, 2).

b) Método da substituição:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$$
Isolando x na equação $x + y = 3$, temos:
$x = 3 - y$
Substituindo x por $3 - y$ na equação $2x - y = -6$, temos:
$2x - y = -6$
$2(3 - y) - y = -6$
$6 - 2y - y = -6$
$-3y = -6 - 6$
$-3y = -12$
$y = 4$
Substituindo y por 4 em uma das equações, obtemos o valor de x:
$x + y = 3$
$x + 4 = 3$
$x = -1$
Método da adição:
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$$
Adicionando membro a membro as equações $x + y = 3$ e $2x - y = -6$, temos:
$3x = -3$
$x = -1$
Substituindo x por -1 na equação $x + y = 3$, determinamos o valor de y:
$x + y = 3$
$-1 + y = 3$
$y = 4$
Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (–1, 4).

c) Método da substituição:
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$
Isolando x na equação $x - y = 3$, temos:
$x = 3 + y$
Substituindo x por $3 + y$ na equação $x + y = 9$, temos:
$x + y = 9$
$3 + y + y = 9$
$2y = 6$
$y = 3$
Substituindo y por 3 em uma das equações, obtemos o valor de x:
$x - y = 3$
$x - 3 = 3$
$x = 6$
Método da adição:
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$
Adicionando membro a membro as equações $x + y = 9$ e $x - y = 3$, temos:
$2x = 12$
$x = 6$
Substituindo x por 6 na equação $x + y = 9$, determinamos o valor de y:
$x + y = 9$
$6 + y = 9$
$y = 3$
Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (6, 3).

d) Método da substituição:
$$\begin{cases} x = 2 + y \\ y = 6 - x \end{cases}$$
Substituindo y por $6 - x$ na equação $x = 2 + y$, temos:
$x = 2 + y$
$x = 2 + 6 - x$
$2x = 8$
$x = 4$
Substituindo x por 4 em uma das equações, obtemos o valor de y:
$y = 6 - x$
$y = 6 - 4$
$y = 2$
Método da adição:
$$\begin{cases} x = 2 + y \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6 \end{cases}$$
Adicionando membro a membro as equações $x - y = 2$ e $y + x = 6$, temos:
$2x = 8$
$x = 4$
Substituindo x por 4 na equação $y + x = 6$, determinamos o valor de y:
$y + x = 6$
$y + 4 = 6$
$y = 2$
Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (4, 2).

É hora de extrapolar – Páginas 73 a 75

1. a) Os estudantes farão a leitura do relatório *Estatística de gênero: indicadores sociais das mulheres no Brasil*, disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101784_informativo.pdf. Acesso em: 2 ago. 2022.
   b) Os estudantes, em grupo, deverão escolher um dos cinco domínios do relatório e elaborar um resumo sobre o domínio escolhido.
   c) Os grupos deverão compartilhar os documentos e elaborar um documento único com todas as informações coletadas.
2. a) É preciso aplicar a porcentagem de 15,2% ao total de 513 deputados. O resultado obtido foi 77,976 deputadas.
   $15{,}2\%$ de $513 = 15{,}2 \cdot \dfrac{513}{100} = 77{,}976$
   b) Espera-se que os estudantes respondam que não é conveniente porque o número obtido não é inteiro.
   c) Exemplo de resposta: $h = 45 + 5m$, sendo h o número de homens e m o número de mulheres. O número de deputadas era $m = 78$.
3. a) Os estudantes, em grupo, elaborarão uma lista com ações que consideram importantes para combater a desigualdade de gênero.
   b) Os grupos deverão compartilhar as listas, discutir e elaborar uma única lista para a turma.
4. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que são a diferença salarial por um mesmo cargo, ocupação nos cargos menos valorizados, entre outros.
   b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam afirmativamente, pois todos, homens ou mulheres, devem ter as mesmas oportunidades. A competência não pode depender do gênero.
5. Resposta pessoal. Os estudantes responderão quais mulheres apresentadas eles conhecem e porque são consideradas mulheres de destaque.
6. Resposta pessoal. Os estudantes realizarão uma pesquisa da biografia e desafios enfrentados por uma das mulheres apresentadas no item anterior. Poderão realizar a pesquisa nos *sites*:
   - https://www.ebiografia.com/mulheres_importantes_historia/
   - https://www.ebiografia.com/mulheres_brasileiras_importantes/
   - https://brasilescola.uol.com.br/historia/grandesmulheres.htm#:~:text=Nomes%20como%20Anita%20Garibaldi%2C%20Maria,tamb%C3%A9m%20est%C3%A3o%20entre%20os%20principais.
   - https://conhecimentocientifico.com/ada-lovelace/
   - https://revistagalileu.globo.com/Sociedade/noticia/2019/08/conheca-maryam-mirzakhani-primeira-mulher-receber-o-maior-premio-da-matematica.html

   Acessos em: 2 ago. 2022.
7. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que é um conteúdo em áudio, disponibilizado por meio de um arquivo ou *streaming*.
   b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que pode ser produzido e reproduzido utilizando a internet em computadores, *smartphones*, *tablets*, entre outros dispositivos.
   c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que a vantagem é poder ouvir quando desejar.
8. Os estudantes elaborarão um roteiro para a produção do *podcast*.
9. Os estudantes escolherão um único nome para o *podcast* e uma única vinheta para iniciar.
10. Os estudantes devem analisar o roteiro elaborado pelos colegas e os recursos sonoros que pretendem utilizar.
11. Os estudantes devem anotar dúvidas, opiniões e sugestões para os colegas.
12. Os estudantes devem fazer os ajustes apontados pelos colegas e ensaiar o roteiro.
13. Os estudantes farão a gravação do *podcast*.
14. Divulgação do *podcast* para a comunidade escolar.
15. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam afirmativamente. Conhecer as histórias dessas mulheres é conhecer nosso passado e tomar novos posicionamentos para mudar nossa sociedade, tornando-a mais igualitária.
    b) Resposta pessoal. Os estudantes opinarão sobre medidas que devem ser tomadas pela sociedade para que as mulheres conquistem mais espaço no mercado de trabalho.
16. Os estudantes deverão produzir um texto descrevendo o processo de análise de informações sobre a participação feminina na sociedade e sobre a pesquisa e o planejamento para a produção de um *podcast*.

Capítulo 4 – Ângulos e transformações geométricas

Trocando ideias – Página 77

- Resposta pessoal. Os estudantes realizarão uma pesquisa sobre a arte marajoara. Espera-se que identifiquem o surgimento dessa arte com os indígenas que ocuparam a região da ilha do Marajó, no Pará, em meados dos anos 400 e 1400. Os traços da cerâmica marajoara são detalhistas, com aplicação de técnicas de combinação de cores; os indígenas extraíam as cores de elementos da natureza, como urucum, caulim, jenipapo, carvão e fuligem.
- Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Translações, rotações e reflexões.

Atividades – Página 79

1. a) Ângulo agudo, por ter medida de abertura menor que 90° e maior que 0°.
   b) Ângulo nulo, por ter medida de abertura igual a 0°.
   c) Ângulo reto, por ter medida de abertura igual a 90°.
   d) Ângulo obtuso, por ter medida de abertura menor que 180° e maior que 90°.
   e) Ângulo raso, por ter medida de abertura igual a 180°.
   f) Ângulo de uma volta, por ter medida de abertura igual a 360°.
2. a) Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são agudos, pois têm medida de abertura menor que 90° e maior que 0°, e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são obtusos, pois têm medida de abertura menor que 180° e maior que 90°.
   b) O ângulo $\hat{D}$ é agudo, pois tem medida de abertura menor que 90° e maior que 0°, o ângulo $\hat{C}$ é obtuso, pois tem

medida de abertura menor que 180° e maior que 90° e os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos, pois têm medida de abertura igual a 90°.

3. Se $A\hat{O}B$ e $M\hat{N}P$ são congruentes, eles têm mesma medida de abertura. Assim, podemos fazer:

$$\frac{2a}{3} + 30° = \frac{3a}{4} + 27°$$

$$\frac{2a}{3} - \frac{3a}{4} = -(30°) + 27°$$

$$\frac{2a}{3} - \frac{3a}{4} = -3°$$

$$\frac{8a}{12} - \frac{9a}{12} = -\frac{36°}{12}$$

$$8a - 9a = -36°$$

$$-a \cdot (-1) = -36° \cdot (-1)$$

$$a = 36°$$

Portanto o valor de a é 36°.

Tecnologias digitais em foco - Páginas 80 e 81

a) As medidas são iguais.

b) As medidas das distâncias entre o ponto D e a semirreta $\overrightarrow{OA}$ e entre D e a semirreta $\overrightarrow{OB}$, respectivamente.

c) Espera-se que os estudantes percebam que $DE = DF$, ou seja, que as medidas das distâncias entre D e cada lado do ângulo são iguais.

Tecnologias digitais em foco - Página 83

a) As medidas de comprimento dos segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são iguais, e a abertura de ângulos formados entre m e $\overline{AB}$ mede 90°.

b) Espera-se que os estudantes percebam que $AP = BP$ independentemente da posição do ponto P.

Atividades - Página 84

4. **a)** Se $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$, logo os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são congruentes. Então: $\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = \text{med}\left(B\hat{O}C\right) = 35°$.

b) Se $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $C\hat{O}E$, logo os ângulos $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}E$ são congruentes. Então: $\text{med}\left(C\hat{O}D\right) = \text{med}\left(D\hat{O}E\right) = 25°$.

c) Será a soma das medidas das aberturas dos ângulos que compõem $D\hat{O}A$, assim:

$$25° + 35° + 35° = 95°$$

5. Se $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, logo os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}C$ são congruentes. Então:

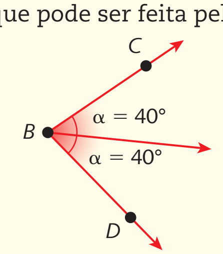
$$\text{med}\left(A\hat{O}C\right) = \text{med}\left(B\hat{O}C\right) = 25°$$

Como a bissetriz divide um ângulo em dois ângulos de mesma medida, para determinar a medida de abertura $A\hat{O}B$, basta multiplicar por dois a medida de abertura de $A\hat{O}C$ ou de $B\hat{O}C$.

$$\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = 2 \cdot \text{med}\left(B\hat{O}C\right) = 2 \cdot 25° = 50°$$

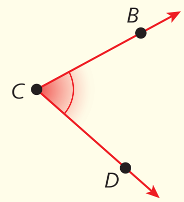
Portanto, $\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = 50°$ e $\text{med}\left(B\hat{O}C\right) = 25°$.

6. Os ângulos têm medida de abertura igual a 40°. Exemplo de construção que pode ser feita pelos estudantes.

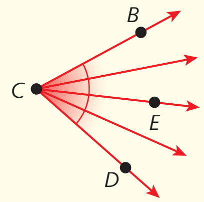


7. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

a)



b) Os estudantes deverão construir 3 bissetrizes.



8. Se $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$, logo os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são congruentes. Então: $\text{med}\left(B\hat{O}C\right) = \dfrac{\text{med}\left(A\hat{O}C\right)}{2} = \dfrac{80°}{2} = 40°$

Se $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $C\hat{O}E$, logo os ângulos $D\hat{O}E$ e $C\hat{O}D$ são congruentes. Então: $\text{med}\left(C\hat{O}D\right) = \dfrac{\text{med}\left(C\hat{O}E\right)}{2} = \dfrac{60°}{2} = 30°$

Para determinar a medida de $B\hat{O}D$, podemos fazer:

$$\text{med}\left(B\hat{O}D\right) = \text{med}\left(B\hat{O}C\right) + \text{med}\left(C\hat{O}D\right) = 40° + 30° = 70°$$

9. Observe que $\text{med}\left(\overline{MN}\right) = \text{med}\left(\overline{MB}\right) + \text{med}\left(\overline{BN}\right)$. Se M é ponto médio de $\overline{AB}$, para calcular $\text{med}\left(\overline{MB}\right)$, podemos fazer:

$$\text{med}\left(\overline{MB}\right) = \frac{\text{med}\left(\overline{AB}\right)}{2} = \frac{10\ \text{cm}}{2} = 5\ \text{cm}$$

Se N é ponto médio de $\overline{BC}$, para calcular $\text{med}\left(\overline{BN}\right)$, podemos fazer:

$$\text{med}\left(\overline{BN}\right) = \frac{\text{med}\left(\overline{BC}\right)}{2} = \frac{8\ \text{cm}}{2} = 4\ \text{cm}$$

Assim, temos:

$$\text{med}\left(\overline{MN}\right) = \text{med}\left(\overline{MB}\right) + \text{med}\left(\overline{BN}\right) = 5\ \text{cm} + 4\ \text{cm} = 9\ \text{cm}$$

Portanto, $\text{med}\left(\overline{MN}\right) = 9$ cm.

10. **a)** Observe que $\text{med}\left(\overline{RS}\right) = \text{med}\left(\overline{RB}\right) + \text{med}\left(\overline{BS}\right)$. Se R é ponto médio de $\overline{AB}$, para calcular $\text{med}\left(\overline{RB}\right)$, podemos fazer:

$$\text{med}\left(\overline{RB}\right) = \frac{\text{med}\left(\overline{AB}\right)}{2} = \frac{4\ \text{cm}}{2} = 2\ \text{cm}$$

Se S é ponto médio de $\overline{BC}$, para calcular $\text{med}\left(\overline{BS}\right)$, podemos fazer:

$$\text{med}\left(\overline{BS}\right) = \frac{\text{med}\left(\overline{BC}\right)}{2} = \frac{2\ \text{cm}}{2} = 1\ \text{cm}$$

Assim, temos:

$$\text{med}\left(\overline{RS}\right) = \text{med}\left(\overline{RB}\right) + \text{med}\left(\overline{BS}\right) = 2\ \text{cm} + 1\ \text{cm} = 3\ \text{cm}$$

Portanto, $\text{med}\left(\overline{RS}\right) = 3$ cm.

b) Observe que $\text{med}\left(\overline{ST}\right) = \text{med}\left(\overline{SC}\right) + \text{med}\left(\overline{CT}\right)$. Se S é ponto médio de $\overline{BC}$, então:

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

$\text{med}(\overline{SC}) = \text{med}(\overline{BS}) = 1 \text{ cm}$

Se T é ponto médio de $\overline{CD}$, para calcular $\text{med}(\overline{CT})$, podemos fazer:

$$\text{med}(\overline{CT}) = \frac{\text{med}(\overline{CD})}{2} = \frac{6 \text{ cm}}{2} = 3 \text{ cm}$$

Assim, temos:

$$\text{med}(\overline{ST}) = \text{med}(\overline{SC}) + \text{med}(\overline{CT}) = 1 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Portanto, $\text{med}(\overline{ST}) = 4$ cm.

c) Observe que $\text{med}(\overline{SD}) = \text{med}(\overline{SC}) + \text{med}(\overline{CD})$. De acordo com o item **b**:

$$\text{med}(\overline{SC}) = 1 \text{ cm}$$

Assim, temos:

$$\text{med}(\overline{SD}) = \text{med}(\overline{SC}) + \text{med}(\overline{CD}) = 1 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$$

Portanto, $\text{med}(\overline{SD}) = 7$ cm.

d) Observe que:

$$\text{med}(\overline{RD}) = \text{med}(\overline{RB}) + \text{med}(\overline{BC}) + \text{med}(\overline{CD})$$

De acordo com o item **a**:

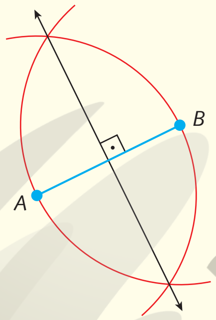
$$\text{med}(\overline{RB}) = 2 \text{ cm}$$

Assim, temos:

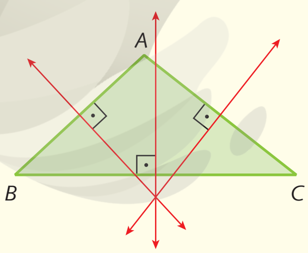
$$\text{med}(\overline{RD}) = \text{med}(\overline{RB}) + \text{med}(\overline{BC}) + \text{med}(\overline{CD}) =$$
$$= 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 6 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

Portanto, $\text{med}(\overline{RD}) = 10$ cm.

11. Exemplo de construção.



12. Traçando as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ no triângulo ABC, obtemos a seguinte figura:



Tecnologias digitais em foco – Páginas 85 e 86

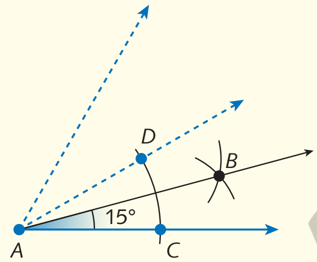
a) Espera-se que os estudantes concluam que a abertura do ângulo $B\hat{A}D$ mede 60° independentemente da medida de comprimento do raio das circunferências que foram traçadas na construção de $B\hat{A}D$.

b) Espera-se que os estudantes concluam que o triângulo ACD é um triângulo equilátero.

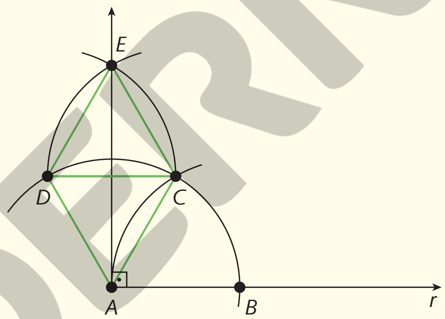
c) Porque o ângulo construído é um dos ângulos internos de um triângulo equilátero e, portanto, sua abertura mede 60°.

Atividades – Página 88

13. Os estudantes devem construir um ângulo de 60° e sua bissetriz $\overrightarrow{AD}$. Em seguida, devem construir uma nova bissetriz $\overrightarrow{AB}$, localizando o ângulo de medida de abertura 15°. Exemplo de construção:

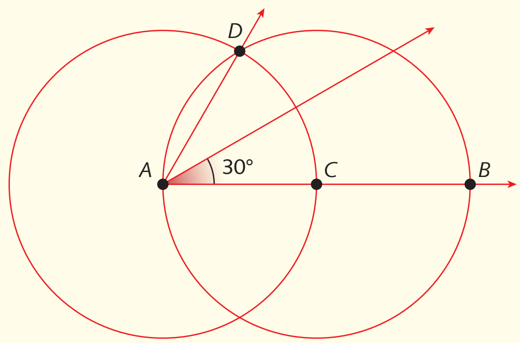


14. Os estudantes devem construir um ângulo $B\hat{A}D$ de medida de abertura de 120°, formado por dois ângulos adjacentes ($B\hat{A}C$ e $C\hat{A}D$) de medida de abertura de 60°, e traçar a bissetriz $\overrightarrow{AE}$ de $C\hat{A}D$. O ângulo $B\hat{A}E$ será reto.

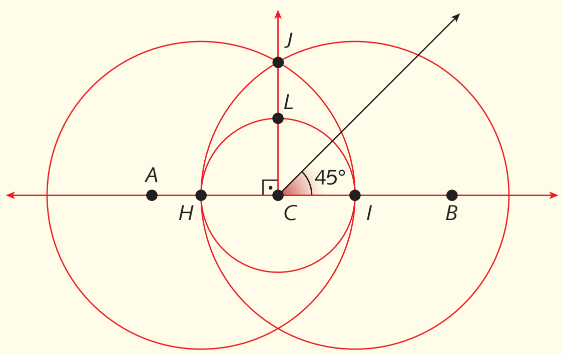


15. É possível construir os ângulos de medida de abertura de:

- 30°, traçando a bissetriz de um ângulo de 60° de medida de abertura:

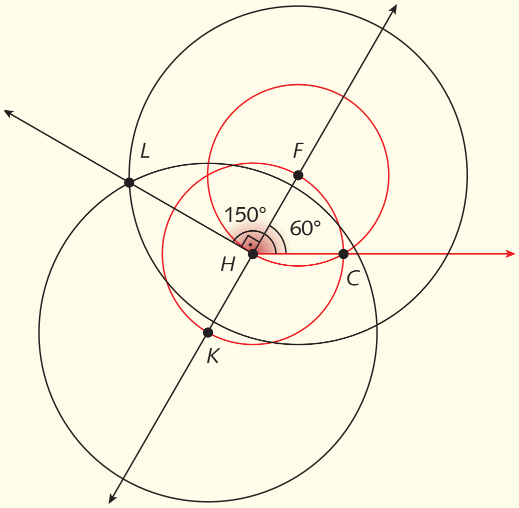


- 45°, traçando a bissetriz de um ângulo reto:

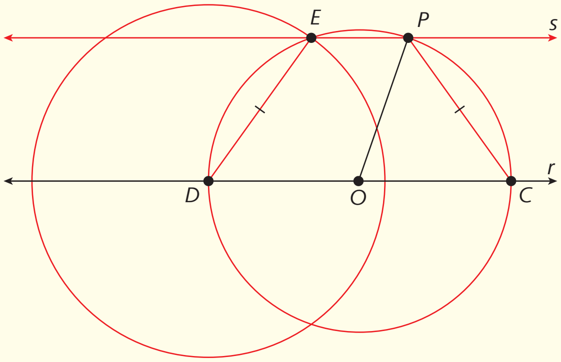


ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

- 150°, traçando um ângulo reto e um adjacente a ele com medida de abertura de 60°:



16. Exemplo de construção:



Atividades – Páginas 93 e 94

17. A mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de dois pontos fixos. Alternativa **c**.

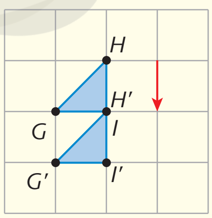
18. Sim, pois as ruas são paralelas, e retas paralelas são o lugar geométrico do plano que mantém a mesma medida da distância de uma reta.

19. A tribuna deve estar no centro; portanto, a de número 2.

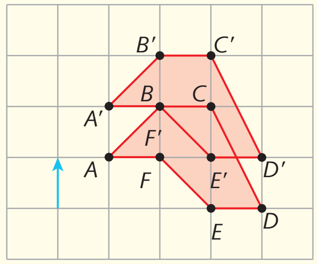
20. O erro aconteceu no quadro 2. Para traçar os arcos que determinam o ponto C, a abertura do compasso deve ser a mesma.

Atividade – Página 95

21. **a)** Fazendo a translação da figura na direção, sentido e com a medida de distância de deslocamento do vetor vermelho, temos a seguinte figura:

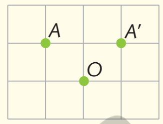


b) Fazendo a translação da figura na direção, sentido e com a medida de distância de deslocamento do vetor azul, temos a seguinte figura:

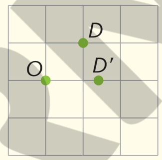


Atividades – Página 97

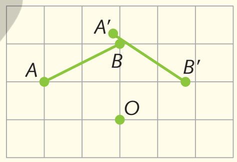
22. **a)** Fazendo uma rotação do ponto *A*, com centro *O*, no sentido horário, com um giro de 90°, obtemos a seguinte figura:



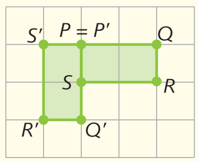
b) Fazendo uma rotação do ponto *D*, com centro *O*, no sentido horário, com um giro de 45°, obtemos a seguinte figura:



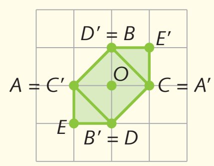
c) Fazendo uma rotação do segmento $\overline{AB}$, com centro *O*, no sentido horário, com um giro de 60°, obtemos a seguinte figura:



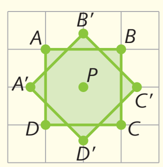
23. **a)** Fazendo uma rotação da figura *PQRS*, com centro *P*, no sentido horário, com um giro de 90°, obtemos a seguinte figura:



b) Fazendo uma rotação da figura *ABCDE*, com centro *O*, no sentido anti-horário, com um giro de 180°, obtemos a seguinte figura:



c) Fazendo uma rotação da figura *ABCD*, com centro *P*, no sentido anti-horário, com um giro de 45°, obtemos a seguinte figura:



Lendo e aprendendo – Página 101

1. a) Em ritos agrários, funerários ou de iniciação.

   b) Não, porque em alguns casos, ao utilizá-la, o indivíduo introjeta uma personagem do mundo sobrenatural.

   c) É o próprio mascarado, quando se põe em movimento.

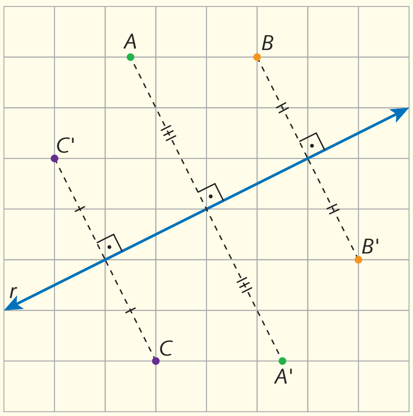
2. a) Simetria axial, em todas as máscaras, o lado esquerdo é o simétrico do lado direito.

   b) Os estudantes deverão construir uma máscara africana utilizando transformações geométricas.

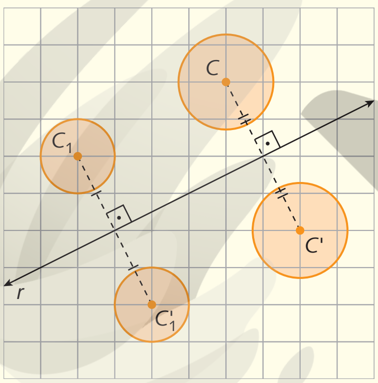
3. Os estudantes deverão realizar uma pesquisa sobre a influência da cultura africana na formação do povo brasileiro. O objetivo dessa atividade é mostrar que a cultura africana vai muito além das máscaras. É importante que eles reconheçam que essa cultura tem influência na culinária, no aspecto religioso, na música, entre outros.

Atividades – Página 102

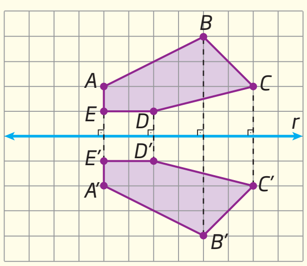
24. Na figura a seguir, os pontos *A'*, *B'* e *C'* são simétricos aos pontos *A*, *B* e *C*, respectivamente, em relação à reta *r*.



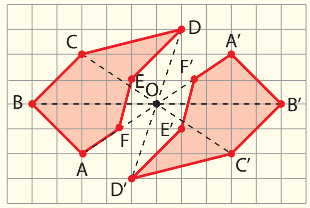
25. Na figura a seguir, os círculos de centro *C'* e C'_1 são simétricos aos círculos de centro *C* e C'_1, respectivamente, em relação à reta *r*.



26. Na figura a seguir, o polígono *A'B'C'D'E'* é simétrico ao polígono *ABCDE* em relação à reta *r*.

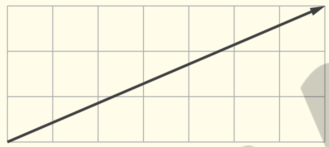


27. Na figura a seguir, o polígono *A'B'C'D'E'F'* é simétrico ao polígono *ABCDEF* em relação ao ponto *O*.



Tecnologias digitais em foco – Página 103

Observando os triângulos *ABC* e *A"B"C"*, identificamos que uma única translação pode ser feita por este vetor:



Tecnologias digitais em foco – Páginas 104 e 105

a) Observando os quadriláteros *ABCD* e *A"B"C"D"*, identificamos que uma translação pode ser feita por este vetor:

b) Espera-se que os estudantes respondam que essa medida é igual ao dobro da medida da distância entre as retas *r* e *s* e que essa igualdade se mantém verdadeira com as movimentações.

c) Espera-se que os estudantes percebam que a medida do comprimento do vetor é igual ao dobro da medida da distância entre as retas *r* e *s*.

d) Espera-se que os estudantes percebam que, nesse caso, a reflexão sucessiva pelas retas *r* e *s* é equivalente a uma rotação no sentido anti-horário com centro no ponto de intersecção das retas e ângulo de medida da abertura igual ao dobro da medida do ângulo formado por *r* e *s*.

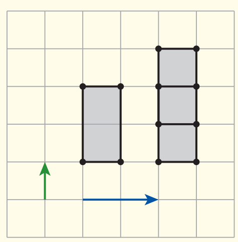
Tecnologias digitais em foco – Página 106

a) Sim; espera-se que os estudantes, após algumas investigações, percebam que o pentágono *A"B"C"D"E"* pode ser obtido do pentágono *ABCDE* por meio de uma rotação, no sentido anti-horário, de um giro de 90° ao redor do ponto *O*.

b) Espera-se que os estudantes respondam que a investigação feita sugere que realizar duas rotações sucessivas, no mesmo sentido, uma com um giro de *x*° e outra com um giro de *y*°, em torno de um ponto *O* qualquer, corresponde a realizar uma única rotação, no mesmo sentido das rotações anteriores, de um giro de $(x + y)°$ ao redor de *O*.

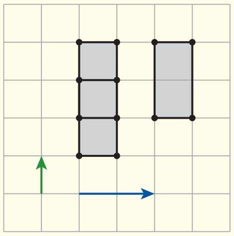
Atividades – Página 107

28. Transladando a figura primeiro utilizando o vetor azul e depois o vetor verde, obtemos a figura mostrada a seguir.

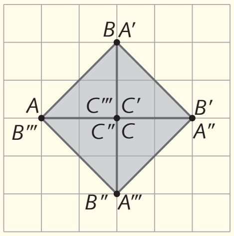


ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

29. Transladando a figura primeiro utilizando o vetor verde e depois o vetor azul, obtemos a figura mostrada a seguir.



30. Fazendo 3 rotações sucessivas da figura ABC, em torno do ponto C, no sentido horário, com um giro de 90°, obtemos a figura mostrada a seguir.



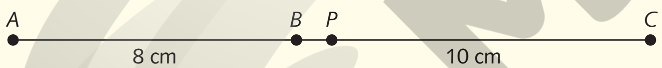
31. a) Resposta pessoal. Exemplo de questões que podem ser elaboradas:
Qual transformação geométrica foi realizada da primeira figura para a segunda? E da primeira para a terceira? (Respostas: Simetria de reflexão; simetria de translação.)
b) Os estudantes realizarão os exercícios dos colegas.
c) Os estudantes analisarão as respostas dos colegas.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – Páginas 108 e 109

1. Pelas definições de ângulo, temos:
a) $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $C\hat{O}E$, $D\hat{O}E$, $D\hat{O}F$ e $E\hat{O}F$.
b) $A\hat{O}D$, $A\hat{O}E$, $B\hat{O}E$ e $B\hat{O}F$.
c) $A\hat{O}F$
d) $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ e $C\hat{O}F$.

2. Como $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz, temos: $\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = 2 \cdot 10° = 20°$

3. Representando a situação, temos:



$$\text{med}\left(\overline{BP}\right) = \text{med}\left(\overline{BC}\right) - \text{med}\left(\overline{PC}\right) = 10 \text{ cm} - \left(\frac{18}{2}\right) \text{cm} =$$

$$= (10 - 9) \text{ cm} = 1 \text{ cm}$$

4. A torneira deve ser instalada em qualquer ponto da bissetriz do ângulo formado pelos muros do terreno, que será o lugar geométrico dos pontos equidistantes dos muros.

5. A primeira transformação foi reflexão, a segunda, translação, e a última, rotação. Alternativa **b**.

Capítulo 5 – Polígonos

Trocando ideias – Página 110

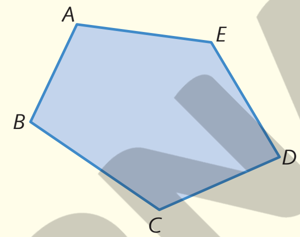
- Exemplo de resposta: triângulos, quadriláteros e pentágonos.
- Os estudantes construirão o *origami* cabeça de leão.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

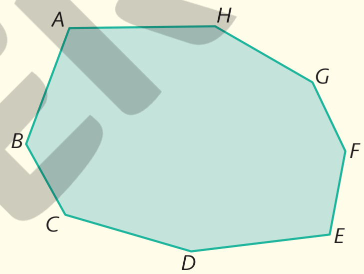
Atividades – Página 112

1. a) Triângulo ABC
Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.
Vértices: A, B e C.
Diagonais: não há.
b) Octógono $ABCDEFGH$
Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{AH}$.
Vértices: A, B, C, D, E, F, G e H.
Diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{BG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{CG}$, $\overline{CH}$, $\overline{DF}$, $\overline{DG}$, $\overline{DH}$, $\overline{EG}$, $\overline{EH}$ e $\overline{FH}$

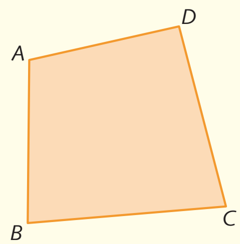
2. a) Exemplo de resposta:



b) Exemplo de resposta:



c) Exemplo de resposta:



3. a) O eneágono tem 9 ângulos internos.
b) O eneágono tem 9 vértices.

4. a) O pentágono possui 5 lados.
b) O pentágono possui 5 diagonais.
c) São elas: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$.

5. Como cada ângulo interno do octógono tem medida de abertura igual a 135° e há 8 ângulos internos, temos: $135° \cdot 8 = 1\,080°$
Portanto, a soma das medidas das aberturas de todos os ângulos internos desse octógono é 1080°.

Veja que interessante – Página 116

Espera-se que os estudantes percebam que, com o experimento, verificamos que a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos de um polígono é 360°.

Atividades – Página 116

6. **a)** $d = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = \dfrac{5 \cdot (5-3)}{2} = \dfrac{5 \cdot 2}{2} = 5$

Portanto, um polígono de 5 lados tem 5 diagonais.

b) $d = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = \dfrac{9 \cdot (9-3)}{2} = \dfrac{9 \cdot 6}{2} = 27$

Portanto, um polígono de 9 lados tem 27 diagonais.

c) $d = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = \dfrac{15 \cdot (15-3)}{2} = \dfrac{15 \cdot 12}{2} = 90$

Portanto, um polígono de 15 lados tem 90 diagonais.

d) $d = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = \dfrac{20 \cdot (20-3)}{2} = \dfrac{20 \cdot 17}{2} = 170$

Portanto, um polígono de 20 lados tem 170 diagonais.

7. **a)** $S = (n-2) \cdot 180° = (4-2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$

b) $S = (n-2) \cdot 180° = (9-2) \cdot 180° = 7 \cdot 180° = 1\,260°$

c) $S = (n-2) \cdot 180° = (11-2) \cdot 180° = 9 \cdot 180° = 1\,620°$

d) $S = (n-2) \cdot 180° = (20-2) \cdot 180° = 18 \cdot 180° = 3\,240°$

8. **a)** Temos, pela soma das medidas de abertura dos ângulos internos, que:

$S = (n-2) \cdot 180°$

$1\,080° = (n-2) \cdot 180°$

$\dfrac{1\,080}{180} = n - 2$

$6 = n - 2$

$6 + 2 = n$

$n = 8$

É um octógono.

b) Temos, pela soma das medidas de abertura dos ângulos internos, que:

$S = (n-2) \cdot 180°$

$1\,980° = (n-2) \cdot 180°$

$\dfrac{1\,980}{180} = n - 2$

$11 = n - 2$

$11 + 2 = n$

$n = 13$

É um polígono de 13 lados.

c) Temos, pela soma das medidas de abertura dos ângulos internos, que:

$S = (n-2) \cdot 180°$

$2\,340° = (n-2) \cdot 180°$

$\dfrac{2\,340}{180} = n - 2$

$13 = n - 2$

$13 + 2 = n$

$n = 15$

É um pentadecágono.

d) Temos, pela soma das medidas de abertura dos ângulos internos, que:

$S = (n-2) \cdot 180°$

$1\,800° = (n-2) \cdot 180°$

$\dfrac{1\,800}{180} = n - 2$

$10 = n - 2$

$10 + 2 = n$

$n = 12$

É um dodecágono.

9. **a)** $2x + 105° + 65° = 360°$

$2x + 170° = 360°$

$2x = 360° - 170°$

$2x = 190°$

$x = \dfrac{190°}{2}$

$x = 95°$

b) $5x = 540°$

$x = \dfrac{540°}{5}$

$x = 108°$

10. Como a soma das aberturas dos ângulos externos sempre é 360°, podemos assumir S = 360°. Assim:

$S = (n-2) \cdot 180°$

$360° = (n-2) \cdot 180°$

$\dfrac{360°}{180°} = n - 2$

$2 = n - 2$

$2 + 2 = n$

$n = 4$

É um quadrilátero.

Atividades – Página 118

11. **a)** $a_i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ $\qquad a_e = \dfrac{360°}{n}$

$a_i = \dfrac{(4-2) \cdot 180°}{4}$ $\qquad a_e = \dfrac{360°}{4}$

$a_i = \dfrac{2 \cdot 180°}{4}$ $\qquad a_e = 90°$

$a_i = 90°$

b) $a_i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ $\qquad a_e = \dfrac{360°}{n}$

$a_i = \dfrac{(8-2) \cdot 180°}{8}$ $\qquad a_e = \dfrac{360°}{8}$

$a_i = \dfrac{6 \cdot 180°}{8}$ $\qquad a_e = 45°$

$a_i = 135°$

c) $a_i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ $\qquad a_e = \dfrac{360°}{n}$

$a_i = \dfrac{(9-2) \cdot 180°}{9}$ $\qquad a_e = \dfrac{360°}{9}$

$a_i = \dfrac{7 \cdot 180°}{9}$ $\qquad a_e = 40°$

$a_i = 140°$

d) $a_i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ $\qquad a_e = \dfrac{360°}{n}$

$a_i = \dfrac{(20-2) \cdot 180°}{20}$ $\qquad a_e = \dfrac{360°}{20}$

$a_i = \dfrac{18 \cdot 180°}{20}$ $\qquad a_e = 18°$

$a_i = 162°$

12. $a_i = a_e$

$a_i + a_e = 180°$

$a_i + a_i = 180°$

$2a_i = 180°$

$a_i = \dfrac{180°}{2}$

$a_i = a_e = 90°$

Logo, é um quadrado.

13. $a_e = \dfrac{360°}{n}$

$40° = \dfrac{360°}{n}$

$n = \dfrac{360°}{40°}$

$n = 9$

O polígono tem 9 lados.

14. Como $a_i + a_e = 180°$ e com a informação do enunciado, podemos montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} a_i + a_e = 180° \\ a_i - a_e = 60° \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações, temos:

$2a_i = 240°$

$a_i = \dfrac{240°}{2}$

$a_i = 120°$

Substituindo a_i por 120° na equação $a_i + a_e = 180°$, temos:

$a_i + a_e = 180°$

$a_e = 180° - 120°$

$a_e = 60°$

Calculando o número de lados n do polígono:

$a_e = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow 60° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = \dfrac{360°}{60°} \Rightarrow n = 6$

Logo, o polígono é um hexágono.

Atividades - Página 120

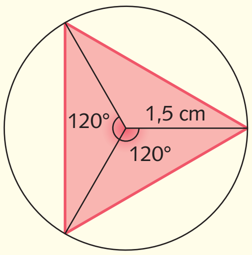
15. **a)** $a_c = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow a_c = \dfrac{360°}{6} \Rightarrow a_c = 60°$

b) $a_c = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow a_c = \dfrac{360°}{10} \Rightarrow a_c = 36°$

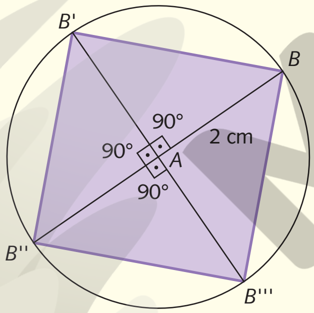
c) $a_c = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow a_c = \dfrac{360°}{12} \Rightarrow a_c = 30°$

d) $a_c = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow a_c = \dfrac{360°}{20} \Rightarrow a_c = 18°$

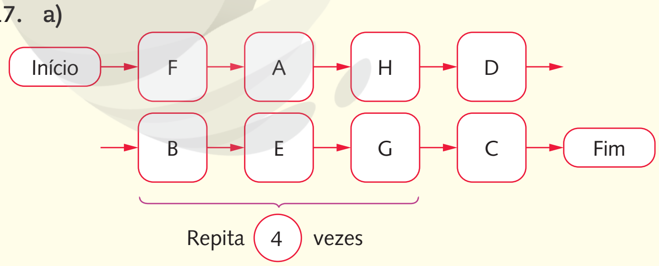
16. **a)** Exemplo de construção:



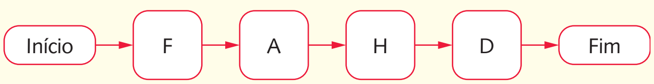
b) Exemplo de construção:



17. **a)**



b) Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
Construção de um triângulo equilátero.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

c) Os estudantes construirão o polígono seguindo o fluxograma elaborado pelo colega.

d) Os estudantes discutirão se as instruções foram adequadas.

Revisão dos conteúdos deste capítulo - Página 121

1. Quadrado $ABCD$
Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$
Vértices: A, B, C e D.
Diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$

2. **a)** 7 vértices.

b) 7 lados

3. **a)** $d = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = \dfrac{8 \cdot (8-3)}{2} = \dfrac{8 \cdot 5}{2} = 20$

b) $d = \dfrac{n \cdot (n-3)}{2} = \dfrac{3 \cdot (3-3)}{2} = \dfrac{3 \cdot 0}{2} = 0$

4. $S = (n-2) \cdot 180°$

$720 = (n-2) \cdot 180°$

$\dfrac{720}{180} = n - 2$

$4 = n - 2$

$4 + 2 = n$

$n = 6$

É um hexágono.

5. $S = (n-2) \cdot 180° = (5-2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$

6. $a_i = 3a_e$

$a_i + a_e = 180°$

$3a_e + a_e = 180°$

$4a_e = 180°$

$a_e = \dfrac{180°}{4}$

$a_e = 45°$

$\dfrac{360°}{n} = 45° \Rightarrow \dfrac{360°}{45} = n \Rightarrow n = 8$

Logo, é um octógono.

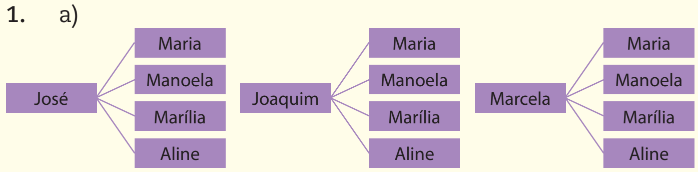
Capítulo 6 - Probabilidade

Trocando ideias - Página 122

- No lançamento de um dado, podem aparecer as faces: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. A probabilidade de sair a face 2 é uma chance em 6 possibilidades. Logo, a probabilidade é $\dfrac{1}{6}$.
- Como o baralho tem 52 cartas e a carta "ás de copas" aparece uma única vez, temos $\dfrac{1}{52}$.

Atividades - Página 125

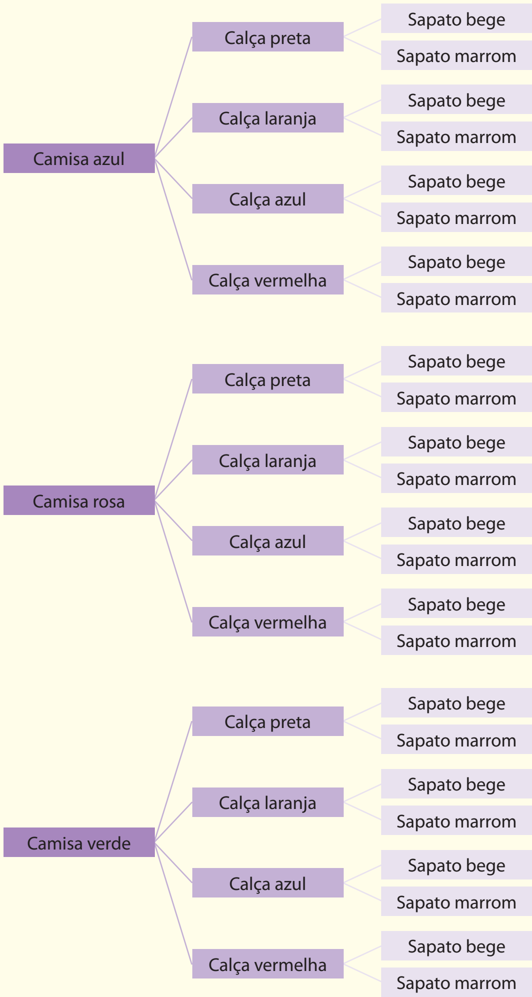
1. **a)**



b) O sorteio pode ter 12 resultados possíveis.

2. Os possíveis resultados são: (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, coroa) e (coroa, cara).

3. a) Construindo uma árvore de possibilidades, temos as seguintes combinações:



b) São 24 possibilidades.

4. a) Como nosso alfabeto tem 26 letras, o usuário terá 26 possibilidades de escolha para a letra.

b) O usuário terá 1 000 possibilidades de escolha, pois $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$. As opções vão de 000 a 999.

c) $26 \cdot 1\,000 = 26\,000$
O usuário terá 26 000 senhas diferentes.

d) $26 \cdot 10 = 260$
Terão 260 possibilidades de combinação.

5.

4	4	3	2
Milhar	Centena	Dezena	Unidade

A ordem de milhar tem 4 possibilidades (4, 5, 8 e 9), não podendo assumir o 0.
A ordem da centena tem 4 possibilidades, as cinco apresentadas, menos o algarismo utilizado na unidade de milhar.
A ordem da dezena tem 3 possibilidades, as cinco apresentadas, menos os dois algarismos utilizados na unidade de milhar e na centena.
A ordem da unidade tem 2 possibilidades, as cinco apresentadas, menos os três algarismos utilizados na unidade de milhar, na centena e na dezena.
Então, $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$, ou seja, 96 números.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

6. Resposta pessoal. Exemplo de problema que pode ser elaborado: Quantos números de três algarismos distintos existem?
Exemplo de resolução: $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$, ou seja, 648 números.

Atividades - Páginas 128 e 129

7. a)

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
7	(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)
8	(1, 8)	(2, 8)	(3, 8)	(4, 8)	(5, 8)	(6, 8)

b) O evento "saírem números 7 e 5" aparece apenas 1 vez; logo, a probabilidade será $\frac{1}{48}$.

c) O evento "saírem números 6 e 5" aparece 2 vezes; logo, a probabilidade será $\frac{2}{48} = \frac{1}{24}$.

d) Metade das somas são pares, e a outra metade, ímpares; logo, a probabilidade será $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$.

8. Para que os cálculos estejam corretos, a soma das probabilidades deve resultar em 1 ou 100%.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + x = 1$$
$$\frac{2}{12} + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} + \frac{12x}{12} = \frac{12}{12}$$
$$9 + 12x = 12$$
$$12x = 12 - 9$$
$$12x = 3$$
$$x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

A probabilidade de o estudante sorteado ser da turma D é $\frac{1}{4}$.

9. a) $6 \cdot 8 = 48$, ou seja, existem 48 possibilidades de casais diferentes.

b) Na turma há 6 homens, então a probabilidade de Fábio ser escolhido é $\frac{1}{6}$.

c) Na turma há 8 mulheres, então a probabilidade de Cecília ser escolhida é $\frac{1}{8}$.

d) Como calculado no item **a**, na turma há 48 possibilidades de casais diferentes. Só há 1 possibilidade de Fábio e Cecília serem escolhidos juntos, então: $\frac{1}{48}$

Logo, a probabilidade de Fábio e Cecília serem escolhidos é $\frac{1}{48}$.

10. a) $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$, ou seja, 18 maneiras diferentes.

b) $\frac{1}{18}$

11. a) $14 \cdot 13 \cdot 15 = 2730$, ou seja, 2 730 maneiras diferentes.

b) Só há 1 possibilidade de eles serem sorteados juntos, então: $\frac{1}{2730}$

12. Resposta pessoal. Exemplo de perguntas que podem ser elaboradas: Uma urna contém 50 bolinhas amarelas, 25 azuis e 25 vermelhas. Qual é a probabilidade de sair uma bolinha amarela ou azul? E a probabilidade de sair uma bolinha amarela?

Exemplo de resolução: $\frac{50}{100} + \frac{25}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$, ou seja, 75% de chance de sair uma bolinha amarela ou azul.

$\frac{50}{100} = 50\%$, ou seja, 50% de chance de sair uma bolinha amarela.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – Página 130

1. 64 resultados possíveis, pois $8 \cdot 8 = 64$.

2. 24 possibilidades diferentes, pois $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

3. Serão 11 bolas no total (5 + 6 = 11); assim, a probabilidade de retirar uma bola preta (5 das bolas totais) será $\frac{5}{11}$.

4. a) Será composto pelas faces do dado, ou seja, {A, B, C, D, E, F}.

b) A probabilidade será: $\frac{1}{6}$

5. a) A probabilidade será: $\frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

b) A probabilidade será: $\frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

6. a) Temos 5 pares, do total de 12 números. Logo, a probabilidade será $\frac{5}{12}$.

b) Temos 7 pares, do total de 12 números. Logo, a probabilidade será $\frac{7}{12}$.

7. a)

ESPAÇO AMOSTRAL						
Ás, Ás	2, Ás	3, Ás	4, Ás	5, Ás	6, Ás	7, Ás
Ás, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2	7, 2
Ás, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3	7, 3
Ás, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4	7, 4
Ás, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5	7, 5
Ás, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6	7, 6
Ás, 7	2, 7	3, 7	4, 7	5, 7	6, 7	7, 7

b) Apenas 1 chance de um total de 49 possibilidades. Logo, a probabilidade será de $\frac{1}{49}$.

c) Aparecem 7 pares iguais de um total de 49 possibilidades. Logo, a probabilidade será de $\frac{7}{49}$.

d) Os estudantes devem perceber que se Júlia contar qual é o valor de uma das cartas, a probabilidade de João acertar é de $\frac{1}{7}$.

É hora de extrapolar – Páginas 131 a 135

1. a) A partir de 60 anos.

b) Resposta pessoal. Os estudantes poderão citar: Atendimento preferencial, medicamento gratuito, transporte público gratuito, isenção de pagamento de IPTU, entre outros.

2. Os estudantes deverão fazer uma pesquisa sobre o Estatuto do Idoso, abrangendo o ano em que foi criado, os objetivos, a categoria de pessoas incluídas e os principais direitos assegurados. Uma referência de pesquisa pode ser encontrada a seguir:
http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/l10.741.htm (acesso em: 2 ago. 2022).

3. a) Resposta pessoal. Os estudantes devem comparar a resposta do item **a** da atividade 1 com a idade encontrada no estatuto para indicar que uma pessoa é idosa (idade igual ou superior a 60 anos).

b) Resposta pessoal. Os estudantes responderão se já conheciam o estatuto.

c) Resposta pessoal. Os estudantes colocarão suas opiniões sobre o conhecimento da população idosa quanto ao estatuto.

4. Resposta pessoal. Os estudantes construirão uma lista única para a turma com todos os direitos dos idosos pesquisados.

5. a) Resposta pessoal. Os estudantes responderão de acordo com sua opinião.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que os idosos que se preocupam mais com a qualidade de vida praticam atividade física, têm uma boa alimentação etc.

6. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes construam um texto defendendo a ideia de que o gasto com o idoso é um investimento, tendo em vista o bem-estar do idoso, aumentando a longevidade e a qualidade de vida.

7. a) Os grupos que possuem o direito ao assento preferencial em transportes públicos são: pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida, gestantes, lactantes, pessoas acompanhadas de crianças de colo, autistas, idosos e obesos.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que é importante porque esses grupos têm mobilidade reduzida e os assentos preferenciais são uma garantia de que vão conseguir se acomodar nos transportes públicos.

c) A probabilidade será de $\frac{6}{46} = \frac{3}{23} \simeq 13\%$.

8. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que as rampas são mais indicadas que as escadas porque exigem menos esforço de quem as utiliza, principalmente das pessoas que utilizam cadeiras de roda para se locomover.

b) Os estudantes deverão construir a bissetriz do ângulo de inclinação seguindo estes passos:
- Traçar um arco com a ponta-seca do compasso no vértice do ângulo, abertura qualquer, de forma a cruzar os dois lados do ângulo nos pontos A e B.
- Com a ponta-seca do compasso em A, traçar um arco.
- Com a ponta-seca do compasso em B, traçar outro arco com mesma abertura do passo anterior, até interceptar o arco anterior.
- A bissetriz será a semirreta com origem no vértice que passa pelo cruzamento dos dois arcos.

9. Resposta pessoal. Os estudantes optarão por um dos temas disponibilizados.

10. Os estudantes construirão uma cartilha informativa. Para isso, farão uma pesquisa para descobrir o que é uma cartilha informativa. Espera-se que na pesquisa descubram que uma cartilha informativa é um material que procura educar e informar. É importante que tenha adequação ao público-alvo; linguagem clara e objetiva; visual leve e atraente e informações confiáveis.
11. Os estudantes escolherão um dos direitos da etapa **1** para ser explicado pelo grupo.
12. Os estudantes devem discutir e construir as imagens e os textos da cartilha.
13. Os grupos deverão elaborar uma capa para a cartilha.
14. Os grupos compartilharão as páginas elaboradas para análises e sugestões dos colegas.
15. Os estudantes deverão anotar dúvidas, opiniões e sugestões dos colegas.
16. Os estudantes farão uma votação para escolher a capa da cartilha, que deve estar organizada em duas partes: a primeira, com as páginas sobre os direitos dos idosos; a segunda, com dicas para prevenção de quedas.
17. Divulgação da cartilha.
18. Os estudantes farão uma síntese do trabalho com base na discussão sobre a importância de garantir com leis os direitos dos idosos por toda a população e sobre como os estudantes fariam para se preparar para a velhice.
19. Os estudantes construirão um texto descrevendo o processo de confecção de uma cartilha coletiva e a apresentação e análise das páginas elaboradas e divulgação da cartilha.

Capítulo 7 – Triângulos e quadriláteros

Trocando ideias – Página 135

- Exemplos de resposta: todos seus ângulos internos têm a mesma medidade abertura, têm dois pares de lados paralelos, têm todos os ângulos internos retos.
- Resposta pessoal.

Atividades – Página 137

1. **a)** Como todas as medidas de comprimento dos lados do triângulo são iguais, podemos classificá-lo como equilátero; em relação aos ângulos, é classificado como acutângulo, pois todas as medidas das aberturas dos ângulos internos são menores que 90° e maiores que 0°.

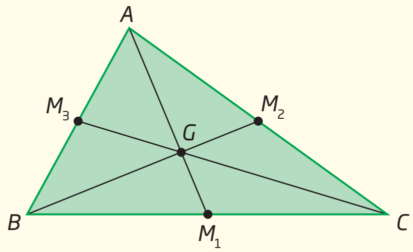
   b) Esse triângulo tem dois lados com a mesma medida de comprimento, então pode ser classificado como isósceles; em relação aos ângulos, é classificado como obtusângulo, pois um ângulo tem a medida de abertura maior que 90° e menor que 180°.

   c) Esse triângulo tem todos os lados com medidas de comprimento diferentes, sendo classificado como escaleno; em relação aos ângulos, é classificado como obtusângulo, pois um ângulo tem a medida de abertura maior que 90° e menor que 180°.

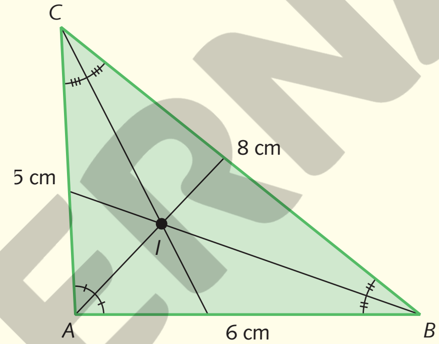
2. Não, pois a soma das medidas de abertura de dois ângulos obtusos é maior que 180°. Então é impossível ter um triângulo com dois ângulos obtusos, uma vez que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.

Atividades – Página 140

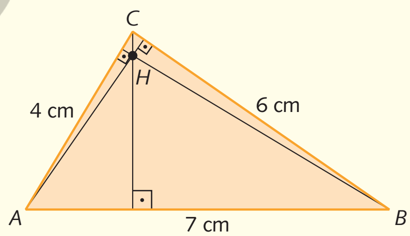
3. Os estudantes deverão copiar o triângulo no caderno e traçar as medianas relativas a cada lado do triângulo; o encontro dessas cevianas determinará o baricentro do triângulo.



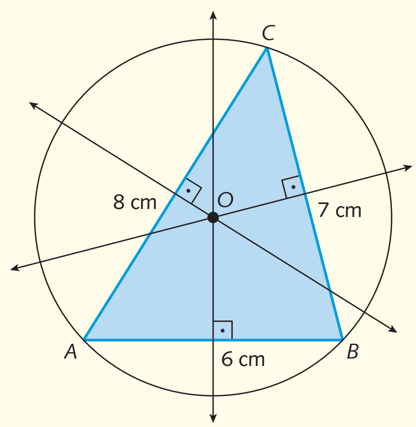
4. Traçando a bissetriz de cada ângulo interno do triângulo, o ponto I encontrado na intersecção das cevianas é o incentro.



5. Traçando a altura relativa a cada lado do triângulo, o ponto H encontrado na intersecção das cevianas é o ortocentro.

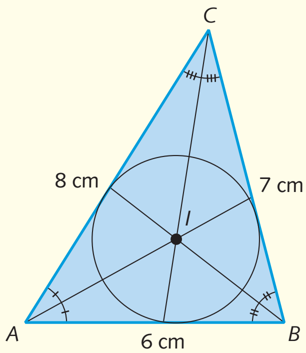


6. - Os estudantes devem traçar as mediatrizes do triângulo e encontrar o circuncentro; o raio da circunferência circunscrita corresponde à distância do circuncentro a qualquer vértice do triângulo.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

- Os estudantes devem traçar as bissetrizes do triângulo e encontrar o incentro; o raio da circunferência inscrita corresponde à distância do incentro a qualquer lado do triângulo.



Tecnologias digitais em foco - Páginas 141 e 142

a) Nesse caso, espera-se que os estudantes concluam que a mediatriz, a altura e a mediana coincidem e estão contidas na reta, que é a mediatriz relativa à base.

b) Espera-se que os estudantes observem que os pontos notáveis em um triângulo isósceles estão sempre alinhados.

c) Espera-se que os estudantes verifiquem que os pontos notáveis em um triângulo equilátero coincidem.

Atividades - Páginas 144 e 145

7. a) Sendo $\overline{AB} \cong \overline{ED}$, $\hat{A} \cong \hat{E}$ e $\overline{AC} \cong \overline{EF}$, podemos afirmar que os triângulos ABC e EDF são congruentes pelo caso LAL.

b) Sendo $\hat{A} \cong \hat{F}$, $\overline{CA} \cong \overline{FD}$ e $\hat{C} \cong \hat{D}$, podemos afirmar que os triângulos ABC e FED são congruentes pelo caso ALA.

c) Como as medidas das aberturas dos ângulos internos desses triângulos não são congruentes, eles não são congruentes.

d) Sendo $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{A} \cong \hat{D}$ e $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, podemos afirmar que os triângulos ABC e DEF são congruentes pelo caso LAL.

e) Sendo $\hat{B} \cong \hat{D}$, $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ e $B\hat{C}A \cong D\hat{C}E$ (opostos pelo vértice), podemos afirmar que os triângulos ABC e EDC são congruentes pelo caso ALA.

8. a) Como $\overline{AD} \cong \overline{CB}$, $A\hat{D}B \cong C\hat{B}D$ e $\overline{BD}$ é lado comum, podemos afirmar que os triângulos ADB e CBD são congruentes pelo caso LAL.

b) Como $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$, $\overline{CD}$ é lado comum e $A\hat{D}C \cong B\hat{D}C$, podemos afirmar que os triângulos CAD e CBD são congruentes pelo caso ALA.

9. Como $\overline{CM} \cong \overline{MD}$, $C\hat{M}A \cong D\hat{M}B$ (opostos pelo vértice) e $M\hat{A}C \cong M\hat{B}D$, que são ângulos retos e opostos aos lados $\overline{CM}$ e $\overline{MD}$, podemos afirmar que os triângulos ACM e BDM são congruentes pelo caso LAA_o. Dessa maneira, concluímos que existe uma correspondência em relação aos lados e ângulos, sendo $\overline{AM} \cong \overline{MB}$.

10. Como $\overline{DA} \cong \overline{CB}$, $med\left(D\hat{A}M\right) = med\left(C\hat{B}M\right) = 90°$ e $\overline{AM} \cong \overline{BM}$, podemos afirmar que os triângulos AMD e BMC são congruentes pelo caso LAL. Dessa maneira, concluímos que existe uma correspondência em relação aos ângulos e lados, sendo $\overline{MD} \cong \overline{MC}$.

11. Como $A\hat{B}M \cong C\hat{D}M$, $\overline{BM} \cong \overline{DM}$ e $B\hat{M}A \cong D\hat{M}C$ (oposto pelo vértice), então $\Delta ABM \cong \Delta CDM$ pelo caso ALA.

Atividade - Página 149

12. Precisamos provar que o ponto M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e que $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overline{AB}$ são perpendiculares.
Como $\overline{AC} \cong \overline{AD} \cong \overline{BC} \cong \overline{BD}$ (raios da circunferência criados com a abertura do compasso) e $\overline{CD}$ é lado comum aos dois triângulos, então $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ pelo caso LLL. Temos que:
$A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$ e $A\hat{D}C \cong B\hat{D}C$
Analogamente, $\Delta ACB \cong \Delta ADB$, então:
$C\hat{A}B \cong D\hat{A}B$ e $D\hat{B}A \cong A\hat{B}C$
Por essas congruências, temos que $AMD \cong \Delta AMC$ pelo caso ALA, então:
$A\hat{M}D \cong A\hat{M}C$
Analogamente, $\Delta BMD \cong \Delta BMC$, então:
$B\hat{M}D \cong B\hat{M}C$
Como $med\left(B\hat{M}D\right) + med\left(B\hat{M}C\right) = 180°$, então $med\left(B\hat{M}D\right) =$
$= med\left(B\hat{M}C\right) = 90°$.
Como $med\left(A\hat{M}D\right) + med\left(A\hat{M}C\right) = 180°$, então $med\left(A\hat{M}D\right) =$
$= med\left(A\hat{M}C\right) = 90°$.
Como $A\hat{M}D \cong B\hat{M}D$, $\overline{MD}$ lado comum e $A\hat{D}C \cong B\hat{D}C$, temos que $\Delta AMD \cong \Delta BMD$ pelo caso ALA, então: $\overline{AM} \cong \overline{BM}$.
Assim, concluímos que $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Atividades - Página 151

13. a) M, N, O e P

b) $\overline{MN}$, $\overline{NO}$, $\overline{OP}$ e $\overline{MP}$

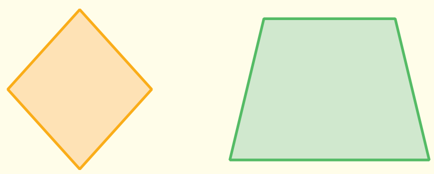
c) $\overline{NO}$

d) $\overline{MO}$ e $\overline{NP}$

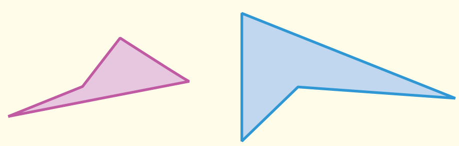
e) $\hat{N}$ ou $M\hat{N}O$

14. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

Quadriláteros convexos:



Quadriláteros não convexos:



Atividades - Página 152

15. Considerando que, em um quadrilátero convexo, a soma das medidas de abertura dos ângulos internos é igual a 360°, temos:

a) $x + 110° + 60° + 80° = 360°$
$x = 110°$

b) $x + 2x + 4x + 5x = 360°$

$12x = 360°$

$x = \dfrac{360°}{12} = 30°$

c) $x + 90° + 120° + 80° = 360°$

$x = 70°$

16. Considerando que, em um quadrilátero convexo, a soma das medidas de abertura dos ângulos internos é igual a 360°, temos:

$x + 2x + 3x + 4x = 360°$

$10x = 360°$

$x = \dfrac{360°}{10} = 36°$

Substituindo o valor de x em cada expressão que representa as medidas de abertura dos ângulos internos, teremos 36°, 72°, 108° e 144°.

17. Considerando que, em um quadrilátero convexo, a soma das medidas de abertura dos ângulos internos é igual a 360°, temos:

$x + 20° + x + 40° + x + 50° + x - 10° = 360°$

$4x = 260°$

$x = \dfrac{260°}{4} = 65°$

Substituindo o valor de x, temos:

$x + 20° = 65° + 20° = 85°$

$x + 40° = 65° + 40° = 105°$

$x + 50° = 65° + 50° = 115°$

$x - 10° = 65° - 10° = 55°$

18. Traçando a diagonal $\overline{BD}$ no quadrilátero ABCD, podemos notar que a figura fica decomposta em dois triângulos. Como a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual 180°, temos que:

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = 180° + 180° = 360°.$

Concluímos que, para todo quadrilátero ABCD não convexo, a soma das medidas de abertura dos ângulos internos é igual a 360°.

Tecnologias digitais em foco – Páginas 153 e 154

a) Espera-se que os estudantes observem que os lados opostos de qualquer paralelogramo são congruentes.

b) Espera-se que os estudantes observem que os ângulos internos opostos de qualquer paralelogramo são congruentes.

c) Considerando as medidas encontradas, espera-se que os estudantes notem que AM = MD e BM = MC, ou seja, M é o ponto médio das duas diagonais. Assim, essa exploração indica que as diagonais de um paralelogramo se cruzam em seus respectivos pontos médios.

Atividades – Páginas 156 e 157

19. a) No paralelogramo ABCD, temos que $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$, $\overline{AB} \,//\, \overline{DC}$; logo, AD = BC e AB = DC. Portanto, $x = 4$ cm e $y = 2$ cm.

b) O $\triangle$BCD é isósceles, então:

$\text{med}(\hat{CBD}) = \text{med}(\hat{CDB}) = x = y.$

$2x + 90° = 180°$

$x = 45°$

c) O $\triangle$ABD é isósceles, então $\text{med}(\hat{ADB}) = \text{med}(\hat{ABD}) = 30°$, e pela soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo, temos que $\text{med}(\hat{BAD}) = 120°$. No paralelogramo ABCD, $\text{med}(\hat{BCD}) = \text{med}(\hat{BAD}) = 120°$ e $\text{med}(\hat{CDA}) = \text{med}(\hat{CBA}) = x + 30°$; usando a soma das medidas de abertura dos ângulos internos do paralelogramo, temos que:

$2 \cdot 120° + 2(x + 30°) = 360°$

$2x + 60° = 120°$

$x = 30°$

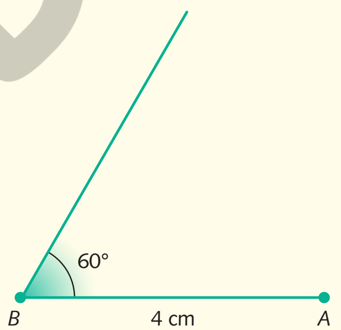
Como $\text{med}(\hat{CDA}) = \text{med}(\hat{CBA}) = 60°$ e $\text{med}(\hat{BCA}) =$ $= \text{med}(\hat{BAC}) = y$ ($\triangle$ABC é isósceles), e utilizando a soma das medidas de abertura dos ângulos internos no $\triangle$ABC, temos que:

$\text{med}(\hat{CBA}) + \text{med}(\hat{BAC}) + \text{med}(\hat{BCA}) = 180°$

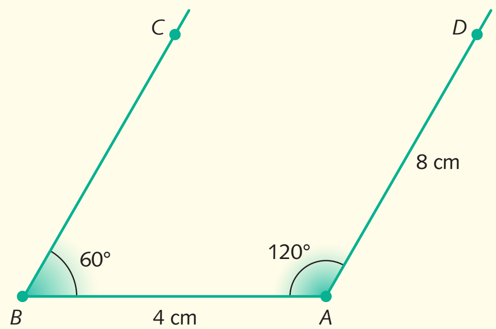
$60° + y + y = 180°$

$y = 60°$

20. Roteiro: Traçar o segmento $\overline{AB}$ cujo comprimento mede 4 cm e, em seguida, construir na extremidade B o ângulo de medida de abertura de 60°.

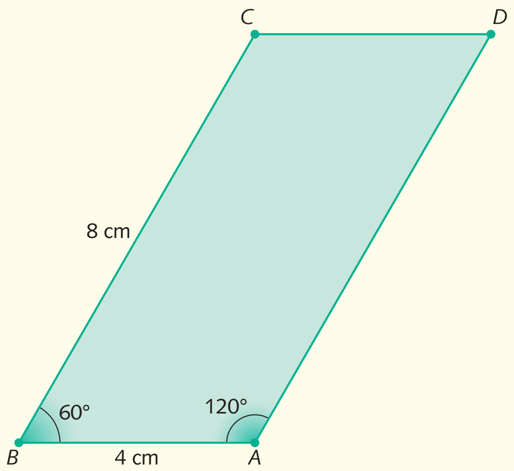


Na extremidade A, construir um ângulo de medida de abertura de 120°, porque ângulos consecutivos em um paralelogramo são suplementares. Com um compasso com abertura medindo 8 cm de comprimento e com a ponta-seca em B, e depois em A, marcar respectivamente os pontos C e D nos lados dos ângulos construídos.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Unir os pontos C e D, completando o paralelogramo ABCD.



21. Sendo a diferença entre as medidas de comprimento dos seus lados igual a 14, denominamos a medida de comprimento de um lado como x e a medida de comprimento do outro lado como $x + 14$:

$2x + 2(x + 14) = 66$

$x + x + 14 = 33$

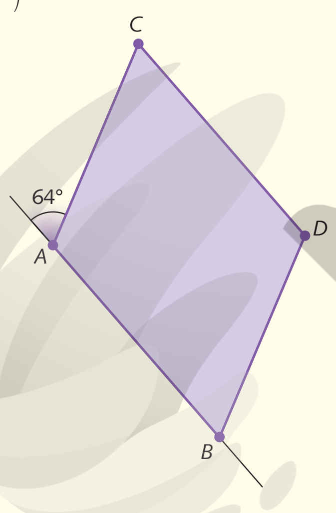
$x = 9{,}5$

Assim, $x + 14 = 23{,}5$.

Logo, as medidas de comprimento dos lados são: 9,5 cm, 23,5 cm, 9,5 cm e 23,5 cm.

22. Como em um paralelogramo os ângulos opostos são congruentes, temos $\text{med}\left(C\hat{A}B\right) = \text{med}\left(B\hat{D}C\right)$ e $\text{med}\left(A\hat{C}D\right) =$

$= \text{med}\left(D\hat{B}A\right)$:



$\text{med}\left(C\hat{A}B\right) + 64° = 180°$

$\text{med}\left(C\hat{A}B\right) = 116°$

$\text{med}\left(C\hat{A}B\right) + \text{med}\left(A\hat{C}D\right) = 180°$

$\text{med}\left(A\hat{C}D\right) = 180° - 116° = 64°$

Portanto, as medidas de abertura dos ângulos são: 116°, 64°, 116° e 64°.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

23. Usando a soma das medidas de abertura dos ângulos internos no $\triangle BCD$:

$\text{med}\left(B\hat{C}D\right) + 38° + 54° = 180°$

$\text{med}\left(B\hat{C}D\right) = 88°$

No paralelogramo ABCD, os ângulos opostos são congruentes, então $\text{med}\left(B\hat{C}D\right) = \text{med}\left(B\hat{A}D\right) = 88°$.

Note que $\text{med}\left(A\hat{D}B\right) = \text{med}\left(C\hat{B}D\right) = 38°$ por serem ângulos alternos internos. Assim:

$\text{med}\left(A\hat{D}C\right) = \text{med}\left(A\hat{D}B\right) + \text{med}\left(C\hat{D}B\right) = 38° + 54° = 92°$.

Em síntese, temos:

$\text{med}\left(\hat{C}\right) = \text{med}\left(\hat{A}\right) = 88°$ e $\text{med}\left(\hat{B}\right) = \text{med}\left(\hat{D}\right) = 92°$.

24. No paralelogramo ABCD, os ângulos consecutivos são suplementares; logo, $\text{med}\left(D\hat{C}B\right) + \text{med}\left(C\hat{B}A\right) = 180°$; então, $\text{med}\left(C\hat{B}A\right) = 110°$.

Sendo $\overrightarrow{BM}$ e $\overrightarrow{CM}$, respectivamente, as bissetrizes dos ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$, temos $\text{med}\left(M\hat{C}B\right) = 35°$ e $\text{med}\left(M\hat{B}C\right) = 55°$.

Usando a soma das medidas de abertura dos ângulos internos no $\triangle BCM$:

$\text{med}\left(M\hat{C}B\right) + \text{med}\left(B\hat{M}C\right) + \text{med}\left(M\hat{B}C\right) = 180°$

$\text{med}\left(B\hat{M}C\right) = 180° - 35° - 55° = 180° - 90° = 90°$

25. Estando x representando a medida de abertura de um ângulo interno do paralelogramo, a medida de abertura do ângulo consecutivo pode ser representada por $(x + 80°)$.

$x + (x + 80°) = 180°$

$2x = 100°$

$x = 50°$

$x + 80° = 130°$

Como os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, podemos afirmar que as aberturas dos outros dois medem 50° e 130°.

Atividades – Página 159

26. As alternativas corretas são: a, b, c, d, f.

a) Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Verdadeira.

d) Verdadeira.

e) Falsa, todo losango é um paralelogramo.

f) Verdadeira.

g) Falsa, nem todo paralelogramo é um retângulo.

27. As alternativas corretas são: a, b, c, d, f.

a) Verdadeira, as diagonais de um losango são perpendiculares.

b) Verdadeira, pois são ângulos alternos internos.

c) Verdadeira, pois as diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios.

d) Verdadeira.

e) Falsa, as diagonais de um losango não são necessariamente congruentes.

f) Verdadeira.

g) Falsa, $\overline{AC}$ não é congruente a $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

28. Sendo ABCD um losango e $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$ bissetrizes, por consequência, $a = b = e = f$ e $c = d = g = h$, teremos:

$\text{med}\left(B\hat{A}D\right) = 100°$

$2a = 100°$

$a = 50°$

Se dois ângulos consecutivos são suplementares, temos que:

$100° + 2c = 180°$

$c = 40°$

Portanto, teremos:

$a = b = e = f = 50°,\ c = d = g = h = 40°.$

29. A diagonal de um losango é a bissetriz de um ângulo; se a abertura do ângulo formado pelo lado e pela diagonal mede 36°, então a abertura do ângulo desse vértice mede 72°. Para descobrir a medida de abertura do ângulo consecutivo a ele, basta subtrair 72° de 180°; logo, a abertura desse ângulo mede 108°.

Como os ângulos opostos de um losango são congruentes, podemos afirmar que as aberturas dos outros dois medem 72° e 108°.

30. Somando as medidas de abertura dos ângulos internos do triângulo, temos que:

$2x + 114° = 180°$

$x = 33°$

Sendo ABCD retângulo, então $\text{med}\left(A\hat{D}C\right) = 90°$; assim:

$x + y = 90°$

$33° + y = 90°$

$y = 57°$

31. $\text{med}\left(D\hat{C}B\right) + 140°30' = 180°$

$\text{med}\left(D\hat{C}B\right) = 39°30'$

Em um losango, a soma das medidas de abertura dos ângulos consecutivos é suplementar; assim, temos que:

$\text{med}\left(D\hat{C}B\right) + \text{med}\left(C\hat{B}A\right) = 180°$

$\text{med}\left(C\hat{B}A\right) = 180° - 39°30' = 140°30'$

Como os ângulos opostos são congruentes, então os maiores ângulos são $C\hat{B}A$ e $C\hat{D}A$.

32. A abertura do ângulo formado entre o lado e a bissetriz mede 64°; dessa maneira, a abertura do ângulo desse vértice mede 128°. Em um losango, dois ângulos consecutivos são suplementares; logo, a abertura do outro ângulo mede 52°. Assim, como os ângulos opostos de um losango são congruentes, as medidas de abertura dos ângulos internos são 52°, 52°, 128° e 128°.

33. O $\triangle BEC$ é isósceles de base $\overline{EC}$, então $\text{med}\left(B\hat{E}C\right) = \text{med}\left(B\hat{C}E\right) = x$. ABCD é um quadrado, logo $\text{med}\left(A\hat{B}E\right) + \text{med}\left(C\hat{B}E\right) = 90°$. Como o $\triangle ABE$ é equilátero, então as aberturas de todos os ângulos internos medem 60°. Assim, temos que:

$\text{med}\left(B\hat{E}C\right) + \text{med}\left(B\hat{C}E\right) + \text{med}\left(C\hat{B}E\right) = 180°$

$2x + 30° = 180°$

$x = 75°$

Atividades - Página 162

34. Como a soma das medidas das aberturas de um ângulo externo e de um ângulo interno relativos ao mesmo vértice é igual a 180°. Seja x a medida de abertura do ângulo interno desse vértice, temos que:

$100°\ 40' + x = 180°$ $\qquad x = 79°\ 20'$

$x = 180° - 100°\ 40'$

Em um trapézio isósceles, os ângulos adjacentes às mesmas bases são congruentes e os ângulos consecutivos que não estão na mesma base são suplementares; sendo assim, as aberturas dos ângulos medem $100°\ 40'$; $100°\ 40'$; $79°\ 20'$ e $79°\ 20'$.

35. Em um trapézio isósceles, os ângulos adjacentes às mesmas bases são congruentes e os ângulos consecutivos que não estão na mesma base são suplementares, então os ângulos obtusos são congruentes entre si e os ângulos agudos também são congruentes entre si. Utilizando a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero e chamando de x a medida de abertura do ângulo agudo, teremos:

$250° + 2x = 360°$ $\qquad x = \dfrac{110°}{2}$

$2x = 360° - 250°$ $\qquad x = 55°$

Logo, as aberturas dos ângulos agudos medem 55° e 55°.

36. Como a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de todo quadrilátero é 360° e considerando que y é a medida de abertura de cada ângulo da base maior, temos que:

$\text{med}\left(D\hat{A}B\right) + \text{med}\left(A\hat{B}C\right) + \text{med}\left(B\hat{C}D\right) + \text{med}\left(C\hat{D}A\right) = 360°$

$100° + 100° + y + y = 360°$

$2y = 160°$

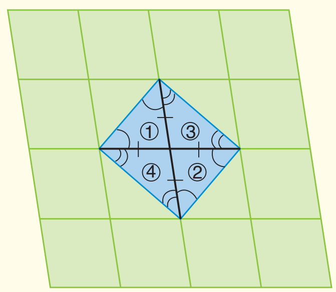
$y = \dfrac{160°}{2} = 80°$

Como $\overline{BE}$ e $\overline{EC}$ são bissetrizes, $\text{med}\left(E\hat{B}C\right) = \text{med}\left(B\hat{C}E\right) = \dfrac{80°}{2}$; utilizando a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo, que é 180°, temos que:

$\text{med}\left(E\hat{B}C\right) + \text{med}\left(B\hat{E}C\right) + \text{med}\left(B\hat{C}E\right) = 180°$

$x = 180° - 80° = 100°$

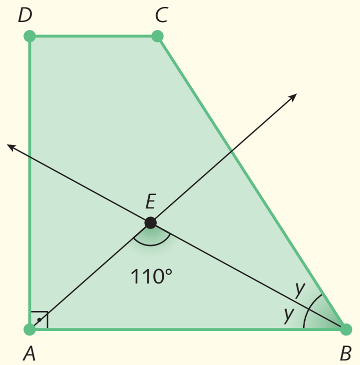
37. **a)** Traçando as diagonais do quadrilátero azul, obtemos 2 pares de triângulos isósceles congruentes (1 e 2; 3 e 4).



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Como cada ângulo interno do quadrilátero tem a mesma medida de abertura, essa medida é: $\frac{360°}{4} = 90°$.
Portanto, o quadrilátero azul é um retângulo.

b) A figura abaixo representa a situação.



A soma das medidas de abertura dos ângulos internos do triângulo $\triangle AEB$ é 180°.

$$45° + 110° + y = 180°$$

$$y = 180° - 155° = 25°$$

Somando as medidas de abertura dos ângulos do trapézio, teremos:

$$90° + 90° + 50° + \text{med}\left(B\hat{C}D\right) = 360°$$

$$\text{med}\left(B\hat{C}D\right) = 360° - 230° = 130°$$

Então, a medida de abertura do suplemento do maior ângulo é 50°.

38. **a)** Trapézio retângulo e escaleno, pois possui dois ângulos retos e as medidas de comprimento dos seus lados não paralelos não são iguais.

b) Trapézio isósceles, pois os triângulos BHC e AID são congruentes, logo os lados não paralelos são congruentes.

c) Trapézio escaleno, pois seus lados não paralelos não são congruentes.

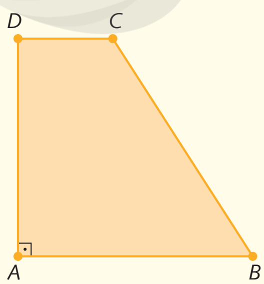
d) Trapézio retângulo e escaleno, pois possui dois ângulos retos e as medidas de comprimento dos seus lados não paralelos não são iguais.

e) Trapézio escaleno, pois seus lados não paralelos não são congruentes.

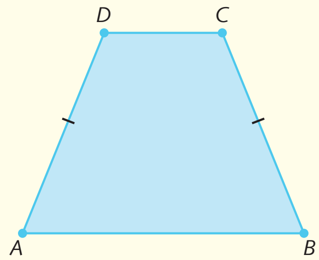
f) Trapézio isósceles, pois os lados não paralelos são congruentes.

39. Trapezoide é todo quadrilátero convexo que não tem lados paralelos, enquanto o trapézio apresenta um par de lados paralelos.

40. Exemplo de resposta:



Trapézio retângulo.



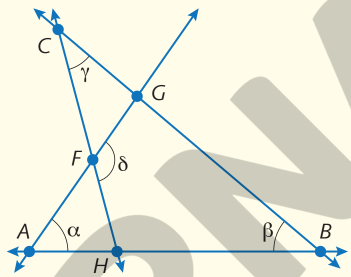
Trapézio isósceles.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Resolvendo em equipe – Página 163

Interpretação e identificação dos dados

Observe a figura.



O triângulo formado pelos ângulos de medidas de abertura α e β e o formado pelos ângulos de medidas de aberturas β e γ têm duas medidas de abertura conhecidas.
As medidas das aberturas dos terceiros ângulos podem ser determinadas com base na soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer triângulo ser igual a 180°.

Plano de resolução e resolução

A soma das medidas de abertura dos ângulos internos do $\triangle ABG$ é:

$$\alpha + \beta + \text{med}\left(B\hat{G}F\right) = 180°$$

$$\text{med}\left(B\hat{G}F\right) = 180° - (54° + 39°) = 87°$$

A soma das medidas de abertura dos ângulos internos do $\triangle CHB$ é:

$$\beta + \gamma + \text{med}\left(C\hat{H}B\right) = 180°$$

$$\text{med}\left(C\hat{H}B\right) = 180° - (39° + 36°) = 105°$$

No quadrilátero FGBH, a soma das medidas de abertura dos ângulos internos é igual a 360°.

$$\beta + \delta + \text{med}\left(B\hat{G}F\right) + \text{med}\left(C\hat{H}B\right) = 360°$$

$$\delta = 360° - (87° + 105° + 39°) = 129°$$

Logo, a alternativa **e** é a correta.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – Páginas 164 e 165

1. Sabendo que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e que $x = y$, podemos escrever que:

$$x + x + 90° = 180° \Rightarrow x = 45°$$

Assim, no $\triangle BCD$ temos: $\text{med}\left(\hat{B}\right) = 45°$, $\text{med}\left(\hat{D}\right) = 45°$ e $\text{med}\left(\hat{C}\right) = 90°$.

2. III-A, I-B e II-C

3. $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ pelo caso LAL, pois $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, $\alpha = \beta$ e $\overline{BD}$ é lado comum, então $\hat{C} \cong \hat{A}$.

4. Pelo caso ALA, temos que $\Delta ABM \cong \Delta DCM$, porque $A\hat{B}M \cong D\hat{C}M, \overline{CM} \cong \overline{MB}$ e $B\hat{M}A \cong C\hat{M}D$ (ângulos opostos pelo vértice); então $\overline{AM} \cong \overline{MD}$.

5. A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é igual a 360°, reescrevendo as equações dadas em função de b, temos que:

$$a = \frac{b}{2}$$

$$d = \frac{b}{2} + 2b = \frac{5b}{2}$$

$$a + b + c + d = 360°$$

$$\frac{b}{2} + b + 2b + \frac{5b}{2} = 360°$$

$$\frac{b + 2b + 4b + 5b}{2} = \frac{720°}{2}$$

$$12b = 720°$$

$$b = 60°$$

Logo $a = 30°$, $b = 60°$, $c = 120°$ e $d = 150°$.

6. As afirmações corretas são **a**, **c** e **d**.

a) Verdadeira.

b) Falsa, o losango tem obrigatoriamente os lados congruentes.

c) Verdadeira.

d) Falsa, nem todo retângulo é quadrado.

e) Verdadeira.

7. Sejam a, b, c e d as medidas das aberturas dos ângulos internos do paralelogramo, a e c sendo as medidas das aberturas dos ângulos opostos, temos que:

$a = c$ e $b = d$

$a - b = 108°$, então $a = 108° + b$

Substituindo o valor de a na expressão $a + b = 180°$ (ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares), teremos:

$108° + b + b = 180°$

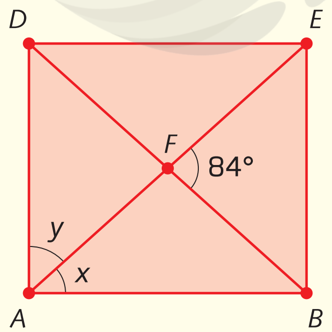
$b = 36°$

Voltando a substituir o valor encontrado, teremos:

$a = 108° + 36° = 144°$

Logo, as medidas de abertura dos ângulos são 144° e 36°.

8.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Como a figura é um retângulo, suas diagonais são congruentes e interceptam-se em seus pontos médios, então os quatro triângulos presentes na figura são isósceles.

Sendo $med(B\hat{A}F) = x$, $med(E\hat{A}D) = y$, $med(B\hat{F}E) = 84°$, então temos que:

ΔFAB é isósceles e a $med(A\hat{F}B) = 96°$, suplemento de $B\hat{F}E$, cuja abertura mede 84°.

Temos que:

$2x + 96° = 180°$ $\qquad x = 42°$

ΔFAD é isósceles e $med(A\hat{F}D) = 84°$, oposto pelo vértice com $B\hat{F}E$, temos que:

$2y + 84° = 180°$ $\qquad y = 48°$

Logo, $x = 42°$ e $y = 48°$.

9. **a)** Como os ângulos opostos em um losango são congruentes, temos que $med(A\hat{D}C) = med(A\hat{B}C) \Rightarrow x = 40°$. Como ADC é isósceles, temos que:

$2y + 40° = 180°$ $\qquad y = 70°$

b) $\overrightarrow{BD}$ é a bissetriz de $A\hat{B}C$ e assim $med(A\hat{B}D) =$

$= med(C\hat{B}D) \Rightarrow x = 35°$

ΔABD é isóceles de base $\overline{BD}$ e $med(D\hat{B}A) = med(B\hat{D}A)$, então:

$$med(B\hat{A}D) + 35° + 35° = 180°$$

$$med(B\hat{A}D) = 110°$$

$\overrightarrow{AC}$ é a bissetriz de $B\hat{A}D$, logo $y = 55°$.

10. No trapézio isósceles, os lados não paralelos são congruentes; sendo assim, temos:

$2x + 25 + 5 = 64$ $\qquad x = 17$

$2x = 34$

Logo, o comprimento de cada um dos outros lados mede 17 cm.

Capítulo 8 – Área, volume e capacidade

Trocando ideias – Página 166

- Parecem com quadrados, triângulos e paralelogramos.
- É esperado que os estudantes percebam que, como as figuras são formadas com as mesmas 7 peças, todas as figuras terão a mesma medida de área.

Atividades – Páginas 170 e 171

1. Um campo de futebol tem formato retangular. Então, para calcular a quantidade de grama que será necessária para a reforma do gramado, calculamos a medida de área de um retângulo:

$A_{retângulo} = b \cdot h = 105\ m \cdot 68\ m = 7\,140 m^2$

2. Como o quadrado também é um losango, podemos dizer que a medida de área do quadrado pode ser calculada como a medida de área do losango, ou seja:

$$A_{quadrado} = A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A_{quadrado} = \frac{5\ cm \cdot 5\ cm}{2} = 12{,}5\ cm^2$$

3. Calculando a medida de área do paralelogramo, temos:

$A_{paralelogramo} = b \cdot h = 7\text{ cm} \cdot 5\text{cm} = 35\text{ cm}^2$

Sejam as novas medidas das dimensões do paralelogramo: b = 3,5 cm e h = 10 cm, temos que:

$A_{paralelogramo} = b \cdot h = 3{,}5\text{ cm} \cdot 10\text{ cm} = 35\text{cm}^2$

Logo, essa nova figura tem a mesma medida de área da figura inicial.

4. Para calcular a medida da área total das paredes que serão pintadas nos três quartos, podemos expressar da seguinte maneira:

$A_{total} = 3 \cdot \left(2 \cdot A_{parede} + A_{pjanela} + A_{pporta}\right)$, sendo:

- A_{parede} é a medida de área da parede que não tem porta nem janela (há 2 paredes assim);
- $A_{pjanela}$ é a medida de área da parede que tem janela;
- A_{pporta} é a medida de área da parede que tem porta.

Nessas condições, temos que:

$A_{parede} = 3{,}2\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 6{,}4\text{m}^2$

$A_{pjanela} = (2{,}745\text{ m} \cdot 2\text{ m}) - (1{,}50\text{ m} \cdot 1{,}50\text{ m}) = 3{,}25\text{ m}^2$

$A_{pporta} = (2{,}745\text{ m} \cdot 2\text{ m}) - (1{,}90\text{ m} \cdot 0{,}85\text{ m}) =$

$= 5{,}49\text{ m}^2 - 1{,}615\text{ m}^2 = 3{,}875\text{ m}^2$

Logo, a medida de área total será:

$A_{total} = 3 \cdot \left(2 \cdot 6{,}4\text{ m}^2 + 3{,}25\text{ m}^2 + 3{,}875\text{ m}^2\right) = 59{,}775\text{ m}^2$

5.

a) $A_{quadrado} = a \cdot a = 2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$

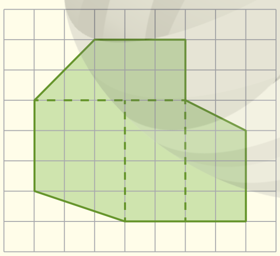
$A_{triângulo} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{2\text{ cm} \cdot 2\text{ cm}}{2} = 2\text{ cm}^2$

Podemos notar que a medida de área do quadrado é o dobro da medida de área do triângulo.

b) Os estudantes podem desenhar, por exemplo, um triângulo retângulo com catetos de medida de comprimento 2 cm e 4 cm. Espera-se que eles percebam que há várias maneiras de desenhar um triângulo com a medida do comprimento da base igual a 4 cm e medida de comprimento da altura igual a 2 cm e respondam negativamente.

6. Observando as figuras, podemos calcular a medida de área decompondo a figura em polígonos que conseguimos calcular a medida de área. Assim, calculamos a medida de área de cada polígono e adicionamos essas medidas para obter a medida de área da figura.

a)



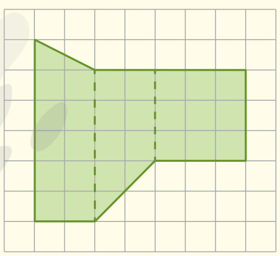
$A = \dfrac{(5+3)\cdot 2}{2} + \dfrac{(4+3)\cdot 3}{2} +$

$+ 2\cdot 4 + \dfrac{(4+3)\cdot 2}{2}$

$A = 33{,}5$

Logo, a área mede 33,5 cm².

b)



$A = \dfrac{(6+5)\cdot 2}{2} + \dfrac{(5+4)\cdot 2}{2} +$

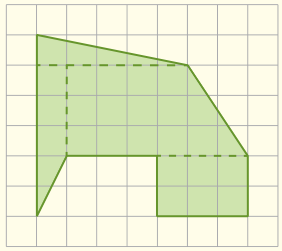
$+ 3\cdot 3$

$A = 29$

Logo, a área mede 29 cm².

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

c)



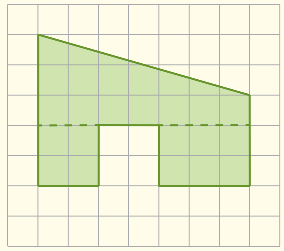
$A = \dfrac{5\cdot 1}{2} + \dfrac{(5+3)\cdot 1}{2} +$

$+ \dfrac{(6+4)\cdot 3}{2} + 3\cdot 2$

$A = 27{,}5$

Logo, a área mede 27,5 cm².

d)



$A = \dfrac{(3+1)\cdot 7}{2} + 2\cdot 2 + 3\cdot 2$

$A = 24$

Logo, a área mede 24 cm².

7. a) $A_{laranja} = A_{retângulo} - A_{losango} = b \cdot h - \dfrac{D \cdot d}{2} =$

$= 40 \cdot 30 - \dfrac{40 \cdot 30}{2} = 600$

Logo, a área da parte pintada de laranja mede 600 cm².

b) $A_{laranja} = A_{quadrado} - A_{losango} = a \cdot a - \dfrac{D \cdot d}{2} =$

$= 5 \cdot 5 - \dfrac{5 \cdot 3}{2} = 17{,}5$

Logo, a área da parte pintada de laranja mede 17,5 cm².

8. Resposta pessoal, depende do desenho de cada estudante. Espera-se que consigam fazer a representação do cômodo e as medições necessárias.

Atividades - Páginas 174 e 175

9. $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (9\text{m})^2 = 81\pi\text{ m}^2$

10. $A_{setor} = \dfrac{\alpha \cdot \pi \cdot r^2}{360°} = \dfrac{108° \cdot \pi \cdot (8\text{ cm})^2}{360°} =$

$= 0{,}3 \cdot \pi \cdot 64\text{ cm}^2 = 19{,}2\text{ cm}^2$

11. $A_{coroa} = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right) = \pi\left[(5\text{ cm})^2 - (2\text{ cm})^2\right] = 21\pi\text{ cm}^2$

12. $A_{coroa} = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right) = \pi\left[(8\text{ cm})^2 - (5\text{ cm})^2\right] = 39\pi\text{ cm}^2$

13. $A = \pi r^2$

$28{,}26 = 3{,}14 \cdot r^2$

$r = \sqrt{\dfrac{28{,}26}{3{,}14}} = \sqrt{9} = 3$

$d = 2r = 2 \cdot 3 = 6$

Logo, a medida do comprimento do diâmetro dessa piscina é 6 m.

14. a) Para calcular a quantidade Q_A de adubo A, basta obter a medida da área do círculo.

$A = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot (5\text{m})^2 = 78{,}5\text{ m}^2$

Portanto, $Q_A = 78{,}5$ kg.

Para calcular a quantidade Q_B de adubo B, é necessário calcular a medida da área da coroa circular.

$A_{coroa} = \pi \cdot \left(R^2 - r^2\right) = 3{,}14 \cdot \left[(9\text{m})^2 - (5\text{m})^2\right] =$

$= 3{,}14 \cdot 56\text{m} = 175{,}84\text{ m}$

Portanto, $Q_B = 175{,}84$ kg.

b) Custo $= R\$\ 10{,}00 \cdot \text{Quantidade}_{tipoA} +$
$+ R\$\ 7{,}00 \cdot \text{Quantidade}_{tipoB} =$
$= 10 \cdot R\$\ 78{,}5 + 7 \cdot R\$\ 175{,}84 = 2015{,}88$
Portanto, Fabiana gastará R$ 2015,88 em adubo.

Atividades – Página 178

15. a) $V_{paralelepípedo} = 14{,}6\ m \cdot 2\ m \cdot 3{,}1\ m = 90{,}52\ m^3$
b) $V_{paralelepípedo} = 5{,}6\ cm \cdot 7{,}1\ cm \cdot 5{,}6\ cm = 222{,}656\ cm^3$

16. $V_{paralelepípedo} = 96\ mm \cdot 12\ mm \cdot 12\ mm = 13\ 824\ mm^3$

17. $V_{paralelepípedo} = 15\ cm \cdot 15\ cm \cdot 20\ cm = 4\ 500\ cm^3$
Como $1\ dm^3 = 1\ L$, temos que $1\ L = 1000\ cm^3$. Assim, a medida de capacidade desse vaso é de 4,5 L.
Se colocarmos água até um terço de sua medida da altura, teremos $\frac{1}{3} \cdot 4{,}5\ L = 1{,}5\ L$ de água.

18. Como $1\ m^2 = 1\ 000\ L$, então $V_{piscina} = 22\ 500\ L = 22{,}5\ m^3$.
Como $V_{paralelepípedo} = a \cdot b \cdot h$, então:
$22{,}5 = 3 \cdot 5 \cdot h$
$h = \frac{22{,}5}{15} = 1{,}5$
Portanto, a profundidade da piscina medirá 1,5 m.

19. a) Resposta pessoal. Algumas possibilidades para as medidas de comprimento das arestas do paralelepípedo:
4 cm, 6 cm e 9 cm
8 cm, 3 cm e 9 cm
5 cm, 2 cm e 21,6 cm
b) Uma possível resposta é que seja um cubo cujo comprimento da aresta mede 6 cm.

Lendo e aprendendo – Páginas 179 a 181

1. a) No dia 9 de setembro de 2021.
b) R$ 4 000,00.
c) R$ 280,00.
d) Porque as termoelétricas tiveram que ser acionadas para compensar o déficit de energia diante da baixa dos reservatórios.

2. Alternativa d.

3. Espera-se que os estudantes respondam que a intenção é transmitir a ideia de que a situação dos reservatórios é muito crítica (reservatórios operando com níveis muito abaixo do normal) e que, portanto, seria necessário um dilúvio para melhorar o nível desses reservatórios.

4. Espera-se que os estudantes respondam que ele quis dizer que o racionamento de energia vivido pelo Brasil em setembro de 2021 era feito com base em pequenas ações adotadas pelas famílias e que vinham sendo motivadas pelo aumento do preço da energia elétrica.

5. Alternativa **c**.

6. Respostas pessoais.

7. Respostas pessoais.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – Página 182

1. $A = b \cdot h = 15\ cm \cdot 8\ cm = 120\ cm^2$

2. a) $A_{quadrado} = a \cdot a = 8\ cm \cdot 8\ cm = 64\ cm^2$
b) $A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6\ cm \cdot 6\ cm}{2} = \frac{36\ cm^2}{2} = 18\ cm^2$

3. $A_{azul} = A_{retângulo} - A_{losango}$
$A_{azul} = b \cdot h - \frac{D \cdot d}{2} = 100 \cdot 40 - \frac{100 \cdot 40}{2} =$
$= 4000 - 2000 = 2000$
Logo, a área pintada de azul mede $2000\ cm^2$.

4. $A_{coroa} = \pi\left(R^2 - r^2\right)$
$A_{coroa} = \pi\left(100\ cm^2 - 16\ cm^2\right)$
$A_{coroa} = 84\pi\ cm^2$

5. $A_{setor} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{30°}{360°} \cdot \pi (5\ cm)^2 \simeq 2{,}08\ \pi cm^2$

6. $V_{paralelepípedo} = 10\ cm \cdot 10\ cm \cdot 30\ cm = 3000\ cm^3$
Como a água não preenche a caixa por completo, podemos fazer:
$\frac{V_{paralelepípedo}}{6} = \frac{3\ 000\ cm^3}{6} = 500\ cm^3 = 0{,}5\ L.$

Capítulo 9 – Equações do 2º grau

Trocando ideias – Página 183

- Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes que tenham algum desses animais reconheçam a importância da vacinação.
- Podemos calcular o valor de x, sabendo que:

$x \cdot \frac{23}{32}x = 2\ 944$
$\frac{23}{32}x^2 = 2\ 944$
$\frac{23}{32}x^2 \cdot 32 = 2\ 944 \cdot 32$
$23x^2 = 94\ 208$
$23x^2 : 23 = 94\,208 : 23$
$x^2 = 4\ 096$
Para descobrir as soluções da equação, os estudantes podem decompor 4096 em fatores primos e concluir que $x = 64$ ou $x = -64$. Porém, como x é uma medida, então $x > 0$. Portanto, $x = 64$.
Logo, as medidas das dimensões do cartaz oficial são 64 cm e 46 cm $\left(\frac{23}{32} \cdot 64\ cm = 23 \cdot 2\ cm = 46\ cm\right)$.

Atividades – Página 185

1. Como sabemos que $A = x(x + 13) = 420$, então a equação será:
$x^2 + 13x = 420$
$x^2 + 13x - 420 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.

2. São equações do 2º grau as que estão nos itens **b**, **c**, **d** e **f**. Nos itens **a** e **d**, temos equações do 1º grau.

3. a) $a = -3,\ b = 6\ e\ c = 0$
b) $a = 3\ ,\ b = 0\ e\ c = -12$
c) $a = 1,\ b = -10\ e\ c = 25$
d) $a = (k + 1),\ b = -2k\ e\ c = 0$

4. a) $5x^2 - x = 0$

b) $4x^2 - 9 = 0$

c) $0{,}2x^2 + x + 0{,}5 = 0$

5. $625 = x^2$

$x^2 - 625 = 0$, com $U = \mathbb{R}$

6. a) Equação incompleta.

b) Equação incompleta.

c) Equação completa.

d) Equação incompleta.

e) Equação completa.

7. Para ser uma equação de 2º grau, precisamos que $a \neq 0$, ou seja, nesse caso:

$3m - 2 \neq 0$

$3m \neq 2$

$m \neq \dfrac{2}{3}$

Portanto, o conjunto universo deverá ser $U = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

8. Fazemos:

$5 - \dfrac{(x-3)}{4} = 2x - (x-2)^2$

$\dfrac{20 - (x-3)}{4} = \dfrac{8x - 4(x-2)^2}{4}$

$20 - x + 3 = 8x - 4x^2 + 16x - 16$

$4x^2 - 25x + 39 = 0$

Atividades - Página 187

9. Verificando cada valor na equação $-2x^2 + 8 = 0$, temos:

Para $x = -4$:

$(-2) \cdot (-4)^2 + 8 = 0$

$-32 + 8 = 0$

$-24 = 0 \rightarrow$ sentença falsa

Para $x = -2$:

$(-2) \cdot (-2)^2 + 8 = 0$

$-8 + 8 = 0 \rightarrow$ sentença verdadeira

Para $x = -1$:

$(-2) \cdot (-1)^2 + 8 = 0$

$-2 + 8 = 0 \rightarrow$ sentença falsa

Para $x = 0$:

$(-2) \cdot (0)^2 + 8 = 0$

$8 = 0 \rightarrow$ sentença falsa

Para $x = 1$:

$(-2) \cdot (1)^2 + 8 = 0$

$-2 + 8 = 0 \rightarrow$ sentença falsa

Para $x = 2$:

$(-2) \cdot (2)^2 + 8 = 0$

$-8 + 8 = 0 \rightarrow$ sentença verdadeira

Para $x = 4$:

$(-2) \cdot (4)^2 + 8 = 0$

$-32 + 8 = 0 \rightarrow$ sentença falsa

Portanto, -2 e 2 são raízes da equação.

10. Substituindo x por $-\dfrac{1}{2}$ na equação $\left(\dfrac{3k}{2}\right)x^2 - \dfrac{5}{2} = 0$, teremos:

$\left(\dfrac{3k}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{2} = 0$

$\left(\dfrac{3k}{2}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{2}$

$\dfrac{3k}{8} = \dfrac{5}{2}$

$3k = \dfrac{40}{2}$

$k = \dfrac{20}{3}$

11. a) $x^2 + 9 = 0$

Para $x = -0{,}2$: $(-0{,}2)^2 + 9 = 0$

$0{,}04 + 9 = 0 \rightarrow$ sentença falsa, não é raiz dessa equação.

b) $125x^2 - 5 = 0$

Para $x = -0{,}2$: $125 \cdot (-0{,}2)^2 - 5 = 0$

$5 - 5 = 0 \rightarrow$ sentença verdadeira, é raiz dessa equação.

12. a) Exemplos de resposta:

$x^2 = 0$ $\quad 2x^2 - x = 0$ $\quad \dfrac{x^2}{5} = 0$

b) Exemplos de resposta:

$x^2 + 1 = 0$ $\quad 12x^2 + 5 = 0$ $\quad -7x^2 - 6 = 0$

Veja que interessante - Página 188

1. Observando somente o IMC, o homem com 82 kg de medida de massa e 1,85 m de medida da altura tem o IMC ideal, pois obtivemos IMC de aproximadamente 23,96.

Caso a medida de massa passe a ser 105 kg, fazemos:

$\text{IMC} = \dfrac{105}{(1{,}85)^2} = \dfrac{105}{3{,}4225} \simeq 30{,}68$

Nesse caso, ele será classificado como portador de obesidade de grau 1.

2. Resposta pessoal.

Atividades - Página 189

13. a) $(x-2)^2 + 4x = 4$

$x^2 - 4x + 4 + 4x - 4 = 0$

$x^2 = 0$

$x = 0$

b) $2x^2 - \dfrac{3}{4} = x^2 + \dfrac{1}{4}$

$2x^2 - x^2 = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$

$x^2 = \dfrac{4}{4}$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = 1$ ou $x = -1$

c) $\dfrac{x-3}{2} + \dfrac{2x-3}{4} = x^2 + x - \dfrac{17}{2}$

$\dfrac{2x-6}{4} + \dfrac{2x-3}{4} = \dfrac{4x^2}{4} + \dfrac{4x}{4} - \dfrac{34}{4}$

$2x - 6 + 2x - 3 = 4x^2 + 4x - 34$

$4x^2 - 25 = 0$

$x^2 = \dfrac{25}{4}$

$x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{4}}$

$x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = -\dfrac{5}{2}$

d) $3m^2 + 2 = 4m^2 + 2$
$4m^2 - 3m^2 = 2 - 2$
$m^2 = 0$
$m = 0$

e) $\left(\frac{x}{5} - 5\right) \cdot \left(\frac{x}{5} + 5\right) = 0$
$\frac{x^2}{25} - 25 = 0$
$\frac{x^2}{25} = 25$
$x^2 = 625$
$x = \pm\sqrt{625}$
$x = 25$ ou $x = -25$

14. a) $x^2 - 64 = 0$
$x^2 = 64$
$x = \pm\sqrt{64}$
$x = 8$ ou $x = -8$
Como –8 e 8 são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \{-8, 8\}$.

b) $3x^2 + 7 = 0$
$3x^2 = -7$
$x^2 = -\frac{7}{3}$
Como não existe um numero real que, elevado ao quadrado, seja igual a $-\frac{7}{3}$, dizemos que a equação não tem raízes reais ou não tem solução em $\mathbb{R}$. Ou seja, $S = \varnothing$.

c) $9x^2 - 16 = 0$
$9x^2 = 16$
$x^2 = \frac{16}{9}$
$x = \pm\sqrt{\frac{16}{9}}$
$x = -\frac{4}{3}$ ou $x = \frac{4}{3}$
Como $-\frac{4}{3}$ e $\frac{4}{3}$ são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$

d) $3x^2 = 0$
$x^2 = 0$
$x = 0$
$S = \{0\}$

15. a) $A_{quadrado} = a \cdot a$
$64 = x^2$
Como x indica uma medida de comprimento, então x é um número real maior do que 0. Assim:
$x = \sqrt{64} = 8$
O comprimento do lado do quadrado mede 8.

b) $P_{quadrado} = 4 \cdot 8 = 32$
$P_{retângulo} = 2 \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot 8\right) + 2 \cdot (1{,}6 \cdot 8) = 10 + 25{,}6 = 35{,}6$

16. $x^2 - 4 = 140$
$x^2 = 144$
$x = \pm\sqrt{144}$
$x = 12$ ou $x = -12$

Atividades - Página 190

Indicando por x o número ($x > 0$), temos:

17. $x \cdot \frac{x}{4} = 100$
$x^2 = 400$
Como $x > 0$, temos:
$x = \sqrt{400} = 20$
Portanto, o número é 20.

18. $A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2}$
$72 = \frac{h^2}{2}$
$h^2 = 144$
Como $h > 0$, temos:
$h = \sqrt{144} = 12$
Portanto, a medida da altura do triângulo é igual a 12 cm.

19. $A_{trapézio} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$
$18 = \frac{h^2}{2}$
$h^2 = 36$
Como $h > 0$, temos:
$h = \sqrt{36} = 6$
Portanto, a medida do comprimento da altura do trapézio é 6 cm.

20. $(x - 2) \cdot (x + 2) = 60$
$x^2 - 4 = 60$
Como $x > 0$, temos:
$x = \pm\sqrt{64} = 8$
Como é um número positivo, temos que $x = 8$.

21. Se x é a medida do comprimento, então a medida da largura será $2x$, dessa forma teremos:
$A_{chiqueiro} = x \cdot 2x$
$32 = 2x^2$
$x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x = 4$ ou $x = -4$
As dimensões do chiqueiro medirão: 4 m e 8 m.

Atividades - Página 193

22. a) 2
b) 6
c) 9
d) 31
e) 3,5
f) 327

23. Resposta pessoal.

Revisão dos conteúdos deste capítulo - Página 194

1. a) Não é do 2º grau, pois o maior expoente da incógnita é 1.
b) Sim.
c) Sim.
d) Não é do 2º grau, pois simplificando a equação ela será do 1º grau.
e) Sim.
f) É do 2º grau, mas tem duas incógnitas (x e y).

2. a) $2x^2 - 3x + 7 = 0$
b) $-3x^2 + x + 5 = 0$
c) $3x^2 + 3x + 3 = 0$
d) $-2x^2 + 4 = 0$
e) $x^2 + 6x = 0$
f) $3x^2 = 0$

3. $A_{quadrado} = x^2$
$144 = x^2$
$x^2 - 144 = 0$, com $U = \mathbb{R}_+^*$

4. a) Incompleta.
b) Completa.
c) Incompleta.
d) Completa.

5. a) Não, pois $4 \cdot (3)^2 - 16 = 36 - 16 = 20$.
b) Não, pois $4 \cdot (4)^2 - 16 = 64 - 16 = 48$.
c) Sim, pois $4 \cdot (2)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$.
d) Sim, pois $4 \cdot (-2)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$.
e) Não, pois $4 \cdot (0)^2 - 16 = 0 - 16 = -16$.

6. Considerando a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, podemos substituir x pelos valores apresentados:
Para $x = -3$:
$(-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 6 = 0$
$9 + 15 + 6 = 0 \rightarrow$ sentença falsa
Para $x = -2$:
$(-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 0$
$4 + 10 + 6 = 0 \rightarrow$ sentença falsa
Para $x = -1$:
$(-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 0$
$1 + 5 + 6 = 0 \rightarrow$ sentença falsa
Para $x = 0$:
$(0)^2 - 5 \cdot (0) + 6 = 0$
$0 + 0 + 6 = 0 \rightarrow$ sentença falsa
Para $x = 1$:
$(1)^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$
$1 - 5 + 6 = 0 \rightarrow$ sentença falsa
Para $x = 2$:
$(2)^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0$
$4 - 10 + 6 = 0$
$10 - 10 = 0 \rightarrow$ sentença verdadeira
Para $x = 3$:
$(3)^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$
$9 - 15 + 6 = 0 \rightarrow$ sentença verdadeira
Logo, são raízes da equação os números 2 e 3.

7. Podemos substituir x por 1 em cada uma das equações e verificar se resulta ou não em zero:
a) $1^2 - 4 \cdot 1 - 4 = 1 - 8 = -7$
b) $1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$
c) $1^2 + 1 - 2 = 2 - 2 = 0$
d) $(-2) \cdot 1^2 + 16 \cdot 1 = -2 + 16 = 14$
Portanto, 1 é raiz das equações dos itens **b** e **c**.

8. a) $x^2 - 49 = 0$
$x^2 = 49$
$x = \pm\sqrt{49}$
$x = -7$ ou $x = 7$
Como –7 e 7 são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \{-7, 7\}$.

b) $-x^2 = 0$
$x = 0$
Como a equação tem duas raízes reais iguais a zero e 0 pertence ao conjunto universo, então $S = \{0\}$.

c) $4 - x^2 = 0$
$-x^2 = -4$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x = -2$ ou $x = 2$
Como –2 e 2 são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \{-2, 2\}$.

d) $5x^2 + 8 = 0$
$5x^2 = -8$
$x^2 = -\frac{8}{5}$
Como não existe um numero real que, elevado ao quadrado, seja igual a $-\frac{8}{5}$, dizemos que a equação não tem raízes reais ou não tem solução em $\mathbb{R}$. Ou seja, $S = \{\ \}$ ou $S = \varnothing$.

9. a) $x^2 - 8 = 41$
$x^2 = 49$
$x = \pm\sqrt{49}$
$x = -7$ ou $x = 7$

b) $x^2 + 10 = 74$
$x^2 = 64$
$x = \pm\sqrt{64}$
$x = -8$ ou $x = 8$

10. Indicando por x o número ($x > 0$), temos:
$x \cdot \frac{x}{6} = 24$
$\frac{x^2}{6} = 24$
$x^2 = 144$
Como $x > 0$, temos:
$x = \pm\sqrt{144} = 12$
Logo, o número é igual a 12.

11. Para calcular a medida do perímetro de um retângulo, devemos adicionar todas as medidas de comprimento dos lados. De acordo com o enunciado, a área desse retângulo mede 243 cm² e a medida do comprimento é o triplo da medida da largura. Seja x a medida da largura e $3x$ a medida de comprimento, podemos fazer:
$x \cdot 3x = 243\ cm^2$
$3x^2 = 243\ cm^2$
$x^2 = 81\ cm^2$
$x = 9$ cm
Logo, a medida da largura é 9 cm e a medida do comprimento é 27 cm ($3 \cdot 9 = 27$).
Calculando a medida do perímetro desse retângulo, temos:
9 cm + 27 cm + 9 cm + 27 cm = 72 cm
Portanto, a medida do perímetro desse retângulo é 72 cm.

É hora de extrapolar - Páginas 195 e 196

1. a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

2. a) A pesquisa aponta o aumento no número de pessoas que se reconheceram como indígenas, principalmente nas áreas urbanas do país.
b) A afirmativa é falsa.

3. a) $A = 3{,}14 \cdot (30\ m)^2 = 2\,826\ m^2$
b) Não, a medida da área da aldeia cuja medida do comprimento do raio é de 40 m será o quádruplo da medida da área da aldeia cuja medida do comprimento do raio é 20 m, pois:
Se $r = 20$ m, teremos $A = 3{,}14 \cdot (20\ m)^2 = 1256\ m^2$
Se $r = 40$ m, teremos $A = 3{,}14 \cdot (40\ m)^2 = 5024\ m^2$
E $5024 = 4 \cdot 1256$.

4. Exemplos de respostas: polígonos, linhas poligonais e linhas curvas.

Encaminhamentos para atividades 5 a 12:

Os estudantes poderão pesquisar imagens ou textos usando palavras chave retiradas do texto ou no acervo do instituto Socioambiental, o maior acervo digital sobre povos indígenas, populações tradicionais e meio ambiente disponíveis em textos, mapas, fotos e vídeos.

Essa pesquisa deverá mostrar que é preciso conhecer nossa historia, transmitir o conhecimento desses povos para futuras gerações e proteger a população indígena.

Como produto da atividade, haverá uma mostra de painéis sobre povos indígenas e, posteriormente, em um texto, os estudantes refletirão sobre o trabalho desenvolvido.

Capítulo 10 – Grandezas e proporcionalidade

Trocando ideias – Página 198

- Como a quantidade de leite em pó dobrou, a quantidade de água também dobrará e passará para 400 mL.
- Como a quantidade de água fervida aumentou em duas vezes e meia, então a quantidade de leite em pó deverá aumentar na mesma proporção e passará para 195 g.
- Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que a tabela nutricional serve para informar ao consumidor a composição do alimento e a quantidade de nutrientes que o alimento fornece.

Atividades – Páginas 201 e 202

1.

a) São grandezas diretamente proporcionais, porque a quantidade de morangos coletados aumenta na mesma proporção que o número de trabalhadores (supondo que esses trabalhadores executam a tarefa no mesmo ritmo).

b) Não são grandezas diretamente proporcionais.

c) São grandezas diretamente proporcionais, porque a medida do perímetro de um quadrado é o quádruplo da medida do comprimento do seu lado.

d) São grandezas diretamente proporcionais, porque o preço pago pela corda é obtido multiplicando-se a medida do comprimento dela pelo preço do metro linear.

e) Não são grandezas diretamente proporcionais.

2. Exemplos de resposta:

$x = 10y$ ou $\frac{x}{10} = y$

3. Observando cada afirmação, temos:

a) Para A e B serem diretamente proporcionais, devemos ter uma constante:

$k = \frac{2}{5} = \frac{4}{2,5}$, o que não é verdadeiro

b) Falso, como constatado no item anterior.

c) Podemos testar essa relação no quadro:

B	5	2,5	1,67	1,25	1
B · 2,5	12,5	6,25	4,175	3,125	2,5
A	2	4	6	8	10

A afirmação é falsa.

d) Para A e B serem inversamente proporcionais, a razão entre os valores da primeira grandeza deve ser igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda grandeza.

$\frac{2}{\frac{1}{5}} = 10 \quad \frac{4}{\frac{1}{2,5}} = 10 \quad \frac{6}{\frac{1}{1,67}} \simeq 10 \quad \frac{8}{\frac{1}{1,25}} = 10 \quad \frac{10}{1} = 10$

Então, existe uma constante de proporcionalidade que é igual a 10.

Logo, a alternativa **d** é a correta.

4. Como as grandezas são inversamente proporcionais, chamando de t a medida de tempo, em horas, que levará nesse percurso, temos a seguinte relação:

$\frac{100}{80} = \frac{2}{t}$

$t = \frac{160}{100} = 1,6$

Ou seja, a medida de tempo é de 1,6 h, que corresponde a 1 h 36 min, pois 1,6 h = 1 h + 0,6 h = 1 h + (0,6 . 60) min = = 1 h + 36 min.

5.

a) Sendo as duas grandezas diretamente proporcionais, podemos calcular a constante de proporcionalidade k, fazendo:

$k = \frac{105}{1\frac{1}{2}} = \frac{105}{1,5} = 70$

$k = \frac{122,5}{1\frac{3}{4}} = \frac{122,5}{1,75} = 70$

Logo, a constante de proporcionalidade será 70.

b) Sejam d e t números reais positivos, em que d indica a medida da distância em quilômetro e t, a medida do tempo em hora, teremos $d = 70 \cdot t$.

c) Primeiro escrevemos 4h15min em horas:

$4\text{h}15\text{min} = 4\text{ h} + \frac{15}{60}\text{ h} = 4\text{ h} + 0,25\text{ h} = 4,25\text{ h}$

Então, podemos usar a expressão encontrada no item anterior $d = 70 . t$:

$d = 70 \cdot 4,25 = 297,5$

Portanto, a medida da distância percorrida foi 297,5 km.

6.

a) A constante é 20, pois $\frac{2}{\frac{1}{10}} = 20$ e $\frac{5}{\frac{1}{4}} = 20$.

b) Exemplos de respostas

$\frac{x}{\frac{1}{y}} = 20$ ou $x = \frac{20}{y}$ ou $x \cdot y = 20$ ou $y = \frac{20}{x}$

c) Se $x = 2,5$, então $y = \frac{20}{2,5} = 8$

Se $x = 40$, então $y = \frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0,5$

Logo, os valores de y, nessa ordem, serão 8 e 0,5.

7.

a) Ao fazer a diferença dos números de cartões na tabela, teremos 6 mil cartões que correspondem a 1 h 30 min de funcionamento.

b) Podemos considerar n a quantidade de cartões e h a medida do tempo de funcionamento em hora; então, $n = 4\,000 \cdot h$.

c) Convertendo 37 h 30 min em 37,5 h, temos:

$n = 4\,000 \cdot h$

$n = 4\,000 \cdot 37,5$

$n = 150\,000$

Logo, foram impressos 150 000 cartões.

8. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Com 3 copos de suco concentrado de um determinado sabor, é possível fazer, diluindo-os em água, 9 copos de refresco conforme instruções do rótulo. Escreva a sentença algébrica que relaciona essas duas grandezas e determine quantos copos de refresco podem ser feitos com 7 copos de suco concentrado.

Sendo x a quantidade de copos de suco concentrado e y a quantidade de copos de refresco, temos: $y = 3 \cdot x$

$y = 7 \cdot 3 = 21$

Logo a equação é $y = 3x$ e podem ser feitos 21 copos de refresco.

Atividades – Página 204

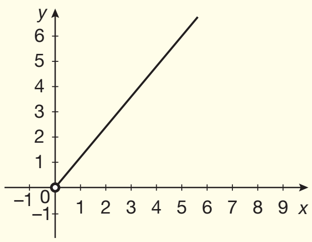
9.

a) $3k = j$ ou $k = \dfrac{j}{3}$

b) $m = \dfrac{n}{4}$ ou $m = 0{,}25 \cdot n$

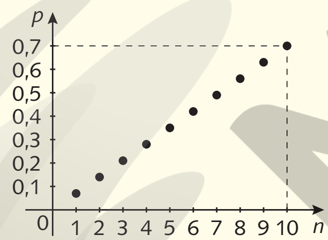
c) $p = \dfrac{8}{10}q$ ou $p = 0{,}8 \cdot q$

10. É o gráfico da reta $y = 1{,}2x$, sendo $x > 0$.

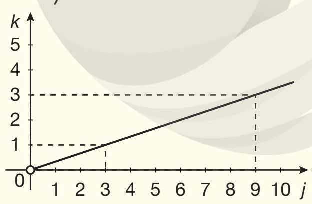


11. a) Se para cada 10 folhas teremos que pagar R$ 0,70, então 1 folha custará R$ 0,07, ou seja, se p representa o preço, em reais, a ser pago por n folhas de sulfite, existe a relação: $p = 0{,}07n$

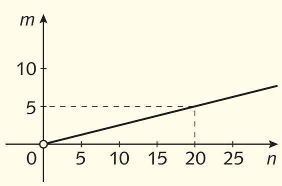
b)



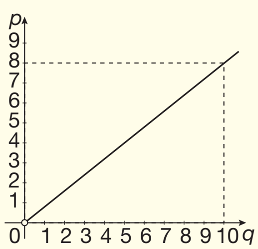
12. a)



b)

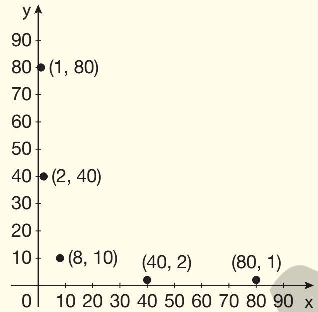


c)

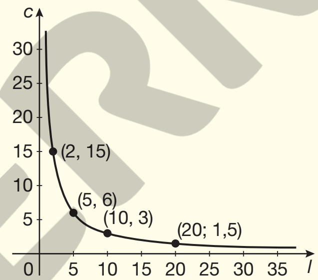


Atividades – Página 206

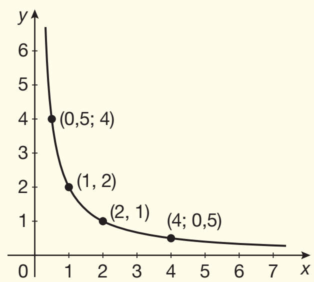
13. A equação algébrica que representa essa situação é $y = \dfrac{80}{x}$, sendo x a quantidade de participantes da palestra e y a quantidade de maçãs recebidas por participante.



14. Sendo c a medida do comprimento e l a medida da largura do retângulo, essa situação é representada por $l = \dfrac{30}{c}$. O gráfico será:



15. $x \cdot y = 2 \Rightarrow y = \dfrac{2}{x}$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$



16. a) $k = \dfrac{2}{\frac{1}{30}} = \dfrac{10}{\frac{1}{6}} = \dfrac{30}{\frac{1}{2}} = 60$

b) $\dfrac{r}{\frac{1}{s}} = 60$ ou $s = \dfrac{60}{r}$, sendo r um número real positivo.

17. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reconheçam que, nesse caso, a constante de proporcionalidade (k) entre x e y é:

$$k = \dfrac{2}{\frac{1}{60}} = \dfrac{4}{\frac{1}{30}} = \dfrac{5}{\frac{1}{24}} = 120$$

Sendo assim, a relação será: $x \cdot y = 120$ e teremos que:

$$x = \dfrac{120}{y}, \text{ com } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$

Revisão dos conteúdos deste capítulo – Páginas 207 e 208

1. a) Não.

   b) Sim, porque, quanto maior a medida de comprimento do lado de um polígono regular, maior será a sua medida de perímetro.

   c) Sim, pois, se aumentar a medida do tempo de produção da impressora, maior será a quantidade de páginas impressas.

   d) Não.

2. Como $\frac{a}{b} = 8 \Rightarrow a = 8b$ com $b \neq 0$.

3. Se a quantidade de máquinas aumentar, então a medida de tempo diminuirá proporcionalmente, portanto quatro máquinas produzirão a mesma quantidade em $\frac{1}{4}$ de hora, ou seja, em 15 minutos.

4. As grandezas velocidade (v), em km/h, e tempo (t), em h, são inversamente proporcionais, então a constante k pode ser calculada da seguinte maneira:

   $k = \frac{60}{\frac{1}{3}} = 180$

   Logo, podemos escrever que $v \cdot t = 180$

   Assim, se $v = 90$, teremos:

   $90t = 180$

   $t = \frac{180}{90} = 2$

   Portanto, a medida de tempo necessária é de 2 horas.

5.

   a) Sendo essas duas grandezas diretamente proporcionais, a constante k pode ser calculada da seguinte maneira:

   $k = \frac{125}{2{,}5} = \frac{150}{3{,}0} = 50$

   b) Representando a medida da distância, em km, por d e a medida de tempo, em h, por t, teremos:

   $\frac{d}{t} = 50 \Rightarrow d = 50 \cdot t$, sendo $t > 0$

   c) Substituindo t por 1,75 na expressão anterior, teremos:

   $d = 50 \cdot 1{,}75 = 87{,}5$

   A medida da distância foi 87,5 km.

6.

   a) $k = \frac{3}{\frac{1}{15}} = \frac{5}{\frac{1}{9}} = 45$

   b) $A \cdot B = 45$

   c) Se $A = 2$, teremos:

   $2 \cdot B = 45$

   $B = \frac{45}{2} = 22{,}5$

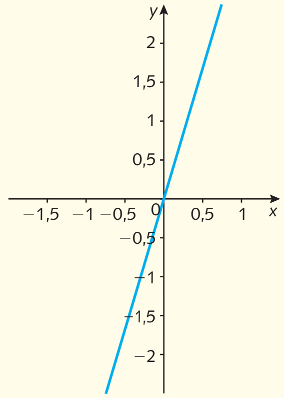
7. Como a constante de proporcionalidade é:

   $k = \frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

   Assim, podemos fazer as relações:

   $\frac{P}{Q} = \frac{1}{3}$ ou $\frac{Q}{P} = 3$; então, $Q = 3 \cdot P$ ou $P = \frac{Q}{3}$, considerando $P \neq 0$ e $Q \neq 0$.

8.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

9. Podemos escrever que:

   $k = \frac{15}{5} = \frac{30}{10} = \frac{45}{15} = \frac{60}{20} = 3$

   Portanto, o litro do etanol está custando R$ 3,00.

10. a) Calculando a constante de proporcionalidade, temos:

    $k = \frac{2}{\frac{1}{30}} = \frac{10}{\frac{1}{6}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60$

    $r \cdot s = 60$

    b) $10 \cdot s = 60$

    $s = \frac{60}{10} = 6$

    c) $r \cdot 5 = 60$

    $r = \frac{60}{5} = 12$

11. a) Inversamente proporcional.

    b) Diretamente proporcional.

    c) Não proporcional.

    d) Não proporcional.

Capítulo 11 – Medidas de tendência central e pesquisa estatística

Trocando ideias – Página 209

- Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes apresentem ideias como pesquisar preços em diferentes locais, trocar por marcas mais baratas, entre outras ideias.
- Não, porque R$ 3,10 era o preço médio, portanto havia lugares na capital de São Paulo em que o preço era menor ou maior que a média.
- Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes identifiquem que deve ter sido feita uma pesquisa de preços do mesmo produto (no caso, da caixa de 25 kg de batata) em diferentes locais. Foram adicionados os preços encontrados e o total foi dividido pelo número de estabelecimentos consultados.

Um pouco de história – Página 211

Foi realizado em 2010.

Atividades – Página 213

1. a) Os cerca de 154 mil habitantes da cidade de Pouso Alegre, em Minas Gerais.

   b) 3 080 pessoas pesquisadas.

c) $\frac{3080}{154000} = 0{,}02 = 2\%$

2. a) Amostragem estratificada. Se a escola fica entre as zonas rural e urbana, seria adequado selecionar uma amostra igual nas duas zonas para que a amostra seja a mais fiel possível à população.

b) Pesquisa censitária, já que a lista de exercícios foi aplicada a uma só turma do 8º ano.

c) Amostragem sistemática. Em uma linha de produção são fabricados objetos muito parecidos e, dessa maneira, poderia ter coletado uma mesma quantidade em diversos horários.

d) Pesquisa censitária, porque para escolher um representante é necessária toda a população.

e) Amostragem casual. Caso haja muitas turmas, é adequado escolher estudantes aleatoriamente para obter uma amostra confiável.

Atividades – Páginas 215 e 216

3. Variáveis qualitativas nominais: primeiro nome e sexo.
Variável qualitativa ordinal: escolaridade.
Variáveis quantitativas contínuas: salário e tempo de serviço.

4. a) Qualitativa nominal.
b) Quantitativa discreta.
c) Quantitativa contínua.
d) Qualitativa ordinal.
e) Quantitativa contínua.
f) Quantitativa contínua.
g) Quantitativa discreta.
h) Quantitativa contínua.
i) Qualitativa ordinal.

5. a) Quantitativas: idade, quantidade de filhos e renda; qualitativas: sexo, grau de instrução, área de formação e fonte de renda.

b) Idade e quantidade de filhos.

6. Resposta pessoal. Exemplo de perguntas:
1. Qual é a sua idade?
2. Quantas pessoas residem na sua casa?
3. Quantos animais domésticos você tem?
4. Quanto mede sua altura?
5. Qual é a medida da distância da sua casa à escola?

Atividades – Página 219

7. Para facilitar os cálculos e as interpretações, podemos escrever os dados em ordem crescente:

54	61	62	63	65	68	76
76	78	80	82	85	88	88
88	94	95	95	99	100	107
108	110	116	117	120	142	156
160	160	176				

a) Para encontrar a média aritmética, realizamos a soma de todas as visitas e dividimos pelo número de dias.

Média aritmética: $\frac{3069}{31} = 99$

Mediana: 94 (está na 16ª posição)

Moda: 88 (aparece 3 vezes)

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, como a amplitude é um valor alto, os dados estão dispersos. Porém, a maioria está próxima da média e da mediana. Dessa forma, as duas medidas são significativas.

c) Em 12 dias.

d) A amplitude é de 122, pois $176 - 54 = 122$.
Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Como a amplitude é 122, a média, a mediana e a moda estão dispersas.

8. a) A moda é o valor com maior frequência, então a moda é 10.
A mediana é o valor central em um conjunto de dados organizados em ordem crescente ou decrescente. Neste caso, será a média aritmética entre os valores das posições 24ª e 25ª, ou seja, 12 e 12. Logo, a mediana é 12.

A amplitude é a diferença entre o maior valor e o menor valor, ou seja, amplitude $= 16 - 8 = 8$.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, nesse caso, a mediana indica que pelo menos metade das crianças usa roupa de tamanho menor ou igual a 12; a moda indica que o tamanho de roupa mais usado pelas crianças é o 10; a amplitude indica que há variação de 8 tamanhos entre o menor e o maior tamanho de roupa.

9. Para encontrar a média aritmética, realizamos a soma dos produtos entre o salário e a frequência correspondente e dividimos pelo número de funcionários.

Média aritmética: $\frac{72020}{65} = 1108$

Logo, a média é R\$ 1108,00
Moda: R\$ 800,00

Amplitude: R\$ 5220,00 − R\$ 800,00 = R\$ 4420,00

Exemplo de resposta: Como a amplitude é R\$ 4420,00, significa que os dados estão dispersos. Assim, a média de R\$ 1108,00 não é significativa, já que a maioria dos funcionários tem um salário de R\$ 800,00.

10. Respostas pessoais.

Veja que interessante – Página 220

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que a falta de informações, escalas incorretas, ausência de títulos e, inclusive, a omissão da fonte podem induzir a um erro de leitura de um gráfico.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – Páginas 221 e 222

1. a) Os 15000 funcionários.
b) 4500 funcionários.
c) $\frac{4500}{15000} = \frac{30}{100} = 30\%$

2. Alternativa **c**: pesquisa estratificada.

3. Alternativa **a**: pesquisa sistemática.

4. a) Qualitativa nominal.
b) Quantitativa contínua.
c) Quantitativa discreta.
d) Quantitativa discreta.
e) Quantitativa contínua.
f) Qualitativa nominal.
g) Qualitativa nominal.

5. $\overline{x} = \frac{60 + 58 + 55 + 62 + 68}{5} = \frac{303}{5} = 60{,}6$

6. a) Média $= \frac{2300 + 1570 + 1370 + 1440}{4} = \frac{6680}{4} = 1670$
A média dos salários é R\$ 1670,00.

b) $\dfrac{6680 + 3200}{5} = \dfrac{9880}{5} = 1976$

A nova média dos salários será R$ 1976,00.

7. **a)** A moda é 2 filhos.

b) $\overline{x} = \dfrac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 10}{50} = \dfrac{85}{50} = 1{,}7$

c) Mediana será a média aritmética entre os dados de posições 24ª e 25ª, ou seja, 2 e 2. Portanto, a mediana é 2.

8. Renata: $\overline{x} = \dfrac{6{,}5 + 7{,}8 + 6{,}0 + 6{,}8}{4} = \dfrac{27{,}1}{4} \simeq 6{,}78$

Cátia: $\overline{x} = \dfrac{8{,}0 + 8{,}5 + 6{,}5 + 7{,}5}{4} = \dfrac{30{,}5}{4} \simeq 7{,}63$

Marcos: $\overline{x} = \dfrac{5{,}0 + 5{,}5 + 4{,}5 + 6{,}0}{4} = \dfrac{21}{4} = 5{,}25$

Mateus: $\overline{x} = \dfrac{4{,}5 + 7{,}5 + 8{,}5 + 9{,}0}{4} = \dfrac{29{,}5}{4} \simeq 7{,}38$

9. **a)** $8 + 11 + 10 + 12 + 18 + 11 = 70$

Participaram 70 atletas.

b) Para calcular a média, adicionamos os produtos entre a quantidade de proteína e a frequência dos atletas que consomem essa quantidade e dividimos pelo total de atletas.

$\dfrac{198520}{70} = 2836$

A média é 2836 g.

c) A moda é 2950 g (aparece 18 vezes).

d) A mediana é 2860 g (nas posições 34º e 35º aparecem 2860).

Capítulo 12 - Gráficos estatísticos

Trocando ideias - Página 223

- Os gráficos de segmentos são adequados para comparar uma mesma informação no decorrer do tempo e os gráficos de barras são adequados para comparar dados entre si.
- Espera-se que os estudantes identifiquem que, em todos os gráficos e em todas as categorias, em 2021, houve um aumento na quantidade de crianças de 6 e 7 anos que não sabem ler e escrever em comparação com 2012 e 2016.

Atividades - Página 226

1. **a)**

Distribuição de frequência de medida de massa dos estudantes

Classe	Frequência	Frequência relativa
$50 \vdash 60$	6	$\frac{6}{20} = 0{,}3 = 30\%$
$60 \vdash 70$	4	$\frac{4}{20} = 0{,}2 = 20\%$
$70 \vdash 80$	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$
$80 \vdash 90$	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15 = 15\%$
$90 \vdash 100$	2	$\frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\%$
Frequência Total	**20**	**100%**

Dados obtidos pela professora de Educação Física dos estudantes em 2024.

b) A soma é 100%.

2. **a)** A amplitude de cada classe é de 8 livros.

b) $25 + 30 + 15 + 12 + 10 + 8 = 100$

Nessa região, vivem 100 famílias.

c) 25%.

d) Resposta pessoal.

3. Resposta pessoal. De acordo com os dados apresentados e o envolvimento dos estudantes, pode ser interessante organizar uma feira de livros para trocas e/ou empréstimos entre os estudantes.

Atividades - Páginas 230 a 232

4. **a)** Um gráfico de barras verticais. Esse gráfico se refere à participação na conta mensal de energia elétrica de equipamentos como lavadora de roupas, televisor, lâmpadas incandescentes, entre outros.

b) O chuveiro elétrico.

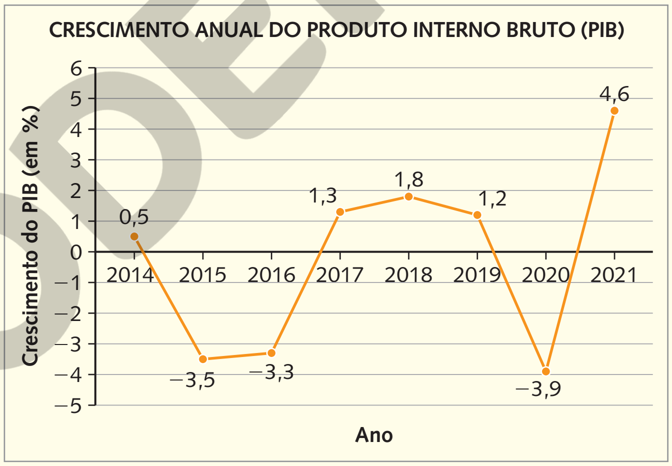
c) Não, porque esses dados não apresentam variação ao longo do tempo.

5. **a)** Um gráfico de barras verticais.

b) Em 2021 (foi de 4,6%).

c) Em 2020 (foi de −3,9%).

d) Uma possibilidade de gráfico:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: BRASIL. Ministério da Economia. Secretaria de Política Econômica. **Resultado do PIB de 2021 e perspectiva**, 4 mar. 2022.

6. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Pode ser usado o gráfico de barras para comparar as turmas e as quantidades de estudantes matriculados.

7. **a)** Em 2012.

b) Em 2021; 13235 km².

c) $7893 \text{ km}^2 - 6947 \text{ km}^2 = 946 \text{ km}^2$

d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, ainda assim, seria possível perceber que o desmatamento vem crescendo.

8. **a)** De acordo com o gráfico apresentado, dos 100 restaurantes, temos que:

- em 40 deles, o prato custa R$ 15,00;
- em 25 deles, o prato custa R$ 9,00;

- em 10 deles, o prato custa R$ 20,00;
- em 25 deles, o prato custa R$ 11,00.

Assim, para calcular o gasto com um prato de cada restaurante, fazemos:

$40 \cdot 15 + 25 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 25 \cdot 11 = 1300$

Logo, o gasto seria de R$ 1 300,00.

b) Média $= \dfrac{40 \cdot 15 + 25 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 25 \cdot 11}{100} = \dfrac{1300}{100} = 13$

O valor médio é R$ 13,00.

c) Resposta pessoal.

9. Sim, pois o maior setor corresponde a praticamente metade do círculo, ou seja, aproximadamente metade dos entrevistados prefere ir ao supermercado das 8 h às 12 h.

10. Resposta pessoal.

11. Resposta pessoal.

Atividades - Página 234

12. Em 2020: $3 \cdot 10\,000 = 30\,000$
Em 2021: $4 \cdot 10\,000 = 40\,000$
Em 2022: $4{,}5 \cdot 10\,000 = 45\,000$
Logo, em 2020, foram vendidos 30 000 *tablets*; em 2021, foram 40 000 *tablets*; e, em 2022, foram 45000 *tablets*.

13. Resposta pessoal.

14. **a)** Em 2020: $2{,}5 \cdot 5\,000 = 12\,500$
Em 2021: $4 \cdot 5\,000 = 20\,000$
Em 2020, foram 12 500 unidades e, em 2021, foram 20 000 unidades.

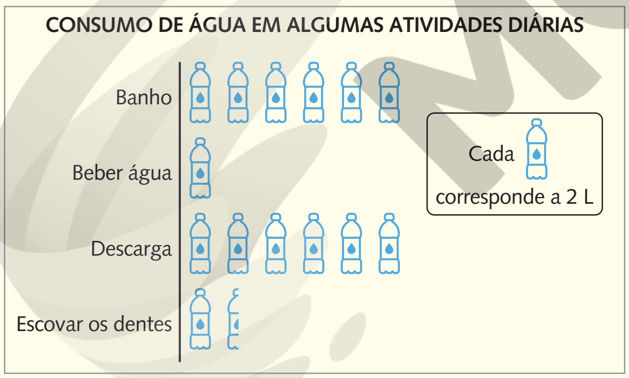
b) Em 2022: $6 \cdot 5\,000 = 30\,000$

$\dfrac{30\,000}{20\,000} = 150\%,$

$150\% - 100\% = 50\%$

Logo, o crescimento foi de 50%.

15. **a)** Resposta pessoal. Uma possibilidade:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

b) Resposta pessoal. Espera-se que haja uma discussão sobre esse assunto tão importante que afeta a todos.

Lendo e aprendendo - Páginas 235 a 237

1. **a)** Em outubro de 2021.

b) Cerca de 160 milhões de crianças.

c) A pobreza extrema.

d) Ajudar instituições que oferecem apoio psicológico e social aos seus familiares.

e) Na África Subsaariana.

2. **a)** Afirmação verdadeira, pois $\dfrac{97}{160} \simeq 0{,}61$.

b) Afirmação verdadeira, pois $20\% = \dfrac{1}{5}$.

c) Afirmação verdadeira, pois $\dfrac{1{,}2}{1{,}8} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$.

d) Afirmação falsa, pois $\dfrac{0{,}6}{1{,}8} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$. Ou seja, de cada 3 crianças, 1 era menina.

3. $\dfrac{36{,}2}{100} \cdot 1{,}8$ milhão $= 0{,}6516$ milhão $= 651\,600$

$\dfrac{29}{100} \cdot 1{,}8$ milhão $= 0{,}522$ milhão $= 522\,000$

$\dfrac{10{,}8}{100} \cdot 1{,}8$ milhão $= 0{,}1944$ milhão $= 194\,400$

$\dfrac{24}{100} \cdot 1{,}8$ milhão $= 0{,}432$ milhão $= 432\,000$

E a tabela ficará:

Divisão das crianças brasileiras em situação de trabalho infantil, em 2019, por tipo de trabalho

Tipo de trabalho	Número aproximado de crianças
Ocupações elementares (limpeza, manutenção, alimentação)	651 600
Comércio e mercados	522 000
Agropecuária, florestais, da caça e pesca (coleta de caranguejos e mariscos, plantação de cana-de-açúcar, mineração)	194 400
Outros (reciclagem, lixões, indústrias, demolição de navios, construção civil)	432 000

PEIXOTO, F.; CABRAL, M. C. A triste realidade do trabalho infantil. **Qualé**, São Paulo, ed. 36. p. 9, 4 a 18 out. 2021.

4. Resposta pessoal. Espera-se que se discutam questões como: investir na formação dos futuros cidadãos, tornando-os conscientes e comprometidos com uma sociedade sem exploração de crianças e adolescentes; cobrar as autoridades para que haja políticas eficazes que ajudem essas famílias a superarem seus problemas socioeconômicos; entre outras.

Resolvendo em equipe - Página 238

Interpretação e identificação dos dados

- Resposta pessoal.
- No plano B não é possível gastar R$ 30,00, já que o valor mensal fixo é de R$ 50,00.
- No plano A, com R$ 30,00, pode-se falar por 20 minutos.

Plano de resolução

- Para usar por 60 minutos no mês, o menor valor será o do plano A (um pouco mais de R$ 40,00). Ou seja, nesse caso, é mais vantajoso o plano A.
- Vejamos o tempo mensal que cada plano oferece por R$ 30,00:
  - plano C: 30 minutos;
  - plano D: 0 minuto;
  - plano E: um pouco mais de 20 minutos.

Resolução

- Dessa maneira, podemos concluir que o plano mais vantajoso para o gasto dessa pessoa é o C, o que corresponde à alternativa **c**.

Revisão dos conteúdos deste capítulo - Página 239

1. **a)** Amplitude de 2 kg.

b) 20 estudantes, pois $2 + 6 + 7 + 5 = 20$.

c)

Medida da massa dos estudantes de uma turma do 8º ano	
Medida da massa (em quilograma)	**Frequência relativa**
$44 \vdash 46$	$\frac{2}{20} = 0{,}1 = 10\%$
$46 \vdash 48$	$\frac{6}{20} = 0{,}3 = 30\%$
$48 \vdash 50$	$\frac{7}{20} = 0{,}35 = 35\%$
$50 \vdash 52$	$\frac{5}{20} = 0{,}25 = 25\%$

Dados obtidos pelo professor de Educação Física em janeiro de 2024.

2. **a)** A região com maior produção foi a Sudeste, e a menor foi a Norte.

b) Como $\frac{3\,115\,665}{25\,516\,025} \simeq 0{,}12 = 12\%$, foi a região Centro-Oeste que produziu essa porcentagem.

3. **a)** O horário preferido (por 49%) é das 8 h às 12 h.

b) 9% de $1\,200 = \frac{9}{100} \cdot 1\,200 = 108$

São 108 alunos.

c) Das 12 h até as 20 h, devemos considerar dois intervalos: 12 h às 16 h (25%) e 16 h às 20 h (17%).

Ou seja, a porcentagem de alunos que corresponde a essa faixa de horário é de 42% ($25 + 17 = 42$).

42% de $1\,200 = \frac{42}{100} \cdot 1\,200 = 42 \cdot 12 = 504$

São 504 alunos.

É hora de extrapolar - Páginas 240 a 242

1. **a)** Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

2. Respostas pessoais. Os valores dependerão dos dados coletados na atividade 1.

3. **a)** Sim, porque a recomendação dos especialistas é que indivíduos dessa idade durmam de 8 a 10 horas por dia.

b) A mediana, a moda e a amplitude de cada grupo são, respectivamente:

- Grupo 1: 9 horas, 9 horas e 2 horas
- Grupo 2: 8,5 horas, 7 horas e 5 horas

c) Espera-se que os estudantes respondam que caracterizaria melhor o conjunto de dados do grupo 1, porque a amplitude desse conjunto é menor do que a do conjunto de dados correspondente ao grupo 2.

4. Resposta pessoal.

5. **a)** Respostas pessoais.

b) Resposta pessoal.

c) As grandezas são inversamente proporcionais, portanto, a constante será $30 \cdot 6 = 180$.

Logo, para calcular a medida de tempo para percorrer 9 km/h, teremos: $180 : 9 = 20$.

Assim, a medida de tempo será de 20 minutos.

6. **a)** 24% de 161,8 milhões $= \frac{24}{100} \cdot 161\,800\,000 = 38\,832\,000$

Então, 38 832 000 dos entrevistados praticam esportes.

Agora, precisamos calcular 39,3% disso para determinar os entrevistados que praticam futebol.

$\frac{39{,}3}{100} \cdot 38\,832\,000 = 39{,}3 \cdot 388\,320 = 15\,260\,976$

Ou seja, 15 260 976 dos entrevistados praticam futebol.

$\frac{15\,260\,976}{161\,800\,000} \simeq 9{,}4\%$

Em relação ao total, correspondem aproximadamente 9,4%.

b) Respostas pessoais.

Encaminhamentos para atividades 7 a 16:

Para identificar a importância da prática de atividade esportiva e temas como qualidade de vida e qualidade do sono, os estudantes podem entrevistar médicos, professores de Educação Física, treinadores esportivos, esportistas etc. Durante as discussões e as trocas de impressões, deverão elencar as ideias-chave para determinar o tema da pesquisa e construir o questionário.

Depois do tratamento das informações e da organização em gráficos ou tabelas, a pesquisa deverá resultar em um relatório e na divulgação dos resultados.

Ao final, os estudantes deverão construir um texto descrevendo o processo de pesquisa, análise e apresentação dos resultados realizados nas etapas anteriores.

Teste seus conhecimentos

Páginas 243 e 244

1. Podemos calcular a operação em cada item e verificar qual deles possui uma dízima periódica como resultado.

a) $\frac{12}{15} = 12 : 15 = 0{,}8$

b) $\frac{8}{16} = 8 : 16 = 0{,}5$

c) $\frac{9}{13} = 9 : 13 = 0{,}692307692307692307...$

d) $\frac{99}{8} = 99 : 8 = 12{,}375$

Logo, o número racional do item **c** tem uma dízima periódica como representação decimal.

Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

2. Sabendo que $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 5$ e que $a_1 = 0$, vamos calcular até o 4º termo dessa sequência.

$a_2 = \frac{1}{2} \cdot a_1 - 5 = \frac{1}{2} \cdot 0 - 5 = -5$

$a_3 = \frac{1}{2} \cdot a_2 - 5 = \frac{1}{2} \cdot (-5) - 5 = -2{,}5 - 5 = -7{,}5$

$a_4 = \frac{1}{2} \cdot a_3 - 5 = \frac{1}{2} \cdot (-7{,}5) - 5 = -3{,}75 - 5 = -8{,}75$

Logo, o 4º termo da sequência é $-8{,}75$.
Portanto, a alternativa correta é a letra **a**.

3. Para verificar qual dos 4 elementos têm a menor medida de massa, vamos escrever os valores que representam suas medidas na forma decimal.

A: $0{,}2 \cdot 10^5$ g $= 20\,000$ g
C: $8{,}3 \cdot 10^{-6}$ g $= 0{,}0000083$ g
B: $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ g $= 0{,}000027$ g
D: $0{,}1 \cdot 10^2$ g $= 10$ g

Organizando os valores das medidas de massa em ordem crescente, temos:

$$0{,}0000083 < 0{,}000027 < 10 < 20\,000$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

4. Escrevendo as potências de expoentes fracionários como raízes, podemos fazer:

$18^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{18} = \sqrt[2]{9 \cdot 2} = \sqrt[2]{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt[2]{2} \simeq 4{,}24$

$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$

Multiplicando os valores obtidos, temos:

$4{,}24 \cdot 3 = 12{,}72$

Logo, o valor de $18^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}$ é um número entre 12 e 13.
Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

5. Seja x a quantidade de triciclos e y a quantidade de bicicletas, temos:

$3x + 2y = 150$

Se $x = 22$, temos:

$3 \cdot 22 + 2y = 150$

$66 + 2y = 150$

$2y = 84$

$y = 42$

Logo, há 42 bicicletas disponíveis na loja.
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

6. Sendo x o preço de cada laranja e y o preço de cada limão, podemos montar o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} 12x + 7y = 7{,}75 & \text{(I)} \\ 6x + 4y = 4 & \text{(II)} \end{cases}$$

Multiplicando II por -2:

$$-12x - 8y = -8 \text{ (III)}$$

Adicionando III com I, temos:

$$-y = -0{,}25 \Rightarrow y = 0{,}25$$

Logo, cada limão custa R$ 0,25 nessa barraca.
Portanto, a alternativa correta é a letra **a**.

7. A mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de dois pontos fixos dados. Como os dois prédios devem ser equidistantes da estrada, podemos representar a situação com a figura a seguir.

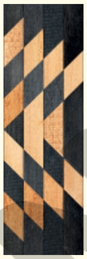
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, a estrada pode ser representada pela mediatriz de $\overline{AB}$.
Portanto, a alternativa correta é a letra **d**.

8. Vamos analisar cada uma das alternativas pelas transformações geométricas das 4 camadas horizontais superiores.

Ao fazer uma rotação com um giro de 360°, no sentido horário, em relação ao centro da imagem, obtemos a seguinte figura.

Ao fazer uma rotação com um giro de 90°, no sentido horário, em relação ao centro da imagem, obtemos a seguinte figura.



FOTOS: DENGALI/SHUTTERSTOCK

Ao traçar uma reta horizontal que passa pelo centro da imagem e fazer a reflexão das 4 camadas horizontais superiores, obtemos a seguinte figura.

Ao transladar 4 camadas para baixo, obtemos a seguinte figura.

Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

9. Para determinar a medida de abertura do ângulo interno a_i de um polígono regular de n lados, podemos utilizar a expressão $a_i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$.

Como Bruno construiu um polígono regular com 30 lados, substituindo n por 30 na expressão, temos:

$$a_i = \frac{(30-2) \cdot 180°}{30} = 168°$$

Logo, ao medir a abertura de um ângulo interno desse polígono, a medida que deve aparecer é 168°.
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

10. Para resolver esse problema, podemos utilizar o princípio multiplicativo da contagem. No primeiro elemento, temos 2 opções (triângulo ou círculo); para o segundo elemento, há 5 opções (a, e, i, o, u); e, para o terceiro, 5 opções (1, 2, 3, 4, 5).

Agora, devemos multiplicar a quantidade de opções de cada um dos elementos.

$2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$

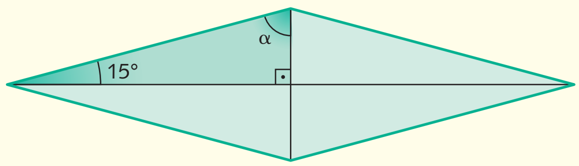
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

11. Nesse evento há um total de 126 pessoas (24 + 46 + 56). Dessas pessoas, 102 não são professores (46 + 56). Para calcular a probabilidade de o ganhador não ser um professor, podemos calcular a razão entre o número de estudantes e pais pelo número total de pessoas no evento.

$\frac{102}{126} = \frac{51}{63}$

Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

12. Vamos representar a figura desenhada por Laís.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

As diagonais de um losango são perpendiculares entre si. Como a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, podemos determinar a medida de abertura α.

$\alpha + 15° + 90° = 180°$ $\qquad$ $\alpha = 75°$

Como as diagonais de um losango estão contidas nas respectivas bissetrizes dos seus ângulos internos, a medida da abertura do maior ângulo interno desse losango é duas vezes α.

Logo, a medida de abertura do maior ângulo desse losango é 150° (75° · 2).

Portanto, a alternativa correta é a letra **d**.

13. Vamos calcular a medida de área de cada formato de tecido.

Tecido com formato quadrado:

$85 \text{ cm} \cdot 85 \text{ cm} = 7\,225 \text{ cm}^2$

Tecido com formato triangular:

$1{,}5 \text{ m} = (1{,}5 \cdot 100) \text{ cm} = 150 \text{ cm}$

$\frac{90 \text{ cm} \cdot 150 \text{ cm}}{2} = 6\,750 \text{ cm}^2$

Tecido com formato de losango:

$1{,}2 \text{ m} = (1{,}2 \cdot 100) \text{ cm} = 120 \text{ cm}$

$1{,}8 \text{ m} = (1{,}8 \cdot 100) \text{ cm} = 180 \text{ cm}$

$\frac{180 \text{ cm} \cdot 120 \text{ cm}}{2} = 10\,800 \text{ cm}^2$

Tecido com formato circular:

Considerando $\pi = 3{,}14$, temos:

$3{,}14 \cdot (50 \text{ cm})^2 = 7\,850 \text{ cm}^2$

Logo, o tecido com a maior medida de área é o que tem formato de losango.

Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

14. $V_{recipiente} = 9 \text{ cm} \cdot 9 \text{ cm} \cdot 15 \text{ cm} = 1\,215 \text{ cm}^3$

Como 1 L é equivalente a 1 000 cm³, nesse recipiente cabe 1 litro de água e sobram 215 mL.

Logo, é possível despejar 1 litro de água no recipiente e ainda caberia 215 mL.

Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

15. Aumentando a medida do comprimento do lado da plantação em 15%, temos uma medida de área igual a 529 m². Seja *x* a medida de comprimento inicial do lado desse terreno, podemos fazer:

$(x \cdot 1{,}15) \cdot (x \cdot 1{,}15) = 529$ $\qquad$ $x^2 = 400$

$x^2 \cdot 1{,}3225 = 529$ $\qquad$ $x = 20$

Logo, a medida de comprimento do lado da plantação atual é 20 m.

Portanto, a alternativa correta é a letra **a**.

16. Analisando o problema, podemos verificar que, a uma medida de velocidade média de 60 km/h, Estefani percorreria 60 km em 60 minutos. Então, em 10 minutos, Estefani deve percorrer 10 km; proporcionalmente, ela leva 40 minutos para percorrer 40 km. Calculando a diferença entre as medidas de tempo de trajeto com as diferentes medidas de velocidade média, temos:

$48 \text{ min} - 40 \text{ min} = 8 \text{ min}$

Logo, se a medida de velocidade média fosse 60 km/h, ela economizaria 8 minutos na viagem.

Portanto, a alternativa correta é a letra **a**.

17. Vamos utilizar o conjunto de dados e calcular as medidas estatísticas de cada item.

Amplitude:

$6 - 0 = 6$

Média:

$\frac{0+4+6+0+5+3+4+2+4+4+1+2}{12} = \frac{35}{12} \simeq 2{,}91$

Moda:

O número 4 (aparece 4 vezes).

Mediana:

$0 < 0 < 1 < 2 < 2 < 3 < 4 < 4 < 4 < 4 < 5 < 6$

$\frac{3+4}{2} = 3{,}5$

Logo, a menor medida estatística é 2,91, que corresponde à média.

Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

18. A pesquisa censitária levanta informações de todas as pessoas de um grupo.

Já a pesquisa amostral é feita com apenas uma parte da população e podemos observar algumas técnicas de amostragem:

- casual simples: cada indivíduo é escolhido aleatoriamente e cada membro da população tem a mesma probabilidade de ser incluído na amostra;
- sistemática: retirada periódica de um indivíduo da população;
- estratificada: toma amostras de cada estrato da população.

Logo, o erro está no tipo de amostragem, pois foi obtida pela técnica sistemática.

Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

19. Para calcular a frequência relativa dos frequentadores que estavam na classe 90 ⊢ 105, vamos calcular a razão entre a frequência dessa classe e o número total de frequentadores.

De acordo com a tabela, há 70 frequentadores na classe 90 ⊢ 105 e, no total, há 560 frequentadores (142 + 148 + 108 + + 80 + 70 + 12).

$\frac{70}{560} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

20. Para verificar quais lojas ficaram abaixo da média mensal de vendas, vamos primeiro calcular a média mensal de vendas das lojas.

$\frac{154 + 186 + 162 + 246 + 176}{5} = \frac{924}{5} = 184{,}8$

De acordo com o gráfico, as lojas abaixo dessa média são A, C e E.

Logo, nesse mês, três lojas ficaram abaixo da média.

Portanto, a alternativa correta é a letra **d**.

CONHEÇA COMO SÃO FEITAS AS ORIENTAÇÕES NA REPRODUÇÃO COMENTADA DAS PÁGINAS DO *LIVRO DO ESTUDANTE*

A seguir, detalhamos como são feitas as orientações específicas, página a página, nesta parte do *Manual do Professor* que tem formato em U (formato que se assemelha à letra U).

BNCC

Identificação de todas as competências gerais, competências específicas e habilidades desenvolvidas nos tópicos ou seções.

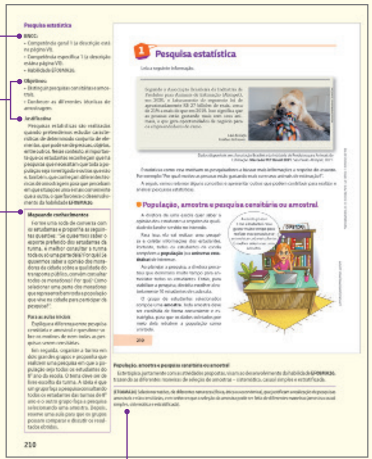
Objetivos e justificativas

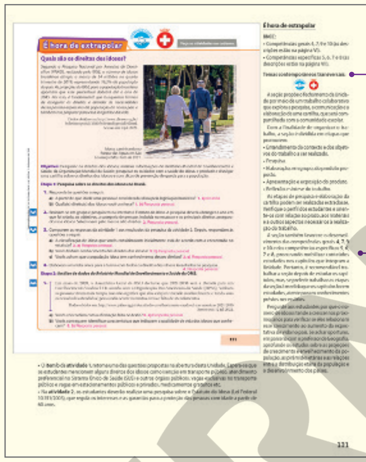
Objetivos desenvolvidos no tópico e justificativa da pertinência desses objetivos.

Mapeando conhecimentos

Sugestões de dinâmicas que permitem diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes e de como conduzir as aulas iniciais com base nesses diagnósticos.

Reprodução das habilidades da BNCC





Temas contemporâneos transversais

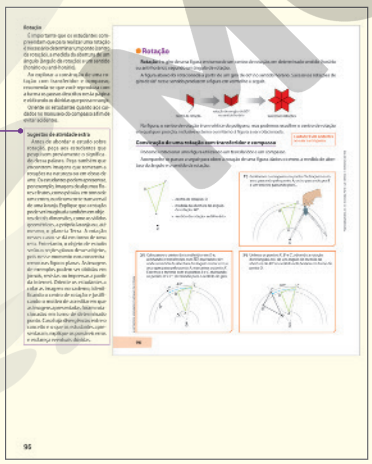
Identificação dos temas contemporâneos transversais (TCTs) trabalhados no tópico ou na seção.

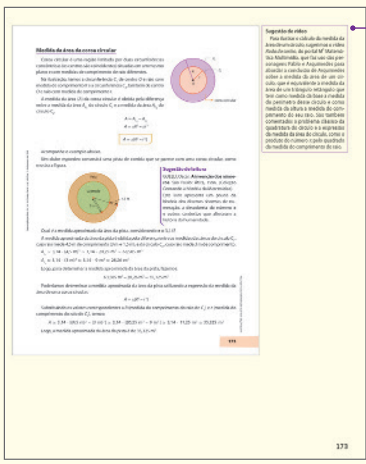
Comentários

Orientações específicas referentes ao conteúdo do *Livro do Estudante*.

Sugestão de atividade extra

Propostas de atividades que complementam e/ou ampliam a proposta das atividades presentes no *Livro do Estudante*.





Sugestão de vídeos

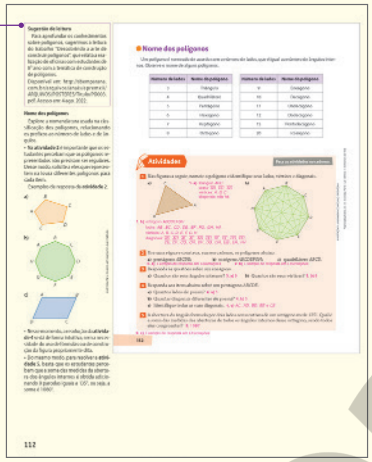
Sugestões de vídeos que complementam assuntos abordados nos capítulos.

Sugestão de trabalho interdisciplinar

Indicações de trabalho interdisciplinar com orientações de como a Matemática pode se articular com outras áreas do conhecimento.

Sugestão de leitura

Sugestões de livros ou artigos que contribuem para o conhecimento do professor.

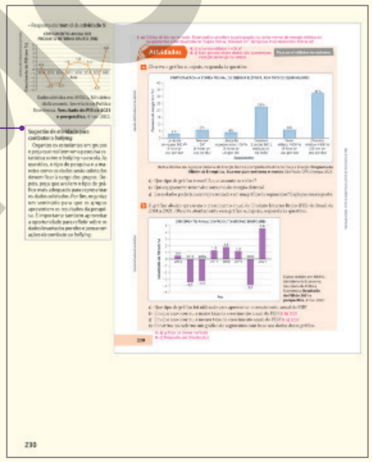


Sugestão de proposta para a promoção da saúde mental dos estudantes

Propostas de atividades relacionadas aos contextos explorados nos capítulos e que podem promover a saúde mental dos estudantes.

Sugestão de atividade para combater o *bullying*

Propostas de atividades que visam combater os diversos tipos de violência, especialmente o *bullying*.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

AGUIAR, E. V. B. As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem. **Vértices**, Campos dos Goytacazes, RJ, v. 10, n. 1/3, jan./dez., 2008.

O artigo propõe analisar o que é necessário mudar nas salas de aula com a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs).

ALVES, Flora. ***Gamification*: como criar experiências de aprendizagem engajadoras**: um guia completo: do conceito à prática. São Paulo: DVS Editora, 2015.

Este livro oferece ao leitor a oportunidade para que conheça ou se aprofunde no tema e também funciona como um guia prático por meio do qual será incentivado a colocar em prática aquilo que aprendeu criando suas próprias propostas de aprendizagem gamificadas. Também são encontrados subsídios para identificar os tipos de *gamification* existentes e escolher o mais conveniente para cada caso.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

Coletânea de artigos que apresenta reflexões teóricas e relatos de experiência de trabalho em sala de aula em torno da sala de aula invertida, do ensino personalizado, dos espaços de criação digital, da rotação por estações e do ensino híbrido. A obra é uma introdução às metodologias ativas aplicadas à inovação do ensino e aprendizagem, fundamentais ao trabalho em sala de aula na atualidade.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. **Ensino híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Este livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

Os textos deste livro contribuem para a aplicação em sala de aula de uma Matemática mais significativa e conectada com o cotidiano dos estudantes, permitindo que ela seja acessível a todos.

BRASIL. **Lei 10.436, de 24 de abril de 2002**. Dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais – Libras e dá outras providências. Brasília, DF: Congresso Nacional, 2002.

Lei que institui a Língua Brasileira de Sinais (Libras) como meio legal de comunicação e expressão das pessoas com deficiência auditiva.

BRASIL. **Lei 13.146, de 6 de julho de 2015**. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília, DF: Congresso Nacional, 2015.

A Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência é um conjunto de normas destinadas a assegurar e promover, em igualdade de condições, o exercício dos direitos e liberdades fundamentais das pessoas com deficiência, visando à sua inclusão social e a cidadania.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb)**. Brasília, DF: Inep, 2020. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb. Acesso em: 20 jul. 2022.

O *site* traz informações sobre o Saeb, permitindo conhecer as matrizes de referências e escalas, os resultados, os testes e os questionários, entre outros relativos a essas avaliações.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

A Base Nacional Comum Curricular é o atual documento norteador da educação brasileira. Para os professores que ensinam Matemática é recomendável a leitura de alguns pontos: a introdução do documento, na qual são apresentados os fundamentos pedagógicos, destacando as competências gerais da Educação Básica, os marcos legais e os fundamentos. A área da Matemática merece uma leitura atenta no que se refere às competências específicas para o Ensino Fundamental e às considerações sobres as cinco unidades temáticas (Número, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística), bem como os objetos de conhecimento e as habilidades envolvidas em cada uma delas.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas Contemporâneos Transversais**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 20 jul. 2022.

O documento faz uma retomada dos temas transversais desde 1997 até a atualidade, subsidiando sua colocação na prática da sala de aula.

CAVALCANTE, M. **Interdisciplinaridade**: um avanço na educação. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/249/interdisciplinaridade-um-avanco-na-educacao?gclid=CjwKCAjw3cSSBhBGEiwAVII0Z5uhBJ1J1zcM1f22DSxJBMRCG9WgUgTVtrW8K94zS6E368mOw9GAMxoClU4QAvD_BwE . Acesso em: 20 jul. 2022.

O artigo mostra como integrar diferentes áreas do conhecimento e permitir o trabalho interdisciplinar. Traz três exemplos de projetos interdisciplinares de três diferentes realidades.

COSTA, M. S.; ERICEIRA, T. B. e ALLEVATO, N. S. G. **Reflexões acerca do currículo de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental à luz da interdisciplinaridade de acordo com a BNCC**. Disponível em: https://cdn.congresse.me/i6rpae4feavg1op3lyi7lstj7xzp. Acesso em: 20 jul. 2022.

O artigo reflete sobre o currículo de Matemática nos Anos Finais na perspectiva da interdisciplinaridade a partir de uma pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

DAYRELL J. (org.). **Por uma pedagogia das juventudes**: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

DISKIN, L; ROIZMAN, L. G. **Paz, como se faz?** semeando cultura de paz nas escolas. Brasília: Unesco, Associação Palas Athena, Fundação Vale, 2008.

Este livro, destinado a escolas, professores e lideranças da sociedade civil, tem o objetivo de disseminar as sementes da paz, ampliando e fortalecendo a construção de uma sociedade baseada na não violência.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

Este livro busca introduzir a história da Matemática aos estudantes de graduação dos cursos superiores dessa disciplina. Assim, além da narrativa histórica, há muitos expedientes pedagógicos visando assistir, motivar e envolver o estudante.

FUNDAÇÃO ITAÚ SOCIAL; INSTITUTO REÚNA. **Mapas de foco da BNCC Ensino Fundamental**: Matemática. São Paulo: Instituto Reúna, [2020?].

Este documento apresenta uma seleção de habilidades focais para cada ano do Ensino Fundamental de acordo com a BNCC. O objetivo do documento é ajudar a orientar a flexibilização curricular e auxiliar a seleção dos conteúdos que podem ser priorizados diante de situações extremas, como a pandemia de coronavírus.

LEMOV, D. **Aula nota 10:** 49 técnicas para ser um professor campeão de audiência. São Paulo: Da Boa Prosa; Fundação Lemann, 2011.

As técnicas trazidas são resultados de pesquisas e observação em salas de aula, nas quais os professores faziam a diferença para os estudantes. O autor mapeou as técnicas capazes de modificar o aprendizado nas turmas.

MAINGAIN, A.; DUFOUR, B. **Abordagens didáticas da interdisciplinaridade**. Lisboa: Instituto Piaget, 2002.

O livro propõe uma reflexão a respeito das atividades interdisciplinares. Investiga também as condições favoráveis para a transferência de ferramentas de uma disciplina para outra (a transdisciplinaridade).

MORAN, J. **Metodologias ativas de bolso**: como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

MORAN, J. M. **A educação que desejamos**: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas: Papirus, 2009.

O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas Tecnologias e mediação pedagógica**. 21 ed. Campinas: Papirus, 2013

O livro procura expandir os diálogos e as análises sobre investimentos e utilizações tecnológicas em educação com a perspectiva de construir novas propostas.

NACARATO, A.; SOUZA, D.; BETERELLI, K. **Entrecruzando vozes e olhares**: letramentos, avaliações externas e cotidiano escolar. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro é um convite à reflexão sobre o letramento matemático e as avaliações externas. É o resultado do trabalho de pesquisa do projeto Observatório da Educação (Obedeuc) em uma escola pública. Mostra o trabalho colaborativo entre docentes pesquisadores, mestrandos da universidade e docentes da escola básica na sua compreensão pela temática.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). **Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reúnem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a Educação Básica e o ensino superior.

NOGUEIRA, N. R. **Pedagogia dos projetos**: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências. 7. ed. São Paulo: Érica, 2010.

Este livro pretende apresentar a dinâmica de trabalho com projetos, levando em consideração as questões de conteúdo, os problemas de aprendizagem, a interdisciplinaridade, entre outros assuntos, de modo a romper com a visão simplista com que os projetos têm sido encarados na escola.

PAVÃO, A. C. O.; PAVÃO, S. M. O. (org.) **Metodologias ativas na educação especial/inclusiva**. Santa Maria, RS: FACOS-UFSM, 2021.

Este livro apresenta experiências de práticas de ensino envolvendo metodologias ativas de aprendizagem, com o objetivo de auxiliar professores que atuam em Escolas Inclusivas e Sala de Recursos Multifuncionais.

SANTOS, V. O que são metodologias ativas e como elas favorecem o protagonismo dos alunos. **Nova Escola**, 8 set. 2021. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/20630/especial-metodologias-ativas-o-que-sao-as-metodologias-ativas-e-como-funcionam-na-pratica. Acesso em: 20 jul. 2022.

O artigo, além de definir o que são metodologias ativas, traz experiências práticas para colocá-las em ação na sala de aula e aponta as principais estratégias a elas referentes para colocar o estudante como protagonista do processo de ensino e aprendizagem.

TORNELLO, D. **Portfólio**: pra que te quero? São Carlos: Pedro & João Editores, 2022.

O livro traz reflexões relativas à avaliação que possibilita ao professor ressignificar sua relação com os instrumentos avaliativos e suas formas de registro.

UNESCO. **Violência escolar e *bullying***: relatório sobre a situação mundial. Brasília, DF: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WING, J. Pensamento computacional. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponivel em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711. Acesso em: 20 jul. 2022.

Este artigo foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico *Communications of the ACM*, em março de 2006. Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem ter para atuar na sociedade moderna.

ÊNIO SILVEIRA
Engenheiro mecânico pela Universidade Federal do Ceará.
Engenheiro eletricista pela Universidade de Fortaleza.
Diretor de escola particular.
Autor de obras didáticas de Matemática.

Desafios da Matemática com Ênio Silveira

8º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

1ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay, Mateus Coqueiro Daniel de Souza
Edição de texto: Carlos Eduardo Marques, Daniel Vitor Casartelli Santos, Mateus Coqueiro Daniel de Souza, Paulo César Rodrigues dos Santos
Assistência editorial: Thaís Marinho Ramalho de Souza Garcia
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Noctua Art, Vinícius Rossignol Felipe
Capa: Douglas Rodrigues José, Bruno Tonel, Daniela Cunha, Apis *Design*
Foto: Adolescentes jogando *games* de computador.
FG Trade/Getty Images
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Elaine Cristina da Silva
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero
Revisão: Ana Cortazzo, Beatriz Rocha, Cecília Oku, Dirce Y. Yamamoto, Marina Oliveira, ReCriar Editorial, Salete Brentan, Sandra G. Cortés, Tatiana Malheiro
Coordenação de pesquisa iconográfica: Flávia Aline de Morais
Pesquisa iconográfica: Pâmela Nogueira, Pamela Rosa
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silveira, Ênio
Desafios da matemática com Ênio Silveira : 8º ano . -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-16-13554-6

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

22-114732 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

A imagem da capa mostra adolescentes jogando *games* de computador. Um *game* é um sistema no qual jogadores se engajam em um desafio definido por regras, interatividade e *feedback*. Apreciado por crianças e adolescentes, os *games* exploram o raciocínio lógico e o pensamento computacional.

Apresentação

Caro estudante,

Ideias, por mais brilhantes e elaboradas que sejam, só adquirem significado quando encontram aplicação no dia a dia.

A Matemática jamais deve ser vista como problema, mas, sim, como solução. Ela nos conduz por caminhos aparentemente tortuosos ou inacessíveis, abrindo atalhos, encurtando distâncias e superando obstáculos cotidianos ou científicos.

Com as situações apresentadas neste livro, você adquirirá conhecimentos que ajudarão no desenvolvimento da sua formação escolar, pessoal e profissional. Em cada página estudada, atividade resolvida ou desafio superado, você perceberá que a Matemática é uma ferramenta poderosa que pode ajudá-lo a resolver muitos problemas.

O autor

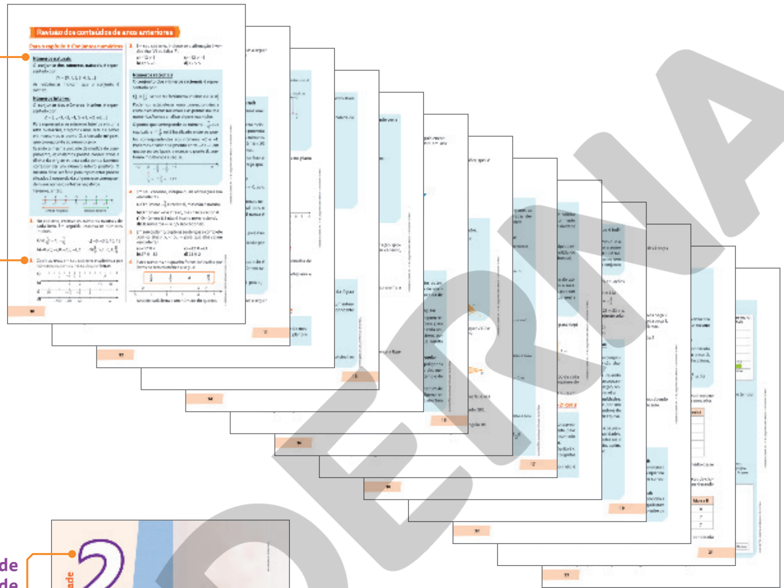
Conheça seu livro

Cada volume está dividido em quatro Unidades, que são formadas por dois ou mais capítulos, organizadas de acordo com esta estrutura:

Revisão dos conteúdos de anos anteriores
Nestas páginas, você vai recordar e praticar o que estudou em anos anteriores.

Resumo dos principais conceitos e procedimentos estudados em anos anteriores.

Atividades para aplicar o que recordou.

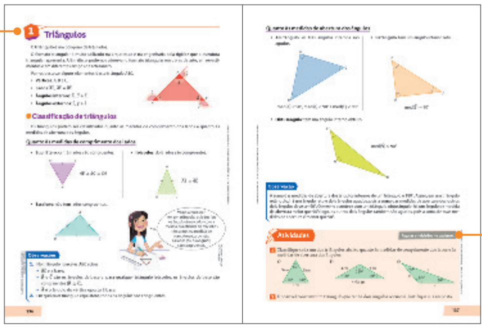


Abertura de Unidade
Apresenta o título dos capítulos que integram a Unidade e propõe questões que serão retomadas na seção *É hora de extrapolar*, presente no final da Unidade.

Trocando ideias
Incentiva o diálogo sobre alguns assuntos estudados no capítulo e também sobre temas importantes do cotidiano.

Apresentação do conteúdo

Os conteúdos são apresentados com linguagem clara e direta.

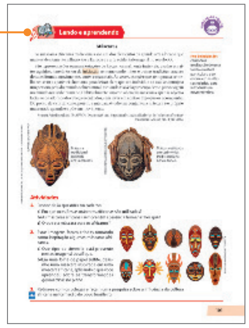


Atividades

Com diferentes níveis de dificuldade, algumas atividades estimulam a discussão, a reflexão e a resolução em grupo, o trabalho com cálculo mental e o uso da calculadora e de outras tecnologias digitais.

Lendo e aprendendo

Seção que desenvolve a compreensão de textos envolvendo diferentes temas.

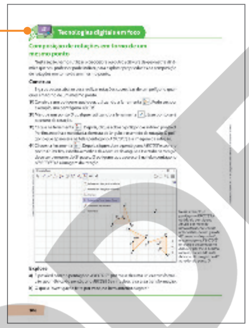


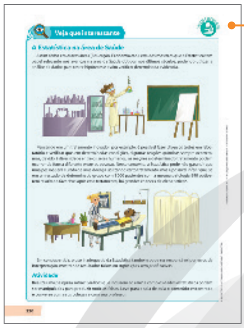
Um pouco de história

Boxe que aborda a história da Matemática para contextualizar alguns assuntos.

Tecnologias digitais em foco

Seção que trabalha conteúdos de Matemática por meio de tecnologias digitais, como *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas etc.



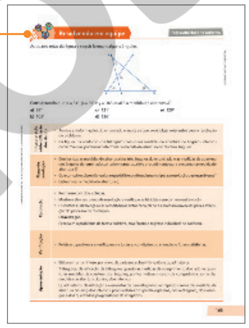


Veja que interessante

Boxe que complementa e enriquece o conteúdo estudado.

Resolvendo em equipe

Proposta de trabalho em grupo que explora a resolução de problemas.



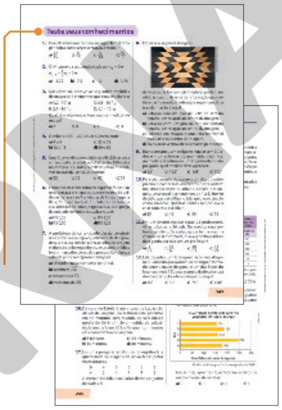
Revisão dos conteúdos deste capítulo
Nestas páginas, você vai recordar e aplicar o que estudou no capítulo.

Resumo dos principais conceitos e procedimentos estudados no capítulo.

Atividades para aplicar o que foi revisado.

É hora de extrapolar
Trabalho em grupo proposto como fechamento da Unidade. Explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a comunidade escolar. Nesta seção, são retomados também os questionamentos feitos na abertura de Unidade.

Teste seus conhecimentos
Nesta seção, você vai verificar seus conhecimentos sobre o que estudou durante o ano por meio de questões de múltipla escolha.



Ícones que indicam o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais

FORMAÇÃO CIDADÃ · PLURALIDADE CULTURAL · MEIO AMBIENTE · SAÚDE · EDUCAÇÃO FINANCEIRA · CIÊNCIA E TECNOLOGIA

| Sugestão de leitura
Sugestões de leitura de livros.

Ícones utilizados nas atividades

Dupla · Grupo · Cálculo mental · Calculadora e *softwares* · Elaboração de problemas · Pensamento computacional · Oral

Conheça mais
Sugestões de *sites* e de visitas a museus.

Sumário

Sumário

Unidade 4 197

9

Revisão dos conteúdos de anos anteriores

Números naturais

A revisão a respeito dos números naturais e dos números inteiros foca nas representações (por meio de conjuntos e da reta numérica).

• Na **atividade 1**, os estudantes devem identificar os números naturais e, depois, os números inteiros em cada item. Se tiverem dificuldades, lembre-os de que todo número natural é inteiro, mas nem todo número inteiro é natural.

• Na **atividade 2**, os estudantes devem identificar a escala utilizada em cada reta numérica e os números correspondentes aos pontos indicados por letras. Caso tenham dúvidas, questione-os sobre a ordenação dos números representados na reta, levando-os a perceber que o menor número fica à esquerda do maior.

• A **atividade 3** aborda a comparação entre dois números inteiros. Provavelmente os estudantes terão mais dificuldades no **item c**, no qual devem comparar números negativos. Se necessário, oriente-os a fazer essa comparação usando a reta numérica.

Números racionais

Com a intenção de ampliar a revisão dos conjuntos numéricos, o tema agora são os números racionais com o estudo da representação desses números por meio de conjuntos e da reta numérica.

• Na **atividade 4**, os estudantes devem identificar se os números são racionais ou não; além disso, nos **itens a**, **b** e **c**, devem identificar também se são números naturais ou números inteiros. Se eles tiverem dúvidas, explique-lhes que, em cada item, se houver algum trecho falso, toda a afirmação será considerada falsa.

• A **atividade 5** envolve comparação de dois números racionais. Se os estudantes tiverem dificuldades, incentive-os a identificar a localização dos pontos correspondentes a estes números na reta numérica para fazer as comparações.

• A **atividade 6** desenvolve a estimativa da localização de pontos correspondentes a números racionais na reta numérica. Se os estudantes apresentarem dificuldades, na lousa, analise com a turma entre quais números inteiros está cada fração.

1. b) nenhum número natural; número inteiro: –2,0
1. c) números naturais: 10 e 12; números inteiros: todos os números
1. d) nenhum número natural; nenhum número inteiro

Revisão dos conteúdos de anos anteriores

Para o capítulo 1: Conjuntos numéricos

Números naturais

O **conjunto dos números naturais** é representado por:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

As reticências indicam que o conjunto é infinito.

Números inteiros

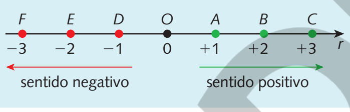
O **conjunto dos números inteiros** é representado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$$

Para representar os números inteiros em uma **reta numérica**, traçamos uma reta *r* e sobre ela marcamos o ponto *O*, chamado **origem**, que corresponde ao número zero.

Usando a mesma unidade de medida de comprimento, assinalamos pontos consecutivos à direita da origem e, para cada ponto, fazemos corresponder um número inteiro positivo. O mesmo deve ser feito para representar pontos situados à esquerda da origem, que correspondem aos números inteiros negativos.

Teremos, então:



1. No caderno, escreva os números naturais de cada item. Em seguida, escreva os números inteiros. **1. a)** número natural: 5; números inteiros: 5 e –5

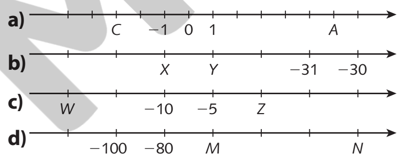
a) $5; \frac{1}{5}; -5; -\frac{1}{5}$

b) –0,20; –2,0; –2,3; –1,2

c) –5; –3,0; 10; 12

d) $\frac{5}{2}$; 5,1; 6,3; $\frac{8}{9}$

2. Copie as retas em seu caderno e substitua por números os pontos indicados por letras:



2. a) $A \rightarrow 6$; $C \rightarrow -3$
2. b) $X \rightarrow -34$; $Y \rightarrow -33$
2. c) $Z \rightarrow 0$; $W \rightarrow -20$
2. d) $M \rightarrow -60$; $N \rightarrow 0$

3. Em seu caderno, indique se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).

a) $-12 > 5$ **3. a)** F

b) $12 > -5$ **3. b)** V

c) $-12 > -5$ **3. c)** F

d) $12 > 5$ **3. d)** V

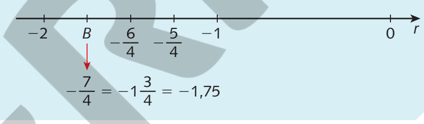
Números racionais

O **conjunto dos números racionais** é representado por:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, \text{ sendo } a \text{ e } b \text{ números inteiros e } b \neq 0\right\}$$

Podemos estabelecer uma correspondência entre os números racionais e os pontos na reta numérica. Vamos analisar alguns exemplos:

O ponto que corresponde ao número $-\frac{7}{4}$, que equivale a $-1\frac{3}{4}$, está localizado entre os pontos correspondentes aos números –2 e –1. Podemos dividir o segmento entre –2 e –1 em quatro partes iguais e marcar o ponto *B*, conforme mostramos a seguir.



4. Em seu caderno, indique quais afirmações são verdadeiras. **4.** itens **a**, **d**

a) O número $-\frac{5}{7}$ é racional, mas não é natural.

b) O número –7 é inteiro, mas não é racional.

c) O número 8,8 não é inteiro nem racional.

d) Os números –9 e 6,5 são racionais.

5. Em seu caderno, copie as sentenças e complete com os sinais >, < ou = para que elas sejam verdadeiras.

a) –12 ■ 7 **5. a)** <

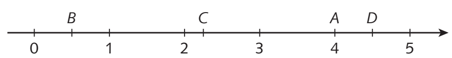
b) 2,7 ■ –5 **5. b)** >

c) –2,2 ■ –2,1 **5. c)** <

d) $-\frac{1}{5}$ ■ $-\frac{1}{2}$ **5. d)** >

6. Estes números do quadro foram indicados por letras na reta numérica a seguir.

$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{9}{2}$



Associe cada letra a um número do quadro.

6. *A*: 4; *B*: $\frac{1}{2}$; *C*: $\frac{9}{4}$; *D*: $\frac{9}{2}$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Para o capítulo 2: Potenciação e radiciação

Potenciação de números racionais

Para um número racional *a* com expoente natural *n* maior que 1, definimos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Para todo número racional *a* com expoente 1, temos: $a^1 = a$

Considere os exemplos:

a) $(-2)^1 = -2$

b) $(+0{,}5)^1 = +0{,}5$

c) $\left(\frac{7}{2}\right)^1 = \frac{7}{2}$

Para todo número racional *a* não nulo, com expoente igual a zero, temos: $a^0 = 1$

Analise os exemplos:

a) $(+18)^0 = 1$

b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^0 = 1$

c) $(-6{,}4)^0 = 1$

Se o expoente for um número par, a potência será um número positivo.

Analise os exemplos:

a) $(+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +81$

b) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25$

c) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

Se o expoente for um número ímpar, a potência terá o mesmo sinal da base.

Confira os exemplos:

a) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$

b) $(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = +125$

c) $(-0{,}6)^3 = (-0{,}6) \cdot (-0{,}6) \cdot (-0{,}6) = -0{,}216$

7. Sem realizar cálculos, responda em seu caderno: Quais destas potências têm resultado positivo?

a) $(-25)^{10}$
b) $(+15)^1$
c) $(300)^{12}$
d) $(-29)^{63}$
e) $(-0{,}25)^9$
f) $\left(\frac{15}{8}\right)^{15}$
g) $(-0{,}36)^0$
h) $(-200{,}1)^{55}$

7. itens **a**, **b**, **c**, **f**, **g**

8. Em seu caderno, calcule as potências a seguir.

a) $(-6)^4$ **8. a)** $+1\,296$
b) $(+6)^3$ **8. b)** $+216$
c) $(-3)^6$ **8. c)** $+729$
d) 2^6 **8. d)** 64
e) $(-1{,}1)^3$ **8. e)** $-1{,}331$
f) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ **8. f)** $-\frac{1}{8}$
g) $0{,}3^4$ **8. g)** $0{,}0081$
h) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ **8. h)** $\frac{1}{32}$

Raiz quadrada de números racionais

- Quando o índice da raiz é 2, podemos omiti-lo. Assim: $\sqrt[2]{100} = \sqrt{100}$
- Os **quadrados perfeitos** são números racionais que podem ser escritos como potência de base racional e expoente 2. Os números 0; 0,01; 0,04; 0,09; 0,16; 0,25; 1; 4; 9; 16 e 25 são exemplos de quadrados perfeitos.
- A raiz quadrada de um quadrado perfeito é o número racional não negativo cujo quadrado é igual ao número dado.

  Então: $\sqrt{0{,}09} = 0{,}3$, pois $(0{,}3)^2 = 0{,}9$.
- A raiz quadrada de zero é zero: $\sqrt{0} = 0$, pois $0^2 = 0$
- A raiz quadrada de números racionais negativos não é um número racional, pois o quadrado de um número racional nunca é negativo. Por exemplo:

  $\sqrt{-\frac{1}{9}}$ não é um número racional, pois não existe número racional que multiplicado por ele mesmo resulte em $-\frac{1}{9}$.
- A raiz quadrada de um número que não é um quadrado perfeito não é um número racional. Por exemplo:

  $\sqrt{0{,}1}$ não é um número racional, pois 0,1 não é um quadrado perfeito.

9. Calcule a raiz quadrada dos números a seguir.

a) $\sqrt{64}$ **9. a)** 8
b) $-\sqrt{81}$ **9. b)** -9
c) $\sqrt{100}$ **9. c)** 10
d) $-\sqrt{16}$ **9. d)** -4
e) $\sqrt{49}$ **9. e)** 7
f) $-\sqrt{4}$ **9. f)** -2

Potenciação de números racionais

Esta revisão retoma potências em que a base é um número racional e o expoente é um número natural, assim como a análise do expoente (par ou ímpar) para identificar se o resultado será positivo ou negativo.

- Na **atividade 7**, destaque aos estudantes que é pedido no enunciado para não realizar os cálculos, uma vez que é necessário saber apenas se o resultado é positivo ou negativo, observando o sinal da base e o expoente de cada potência. Ao final da atividade, permita que eles calculem cada item para conferir as respostas.
- Na **atividade 8**, os estudantes devem calcular as potências dadas. Caso tenham dificuldades, oriente-os a escrever as potências como multiplicações sucessivas e a efetuá-las. Assim, devem realizar multiplicações de números racionais representados tanto na forma decimal quanto na forma fracionária.

Raiz quadrada de números racionais

É retomada a ideia de raiz quadrada de números racionais para que, no capítulo 2 deste volume, este estudo possa ser ampliado para a raiz enésima de números reais.

Se possível, na lousa, forneça mais alguns exemplos de raízes quadradas de números racionais escritos tanto na forma decimal quanto na fracionária.

- A **atividade 9** envolve o cálculo de raízes quadradas de números racionais, que são também números inteiros. Acompanhe principalmente a resolução dos **itens b**, **d** e **f**, pois alguns estudantes podem se confundir com o cálculo de raízes quadradas de números racionais negativos e concluir que o resultado não é um número racional. Caso isso ocorra, destaque que cada radicando é positivo, o que possibilita o cálculo da raiz, devendo ser colocado o sinal de menos para o resultado desse cálculo.

• A **atividade 10** envolve apenas raízes de números racionais escritos na forma decimal, então é importante observar como os estudantes realizam os cálculos desse tipo. Caso tenham dificuldades, peça-lhes que encontrem o quadrado dos números da 2ª coluna para confirmar a correspondência com os números da 1ª coluna.

• Na **atividade 11**, os radicandos estão na forma fracionária. Assim, oriente os estudantes a calcular em cada item a fração que multiplicada por si mesma terá como resultado a fração dentro do radical. No **item c**, verifique se eles se lembram de colocar o sinal de menos após o cálculo da raiz.

• Ao resolver a **atividade 12**, os estudantes devem identificar se os números são ou não quadrados perfeitos. Note que até mesmo nos **itens c** e **d** essa identificação deve ser feita, pois, se $\frac{35}{10}$ e 0,4 não são quadrados perfeitos, a raiz quadrada desses números não é um número racional. Se necessário, peça que façam os cálculos dos quadrados perfeitos que conhecem mais próximos dos números apresentados.

• Na **atividade 13**, os estudantes devem identificar o número correspondente à letra dentro de cada radical. Confira se eles notam que esse número é o quadrado do resultado da raiz quadrada.

O plano cartesiano

Nesse momento, a revisão é a respeito do plano cartesiano. Destaque para os estudantes como se representam os eixos, os pontos e como esse plano é dividido em 4 quadrantes. Os exemplos apresentados devem ser analisados por eles a fim de esclarecer esse tipo de representação.

• Para resolver a **atividade 14**, os estudantes devem identificar as coordenadas de cada um dos pontos indicados no plano cartesiano. Vale a pena destacar que a ordem das coordenadas é sempre a mesma: primeiro x e depois y. Por exemplo, as coordenadas (2, 1) e (1, 2) representam pontos diferentes.

• Na **atividade 15**, os estudantes devem construir um plano cartesiano e, em seguida, indicar nele cada um dos pontos. Procure acompanhar desde a construção do plano cartesiano para sanar eventuais dúvidas.

Ângulos

Ao revisar o conceito de ângulo, apresente a definição, a principal unidade de medida de abertura de um ângulo (grau) e algumas classificações de ângulos com base na sua medida de abertura.

10. A – II; B – I; C – IV; D – III

10. Associe cada item ao seu resultado:

A. $\sqrt{0,0001}$	**I.** 1,2
B. $\sqrt{1,44}$	**II.** 0,01
C. $\sqrt{0,81}$	**III.** 0,5
D. $\sqrt{0,25}$	**IV.** 0,9

11. Determine o valor das seguintes raízes.

a) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ 11. a) $\frac{2}{5}$

b) $\sqrt{\frac{9}{64}}$ 11. b) $\frac{3}{8}$

c) $-\sqrt{\frac{100}{4}}$ 11. c) $-\frac{10}{2} = -5$

d) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ 11. d) $\frac{1}{4}$

12. Copie em seu caderno apenas as afirmações verdadeiras. 12. itens **a**, **d**

a) 100 é quadrado perfeito.

b) 0 não é um quadrado perfeito.

c) A raiz quadrada de $\frac{35}{10}$ é um número racional.

d) A raiz quadrada de 0,4 não é um número racional.

13. Determine os valores de W, X, Y e Z.

a) $\sqrt{W} = 4$ 13. a) 16

b) $\sqrt{X} = 9$ 13. b) 81

c) $\sqrt{Y} = 8$ 13. c) 64

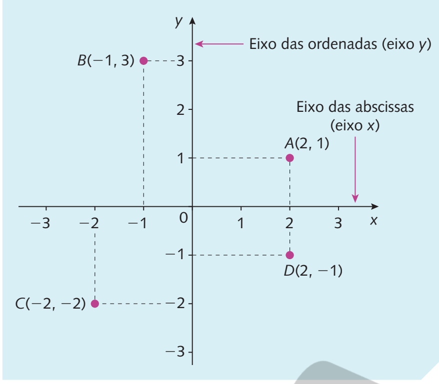
d) $\sqrt{Z} = 0,2$ 13. d) 0,04

Para o capítulo 3: Sistemas de equações do 1º grau

O plano cartesiano

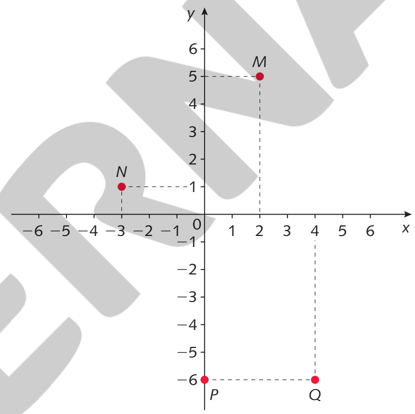
O plano cartesiano é composto de dois eixos, um horizontal e um vertical, chamados de **eixo das abscissas** (eixo x) e **eixo das ordenadas** (eixo y), respectivamente. Para representar um ponto no plano cartesiano, utilizamos um **par ordenado**.

- O ponto $A(2, 1)$ tem abscissa $x = 2$ e ordenada $y = 1$.
- O ponto $B(-1, 3)$ tem abscissa $x = -1$ e ordenada $y = 3$.
- O ponto $C(-2, -2)$ tem abscissa $x = -2$ e ordenada $y = -2$.
- O ponto $D(2, -1)$ tem abscissa $x = 2$ e ordenada $y = -1$.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

14. Observe os pontos representados no plano cartesiano.



Em seu caderno, escreva as coordenadas de cada um deles. 14. $M(2, 5)$; $N(-3, 1)$; $P(0, -6)$; $Q(4, -6)$

15. Faça em seu caderno um plano cartesiano e nele represente estes pontos.

a) $A(-5, 2)$

b) $B(-1, -3)$

c) $C(0, -2)$

d) $D(4, 0)$

15. Resposta em *Orientações*.

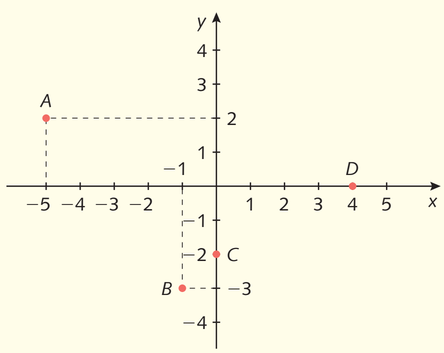
Para o capítulo 4: Ângulos e transformações geométricas

Ângulos

Ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem, com uma das regiões do plano limitada por elas.

12

• Resposta da **atividade 15**:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Os **lados** de um ângulo são as semirretas que o determinam, e o **vértice** é a origem comum dessas semirretas.

Medida da abertura de um ângulo

Ao medir um ângulo, consideramos a abertura entre seus lados. Podemos utilizar como unidade de medida de ângulo o **grau** (°).

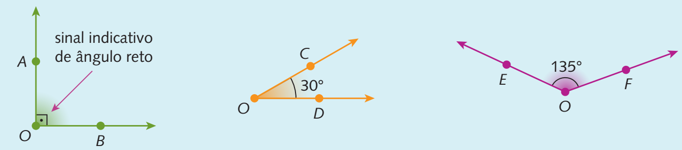
Ângulo reto, ângulo agudo e ângulo obtuso

Ângulo reto: ângulo que tem medida de abertura igual a 90°.

Ângulo agudo: ângulo que tem medida de abertura maior que 0° e menor que 90°.

Ângulo obtuso: ângulo que tem medida de abertura maior que 90° e menor que 180°.

$A\hat{O}B$ é reto, $C\hat{O}D$ é agudo e $E\hat{O}F$ é obtuso:



Ângulos congruentes

Ângulos congruentes são ângulos que têm a mesma medida de abertura.

16. Em seu caderno, escreva se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F).

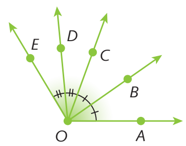
a) A abertura de um ângulo reto mede 70°. **16. a)** F

b) Dois ângulos retos são sempre congruentes. **16. b)** V

c) A medida de abertura de um ângulo obtuso é maior que 90°. **16. c)** V

d) A medida de abertura de um ângulo agudo é maior que 90°. **16. d)** F

17. Identifique os pares de ângulos congruentes e registre-os em seu caderno.

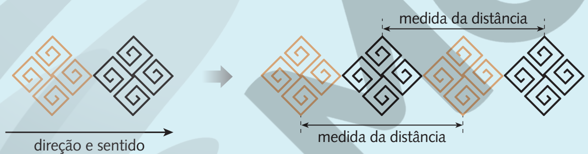


17. $E\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$; $C\hat{O}B$ e $B\hat{O}A$

Transformações geométricas

Isometrias são transformações geométricas que preservam o formato e as medidas da figura original.

Translação é a isometria pela qual a figura é deslocada em determinada direção e sentido, mantendo uma mesma medida da distância entre cada um dos pontos da figura original e o correspondente da figura obtida.



Rotação é a isometria pela qual uma nova figura é obtida a partir de um giro da figura original ao redor de um único ponto fixo. Esse ponto é chamado de **centro de rotação**.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

• A **atividade 16** envolve o conceito de ângulos congruentes e a distinção entre ângulo agudo, obtuso e reto. Em caso de equívocos, represente na lousa ângulos retos, agudos e obtusos com a medida de abertura indicada para que a turma classifique-os e, depois, identifique quais são ângulos congruentes.

• Com a resolução da **atividade 17**, é possível avaliar se os estudantes utilizam adequadamente a notação de ângulo, assim como se identificam ângulos congruentes. Caso tenham alguma dificuldade em identificar os ângulos congruentes, peça à turma que fale os pares que podem ser congruentes e represente-os na lousa para que os estudantes possam visualizá-los separadamente.

Transformações geométricas

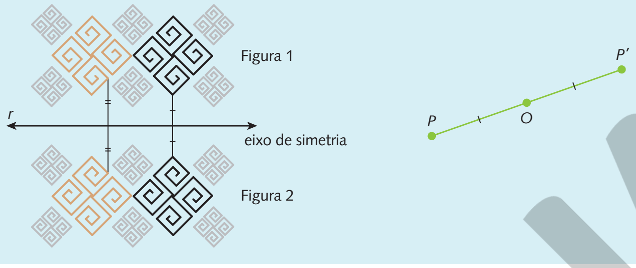
Neste momento, são retomadas as isometrias: translação, rotação e reflexão (em relação a uma reta e em relação a um ponto). Caso tenha fácil acesso a algum computador com *software* de geometria dinâmica, podem-se complementar os exemplos de forma mais dinâmica.

• Na **atividade 18**, os estudantes devem identificar a transformação geométrica feita e o que representa a reta *r*. Caso tenham dúvidas no **item a**, na lousa, analise o que é uma translação, uma rotação e uma reflexão para levá-los a concluir que o quadrilátero *A'B'C'D'* foi obtido por uma reflexão em relação à reta *r* (eixo de simetria) do quadrilátero *ABCD*.

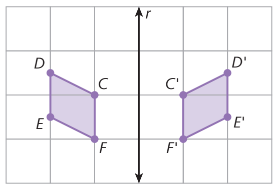
• Em cada item da **atividade 19**, os estudantes devem reproduzir a figura no caderno e, depois representar a figura obtida após realizar uma translação (**item a**) e uma rotação (**item b**). Caso tenham dúvidas, destaque que é fornecido apenas um vértice de cada figura que devem representar e que a partir dele, eles devem determinar os demais vértices. Em seguida, analise com a turma quais são as transformações geométricas em cada item: considerando u a unidade de medida de comprimento do lado de um quadradinho, há uma translação de 1 u para baixo e 10 u para a esquerda no **item a** e uma rotação de um giro de 180° em relação ao ponto *C* no **item b**.

Em uma rotação, o giro pode ser feito no sentido horário ou no sentido anti-horário, segundo certa medida da abertura de um ângulo.

Reflexão é a isometria pela qual uma figura pode ser refletida, em um plano, de dois modos:



18. Observe as figuras a seguir.



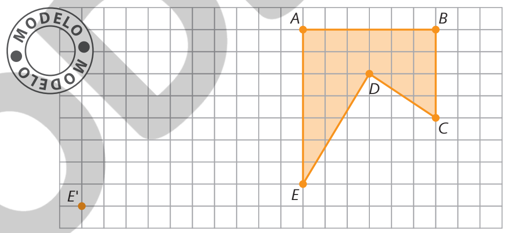
A figura *ABCD* passou por uma transformação geométrica, originando a figura *A'B'C'D'*. Em seu caderno, responda:

a) Qual transformação foi feita? **18. a)** reflexão

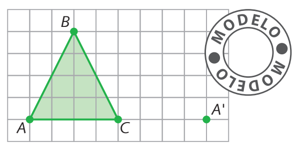
b) O que é a reta *r*? **18. b)** eixo de simetria

19. Usando uma folha quadriculada, copie as figuras e faça o que se pede em cada item.

a) A figura *ABCDE* sofreu uma translação e o ponto *E'* é o correspondente ao ponto *E*. Represente a figura *A'B'C'D'E'*. **19. a)** Resposta em *Orientações*.



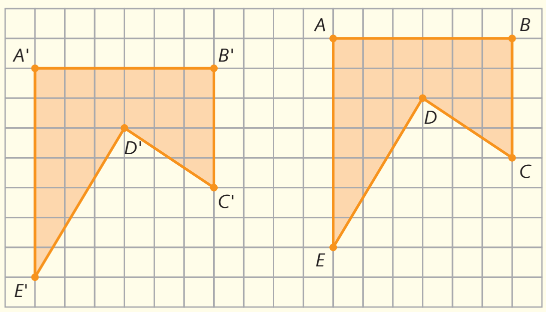
b) A figura *ABC* sofreu uma rotação e o ponto *A'* é o correspondente ao ponto *A*. Represente a figura *A'B'C'*. **19. b)** Resposta em *Orientações*.



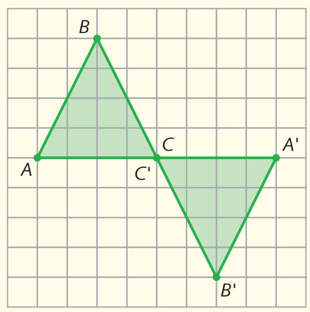
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

14

• Resposta do **item a** da **atividade 19**:



• Resposta do **item b** da **atividade 19**:

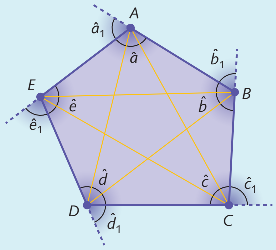


ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Para o capítulo 5: Polígonos

Elementos e medidas de um polígono

Podemos identificar os seguintes elementos no polígono *ABCDE*:



- **lados**: segmentos de reta que formam o contorno do polígono ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$);
- **vértices**: pontos de encontro de dois lados consecutivos (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*);
- **diagonais**: segmentos de reta que unem dois vértices não consecutivos ($\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$);
- **ângulos internos**: ângulos formados por dois lados consecutivos ($\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$);
- **ângulos externos**: ângulos formados por um lado do polígono e pelo prolongamento do lado consecutivo a ele ($\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$, $\hat{d}_1$, $\hat{e}_1$).

Soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um polígono

A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180°.

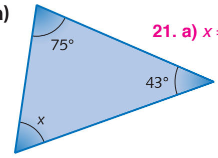
Para determinar a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer polígono, traçamos todas as diagonais que partem de um único vértice, decompondo o polígono em triângulos, e multiplicamos a quantidade de triângulos por 180°.

20. Em seu caderno: **20.** Um exemplo de resposta está na seção *Resoluções e comentários das atividades deste Manual do Professor.*

- trace o polígono *ABCDE*;
- trace uma diagonal;
- marque dois ângulos internos;
- marque um ângulo externo.

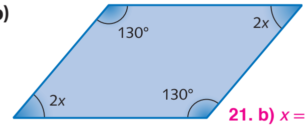
21. Para cada um dos polígonos a seguir, encontre o valor de *x*. Registre a resposta em seu caderno.

a)



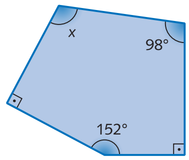
21. a) $x = 62°$

b)



21. b) $x = 25°$

c)



21. c) $x = 110°$

Polígono regular

Um polígono é regular quando todos os ângulos internos têm mesma medida de abertura e todos os lados têm mesma medida de comprimento.

Ângulos internos de um polígono regular

Como os ângulos internos de um polígono regular têm a mesma medida de abertura, para descobrir a medida de abertura de cada ângulo interno de um triângulo equilátero, por exemplo, dividimos 180° por 3, que resulta em 60°.

Ângulos externos de um polígono regular

Os ângulos internos e externos dos polígonos são suplementares, ou seja, a soma das medidas de abertura de um ângulo interno e de um ângulo externo é 180°.

Por isso, conhecendo a medida de abertura de um ângulo interno de qualquer polígono regular, podemos calcular a medida de abertura de um ângulo externo dele.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Elementos e medidas de um polígono

O foco desta revisão são os elementos que compõem um polígono e a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de polígonos. É interessante apresentar alguns exemplos de polígonos na lousa para que a turma os decomponha em triângulos e determine a soma das medidas de abertura dos ângulos internos.

- A **atividade 20** permite muitas respostas diferentes, uma vez que não estão determinadas as medidas de comprimento dos lados e as medidas de abertura dos ângulos internos do polígono *ABCDE*. Circule entre os estudantes para observar se as respostas são coerentes com o enunciado e indique possíveis ajustes necessários. É importante notar se eles identificam que o polígono deve ser um pentágono por ter 5 vértices.
- Ao resolver a **atividade 21**, os estudantes relacionam cada polígono à respectiva soma das medidas de abertura dos ângulos internos para encontrar o valor de *x*. Se achar conveniente, pergunte aos estudantes se é possível conferir se o valor está correto. Espera-se que eles digam que basta substituir o valor encontrado nas respectivas medidas de abertura e efetuar a adição das medidas de abertura dos ângulos internos de cada polígono para verificar se encontraram a soma esperada.

Polígono regular

A revisão sobre polígono é ampliada para os polígonos regulares tanto no que se refere à definição quanto à questão dos ângulos internos e externos de um polígono regular.

• Aproveite a realização da **atividade 22** e enfatize com a turma que para um polígono ser regular não basta apenas que seus lados sejam congruentes ou que seus ângulos internos sejam congruentes. As duas condições devem estar satisfeitas simultaneamente.

• Na **atividade 23**, os estudantes devem identificar os polígonos regulares utilizando a medida de abertura de cada ângulo interno ou externo. Caso tenham dúvidas, peça que esbocem polígonos para observar quais atendem à condição de cada item.

Probabilidade

Nesta revisão, define-se experimento aleatório e probabilidade de um resultado em um experimento aleatório. Se possível, apresente alguns exemplos de situações, como sorteio de bolas numeradas ou lançamento de "dado honesto" ou "moeda honesta", para que a turma calcule a probabilidade de alguns resultados ocorrerem.

• A **atividade 24** pode ser respondida sem o cálculo de probabilidades, mas com a comparação entre as chances de ocorrer dois resultados. Em caso de dúvidas, auxilie os estudantes a fazer as relações, com questões do tipo: "Ao lançar uma 'moeda honesta', a chance de sair cara é maior, menor ou igual ao de sair coroa?" (Espera-se que respondam que é igual). "Quais são os possíveis resultados no lançamento de um 'dado honesto' numerado de 6 faces?" (Espera-se que respondam 1, 2, 3, 4, 5 ou 6).

• Com a resolução da **atividade 25**, espera-se que os estudantes coloquem em prática o cálculo de probabilidades. Para auxiliá-los, pode-se pedir a eles, inicialmente, que observem as fichas e respondam: "Qual é a cor com mais chance de ser sorteada? E a cor com menos chance?" (Espera-se que respondam, respectivamente, azul e branca). Após os cálculos, peça que retomem essas estimativas e confiram se as respostas estão de acordo com o esperado.

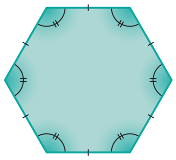
Triângulos

Com a intenção de aprofundar o estudo dos polígonos, o foco desta revisão serão os triângulos, especificamente seus elementos.

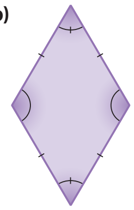
22. Polígono do item **a**, pois todos os ângulos internos têm a mesma medida de abertura e todos os lados têm mesma medida de comprimento. O polígono do item **b** tem apenas todos os lados com a mesma medida de comprimento.

22. Qual dos polígonos seguintes é regular? Por quê?

a)



b)



23. Escreva no caderno, qual é o polígono regular cuja abertura de:

a) cada ângulo interno mede 90°? **23. a)** quadrado

b) cada ângulo externo mede 120°? **23. b)** triângulo equilátero

Para o capítulo 6: Probabilidade

Probabilidade

Um experimento aleatório é um acontecimento que conhecemos os resultados possíveis, mas não podemos assegurar qual será o resultado. Por não ser possível prever o resultado com exatidão, procuramos medir as chances, ou seja, determinar a **probabilidade** de certo resultado ocorrer.

A probabilidade de determinado resultado em um experimento aleatório é a razão entre o número de possibilidades favoráveis e o número total de possibilidades.

24. Em seu caderno, registre apenas as afirmações verdadeiras. **24.** itens **b**, **c**

a) Quando lançamos uma "moeda honesta", há sempre mais chance de sair cara do que coroa.

b) No lançamento de um "dado honesto" de 6 faces, há a mesma chance de sair um número par e um número ímpar.

c) A probabilidade de sair um número maior que 6 em um "dado honesto" de 6 faces é igual a zero.

25. Em uma urna, há 12 fichas nas seguintes cores:

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Ao retirar 1 ficha dessa urna, sem olhar, qual é a probabilidade de ela ser da cor:

a) amarela? **25. a)** $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

b) vermelha? **25. b)** $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

c) azul? **25. c)** $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

d) branca? **25. d)** $\frac{1}{12}$

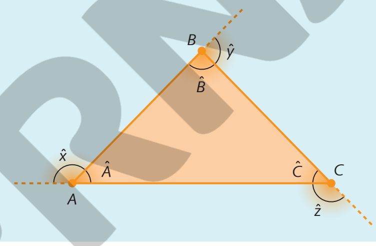
Para o capítulo 7: Triângulos e quadriláteros

Triângulos

Triângulo é um polígono com três lados.

Principais elementos de um triângulo

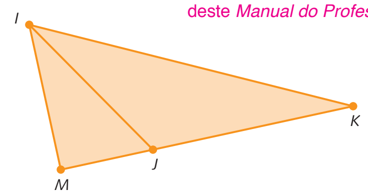
- Vértices: *A*, *B* e *C*
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$
- Ângulos internos: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$
- Ângulos externos: $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$



26. Em seu caderno, desenhe um triângulo *PQR* e indique todos seus ângulos internos.

26. Um exemplo de resposta está na seção *Resoluções e comentários das atividades* deste *Manual do Professor*.

27. Analise este triângulo.



Em seu caderno, indique as afirmações falsas (F) e as verdadeiras (V).

a) $\widehat{M}$ é um ângulo interno do triângulo *IMK*. **27. a)** V

b) $\overline{MJ}$ é um lado do triângulo *IMK*. **27. b)** F

c) $I\widehat{J}M$ é um ângulo externo do triângulo *IJK*. **27. c)** V

d) *J* é um vértice do triângulo *IMK*. **27. d)** F

16

• Há infinitas representações de triângulos possíveis para a **atividade 26**, então é interessante que os estudantes façam comparações com as respostas de outros colegas para observar o que elas têm em comum e de diferente. Se necessário, proponha ajustes nas respostas, destacando principalmente que a figura deve ter três vértices, três lados e três ângulos internos.

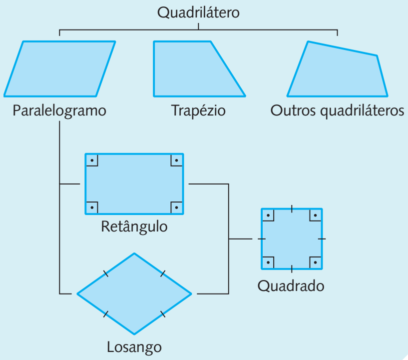
• Na **atividade 27**, os estudantes devem identificar se o elemento citado em cada item corresponde ao triângulo indicado. Ao final da atividade, peça a alguns deles que expliquem oralmente por que determinada afirmação é falsa ou verdadeira; essas explicações poderão esclarecer eventuais dúvidas da turma.

Quadriláteros

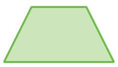
Quadrilátero é um polígono com quatro lados.

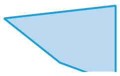
Paralelogramo é um quadrilátero que tem dois pares de lados paralelos.

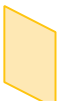
Trapézio é um quadrilátero que tem apenas um par de lados paralelos.

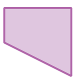


28. Com o auxílio de régua e esquadro, classifique cada quadrilátero como paralelogramo, trapézio ou outro quadrilátero.

a)  **28. a)** trapézio

b)  **28. b)** outro quadrilátero

c)  **28. c)** paralelogramo

d)  **28. d)** trapézio

29. Quais afirmações a seguir são verdadeiras?

a) Todo quadrado é um retângulo.

b) Todo retângulo é um losango. **29.** itens **a**, **c**, **d**

c) Todo retângulo tem quatro ângulos com medida de abertura de 90°.

d) Todo quadrado tem os quatro lados congruentes.

e) Alguns losangos têm lados com medidas diferentes.

f) Todo retângulo é um quadrado.

Para o capítulo 8: Área, volume e capacidade

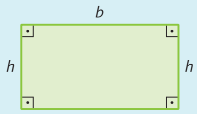
Medida da área

Ao calcular a medida da área de polígonos, as medidas de comprimento consideradas devem estar na mesma unidade de medida.

Retângulo

$b \longrightarrow$ medida do comprimento ou medida de comprimento da base

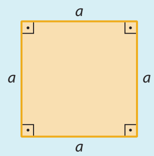
$h \longrightarrow$ medida da largura ou medida de comprimento da altura



$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$

Quadrado

$a \longrightarrow$ medida de comprimento do lado

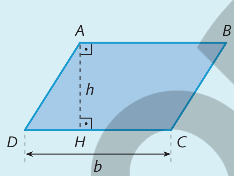


$A_{\text{quadrado}} = a \cdot a = a^2$

Paralelogramo

$b \longrightarrow$ medida de comprimento da base

$h \longrightarrow$ medida de comprimento da altura relativa à base

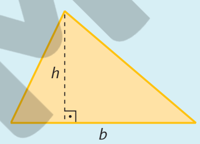


$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

Triângulo

$b \longrightarrow$ medida do comprimento da base

$h \longrightarrow$ medida de comprimento da altura relativa à base



$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2}$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Quadriláteros

- Com base nos quadriláteros representados, a **atividade 28** apresenta a classificação de cada um deles em paralelogramo, trapézio ou outro quadrilátero. Caso os estudantes tenham dificuldades, retome essas classificações baseando-se nas palavras deles.
- Na **atividade 29**, os estudantes devem avaliar afirmações sobre retângulos, losangos e quadrados, prestando atenção principalmente nos termos "todo" e "alguns". Por exemplo, no **item e**, eles podem considerar erroneamente que a afirmação é verdadeira; se isso ocorrer, destaque que a afirmação é falsa por causa do termo "alguns" e que seria verdadeira se fosse "Todo losango tem os quatro lados congruentes".

Medida da área

Esta revisão é a respeito do cálculo das medidas de área de triângulos e dos quadriláteros mais conhecidos: retângulo, paralelogramo, trapézio e losango.

• Na **atividade 30**, os estudantes devem calcular a medida da área de um trapézio (**item a**), um losango (**item b**), um paralelogramo (**item c**) e um triângulo (**item d**). Se eles tiverem dificuldades ajude-os a classificar o quadrilátero presente nos **itens a**, **b** e **c** e a identificar as medidas da base, altura, e diagonais conforme o polígono.

Medida de volume

Esta revisão retoma o cálculo da medida de volume de alguns sólidos geométricos: paralelepípedo reto-retângulo e cubo, que é um paralelepípedo reto-retângulo que tem todas as arestas congruentes. Se possível, apresente alguns exemplos dessas figuras para que a turma calcule a medida de volume delas.

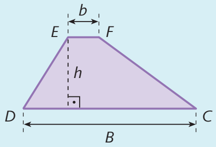
• Nas **atividades 31** e **32**, os estudantes devem calcular a medida de volume de um paralelepípedo (**atividade 31**) e de três cubos (**atividade 32**). Destaque a necessidade de indicar a unidade de medida de volume ao apresentar as respostas.

Equações do 1º grau

Esta revisão retoma o conceito de equação e, mais especificamente, de equação do 1º grau por meio de exemplos. Além disso, aborda-se a ideia de incógnita, muito importante na definição de equação.

Trapézio

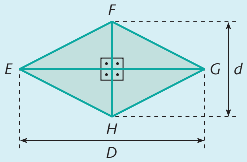
B ⟶ medida de comprimento da base maior
b ⟶ medida de comprimento da base menor
h ⟶ medida de comprimento da altura



$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Losango

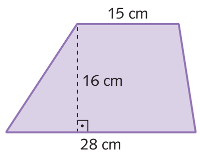
D ⟶ medida de comprimento da diagonal maior
d ⟶ medida de comprimento da diagonal menor



$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

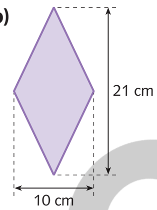
30. Determine a medida da área dos seguintes polígonos:

a)



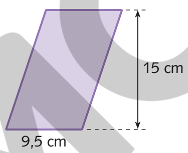
30. a) 344 cm²

b)



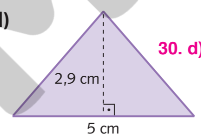
30. b) 105 cm²

c)



30. c) 142,5 cm²

d)



30. d) 7,25 cm²

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Medida de volume

Ao calcular a medida de volume de sólidos geométricos, as medidas de comprimento consideradas devem estar na mesma unidade de medida.

Paralelepípedo reto-retângulo

A medida de volume de um paralelepípedo reto-retângulo é igual ao produto das medidas do comprimento (c), da largura (a) e da altura (h).

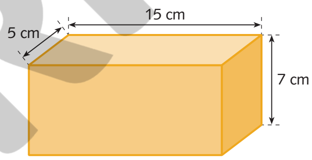
$$V_{\text{paralelepípedo}} = c \cdot a \cdot h$$

Cubo

O cubo é um caso particular de paralelepípedo, pois tem todas as arestas com a mesma medida de comprimento. Assim, para um cubo cuja medida de comprimento da aresta é a, temos:

$$V_{\text{cubo}} = a \cdot a \cdot a = a^3$$

31. Qual é a medida de volume deste paralelepípedo? **31.** 525 cm³



32. Calcule a medida de volume do cubo de cada item, conhecendo a medida de comprimento da aresta (a):

a) $a = 12$ cm **32. a)** 1 728 cm³
b) $a = 0{,}4$ m **32. b)** 0,064 m³
c) $a = 9$ cm **32. c)** 729 cm³

Para o capítulo 9: Equações do 2º grau

Equações do 1º grau

Equação é uma sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta pelo menos um valor desconhecido representado por uma letra denominada **incógnita**.

- $3x + 5 = 2$ é uma equação cuja incógnita é x.
- $5m - 2 = 7n$ é uma equação cujas incógnitas são m e n.
- $4b - 9 < 6$ **não** é uma equação, pois não é uma igualdade.

- $5 + 13 = 2 \cdot 9$ **não** é uma equação, pois não tem incógnita.

Quando o maior expoente de uma incógnita em uma equação é 1, a denominamos **equação do 1º grau**.

- $-1 - 0{,}4x = 7$ é uma equação de 1º grau.
- $x^2 + 1 = 0$ **não** é uma equação de 1º grau.

33. Em seu caderno, indique quais sentenças a seguir são equações: **33.** itens **a**, **c**

a) $3x + 5 = -0{,}4 + 2x$ c) $a + b + c = \frac{10}{7}$

b) $(-1) \cdot 32 = 10 - 42$ d) $2x^2 \leqslant 52$

34. Escreva, em seu caderno, quais são as afirmações verdadeiras. **34.** itens **b**, **d**, **e**

a) $2m + 1 \neq m$ é uma equação.

b) $35 = 2t - 0{,}5$ é uma equação de 1º grau.

c) $2m - 9 + j = 4$ é uma equação cujas incógnitas são m, j e 4.

d) As incógnitas da equação $x^2 + y = a$ são x, y e a.

e) $k^3 = \frac{9}{8}$ é uma equação, mas não de 1º grau.

Raiz de uma equação

Quando a incógnita de uma equação assume um valor que torna a sentença verdadeira, esse valor é chamado de **raiz** da equação.

Vamos considerar as equações $3x + 12 = 42$ e $5x = -10$. Para saber se o número 10 é raiz de uma delas, fazemos a substituição:

$3x + 12 = 42$

$3 \cdot 10 + 12 = 42$

$30 + 12 = 42$

$42 = 42 \rightarrow$ sentença verdadeira

Logo, 10 é raiz dessa equação.

$5x = -10$

$5 \cdot 10 = -10$

$50 = -10 \rightarrow$ sentença falsa

Logo, 10 não é raiz dessa equação.

O **conjunto universo** é formado por todos os números que uma incógnita pode assumir e é indicado por U.

As raízes da equação que pertencem ao conjunto universo são as soluções dessa equação e formam seu **conjunto solução**, que é indicado por S.

No exemplo anterior, se considerarmos que a incógnita da equação $3x + 12 = 42$ só assume valores naturais, temos $U = \mathbb{N}$. Como 10 é número natural e é raiz da equação, dizemos que ele é **solução** dessa equação e que o conjunto solução dessa equação é $S = \{10\}$.

35. Sendo $U = \mathbb{R}$, anote no caderno as equações cujo conjunto solução é $S = \{-1\}$. **35.** itens **a**, **d**

a) $-3 = 5x - 2x$ c) $5x - 14 = 12x$

b) $8x - 10 = -2$ d) $\frac{x}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$

36. Considere $U = \mathbb{R}$ e a equação $-8x + 23 = 23 + x$. Qual dos conjuntos a seguir é o conjunto solução dessa equação? **36.** alternativa **a**

a) $S = \{0\}$ c) $S = \{-2\}$

b) $S = \{1\}$ d) $S = \{-4\}$

Resolução de equações de 1º grau com uma incógnita

Quando duas equações têm o mesmo conjunto universo e as mesmas raízes, elas são chamadas de **equações equivalentes**.

Princípio aditivo das igualdades: quando adicionamos ou subtraímos uma mesma quantidade nos dois membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente à primeira.

Princípio multiplicativo das igualdades: quando multiplicamos ou dividimos por um mesmo número não nulo os dois membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente à primeira.

Para resolver uma equação, aplicamos os princípios aditivo e multiplicativo das igualdades, de modo a obter equações equivalentes mais simples que as iniciais, determinando, assim, as soluções da equação. Por exemplo:

$6x - 10 = 50$, sendo $U = \mathbb{R}$

$6x - 10 + 10 = 50 + 10$

$6x = 60$

$\frac{6x}{6} = \frac{60}{6}$

$x = 10$

$S = \{10\}$

- Na **atividade 33**, os estudantes devem identificar quais sentenças são equações. Para ampliar a atividade, peça que expliquem oralmente por que os **itens b** e **d** não são equações. Espera-se que observem que, a sentença do **item b**, não apresenta incógnita e que a sentença do **item d** é uma desigualdade.
- Na **atividade 34** os estudantes vão analisar afirmações relacionadas aos conceitos de equação, incógnita e equação de 1º grau. A cada item que os estudantes considerarem falso, peça que expliquem o erro da afirmação.

Raiz de uma equação

Esta retomada amplia o estudo das equações, focando especificamente o conceito de raiz de uma equação, sem ainda tratar da resolução de uma equação.

- Nas **atividades 35** e **36**, espera-se que os estudantes associem equações ao seu respectivo conjunto solução. Caso tenham dificuldades, oriente-os a substituir a incógnita de cada equação pelo número pertencente ao conjunto solução; se obtiverem uma igualdade, o conjunto solução corresponde à equação.

Resolução de equações de 1º grau com uma incógnita

Para finalizar a revisão acerca de equações de 1º grau, o foco agora é a resolução desse tipo de equação, explicando os princípios aditivo e multiplicativo das igualdades. Se achar necessário, apresente exemplos de equações para a turma resolver antes das atividades.

• Na **atividade 37**, os estudantes devem resolver as equações usando os princípios aditivo e multiplicativo das igualdades. Se observar algum equívoco, peça ao estudante que substitua na equação o valor encontrado e verifique se é mesmo raiz.

• A **atividade 38** trabalha o reconhecimento de afirmações verdadeiras por meio da resolução de cada equação ou pela substituição dos números pertencentes aos conjuntos solução. No **item a**, ao resolver a equação, os estudantes devem obter $x = -5{,}5$ e identificar que esse número não pertence ao conjunto solução (conjunto dos números naturais); portanto, a equação dada não tem solução (ou raiz).

Razão e proporção

A partir da retomada das ideias de razão e proporção, são discutidas noções fundamentais para desenvolver o tema da proporcionalidade. Além disso, é apresentada a propriedade fundamental das proporções, muito importante no estudo desse tema.

• Na **atividade 39**, os estudantes devem encontrar as razões pedidas, sendo fundamental ter atenção à ordem em que os valores das grandezas são citados, já que a razão será diferente de acordo com a ordem.

• Para resolver as **atividades 40** e **41**, é preciso utilizar a propriedade fundamental das proporções, sendo que, na **atividade 40**, ela será utilizada para conferir se os pares de razões formam uma proporção e, na **atividade 41**, ela será utilizada para encontrar um dos números que faltam na proporção.

Grandezas e proporcionalidade

A partir da explicação dos dois tipos de relação proporcional entre grandezas (direta e inversamente), é feita uma breve retomada do tema. Caso observe a necessidade, exponha alguns exemplos numéricos antes das atividades.

37. Sabendo que $U = \mathbb{R}$, resolva estas equações no caderno.

a) $5x + 10 = -10$ **37. a)** $S = \{-4\}$

b) $x - 12 = 29$ **37. b)** $S = \{41\}$

c) $2x = -2 + 6x$ **37. c)** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

38. Para $U = \mathbb{N}$, identifique quais afirmações são verdadeiras. **38.** itens **a**, **c**

a) O conjunto solução da equação $2x + 3 = -8 + x$ é $S = \varnothing$.

b) $S = \{10\}$ é o conjunto solução da equação $9 + 5x = 5{,}9$.

c) $S = \{12\}$ é o conjunto solução da equação $-48 = 3x - 7x$.

Para o capítulo 10: Grandezas e proporcionalidade

Razão e proporção

A **razão** entre dois números, a e b, com $b \neq 0$, nessa ordem, é dada por $\frac{a}{b}$.

Podemos expressar a razão na forma de fração, de porcentagem ou de número decimal.

Exemplo:

Se uma pessoa gastou R\$ 10,00 com bebidas e R\$ 50,00 com alimentos, podemos dizer que a razão entre o gasto com bebidas e comidas foi $\frac{10}{50}$, que equivale a $\frac{20}{100} = 20\% = 0{,}2$.

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Exemplos:

$$\frac{3}{10} = \frac{9}{30} \quad \text{e} \quad \frac{6}{15} = \frac{4}{10}$$

Propriedade fundamental das proporções

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou seja, dados a, b, c e d racionais não nulos, com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos $a \cdot d = b \cdot c$.

Por exemplo, usando as proporções citadas anteriormente, temos que:

$\frac{3}{10} = \frac{9}{30}$ $\qquad$ $\frac{6}{15} = \frac{4}{10}$

$3 \cdot 30 = 9 \cdot 10$ $\qquad$ $6 \cdot 10 = 4 \cdot 15$

39. Observe este quadro com os valores das 3 peças que compõem um produto.

Peça	Valor
Peça 1	R\$ 30,00
Peça 2	R\$ 3,00
Peça 3	R\$ 90,00
Total	R\$ 123,00

39. a) $\frac{30}{3} = 10$

39. b) $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

39. c) $\frac{90}{123} = \frac{30}{41}$

Escreva em seu caderno:

a) a razão entre o valor da peça 1 e o da peça 2.

b) a razão entre o valor da peça 2 e o da peça 1.

c) a razão entre o valor da peça 3 e o total.

40. Quais pares de razões são proporções? **40.** itens **a**, **c**

a) $\frac{11}{9}$ e $\frac{22}{18}$

b) $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{8}$

c) $\frac{216}{600}$ e $\frac{36}{100}$

d) $\frac{4}{7}$ e $\frac{10}{11}$

41. Determine o valor de x nas proporções sabendo que x é um número real diferente de zero.

a) $\frac{2}{3} = \frac{10}{x}$ **41. a)** $x = 15$

b) $\frac{8}{x} = \frac{4}{15}$ **41. b)** $x = 30$

c) $\frac{x}{100} = \frac{13}{26}$ **41. c)** $x = 50$

Grandezas e proporcionalidade

Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual à razão entre os valores correspondentes da segunda.

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda.

42. Respostas em *Orientações*.

42. Copie estes quadros no caderno e complete-os, considerando que as grandezas X e Y são diretamente proporcionais.

a)

X	Y
5	12
10	24
2,5	6
15	▬

b)

X	Y
0,2	16
1	▬
10	800
0,1	8

43. As grandezas M e N são inversamente proporcionais, conforme indicado neste quadro.

M	N
4	24
8	12
12	8
6	16

Qual será o valor de N quando M for 1? **43.** 96

Para o capítulo 11: Medidas de tendência central e pesquisa estatística

Médias

Muitas vezes, em uma pesquisa, podemos sintetizar as informações calculando a **média aritmética** ou a **média aritmética ponderada** e utilizar essas medidas para representar o conjunto de dados da pesquisa.

Acompanhe a situação.

Vamos analisar o quadro dos pontos obtidos por um estudante no vestibular:

Disciplina	Nota
Matemática	8
Redação	7
Inglês	5
História	9

Se a pontuação final for a média aritmética (em que todas as pontuações têm o mesmo peso), calculamos assim:

$$\frac{8+7+5+9}{4}=\frac{29}{4}=7{,}25$$

Se a pontuação final for a média ponderada considerando que Matemática tem peso 2, Redação tem peso 3 e as demais disciplinas, peso 1, calculamos assim:

$$\frac{2\cdot 8+3\cdot 7+1\cdot 5+1\cdot 9}{2+3+1+1}=\frac{51}{7}\cong 7{,}3$$

44. Analise este quadro com preços de um mesmo produto encontrado em diferentes mercados.

Mercado	Preço (em reais)
Mercado 1	36,80
Mercado 2	42,90
Mercado 3	39,90
Mercado 4	31,80
Mercado 5	40,00

Calcule, em seu caderno, o preço médio desse produto. **44.** R$ 38,28

45. Confira a pontuação que duas marcas de chocolate receberam de um cliente, considerando alguns critérios.

Critério	Marca A	Marca B
Preço (peso 2)	7	8
Sabor (peso 3)	8	7
Aroma (peso 1)	7	7

Em seu caderno, calcule a média ponderada para cada uma dessas marcas.

45. marca A: 7,5; marca B: 7,3

- Na **atividade 42**, espera-se que os estudantes identifiquem, em cada item, a relação entre os valores das grandezas X e Y para completar a célula com o valor que falta. Vale destacar que, em ambos os casos, as grandezas são diretamente proporcionais. Em caso de dúvida, oriente-os a usar a propriedade fundamental das proporções ou questione-os, por exemplo, no **item b**: "Por quanto eu devo multiplicar o 10 para obter 800?". Espera-se que os estudantes respondam que é preciso multiplicar por 80, então aproveite para levá-los a perceber que em todas as linhas do quadro do **item b** o valor de Y corresponde ao produto do valor de X por 80.

Resposta do **item a** da **atividade 42**:

X	Y
5	12
10	24
2,5	6
15	36

Resposta do **item b** da **atividade 42**:

X	Y
0,2	16
1	80
10	800
0,1	8

- A **atividade 43** apresenta um quadro de valores das grandezas M e N, inversamente proporcionais, para que os estudantes descubram o valor de N para um valor de M dado. Se eles tiverem dificuldades, faça questionamentos, como: "Quando o valor de M é 4, o valor de N é 24; quando o valor de M for 1, é esperado que o valor de N seja maior ou menor que 24?". Nesse caso, como as grandezas são inversamente proporcionais e o valor de M diminuiu, de 4 para 1, necessariamente o valor de N aumentará e será maior que 24.

Médias

Nesta revisão, pretende-se focar as ideias de média aritmética e média aritmética ponderada. Se considerar adequado, faça juntamente com os estudantes os exemplos apresentados para que fique mais clara a diferença entre essas médias.

- Nas **atividades 44** e **45**, os estudantes devem calcular, respectivamente, média aritmética e média aritmética ponderada com base em dados apresentados em quadros. Se necessário, chame a atenção da turma para o fato de que, nas médias aritméticas ponderadas da **atividade 45**, o numerador corresponde à soma dos produtos da nota de cada critério pelo respectivo peso, e o denominador corresponde à soma dos pesos.

Gráficos

Neste momento, é feita uma breve revisão dos principais tipos de gráficos estatísticos por meio de exemplos de gráficos construídos com base em dados reais.

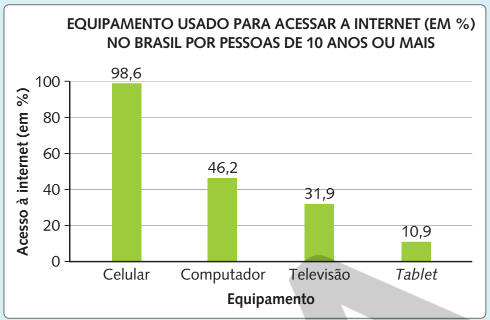
• Na **atividade 46**, há mais de uma interpretação possível para cada gráfico; por isso, ao final da atividade, incentive os estudantes a compartilhar suas interpretações com as dos colegas, de modo a complementar e até mesmo refinar suas respostas.

Para o capítulo 12: Gráficos estatísticos

Gráficos

Gráfico de barras

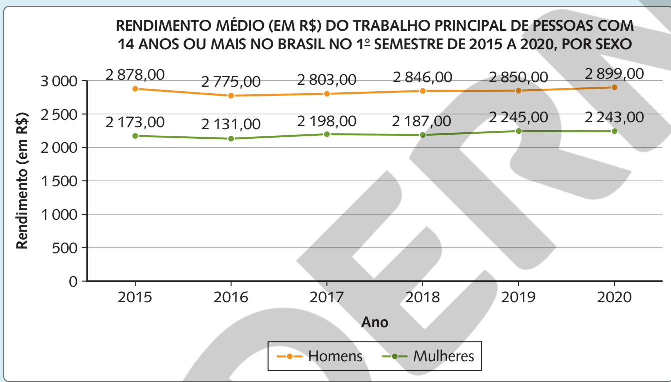
Esse tipo de gráfico é utilizado principalmente para comparar informações. Podemos ter gráficos de barras verticais (exemplo a seguir) ou barras horizontais.



Dados obtidos em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101794_informativo.pdf. Acesso em: 4 jul. 2022.

Gráfico de segmentos

Esse tipo de gráfico é usado quando queremos observar a variação de algum fato ao longo do tempo.

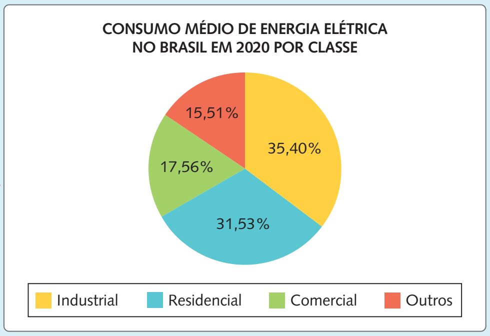


Dados obtidos em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/5436. Acesso em: 4 jul. 2022.

Gráficos de setores

Esse tipo de gráfico é usado quando queremos representar partes de um total.

46. Espera-se que os estudantes interpretem: do gráfico de barras, que o equipamento mais usado para acessar a internet é o celular; do gráfico de segmentos, que os salários das mulheres são muito menores que os salários dos homens; do gráfico de setores, que a maior parte do consumo de energia elétrica no Brasil é industrial, mas que o percentual do consumo residencial também é elevado.

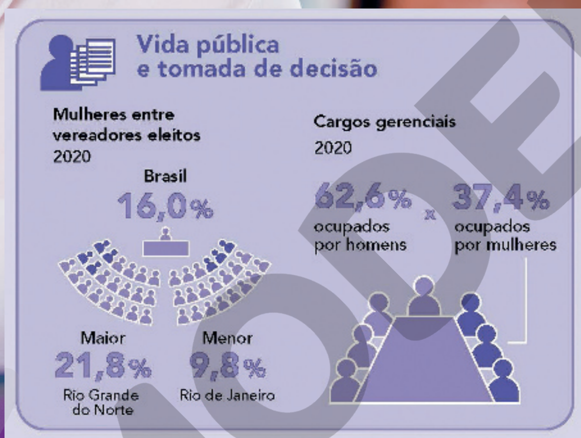


Dados obtidos em: https://www.epe.gov.br/pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/consumo-de-energia-eletrica. Acesso em: 4 jul. 2022.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

46. O que é possível interpretar de cada gráfico dado como exemplo?

Unidade 1



Infográfico disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101784_informativo.pdf. Acesso em: 4 jul. 2022.

As condições de vida e de trabalho são iguais para homens e mulheres? O que é possível afirmar com base no infográfico acima? Ao final do estudo desta Unidade, você responderá a essa e a outras questões.

Abertura da Unidade

BNCC:

- Competências gerais 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

- Motivar a turma a estudar os conteúdos da Unidade 1.
- Verificar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre a interpretação de dados apresentados na forma de porcentagem.
- Trazer à luz o problema da desigualdade de gênero.

Proponha aos estudantes que analisem os dados apresentados no infográfico e comentem sobre o que acharam mais importante. Após eles se manifestarem, informe que, na política, mesmo as mulheres sendo a maioria entre os eleitores brasileiros, elas ainda ocupam apenas uma pequena parte dos cargos eletivos. Em relação à ocupação de cargos gerenciais, eles devem perceber que, de cada 3 cargos gerenciais, aproximadamente 2 são ocupados por homens. Uma discussão mais ampla sobre a desigualdade de gênero será realizada na seção *É hora de extrapolar* proposta ao final desta Unidade e, por isso, você pode deixar para explorar os dados deste infográfico mais adiante.

As questões propostas favorecem o desenvolvimento das competências gerais **7** e **9** e da competência específica **8** da BNCC, uma vez que promovem o diálogo e a argumentação com base em dados confiáveis.

No **capítulo 1**, será retomado o estudo dos conjuntos numéricos e será introduzido o conjunto dos números reais. Já, no **capítulo 2**, serão estudadas a potenciação e a radiciação e suas propriedades. Por fim, no **capítulo 3**, serão estudados os sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Na seção *É hora de extrapolar*, os estudantes terão a oportunidade de pesquisar e analisar dados sobre a desigualdade de gênero. Na sequência, farão uma pesquisa sobre personalidades femininas de destaque. Por fim, eles vão planejar e produzir um *podcast* sobre a personalidade escolhida.

CAPÍTULO 1 – CONJUNTOS NUMÉRICOS

Trocando ideias

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Abordar sobre os cuidados que se deve ter, em dias chuvosos, para se proteger contra os raios.
- Levantar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre os números inteiros e racionais.
- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre os números irracionais.

Tema contemporâneo transversal:

SAÚDE

Inicie a aula explicando à turma que raios são descargas elétricas de grande intensidade que conectam o solo e as nuvens de tempestade na atmosfera. Comente também sobre a diferença entre raio, relâmpago e trovão. Explique que os relâmpagos são todas as descargas elétricas geradas por nuvens de tempestades, que se conectam ou não ao solo. Já os raios são somente as descargas que se conectam ao solo. Os trovões, por sua vez, são os sons produzidos pelo rápido aquecimento e expansão do ar na região da atmosfera onde a corrente elétrica do raio circula.

Após esclarecer esses conceitos para a turma, discuta as probabilidades de uma pessoa ser atingida por um raio. É importante que eles percebam o quanto aumenta essa probabilidade quando a pessoa se encontra em uma área descampada. Diga que, ao ser atingida por um raio, a pessoa sofre queimaduras em diversas partes do corpo, podendo causar parada cardíaca e respiratória. Após esse momento inicial, proponha que conversem sobre a questão proposta no primeiro item. Espera-se que eles respondam que devem evitar ficar em áreas descampadas ou embaixo de árvores ou próximo a postes, cercas de arame, linhas férreas e topo de prédios, por exemplo.

Capítulo 1

Conjuntos numéricos

SAÚDE

Trocando ideias

O Brasil é o país em que mais caem raios no mundo. Segundo o Grupo de Eletricidade Atmosférica (ELAT), são 78 milhões de raios todos os anos.


DIOGO ZANATTA/FUTURA PRESS

Raios caindo em Passo Fundo (RS). Foto de 2021.

A probabilidade de uma pessoa ser atingida por um raio é de 0,000001, porém, se a pessoa estiver em uma área descampada, essa probabilidade aumenta para 0,001.

- Em dias chuvosos, o que devemos fazer para nos proteger dos raios? Converse com os colegas.
- Podemos afirmar que o número 78 000 000 é um número inteiro? E racional?
- Podemos afirmar que os números 0,000001 e 0,001 são números inteiros? E racionais?
- Você conhece algum número que não seja racional? Qual?

Neste capítulo, vocês vão estudar os **números irracionais**. Antes, porém, vamos retomar alguns conceitos e propriedades dos conjuntos numéricos já estudados.

Trocando ideias: primeiro item: resposta pessoal; segundo item: sim, o número 78 000 000 é inteiro e racional; terceiro item: os números 0,000001 e 0,001 não são inteiros, mas são racionais; quarto item: respostas pessoais.

O segundo e o terceiro item possibilitam levantar os conhecimentos adquiridos em anos anteriores sobre os números inteiros e racionais. Incentive-os a justificar suas respostas. Você pode ampliar a proposta e solicitar a alguns estudantes que deem exemplos de números que pertencem ao conjunto dos números inteiros e que pertencem ao conjunto dos números racionais. Espera-se também que eles reconheçam que todo número inteiro é um número racional, mas nem todo número racional é um número inteiro. Por fim, questione-os no último item sobre a existência de números que não sejam racionais e verifique se eles conhecem algum.

As questões incentivam a interação e o diálogo, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **9** e a competência específica **8** da BNCC. Além disso, os estudantes mobilizam conceitos das Unidades temáticas *Números* e *Probabilidade e estatística*, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência específica **3**.

1 Números naturais

Para contar uma quantidade de objetos, pessoas, animais etc., usamos os **números naturais**. O **conjunto dos números naturais** representado por $\mathbb{N}$ é dado por:

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...\}}$$

O zero é o menor número natural. Todo número natural tem um **sucessor**; desse modo, dizemos que a sequência dos números naturais é infinita. Todo número natural, com exceção do zero, tem um **antecessor**.

Observe:

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Os números naturais estão presentes em diversas situações e têm diferentes funções.

Podem indicar a posição de alguém em uma competição, a quantidade de objetos em um local, um número de telefone, um dia do mês no calendário etc.

Sequência numérica

Uma **sequência numérica** é uma sequência cujos elementos são números escritos em certa ordem. A sequência pode ser **infinita**, na qual usamos reticências para indicar que ela continua indefinidamente. Ou pode ser **finita**, na qual listamos todos os elementos. Cada um dos elementos da sequência é chamado de **termo** da sequência.

Podemos expressar algebricamente uma sequência numérica por meio da sua **lei de formação**, que é uma regra que mostra como a sequência progride ou é formada. Analise os exemplos.

a) Uma sequência infinita na qual $a_1 = 0$ e $a_{n+1} = a_n + 3$, para todo n inteiro positivo.

Para $n = 1$, temos: $a_{1+1} = a_1 + 3 \Rightarrow a_2 = 0 + 3 = 3$

Para $n = 2$, temos: $a_{2+1} = a_2 + 3 \Rightarrow a_3 = 3 + 3 = 6$

Para $n = 3$, temos: $a_{3+1} = a_3 + 3 \Rightarrow a_4 = 6 + 3 = 9$

Para $n = 4$, temos: $a_{4+1} = a_4 + 3 \Rightarrow a_5 = 9 + 3 = 12$

Essa lei de formação gera a sequência (0, 3, 6, 9, 12, ...), que é a sequência de múltiplos de 3.

Sequência numérica

Introduza as notações a_1, a_2, a_3, ..., utilizadas para representar os termos de uma sequência. Chame a atenção para o fato de que começamos por a_1, pois é o primeiro termo, sendo possível também a indicação do primeiro termo como a_0.

(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Números naturais

BNCC:

- Habilidades EF08MA10 e EF08MA11.

Objetivos:

- Recordar o conjunto dos números naturais.
- Identificar a regularidade de sequências numéricas e escrever algebricamente o padrão.

Justificativa

Recordar o conjunto dos números naturais é importante para que os estudantes possam avançar no estudo dos demais conjuntos numéricos e perceber como eles estão relacionados.

A identificação de regularidades de sequências numéricas e a escrita algébrica de padrões possibilitam o desenvolvimento das habilidades **EF08MA10** e **EF08MA11**.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes: "O que são números naturais? Em que situações cotidianas eles são utilizados? O que é antecessor e sucessor de um número natural?". Incentive a participação da turma.

Para as aulas iniciais

Recorde os conceitos mapeados na dinâmica inicial. Em seguida, escreva na lousa alguns números que são naturais e outros que não são. Depois, peça aos estudantes que identifiquem os números naturais e determinem o antecessor e o sucessor de cada um. Você também pode explorar os vários usos dos números naturais (contagem, medida, ordem e código).

Inicie o estudo dos números naturais retomando um pouco da história dos números. Comente que o zero foi o último algarismo a ser inventado, pois está relacionado à ideia de ausência, que demorou a ser compreendida. Por exemplo, como o número 102 possui uma centena, duas unidades e nenhuma dezena, lemos "cento e dois", sem pronunciar a dezena ausente.

Comente que é possível ter uma sequência na qual a lei de formação seja independente do termo anterior, por exemplo, $a_n = 2n$, para $n \geqslant 0$, que é a sequência dos números naturais pares. Nesse caso, a fórmula é tida como a **fórmula do termo geral da sequência**.

Nas sequências apresentadas, a lei de formação é feita de tal forma que cada valor da sequência é obtido em função do termo anterior ou dos termos anteriores.

Para a sequência de Fibonacci, se julgar pertinente, apresente a lei de formação utilizando as notações de sequências: para $a_1 = 1, a_2 = 1$ e n natural tal que $n > 2$. Assim, a lei de formação da sequência pode ser dada por $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

b) Uma sequência infinita na qual $a_1 = 0$ e $a_{n+1} = a_n + 7$, para todo n inteiro positivo.

Para $n = 1$, temos: $a_{1+1} = a_1 + 7 \Rightarrow a_2 = 0 + 7 = 7$

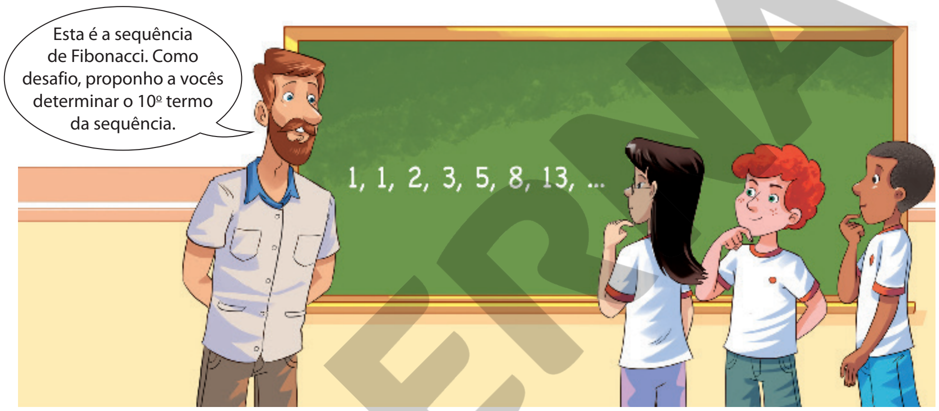
Para $n = 2$, temos: $a_{2+1} = a_2 + 7 \Rightarrow a_3 = 7 + 7 = 14$

Para $n = 3$, temos: $a_{3+1} = a_3 + 7 \Rightarrow a_4 = 14 + 7 = 21$

Para $n = 4$, temos: $a_{4+1} = a_4 + 7 \Rightarrow a_5 = 21 + 7 = 28$

Essa lei de formação gera a sequência (0, 7, 14, 21, 28, ...), que é a sequência de múltiplos de 7.

Eventualmente são dados os primeiros termos de uma sequência, mas não a sua lei de formação, e, mesmo assim, podemos determinar os demais termos dessa sequência. Observe a situação a seguir.



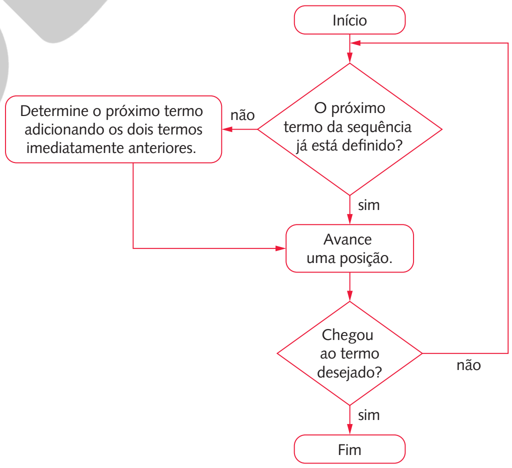
ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Para expor ao professor a maneira como pensaram, os estudantes montaram este fluxograma.

Após exporem o fluxograma para o professor, eles disseram que bastaria fazer o que é solicitado para determinar a sequência até o termo desejado.

- Usando o fluxograma, determine os 10 primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Item: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 Escreva o antecessor e o sucessor de cada número.

a) 17 **1. a)** antecessor: 16; sucessor: 18

b) 999 **1. b)** antecessor: 998; sucessor: 1 000

c) 1 000 **1. c)** antecessor: 999; sucessor: 1 001

d) 12 989 **1. d)** antecessor: 12 988; sucessor: 12 990

2 Responda às questões no caderno.

a) Quais números naturais são maiores que o sucessor de 3 e menores que o antecessor de 10? **2. a)** 5, 6, 7 e 8

b) Existe algum número natural maior que o sucessor de 10 e menor que o antecessor de 3? **2. b)** não

3 Em cada sequência numérica, determine os termos que faltam representados por ◆.

a) 2, 4, 6, ◆, ◆, ◆, ... , na qual $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ e $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, em que $n > 2$ **3. a)** 10; 16; 26

b) 1, 5, 9, 13, 17, 21, ◆, ◆, ... , na qual $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ e $a_n = a_1 + (n-1) \cdot (a_{n-1} - a_{n-2})$, em que $n > 2$ **3. b)** 25; 29

4 No caderno, escreva os cinco primeiros termos de uma sequência numérica recursiva e troque com um colega para que ele construa um fluxograma que determine a sequência até o 10º termo. Faça o mesmo com a sequência dele. **4.** Respostas pessoais.

2 Números inteiros

No fim da tarde de determinado dia de julho, a medida de temperatura na cidade de São Joaquim (SC) era 5 °C. No início da noite, essa medida de temperatura caiu 8 °C. Qual foi a medida de temperatura registrada após essa queda?

Para responder a essa pergunta, podemos fazer a seguinte subtração:

$$5 - 8 = -3$$

Isso significa que a medida da temperatura chegou a três graus Celsius abaixo de zero, sendo indicada por um número negativo (–3). O –3 é um exemplo de **número inteiro**.

O **conjunto dos números inteiros** representado por $\mathbb{Z}$ é dado por:

$$\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Observe que todo número natural é também um número inteiro. Todo número inteiro tem um sucessor e um antecessor; por exemplo, –3 é o sucessor de –4 e –1 é o antecessor de 0.

Turistas em São Joaquim, no inverno de 2021. O termômetro registrou uma medida de temperatura abaixo ou acima de zero grau?
Resposta: abaixo de zero grau (–2 °C)

• Para a **atividade 2**, sugira aos estudantes que façam uso da reta numérica para identificar os números.

Números inteiros

Objetivo:

Recordar o conjunto dos números inteiros.

Justificativa

Recordar o conjunto dos números inteiros é importante, dentre outras coisas, para que os estudantes percebam que todos os elementos do conjunto $\mathbb{N}$ são também elementos do conjunto $\mathbb{Z}$, ou seja, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. Além disso, permite avançar para o estudo dos demais conjuntos numéricos.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes: "O que são números inteiros? Em que situações cotidianas eles são utilizados? Qual é a relação entre os números inteiros e os números naturais? O que é oposto ou simétrico de um número inteiro?". Incentive a participação da turma.

Para as aulas iniciais

Na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*, há uma revisão sobre os números naturais e inteiros. Peça aos estudantes que leiam essa revisão e façam as **atividades 1**, **2** e **3**. Discuta cada uma das atividades com a turma e tire as dúvidas remanescentes.

Comente que o uso da letra $\mathbb{Z}$ para representar o conjunto dos números inteiros se deve à palavra alemã *Zahl*, que significa "número".

Explique que os números inteiros são formados pelos números naturais (inclusive o zero) e pelos números naturais acrescidos do sinal negativo, ou seja, são compostos de valores positivos, negativos e do elemento neutro zero. Chame a atenção para o fato de o zero ser o elemento neutro da adição.

Retome a ideia de extensão de conjuntos e de propriedade de fechamento, comentando que os inteiros são fechados para a adição, a subtração e a multiplicação e que, no entanto, é necessário estender o conjunto quando envolve a operação de divisão.

Se julgar adequado, apresente a representação dos conjuntos com a utilização de diagramas, mostrando que o conjunto dos naturais está inscrito, ou contido, no conjunto dos inteiros.

Se julgar conveniente, explore as notações e os subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}_+, \mathbb{Z}_-, \mathbb{Z}^*_+, \mathbb{Z}^*_-$.

• Na **atividade 5**, chame a atenção para o fato de que não é porque um número está na forma de fração que não é inteiro ou natural. Dê exemplos de frações aparentes.

• A **atividade 6** permite aos estudantes refletir sobre propriedades que valem em determinado conjunto, mas não em outro. Amplie essa atividade solicitando que, para as afirmações falsas, apresentem um contraexemplo.

• Na **atividade 7**, se julgar necessário, oriente os estudantes a usar a reta numérica. A ordenação numérica é um assunto com o qual os estudantes costumam ter dificuldades. Para pensar na ordenação, utilize exemplos sobre medidas de altura e profundidade, como os andares de um prédio, sobre saldos positivos e negativos ou até mesmo sobre as eras antes de Cristo (a.C.) e depois de Cristo (d.C.).

• Na **atividade 8**, chame a atenção para o fato de que, para os números inteiros negativos, quanto mais próximo do zero, maior será o valor. Nos **itens c** e **d**, ressalte que a representação dentro do conjunto dos números inteiros é a mesma que teríamos se considerássemos o conjunto dos números naturais. A diferença está no intervalo a ser considerado.

• Explore a **atividade 9**, trazendo a ideia das operações com números inteiros. Reforce a compreensão das operações dentro desse conjunto, fugindo de regras decoradas.

• Na **atividade 10**, comente que o termo "entre" não considera os extremos. Se julgar pertinente, no **item a**, apresente a representação simbólica $-5 < x < 3$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

5 Considere os números a seguir e responda às questões.

$$5; -8; 0; 14; -100; 57; -18; \frac{2}{3}; -0{,}4; -1$$

a) Quais são números naturais? **5. a)** 0, 5, 14, 57

b) Quais são números inteiros? **5. b)** –100, –18, –8, –1, 0, 5, 14, 57

c) Todo número natural é um número inteiro? **5. c)** sim

6 Avalie as afirmações a seguir e copie as verdadeiras em seu caderno.

a) Há sempre um número inteiro entre dois números inteiros. **6. a)** falsa

b) A diferença de dois números inteiros é sempre um número inteiro. **6. b)** verdadeira

c) Existe número natural que não é número inteiro. **6. c)** falsa

7 Escreva o que se pede:

a) os cinco menores números naturais ímpares; **7. a)** 1, 3, 5, 7 e 9

b) os números inteiros negativos maiores que –5; **7. b)** –4, –3, –2 e –1

c) três números inteiros menores que –20; **7. c)** Exemplo de resposta: –21, –22 e –23

d) os números naturais maiores que –3 e menores que 7. **7. d)** 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6

8 Responda às questões abaixo considerando a sequência dos números inteiros.

a) Qual é o sucessor de 100? **8. a)** 101

b) Qual é o sucessor de –30? **8. b)** –29

c) Se n é um número inteiro, qual é a expressão que representa seu sucessor? **8. c)** $n + 1$

d) Se a é um número inteiro, qual é a expressão que representa seu antecessor? **8. d)** $a - 1$

9 O saldo bancário da conta de Pedro estava negativo em R$ 380,00. Ele fez um depósito e o novo saldo passou a ser R$ 970,00. Qual foi o valor do depósito realizado por Pedro? **9.** R$ 1 350,00

10 Considere a sequência dos números inteiros a seguir:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

a) Há quantos números inteiros entre –5 e 3? **10. a)** há sete números inteiros: –4, –3, –2, –1, 0, 1 e 2

b) Qual é o maior número inteiro negativo dessa sequência? **10. b)** –1

3 Números racionais

Acompanhe a situação a seguir.

Uma peça de tecido medindo 75 metros de comprimento vai ser dividida em 10 partes iguais. Quantos metros terá cada uma dessas partes?

Para responder a essa pergunta, podemos efetuar a divisão:

$$75 : 10 = 7{,}5$$

Portanto, cada uma dessas partes terá 7,5 metros de medida de comprimento.

Os números obtidos pela divisão de dois números inteiros, em que o divisor é diferente de zero, podem ser escritos na forma de fração ou na forma decimal. Confira estes exemplos:


TATIANA GORDIEVSKAIA/SHUTTERSTOCK

a) $\frac{75}{10} = 7{,}5$

b) $-\frac{3}{8} = -0{,}375$

c) $\frac{4}{2} = 2$

d) $\frac{13}{3} = 4{,}333...$

e) $-\frac{1}{25} = -0{,}04$

f) $-\frac{45}{9} = -5$

Números que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero, são chamados de **números racionais**.

O **conjunto dos números racionais** é indicado por $\mathbb{Q}$ e pode ser representado da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, \text{ em que } a \text{ e } b \text{ são números inteiros e } b \neq 0\right\}$$

Observações

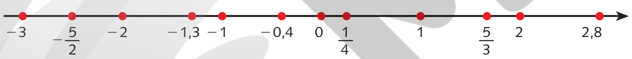
1. Todo número inteiro é um número racional, ou seja, pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Analise estes exemplos.

a) $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4}$

b) $-5 = -\frac{5}{1} = -\frac{20}{4} = -\frac{35}{7}$

c) $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \frac{0}{4}$

2. Os números racionais podem ser representados por pontos na reta numérica.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Entre dois números racionais quaisquer sempre existe outro número racional. Por exemplo, entre 1,4 e 1,6 há infinitos números racionais. Alguns deles são: 1,45; 1,48; 1,5; 1,52 e 1,555.

A observação **3** explora a ideia de densidade do conjunto $\mathbb{Q}$. Se achar oportuno, represente os números do exemplo na reta numérica para que os estudantes percebam que, entre 2 números racionais, sempre há um número racional, em um processo sem fim, independentemente do intervalo observado.

(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Números racionais

BNCC:

- Competências gerais 1, 3 e 4 (as descrições estão na página VI).
- Competência específica 1 (a descrição está na página VII).
- Habilidades EF08MA04 e EF08MA05.

Objetivos:

- Recordar o conjunto dos números racionais.
- Resolver problemas que envolvam o cálculo de porcentagem.
- Identificar uma dízima periódica e obter sua fração geratriz.

Tema contemporâneo transversal:

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Justificativa

O quociente de 2 números inteiros nem sempre é um número inteiro e por isso é importante ampliar o conjunto $\mathbb{Z}$, obtendo o conjunto $\mathbb{Q}$. Recordar o conjunto dos números racionais possibilita aos estudantes perceber a necessidade dessa ampliação e como os conjuntos numéricos estudados se relacionam.

Resolver problemas que envolvam porcentagens é útil para atuarmos em situações cotidianas e favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA04**.

O estudo do conjunto dos números racionais traz à tona as dízimas periódicas e as frações geratrizes correspondentes a elas. Obter essas frações é importante para verificar que esses números são racionais e favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA05**.

Mapeando conhecimentos

Proponha aos estudantes que identifiquem números racionais em jornais, revistas, embalagens ou folhetos. Depois, reúna-os em grupos para discutir o significado dos números encontrados e a maneira como foram representados. Por fim, questione se sabem definir números racionais e como se relacionam com os números naturais e os números inteiros.

Para as aulas iniciais

Peça aos estudantes que leiam a revisão sobre números racionais da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* e façam as **atividades 4, 5** e **6**. Discuta-as com a turma e tire as dúvidas remanescentes.

Representação decimal dos números racionais

Se julgar conveniente, retome o algoritmo da divisão, sanando eventuais dúvidas, de modo que não se torne um obstáculo na aprendizagem dos números racionais. É importante que os estudantes compreendam o algoritmo, dando significado aos passos para executá-lo; por exemplo, ao efetuar 7 : 10, precisamos colocar o algarismo 0 e a vírgula no quociente, pois, ao dividir 7 unidades por 10, não obtemos unidade.

Ao trabalhar a representação decimal dos números racionais, é importante que fique claro para os estudantes que tal representação será finita ou infinita periódica. Pode-se comentar com eles a possibilidade de decidir se a representação decimal de uma fração será finita ou infinita periódica sem ter que efetuar a divisão.

A representação decimal de uma fração será finita quando for possível obter uma fração equivalente à fração original cujo denominador seja uma potência de 10. Por exemplo, a representação decimal das frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{25}$ e $\frac{7}{200}$ é finita, pois:

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25;$

$\frac{1}{25} = \frac{4}{100} = 0{,}04;$

$\frac{7}{200} = \frac{35}{1\,000} = 0{,}035$

A representação decimal de uma fração será infinita e periódica quando não for possível obter uma fração equivalente à fração original cujo denominador seja uma potência de 10. Por exemplo, a representação decimal das frações $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{7}{11}$ é infinita e periódica. Nesse caso, proponha aos estudantes que tentem encontrar uma fração equivalente a essas, cujo denominador seja uma potência de 10 para que percebam que isso não é possível.

Outra caracterização para esse critério é a seguinte:

- se, ao decompor em fatores primos, o denominador da fração for somente potências de 2, de 5 ou de ambas, então a representação decimal da fração será finita;
- se, ao decompor em fatores primos, o denominador da fração for alguma potência com base diferente de 2 ou de 5, então a representação decimal da fração será infinita e periódica.

Comente sobre a dízima periódica composta, em que o número da parte decimal que não se repete é chamado de **anteperíodo**.

Representação decimal dos números racionais

Os números racionais na forma de fração podem ser representados na forma decimal.

Observe os exemplos a seguir.

a) $\frac{4}{5} = 4 : 5$

```
 4 |_5__
40   0,8
 0
```

Portanto: $\frac{4}{5} = 0{,}8$

b) $\frac{7}{10} = 7 : 10$

```
 7 |_10_
70   0,7
 0
```

Portanto: $\frac{7}{10} = 0{,}7$

c) $\frac{22}{8} = 22 : 8$

```
22 |_8___
 60  2,75
  40
   0
```

Portanto: $\frac{22}{8} = 2{,}75$

d) $\frac{7}{3} = 7 : 3$

```
7  |_3______
10   2,333...
 10
  10
   1
```

Portanto: $\frac{7}{3} = 2{,}333...$

Na divisão de 7 por 3, o algarismo 3 do quociente continuará se repetindo infinitamente. O número decimal 2,333... é uma **dízima periódica** e o algarismo 3 que se repete é chamado de **período**.

A dízima 2,333... é uma **dízima periódica simples**, pois o período (3) aparece logo após a vírgula. Podemos também representar a dízima 2,333... colocando um traço sobre o período, ou seja: $2{,}333... = 2{,}\overline{3}$

Agora, observe um exemplo em que o período da dízima periódica se inicia a partir do algarismo da segunda casa decimal.

$\frac{29}{90} = 29 : 90$

```
29  |_90______
290   0,322...
 200
  200
   20
```

Portanto: $\frac{29}{90} = 0{,}322...$

Na divisão de 29 por 90, o algarismo 2 do quociente continuará se repetindo infinitamente. O número decimal 0,3222... é uma dízima periódica e o período é o algarismo 2 (algarismo que se repete).

A dízima 0,3222... é uma **dízima periódica composta**, uma vez que, entre a vírgula e o período (2), existe uma parte não periódica, o algarismo 3.

Podemos representar a dízima 0,3222... por $0{,}3\overline{2}$.

Um pouco de história

Faça a atividade no caderno.

Matemática e música

O matemático e filósofo grego Pitágoras (*c.* 570 a.C.-*c.* 496 a.C.) traçou uma ligação direta entre Matemática e música ao construir, com uma corda e dois cavaletes, um instrumento que ficou conhecido como "monocórdio de Pitágoras". Com base em observações, ele percebeu que o som (as notas musicais) dependia da medida de comprimento da corda que o produzia.

A divisão da corda em medidas de comprimento diferentes possibilitou, posteriormente, a criação de uma escala com sete notas: dó, ré, mi, fá, sol, lá e si, que formam a escala pitagórica.

c.: abreviação do latim *circa*, que significa "por volta de". Antes de um ano, indica que a data apontada é aproximada.

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$

Atividade

Com o auxílio de uma calculadora, escreva em seu caderno os números desse quadro na forma decimal. Nas dízimas periódicas em que o período é maior do que a quantidade de dígitos mostrados na calculadora, escreva o valor aproximado com oito casas decimais.

Um pouco de história: 1; $\frac{8}{9} = 0,\overline{8}$; $\frac{64}{81} \simeq 0,79012347$; $\frac{3}{4} = 0,75$; $\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$; $\frac{16}{27} = 0,\overline{592}$; $\frac{128}{243} \simeq 0,52674897$; $\frac{1}{2} = 0,5$

Cálculo de porcentagem

Em nosso cotidiano, usamos porcentagem em diversas situações. Confira alguns exemplos.

ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

O boxe *Um pouco de história* trata da relação entre Matemática e música por meio do instrumento conhecido como "monocórdio de Pitágoras". É importante que os estudantes observem que cada nota musical está associada a um número racional e reflitam como a Matemática está presente em diversas situações e áreas do conhecimento. Momentos como esse podem colaborar para o desenvolvimento das competências gerais **1**, **3** e **4** e da competência específica **1**.

Cálculo de porcentagem

No cálculo de porcentagens, se necessário, relembre a multiplicação com frações. Se achar interessante, explique também sobre o uso de decimais no cálculo de porcentagens.

As porcentagens estão presentes no dia a dia ao falarmos sobre compras à vista ou a prazo. Podemos sempre nos deparar com situações de descontos, acréscimos e juros. Converse com a turma a respeito dessas possibilidades. Pergunte aos estudantes se eles conseguem dar um exemplo em que perceberam o uso da porcentagem pelos responsáveis durante uma compra ou algum exemplo que eles mesmos tenham vivenciado. É comum encontrarmos cartazes e anúncios como “tudo na loja com até 50% de desconto”. Pergunte a eles se compreendem o papel da palavra “até” nesse contexto, verificando se entendem que não são todos os produtos que recebem essa porcentagem de desconto. Explique que, quando for necessário comprar um produto ou pagar por um serviço, é sempre interessante perguntarmos sobre descontos e sobre as condições do pagamento.

A situação que envolve a empresa na qual Marcos trabalha pode favorecer o desenvolvimento da habilidade **EF08MA04**.

Sugestão de atividade extra

Se julgar adequado, sugira aos estudantes que realizem mentalmente o cálculo das seguintes porcentagens:

- 1% de R$ 200,00;
- 5% de R$ 200,00;
- 10% de R$ 320,00;
- 10% de R$ 123,00;
- 25% de R$ 1000,00;
- 30% de R$ 250,00;
- 12% de R$ 300,00.

Uma **porcentagem** indica a parte de um todo que contém 100 partes iguais. Por exemplo, representar 13% é o mesmo que se referir a 13 partes de 100 que formam o todo.

Uma porcentagem pode ser escrita na forma de fração, ou seja, 13% pode ser escrito como $\frac{13}{100}$.

Quando queremos calcular, de maneira rápida, o valor referente à porcentagem de um total, basta multiplicar a porcentagem (ou sua fração equivalente) pelo valor total. Analise os exemplos a seguir.

- Para calcular 13% de 730, basta multiplicar 730 por 13%, ou seja, multiplicar 730 por $\frac{13}{100}$.

$$730 \cdot \frac{13}{100} = \frac{9\,490}{100} = 94{,}9$$

Dessa forma, concluímos que 13% de 730 é 94,9.

- No início do estudo foi citada a promoção de um carro. Podemos calcular o desconto de 20% concedido na compra do carro que custa R$ 20000,00 da seguinte maneira:

$$\frac{20}{100} \cdot 20\,000 = \frac{400\,000}{100} = 4\,000$$

Dessa forma, concluímos que o desconto é de R$ 4000,00 e que o preço do carro será de R$ 16000,00 após aplicado o desconto.

- Para determinarmos a porcentagem de desconto na promoção da televisão, comparamos o preço após o desconto com o preço inicial. Assim:

$$\frac{600}{1\,200} = \frac{50}{100} = 50\%$$

Dessa forma, concluímos que a televisão realmente está sendo vendida pela metade do preço.

Agora, acompanhe a situação.

Marcos trabalha em uma empresa que compra e vende móveis usados. Para impulsionar as vendas, ele e a gerente prepararam um evento para a exposição dos móveis.

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Se possível, proponha outras atividades para serem resolvidas usando um *software* de planilha eletrônica. Comente que o sinal de multiplicação é dado pelo asterisco (*).

Para fazer tudo em tempo hábil, Marcos resolveu dispor todos os valores em uma planilha eletrônica. Ele organizou os dados em 4 colunas, da seguinte maneira:

- Na primeira coluna (coluna A), ele colocou os valores pagos por cada móvel (valores de compra).

A1 | *Fórmula*

	A	B	C	D
1	Valor de compra	Porcentagem para o aumento	Valor do aumento	Valor de venda
2	R$ 100,00			
3	R$ 80,00			
4	R$ 50,00			
5	R$ 70,00			
6	R$ 134,00			
7	R$ 128,00			
8	R$ 154,00			
9	R$ 85,00			
10	R$ 40,00			

- Na segunda coluna (coluna B), ele colocou a porcentagem a ser aumentada em cada preço, conforme a gerente havia orientado, na célula B2 e arrastou-a para baixo até a célula B10. Assim, Marcos não precisou reescrever a mesma porcentagem nas outras células da coluna.

	A	B	C	D
1	Valor de compra	Porcentagem para o aumento	Valor do aumento	Valor de venda
2	R$ 100,00	17%		
3	R$ 80,00			
4	R$ 50,00			
5	R$ 70,00			
6	R$ 134,00			
7	R$ 128,00			
8	R$ 154,00			
9	R$ 85,00			
10	R$ 40,00			

	A	B	C	D
1	Valor de compra	Porcentagem para o aumento	Valor do aumento	Valor de venda
2	R$ 100,00	17%		
3	R$ 80,00	17%		
4	R$ 50,00	17%		
5	R$ 70,00	17%		
6	R$ 134,00	17%		
7	R$ 128,00	17%		
8	R$ 154,00	17%		
9	R$ 85,00	17%		
10	R$ 40,00	17%		

- Na terceira coluna (coluna C), ele multiplicou a porcentagem a ser aumentada pelo valor de compra e, assim, obteve o valor do aumento. Após montar a fórmula na célula C2, Marcos arrastou-a para baixo de modo a aplicar a mesma fórmula até a célula C10.

	A	B	C	D
1	Valor de compra	Porcentagem para o aumento	Valor do aumento	Valor de venda
2	R$ 100,00	17%	=A2*B2	
3	R$ 80,00	17%		
4	R$ 50,00	17%		
5	R$ 70,00	17%		
6	R$ 134,00	17%		
7	R$ 128,00	17%		
8	R$ 154,00	17%		
9	R$ 85,00	17%		
10	R$ 40,00	17%		

	A	B	C	D
1	Valor de compra	Porcentagem para o aumento	Valor do aumento	Valor de venda
2	R$ 100,00	17%	R$ 17,00	
3	R$ 80,00	17%	R$ 13,60	
4	R$ 50,00	17%	R$ 8,50	
5	R$ 70,00	17%	R$ 11,90	
6	R$ 134,00	17%	R$ 22,78	
7	R$ 128,00	17%	R$ 21,76	
8	R$ 154,00	17%	R$ 26,18	
9	R$ 85,00	17%	R$ 14,45	
10	R$ 40,00	17%	R$ 6,80	

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Ao final da situação apresentada, discuta com os estudantes se seria possível obter o valor de forma direta, sem necessidade das duas colunas centrais, concluindo sobre a possibilidade de se utilizar o fator 1,17.

• Para a **atividade 11**, pode ser interessante a utilização do diagrama para a representação dos conjuntos numéricos e a localização dos exemplos nesse diagrama.

Esta atividade permite aos estudantes refletir sobre propriedades que valem em determinado conjunto numérico, mas que não valem em outro.

• Para a **atividade 12**, **item a**, estimule os estudantes a pensar que existe uma infinidade de números, não somente o 3,458. Cite, como exemplo, os números 3,4571; 3,45711; 3,457111; e 3,4571111; e comente que poderíamos continuar indefinidamente apenas com o dígito 1 ou combinando outros. A mesma ideia se aplica ao **item b**.

- Por último, na quarta coluna (coluna D), ele adicionou o valor de compra ao valor do aumento. Após montar a fórmula na célula D2, Marcos arrastou-a para baixo de modo a aplicar a mesma fórmula até a célula D10.

	A	B	C	D
1	Valor de compra	Porcentagem para o aumento	Valor do aumento	Valor de venda
2	R$ 100,00	17%	R$ 17,00	=A2+C2
3	R$ 80,00	17%	R$ 13,60	
4	R$ 50,00	17%	R$ 8,50	
5	R$ 70,00	17%	R$ 11,90	
6	R$ 134,00	17%	R$ 22,78	
7	R$ 128,00	17%	R$ 21,76	
8	R$ 154,00	17%	R$ 26,18	
9	R$ 85,00	17%	R$ 14,45	
10	R$ 40,00	17%	R$ 6,80	

	A	B	C	D
1	Valor de compra	Porcentagem para o aumento	Valor do aumento	Valor de venda
2	R$ 100,00	17%	R$ 17,00	R$ 117,00
3	R$ 80,00	17%	R$ 13,60	R$ 93,60
4	R$ 50,00	17%	R$ 8,50	R$ 58,50
5	R$ 70,00	17%	R$ 11,90	R$ 81,90
6	R$ 134,00	17%	R$ 22,78	R$ 156,78
7	R$ 128,00	17%	R$ 21,76	R$ 149,76
8	R$ 154,00	17%	R$ 26,18	R$ 180,18
9	R$ 85,00	17%	R$ 14,45	R$ 99,45
10	R$ 40,00	17%	R$ 6,80	R$ 46,80

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Dessa forma, Marcos conseguiu calcular o preço de venda dos novos móveis a tempo de expô-los no evento.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

11 Avalie as afirmações a seguir e copie as verdadeiras em seu caderno.

a) Todo número inteiro é racional. **11. a)** verdadeira

b) Todo número racional é inteiro. **11. b)** falsa; exemplo de justificativa: 0,1 é racional e não é inteiro.

c) Todo número racional é natural. **11. c)** falsa; exemplo de justificativa: 0,1 é racional e não é natural.

d) Entre dois números racionais existe sempre outro número racional. **11. d)** verdadeira

- Para as afirmações falsas, dê um exemplo que justifique tal classificação. Depois, converse com os colegas e o professor sobre os diferentes exemplos apresentados.

12 Indique um número situado entre:

a) 3,457 e 3,459; **12. a)** Exemplo de resposta: 3,4588

b) 1,05 e 1,06. **12. b)** Exemplo de resposta: 1,05213

- Converse com o professor e os colegas para comparar os números indicados em cada caso e responda: Há somente uma resposta para cada item ou há infinitas respostas? Justifique. **12.** Há infinitas respostas.

13 Escreva, no caderno, a representação decimal de cada um dos números racionais a seguir.

a) $\frac{6}{5}$ **13. a)** 1,2

b) $\frac{157}{100}$ **13. b)** 1,57

c) $\frac{7}{3}$ **13. c)** $2,\overline{3}$

d) $\frac{13}{11}$ **13. d)** $1,\overline{18}$

e) $-\frac{5}{8}$ **13. e)** –0,625

f) $-\frac{15}{90}$ **13. f)** $-0,1\overline{6}$

g) $\frac{1}{55}$ **13. g)** $0,0\overline{18}$

h) $-\frac{3}{4}$ **13. h)** –0,75

- Quais desses números racionais têm dízima periódica como representacão decimal?

13. Item: $\frac{7}{3}$; $\frac{13}{11}$; $-\frac{15}{90}$; $\frac{1}{55}$

• A **atividade 15** permite aos estudantes compreender como é feito o cálculo do décimo terceiro salário, ainda que não seja parte de sua realidade. Sempre que possível, proponha situações envolvendo aspectos da educação financeira, pois, se bem escolhidas e exploradas, podem contribuir significativamente para a formação do estudante como cidadão.

14 Identifique o período das dízimas periódicas abaixo, classificando-as em simples ou compostas.

a) –3,4777... **14. a)** 7 (composta)

b) 0,333... **14. b)** 3 (simples)

c) $-0{,}0\overline{5}$ **14. c)** 5 (composta)

d) –0,323232... **14. d)** 32 (simples)

15 Um dos benefícios do trabalhador brasileiro é o décimo terceiro salário, pago pelos empregadores no fim do ano. Para quem trabalhou o ano inteiro, o valor a ser pago corresponde ao salário mensal e, para quem trabalhou menos de um ano, o valor a ser pago é proporcional à quantidade de meses trabalhados. **15. a)** 8 meses; $\frac{8}{12}$ (ou fração equivalente)

a) Se uma pessoa foi admitida em uma empresa no dia 1º de maio, quantos meses ela trabalhou nesse ano? Esse período corresponde a que fração de um ano?

b) Sabendo que o salário mensal dessa pessoa é R$ 2 514,50, qual foi o valor do décimo terceiro salário recebido? **15. b)** R$ 1 676,33

16 Alguém queria determinar, usando uma calculadora, quanto gastaria ao pagar duas contas nos valores de R$ 329,18 e de R$ 2 231,11. Após apertar a tecla =, o resultado que apareceu no visor foi:

35 149,11

GUILHERME CASAGRANDE/ARQUIVO DA EDITORA

16. a) não; exemplo de explicação: a pessoa se esqueceu de apertar a tecla . para indicar a vírgula no valor R$ 329,18.

a) O resultado obtido está correto? Caso não esteja, explique o que pode ter acontecido.

b) Qual é o valor correto a pagar por essas duas contas? **16. b)** R$ 2 560,29

17 Calcule a porcentagem dos valores a seguir.

a) 12% de 144 **17. a)** 17,28

b) 25% de 1 024 **17. b)** 256

c) 1% de 123 587 600 **17. c)** 1 235 876

d) 24% de 72 **17. d)** 17,28

18 Retome a situação de Marcos, que compra e vende móveis usados. A gerente pediu a ele que elaborasse outra planilha, reproduzida a seguir.

	A	B	C	D
1	Valor de compra	Porcentagem para o aumento	Valor do aumento	Valor de venda
2	R$ 60,00	23%		
3	R$ 80,00			
4	R$ 100,00			

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Junte-se com um colega e comparem a situação de Marcos apresentada anteriormente com a da planilha acima. Que semelhanças e diferenças vocês identificam? **18. a)** Resposta pessoal.

b) Reproduzam, em uma planilha eletrônica, os valores de compra e a porcentagem para o aumento. Em seguida, obtenham o valor do aumento e o valor de venda para cada imóvel, em real, obtido com a venda desses três móveis. **18. b)** Resposta em *Orientações*.

• Na **atividade 18**, as células da coluna B do quadro devem ser preenchidas com o valor 23% , porcentagem de aumento. As células da coluna C representam o valor do aumento, isto é, 23% dos respectivos valores de compra, que estão na coluna A. Finalmente, as células da coluna D representam o valor de venda, que são obtidos adicionando o valor de compra com o valor de aumento. Temos, então, o seguinte quadro preenchido:

	A	B	C	D
1	**Valor de compra**	**Porcentagem para o aumento**	**Valor do aumento**	**Valor de venda**
2	R$ 60,00	23%	R$ 13,80	R$ 73,80
3	R$ 80,00	23%	R$ 18,40	R$ 98,40
4	R$ 100,00	23%	R$ 23,00	R$ 123,00

Lendo e aprendendo

BNCC:

- Competência geral 7 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 4 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

- Desenvolver a competência leitora.
- Reconhecer números racionais e números inteiros.
- Ler e interpretar dados apresentados em um infográfico.
- Refletir sobre a oportunidade de se trabalhar em casa durante a pandemia e sobre os cuidados para se proteger contra a Covid–19.

Tema contemporâneo transversal:

SAÚDE

Inicie o trabalho com esta seção, fazendo a leitura compartilhada do texto com os estudantes. Depois, converse com eles sobre a temática trazida pelo texto. O texto atribui a queda da expectativa de vida ao alto número de mortes causadas pela Covid-19, mas é importante salientar que vários fatores exercem influência direta, como: serviços de saneamento ambiental, alimentação, índice de violência, poluição, serviços de saúde, educação, entre outros. Portanto, a diminuição na expectativa de vida está diretamente associada a uma piora geral nas condições de vida da população. Após essa conversa inicial, peça aos estudantes que realizem as atividades propostas.

- Na **atividade 1**, os estudantes vão responder a algumas questões sobre o texto. Após terminarem, peça aos estudantes que se reúnam com um colega para conversar sobre o que responderam. Acompanhe as duplas e tire as possíveis dúvidas.
- A **atividade 2** explora o que foi estudado sobre os conjuntos numéricos. Esse é o momento oportuno para verificar se eles apresentam dificuldades para reconhecer números inteiros ou números racionais. Incentive-os a justificar cada uma das respostas, sejam elas falsas ou verdadeiras.

SAÚDE

Lendo e aprendendo

Cai a expectativa de vida no Brasil

Indicador mostra quantos anos, em média, uma pessoa vive em determinado país

A expectativa de vida dos brasileiros caiu de 76,7 anos para 74,8 anos em 2020. A redução foi resultado do alto número de mortes por causa da Covid-19 no último ano. O indicador é o mais baixo desde 2013.

O número foi apontado em um estudo feito por uma equipe de pesquisadores da Faculdade de Saúde Pública da Universidade Harvard, em parceria com a Universidade Federal de Minas Gerais.

[...]

A expectativa de vida é um importante indicador social e de saúde. Esse número mostra o tempo que a população vive, em média. Outra forma de entender esse número é imaginar que os bebês nascidos em 2020 irão viver, em média, quase dois anos a menos do que aqueles que nasceram em 2019. Os dados oficiais do Brasil ainda serão consolidados pelo IBGE.

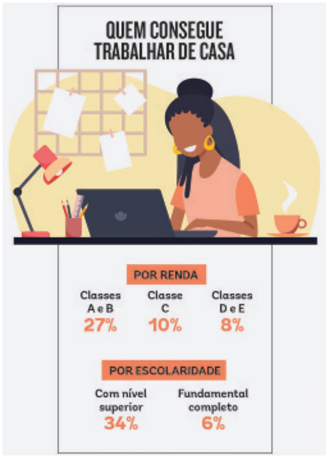
Apesar de alguns outros países também terem tido muitas mortes, a queda da expectativa de vida não foi tão alta. Nos Estados Unidos, por exemplo, os americanos perderam 1,13 ano de expectativa de vida.

Como base de comparação, a mais alta expectativa de vida no mundo é a do Japão — 84,6 anos, e a mais baixa é a da República Centro-Africana — 53,3 anos.

CABRAL, M. C. Cai a expectativa de vida no Brasil. **Qualé**, São Paulo, edição 28, p. 12, 3 a 17 de maio de 2021.

Atividades

1. Responda às questões no caderno.
   - **a)** Em que mês e ano a matéria acima foi publicada? **1. a)** maio de 2021
   - **b)** O que é a expectativa de vida? **1. b)** É um indicador social e de saúde que mostra o tempo que a população de um determinado local vive, em média.
   - **c)** Qual era a expectativa de vida dos brasileiros em 2020? E em 2019? **1. c)** 74,8 anos; 76,7 anos.
   - **d)** Por que a expectativa de vida no Brasil caiu? **1. d)** Porque houve um alto número de mortes causadas pela Covid-19.
   - **e)** Qual era o país cuja população tinha a expectativa de vida mais alta em 2020? E o que tinha a expectativa de vida mais baixa? **1. e)** Japão; República Centro-Africana.
2. Copie as afirmações no caderno e marque V para as verdadeiras e F para as falsas.
   - **a)** (■) Todos os números que aparecem no texto são números racionais. **2. a)** V
   - **b)** (■) Os números 2013, 2019 e 2020 não são números racionais. **2. b)** F
   - **c)** (■) Em 2020, a expectativa de vida da população do Japão superava a da população da República Centro-Africana em mais de 30 anos. **2. c)** V
   - **d)** (■) No texto, não aparece nenhum número inteiro. **2. d)** F
3. Em 2020, trabalhar de casa era uma das recomendações para se proteger da Covid-19. Analise estes dados da pesquisa realizada pela FGV Social e responda as questões no caderno.
   - **a)** Na sua opinião, o que os dados revelam? **3. a)** Resposta pessoal.
   - **b)** Seus pais ou responsáveis tiveram que trabalhar durante a pandemia? Como eles fizeram para se proteger da Covid-19? **3. b)** Respostas pessoais.



REVISTA QUALÉ EDIÇÃO 28

CABRAL, M. C. Cai a expectativa de vida no Brasil. **Qualé**, São Paulo, edição 28, p. 12, 3 a 17 de maio de 2021.

36

- A **atividade 3** convida os estudantes a interpretar dados estatísticos sobre quem conseguia trabalhar de casa em 2020. Embora a resposta do **item a** seja pessoal, espera-se que eles percebam que os dados apresentados revelam que trabalhar de casa era um privilégio para os mais ricos e os de maior escolaridade. Por incentivar os estudantes a argumentar com base em dados confiáveis, este item da atividade favorece o desenvolvimento da competência geral **7** e da competência específica **4** da BNCC.

No **item b**, eles devem relatar exemplos que vivenciaram em suas famílias. Reserve um tempo da aula para que possam compartilhar suas respostas. Aproveite a oportunidade para falar sobre as demais recomendações que foram adotadas na época visando à proteção contra a Covid-19.

Fração geratriz de uma dízima periódica

Podemos determinar a fração que gera uma dízima periódica. Essa fração é chamada de **fração geratriz**. Observe os exemplos a seguir.

a) Vamos determinar a fração geratriz da dízima 0,777...

Indicamos a dízima periódica 0,777... por x.

$$x = 0{,}777\ldots \quad \text{(I)}$$

Multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 10 para obter outro número com a mesma parte decimal.

$$10x = 7{,}777\ldots \quad \text{(II)}$$

Subtraímos, membro a membro, (I) de (II), eliminando a parte decimal.

$$\begin{array}{rl} 10x = 7{,}777\ldots & \text{(II)} \\ -\quad x = 0{,}777\ldots & \text{(I)} \\ \hline 9x = 7 & \end{array}$$

Assim: $x = \frac{7}{9}$

Portanto, $\frac{7}{9}$ é a fração geratriz de 0,777...

b) Vamos determinar a fração geratriz da dízima 4,151515...

Indicamos a dízima periódica 4,151515... por x.

$$x = 4{,}151515\ldots \quad \text{(I)}$$

Multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 100 para obter outro número com a mesma parte decimal.

$$100x = 415{,}151515\ldots \quad \text{(II)}$$

Subtraímos, membro a membro, (I) de (II), eliminando a parte decimal.

$$\begin{array}{rl} 100x = 415{,}151515\ldots & \text{(II)} \\ -\quad x = 4{,}151515\ldots & \text{(I)} \\ \hline 99x = 411 & \end{array}$$

Assim: $x = \frac{411}{99}$

Portanto, $\frac{411}{99}$ é a fração geratriz de 4,151515...

c) Vamos determinar a fração geratriz da dízima 0,04777...

Indicamos a dízima periódica 0,04777... por y.

$$y = 0{,}04777\ldots \quad \text{(I)}$$

Multiplicamos os dois membros dessa igualdade por 100 para obter uma dízima periódica simples.

$$100y = 4{,}777\ldots \quad \text{(II)}$$

Multiplicamos os dois membros da igualdade (II) por 10 para obter outro número com a mesma parte decimal do segundo membro da igualdade (II).

$$1\,000y = 47{,}777\ldots \quad \text{(III)}$$

Subtraímos, membro a membro, (II) de (III), eliminando a parte decimal.

$$\begin{array}{rl} 1\,000y = 47{,}777\ldots & \text{(III)} \\ -\quad 100y = 4{,}777\ldots & \text{(II)} \\ \hline 900y = 43 & \end{array}$$

Assim: $y = \frac{43}{900}$

Portanto, $\frac{43}{900}$ é a fração geratriz de 0,04777...

Fração geratriz de uma dízima periódica

Para explorar este tópico, verifique se há necessidade de rever ou sanar eventuais dúvidas relacionadas à multiplicação de decimais por potências de 10.

O processo de obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica deve ser trabalhado de forma cuidadosa para que os estudantes possam compreender o significado do que está sendo feito, e não apenas memorizar um processo que pode não fazer sentido para eles.

- A **atividade 20** explora o cálculo mental envolvendo números decimais. Atividades dessa mesma natureza contribuem para que os estudantes, aos poucos, ampliem seu repertório de estratégias de cálculo envolvendo esses e outros números.

Números irracionais

Objetivo:

Reconhecer os números irracionais como aqueles que apresentam representação decimal infinita e não periódica.

Justificativa

Os estudantes já se depararam com números cuja representação decimal é infinita e não periódica, por exemplo, no cálculo de raízes quadradas de números racionais que não são quadrados perfeitos. Reconhecer que números com essa característica pertencem a um conjunto próprio (conjunto dos números irracionais) consolida os conhecimentos adquiridos no que diz respeito aos conjuntos numéricos. Além disso, reconhecer a existência desse conjunto é um passo importante para que compreendam que o conjunto dos números reais é formado pelo conjunto dos números racionais e pelo conjunto dos números irracionais.

Mapeando conhecimentos

Escreva na lousa alguns números cuja representação decimal é infinita e não periódica e pergunte aos estudantes se os números que escreveu são racionais e o porquê. Ouça os argumentos deles. Caso algum estudante diga que algum dos números é racional, proponha que escreva o número na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$. Assim, ele deve perceber que esse número não pode ser escrito dessa forma e, consequentemente, não é um número racional. Em seguida, peça aos estudantes que deem outros exemplos de números que não são racionais.

Para as aulas iniciais

Esclareça que não há um número irracional que também seja racional, simultaneamente. Proponha aos estudantes que façam uma pesquisa sobre os números irracionais. Depois, reserve um momento para que possam compartilhar o que pesquisaram.

Atividades

19. e) $\frac{223}{90}$

Faça as atividades no caderno.

22. a) 0,8888... 22. b) 0,8888... 22. c) 0,8888... 22. d) 0,272727... 22. e) 0,272727... 22. f) 0,272727...

19 Determine a fração geratriz de cada uma das dízimas periódicas a seguir. 19. d) $\frac{7}{999}$

a) $0,\overline{8}$ 19. a) $\frac{8}{9}$
b) 3,151515... 19. b) $\frac{312}{99}$
c) 0,05222... 19. c) $\frac{47}{900}$
d) 0,007007007...
e) 2,4777...
f) 0,1444... 19. f) $\frac{13}{90}$

20 Calcule mentalmente e registre no caderno os resultados de:

a) 5 + 0,777... 20. a) 5,777...
b) 8 + 0,333... 20. b) 8,333...
c) 0,6 + 0,222... 20. c) 0,8222...
d) 1,5 + 0,555... 20. d) 2,0555...

21 Efetue as operações a seguir.

a) 0,5 + 0,555... 21. a) 1,0555...
b) $2,\overline{7} \cdot 0,06$ 22. a) 0,1666...

22 Utilizando uma calculadora, determine o resultado de:

a) 8 000 : 9 000
b) 80 : 90
c) 16 : 18
d) 30 : 110
e) 3 000 : 11 000
f) 9 : 33

- Que regularidade você observou ao realizar essas divisões? Por que você acha que isso ocorreu?

22. Espera-se que os estudantes percebam que os itens **a**, **b** e **c** têm o mesmo resultado e que isso ocorre porque essas divisões, se fossem escritas na forma de fração, seriam frações equivalentes. O mesmo ocorre com os itens **d**, **e** e **f**.

4 Números irracionais

Luciano queria determinar o valor de $\sqrt{2}$, ou seja, encontrar o número que elevado ao quadrado desse como resultado 2.

Inicialmente, ele verificou que $\sqrt{2}$ é um número decimal situado entre 1 e 2.

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

$$1^2 = 1 \qquad (\sqrt{2})^2 = 2 \qquad 2^2 = 4$$

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

A seguir, verificou que $\sqrt{2}$ é um número decimal situado entre 1,4 e 1,5:

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

$$1,4^2 = 1,96 \qquad 1,5^2 = 2,25$$

Luciano continuou buscando o valor de $\sqrt{2}$ e verificou que é um número situado entre 1,41 e 1,42.

$$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$$

$$1,41^2 = 1,9881 \qquad 1,42^2 = 2,0164$$

Ele avançou mais algumas etapas na busca da $\sqrt{2}$, encontrando:

$$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$$

$$1,414^2 = 1,999396 \qquad 1,415^2 = 2,002225$$

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$$

$$1,4142^2 = 1,99996164 \qquad 1,4143^2 = 2,00024449$$

Luciano prosseguiu com esse raciocínio, mas não encontrou um número que, elevado ao quadrado, resultasse exatamente em 2. Desse modo, Luciano se perguntou:

Será que existe um número que, ao ser elevado ao quadrado, resulte em 2?

38

Ao introduzir a noção de número irracional, explique aos estudantes a diferença entre a aproximação de um número irracional, por exemplo, $\sqrt{2}$, dada por uma calculadora, e o próprio número $\sqrt{2}$. É fundamental oferecer aos estudantes um esclarecimento a respeito desse aspecto para que eles não confundam o número $\sqrt{2}$ com uma de suas aproximações racionais, por exemplo, 1,414 ou 1,414214. Pesquisas mostram que é comum o estudante não diferenciar um número irracional de uma aproximação racional.

Após muitos cálculos e estudos, os matemáticos provaram que $\sqrt{2}$ não é racional, isto é, não pode ser expresso como decimal exato ou dízima periódica.

Números que têm infinitas casas decimais e não são periódicos são chamados de **números irracionais**.

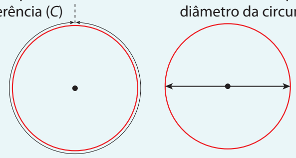
Os matemáticos mostraram que existem infinitos números irracionais. Os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$ e seus simétricos são alguns exemplos de números irracionais.

Veja que interessante

Faça a atividade no caderno.

O número π (pi)

O número cujo valor corresponde ao quociente da medida do comprimento de qualquer circunferência pela medida de comprimento de seu diâmetro (dobro da medida de comprimento do raio), na mesma unidade, é chamado de número π (pi).



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Determinar o valor de π foi, durante séculos, um desafio para os matemáticos. Eles provaram que o número π tem infinitas casas decimais e não apresenta período; portanto, é um número irracional. Confira a seguir o número π com 20 casas decimais.

3,14159265358979323846...

O número π causa um fascínio tão grande em determinadas pessoas que elas se dedicam a calcular mais e mais casas decimais. O professor Yasumasa Kanada, da Universidade de Tóquio, no Japão, é conhecido por bater vários recordes mundiais, entre 1981 e 2002, no cálculo de casas decimais do π. Nessa busca, em 2002, ele empregou um supercomputador durante mais de 600 horas, atingindo 1,241 trilhões de casas.

Em 2011, Shigeru Kondo, engenheiro japonês, obteve o número π com cerca de 10 trilhões de casas decimais após usar um programa de computador que calcula trilhões de dígitos durante 371 dias, ou seja, mais de um ano.

Atividade

Os recordes de casas decimais do π são quebrados frequentemente. Por isso, pesquise qual é o recorde atual. **Veja que interessante:** Em abril de 2022, o recorde era da Universidade de Ciências Aplicadas de Graubünden, na Suíça, por determinar 62,8 trilhões de casas decimais de π em agosto de 2021.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

23 Escreva, em seu caderno, os números que são irracionais. **23.** itens **b**, **d**, **f**, **k**

a) 0 **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $-3{,}14$ **d)** $\sqrt{5}$ **e)** 0,777... **f)** π **g)** 1,73 **h)** 0,54 **i)** $\sqrt{4}$ **j)** $\frac{3}{900}$ **k)** $-\sqrt{3}$ **l)** $\sqrt{49}$

24 Utilizando uma calculadora, determine, com aproximação de duas casas decimais, o valor de:

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **24. a)** 3,15 **b)** $\pi - 2\sqrt{3}$ **24. b)** –0,32 **c)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ **24. c)** 2,45 **d)** $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ **24. d)** 0,32

Se julgar pertinente, explore um pouco mais a história dos números irracionais: ficou claro para os matemáticos que as frações não eram suficientes para medir todas as grandezas, mesmo que fossem positivas. Assim, na Antiguidade grega, ficou comprovado que, por exemplo, o lado de um quadrado é incomensurável com sua diagonal, ou seja, que não existe um segmento de reta, por menor que seja sua medida de comprimento, que possa servir de unidade de medida comum ao comprimento do lado e da diagonal de um mesmo quadrado de maneira que as medidas de ambos sejam múltiplos inteiros dessa unidade. Tal constatação, ao longo da história, acabou por provocar a introdução dos números irracionais e a ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais. Se julgar adequado, proponha aos estudantes que façam uma pesquisa a respeito da descoberta da existência de segmentos de reta incomensuráveis e da crise que esse fato gerou na Matemática na Antiguidade. Oriente-os a buscar, principalmente, a contribuição de Eudoxo para a superação de tal crise e explorar a relação entre os segmentos de reta incomensuráveis e os números irracionais.

É importante comentar com os estudantes que existem infinitos números irracionais, assim como existem infinitos números naturais, inteiros e racionais. Para ajudá-los a se convencerem de tal fato, proponha que escrevam no caderno exemplos de números irracionais, tais como 0,1011011101111..., 0,1234567890070007... etc. Ajude os estudantes a perceber por que esses números são irracionais mostrando que não há período.

- Na **atividade 24**, calcule também o valor de $\sqrt{5}$, comentando que o resultado não é o mesmo que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Se achar interessante, calcule $\sqrt{6}$, comentando que é igual ao produto $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

Sugestão de atividade extra

Aproveitando a seção *Veja que interessante* sobre o número π, solicite aos estudantes que, em duplas, façam uma pesquisa a respeito da história desse número, visando aprofundar as informações tratadas no livro e perceber que vários conceitos matemáticos se desenvolveram ao longo do processo de busca pelo valor exato de π (enquanto se pensava que isso era possível) e de aproximações mais precisas.

Números reais

Objetivo:

Compreender o conjunto dos números reais.

Justificativa

Compreender o conjunto dos números reais permite aos estudantes relacionarem todos os conjuntos numéricos estudados até aqui e efetuar qualquer adição, subtração, multiplicação e divisão com números reais (exceto a divisão por zero), bem como extrair a raiz quadrada de qualquer número positivo.

Mapeando conhecimentos

Copie o diagrama a seguir na lousa e peça aos estudantes que o reproduzam no caderno.

LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Depois, pergunte aos estudantes o que o ℝ está representando nesse diagrama e se conhecem o significado desse símbolo. Espera-se que identifiquem que, reunindo o conjunto dos números racionais (ℚ) com o conjunto dos números irracionais, obtemos um conjunto representado por ℝ (conjunto dos números reais).

Aproveite também para fazer o seguinte questionamento: "Ao dispormos os números reais na reta numérica, ficam 'buracos' como ao dispormos os números racionais? Por quê?".

Para as aulas iniciais

Retome o questionamento feito na dinâmica inicial e leve os estudantes a perceber que existe uma correspondência entre cada número real e cada ponto da reta numérica. Proponha na sequência que representem alguns números reais na reta numérica, utilizando aproximações para números irracionais quando necessário.

---

25. d) 3,14159

25 Com uma calculadora, determine o valor aproximado, com cinco casas decimais, de:

a) $\sqrt{10}$ **25. a)** 3,16228

b) $\left(\frac{4}{3}\right)^4$ **25. b)** 3,16049

c) $\frac{22}{7}$ **25. c)** 3,14286

d) $\frac{13\sqrt{146}}{50}$

e) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ **25. e)** 3,14626

f) $\frac{355}{113}$ **25. f)** 3,14159

• Quais desses valores são mais próximos do valor de π? **25.** $\frac{355}{113}$ e $\frac{13\sqrt{146}}{50}$

26 Represente na reta numérica os números abaixo.

a) $\sqrt{2}$

b) $-\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{2}$

d) $-2\sqrt{2}$

26. $-2\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$

LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

27 Coloque em ordem crescente os números a seguir.

$\sqrt{3}$; $-1,2$; $\frac{10}{3}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{4}{3}$; 0,5

27. $-1,2$; 0,5; $\frac{4}{3}$; $\sqrt{3}$; $2\sqrt{2}$; $\frac{10}{3}$

5 Números reais

Os números naturais e os números inteiros são também números racionais. Se juntarmos em um só conjunto os números racionais e os números irracionais, obteremos o **conjunto dos números reais**, cujo símbolo é ℝ.

Portanto, todos os números que estudamos até agora pertencem ao conjunto dos números reais.

LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

28. b) -35; $\frac{40}{5}$ **28. c)** 1,222; 0,444...; $\frac{1}{7}$; $\frac{40}{5}$; -35

Atividades

28. d) $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π **28. e)** Todos são reais.

Faça as atividades no caderno.

28 Analise estes números.

-35; $\sqrt{3}$; $\frac{40}{5}$; 1,222; π; 0,444...; $-\sqrt{2}$; $\frac{1}{7}$

a) Quais deles são números naturais? **28. a)** $\frac{40}{5}$

b) Quais deles são números inteiros?

c) Quais deles são números racionais?

d) Quais deles são números irracionais?

e) Quais deles são números reais?

f) Apresente-os em ordem crescente.

29. b) Exemplo de resposta: π

29 Dê um exemplo de:

a) número racional e não inteiro maior que 2; **29. a)** Exemplo de resposta: 2,1

b) número real e não racional maior que 3;

c) número inteiro e não natural maior que 4. **29. c)** não existe

30. Todas as alternativas.

30 Escreva em seu caderno os números que pertencem ao conjunto dos números reais.

a) $\frac{0}{5}$

b) $\sqrt{0}$

c) $-0,005$

d) $\sqrt{64}$

e) $-\sqrt{36}$

f) $\sqrt{1}$

g) 11 111

h) $-\pi$

28. f) -35; $-\sqrt{2}$; $\frac{1}{7}$; 0,444...; 1,222; $\sqrt{3}$; π; $\frac{40}{5}$

31 Em cada item, escreva três números:

a) inteiros maiores que -15 e menores que -11; **31. a)** -14, -13 e -12

b) racionais maiores do que $-\frac{3}{4}$ e menores que $-\frac{1}{2}$; **31. b)** Exemplo de resposta: $-\frac{7}{10}$, $-\frac{6}{10}$, $-\frac{55}{100}$

c) irracionais maiores que 1,3010010001;

• Apresente as respostas anteriores em ordem decrescente. **31.** Exemplo de resposta: $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $-\frac{55}{100}$; $-\frac{6}{10}$; $-\frac{7}{10}$; -12; -13; -14

32 Avalie as sentenças a seguir e copie as verdadeiras no caderno.

a) Todo número inteiro é racional. **32. a)** verdadeira

b) Todo número real é racional. **32. b)** falsa

c) Toda dízima periódica é número racional. **32. c)** verdadeira

d) Todo número irracional é real. **32. d)** verdadeira

e) Todo número que tem infinitas casas decimais é irracional. **32. e)** falsa

f) Todo número real é irracional. **32. f)** falsa

g) O número zero é real, inteiro e racional. **32. g)** verdadeira

31. c) Exemplo de resposta: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$

• Na **atividade 31**, **item c**, comente que o número 1,3010010001 é racional, mas que devem dar exemplos de números irracionais maiores do que este racional. Lembre-os de que os irracionais possuem infinitas casas decimais e não possuem período.

• A **atividade 32** explora a relação entre os conjuntos numéricos. Se julgar pertinente, amplie a atividade solicitando a eles que justifiquem as alternativas falsas.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

2. a) antecessor: 210; sucessor: 212 **2. b)** antecessor: 198; sucessor: 200 **2. c)** antecessor: 299; sucessor: 301

Números naturais

O conjunto dos **números naturais** é dado por:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

Todo número natural tem um **sucessor** e todo número natural, com exceção do zero, tem um **antecessor**.

Sequência numérica

É a sequência cujos elementos são números escritos em certa ordem. Cada elemento dela é chamado de **termo** da sequência.

A **lei de formação** é uma regra que mostra como a sequência progride ou é formada.

Por exemplo, na sequência (0, 3, 6, 9, 12, ...), a lei de formação é $a_1 = 0$ e $a_{n+1} = 3 + a_n$.

1. Escreva no caderno a afirmação verdadeira.

a) 9 é um número natural. **1. a)** Verdadeira

b) –5 é um número natural. **1. b)** Falsa

c) $\frac{1}{4}$ é um número natural. **1. c)** Falsa

2. Indique o antecessor e o sucessor dos números abaixo.

a) 211 b) 199 c) 300

3. No caderno, escreva os seis primeiros termos de uma sequência numérica na qual $a_1 = 2$, $a_2 = 5$ e $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, em que $n > 2$.

3. 2, 5, 7, 12, 19, 31

Números inteiros

O **conjunto dos números inteiros** é dado por:

$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

4. a) 8, 9, 10, 11 **4. b)** –10, –9

4. Escreva em seu caderno o que se pede.

a) Os números inteiros entre 7 e 12.

b) Os números inteiros entre –11 e –8.

5. Uma conta estava com saldo negativo de R$ 610,00. Após um depósito de R$ 3 200,00, qual será o novo saldo? **5.** R$ 2 590,00

Números racionais

O **conjunto dos números racionais** pode ser dado por:

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b}, \text{em que } a \text{ e } b \text{ são números inteiros e } b \neq 0\right\}$

Fração geratriz de uma dízima periódica

Na divisão de 7 por 3, o algarismo 3 do quociente 2,333... continuará se repetindo infinitamente; chamamos esse quociente de **dízima periódica**.

A fração que gera uma dízima periódica é chamada de **fração geratriz**. Por exemplo, $\frac{7}{9}$ é a fração geratriz de 0,777...

6. itens **a**, **b**, **d**

6. Quais números a seguir são racionais?

a) –4 b) 0 c) $\sqrt{3}$ d) $\frac{1}{4}$

7. Escreva a representação decimal de:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{123}{100}$ d) $-\frac{10}{9}$

7. a) 0,5 **7. b)** 0,6 **7. c)** 1,23 **7. d)** –1,111...

8. Escreva a fração geratriz destas dízimas.

a) $0,\overline{5}$ **8. a)** $\frac{5}{9}$

b) 0,1333...

c) 1,232323... **8. b)** $\frac{12}{90}$

d) 0,02444...

8. c) $\frac{122}{99}$ **8. d)** $\frac{22}{900}$

Números irracionais

Os **números irracionais** têm infinitas casas decimais e não são periódicos.

9. Escreva no caderno as sentenças verdadeiras.

a) 3,2 é um número racional **9. a)** V

b) $\sqrt{16}$ é um número irracional **9. b)** F

c) $-\sqrt{3}$ é um número inteiro **9. c)** F

d) $-\sqrt{7}$ é um número irracional **9. d)** V

Números reais

A união do conjunto dos números racionais e dos conjunto dos números irracionais forma o **conjunto dos números reais**, cujo símbolo é $\mathbb{R}$.

10. Analise os números abaixo.

-12; $\sqrt{7}$; $\frac{15}{3}$; 1,88; π; $\frac{3}{7}$

• Agora, no caderno, indique a qual conjunto numérico cada um deles pertence (naturais, inteiros, racionais, irracionais e/ou reais).

10. –12 pertence aos conjuntos dos inteiros, racionais e reais; $\sqrt{7}$ pertence aos conjuntos dos irracionais e reais; $\frac{15}{3}$ pertence ao conjunto dos naturais, inteiros, racionais e reais; 1,88 pertence ao conjunto dos racionais e reais; π pertence ao conjunto dos irracionais e reais; $\frac{3}{7}$ pertence ao conjunto dos racionais e reais.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Números naturais

• Na **atividade 1**, os estudantes devem identificar se os números 9, –5 e $\frac{1}{4}$ são números naturais. Espera-se que percebam que –5 é um número inteiro negativo e $\frac{1}{4}$ está escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e b diferente de zero. Logo, –5 e $\frac{1}{4}$ não são números naturais. Portanto, apenas a afirmação do **item a** é verdadeira.

• Na **atividade 2**, espera-se que os estudantes entendam que antecessores e sucessores correspondem, respectivamente, a números que "vêm imediatamente antes" e números que "vêm imediatamente depois" de um número natural estabelecido. Se achar necessário, antes da atividade, forneça alguns números naturais para a turma identificar seus antecessores e sucessores.

• A **atividade 3** apresenta a lei de formação de uma sequência numérica para que os estudantes escrevam alguns termos. Verifique se eles notam que os dois primeiros termos foram dados e que só precisam identificar mais quatro termos, substituindo-os na lei de formação apresentada.

Números inteiros

• Na **atividade 4**, os estudantes devem identificar números inteiros em um intervalo numérico. Caso tenham dúvidas, destaque que o termo "entre" não considera os extremos do intervalo e incentive-os a utilizar a reta numérica, principalmente no **item b**.

• A **atividade 5** explora a ideia de uma operação entre números inteiros negativos e positivos. Caso os estudantes apresentem dificuldades, retome a leitura do enunciado, destacando que o saldo inicial é negativo, ou seja, inicia-se a situação com –R$ 610,00.

Números racionais

• Na **atividade 6**, os estudantes devem identificar quais números são racionais. Se tiverem dúvidas, peça que tentem escrever cada número como uma fração cujo numerador e o denominador são números inteiros.

• As **atividades 7** e **8** são complementares: na **atividade 7**, os estudantes identificam os números decimais correspondentes às frações; na **atividade 8**, identificam as frações correspondentes aos números decimais (nesse caso, dízimas periódicas). Se os estudantes tiverem dificuldades para escrever a fração geratriz correspondente a cada dízima periódica, com base em alguns exemplos, retome o processo utilizado, explicando-o passo a passo.

Números irracionais

• Na **atividade 9**, os estudantes devem identificar se alguns números são racionais, irracionais ou inteiros. Se considerarem que a afirmação do **item b** é verdadeira, pergunte-lhes se conhecem algum número cujo quadrado é igual a 16 e leve-os a perceber que $\sqrt{16} = 4$.

Números reais

A **atividade 10** explora a ideia de que os números reais equivalem à união de todos os outros conjuntos abordados; portanto, os estudantes devem identificar que todos os números fornecidos são números reais. Caso tenham dificuldades para indicar os números pertencentes aos outros conjuntos numéricos, retome as características de cada conjunto.

CAPÍTULO 2 – POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO

Trocando ideias

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre potenciação e notação científica.
- Introduzir as unidades de medida de armazenamento *byte* e *gigabyte*.
- Conhecer mais sobre o armazenamento de arquivos na nuvem.

Tema contemporâneo transversal:

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Inicie a aula explicando para a turma o que é o armazenamento na nuvem. Explique aos estudantes que a *nuvem* pode ser entendida como uma rede global de servidores, ou seja, dispositivos espalhados por todo o mundo que armazenam, executam aplicativos e fornecem serviços aos usuários. É importante que eles compreendam que salvar um arquivo na nuvem é o mesmo que arquivá-lo em um computador que pode estar a quilômetros de distância. Se achar oportuno, convide-os a pensar sobre as questões do primeiro item. Você pode organizar a turma em pequenos grupos em um primeiro momento e, após dialogarem, solicitar que um representante de cada grupo sintetize o que foi conversado.

Reserve também um momento para falar sobre as unidades de medida de armazenamento. Diga que o *bit* é a menor unidade de medida de informação que pode ser armazenada ou transmitida e que um conjunto de 8 *bits* corresponde a 1 *byte* (1 B), que é a unidade de medida. Comente também que assim como outras unidades de medida de outras grandezas, a unidade de medida *byte* também tem múltiplos, como o *gigabyte*.

Chame a atenção deles para o fato de a quantidade de informação armazenada utilizar o sistema binário (base 2), assim:

1 *gigabyte* (GB) é igual a 2^{30} B ou 1 073 471 824 B

No entanto, podemos utilizar potências de base 10 para expressar valores aproximados para os múltiplos do *byte*. Ou seja:

1 *gigabyte* (GB) é aproximadamente igual a 1 000 000 000 *bytes* ou 10^9 *bytes*.

Capítulo 2

Potenciação e radiciação

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Trocando ideias

Armazenamento em nuvem é a tecnologia que permite a usuários e empresas armazenar, manter e acessar dados via internet. A "nuvem" é um ambiente virtual em que podem ser armazenados os arquivos (textos, fotos, vídeos, músicas, planilhas etc.) de modo que não ocupem o celular, o computador, o *tablet* ou qualquer outro dispositivo pessoal. Além disso, a nuvem possibilita ao usuário acessar esses arquivos a qualquer momento de qualquer lugar por meio da internet.

CAIO BORACINI/ARQUIVO DA EDITORA

Alguns serviços de armazenamento na nuvem disponibilizam 15 GB de espaço gratuito para os usuários.

GB: símbolo utilizado para representar a unidade de medida de armazenamento *gigabyte*; 1 *gigabyte* (GB) é aproximadamente igual a 1 000 000 000 *bytes* ou 10^9 B.

- Você já armazenou algum arquivo na nuvem? O que você pensa a respeito dessa tecnologia? Converse com os colegas.
- Aproximadamente, quantos *bytes* alguns serviços de armazenamento na nuvem disponibilizam para os usuários?

Trocando ideias: primeiro item: respostas pessoais; segundo item: aproximadamente 15 000 000 000 *bytes* ou $1,5 \cdot 10^{10}$ *bytes*.

Neste capítulo, vamos ampliar os conhecimentos sobre operações nos diversos conjuntos numéricos, fazendo uso da **potenciação** e da **radiciação**.

42

Após essa explicação, proponha que respondam à segunda questão. Esse é o momento oportuno para verificar como lidam com potências e com notação científica.

As questões incentivam a interação e o diálogo, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8** da BNCC. Além disso, os estudantes mobilizam conceitos das unidades temáticas Números e Grandezas e Medidas, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência específica **3**.

1 Potenciação

Quando um objeto é abandonado no vácuo ou quando desconsideramos a ação do ar sobre esse objeto, ele cai em direção vertical, caracterizando um movimento chamado queda livre.

Um objeto em queda livre, a partir do repouso e durante uma medida de tempo (t), em segundo, percorre uma medida de distância (d), em metro. Para representar esse movimento, utiliza-se a seguinte fórmula: $d = \frac{g \cdot t^2}{2}$, em que g é a medida da aceleração da gravidade a que um objeto está submetido; considerando que esse objeto esteja próximo à superfície terrestre, essa medida é da ordem de 10 m/s².

Considere a situação a seguir.

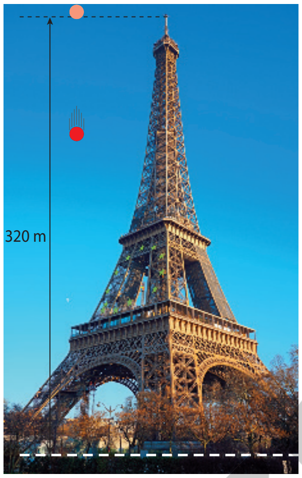
Se soltássemos uma esfera metálica de uma altura de medida igual a 320 m (a mesma medida da altura da Torre Eiffel), a medida da distância aproximada percorrida pela esfera após 2 segundos de queda seria:

$$d = \frac{10 \text{ m/s}^2 \cdot t^2}{2} = \frac{10 \text{ m/s}^2 \cdot (2 \text{ s})^2}{2} = \frac{10 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ s}^2}{2} = 20 \text{ m}$$

Portanto, a esfera teria percorrido, aproximadamente, 20 m após 2 s.

No cálculo realizado, para encontrar a medida da distância percorrida, utilizamos as operações de multiplicação, **potenciação** e divisão.

vácuo: na prática, utilizamos esse termo para nos referir a um espaço no qual a maior parte do ar ou de outro gás foi retirada e no qual a pressão é extremamente pequena.

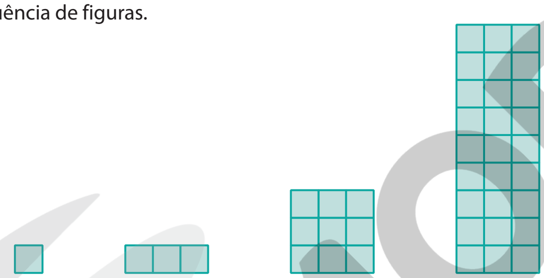


EGROY/SHUTTERSTOCK

Torre Eiffel, Paris, França. Foto de 2022.

Vamos retomar o estudo da potenciação considerando os casos a seguir, em que a base da potência é um número real e o expoente é um número inteiro.

Observe esta sequência de figuras.


ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

1 quadrado $3^0 = 1$ | 3 quadrados $3^1 = 3$ | 9 quadrados $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ | 27 quadrados $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

Qualquer potência de base real e expoente inteiro maior que 1 é produto dessa base por ela mesma tantas vezes quantas indica o expoente. Assim, sendo a um número real e n um número inteiro maior que 1, temos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}},\ n > 1$$

Potenciação

BNCC:

- Competência específica 3 (a descrição está na página VII).
- Habilidades EF08MA01 e EF08MA02.

Objetivos:

- Calcular potências de base real e expoente inteiro.
- Compreender a escrita de números usando notação científica.

Justificativa

Ampliar os conhecimentos adquiridos pelos estudantes sobre o cálculo de potências com base racional e expoente natural, inteiro negativo ou fracionário.

Compreender a escrita de números em notação científica possibilita aos estudantes simplificar e operar com números com muitos algarismos e favorece o desenvolvimento das habilidades **EF08MA01** e **EF08MA02**.

Mapeando conhecimentos

Proponha aos estudantes que calculem, no caderno, potências de base real e expoente natural e de base real e expoente inteiro negativo. Inclua potências cujo expoente seja igual a 1 e 0. Observe os procedimentos empregados por eles.

Para as aulas iniciais

- Recorde o cálculo de potências de base racional e expoente natural presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, peça aos estudantes que façam as **atividades 7** e **8**. Corrija as atividades na lousa.

Reúna os estudantes em grupos e distribua para cada um deles textos científicos em que estejam presentes números expressos em notação científica. Proponha que discutam o significado desses números e escrevam-nos com todos os algarismos. Reserve um momento para que os grupos possam compartilhar o que entenderam sobre os textos e suas conclusões sobre os números.

O foco da situação apresentada não é explorar os conceitos físicos de aceleração, velocidade e distância, e sim exemplificar uma aplicação da potenciação em uma situação que apresenta uma modelagem da realidade.

Sugerimos que a justificativa do conceito de que todo número não nulo elevado a zero é igual a 1 seja apresentada aos estudantes após o trabalho com as propriedades de potência.

(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.

(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

Caso julgue necessário, apresente outros exemplos para a turma ou convide alguns estudantes para que apresentem exemplos para os colegas.

Reproduza os quadros desta página na lousa e complete-os com a participação dos estudantes.

Retome a definição $a^{-1} = \frac{1}{a}$ e pergunte aos estudantes: por que motivo se faz a restrição $a \neq 0$? Espera-se que eles observem que a não pode ser zero pois é o denominador de uma fração e a divisão por zero não existe.

- Qualquer potência de base real e expoente 1 é igual à própria base. Assim, sendo *a* um número real, temos:

$$\boxed{a^1 = a}$$

- Qualquer potência de base real não nula e expoente zero é igual a 1. Assim, sendo *a* um número real, temos:

$$\boxed{a^0 = 1, a \neq 0}$$

Confira estes exemplos.

a) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

b) $(-7)^2 = (-7) \cdot (-7) = 49$

c) $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{625}$

d) $(0,1)^3 = (0,1) \cdot (0,1) \cdot (0,1) = 0,001$

e) $\left(-\frac{5}{8}\right)^1 = -\frac{5}{8}$

f) $(0,666...)^1 = 0,666...$

g) $(0,232323...)^0 = 1$

h) $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

Considere, agora, esta sequência.

125	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$

: 5   : 5   : 5   : 5   : 5   : 5

Podemos escrever esses números na forma de potências de base 5. Como cada termo é o termo anterior dividido por 5, os expoentes das potências de base 5 diminuirão 1 unidade a cada termo.

125	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$
5^3	5^2	5^1	5^0	5^{-1}	5^{-2}	5^{-3}

: 5   : 5   : 5   : 5   : 5   : 5

Analise as potências com expoentes negativos que obtivemos no quadro acima.

$5^{-1} = 1 : 5 = 1 \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ $\qquad$ $5^{-2} = \frac{1}{5} : 5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ $\qquad$ $5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 : 5 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

Qualquer potência de base real não nula e expoente inteiro negativo é igual à potência do inverso da base dada e expoente igual ao oposto do expoente dado. Assim, sendo *a* um número real não nulo e $-n$ um expoente inteiro negativo, temos:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, a \neq 0}$$

Verifique mais alguns exemplos.

a) $2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

b) $(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

Notação científica

Considere as potências de 10 a seguir.

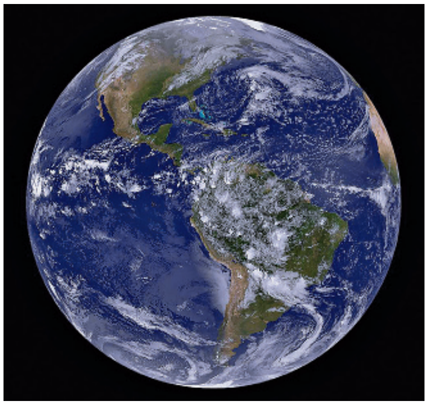
$10^2 = 1\underbrace{00}_{\text{2 zeros}}$ $\quad$ $10^3 = 1\,\underbrace{000}_{\text{3 zeros}}$ $\quad$ $10^4 = 1\underbrace{0\,000}_{\text{4 zeros}}$ $\quad$ $10^5 = 1\underbrace{00\,000}_{\text{5 zeros}}$

Note que cada potência de 10, com expoente natural, é igual a um número representado por 1 seguido de zeros. Assim:

$$10^n = 1\,\underbrace{000\,00...0}_{n \text{ zeros}}$$

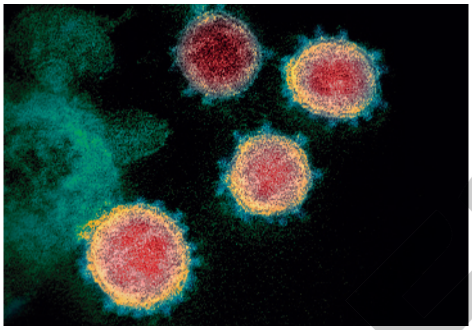
As potências de 10 são utilizadas para expressar números excessivamente grandes ou extremamente pequenos, como nos exemplos a seguir.

NASA



A medida da massa da Terra é de aproximadamente $5{,}972 \cdot 10^{24}$ kg.

As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.



NIAID-RML/NATIONAL INSTITUTES OF HEALTH/ SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Partículas do vírus SARS-CoV-2, causador da Covid-19, em microfotografia em cores realçadas produzida por microscópio eletrônico. Foto ampliada em 191 200 vezes. Segundo estudos, o comprimento do diâmetro desse vírus mede entre $5 \cdot 10^{-8}$ m e $2 \cdot 10^{-7}$ m.

Os números $5{,}972 \cdot 10^{24}$, $5 \cdot 10^{-8}$ e $2 \cdot 10^{-7}$ estão representados em **notação científica**. Nesse tipo de representação, o número que multiplica a potência de base dez deve estar entre o número 1 e o 10.

> Um número escrito em notação científica apresenta o formato $a \cdot 10^b$, em que b é um expoente inteiro e a pertence ao intervalo $1 < a < 10$.

Confira mais alguns exemplos.

a) $3\,000\,000\,000 = 3 \cdot 1\,000\,000\,000 = 3 \cdot 10^9$ ($a = 3$ e $b = 9$)

b) $476\,000\,000\,000\,000\,000 = 4{,}76 \cdot 100\,000\,000\,000\,000\,000 = 4{,}76 \cdot 10^{17}$ ($a = 4{,}76$ e $b = 17$)

c) $0{,}00000008 = 8 \cdot 0{,}00000001 = 8 \cdot 10^{-8}$ ($a = 8$ e $b = -8$)

d) $0{,}0000032 = 3{,}2 \cdot 10^{-6}$ ($a = 3{,}2$ e $b = -6$)

Notação científica

Comente com os estudantes que a notação científica é uma importante aplicação de potenciação e é bastante usada por cientistas como astrônomos, físicos, biólogos, químicos, entre outros.

Embora não seja o foco das atividades do 8º ano, seria interessante recordar aqui as noções de ordem dos números (unidade, dezena, centena...) e associar a notação científica ao reconhecimento da ordem dos números. No 9º ano, fala-se em ordem de grandeza e essa já é uma aproximação.

• Faça a correção de cada item da **atividade 1** com os estudantes.

• O **item a** da **atividade 2** mobiliza procedimentos das unidades temáticas Números e Álgebra, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **3** da BNCC. Nesse item os estudantes devem calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. Para calcular esse valor, os estudantes devem calcular potências de base real e expoente inteiro. Caso tenham dificuldades para fazer os **itens b** e **c**, oriente-os a primeiro calcular as potências para depois efetuar as adições e subtrações.

• Antes que realizem a **atividade 3**, verifique se todos os estudantes perceberam a diferença entre as expressões $(-9)^2$ e -9^2. Depois, enfatize a importância dos parênteses em expressões numéricas e algébricas.

• A **atividade 6** também favorece o desenvolvimento da competência específica **3** da BNCC.

• Resposta da **atividade 7**:

Medidas das distâncias médias de alguns planetas até o Sol		
Planeta	**Medida da distância média ao Sol (km)**	**Medida expressa em notação científica (km)**
Saturno	1 429 400 000	$1{,}4294 \times 10^9$
Vênus	108 200 000	$1{,}082 \times 10^8$
Urano	2 870 990 000	$2{,}87099 \times 10^9$
Mercúrio	57 910 000	$5{,}791 \times 10^7$

Dados obtidos em: https://planetario.ufsc.br/o-sistema-solar/. Acesso em: 4 jul. 2022.

Uma vez que as distâncias são transformadas, podemos conversar com os estudantes sobre aproximações por arredondamento ou por truncamento.

É possível ampliar a proposta da **atividade 7** e solicitar aos estudantes que pesquisem números ou medidas expressas com muitos algarismos em textos científicos e expressem esses números em notação científica.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 Calcule as potências a seguir.

a) 2^4 **1. a)** 16

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **1. b)** 8

c) 2^{-3} **1. c)** $\frac{1}{8}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3}$ **1. d)** $\frac{1}{125}$

e) $(-4)^3$ **1. e)** -64

f) 10^3 **1. f)** 1 000

g) $(0{,}1)^{-2}$ **1. g)** 100

h) $\left(-\frac{3}{7}\right)^{-2}$ **1. h)** $\frac{49}{9}$

i) 10^{-3} **1. i)** $\frac{1}{1\,000}$

j) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$ **1. j)** $\frac{4}{9}$

k) 0^{10} **1. k)** 0

l) $(0{,}181818...)^2$ **1. l)** $\frac{4}{121}$

2 Calcule o valor de:

a) $3x^3 - 2x^2 - x + 5$, para $x = -1$ **2. a)** 1

b) $(-1)^8 - 3 \cdot (-1)^5 + (-1)^{16}$ **2. b)** 5

c) $2^6 - 2^5 + 2^4 - 2^3 + 2^2 - 2^1 + 2^0$ **2. c)** 43

3 Os resultados de $(-9)^2$ e -9^2 são iguais? Justifique sua resposta.
3. não, pois $(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$ e $-9^2 = -9 \cdot 9 = -81$

4 Escreva os números a seguir em notação científica.

a) 5 400 **4. a)** $5{,}4 \cdot 10^3$

b) 0,0025 **4. b)** $2{,}5 \cdot 10^{-3}$

c) 300 000 000 **4. c)** $3{,}0 \cdot 10^8$

d) 0,00000637 **4. d)** $6{,}37 \cdot 10^{-6}$

5 Qual expressão tem maior valor: A ou B?

5. o valor de $A = 35\frac{5}{16}$ é maior que $B = 21\frac{34}{225}$

$$A = \left(\frac{1}{1}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

$$B = \left(\frac{1}{1}\right)^{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$$

6 A partir do repouso, um corpo em queda livre percorre, no vácuo, uma medida de distância d (em metro) que corresponde a $\frac{g \cdot t^2}{2}$, em que g é a medida da aceleração da gravidade (considere $g = 10$ m/s²). Desprezando a resistência do ar, que medida de distância percorre um paraquedista em queda livre durante os 12 primeiros segundos? **6.** 720 m

GERMANSKYDIVER/SHUTTERSTOCK

7 Copie o quadro no caderno e complete com as medidas expressas em notação científica.

7. Resposta em *Orientações*.

Medidas das distâncias médias de alguns planetas até o Sol		
Planeta	**Medida da distância média ao Sol (km)**	**Medida expressa em notação científica (km)**
Saturno	1 429 400 000	
Vênus	108 200 000	
Urano	2 870 990 000	
Mercúrio	57 910 000	

Dados obtidos em: https://planetario.ufsc.br/o-sistema-solar/. Acesso em: 4 jul. 2022.

Propriedades da potenciação para potências de base real e expoente inteiro

Todas as propriedades da potenciação são válidas para as potências de base real e expoente inteiro, desde que as condições para a existência das potências sejam obedecidas.

Produto de potências de mesma base

Em uma multiplicação de potências de mesma base, conservamos a base e adicionamos os expoentes.

$$2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{(2 \cdot 2)}_{2^2} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{2^3} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

Considere mais alguns exemplos.

a) $(0{,}15)^2 \cdot (0{,}15)^3 = (0{,}15)^{2+3} = (0{,}15)^5$

b) $(0{,}777...)^{-1} \cdot (0{,}777...)^5 = (0{,}777...)^{-1+5} = (0{,}777...)^4$

De modo geral: $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$, em que a é um número real não nulo e m e n são números inteiros.

Quociente de potências de mesma base

Em uma divisão de potências de mesma base não nula, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

$$\frac{3^5}{3^3} = \frac{(3 \cdot 3 \cdot \cancel{3 \cdot 3 \cdot 3})}{(\cancel{3 \cdot 3 \cdot 3})} = 3 \cdot 3 = 3^2 = 3^{5-3}$$

Analise mais alguns exemplos.

a) $(0{,}19)^6 : (0{,}19)^2 = (0{,}19)^{6-2} = (0{,}19)^4$

b) $\frac{5^7}{5^{-3}} = 5^{7-(-3)} = 5^{10}$

De modo geral: $\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$, em que a é um número real não nulo e m e n são números inteiros.

Potência de uma potência

Uma potência elevada a um expoente pode ser escrita mantendo-se a base e multiplicando-se os expoentes.

$$(4^2)^4 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2+2+2} = 4^8 = 4^{2 \cdot 4}$$

Verifique mais alguns exemplos.

a) $[(0{,}32)^3]^2 = (0{,}32)^{3 \cdot 2} = (0{,}32)^6$

b) $\left[\left(-\frac{1}{5}\right)^3\right]^5 = \left(-\frac{1}{5}\right)^{3 \cdot 5} = \left(-\frac{1}{5}\right)^{15}$

De modo geral: $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$, em que a é um número real não nulo e m e n são números inteiros.

Propriedades da potenciação para potências de base real e expoente inteiro

Para justificar o conceito de que todo número não nulo elevado a zero é igual a 1, basta considerar que podemos escrever uma potência com expoente igual a zero como uma potência de mesma base e expoente igual a 1 − 1, e daí utilizar a propriedade do quociente de potências de mesma base para verificar que o resultado é 1. Utilizando a linguagem matemática, temos:

- Seja a um número real qualquer diferente de zero. Assim:

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1$$

É possível também justificar a propriedade do quociente de potências de mesma base a partir da propriedade do produto de potências de mesma base e do conceito de potência com expoente inteiro negativo.

- Seja a um número real qualquer diferente de zero e m e n números inteiros. Assim:

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$a^m : a^n = a^m \cdot a^{-n}$$

Pela propriedade do produto de potências de mesma base, temos:

$$a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

Tais justificativas podem ser oferecidas aos estudantes assim que se perceber que eles amadureceram seus conhecimentos sobre as propriedades de potência. Isso também poderá ajudá-los a se convencer da validade dessas propriedades e da relação que estabelecem com as demais.

Comente com os estudantes a importância das propriedades de potenciação para a simplificação dos cálculos.

- Na **atividade 10**, os estudantes vão aplicar algumas das propriedades estudadas. Mostre aos estudantes que na expressão dada há uma dízima periódica que cuja fração geratriz é $\frac{15}{9}$.

Potência de um produto

Em uma multiplicação de dois ou mais fatores elevados a um mesmo expoente, podemos elevar cada um desses fatores a esse mesmo expoente.

$$(2 \cdot 5)^3 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3$$

Verifique mais alguns exemplos.

a) $(2 \cdot 5)^{-3} = 2^{-3} \cdot 5^{-3}$

b) $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

De modo geral: $\boldsymbol{(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m}$, em que a e b são números reais não nulos e m é um número inteiro.

Potência de um quociente

Em uma divisão elevada a um expoente, podemos elevar o dividendo e o divisor a esse mesmo expoente.

$$(7 : 6)^2 = \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \left(\frac{7}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{6}\right) = \frac{7^2}{6^2}$$

Verifique mais alguns exemplos.

a) $(8 : 3)^2 = 8^2 : 3^2$

b) $\left(\frac{4}{3} : \frac{3}{16}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{3}{16}\right)^{-3}$

De modo geral: $\boldsymbol{(a : b)^m = a^m : b^m}$, em que a e b são números reais não nulos e m é um número inteiro.

Observação

Confira atentamente estas desigualdades.

- $2^3 + 2^4 \neq 2^{3+4}$, pois: $24 \neq 128$
- $2^3 - 2^4 \neq 2^{3-4}$, pois: $-8 \neq \frac{1}{2}$
- $(5^2)^3 \neq 5^{2^3}$, pois: $5^6 \neq 5^8$
- $(5 + 3)^2 \neq 5^2 + 3^2$, pois: $64 \neq 34$
- $(5 - 3)^2 \neq 5^2 - 3^2$, pois: $4 \neq 16$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

8 Indique sob a forma de uma só potência.

a) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6$ **8. a)** 2^{18}

b) $(2^3)^2$ **8. b)** 2^6

c) $(6 : 3)^3$ **8. c)** 2^3

d) $10^3 \cdot 10 \cdot 10$ **8. d)** 10^5

e) $(3^4)^{-3}$ **8. e)** 3^{-12}

f) $6^4 : 6^2$ **8. f)** 6^2

g) $(2 \cdot 3)^3$ **8. g)** 6^3

h) $7^{15} : 7^{10}$ **8. h)** 7^5

i) $10^{-1} \cdot 10^2 \cdot 10^{-1}$ **8. i)** 10^0

9 Calcule o valor de cada potência usando as propriedades da potenciação.

a) $\frac{2^4 \cdot 2^{10} \cdot 2^3}{2^5 \cdot 2^6}$ **9. a)** 64

b) $(7 \cdot 4)^2$ **9. b)** 784

c) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$ **9. c)** $\frac{1}{64}$

d) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$ **9. d)** $\frac{1}{64}$

10 Determine o valor da expressão numérica:

$(1{,}666...)^{-1} + \frac{(3^{10} \cdot 3^{-5})^3}{9^8}$ **10.** $\frac{14}{15}$

11 Calcule o valor das expressões numéricas.

a) $3^2 \cdot 4^1 - 2^0 + 3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3$ **11. a)** 764

b) $(-2)^{-6} \cdot 8^2 + 3^0$ **11. b)** 2

c) $6^1 \cdot 3^{-2} + 4^{-1} - 4 \cdot 7^0$ **11. c)** $-\frac{37}{12}$

d) $8^4 \cdot 8^3 \cdot 8^4 : 8^8$ **11. d)** 512

12 Em seu caderno, avalie cada sentença como verdadeira ou falsa.

a) $(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$ **12. a)** verdadeira

b) $(2 + 5)^3 = 2^3 + 5^3$ **12. b)** falsa

c) $(17 - 1)^2 = 17^2 - 1^2$ **12. c)** falsa

2 Radiciação

No movimento de queda livre de um objeto a partir do repouso apresentado no início do tópico *Potenciação*, indicamos que esse objeto percorre, durante uma medida de tempo (t), em segundo, uma medida de distância (d), em metro, que corresponde aproximadamente a: $d = \frac{g \cdot t^2}{2}$, em que g é a medida da aceleração da gravidade a que um objeto está submetido, correspondendo a 10 m/s² para um objeto próximo à superfície terrestre.

Se soltássemos uma esfera metálica de uma altura medindo, por exemplo, 320 m (a mesma medida da altura da Torre Eiffel), desprezando a resistência do ar, após 2 segundos, a esfera teria percorrido aproximadamente 20 m. Agora, vamos determinar a medida aproximada do tempo que essa esfera demoraria para chegar ao solo.

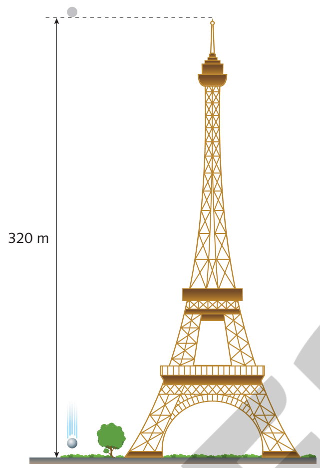
$$d = \frac{g \cdot t^2}{2}$$

$$320 = \frac{10 \cdot t^2}{2}$$

$$10 \cdot t^2 = 640$$

$$t^2 = \frac{640}{10}$$

$$t^2 = 64$$



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabemos que t representa a medida do tempo da queda e, por isso, $t > 0$. Para obter o número positivo que elevado ao quadrado resulta em 64, fazemos:

$$\sqrt{64} = 8$$

Logo:

$$t = \sqrt{64}$$

$$t = 8$$

Portanto, a esfera metálica levaria aproximadamente 8 segundos para chegar ao solo.

Nesses cálculos realizados para encontrar a medida aproximada do tempo de queda da esfera metálica, utilizamos as operações de multiplicação, divisão e **radiciação**.

Nesse exemplo, vimos que $\sqrt{64} = 8$, pois $8^2 = 64$.

Além da raiz quadrada $\left(\sqrt{\ } \text{ ou } \sqrt[2]{\ }\right)$, temos também as raízes cúbicas $\left(\sqrt[3]{\ }\right)$, quartas $\left(\sqrt[4]{\ }\right)$, quintas $\left(\sqrt[5]{\ }\right)$, entre outras. Os números 2, 3, 4 e 5 nesses símbolos são chamados **índices**.

Raiz quadrada

A **raiz quadrada** de um número real positivo x é um número **não negativo** que, elevado ao quadrado, resulta em x.

Confira alguns exemplos.

a) $\sqrt{36} = 6$, pois: $6^2 = 36$ **b)** $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$, pois: $(0{,}4)^2 = 0{,}16$ **c)** $\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{7}{9}$, pois: $\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$

Observação

Há dois números que, elevados ao quadrado, resultam em 64:

$$8^2 = 64 \text{ e } (-8)^2 = 64$$

Porém, pela definição, a raiz quadrada é um número não negativo. Logo, $\sqrt{64} = 8$.

49

Comente com os estudantes que a radiciação é a operação matemática inversa da potenciação. Enquanto a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, a radiciação busca descobrir que fatores são esses, dando o resultado dessa multiplicação.

(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

Radiciação

BNCC:

- Competências específicas 3 e 5 (as descrições estão na página VII).
- Habilidade EF08MA02.

Objetivos:

- Calcular a raiz enésima de um número real.
- Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação.

Justificativa

Calcular a raiz enésima de um número real amplia os conhecimentos dos estudantes sobre raízes quadradas e favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA02**.

Mapeando conhecimentos

Proponha o seguinte questionamento para a turma: "Calcular a raiz quadrada é a operação inversa de qual operação? Qual é o valor de $\sqrt{36}$? E de $\sqrt{121}$?". Deixe-os à vontade para conjecturar e calcular as raízes quadradas utilizando suas estratégias pessoais. Depois, proponha a seguinte questão: "Qual é a medida do comprimento da aresta de um cubo que tem 27 cm³ de medida de volume? Como você fez para descobrir? Você conhece alguma operação que permita determinar diretamente a medida do comprimento dessa aresta? Se sim, qual?". Caso os estudantes não apresentem dificuldades para responder a essas questões, pergunte se já ouviram falar em raízes quartas, quintas e assim por diante.

Para as aulas iniciais

Na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*, retoma-se a raiz quadrada de números racionais. Faça a leitura coletiva dessa revisão com a turma e solicite aos estudantes que façam as **atividades** de **9** a **13** da seção, em duplas. Reserve um momento para tirar as dúvidas e discutir coletivamente as atividades nas quais apresentaram mais dificuldades.

Retome as questões da dinâmica inicial em que tiveram mais dificuldades e ajude-os a respondê-las. Após sanar possíveis dúvidas sobre o cálculo da medida do comprimento da aresta do cubo, desafie-os a calcular a raiz cúbica de outros números.

Se possível, apresente aos estudantes o método geométrico para representar os números quadrados perfeitos, no qual utilizamos a figura do quadrado e associamos o número à sua medida de área. Esse entendimento favorece o desenvolvimento da competência específica **3**.

Raiz quadrada exata

Considere as operações:

- $1 \cdot 1 = 1^2 = 1$
- $2 \cdot 2 = 2^2 = 4$
- $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$
- $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$
- $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$
- $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$
- $7 \cdot 7 = 7^2 = 49$
- $8 \cdot 8 = 8^2 = 64$
- $9 \cdot 9 = 9^2 = 81$
- $10 \cdot 10 = 10^2 = 100$
- $11 \cdot 11 = 11^2 = 121$
- $12 \cdot 12 = 12^2 = 144$

Os números 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 e 144 são exemplos de **quadrados perfeitos**, pois podem ser escritos como uma potência de base racional e expoente 2.

Se x for um número racional e for quadrado perfeito, $\sqrt{x}$ será um número racional. Em casos assim, podemos obter a **raiz quadrada exata** desses números.

Assim:

- $\sqrt{1} = 1$
- $\sqrt{4} = 2$
- $\sqrt{9} = 3$
- $\sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{36} = 6$
- $\sqrt{49} = 7$
- $\sqrt{64} = 8$
- $\sqrt{81} = 9$
- $\sqrt{100} = 10$
- $\sqrt{121} = 11$
- $\sqrt{144} = 12$

Para determinar a raiz quadrada de números quadrados perfeitos, podemos utilizar a decomposição em fatores primos.

Analise os exemplos.

a) Vamos determinar a raiz quadrada de 1 296.

Inicialmente, decompomos 1 296 em fatores primos.

$$\begin{array}{r|l} 1\,296 & 2 \\ 648 & 2 \\ 324 & 2 \\ 162 & 2 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$1\,296 = 2^4 \cdot 3^4$

$1\,296 = (2^2 \cdot 3^2)^2 = 36^2$

Portanto, $\sqrt{1\,296} = 36$, pois $36^2 = 1\,296$.

b) Vamos determinar a raiz quadrada de 10,89.

Inicialmente, transformamos o número decimal 10,89 na fração decimal $\frac{1\,089}{100}$.

Em seguida, decompomos em fatores primos o numerador e o denominador. Confira:

$$\frac{1\,089}{100} = \frac{3^2 \cdot 11^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{(3 \cdot 11)^2}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{33^2}{10^2} = \left(\frac{33}{10}\right)^2 = (3{,}3)^2$$

Portanto, $\sqrt{10{,}89} = \sqrt{\left(\frac{33}{10}\right)^2} = \frac{33}{10} = 3{,}3$, pois $(3{,}3)^2 = 10{,}89$.

Observação

Se x for um número não negativo e não for quadrado perfeito, $\sqrt{x}$ será um número com infinitas casas decimais não periódicas, ou seja, será um número irracional.

Verifique os exemplos.

a) 3 não é um quadrado perfeito e $\sqrt{3}$ é um número irracional.

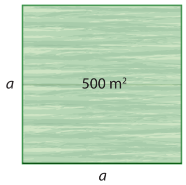
b) $\frac{1}{11}$ não é um quadrado perfeito e $\sqrt{\frac{1}{11}}$ é um número irracional.

Raiz quadrada aproximada

Podemos calcular a raiz quadrada de qualquer número real não negativo, mas, se ela for um número irracional, não será exata. Nesse caso, podemos obter um valor aproximado, ou seja, uma **raiz quadrada aproximada**.

Acompanhe a situação.

Jonas comprou um terreno quadrado que tem medida de área igual a 500 m². Qual é a medida de comprimento do lado desse terreno?



GUILHERME CASAGRANDI/ ARQUIVO DA EDITORA

Considerando a como a medida de comprimento do lado do quadrado que representa o terreno, temos:

$$a \cdot a = 500 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 500 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{500}$$

Portanto, a medida de comprimento do lado do terreno é $\sqrt{500}$ metros. Mas qual é o valor de $\sqrt{500}$?

Com o auxílio de uma calculadora, poderíamos facilmente determinar o valor aproximado de $\sqrt{500}$. Porém, como nem sempre podemos contar com uma calculadora, vamos aprender a estimar esse valor por meio do uso de quadrados perfeitos.

Note que o número 500 situa-se entre os quadrados perfeitos 484 e 529.

Como $\sqrt{484} = 22$ e $\sqrt{529} = 23$, $\sqrt{500}$ é um número que está entre 22 e 23.

Calculamos os quadrados de alguns números situados entre 22 e 23, com uma casa decimal. Confira:

$22{,}1^2 = 488{,}41$

$22{,}2^2 = 492{,}84$

$22{,}3^2 = 497{,}29 \quad (< 500)$

$22{,}4^2 = \mathbf{501{,}76} \quad (> 500)$

Assim, 22,4 corresponde a uma aproximação de $\sqrt{500}$ com uma casa decimal.

Ao trabalhar o cálculo de raízes quadradas de números reais que têm raiz exata, incentive os estudantes a decompor o número em fatores primos ou, caso o número não seja inteiro, solicite a eles que obtenham, antes de calcular a raiz quadrada, a forma fracionária. Ambas as estratégias não só retomam os conteúdos que já foram trabalhados, como também facilitam os cálculos de extração da raiz quadrada.

No cálculo de raízes quadradas aproximadas é fundamental que os estudantes conheçam os quadrados perfeitos ou a raiz quadrada exata de alguns números (mesmo que não sejam quadrados perfeitos) para realizar as aproximações. Incentive-os a utilizar a calculadora para dar mais significado a esses cálculos, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência específica **5**.

Se julgar oportuno, comente com os estudantes que há um método chamado **dicotomia** que permite calcular a raiz quadrada aproximada de um número real. Se necessário, pode-se propor aos estudantes que, em grupos, pesquisem esse método e depois compartilhem com os demais colegas o que entenderam dele.

As atividades propostas exploram procedimentos matemáticos para o cálculo da raiz quadrada não exata e têm por intenção colaborar para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA02**.

As atividades desta página oferecem muitas oportunidades de exploração da relação entre potenciação e radiciação, incluindo a habilidade de realizar estimativas e a aplicação das propriedades já apresentadas. Se for interessante, a **atividade 15** pode ser realizada logo em seguida.

- Na **atividade 13**, é importante que os estudantes reconheçam os números quadrados perfeitos.
- Para a **atividade 14**, peça aos estudantes que estimem, inicialmente, entre quais números naturais se encontra a raiz quadrada pedida; dessa forma, a parte inteira já fica determinada.
- A **atividade 16** pode ser realizada segundo várias estratégias; então, deixe que os estudantes formulem suas resoluções, que podem incluir estimativas, reconhecimento de quadrados perfeitos e a confirmação com a calculadora. Compartilhe todas as resoluções.
- A **atividade 17** oferece oportunidade de se explorar as habilidades de aproximação por arredondamento ou truncamento.
- Não deixe de aproveitar a **atividade 19** para retomar a decomposição em fatores primos e as propriedades da potenciação.

Para uma maior aproximação, podemos calcular os quadrados de números de duas casas decimais situados entre 22,3 e 22,4. Verifique:

$22{,}31^2 = 497{,}7361$
$22{,}32^2 = 498{,}1824$
$22{,}33^2 = 498{,}6289$
$22{,}34^2 = 499{,}0756$
$22{,}35^2 = 499{,}5225$
$22{,}36^2 =$ **499,9696** (< 500)
$22{,}37^2 = 500{,}4169$ (> 500)

LÉO FANELLI/ ARQUIVO DA EDITORA

Assim, 22,36 corresponde a uma aproximação de $\sqrt{500}$ com duas casas decimais.

Logo, o comprimento do lado desse terreno mede aproximadamente 22,36 metros.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

13 Determine o valor das raízes quadradas.

a) $\sqrt{81}$ **13. a)** 9
b) $\sqrt{0}$ **13. b)** 0
c) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ **13. c)** $\frac{2}{5}$
d) $\sqrt{144}$ **13. d)** 12
e) $\sqrt{1}$ **13. e)** 1
f) $\sqrt{\frac{64}{169}}$ **13. f)** $\frac{8}{13}$
g) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ **13. g)** $\frac{1}{4}$
h) $\sqrt{225}$ **13. h)** 15
i) $\sqrt{0{,}49}$ **13. i)** 0,7

14 Determine a raiz quadrada dos números com aproximação de uma casa decimal.

a) 40 **14. a)** 6,3
b) 65 **14. b)** 8,1
c) 85 **14. c)** 9,2
d) 93 **14. d)** 9,6
e) 122 **14. e)** 11,0
f) 140 **14. f)** 11,8
g) 800 **14. g)** 28,3
h) 940 **14. h)** 30,7
i) 1 010 **14. i)** 31,8
j) 1 050 **14. j)** 32,4

15 Sabendo que os números abaixo são quadrados perfeitos, determine a raiz quadrada de cada um deles.

a) 1 225 **15. a)** 35
b) 2 401 **15. b)** 49
c) 3 136 **15. c)** 56
d) 6 561 **15. d)** 81
e) 6 400 **15. e)** 80
f) 7 744 **15. f)** 88

16 Determine a raiz quadrada dos números a seguir.

a) 1,44 **16. a)** 1,2
b) 12,96 **16. b)** 3,6
c) 30,25 **16. c)** 5,5
d) 72,25 **16. d)** 8,5
e) 39,69 **16. e)** 6,3
f) 94,09 **16. f)** 9,7

17 Utilizando uma calculadora, determine a raiz quadrada destes números, com aproximação de duas casas decimais.

a) 30 **17. a)** 5,48
b) 8,6 **17. b)** 2,93
c) 77 **17. c)** 8,77
d) 110 **17. d)** 10,49
e) 95 **17. e)** 9,75
f) 50,8 **17. f)** 7,13
g) 150 **17. g)** 12,25
h) 86,25 **17. h)** 9,29
i) 94 **17. i)** 9,70
j) 125 **17. j)** 11,18

18 Determine o valor das adições, com aproximação de uma casa decimal.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **18. a)** 3,1
b) $\sqrt{5} + \sqrt{7}$ **18. b)** 4,9
c) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ **18. c)** 4,0
d) $\sqrt{7} + \sqrt{11}$ **18. d)** 6,0

19 Determine o menor número inteiro não nulo pelo qual devemos multiplicar 360 para obter como resultado um quadrado perfeito. **19.** 10

20 Faça os cálculos mentalmente, começando pela raiz quadrada de 1. **20.** 7

$$\sqrt{43 + \sqrt{31 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{3 + \sqrt{1}}}}}}}$$

21 Determine o valor de x, com uma casa decimal, que satisfaça $\sqrt{36} < x < \sqrt{38}$. **21.** 6,1

22 Coloque em ordem crescente os números $\sqrt{8}$, $\sqrt{4}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{7}{2}$. **22.** $\frac{4}{5} < \sqrt{4} < \sqrt{8} < \frac{7}{2}$

23 A raiz quadrada de um número natural compreendido entre 200 e 250 é um número inteiro. Que número é esse? **23.** 225

24 Um quadrado tem medida de área igual a 60 cm². Qual é a medida de comprimento do lado desse quadrado, com aproximação de duas casas decimais?
24. aproximadamente, 7,75 cm

Raiz enésima

O processo usado para obter o valor de outras raízes é similar ao utilizado para obter o valor das raízes quadradas.

A **raiz enésima** de um número real *a*, que tem como índice um número natural $n \geqslant 2$, é assim representada:

$$\sqrt[n]{a}$$

índice: n; radicando: a

O cálculo da raiz enésima pode ser analisado considerando-se dois casos: o **índice *n* par** e o **índice *n* ímpar**.

- A raiz enésima de índice par de um número real a ($a \geqslant 0$) é o número real b ($b \geqslant 0$) tal que $b^n = a$. Assim, temos:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ se, e somente se, } b^n = a \text{ e } b \geqslant 0$$

Analise os exemplos.

a) $\sqrt[4]{0{,}0081} = 0{,}3$, pois $0{,}3^2 = 0{,}0081$ e $0{,}3 > 0$. **b)** $\sqrt[6]{64} = 2$, pois $2^6 = 64$ e $2 > 0$.

Observação

Se *a* for um número real negativo, a raiz enésima de *a*, com *n* par, não será um número real. Dessa forma, $\sqrt{-0{,}25}$ e $\sqrt[6]{-1}$ não são números reais. Isso ocorre porque não existe um número real que, elevado a um expoente par, resulte em um número negativo.

- A raiz enésima de índice ímpar de um número real a é o número real b tal que $b^n = a$. Assim, temos:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ se, e somente se, } b^n = a$$

Analise os exemplos.

a) $\sqrt[3]{-125} = -5$, pois: $(-5)^3 = -125$

b) $\sqrt[5]{1\,024} = 4$, pois: $(4)^5 = 1\,024$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

25 A raiz cúbica de um número natural compreendido entre 200 e 400 é um número ímpar. Que número é esse? **25.** 343

26 A medida V de volume de um cubo é 200 dm³. Qual é a medida a de comprimento da aresta desse cubo com aproximação de uma casa decimal sabendo que $V = a^3$? **26.** aproximadamente 5,8 dm.

27 Determine as raízes dos números a seguir.

a) $\sqrt[3]{64}$ **27. a)** 4

b) $\sqrt[3]{-27}$ **27. b)** –3

c) $\sqrt[6]{64}$ **27. c)** 2

d) $\sqrt[3]{0{,}343}$ **27. d)** 0,7

e) $\sqrt[5]{243}$ **27. e)** 3

f) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}}$ **27. f)** $\frac{2}{5}$

Raiz enésima

Verifique se os estudantes reconhecem os termos de um radical e compreendem as condições de existência. Após apresentar os exemplos desta página, explore outros com a turma.

- Após os estudantes realizarem a **atividade 25**, incentive-os a compartilhar como fizeram.
- Faça a correção de cada item da **atividade 27** com os estudantes; essa é outra oportunidade de retomar as propriedades da potenciação e da decomposição em fatores primos.

O boxe *Veja que interessante* favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA02**, uma vez que explora a representação de raízes como potências de expoente fracionário. Antes de abordar o conteúdo do boxe com a turma, pergunte: "Qual é o significado de uma potência com expoente fracionário?". Verifique as hipóteses levantadas por eles. Depois, escreva na lousa a potência $3^{\frac{1}{2}}$ e peça aos estudantes que elevem essa potência ao quadrado. Oriente-os a aplicar a propriedade da potência de uma potência. Espera-se que todos obtenham como resultado o número 3. Depois, recorde que $\sqrt{3}$ elevado ao quadrado também é igual a 3 e verifique se concluem que $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$. Repita o mesmo procedimento com outras potências de expoente fracionário e explore os exemplos da página.

Veja que interessante

Faça as atividades no caderno.

Potência com expoente fracionário

Estudamos potências de base real e expoente inteiro, mas o expoente de uma potência também pode ser um número na ~~forma~~ de fração. Por exemplo:

a) $3^{\frac{1}{2}}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$

c) $0{,}25^{\frac{3}{5}}$

d) $1{,}3^{\frac{1}{7}}$

As propriedades de potências com expoentes inteiros continuam válidas quando o expoente é um número racional e a base é um número real positivo.

Assim, aplicando a propriedade da potência de uma potência e a definição de raiz enésima, temos:

a) $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^{\frac{1}{2}\cdot 2} = 3^1$

Como $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^1$ e $3^{\frac{1}{2}} > 0$, então: $\sqrt[2]{3^1} = 3^{\frac{1}{2}}$

b) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^{\frac{2}{3}\cdot 3} = 5^2$

Como $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 5^2$, então: $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

c) $\left(0{,}25^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 0{,}25^{\frac{3}{5}\cdot 5} = 0{,}25^3$

Como $\left(0{,}25^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 0{,}25^3$, então: $\sqrt[5]{0{,}25^3} = 0{,}25^{\frac{3}{5}}$

d) $\left(1{,}3^{\frac{1}{7}}\right)^7 = 1{,}3^{\frac{1}{7}\cdot 7} = +1{,}3$

Como $\left(1{,}3^{\frac{1}{7}}\right)^7 = 1{,}3^1$, então: $\sqrt[7]{1{,}3^1} = 1{,}3^{\frac{1}{7}}$

Da mesma maneira, podemos escrever outras potências de expoente fracionário como raiz.

De modo geral, para todo número real positivo *a*, número inteiro *m* e número natural *n* e $n \geqslant 2$, temos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Atividades

Veja que interessante: a) 0,1
b) Resposta pessoal.
c) Resposta pessoal.

a) Calcule $0{,}16^{\frac{1}{2}} - 0{,}027^{\frac{1}{3}}$

b) Escreva uma raiz em uma folha avulsa. Em seguida, troque de folha com um colega e escreva a raiz indicada por ele como potência de expoente fracionário. Confira se a representação do seu colega está correta.

c) Junte-se a um colega e escreva três raízes quadradas exatas. Em seguida, peça a ele que calcule os valores dessas três raízes, escrevendo-as como potências de expoente fracionário e utilizando a decomposição em fatores primos e as propriedades de potenciação. Por fim, verifique se as representações e os cálculos que seu colega fez estão corretos.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Potenciação

- Qualquer potência de base real e expoente inteiro maior que 1 é produto dessa base por ela mesma tantas vezes quantas indica o expoente. Assim, sendo a um número real e n um número inteiro maior que 1, temos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ fatores}}, n > 1$$

- Qualquer potência de base real e expoente 1 é igual à própria base. Assim, sendo a um número real, temos:

$$a^1 = a$$

- Qualquer potência de base real não nula e expoente zero é igual a 1. Assim, sendo a um número real, temos:

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

- Qualquer potência de base real não nula e expoente inteiro negativo é igual à potência do inverso da base dada e expoente igual ao oposto do expoente dado. Assim, sendo a um número real não nulo e $-n$ um expoente inteiro negativo, temos:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, a \neq 0$$

Notação científica

Um número escrito em notação científica apresenta o formato $a \cdot 10^b$, em que b é um expoente inteiro e a é um número racional que pertence ao intervalo $1 < a < 10$.

1. Calcule as potências a seguir.

a) 3^3 **1. a)** 27

b) -2^2 **1. b)** -4

c) $(-2)^2$ **1. c)** 4

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ **1. d)** $\frac{4}{9}$

e) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$ **1. e)** $\frac{25}{16}$

f) 5^0 **1. f)** 1

g) $(-1)^3$ **1. g)** -1

h) 2^1 **1. h)** 2

2. Calcule o valor das expressões.

a) $3x^2 - x^{-1} + 2$, para $x = -1$ **2. a)** 6

b) $(-1)^2 - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **2. b)** -11

c) $2^0 + 4^2 \cdot 3 : \left(\frac{1}{2}\right)$ **2. c)** 97

3. Escreva os números a seguir em notação científica.

a) 0,27 **3. a)** $2{,}7 \cdot 10^{-1}$

b) 895 **3. b)** $8{,}95 \cdot 10^2$

c) 3 600 **3. c)** $3{,}6 \cdot 10^3$

d) 0,0012 **3. d)** $1{,}2 \cdot 10^{-3}$

e) 50 000 000 **3. e)** $5 \cdot 10^7$

f) 0,000000044 **3. f)** $4{,}4 \cdot 10^{-8}$

Propriedades da potenciação para potências de base real e expoente inteiro

Produto de potências de mesma base

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, em que a é um número real não nulo e m e n são números inteiros.

Quociente de potências de mesma base

$a^m : a^n = a^{m-n}$, em que a é um número real não nulo e m e n são números inteiros.

Potência de uma potência

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, em que a é um número real não nulo e m e n são números inteiros.

Potência de um produto

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, em que a e b são números reais não nulos e m é um número inteiro.

Potência de um quociente

$(a : b)^m = a^m : b^m$, em que a e b são números reais não nulos e m é um número inteiro.

4. Indique cada item como uma só potência.

a) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3^9$ **4. a)** 3^{18}

b) $(5^2)^3$ **4. b)** 5^6

c) $(2^3)^{-2}$ **4. c)** 2^{-6}

d) $8^3 : 8^5$ **4. d)** 8^{-2}

e) $2^1 \cdot 4^1 \cdot 4^2 \cdot 4^0$ **4. e)** 2^7

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Potenciação

- Na **atividade 1**, os estudantes podem calcular as potências mentalmente ou por meio da aplicação da ideia de multiplicação de fatores iguais. Dê maior atenção aos **itens b** e **c** para reforçar que seus resultados são diferentes por causa do uso dos parênteses. No **item b**, espera-se que eles percebam que $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$. Já no **item c**, espera-se que eles concluam que $(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$. Faça a correção coletiva dos demais itens.
- A **atividade 2** propõe o cálculo do valor de algumas expressões numéricas. É importante que os estudantes primeiro calculem as potências presentes em cada expressão para depois efetuar as demais operações. Caso seja necessário, retome com a turma a ordem em que as operações devem ser realizadas em uma expressão numérica.
- Na **atividade 3**, é solicitado aos estudantes que escrevam alguns números em notação científica. É possível que alguns deles reconheçam que um número escrito em notação científica apresenta o formato $a \cdot 10^b$, em que b é um expoente inteiro, mas não levem em consideração que a é um número racional maior que 1 e menor do que 10. Dessa forma, podem, por exemplo, no caso do **item b**, escrever erroneamente 895 como $89{,}5 \cdot 10$. Alerte-os para esse detalhe caso seja necessário.
- A **atividade 4** explora as diferentes propriedades da potenciação para potências de base real e expoente inteiro. Ao realizar a correção coletiva da atividade, incentive-os a verbalizar quais propriedades empregaram em cada item.

• Na **atividade 5**, os estudantes devem aplicar as propriedades da potenciação para calcular o valor de algumas expressões numéricas. Oriente-os a fazer os cálculos passo a passo. Depois, faça a correção coletiva de cada item na lousa.

Radiciação

• Na **atividade 6**, incentive os estudantes a determinar as raízes quadradas mentalmente. Espera-se que eles reconheçam que os radicandos são quadrados perfeitos.

• Na **atividade 7**, os estudantes devem utilizar a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de uma calculadora para determinar a raiz aproximada de alguns números racionais. Verifique se eles percebem que, diferente da **atividade 6**, os radicandos não são quadrados perfeitos.

• A **atividade 8** solicita aos estudantes que calculem raízes quadradas com aproximação de uma casa decimal. Eles podem utilizar a estratégia que quiserem. Ao final, peça a alguns estudantes que compartilhem como fizeram. Isso pode ajudá-los a ampliar o seu repertório de cálculo e favorece o desenvolvimento da competência geral 9 da BNCC.

• A **atividade 9** propõe aos estudantes o cálculo do valor de expressões numéricas envolvendo raízes quadradas. Você pode realizar os itens coletivamente, caso ache pertinente.

• A **atividade 10** propõe questões para os estudantes responderem. Para responder à questão do **item a**, eles podem adotar diferentes estratégias. Uma delas é a da tentativa e erro. No **item b**, para determinar a raiz quadrada de 11 236, oriente-os a decompor esse número em fatores primos. Para responder à questão proposta no **item c**, incentive-os a traduzir o enunciado para a linguagem algébrica:

$\dfrac{\sqrt{x}}{3} = 12$, em que x é um número racional maior do que zero.

Manipulando a equação acima, os estudantes devem obter que:

$\sqrt{x} = 36$

Ao chegar nesta etapa, oriente-os a determinar o número racional positivo x cuja raiz quadrada é igual a 36. Espera-se que eles percebam que $x = 36^2 = 1\,296$.

• Na **atividade 11**, os estudantes vão calcular algumas raízes enésimas. É importante que eles estejam atentos ao sinal do radicando e também à paridade do índice. Após chegarem aos resultados, incentive-os a verificar se estão corretos realizando a operação inversa.

5. Calcule o valor das expressões numéricas.

a) $4^4 : 4^3 + 3 \cdot 3^2$ **5. a)** 31

b) $(2^3)^2 - (2^3)^2$ **5. b)** 0

c) $(-1)^3 + 3^4 : 3^4$ **5. c)** 0

d) $3^0 + 5^3 : 5^2$ **5. d)** 6

e) $(2^4)^2 : 4^1 + 3^0 - 3^2$ **5. e)** 56

Radiciação

Raiz quadrada

A **raiz quadrada** de um número real positivo x é um número **não negativo** que, elevado ao quadrado, resulta em x.

Raiz quadrada exata

Os números 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 e 144 são exemplos de **quadrados perfeitos**, pois podem ser escritos como uma potência de base racional e expoente 2.

Se x for um número racional e for quadrado perfeito, $\sqrt{x}$ será um número racional. Em casos assim, podemos obter a **raiz quadrada exata** desses números.

Raiz quadrada aproximada

Se x for um número não negativo e não for quadrado perfeito, $\sqrt{x}$ será um número com infinitas casas decimais não periódicas, ou seja, será um número irracional.

Nos casos em que a raiz é um número irracional, podemos obter um valor aproximado, ou seja, uma **raiz quadrada aproximada**.

6. Determine os valores das raízes quadradas.

a) $\sqrt{49}$ **6. a)** 7

b) $\sqrt{25}$ **6. b)** 5

c) $\sqrt{169}$ **6. c)** 13

d) $\sqrt{225}$ **6. d)** 15

e) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ **6. e)** $\dfrac{2}{3}$

f) $\sqrt{\dfrac{16}{49}}$ **6. f)** $\dfrac{4}{7}$

g) $\sqrt{\dfrac{121}{100}}$ **6. g)** $\dfrac{11}{10}$

h) $\sqrt{\dfrac{4}{169}}$ **6. h)** $\dfrac{2}{13}$

i) $\sqrt{\dfrac{25}{225}}$ **6. i)** $\dfrac{1}{5}$

7. Utilizando uma calculadora, determine a raiz quadrada dos números, com aproximação de duas casas decimais.

a) $\sqrt{27}$ **7. a)** 5,20

b) $\sqrt{300}$ **7. b)** 17,32

c) $\sqrt{6}$ **7. c)** 2,45

d) $\sqrt{2{,}5}$ **7. d)** 1,58

8. Calcule as raízes a seguir com aproximação de uma casa decimal.

a) $\sqrt{75}$ **8. a)** 8,7

b) $\sqrt{7}$ **8. b)** 2,6

c) $\sqrt{3{,}57}$ **8. c)** 1,9

d) $\sqrt{500}$ **8. d)** 22,4

9. Calcule o valor das expressões.

a) $\sqrt{13^2 - 12^2}$ **9. a)** 5

b) $\sqrt{1{,}21} + \sqrt{1{,}44} + \sqrt{0{,}49} + \sqrt{0{,}16} + \sqrt{0{,}36}$ **9. b)** 4

c) $\sqrt{16} + \sqrt{\dfrac{1}{9}} + \sqrt{\dfrac{1}{4}} + 7^1 - 12^0$ **9. c)** $\dfrac{65}{6}$

10. Responda às questões. **10. b)** 106

a) Qual é o maior número inteiro quadrado perfeito de quatro algarismos? **10. a)** 9 801

b) Qual é a raiz quadrada do número 11 236?

c) A terça parte da raiz quadrada de um número x é igual a 12. Qual é o valor de x? **10. c)** 1 296

Raiz enésima

A **raiz enésima** de um número real a, que tem como índice um número natural $n \geqslant 2$, é assim representada:

índice

$\sqrt[n]{a}$

radicando

O cálculo da raiz enésima pode ser analisado considerando-se dois casos: o **índice *n* par** e o **índice *n* ímpar**.

- A raiz enésima de índice par de um número real a $(a \geqslant 0)$ é o número real b $(b \geqslant 0)$ tal que $b^n = a$. Assim, temos:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ se, e somente se, } b^n = a \text{ e } b \geqslant 0$$

- A raiz enésima de índice ímpar de um número real a é o número real b tal que $b^n = a$. Assim, temos:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ se, e somente se, } b^n = a.$$

11. Determine as raízes dos números a seguir.

a) $\sqrt[3]{-729}$ **11. a)** -9

b) $\sqrt[5]{32}$ **11. b)** 2

c) $\sqrt[4]{81}$ **11. c)** 3

d) $\sqrt[6]{\dfrac{729}{4\,096}}$ **11. d)** $\dfrac{3}{4}$

12. Simplifique a expressão abaixo. **12.** $-\dfrac{8}{7}$

$$\frac{\sqrt[2]{\sqrt{16} + 5\sqrt[3]{1\,000} + 10^1}}{\sqrt[3]{-343}}$$

56

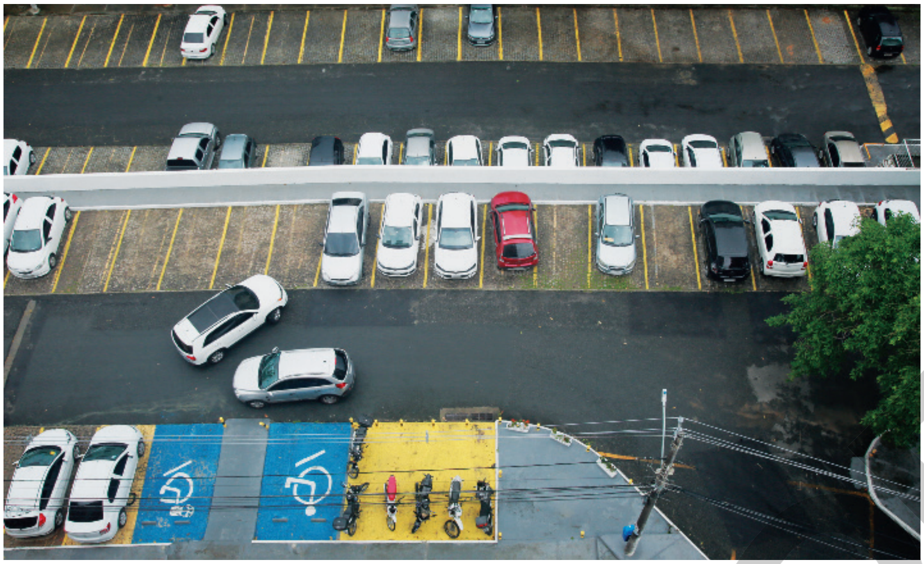
• A **atividade 12** propõe a simplificação de uma expressão numérica. Caso os estudantes tenham dificuldade, oriente-os a simplificar as expressões do numerador e denominador separadamente e, depois, calcular a razão entre elas.

Capítulo 3

Sistemas de equações do 1º grau

Trocando ideias

O art. 25 do Decreto Federal nº 5.296/04 que regulamenta a Lei Federal nº 10.098/00, também consolidada na Resolução 304/08, estabelece a obrigatoriedade de reservar 2% do total de vagas regulamentadas de estacionamento para veículos que transportem pessoas com alguma deficiência física ou visual.


JOA_SOUZA/GETTY IMAGES

Estacionamento localizado na cidade de Salvador (BA). Foto de 2021.

- Em sua opinião, por que é importante que os estacionamentos tenham vagas reservadas para veículos que transportam pessoas com alguma deficiência física ou visual? Converse com os colegas.
- Considere que um estacionamento tem 500 vagas, que *x* indica a quantidade de vagas que não são reservadas para veículos que transportam pessoas com alguma deficiência física ou visual e que *y* indica a quantidade de vagas reservadas a esse público. Então, faça o que se pede.
  - **a)** Escreva, em seu caderno, uma equação que relacione *x* e *y*.
  - **b)** Que valores *x* e *y* podem assumir?
  - **c)** Calculem a quantidade de vagas reservadas e não reservadas para veículos que transportam pessoas com alguma deficiência física ou visual nesse estacionamento.

Neste capítulo, vamos estudar a resolução de problemas envolvendo **sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.**

Trocando ideias: primeiro item: resposta pessoal; segundo item: **a)** $x + y = 500$; **b)** valores naturais, porque *x* e *y* correspondem ao número de vagas de estacionamento; **c)** $y = 10$ e $x = 490$

57

CAPÍTULO 3 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Trocando ideias

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 5, 6 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Conscientizar os estudantes sobre a importância das vagas reservadas nos estacionamentos para veículos que transportam pessoas com alguma deficiência física ou visual.
- Verificar se os estudantes conseguem resolver problemas por meio de uma equação do 1º grau com duas incógnitas.

Tema contemporâneo transversal:

Inicie o trabalho com a seção *Trocando ideias* perguntando para os estudantes: "Vocês já viram que, em alguns estacionamentos, há vagas reservadas para veículos que transportam pessoas com alguma deficiência física ou visual? Vocês conhecem alguém que utiliza essas vagas? Onde essas vagas costumam estar localizadas nos estacionamentos? Como elas são sinalizadas?". Dê um tempo para que conversem sobre as questões acima e, depois, convide-os a trocar ideias sobre a questão proposta no primeiro item. Espera-se que eles reconheçam que as vagas reservadas facilitam o dia a dia das pessoas com alguma deficiência, porque, além da garantia de que vão conseguir estacionar seus veículos, essas vagas ficam próximas de entradas e acesso a rampas, escadas rolantes e elevadores.

Agora, proponha que resolvam o problema. No **item a**, eles vão traduzir a situação por meio de uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Após determinarem a equação, no **item b**, questione as duplas sobre os valores que *x* e *y* podem assumir. Espera-se que eles percebam que *x* e *y* podem assumir valores naturais entre 0 e 500. Depois, peça que façam o **item c**. Para realizar esse item, eles primeiro devem determinar o valor de *y*, calculando 2% de 500, ou seja: $0{,}02 \cdot 500 = 10$.

Logo, $y = 10$.

Substituindo *y* por 10 em $x + y = 500$, calcula-se o valor de *x*:

$x + 10 = 500$

$x = 500 - 10 = 490$

Portanto, no estacionamento, há 10 vagas reservadas para veículos que transportam pessoas com alguma deficiência física ou visual e 490 vagas não reservadas.

As questões incentivam a interação e o diálogo, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8** da BNCC. Além disso, os estudantes devem enfrentar e resolver um problema utilizando uma ferramenta matemática: a linguagem algébrica. Isso contribui para o desenvolvimento das competências específicas **5** e **6** da BNCC.

Pares ordenados e plano cartesiano

Objetivo:

Recordar os conceitos de plano cartesiano e par ordenado.

Justificativa

Recordar os conceitos de plano cartesiano e par ordenado é importante para que os estudantes possam representar graficamente as soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas e, também, analisar graficamente a solução de alguns sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Mapeando conhecimentos

Distribua folhas de papel quadriculado para os estudantes e peça que representem nessa folha um plano cartesiano e identifiquem o eixo das abcissas, o eixo das ordenadas e a origem desse plano. Depois, escreva alguns pares ordenados na lousa e peça que representem os pontos correspondentes no plano cartesiano. Circule pela sala e verifique se os estudantes apresentam dificuldades para realizar as tarefas propostas.

Para as aulas iniciais

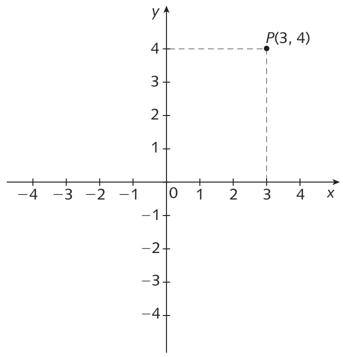
Retome o conceito de plano cartesiano da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* e solicite aos estudantes que façam as **atividades 14** e **15**. Acompanhe os estudantes durante a realização dessas atividades e tire as eventuais dúvidas.

Comente com os estudantes que cada par ordenado está associado a um único ponto do plano e que cada ponto do plano corresponde a um único par ordenado. Peça a eles que identifiquem a localização do ponto $Q(4, 3)$ e o comparem com a do ponto $P(3, 4)$ que foi representado no plano. Apesar de os elementos serem iguais, a ordem em que eles se apresentam modifica a localização do ponto.

No exemplo, observe se os estudantes compreendem a representação dos pontos E e F, que se localizam em um dos eixos. Se necessário, dê outros exemplos similares.

1 Pares ordenados e plano cartesiano

Em Matemática, a localização de pontos em um plano é feita com o auxílio de duas retas numéricas perpendiculares, chamadas de **eixos**. Esses eixos determinam o **plano cartesiano**. Observe a figura abaixo.



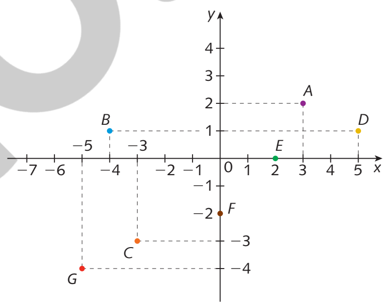
- A reta horizontal é o **eixo *x*** ou **eixo das abscissas**.
- A reta vertical é o **eixo *y*** ou **eixo das ordenadas**.
- O ponto de intersecção entre as retas que representam esses eixos é denominado **origem** e corresponde ao ponto cujo par ordenado é **(0, 0)**.

Para localizar um ponto no plano cartesiano, usamos dois números. Esses números são expressos na forma de um **par ordenado**. Esse par de números é assim chamado porque existe uma ordem predeterminada para escrevê-lo.

Os elementos desses pares são chamados de **coordenadas cartesianas** dos pontos. Em cada par ordenado, a primeira coordenada é a **abscissa** do ponto, e a segunda é a **ordenada** do ponto. Então, para o ponto P representado, temos:

$P(3, 4)$
- 4 é a ordenada do ponto P.
- 3 e 4 são as coordenadas do ponto P.
- 3 é a abscissa do ponto P.

Agora, analise a representação no plano cartesiano dos pontos $A(3, 2)$, $B(-4, 1)$, $C(-3, -3)$, $D(5, 1)$, $E(2, 0)$, $F(0, -2)$ e $G(-5, -4)$.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ ARQUIVO DA EDITORA

58

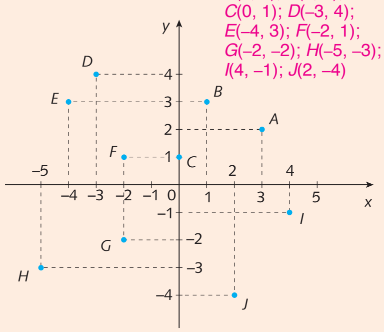
Se achar necessário, antes da realização das atividades a seguir, pergunte aos estudantes quantos pontos distintos são necessários para determinar uma reta. Caso não consigam responder, comente que dois pontos distintos determinam uma única reta. Além disso, retome o conceito de retas perpendiculares, assim como a construção dessas retas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 Determine as coordenadas de cada um dos pontos indicados no plano cartesiano abaixo.

1. $A(3, 2)$; $B(1, 3)$; $C(0, 1)$; $D(-3, 4)$; $E(-4, 3)$; $F(-2, 1)$; $G(-2, -2)$; $H(-5, -3)$; $I(4, -1)$; $J(2, -4)$



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Resposta em *Orientações*.

2 Trace um plano cartesiano no caderno. Em seguida, represente os pontos A, B, C, D, E, F, G, H, I e J, cujas coordenadas são:

$A(0, -2)$	$F(1, 3)$
$B(-3, 4)$	$G(3, 3)$
$C(0, 0)$	$H(-1, 2)$
$D(2, 0)$	$I(-1, 0)$
$E(-2, 3)$	$J(-1, 1)$

3 Reúna-se com um colega e, no caderno, tracem duas retas numéricas perpendiculares entre si, determinando o plano cartesiano. Em seguida, representem cinco pontos cujos pares ordenados tenham:

a) coordenadas iguais; **3. a)** Resposta pessoal.

b) coordenadas opostas; **3. b)** Resposta pessoal.

c) abscissa igual a 3; **3. c)** Resposta pessoal.

d) abscissa igual a -3; **3. d)** Resposta pessoal.

e) ordenada igual a 2; **3. e)** Resposta pessoal.

f) ordenada igual a -1. **3. f)** Resposta pessoal.

4 Considerando as respostas dadas na atividade anterior, respondam às questões.

a) Em cada item, se unirmos os pontos, a linha formada se parecerá com uma reta? **4. a)** sim

b) Em relação ao eixo x, qual é a posição da reta que contém os pontos do item **c**? E da reta que contém os pontos do item **d**? **4. b)** perpendicular; perpendicular

c) Em relação ao eixo x, qual é a posição da reta que contém os pontos do item **e**? E da reta que contém os pontos do item **f**? **4. c)** paralela; paralela

2 Equação do 1º grau com duas incógnitas

Considere a situação a seguir.

Emília comprou uma caneta e dois lápis por R$ 10,00.

Indicando por x o preço de uma caneta e por y o preço de um lápis, podemos representar a situação da seguinte maneira:

$$x + 2y = 10$$

Esse é um exemplo de equação do **1º grau com duas incógnitas**.

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Denominamos **equação do 1º grau com duas incógnitas** (x e y) aquela que pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax + by = c$, em que a, b e c são números reais, chamados coeficientes, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

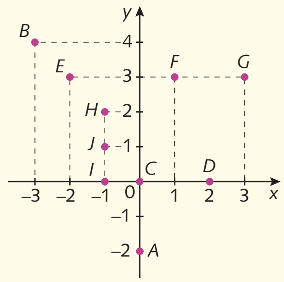
Mapeando conhecimentos

Proponha aos estudantes que reflitam sobre o seguinte problema: "Bruno comprou um caderno e um estojo e pagou R$ 30,00 por essa compra. Quanto custou o caderno? E o estojo?". Oriente-os a indicar por x o valor do caderno e por y o valor do estojo e tentar resolver o problema. Depois, indague: "A qual conjunto numérico x e y pertencem? Por quê? É possível traduzir o problema por meio de uma equação? Qual? O que essa equação tem que as outras que você estudou não tem? Quantas respostas são possíveis para esse problema?".

Para as aulas iniciais

Escreva na lousa a equação que traduz o problema proposto na dinâmica inicial: $x + y = 30$. Depois, oriente-os a atribuir um valor qualquer a uma das incógnitas e a determinar o valor da outra incógnita. Por fim, explore com a turma a solução gráfica do problema.

• Resposta da **atividade 2**:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

• Para responder à **atividade 3**, os estudantes devem perceber que:

- no **item a**, os pontos devem ter abscissas e ordenadas de mesmo valor: (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3) etc.;
- no **item b**, os pontos devem ter abscissas e ordenadas opostas: (1, –1), (–1, 1), (2, –2), (–2, 2) etc.;
- no **item c**, os pontos devem pertencer à reta perpendicular ao eixo x, no ponto (3, 0). Logo: (3, 0), (3, 1), (3, –1) etc.;
- no **item d**, os pontos devem pertencer à reta perpendicular ao eixo x, no ponto (–3, 0). Logo: (–3, 0), (–3, 1), (–3, –1) etc.;
- no **item e**, os pontos devem pertencer à reta perpendicular ao eixo y, no ponto (0, 2). Logo: (0, 2), (1, 2), (–1, 2) etc.;
- no **item f**, os pontos devem pertencer à reta perpendicular ao eixo y, no ponto (0, –1). Logo: (0, –1), (1, –1), (–1, –1) etc.

Equação do 1º grau com duas incógnitas

BNCC:

Habilidades EF08MA06 e EF08MA07 (as descrições estão na página VIII).

Objetivos:

• Reconhecer uma equação do 1º grau com duas incógnitas.

• Representar graficamente as soluções de uma equação de 1º grau com duas incógnitas.

Justificativa

Reconhecer uma equação do 1º grau com duas incógnitas e representar graficamente suas soluções, ampliam os conhecimentos previamente adquiridos sobre equações e preparam os estudantes para o estudo de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. A representação gráfica das soluções, em particular, contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA07**.

• Na **atividade 5**, a medida de massa de carboidratos no pão com manteiga pode ser escrita como $28x$, porque 28 g é a medida de massa de carboidratos em uma porção de pão com manteiga e x é a quantidade de porções. Do mesmo modo, $30y$ é a medida de massa de carboidratos no suco, porque cada porção de suco contém 30 g de carboidratos e y é o número de porções de suco. Assim, para atender os VDR de carboidrato nesse café da manhã, devemos ter $28x + 30y = 300$.

Pensando de maneira análoga, para atingir os VDR de proteína no café da manhã, devemos ter $4x + y = 75$.

• Na **atividade 6**, nos **itens a** e **b**, estimule os estudantes a construir os retângulos, indicando as medidas das dimensões correspondentes. Antes da construção da equação, é importante que eles visualizem as representações algébricas que irão desenvolver.

• Para que os estudantes tenham clareza quanto ao significado de cada incógnita, é importante que organizem os dados fornecidos. Por exemplo, mostre essa organização nos **itens c** e **d** da **atividade 6**. Uma sugestão é escrever:

- x: números de acertos;
- y: número de erros.

Os dados da **atividade 7** também podem ser organizados assim:

- x: quantidade de galinhas;
- y: quantidade de porcos.

Se eles se acostumarem a organizar os dados para a resolução de problemas, não terão dúvidas quanto à designação dos valores encontrados após as resoluções.

Observe alguns exemplos de equações do 1º grau com duas incógnitas.

a) $0{,}5x - \sqrt{2}\,y = 10$

b) $\frac{x}{7} + 1{,}3 = 5y$

c) $-x + \frac{y}{5} = \sqrt{21}$

d) $500 + 33y = x$

Podemos verificar se um par ordenado (x, y) é solução de uma equação do 1º grau com duas incógnitas substituindo as incógnitas pelos valores numéricos correspondentes. Se a sentença obtida for verdadeira, o par ordenado é solução da equação. Caso contrário, não é solução.

Por exemplo, o par ordenado (1; 4,5) é solução da equação $x + 2y = 10$, pois:

$$x + 2y = 10$$
$$1 + 2 \cdot 4{,}5 = 10$$
$$1 + 9 = 10$$
$$10 = 10 \text{ (sentença verdadeira)}$$

▸ A equação $x + 2y = 10$ tem infinitas soluções, mas a situação descrita no início do tópico impõe algumas condições para os valores de x e de y. Quais são essas condições?
Item: x e y não podem ser negativos, nulos, iguais a 10 ou maior que 10.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

5 No quadro abaixo indicamos os Valores Diários de Referência (VDR) de um café da manhã que contenha um pão com margarina e um suco de laranja.

	Porção de pão com margarina (50 g + 14 g)	Porção de suco (200 mL)	VDR
Carboidratos (g)	28	30	300
Proteínas (g)	4	1	75

Indicando por x a quantidade de porções em grama de pão com margarina e por y a quantidade de porções de suco em mililitro, responda: **5. a)** $28x + 30y = 300$

a) Que equação relaciona as quantidade de porções em grama de pão e em mililitro de suco que poderiam ser consumidas em um dia, tendo em vista o VDR de carboidratos?

b) Qual é a equação que relaciona as quantidades x e y com o valor de proteínas? **5. b)** $4x + y = 75$

6 Escreva uma equação para representar cada uma das situações a seguir. **6. b)** $x = y + 9$

a) A medida do perímetro de um retângulo com lados de medidas x e y é 48 cm. **6. a)** $2x + 2y = 48$

b) A medida x do comprimento de um retângulo excede a medida de sua largura y em 9 cm.

c) De um total de 20 lançamentos de dardos, Julinho acertou no alvo x lançamentos e errou y lançamentos. **6. c)** $x + y = 20$

d) No tiro ao alvo, Julinho ganhou 5 pontos em cada um dos x tiros acertados e perdeu 3 pontos em cada um dos y tiros errados. **6. d)** $5x - 3y = 68$

7 No sítio de Pedro, há x galinhas e y porcos, em um total de 140 pés. Escreva uma equação que represente essa situação. **7.** $2x + 4y = 140$

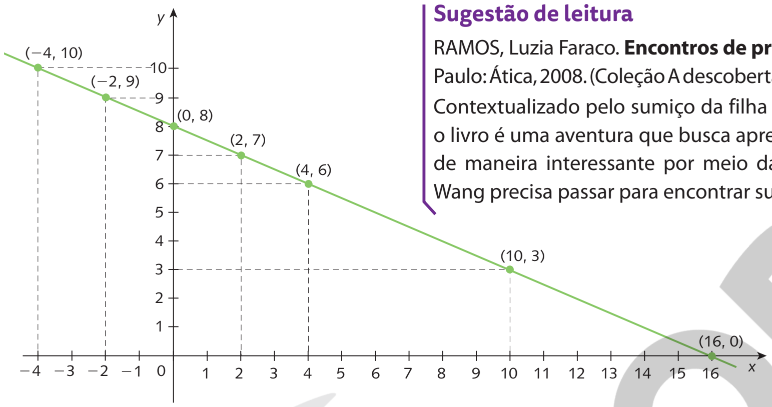
Representação gráfica das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas

Considere a equação do 1º grau com duas incógnitas $x + 2y = 16$.

É possível representar no plano cartesiano as soluções (pares ordenados) dessa equação. Para isso, primeiro atribuímos alguns valores a x, calculamos os valores correspondentes de y e organizamos os dados em um quadro. Depois, localizamos no plano cartesiano os pontos que representam os pares e traçamos a reta que passa por eles.

Obtenção de algumas soluções da equação $x + 2y = 16$

Valor atribuído a x	Equação em y	Valor de y	Par ordenado (x, y)
–4	$-4 + 2y = 16$	10	(–4, 10)
–2	$-2 + 2y = 16$	9	(–2, 9)
0	$0 + 2y = 16$	8	(0, 8)
2	$2 + 2y = 16$	7	(2, 7)
4	$4 + 2y = 16$	6	(4, 6)
10	$10 + 2y = 16$	3	(10, 3)
16	$16 + 2y = 16$	0	(16, 0)



Sugestão de leitura

RAMOS, Luzia Faraco. **Encontros de primeiro grau**. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A descoberta da Matemática).

Contextualizado pelo sumiço da filha do protagonista, o livro é uma aventura que busca apresentar equações de maneira interessante por meio das situações que Wang precisa passar para encontrar sua filha.

Observe que os pontos que representam os pares do quadro estão alinhados. Podemos demonstrar que o conjunto de todas as soluções de $x + 2y = 16$, em que x e y são números reais, é representado por uma reta.

O conjunto de soluções de qualquer equação do 1º grau com duas incógnitas, sendo estas números reais, é representado no plano cartesiano por uma **reta**.

O conjunto das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas pode ter nenhum elemento, finitos ou infinitos elementos, dependendo da equação e dos números que as incógnitas podem assumir.

ILUSTRAÇÃO: GUILHERME CASAGRANDI/ ARQUIVO DA EDITORA

Representação gráfica das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas

Ao trabalhar a representação gráfica das soluções, explique aos estudantes que, para verificar se um par ordenado é solução de uma equação do 1º grau, basta substituir os valores de x e y na equação e verificar se a igualdade é verdadeira. Caso ela seja falsa, esse par ordenado não é solução dessa equação.

Caso os estudantes tenham dúvida de que existem infinitas soluções para a equação $x + 2y = 16$, destaque a eles que os pontos correspondentes aos pares ordenados, ou seja, às soluções dessa equação, formam uma reta, que é constituída de infinitos pontos. Portanto, essa equação tem infinitas soluções.

• Espera-se que, na **atividade 9**, os estudantes percebam que, a partir de dois pontos, é possível representar a reta que corresponde à solução gráfica de cada equação. Esses pontos podem ser determinados de forma conveniente considerando, por exemplo, $x = 0$. Dessa forma, é possível determinar *y*. Pode-se também fazer o contrário: igualar o *y* a zero e achar o valor de *x*.

Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

BNCC:

Habilidade EF08MA08.

Objetivos:

• Compreender o conceito de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

• Resolver e elaborar problemas que envolvam sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas utilizando diferentes estratégias.

Justificativa

Diferentes problemas cotidianos e de diversas áreas da Matemática podem ser resolvidos por meio de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Por esse motivo, é importante que os estudantes compreendam e saibam aplicar esse conceito, conforme preconiza a habilidade **EF08MA08**.

Mapeando conhecimentos

Proponha aos estudantes o seguinte problema: "Uma loja vende *skates* e bicicletas. São 35 brinquedos e 100 rodas ao todo. Quantos *skates* e bicicletas há nessa loja?". Proponha aos estudantes que resolvam o problema por tentativa e erro. Caso tenham dificuldades, oriente-os a construir quadros. Caso a turma conclua que há 15 *skates* e 20 bicicletas, proponha que traduzam o problema para a linguagem algébrica.

Para as aulas iniciais

Retome o problema proposto na dinâmica inicial e oriente os estudantes a indicar a quantidade de *skates* por *s* e a quantidade de bicicletas por *b*. Em seguida, proponha que escrevam duas equações do 1º grau nas incógnitas *s* e *b*. Comente que as equações formam um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas e questione a qual conjunto numérico *s* e *b* pertencem e sobre como resolveriam este sistema. Avalie mostrar como este sistema pode ser resolvido pelo método da substituição e da adição.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

8 Copie a representação no plano cartesiano das soluções da equação $x + 2y = 16$. Depois, na equação, substitua *x* por cinco outros números e calcule os valores correspondentes de *y*. Localize no plano os pontos que representam os pares (x, y) obtidos. Os novos pontos estão alinhados com os pontos anteriores? **8.** sim

9. As respostas estão na seção *Resoluções e comentários* das atividades deste *Manual do Professor*.

9 Represente graficamente as soluções das equações:

a) $x + y = 3$

b) $y = x$

c) $x + 4y = 4$

d) $x - y = 6$

e) $2x - y = 4$

f) $x + y = -5$

g) $x + y = 0$

h) $x + y = 6$

3 Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

Considere a situação a seguir.

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Um grupo de amigos foi a uma mercearia e gastou R$ 44,00 na compra de mangas e abacaxis para uma sobremesa.

Vamos indicar por *x* a quantidade de mangas e por *y* a quantidade de abacaxis. Assim, podemos representar essa situação em linguagem algébrica da seguinte forma:

$x + y = 12$ → O grupo comprou 12 frutas.

$3x + 5y = 44$ → O grupo gastou R$ 44,00.

Temos, portanto, duas equações do 1º grau com as mesmas duas incógnitas, *x* e *y*, que formam um **sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas**.

Indicamos o sistema de equações assim:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 5y = 44 \end{cases}$$

Assim como as equações do 1º grau com duas incógnitas, o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pode ter nenhuma, uma ou infinitas soluções. Se tiver solução, cada uma das soluções será um par ordenado (x, y).

A seguir, vamos estudar métodos de resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

62

Investigue, com os estudantes, as etapas para a construção do sistema de equações, retomando a importância da organização dos dados.

(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Acompanhe a situação a seguir.

Jonas possui R$ 130,00 em cédulas de R$ 10,00 e R$ 20,00, em um total de 9 cédulas. Quantas cédulas de cada espécie Jonas possui?

Indicando por x o número de cédulas de R$ 10,00 e por y o número de cédulas de R$ 20,00, podemos representar essa situação por meio de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas em que x e y representam números naturais.

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 10x + 20y = 130 \end{cases}$$

A solução do sistema deve satisfazer as duas equações.

Na busca dessa solução, podemos testar alguns valores para x e para y e verificar se as soluções encontradas estão de acordo com os dados do problema. Assim:

Soma $x + y$	Valor atribuído a x	Valor de y	Valor de $10x + 20y$
9	2	7	$10 \cdot 2 + 20 \cdot 7 = 160$
9	3	6	$10 \cdot 3 + 20 \cdot 6 = 150$
9	4	5	$10 \cdot 4 + 20 \cdot 5 = 140$
9	5	4	$10 \cdot 5 + 20 \cdot 4 = 130$

Observe que $x = 5$ e $y = 4$, ou seja, o par ordenado (5, 4) é uma solução do sistema, pois satisfaz as duas equações.

Resolvemos esse sistema pelo **método da tentativa e erro**. A desvantagem desse método é que ele não nos garante que vamos achar uma solução, nem que essa solução, se encontrada, seja única. Assim, precisamos de métodos mais sistemáticos que possam nos garantir a existência ou não de soluções e a quantidade de soluções (quando existir). Nesse sentido, vamos estudar agora os métodos da substituição e da adição para resolver um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Método da substituição

Considere o sistema: $\begin{cases} x - y = -5 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

Para resolver esse sistema pelo **método da substituição**, inicialmente escolhemos uma das equações e isolamos uma das incógnitas. Isolando x na equação $x - y = -5$, temos:

$$x = -5 + y$$

Em seguida, substituímos x por $-5 + y$ na equação $2x + 3y = 10$ para obter uma equação com apenas a incógnita y.

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 10 \\ 2(-5 + y) + 3y &= 10 \\ -10 + 2y + 3y &= 10 \\ 5y &= 20 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Depois, substituímos y por 4 em uma das equações, determinando x:

$$\begin{aligned} x &= -5 + y \\ x &= -5 + 4 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (–1, 4).

Resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Resolver um sistema de equações com duas incógnitas, x e y, é o mesmo que encontrar todos os pares (x, y) que satisfazem simultaneamente as equações do sistema.

Ressalte para os estudantes que foram usados apenas números naturais na situação de Jonas, pois o problema trata de uma quantidade de cédulas e não podemos ter uma quantidade de cédulas negativa, ou não inteiras.

Ao apresentar o método da tentativa e erro, deixe claro que pode não ser a forma mais eficaz de chegar à solução do sistema. Exemplifique utilizando o par de equações $-3x + 7y = 17$ e $8x + 2y = 11$ e espere que os estudantes comentem sobre possíveis soluções. Nesse caso, encontrar o par ordenado apenas por tentativas pode ser mais difícil, já que a solução é dada pelo par ordenado $\left(\frac{43}{62}, \frac{169}{62}\right)$.

Comente sobre o método da substituição, abordando o isolamento de uma incógnita em determinado membro de uma equação. Explique que isso é feito a partir de operações em ambos os membros da igualdade, assim como feito no estudo de equações do 1º grau. Exemplifique na lousa, se necessário.

Proponha as seguintes questões aos estudantes: "Você acha que há outras maneiras de resolver esse sistema sem substituir x pela expressão $-5 + y$? Se fosse escolhida a segunda equação para isolar uma das incógnitas, o resultado seria o mesmo?".

Espera-se que os estudantes percebam que é possível isolar y na primeira equação, substituir a expressão obtida na segunda e assim obter $x = -1$ e que, escolhendo a segunda equação, o resultado também seria o mesmo. Se julgar conveniente, peça que resolvam o mesmo sistema escolhendo a segunda equação para isolar uma das incógnitas.

Após analisar o método da tentativa e erro e o método da substituição, solicite aos estudantes que resolvam o sistema que soluciona o problema da mercearia apresentado no tópico *Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas*. Espera-se que concluam que foram compradas 8 mangas e 4 abacaxis.

Explique aos estudantes que "preparar" uma equação significa produzir uma nova equação, equivalente à anterior, com coeficientes opostos para uma incógnita. Comente que a soma de coeficientes opostos pode ocorrer com qualquer uma das incógnitas.

No segundo sistema, explique aos estudantes que também é possível multiplicar ambos os membros das equações por outros números e obter, nas duas novas equações, coeficientes de y opostos. Se julgar conveniente, proponha aos estudantes que encontrem um número pelo qual podemos multiplicar a primeira equação e o número pelo qual devemos multiplicar a segunda equação, de modo que os coeficientes de y em ambas sejam opostos. Uma possibilidade é multiplicar a primeira equação por 3 e a segunda equação por -5.

Sugestão de atividade extra

Após a leitura e a aplicação do método da adição, proponha aos estudantes que resolvam a seguinte atividade.

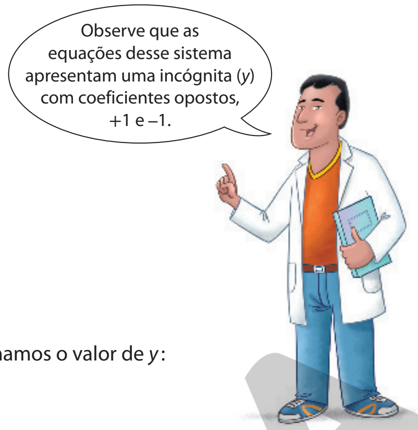
Problema: Há duas balanças em equilíbrio: na primeira, há dois vasos iguais de um lado e uma bandeja do outro; na segunda balança, há cinco vasos e uma bandeja de um lado e um peso de 7 kg de medida de massa do outro.

Resolução: Ao adicionar as duas equações, verificamos que sete vasos e uma bandeja têm a mesma medida de massa que uma bandeja mais o peso de 7 kg, ou seja, a medida de massa de sete vasos é 7 kg. Com isso, cada vaso tem 1 kg de medida de massa, e cada bandeja, 2 kg de medida de massa.

Método da adição

Considere o sistema: $\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Adicionando essas equações membro a membro, obtemos uma equação com apenas a incógnita x. Resolvendo-a, obtemos o valor de x.



$$\begin{array}{rcrcl} & x & \cancel{+\,y} & = & 16 \\ + & x & \cancel{-\,y} & = & 2 \\ \hline & 2x & +\ 0y & = & 18 \end{array} \qquad \begin{aligned} 2x &= 18 \\ x &= \frac{18}{2} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Substituindo x por **9** em uma das equações, determinamos o valor de y:

$$\begin{aligned} x + y &= 16 \\ \mathbf{9} + y &= 16 \\ y &= 16 - 9 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (9, 7).

Agora, observe como podemos determinar a solução do sistema: $\begin{cases} x + 5y = -28 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases}$

Observe que nenhuma das incógnitas tem os coeficientes opostos.

Para aplicar o método da adição, é preciso preparar uma das equações, multiplicando-a por um número, de modo que as equações fiquem com coeficientes opostos para uma das incógnitas.

Multiplicando a equação $x + 5y = -28$ por (-2), obtemos coeficientes opostos para x.

$$\begin{cases} x + 5y = -28 \ \cdot (-2) \\ 2x + 3y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 10y = 56 \\ 2x + 3y = -7 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as duas equações, temos:

$$\begin{array}{rrrcl} & \cancel{-2x} & -10y & = & 56 \\ + & \cancel{2x} & +\ 3y & = & -7 \\ \hline & 0x & -\ 7y & = & 49 \\ & & y & = & -7 \end{array}$$

Substituindo y por **–7** na equação $x + 5y = -28$, determinamos o valor de x:

$$\begin{aligned} x + 5 \cdot \mathbf{(-7)} &= -28 \\ x - 35 &= -28 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é o par ordenado (7, –7).

64

Sugestão de leitura

Sugerimos a leitura da dissertação de Gilmar Tolentino intitulada *Situações-problemas aplicadas na aprendizagem de equações e sistemas de equações do primeiro grau com duas variáveis*. Nesse trabalho, o autor tem como objetivo mostrar a importância da aplicação de situações-problema para a aprendizagem de equações e sistemas por estudantes do Ensino Fundamental, com o uso de balança de dois pratos.

Atividades

10. a) Valores naturais, porque x e y correspondem ao número de vitórias do time azul e do time vermelho, respectivamente.

Faça as atividades no caderno.

10 Observe a situação abaixo em que Cássio e Leonardo conversam sobre os jogos de basquete na escola em que estudam.

CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Indicando por x o número de vitórias do time de Cássio e por y o número de vitórias do time de Leonardo, podemos montar o seguinte sistema de equações:

Informação de Cássio	Informação de Leonardo
$y - 1 = x + 1$ $y - 1$: Time de Leonardo cede uma vitória. $x + 1$: Time de Cássio recebe uma vitória.	$y + 1 = \underbrace{2}_{\text{dobro}}(x - 1)$ $y + 1$: Time de Leonardo recebe uma vitória. $x - 1$: Time de Cássio cede uma vitória.

Agora, reúnam-se em duplas para discutir e respondam:

a) Que valores x e y podem assumir? Por quê?

b) Por tentativas, atribuindo valores a x e a y, determine a quantidade de vitórias de cada time. **10. b)** $x = 5$ e $y = 7$

11 Resolva novamente o sistema apresentado ao estudar o método da substituição, mas agora isolando a incógnita y na equação $x - y = 5$. A solução também é o par ordenado $(-1, 4)$? **11.** sim

12 Determine a solução dos sistemas aplicando os métodos da substituição e da adição. Considere que x e y podem ser qualquer número real.

a) $\begin{cases} x + y = -2 \\ 2x - y = 26 \end{cases}$ **12. a)** $(8, -10)$

b) $\begin{cases} 3x - y = -11 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ **12. b)** $(-2, 5)$

c) $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ **12. c)** $(1, 1)$

d) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$ **12. d)** $(3, 1)$

13 Hoje, Ronaldo tem o dobro menos quatro anos da idade de Pedro. Há dez anos, a idade de Ronaldo era o triplo da idade de Pedro. Quantos anos eles têm hoje?
13. Ronaldo tem 28 anos, e Pedro, 16 anos.

14 Julinho está brincando de tiro ao alvo. A cada tiro que acerta no alvo, ele ganha cinco pontos, e a cada tiro que erra, perde três pontos. Ele já deu 20 tiros e ganhou 68 pontos. Quantos tiros Julinho acertou até agora? **14.** 16 tiros

15 Em um estacionamento há automóveis e bicicletas, totalizando 32 veículos e 88 pneus. Determine o número de veículos de cada tipo. **15.** 12 automóveis e 20 bicicletas.

- A **atividade 10** explora a resolução de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas pelo método da tentativa e erro. Sempre que possível, valorize o uso dessa estratégia, principalmente na resolução de problemas envolvendo números naturais.
- A **atividade 11** possibilita aos estudantes perceberem que a solução para o sistema não depende da estratégia empregada. Se achar conveniente, você pode propor aos estudantes que resolvam o mesmo sistema utilizando o método da adição.
- Faça a correção coletiva de cada item da **atividade 12** com a turma.
- Nas **atividades 13**, **14** e **15**, oriente os estudantes a verificar o conjunto numérico a qual pertencem as incógnitas das equações dos sistemas que traduzem cada um dos problemas.

• As situações propostas nas **atividades** de **16** a **20** mobilizam uma série de habilidades, que passam pela competência leitora, pela transposição da linguagem materna para a notação matemática e pela escrita do sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Todas essas etapas precedem a resolução do sistema e requerem do estudante maturidade no enfrentamento de situações-problema, que vai sendo adquirida à medida que novas situações se apresentam e se dá oportunidade de discuti-las em grupo, conhecendo estratégias e soluções dos colegas.

• A experiência se adquire não apenas resolvendo problemas, mas também elaborando e propondo problemas aos colegas. Além das propostas das **atividades 19** e **20**, convide os estudantes a novas elaborações sempre que houver oportunidade.

Análise da solução por meio da representação gráfica

Se tiver oportunidade, trabalhe a solução gráfica de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas utilizando um *software* de construção de gráficos. Ilustre os casos dos exemplos deste tópico e peça aos estudantes que alterem os coeficientes das incógnitas, observando, por exemplo, os efeitos da mudança de sinal nas incógnitas *x*. Eles devem perceber que essa alteração muda a inclinação da reta no plano cartesiano.

16 Os times de basquete Boa Esperança e Camisa Verde estão disputando a final de um campeonato. Até o momento, o time Boa Esperança só tem uma vitória a menos do que o time Camisa Verde. Porém, se o vencedor da partida final for o Camisa Verde, eles terão, ao todo, o dobro de vitórias do time adversário.

Com base nas informações do texto, faça o que se pede.

a) Determine um sistema de equações que represente a situação.

b) Quantas vitórias cada time teve até o momento? **16. b)** Boa Esperança: 2; Camisa Verde: 3

17 Em um circo eram cobrados valores de ingresso: um para os adultos e outro para as crianças. Um grupo, de seis crianças e um adulto, pagou R$ 71,00 pelos ingressos. Outro grupo, de sete crianças e quatro adultos, pagou R$ 131,00. Qual era o preço de cada ingresso?
17. criança: R$ 9,00; adulto: R$ 17,00

18 Tenho avestruzes e coelhos, totalizando 35 cabeças e 110 pés. Calcule o número de avestruzes e o de coelhos. **18.** 15 avestruzes e 20 coelhos

16. a) $\begin{cases} y - 1 = x \\ y + 1 = 2x \end{cases}$, sendo x o número de vitórias do Boa Esperança e y o número de vitórias do Camisa Verde

CRÉDITOS DAS FOTOS: AVESTRUZ: AARON AMAT/SHUTTERSTOCK; COELHO: JOSHUA LEWIS/SHUTTERSTOCK

19 Elabore um problema no qual uma pessoa precisa sacar determinada quantia em dinheiro em um caixa eletrônico. Entretanto, o caixa eletrônico só possui notas de R$ 20,00 e R$ 50,00. Informe no problema a quantidade total de notas que saíram do caixa eletrônico. A resolução deve envolver um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Sente-se em dupla, troque seu problema com o do colega e resolva o que ele propôs. Em seguida, corrijam as resoluções um do outro e conversem caso discordem de algum passo da resolução. **19.** Resposta pessoal.

20 Elabore um problema sobre a idade de dois primos, um mais novo e um mais velho, cuja solução envolva um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Sente-se em dupla, troque seu problema com o do colega e resolva o que ele propôs. Em seguida, corrijam as resoluções um do outro e conversem caso discordem de algum passo da resolução.
20. Resposta pessoal.

Análise da solução por meio da representação gráfica

Vamos analisar graficamente a solução de alguns sistemas em que *x* e *y* são números reais.

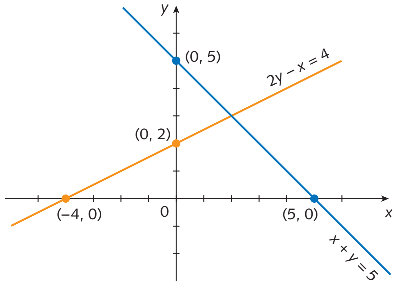
a) Considere o sistema: $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2y - x = 4 \end{cases}$

Inicialmente vamos determinar a reta que representa as soluções de cada uma das equações.

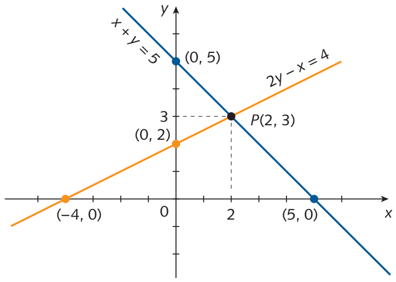
Para traçar uma reta, basta conhecer dois pontos distintos dela. Assim, atribuímos dois valores a uma das incógnitas e calculamos os valores correspondentes da outra, obtendo, assim, pares ordenados que são coordenadas de dois dos pontos de cada reta.

$x + y = 5$		
x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
5	0	(5, 0)

$2y - x = 4$		
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
–4	0	(–4, 0)



As coordenadas do ponto de intersecção das retas formam o par ordenado que é a solução do sistema. Resolvendo esse sistema por qualquer um dos métodos estudados, obtemos como solução o par ordenado (2, 3).



Nesse caso, as retas são concorrentes e o par ordenado (2, 3) é a **única** solução do sistema. Assim, dizemos que o sistema é **possível e determinado**, pois tem **uma única solução**.

b) Vamos analisar graficamente o sistema: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = -8 \end{cases}$

Inicialmente, traçamos em um mesmo plano cartesiano as retas que representam as soluções das equações.

$x + 2y = 4$		
x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
4	0	(4, 0)

$2x + 4y = -8$		
x	y	(x, y)
0	–2	(0, –2)
–4	0	(–4, 0)

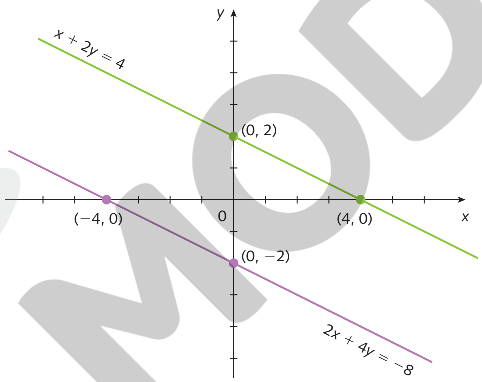


ILUSTRAÇÃO: GUILHERME CASAGRANDI/ ARQUIVO DA EDITORA

Como as retas são paralelas, não há ponto cujas coordenadas satisfaçam as duas equações. Logo, o sistema não tem solução. Esse é um exemplo de sistema **impossível**.

Na primeira situação, pode não ficar evidente em um primeiro momento o que significa a intersecção das retas. Por isso, oriente os estudantes a obter as coordenadas do ponto comum às duas retas e a aplicá-las em ambas as equações. Após obterem igualdades, leve-os a perceber que esse é o único ponto dessas duas retas em que serão obtidas igualdades ao aplicar as coordenadas nessas equações.

Pergunte aos estudantes se há pontos em comum na segunda situação. Nesse momento, aproveite para retomar o conceito de retas paralelas, mostrando que não há uma solução que satisfaça ambas as equações, ou seja, a solução do sistema é impossível.

Após apresentar os tipos de solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, retome rapidamente o significado da reta que representa uma equação no plano. Verifique se os estudantes, de fato, compreenderam que uma reta no plano representa todas as possíveis soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Neste momento, eles devem ser capazes de explicar que a solução do sistema só existe quando há pelo menos um ponto do plano que pertence às retas correspondentes às equações do sistema. Nesse caso, elas são concorrentes, e o sistema é possível (isto é, existe solução) e determinado (isto é, a solução é única). Quando há mais de um ponto no plano que pertence simultaneamente às duas retas, essas retas que representam as equações do sistema são, necessariamente, coincidentes; assim o sistema é possível (isto é, existe solução) e indeterminado (isto é, há infinitas soluções).

Tecnologias digitais em foco

Objetivo:

Analisar graficamente as soluções de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

Análise da solução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas por meio da representação gráfica

Nesta seção, os estudantes deverão representar graficamente, com o auxílio de um *software* de construção de gráficos, por exemplo, Winplot, GeoGebra, calculadoras gráficas ou os próprios navegadores, que produzem as curvas se a lei de formação for digitada na janela, as soluções de sistemas de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

Na falta do computador, a proposta dessa seção pode ser adaptada para que os estudantes utilizem papel e instrumentos de desenho e medida.

Analise a resolução do sistema pelo método da adição:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \quad \cdot (-2) \\ 2x + 4y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{r} -2x - 4y = -8 \\ +2x + 4y = -8 \\ \hline 0x + 0y = -16 \end{array}$$

Na igualdade $0x + 0y = -16$ obtida, temos uma sentença falsa, pois $0x$ e $0y$ serão iguais a zero para quaisquer valores de x e y. Logo, $0x + 0y$ é igual a zero, e não a -16.

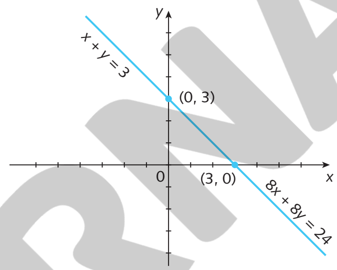
Portanto, o sistema é impossível, como já tínhamos visto na solução gráfica.

c) Vamos analisar graficamente o sistema: $\begin{cases} x + y = 3 \\ 8x + 8y = 24 \end{cases}$

Inicialmente, traçamos em um mesmo plano cartesiano as retas que representam as soluções das equações.

$x + y = 3$		
x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$8x + 8y = 24$		
x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Como as retas são **coincidentes**, têm infinitos pontos comuns. Logo, o sistema tem **infinitas soluções**. Esse é um exemplo de sistema **possível** e **indeterminado**. Para obter qualquer uma dessas infinitas soluções, basta, em uma das equações, atribuir um valor para uma das incógnitas e calcular o valor correspondente da outra.

Observando as equações, percebemos que, ao multiplicar cada termo da primeira equação por 8, obtemos a segunda equação. Assim, as equações são equivalentes, isto é, têm as mesmas soluções.

Tecnologias digitais em foco

Análise da solução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas por meio da representação gráfica

Nesta seção, você vai utilizar um *software* de construção de gráficos para representar graficamente as soluções de uma equação do tipo $ax + by = c$. Além disso, você vai utilizar esse *software* para analisar quando um sistema possui uma, infinitas ou nenhuma solução.

No *Explore*, leve os estudantes a perceber que, quando as equações forem equivalentes, o sistema será possível e indeterminado e a representação gráfica dessas equações serão retas coincidentes. Se julgar necessário, retome a ideia de equações equivalentes com a turma.

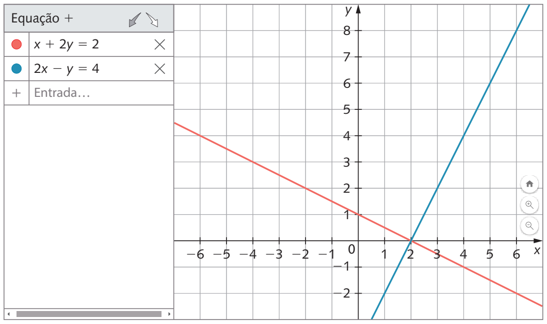
Tecnologias digitais em foco

CONSTRUA

Para obter a representação gráfica das soluções de uma equação do tipo $ax + by = c$, basta digitarmos a equação no campo apropriado.

1º) Construa a representação gráfica das soluções da equação $x + 2y = 2$.

2º) Construa a representação gráfica das soluções da equação $2x - y = 4$.

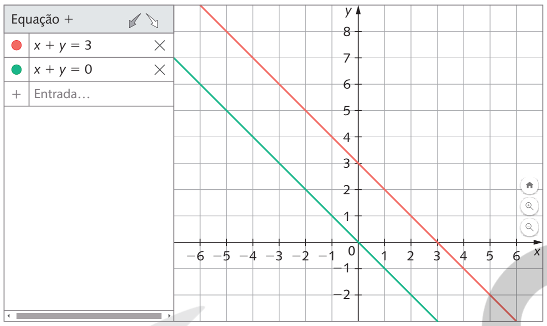


- O sistema $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$ é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível?

Primeiro item: Possível e determinado, porque as retas que representam as soluções de cada uma das equações são concorrentes.

3º) Construa a representação gráfica das soluções da equação $x + y = 3$.

4º) Construa a representação gráfica das soluções da equação $x + y = 0$.



- O sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 0 \end{cases}$ é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível? **Segundo item:** Impossível, porque as retas que representam as soluções de cada uma das equações são paralelas.

EXPLORE

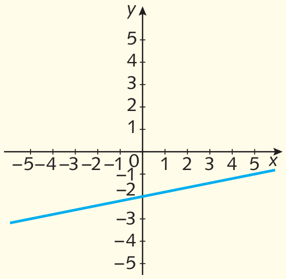
Construa a representação gráfica das soluções de cada uma das equações de um sistema possível e indeterminado qualquer. Como ficaram as retas que você construiu? **Explore:** As retas ficaram coincidentes.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

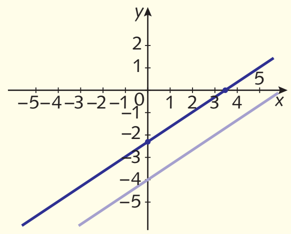
69

- Respostas da **atividade 21**:

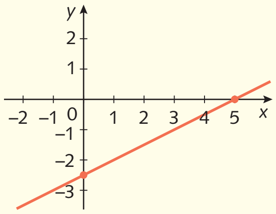
a) Possível e indeterminado.



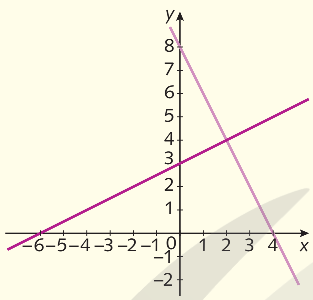
b) Impossível.



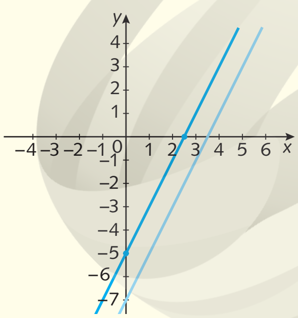
c) Possível e indeterminado.



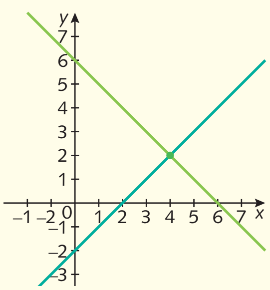
d) Possível e determinado; (2, 4)



e) Impossível.



f) Possível e determinado; (4, 2)



21. Respostas em *Orientações*.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

21 Represente graficamente cada sistema, em que x e y são números reais. Em seguida, classifique cada um dos sistemas em possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

a) $\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 2x - 10y = 20 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 4x - 6y = 14 \end{cases}$

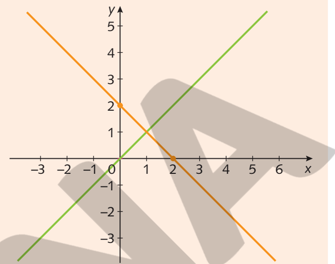
c) $\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 6x - 3y = 15 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$

22 Observe o gráfico.



Agora, verifique qual dos sistemas de equação abaixo está de acordo com o gráfico. **22.** Sistema I

Sistema I: $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ x - y = 0 \end{cases}$

Sistema II: $\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ -3x + 6y = 12 \end{cases}$

23 Observe o sistema de equações abaixo.

$$\begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ -4x - 2y = -4 \end{cases}$$

Agora, verifique qual dos gráficos abaixo pode ser uma representação do sistema de equações acima. **23.** Gráfico II

Gráfico I

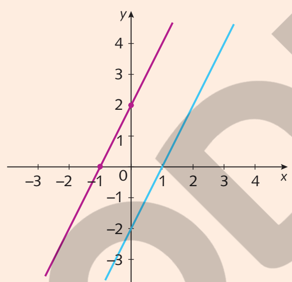
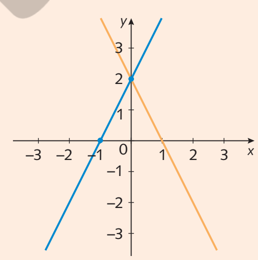


Gráfico II



24 Joana tem uma oficina mecânica e, no final de um dia de trabalho, observou que arrecadou R$ 640,00 em cédulas de R$ 10,00 e R$ 50,00. Sabendo que, no total, ela recebeu 24 cédulas, faça o que se pede.

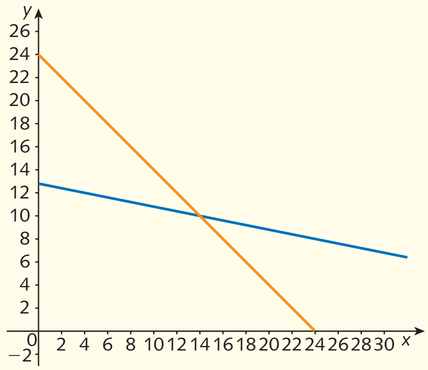
a) Determine um sistema de equações para representar a situação. **24. a)** $\begin{cases} x + y = 24 \\ 10x + 50y = 640 \end{cases}$

b) Construa um plano cartesiano no caderno e represente as equações do sistema indicado como resposta no item anterior. Esse sistema é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível? **24. b)** Resposta em *Orientações*.

c) Quantas cédulas de R$ 10,00 Joana recebeu? E de R$ 50,00? **24. c)** 14 cédulas de R$ 10,00 e 10 cédulas de R$ 50,00

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- Resposta do **item b** da **atividade 24**:
Possível e determinado; (14, 10)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(OBM) Numa loja de ferragens, vários produtos são vendidos pelo peso [massa]. Um prego, três parafusos e dois ganchos pesam 24 g. Dois pregos, cinco parafusos e quatro ganchos pesam 44 g. Juquinha comprou 12 pregos, 32 parafusos e 24 ganchos. Quanto pesou sua compra? **Resolvendo em equipe:** alternativa **d**

a) 200 g **b)** 208 g **c)** 256 g **d)** 272 g **e)** 280 g

Interpretação e identificação dos dados

Interpretação e identificação dos dados:
segundo item: 48 g
terceiro item: 4 g

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que julgar relevantes para a resolução do problema.
- Se um prego, três parafusos e dois ganchos tem medida de massa igual a 24 g, quanto mede a massa de dois pregos, seis parafusos e quatro ganchos?
- Com a informação obtida no item anterior, associada à informação dada no enunciado de que dois pregos, cinco parafusos e quatro ganchos têm medida de massa igual a 44 g, é possível encontrar a medida da massa de um parafuso. Determine-a.

Plano de resolução:
primeiro item: Indicando por x a medida da massa, em grama, do prego, por y a medida da massa, em grama, do parafuso e por z a medida da massa, em grama, do gancho, temos:
$x + 3y + 2z = 24$, $2x + 5y + 4z = 44$ e $12x + 32y + 24z = P$

Plano de resolução

- Escreva três equações com as informações do respectivo enunciado.
- Monte um sistema com as três equações.

Plano de resolução: segundo item: $\begin{cases} x + 3y + 2z = 24 \\ 2x + 5y + 4z = 44 \\ 12x + 32y + 24z = P \end{cases}$

- Multiplique a primeira equação por 12 e relacione-a com a terceira equação. Que conclusões você obteve? **Plano de resolução:** terceiro item:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 24 \quad \cdot (12) \\ 2x + 5y + 4z = 44 \\ 12x + 32y + 24z = P \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 12x + 36y + 24z = 288 \\ 12x + 32y + 24z = P \cdot (-1) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \cancel{12x} + 36y + \cancel{24z} = 288 \\ -\cancel{12x} - 32y - \cancel{24z} = -P \\ \hline 4y \qquad = 288 - P \end{array}$$

Considerando a medida da massa do parafuso, é possível responder à questão proposta.

Resolução

- Reúna-se com mais dois colegas.
- Mostre a eles seu plano de resolução e verifique se há ideias em comum entre vocês.
- Discutam quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolham um dos planos para a execução do processo de resolução.
- Verifique, com seus colegas, qual é o plano de resolução que alcança o objetivo de maneira mais eficiente e adequada.

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.

Resolução: Se a medida da massa do parafuso é 4 g, temos: $4y = 288 - P$
$4 \cdot 4 = 288 - P$
$P = 272$

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Cada grupo deverá criar duas novas situações de compra na loja de ferragens, buscando sempre quantidades de pregos, parafusos e ganchos que sejam múltiplas das quantidades originais. Em seguida, deverão escrever as equações que permitem responder às questões formuladas. Essas novas situações devem ser apresentadas na forma de cartazes e explicadas para toda a turma. **Apresentação:** Uma nova situação poderia levar, por exemplo, à seguinte questão: Qual é a medida da massa de 7 pregos, 15 parafusos e 14 ganchos? Resposta: 144 g

Resolvendo em equipe

BNCC:

- Competências gerais 2, 4, 9 e 10 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2 e 3 (as descrições estão na página VII).

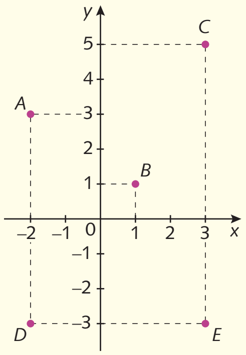
A seção destaca as etapas selecionadas para encaminhar a resolução de problemas. Elas devem ser analisadas e discutidas com os estudantes. Além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **9** e **10** e das competências específicas **2** e **3**, a seção permite a transferência de estratégias de resolução para outros contextos e situações.

Para a resolução desta atividade, organize a turma em grupos de 4 ou 5 estudantes. Observe as diferentes estratégias utilizadas pelos grupos. Eles poderão utilizar imagens, analisar as proporções, encontrar equações equivalentes, e assim por diante. Por fim, solicite que socializem as estratégias para que os estudantes possam descobrir diferentes formas de resolução.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Pares ordenados e plano cartesiano

• Na **atividade 1**, os estudantes vão representar pontos em um plano cartesiano. É importante que eles estejam atentos aos sinais das coordenadas e consigam identificar em que quadrante cada ponto está localizado. Espera-se que eles obtenham uma representação similar a esta:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Equação do 1º grau com duas incógnitas

• Na **atividade 2**, espera-se que os estudantes percebam que precisam escrever duas equações do 1º grau com duas incógnitas para resolver o problema. Indicando por x a quantidade de cédulas de R$ 5,00 e por y a quantidade de cédulas de R$ 10,00, temos que:

$x + y = 20$

$5x + 10y = 140$

É importante que eles percebam que x e y são números naturais. Para determinar a quantidade de cédulas de cada valor, eles devem resolver o sistema formado por essas equações. Incentive a aplicação de estratégias pessoais.

Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

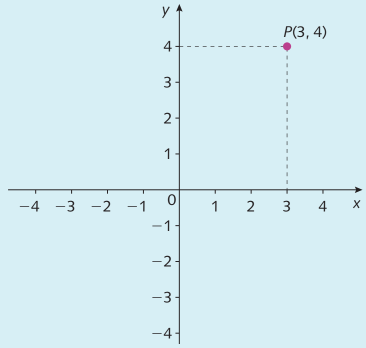
• Na **atividade 3**, os estudantes vão resolver sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas aplicando dois métodos: substituição e adição. Amplie a proposta dessa atividade ao pedir aos estudantes que representem graficamente cada sistema. É importante que eles percebam que a solução encontrada, em cada item, corresponde ao par ordenado do ponto de intersecção das retas que representam as equações do sistema.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Pares ordenados e plano cartesiano

Em um plano, traçamos duas retas com orientação crescente, x e y, perpendiculares entre si, para fazer a representação geométrica de pares ordenados. Analise a figura abaixo.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

1. Construa um plano cartesiano em seu caderno e, depois, marque os pontos indicados abaixo.
$A(-2, 3)$; $B(1, 1)$; $C(3, 5)$; $D(-2; -3)$; $E(3, -3)$
1. Resposta em *Orientações*.

Equação do 1º grau com duas incógnitas

Denominamos **equação do 1º grau com duas incógnitas** (x e y) aquela que pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax + by = c$, em que a, b e c são números reais, chamados coeficientes, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

Representação gráfica das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas

O conjunto de soluções de qualquer equação do 1º grau com duas incógnitas, sendo estas números reais, é representado no plano cartesiano por uma **reta**.

2. Lana possui cédulas de R$ 5,00 e R$ 10,00. São 20 cédulas que totalizam R$ 140,00. Há quantas cédulas de cada valor?
2. 12 cédulas de R$ 5,00; 8 cédulas de R$ 10,00

Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

Duas equações do 1º grau com as mesmas duas incógnitas, x e y, formam um **sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas**. Indicamos esse sistema organizando as equações em uma chave. Observe um exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 3x + 5y = 44 \end{cases}$$

Análise da solução por meio da representação gráfica

- Um sistema é **possível** e **determinado** quando tem apenas uma solução. As retas que representam as soluções das equações de um sistema possível e determinado são concorrentes, ou seja, interceptam-se em um único ponto.
- Um sistema é **impossível** quando **não tem solução**. As retas que representam as soluções das equações de um sistema impossível são distintas e paralelas, não têm ponto comum.
- Um sistema é **possível** e **indeterminado** quando tem **infinitas soluções**. As retas que representam as soluções das equações de um sistema possível e indeterminado são coincidentes.

3. Determine a solução dos sistemas aplicando os métodos da substituição e da adição. Considere que x e y podem ser qualquer número real.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ **3. a)** (3, 2)

b) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$ **3. b)** (−1, 4)

c) $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$ **3. c)** (6, 3)

d) $\begin{cases} x = 2 + y \\ y = 6 - x \end{cases}$ **3. d)** (4, 2)

É hora de extrapolar

Faça as atividades no caderno.

As condições de vida e de trabalho são iguais para homens e mulheres?

Nos últimos séculos, as mulheres conseguiram conquistar vários direitos e espaços, especialmente no Ocidente, mas, ainda hoje, as perspectivas das mulheres em relação ao trabalho, à autonomia e à representação política não atingiram a igualdade desejada. Um dos objetivos da Agenda 2030 da ONU é a igualdade de gênero, que, para ser atingida, depende dos esforços de toda a sociedade.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Alcançar a igualdade de gênero e empoderar todas as mulheres e meninas é o que determina o Objetivo de Desenvolvimento Sustentável (ODS) número 5 da ONU. No total, são 17 objetivos para transformar o mundo.

Objetivos: Analisar dados sobre a desigualdade de gênero; pesquisar a biografia de mulheres de destaque; produzir e divulgar um *podcast* com a biografia da personalidade escolhida.

Etapa 1: Análise de dados sobre a desigualdade de gênero no país.

1. A turma deverá se organizar em cinco grupos e ler o trecho a seguir sobre o Índice de Desigualdade de Gênero.

> O *Relatório de Desenvolvimento Humano* de 2020, publicado pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), traz a classificação de 189 países em relação ao Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) para o ano de 2019, com o Brasil ocupando a 84ª posição. Além dos valores de IDH, há valores que se referem ao Índice de Desigualdade de Gênero (IDG), cuja definição é:
>
> O Índice de Desigualdade de Gênero (IDG) reflete desigualdades com base no gênero em três dimensões – saúde reprodutiva, autonomia e atividade econômica. A saúde reprodutiva é medida pelas taxas de mortalidade materna e de fertilidade entre as adolescentes; a autonomia é medida pela proporção de assentos parlamentares ocupados por cada gênero e a obtenção de educação secundária ou superior por cada gênero; e a atividade econômica é medida pela taxa de participação no mercado de trabalho para cada gênero. O IDG [...] mostra a perda no desenvolvimento humano devido à desigualdade entre as conquistas femininas e masculinas nas três dimensões do IDG. PNUD Brasil. O que é IDH.
>
> Disponível em: https://hdr.undp.org/system/files/documents//hdr2020pdf.pdf. Acesso em: 4 jul. 2022.

Quando o IDG é analisado, constata-se uma piora na classificação do Brasil no *ranking* publicado pelo PNUD em 2018, pois o país passou a ocupar a 95ª posição. As altas taxas de mortalidade materna, as desigualdades salariais entre homens e mulheres e a baixa representação feminina na política são fatores que contribuem para que o valor do IDG brasileiro seja baixo. **1.** Comentários em *Orientações*.

a) Leiam o relatório *Estatísticas de gênero*: *indicadores sociais das mulheres no Brasil*, produzido pelo IBGE, que traz dados sobre alguns indicadores que tratam das diversidades sociais entre o sexo feminino ou o masculino. Para ler o relatório, consulte: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv101784_informativo.pdf (acesso em: 5 jul. 2022).

b) Cada grupo deverá escolher um dos cinco domínios do relatório em que os indicadores foram organizados:

- estruturas econômicas, participação em atividades produtivas e acessos e recursos;
- educação;
- saúde e serviços relacionados;
- vida pública e tomada de decisões;
- direitos humanos das mulheres e meninas.

Elaborem um resumo sobre os dados do domínio escolhido, identificando aqueles que se referem às dimensões consideradas para o cálculo do IDG.

c) Compartilhem o resumo elaborado com os colegas e montem um único documento que englobe todas as informações coletadas sobre os domínios abordados no relatório. Inclua no resumo afirmações sobre o infográfico da abertura desta Unidade.

2. Em novembro de 2021, o Brasil ficou na 142ª posição no *ranking* da União Interparlamentar (UIP) que avalia 193 países e informa a quantidade de homens e mulheres atuantes na política. Um dos fatores relevantes para que o Brasil ocupasse essa colocação, a última posição entre os países da América do Sul, é que apenas 15,2% dos deputados federais são mulheres.

É hora de extrapolar

BNCC:

- Competências gerais 4, 5 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 5, 6 e 7 (as descrições estão na página VII).

A seção propõe o fechamento da unidade por meio de um trabalho colaborativo que explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um produto final (*podcast* ou seminário), que será compartilhado com a comunidade escolar.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a seção é dividida em etapas que promovem:

- entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado;
- pesquisa coletiva;
- elaboração, em grupo, do produto proposto;
- apresentação e exposição do produto;
- reflexão e síntese do trabalho.

As etapas de pesquisa e elaboração do produto podem ser realizadas extraclasse. Verifique o perfil dos estudantes e oriente-os com relação ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho.

A seção também favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **5** e **9** e das competências específicas **5**, **6** e **7**, procurando mobilizar conteúdos estudados nos capítulos que integram a Unidade. Portanto, é recomendável trabalhar a seção depois de estudar os capítulos, mas, se preferir trabalhar as etapas da seção à medida que os capítulos forem estudados, atente para os conhecimentos prévios necessários.

Se achar oportuno, trabalhe esta seção em parceria com o professor de História. Os estudantes podem aprofundar a pesquisa e o debate sobre os momentos históricos em que ocorreram marcos da participação das mulheres na sociedade, incluindo uma pesquisa sobre o Dia Internacional da Mulher.

- Na **atividade 1**, incentive os estudantes a ler o relatório *Estatísticas de gênero: indicadores sociais das mulheres no Brasil*, produzido pelo IBGE, como pedido no **item a**, para que possam escolher um dos domínios desse relatório com algum conhecimento sobre o assunto no **item b**. Se achar conveniente, os domínios podem ser sorteados entre os grupos ou a formação dos grupos pode ser feita com base na escolha dos domínios pelos estudantes.
- O **item c** da **atividade 1** retoma a pergunta feita na abertura dessa Unidade. Aproveite-a para comparar os conhecimentos da turma naquele momento e agora.

• No **item b** da **atividade 2**, faça um levantamento dos dados identificados pelos estudantes e anote-os em forma de um esquema. Esse esquema pode ser feito na lousa ou usando algum *software* específico para a elaboração de mapas mentais.

• Na **atividade 3**, se possível, disponha as carteiras em U ou em roda para que todos os estudantes possam se ver durante o debate.

• O assunto abordado na **atividade 4** pode ser aprofundado com a leitura do artigo *Mulheres ainda são menos propensas a atuar no mercado de trabalho do que os homens na maior parte do mundo, diz OIT*, disponível em: https://www.ilo.org/brasilia/noticias/WCMS_619819/lang--pt/index.htm (acesso em: 4 ago. 2022).

Se achar conveniente, promova um debate sobre a participação das mulheres nas ciências. Pergunte aos estudantes por que eles acham que essa participação é baixa e quais são as dificuldades encontradas por elas. Sugira o filme *Estrelas além do tempo* (drama/ficção histórica, 2 h 7 min, Fox Film, 2016, classificação indicativa livre) que relata a história de três cientistas afro-americanas que trabalharam na NASA e tiveram atuação de destaque durante a corrida espacial na década de 1960.

2. b) Espera-se que os estudantes respondam que não é conveniente porque o número obtido não é inteiro.

Sabendo que, em 2021, havia 513 deputados federais no Brasil, respondam às questões.

a) Qual é o cálculo que precisamos realizar para determinar a quantidade de deputadas federais na Câmara dos Deputados? Qual foi o resultado obtido? **2. a)** 15,2 % de 513; 77, 976

b) É conveniente utilizar o número obtido para representar o número de deputadas federais mulheres? Por quê?

c) Em 2021, o número de deputados do sexo masculino correspondia a 45 mais o quíntuplo do número de deputados do sexo feminino. Representem a relação entre o número de deputados do sexo feminino e o número de deputados do sexo masculino e determinem o número de cadeiras da Câmara de Deputados que foi ocupado por mulheres. **2. c)** Exemplo de resposta: $h = 45 + 5 \cdot m$, em que h indica o número de homens e m o número de mulheres; $m = 78$.

3. Agora, vocês vão se organizar em novos grupos.

Cada novo grupo será composto de, no mínimo, um integrante de cada grupo que elaborou o resumo para um dos domínios do relatório *Estatísticas de gênero: indicadores sociais das mulheres no Brasil*.

a) Elaborem uma lista com ações que consideram importantes para combater a desigualdade de gênero nos diversos aspectos sociais apresentados. **3. a)** Resposta pessoal.

b) Apresentem a lista para os demais colegas e promovam uma discussão coletiva, a fim de criar uma lista única para a turma.

Etapa 2: Pesquisa e análise de informações sobre a participação feminina na sociedade.

4. As projeções da OIT reunidas no relatório intitulado "Perspectivas Sociais e do Emprego no Mundo: Tendências 2021" ("World Employment and Social Outlook: Trends 2021 "– WESO Trends) indicam que o déficit de empregos resultante da crise global chegará a 75 milhões em 2021, antes de cair para 23 milhões em 2022. [...]

A crise também atingiu as mulheres de forma desproporcional. Em 2020, a [não] contração do emprego feminino foi de 5%, em comparação com 3,9% do emprego masculino. O percentual de mulheres que ficaram de fora do mercado de trabalho e passaram para a inatividade também foi maior. Por outro lado, o aumento das responsabilidades domésticas resultante do confinamento devido à crise aumentou o risco de um "retorno à tradicionalização" no que diz respeito aos papéis de gênero.

[...]

Disponível em: https://ilo.org/brasilia/noticias/WCMS_797490/lang--pt/index.htm. Acesso em: 4 jul. 2022.

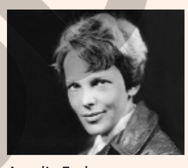
Agora, respondam às questões.

a) Na opinião de vocês quais são os impactos das desigualdades de gênero no mercado de trabalho? **4. a)** Resposta pessoal.

b) Vocês acham importante que homens e mulheres sejam contratados na mesma proporção? Por quê? **4. b)** Resposta pessoal.

5. Observem os nomes e as fotos das mulheres mostradas a seguir e respondam: quais delas vocês conhecem? Por que são consideradas mulheres de destaque? **5.** Resposta pessoal.


BRIDGEMAN IMAGES/KEYSTONE BRASIL
Ada Lovelace


HVULTON ARCHIVE/GETTY IMAGES
Amelia Earhart


DAVID HIMBERT/HANS LUCAS/AFP
Malala Yousafzai


DOMENICO FAILUTTI - MUSEU PAULISTA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, SÃO PAULO
Maria Quitéria


BETTMANN/GETTY IMAGES
Rosa Parks


STANFORD NEWS SERVICE/ZUMA PRESS/GLOW IMAGES
Maryam Mirzakhani


LEON NEAL/GETTY IMAGES
Valentina Tereshkova


ROMULO FIALDINI/TEMPO COMPOSTO - COLEÇÃO PARTICULAR
Tarsila do Amaral

6. Escolham uma das mulheres apresentadas e pesquisem sua biografia e os desafios enfrentados por ela em seu campo de atuação. Façam também uma pesquisa sobre as conquistas ou os desafios enfrentados pela população feminina na sociedade da época em que essa mulher viveu. **6.** Resposta pessoal.

Etapa 3: Pesquisa e planejamento para a produção de um *podcast*.

7. Façam uma pesquisa que tenha como objetivo responder às seguintes questões:
   a) O que são *podcasts*?
   b) Como os *podcasts* são produzidos e reproduzidos?
   c) Indiquem uma vantagem de se consumir *podcasts*.

8. Organizem e elaborem um roteiro para a produção de um *podcast* sobre a personalidade feminina pesquisada.

   O objetivo do *podcast* é divulgar a história dessas mulheres de destaque para a comunidade escolar, trazendo dados biográficos e desafios vividos, e informar uma conquista ou um desafio enfrentado pela população feminina na época em que essas mulheres viveram.

   Analisem as dicas a seguir.
   - Estudem bem o assunto, pois é importante que se tenha domínio sobre o que se vai falar.
   - Criem uma lista com o planejamento de todo o conteúdo que vai entrar no episódio com a divisão das tarefas para a produção.
   - Usem a criatividade. Mesmo que o *podcast* não seja visível, criem cenários com a voz, sempre priorizando o entendimento do público.
   - Elaborem um roteiro visando à organização do conteúdo que será apresentado. O roteiro pode conter: vinheta de início, apresentação dos locutores, rápida introdução do tema, abordagem do tema, preparação para o fechamento e encerramento.
   - Guardem uma cópia da gravação original, evitando possíveis problemas com erros de edição do áudio.

9. Com a turma, escolham um único nome para os *podcasts*, como se fizessem parte de um programa. Todos os *podcasts* devem iniciar com a mesma vinheta.

Etapa 4: Análise dos roteiros e gravação do *podcast*.

10. Disponibilizem o roteiro elaborado para que os demais colegas comentem a clareza das informações e os recursos sonoros que o grupo pretende utilizar.

11. Anotem as dúvidas, as opiniões e as sugestões dos colegas.

12. Depois dos ajustes necessários, ensaiem algumas vezes antes do momento da gravação.

13. Gravem o *podcast*. Lembrem-se de escolher um local sem ruídos e cuidem para que os áudios sejam captados de forma clara.

14. Divulguem o produto para a comunidade escolar. Vocês podem organizar um momento para executar o áudio na própria escola, por exemplo, durante o intervalo.

Etapa 5: Síntese do trabalho realizado.

15. Algumas questões devem ser discutidas. **15. a)** Respostas pessoais.
    a) Vocês acham importante que as pessoas conheçam as histórias dessas mulheres? Por quê?
    b) O que pode ser feito pela sociedade para garantir uma maior igualdade de gênero no mercado de trabalho? **15. b)** Respostas pessoais.

16. Redijam um texto que descreva o processo realizado pelo grupo nas etapas 2 e 3.

• Na **atividade 6**, faça um levantamento para verificar qual personalidade foi escolhida por cada grupo. Se houver repetições, converse com os grupos para solicitar que escolham outra personalidade para que a pesquisa apresente diversidade. Caso seja necessário, proponha um sorteio.

• Na **atividade 8**, se não for possível gravar o *podcast,* os estudantes podem preparar seminários para apresentar para a turma e para a comunidade escolar.

Verifique com os grupos que optaram por mulheres contemporâneas qual conquista ou desafio da população feminina de modo geral foi escolhido por eles. Se houver repetição, sugira que selecionem outra informação da pesquisa feita na **atividade 6** para compartilhar.

Se achar oportuno, estabeleça uma parceria com o professor de Língua Portuguesa para auxiliar os estudantes na escolha do tipo de texto (reportagem, entrevista, narração etc.) e elaboração desses textos.

Abertura da Unidade

BNCC:

• Competências gerais 7 e 9 (as descrições estão na página VI).

• Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

• Motivar a turma a estudar os conteúdos da Unidade 2.

• Conscientizar os estudantes sobre a importância de respeitar e valorizar os idosos.

Tema contemporâneo transversal: FORMAÇÃO CIDADÃ

Para iniciar a Unidade, pergunte qual é a ideia que eles têm a respeito do termo "expectativa de vida". Incentive-os a verbalizar o que pensam e a conversar entre si. Explique que esse é um conceito estatístico relacionado ao bem-estar da população. Se achar conveniente, apresente algum gráfico publicado pelo IBGE mostrando como a expectativa de vida dos brasileiros modificou-se nos últimos anos. Espera-se que eles percebam que a expectativa de vida dos brasileiros vem aumentando ao longo dos anos e que isso está relacionado a melhorias nas áreas da saúde, econômica, educação, saneamento básico, entre outras. Finalize dizendo que a área da Matemática responsável por essa análise é a Probabilidade e Estatística.

Convide-os a refletir sobre a outra questão proposta. Pergunte se eles conhecem o Estatuto do Idoso. Verifique depois se, na opinião deles, esses direitos garantem melhor qualidade de vida aos idosos e, consequentemente, um aumento da expectativa de vida.

As questões propostas favorecem o desenvolvimento das competências gerais **7** e **9** e da competência específica **8** de Matemática, uma vez que promovem o diálogo e a argumentação com base em dados confiáveis.

No **capítulo 4**, serão estudados ângulos, figuras geométricas e transformações geométricas. No **capítulo 5**, os objetos de estudo serão os polígonos, seus elementos e classificações. Por fim, no **capítulo 6**, serão aprofundadas as ideias de probabilidades.

Na seção *É hora de extrapolar*, os estudantes pesquisarão sobre os direitos dos idosos no Brasil e terão a oportunidade de analisar dados do *Relatório Mundial de Envelhecimento e Saúde* da OMS. Por fim, irão elaborar e apresentar uma cartilha sobre direitos dos idosos com sugestões de prevenções e cuidados para a população.

Unidade 2

Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatísca (IBGE), em 2019 os idosos brasileiros representavam 16,2% da população do país, e projeções indicavam que esse percentual dobrará em 2045. Você conhece os direitos dos idosos? Na sua opinião, as pessoas viverem mais tempo significa que estão vivendo saudavelmente e tendo suas necessidades atendidas? Ao final desta Unidade, você responderá essas e outras questões.

76

Sugestão de proposta para a promoção da saúde mental dos estudantes

A dança é uma atividade que faz bem ao corpo e à mente. Pode ser praticada por qualquer pessoa independentemente da idade, agilidade ou tipo de corpo. Além disso, é uma forma de socialização. Considere firmar parceria com professores de outros componentes curriculares e implementar um projeto de dança na escola. Projetos como esse proporcionam momentos de diversão e convívio que contribuem para a melhoria da saúde psicológica.

Capítulo 4

Ângulos e transformações geométricas

PLURALIDADE CULTURAL

Trocando ideias

Considerada a mais antiga arte em cerâmica do Brasil e uma das mais antigas das Américas, a arte marajoara é o conjunto de artefatos, sobretudo em cerâmica, dos habitantes da Ilha de Marajó, no Pará.

RITA BARRETO/ FOTOARENA

Grafismos presentes nas peças de cerâmica feitas por moradores locais da Ilha de Marajó.

- Reúna-se com três colegas e pesquisem sobre a arte marajoara. Depois, compartilhem com a turma o que tiverem encontrado.
- Que transformações geométricas você reconhece nos grafismos presentes nas peças de cerâmica marajoara acima?

Neste capítulo, vamos retomar e nos aprofundar em assuntos como ângulos e transformações geométricas.

Conheça mais

No *site* do Museu Paraense Emílio Goeldi, há um catálogo com diversos exemplares da cerâmica marajoara no livro digital **Cerâmica marajoara**: a comunicação do silêncio, de Lilian Bayma de Amorim.

Trocando ideias: primeiro item: resposta pessoal; segundo item: exemplos de resposta podem ser translações, rotações e reflexões.

Na questão proposta no segundo item, os estudantes vão mobilizar o que estudaram sobre transformações geométricas em anos anteriores. Recorde com eles o que são grafismos e verifique se identificam translações, rotações e reflexões nos grafismos presentes nas cerâmicas da fotografia. É importante incentivá-los a explicar suas respostas. Você pode ampliar a proposta e solicitar que reproduzam algum desses grafismos ou que criem grafismos similares. Essa relação entre Matemática e Arte contribui para o desenvolvimento da competência específica **3** de Matemática.

CAPÍTULO 4 – ÂNGULOS E TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 2, 5, 6, 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 3 e 8 (as descrições estão página VII).

Objetivos:

- Levantar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre as transformações geométricas.
- Pesquisar sobre a arte marajoara.

Tema contemporâneo transversal:

PLURALIDADE CULTURAL

Forme uma roda de conversa com os estudantes e comente que a Ilha de Marajó é a maior ilha fluviomarinha do mundo, cercada pelos rios Amazonas e Tocantins, e pelo Oceano Atlântico. Mostre a localização dessa ilha em um mapa e conte que os antigos marajoaras faziam vasilhas, chocalhos, potes, urnas funerárias, estatuetas, bonecas para crianças, cachimbos, porta-venenos para flechas etc. Atualmente, moradores locais da ilha, produzem réplicas de várias peças, especialmente os vasos, para fins comerciais.

Em seguida, proponha que se organizem em grupos para realizar a pesquisa solicitada no primeiro item. Caso julgue oportuno, associe esse conteúdo ao componente curricular Artes, apresentando materiais que possam servir de fonte de consulta para eles ou planejar uma pesquisa na sala de informática. Outra possibilidade é solicitar que façam essa pesquisa em casa e reservar um tempo da aula seguinte para que possam conversar sobre o que pesquisaram. Momentos como esse contribuem para o desenvolvimento das competências gerais **2**, **5**, **6**, **7** e **9** da BNCC, uma vez que valorizam a manifestação artística dos marajoaras e a diversidade de saberes e vivências culturais, utilizam tecnologias digitais da informação para realizar a pesquisa, argumentam com base em informações confiáveis e exercitam o diálogo e a empatia. A competência específica **8** também tem o seu desenvolvimento favorecido por conta da interação promovida pela tarefa.

Ângulos

BNCC:

Habilidade EF08MA15.

Objetivos:

- Retomar o conceito e a classificação de ângulos.
- Reconhecer ângulos congruentes.
- Compreender o conceito de bissetriz de um ângulo.
- Compreender o conceito de mediatriz de um segmento de reta.
- Construir com régua e compasso ângulos cuja abertura mede 90°, 60°, 45° e 30°.

Justificativa

Retomar o conceito de ângulos e classificá-los é importante para que possam avançar no estudo de outros conceitos e procedimentos de Geometria.

O reconhecimento de ângulos congruentes é útil nas construções com régua e compasso e, também, no estudo da semelhança de figuras.

Os conceitos de bissetriz e mediatriz mobilizam os conhecimentos anteriores dos estudantes sobre retas, semirretas, segmentos de reta, ângulos e medidas de abertura de ângulos.

A construção com régua e compasso de ângulos ditos notáveis (90°, 60°, 45° e 30°) é importante no estudo futuro das razões trigonométricas (seno, cosseno, tangente etc).

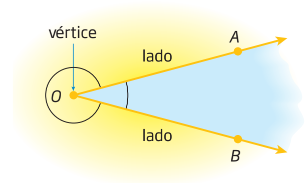
Mapeando conhecimentos

Peça aos estudantes que construam um ângulo cuja abertura mede 60° e com o auxílio de um transferidor tracem a semirreta que divide esse ângulo em dois ângulos com a mesma medida de abertura. Em seguida, pergunte: "Qual é a origem desta semirreta? Qual é a medida da abertura de cada ângulo formado? A semirreta que você traçou recebe um nome especial. Você sabe que nome é esse?". Se achar oportuno, organize a turma de modo que realizem a tarefa considerando também ângulos cuja abertura mede 90° e 30°.

Proponha que tracem um segmento de reta, encontrem o ponto médio dele e tracem uma reta perpendicular ao segmento passando por esse ponto médio utilizando suas estratégias pessoais. Depois, pergunte: "Como podemos chamar essa reta?".

1 Ângulos

Duas semirretas de mesma origem determinam no plano duas regiões, que, nesta figura, estão destacadas com cores diferentes.



Ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem, com uma das regiões do plano limitada por elas.

As semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ determinam dois ângulos que podem ser indicados por $A\hat{O}B$.

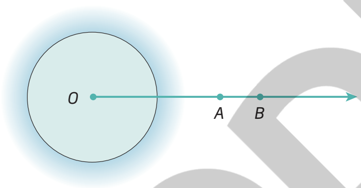
Classificação de ângulos

De acordo com a medida da abertura, um ângulo pode ser classificado em:

- **Ângulo nulo**

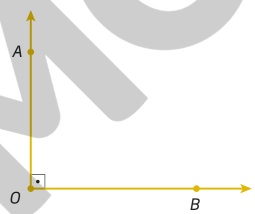
$med(A\hat{O}B) = 0°$

- **Ângulo de uma volta**



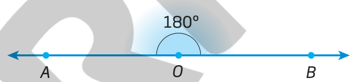
$med(A\hat{O}B) = 360°$

- **Ângulo reto**



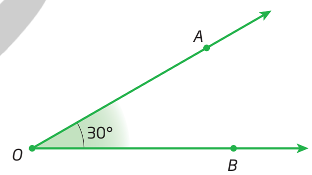
$med(A\hat{O}B) = 90°$

- **Ângulo raso ou de meia-volta**



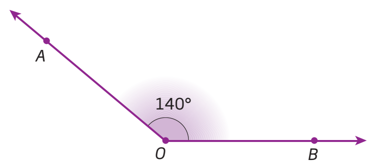
$med(A\hat{O}B) = 180°$

- **Ângulo agudo**



$0° < med(A\hat{O}B) < 90°$

- **Ângulo obtuso**



$90° < med(A\hat{O}B) < 180°$

Para as aulas iniciais

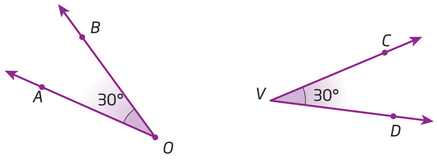
Na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*, retoma-se a medida da abertura de um ângulo, a classificação de ângulos e o conceito de ângulos congruentes. Peça aos estudantes que leiam essa revisão e façam as **atividades 16** e **17**.

Defina bissetriz e mediatriz. Peça que explorem as ferramentas "Bissetriz" e "Mediatriz" disponíveis no GeoGebra. A ideia é apenas se familiarizar com as ferramentas e com os conceitos.

Explique para a turma a notação de ângulo agudo, $0° < med(A\hat{O}B) < 90°$: "a medida da abertura de $A\hat{O}B$ está entre 0° e 90°, excluindo esses extremos do intervalo". A mesma ideia vale para a notação de ângulo obtuso.

Ângulos congruentes

Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida de abertura.



med($A\hat{O}B$) = 30°   med($C\hat{V}D$) = 30°

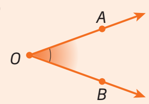
$A\hat{O}B \cong C\hat{V}D$

Lemos: "o ângulo $A\hat{O}B$ é congruente ao ângulo $C\hat{V}D$".

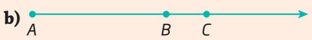
Atividades

Faça as atividades no caderno.

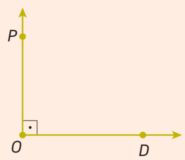
1 Classifique os ângulos a seguir em nulo, raso, de uma volta, reto, agudo ou obtuso.

a)


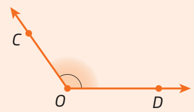
1. a) ângulo agudo

b)


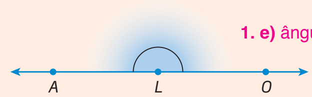
1. b) ângulo nulo

c)


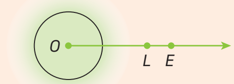
1. c) ângulo reto

d)


1. d) ângulo obtuso

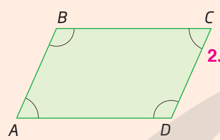
e)


1. e) ângulo raso

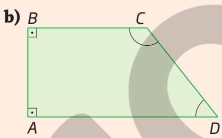
f)


1. f) ângulo de uma volta

2 Classifique cada ângulo destacado nos quadriláteros a seguir em agudo, reto ou obtuso.

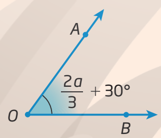
a)


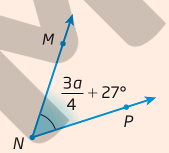
2. a) agudos: $\hat{C}$ e $\hat{A}$; obtusos: $\hat{B}$ e $\hat{D}$

b)


2. b) retos: $\hat{A}$ e $\hat{B}$; agudo: $\hat{D}$; obtuso: $\hat{C}$

3 Determine o valor de a, sabendo que $A\hat{O}B$ e $M\hat{N}P$ são congruentes. **3.** $a = 36°$





ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Ângulos congruentes

Após abordar o conceito de ângulos congruentes, distribua para os estudantes uma folha com a representação de alguns polígonos como retângulos, triângulos equiláteros, hexágonos regulares etc. Depois, peça que determinem as medidas das aberturas dos ângulos internos deles com o auxílio de um transferidor e identifiquem os ângulos congruentes.

- Na **atividade 3**, comente que, se dois ângulos são congruentes, as medidas das aberturas desses ângulos são iguais. Os estudantes devem chegar à seguinte sentença:

$$\frac{2a}{3} + 30° = \frac{3a}{4} + 27°$$

$$12 \cdot \left(\frac{2a}{3} + 30°\right) = 12 \cdot \left(\frac{3a}{4} + 27°\right)$$

$$8a + 12 \cdot 30° = 9a + 12 \cdot 27°$$

$$a = 36°$$

Portanto, $a = 36°$.

Continuação

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Bissetriz de um ângulo

As justificativas para as construções geométricas não serão trabalhadas nesse momento. Entretanto, os passos da construção podem ser compreendidos pelos estudantes, bem como as propriedades que são consequências dessas construções. As justificativas de cada um dos passos serão trabalhadas em outros capítulos da coleção.

Por exemplo, a justificativa para o procedimento trabalhado aqui para a construção da bissetriz de um ângulo está no fato de que *ODEC* é um losango; nesse quadrilátero, as diagonais são bissetrizes dos ângulos internos do losango.

Também é possível justificar essa construção observando que *ODC* é um triângulo isósceles; nessa situação, $\overleftrightarrow{OE}$ é a reta suporte da mediatriz e também da bissetriz do ângulo $C\hat{O}D$.

Você pode retomar e justificar a construção da bissetriz no **capítulo 7**, quando são estudados os triângulos e quadriláteros.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

- Competência geral 5 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 2 (a descrição está na página VII).
- Habilidade EF08MA15.

Objetivo:

Construir a bissetriz de um ângulo utilizando o *software* GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica.

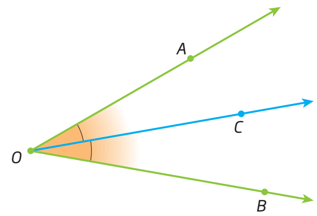
Bissetriz

Se achar conveniente, mostre aos estudantes outro modo de construir a bissetriz de um ângulo qualquer.

1. Dado um ângulo $B\hat{O}C$ qualquer, trace uma circunferência *c* de centro em *O* e raio com qualquer medida de comprimento.
2. Marque os pontos *P* em $\overrightarrow{OB}$ e *Q* em $\overrightarrow{OC}$, intersecções dessas semirretas com a circunferência *c*.
3. Trace uma circunferência *d* de centro em *P*, e raio *r* com qualquer medida de comprimento.
4. Trace uma circunferência *e* de centro em *Q*, com mesma medida de comprimento de raio de *d*.
5. Marque o ponto *D*, uma das intersecções entre as circunferências *d* e *e*.

Bissetriz de um ângulo

Na figura a seguir, a semirreta $\overrightarrow{OC}$, interna ao ângulo $A\hat{O}B$, divide $A\hat{O}B$ em dois ângulos congruentes. Assim, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a **bissetriz** do ângulo $A\hat{O}B$.



$A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$

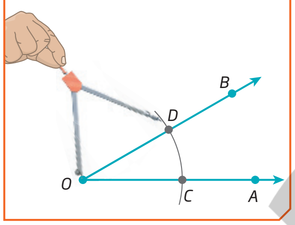
Bissetriz de um ângulo é a semirreta interna a esse ângulo com origem no vértice do ângulo que o divide em dois ângulos congruentes.

Construção geométrica da bissetriz de um ângulo

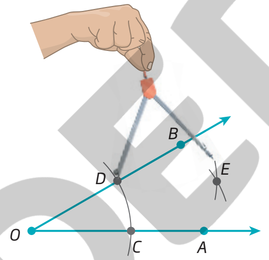
Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso.

Para construir a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, podemos realizar os seguintes passos.

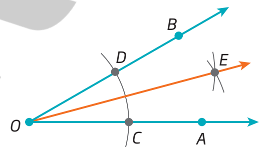
1º) Dado um ângulo $A\hat{O}B$, centramos o compasso em *O* e, com uma abertura qualquer, determinamos os pontos *C* e *D* sobre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, respectivamente.



2º) Centramos o compasso em *C* e em *D* e traçamos arcos que se cruzam na região interna do ângulo, obtendo um ponto *E*.



3º) Traçamos $\overrightarrow{OE}$ determinando, assim, a bissetriz de $A\hat{O}B$.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Tecnologias digitais em foco

Bissetriz

Nesta seção, vamos utilizar o GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor pode indicar, para construir a bissetriz de um ângulo e realizar algumas investigações.

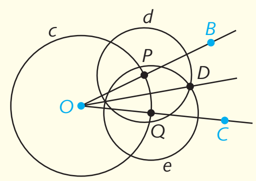
Construa

Siga os passos a seguir para construir a bissetriz de um ângulo.

1º) Construa um ângulo $A\hat{O}B$ qualquer. Para isso, utilize a ferramenta e trace duas semirretas de mesma origem *O*: $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$

80

6. Trace a semirreta $\overrightarrow{OD}$, que é a bissetriz do ângulo $B\hat{O}C$.

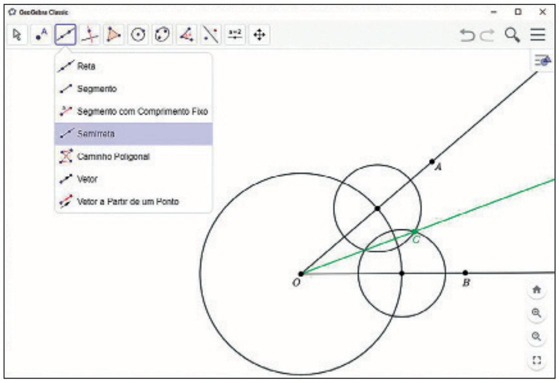


ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

As atividades propostas nessa seção podem ser realizadas com qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de acesso a computadores, a proposta pode ser adaptada para ser realizada com a utilização de papel e instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor etc).

No **item a** do *Explore*, os estudantes terão a oportunidade de verificar experimentalmente que a bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à uma mesma medida de distância dos lados desse ângulo.

2º) Siga o passo a passo da construção geométrica da bissetriz de um ângulo da página anterior e construa a bissetriz $\overrightarrow{OC}$ do ângulo $A\hat{O}B$.



© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

Utilize a ferramenta para construir circunferências que podem ter qualquer medida de comprimento do raio.

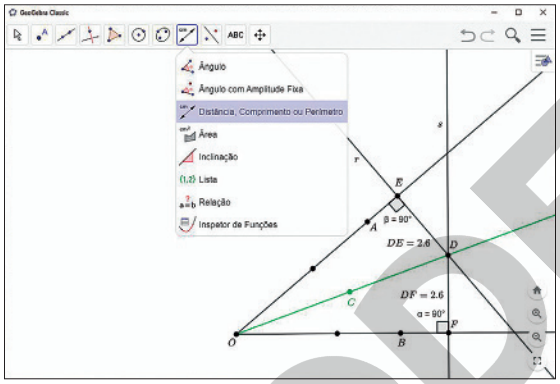
Utilize a ferramenta para construir circunferências que têm uma medida de comprimento do raio definida.

Explore

Faça o que se pede usando as ferramentas do GeoGebra.

a) Meça a abertura dos ângulos $C\hat{O}A$ e $B\hat{O}C$. Em seguida, movimente os pontos móveis da construção. Que relação podemos identificar entre as medidas realizadas?

b) Marque um ponto D qualquer na semirreta $\overrightarrow{OC}$. Utilize a ferramenta e trace uma reta r, perpendicular a $\overrightarrow{OA}$ passando por D, e uma reta s, perpendicular a $\overrightarrow{OB}$ passando por D. Depois, marque E e F, intersecções das perpendiculares com os lados do ângulo.



© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

- O que as medidas de comprimento dos segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$ representam?

c) Meça o comprimento desses segmentos. Em seguida, movimente o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{OC}$. Que relação podemos identificar entre as medidas realizadas?

Explore: a) Elas são iguais. **b)** Resposta: As medidas das distâncias entre o ponto D e a semirreta $\overrightarrow{OA}$ e entre D e a semirreta $\overrightarrow{OB}$, respectivamente. **c)** Espera-se que os estudantes percebam que $DE = DF$, ou seja, que as medidas das distâncias entre D e cada lado do ângulo são iguais.

Observação

Note que nessa imagem "escondemos" algumas construções. Você pode fazer o mesmo clicando com o botão direito do *mouse* sobre a construção e desabilitando a opção "Exibir Objeto". É interessante utilizar esse recurso e esconder alguns traçados, permitindo melhor visualização nas investigações.

81

Mediatriz de um segmento

A definição de mediatriz cita duas propriedades: é perpendicular ao segmento e passa por seu ponto médio.

Também é possível definir a mediatriz em termos de um lugar geométrico, como veremos no tópico a seguir. O desenvolvimento dessa definição torna evidente as propriedades citadas.

Oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

Sugestão de atividade extra

Proponha a seguinte situação para os estudantes: "Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, siga os mesmos passos para a construção da mediatriz desse segmento, mas utilize como abertura do compasso a medida do comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$."

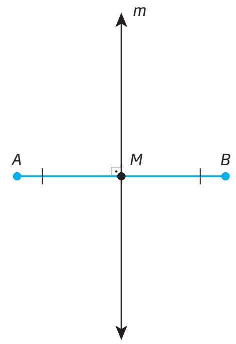
Ao encontrarem as intersecções C e D, peça que liguem as extremidades do segmento a essas intersecções e pintem o interior das figuras, formando dois triângulos. Pergunte aos estudantes o que eles podem dizer em relação aos lados desses triângulos e ao segmento de reta $\overline{AB}$. Os estudantes devem perceber que os triângulos são equiláteros e as medidas de comprimento dos seus lados são iguais a AB.

Nessa atividade, os estudantes poderão constatar que a construção da mediatriz de um segmento de reta pode ser utilizada para representar triângulos isósceles (ou triângulos equiláteros que são casos particulares).

Essas propriedades serão retomadas no **capítulo 7**.

Mediatriz de um segmento de reta

Na figura abaixo, a reta m é perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$ e passa pelo ponto M, ponto médio de $\overline{AB}$. O ponto médio de um segmento de reta é aquele que o divide em dois segmentos congruentes. Assim, m é **mediatriz** do segmento de reta $\overline{AB}$.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Mediatriz é a reta perpendicular a um segmento de reta que passa pelo ponto médio desse segmento.

Observação

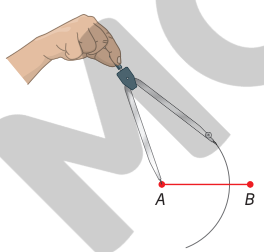
Podemos indicar a medida de comprimento de um segmento de reta $\overline{AB}$ por med($\overline{AB}$) ou, simplesmente, por AB.

Construção geométrica da mediatriz de um segmento de reta

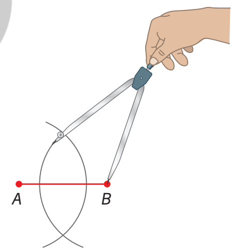
Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso.

Para construir a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$, podemos realizar os seguintes passos.

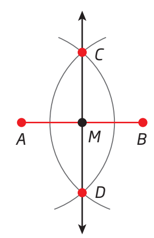
1º) Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, centramos o compasso em A e, com uma abertura maior que a metade do segmento de reta, traçamos um arco de circunferência.



2º) Centramos o compasso em B e, com a mesma abertura, traçamos outro arco que cruze o primeiro. Com isso, obtemos os pontos C e D.



3º) Traçamos $\overleftrightarrow{CD}$ determinando, assim, a mediatriz de $\overline{AB}$. Confira que M, intersecção de $\overline{AB}$ com $\overleftrightarrow{CD}$, é o ponto médio do segmento de reta.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Tecnologias digitais em foco

Mediatriz e ponto médio

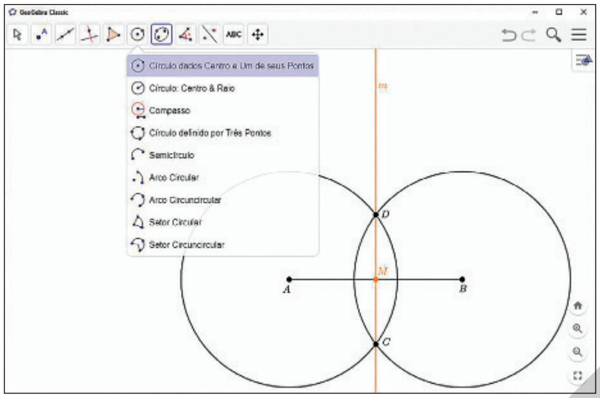
Nesta seção, vamos utilizar o GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor pode indicar, para construir a mediatriz e o ponto médio de um segmento de reta e realizar algumas investigações.

Construa

Siga os passos abaixo para construir a mediatriz e o ponto médio de um segmento de reta.

1º) Utilize a ferramenta e construa um segmento de reta $\overline{AB}$.

2º) Siga o passo a passo do tópico *Construção geométrica da mediatriz de um segmento de reta* e construa a mediatriz *m* e o ponto médio *M* do segmento de reta $\overline{AB}$.



© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

Explore

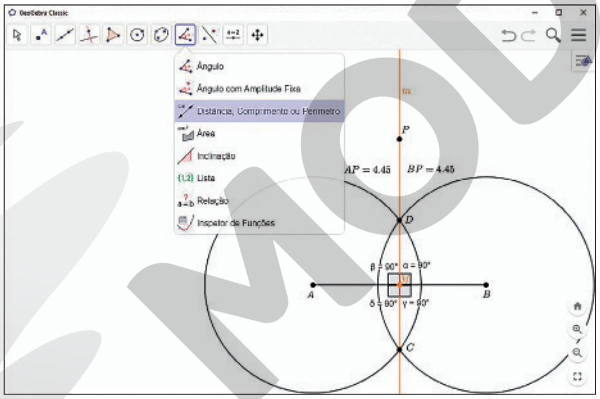
Faça o que se pede usando as ferramentas do GeoGebra.

Explore: a) As medidas de comprimento dos segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são iguais e a abertura dos ângulos formados entre *m* e $\overline{AB}$ mede 90°.

b) Espera-se que os estudantes percebam que $AP = BP$ independentemente da posição do ponto *P*.

a) Utilize a ferramenta e meça o comprimento dos segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$. Depois, utilize a ferramenta e meça a abertura dos ângulos formados entre *m* e o segmento de reta $\overline{AB}$. Por fim, movimente a construção por meio dos pontos móveis (*A* e *B*). Que relação podemos identificar em relação às medidas obtidas?

b) Marque um ponto *P* qualquer sobre a reta *m* e, utilizando a ferramenta , meça o comprimento dos segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{PB}$. Depois, movimente o ponto *P* ao longo da reta *m*. Que relação podemos identificar?



© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

(**EF08MA15**) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

- Competência geral 5 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 2 (a descrição está na página VII).
- Habilidade EF08MA15.

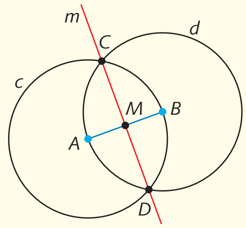
Objetivo:

Construir a mediatriz e o ponto médio utilizando o *software* GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica.

Mediatriz e ponto médio

Se achar conveniente, mostre aos estudantes outro modo de construir a mediatriz e o ponto médio.

1. Construa um segmento de reta $\overline{AB}$.
2. Trace uma circunferência *c*, de centro em *A*, passando por *B*.
3. Trace uma circunferência *d*, de centro em *B*, passando por *A*.
4. Marque os pontos *C* e *D*, intersecções das circunferências *c* e *d*.
5. Trace a reta mediatriz *m* passando pelos pontos *C* e *D*.
6. Marque o ponto médio *M*, intersecção da reta *m* com o segmento de reta $\overline{AB}$.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

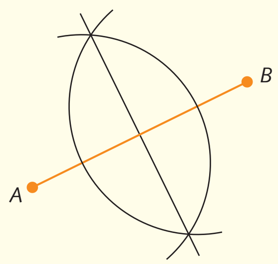
Em *Explore*, os estudantes terão a oportunidade de verificar experimentalmente que mediatriz de um segmento é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão à mesma medida de distância de seus extremos. Essa utilização da tecnologia digital para produzir conhecimento favorece o desenvolvimento da competência geral **5** e da competência específica **2** de Matemática.

As atividades propostas nessa seção podem ser realizadas com qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de acesso a computadores, a proposta pode ser adaptada para ser realizada com a utilização de papel e instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor etc).

Nas **atividades 6**, **7**, **11** e **12**, oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

- Na **atividade 7**, sugira aos estudantes que construam, no **item a**, um ângulo com medida de abertura suficiente para que sua divisão em quatro ângulos congruentes não seja tão difícil de fazer. Para o **item b**, eles podem utilizar a construção da bissetriz três vezes: a primeira divide o ângulo em duas partes com a mesma medida de abertura, e as duas próximas devem dividir essas duas partes ao meio, resultando em quatro ângulos congruentes.
- Na **atividade 11**, caso seja necessário, retome a construção da mediatriz apresentada na página anterior, explicando o passo a passo.

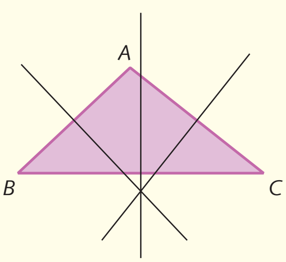
Resposta da **atividade 11**:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 12**, os estudantes trabalham com a construção do circuncentro do triângulo. Ao construírem o ponto que é a intersecção das três mediatrizes, oriente-os a colocar a ponta-seca do compasso nesse ponto e a abrir o compasso até algum vértice do triângulo e que, assim, tracem uma circunferência. Depois, pergunte o que percebem com a construção. Incentive a turma a raciocinar sobre a propriedade da mediatriz. Comente que o ponto de intersecção pertence às três mediatrizes. Os estudantes devem associar essa propriedade à construção da circunferência, observando que todas medidas das distâncias do ponto de intersecção das mediatrizes aos vértices do triângulo são iguais entre si e numericamente iguais à medida do comprimento raio da circunferência que circunscreve o triângulo.

Resposta da **atividade 12**:

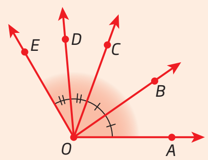


Atividades

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso nas atividades **6**, **7**, **11** e **12**.

Faça as atividades no caderno.

4 Nesta ilustração, $\overrightarrow{OB}$ é a bissetriz de $A\hat{O}C$, e $\overrightarrow{OD}$ é a bissetriz de $C\hat{O}E$.



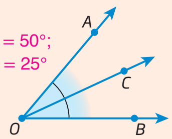
a) Qual é a medida da abertura de $A\hat{O}B$ se $med(B\hat{O}C) = 35°$? **4. a)** 35°

b) Qual é a medida da abertura de $C\hat{O}D$ se $med(D\hat{O}E) = 25°$? **4. b)** 25° **4. c)** 95°

c) Qual é a medida da abertura de $D\hat{O}A$?

5 Na figura abaixo, $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$ e $med(A\hat{O}C) = 25°$. Determine as medidas da abertura de $A\hat{O}B$ e de $B\hat{O}C$.

5. $med(A\hat{O}B) = 50°$; $med(B\hat{O}C) = 25°$



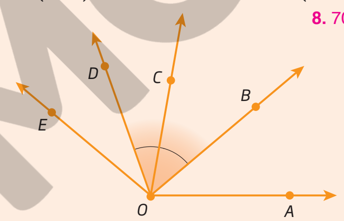
6 Construa no caderno, com o auxílio de um transferidor, um ângulo cuja abertura meça 80°. Em seguida, utilizando régua e compasso, determine a bissetriz desse ângulo e escreva a medida da abertura de cada ângulo obtido. **6.** 40°

7 No caderno, utilizando régua e compasso:

a) construa um ângulo qualquer; **7.** Respostas pessoais.

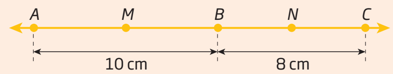
b) divida o ângulo em quatro ângulos congruentes.

8 Na figura abaixo, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$, $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $C\hat{O}E$, $med(A\hat{O}C) = 80°$ e $med(C\hat{O}E) = 60°$. Determine $med(B\hat{O}D)$. **8.** 70°

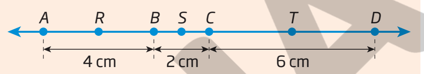


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

9 Na figura abaixo, M é o ponto médio de $\overline{AB}$ e N é o ponto médio de $\overline{BC}$.
Se $med(\overline{AB}) = 10$ cm e $med(\overline{BC}) = 8$ cm, determine $med(\overline{MN})$. **9.** 9 cm



10 Na figura abaixo, R, S e T são os pontos médios dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Determine:

a) a medida de comprimento de $\overline{RS}$; **10. a)** 3 cm

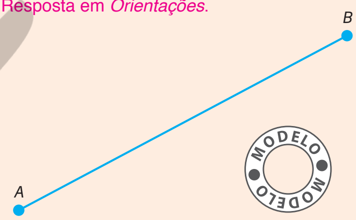
b) a medida de comprimento de $\overline{ST}$; **10. b)** 4 cm

c) a medida de comprimento de $\overline{SD}$; **10. c)** 7 cm

d) a medida de comprimento de $\overline{RD}$. **10. d)** 10 cm

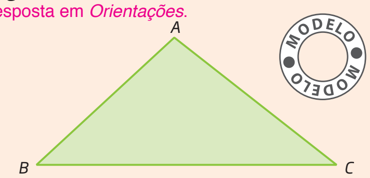
11 Copie o segmento de reta $\overline{AB}$ no caderno e, com o auxílio de um compasso, determine sua mediatriz.

11. Resposta em *Orientações*.



12 Copie o $\triangle ABC$ no caderno e, com o auxílio de um compasso, trace as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$.

12. Resposta em *Orientações*.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Construção de ângulos com régua e compasso

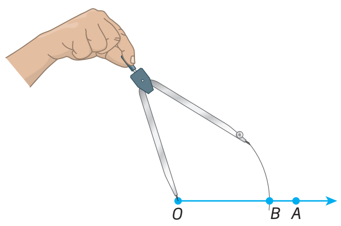
A seguir, vamos verificar como podemos construir alguns ângulos com o auxílio de régua e compasso. Esses ângulos podem ser utilizados, por exemplo, na construção de figuras planas ou em transformações geométricas.

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso.

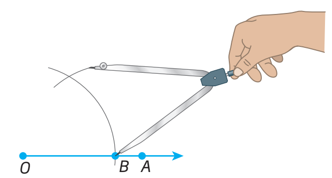
Ângulo de medida da abertura de 60°

Confira o passo a passo para a construção de um ângulo cuja medida de abertura é 60°.

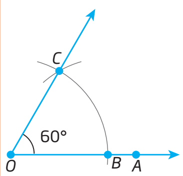
1º) Traçamos uma semirreta $\overrightarrow{OA}$. Centramos o compasso em *O* e, com uma abertura qualquer, traçamos um arco, determinando em $\overrightarrow{OA}$ o ponto *B*.



2º) Centramos o compasso em *B* e, com a mesma abertura, traçamos um arco cruzando o arco anterior, determinando o ponto *C*.



3º) Traçamos $\overrightarrow{OC}$ determinando, assim, o ângulo $B\hat{O}C$ cuja abertura mede 60°.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Um ângulo cuja medida de abertura é 30° pode ser construído traçando-se a bissetriz de um ângulo cuja abertura mede 60°.

Tecnologias digitais em foco

Ângulo de medida da abertura de 60°

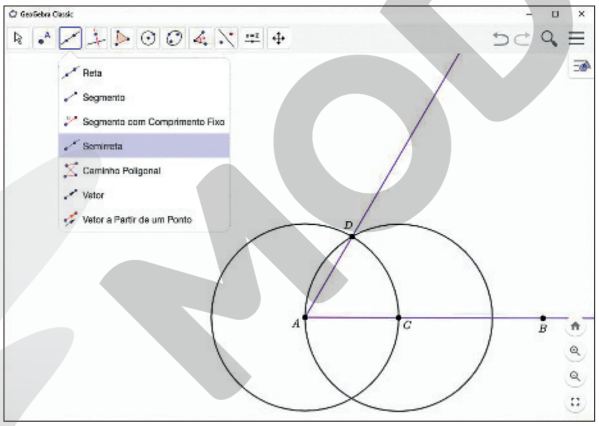
Nesta seção, vamos utilizar o GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor pode indicar, para construir um ângulo cuja abertura mede 60° e realizar algumas investigações.

Construa

Siga os passos abaixo para construir um ângulo de medida da abertura de 60°.

1º) Utilize a ferramenta e construa uma semirreta $\overrightarrow{AB}$.

2º) Siga o passo a passo do início deste tópico e construa um ângulo $B\hat{A}D$ cuja abertura mede 60°.



© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

85

Construção de ângulos com régua e compasso

Após explorar a construção do ângulo com abertura medindo 60°, peça aos estudantes que proponham uma maneira de construir um ângulo com medida de abertura de 120°. Eles podem obter esse ângulo construindo dois ângulos com abertura medindo 60° consecutivos e adjacentes. Caso tenham dificuldades, oriente-os a construir o ângulo com abertura medindo 60° e, em seguida, utilizar o lado construído ($\overrightarrow{OC}$ da imagem) como se fosse a base utilizada no início da construção ($\overrightarrow{OA}$ da imagem).

Oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

Habilidade EF08MA15.

Objetivo:

Construir um ângulo com medida de abertura de 60° utilizando o *software* GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica.

Ângulo de medida de abertura medindo 60°

Após os estudantes realizarem o 1º e o 2º passos, peça a eles que comparem os ângulos e as construções auxiliares. É importante que eles percebam que a medida do comprimento do raio das circunferências é irrelevante para a construção do ângulo, porém ambas devem ter a mesma medida de comprimento de raio.

As atividades propostas nessa seção podem ser realizadas com qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de acesso a computadores, a proposta pode ser adaptada para ser realizada com a utilização de papel e instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor etc).

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Em *Explore*, os estudantes terão a oportunidade de verificar que a medida da abertura do ângulo construído é igual a 60°. Se achar oportuno, antes de propor o **item b**, verifique se eles conseguem encontrar um caminho para demonstrar que, de fato, o ângulo construído tem essa medida. Dê um tempo para que explorem a construção, as ferramentas do *software* e levantem hipóteses. Essa utilização da tecnologia digital para produzir conhecimento favorece o desenvolvimento da competência geral **5** e da competência específica **2** de Matemática.

Depois que os estudantes construírem o ângulo com abertura medindo 90°, peça que construam um quadrado. Em seguida, eles devem determinar a bissetriz de algum dos ângulos retos do quadrado. Pergunte o que podem observar em relação a essa bissetriz. Espera-se que eles percebam que um pedaço da bissetriz coincide com a diagonal do quadrado.

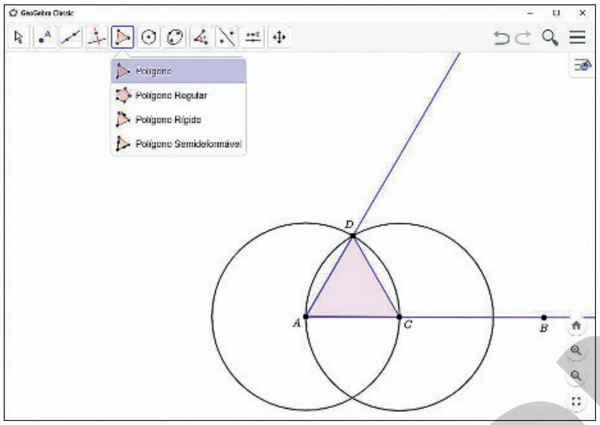
Se julgar adequado, peça aos estudantes que construam os ângulos com abertura medindo 75° e 105°, que podem ser obtidos a partir dos algoritmos vistos anteriormente para a construção de ângulos e da bissetriz.

Tecnologias digitais em foco

Explore

a) Utilize a ferramenta e meça a abertura do ângulo $B\hat{A}D$. Depois, movimente os pontos móveis. O que você pode concluir?

b) Utilize a ferramenta e construa o triângulo cujos vértices sejam os pontos A, C e D.



© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

Agora, utilize a ferramenta e meça o comprimento dos lados desse triângulo. O que você pode concluir?

c) Por que podemos garantir que a abertura do ângulo construído mede 60°?

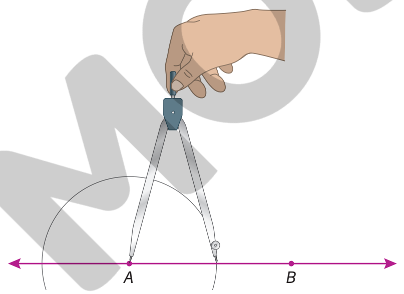
Explore: a) Espera-se que os estudantes concluam que a abertura do ângulo $B\hat{A}D$ mede 60° independentemente da medida de comprimento do raio das circunferências que foram traçadas na construção de $B\hat{A}D$.
b) Espera-se que os estudantes concluam que o triângulo *ACD* é um triângulo equilátero.
c) Porque o ângulo construído é um dos ângulos internos de um triângulo equilátero e, portanto, sua abertura mede 60°.

Ângulo de medida da abertura de 90°

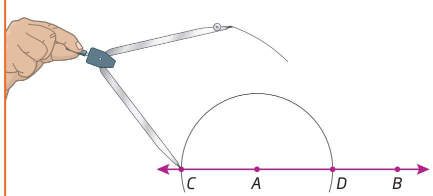
Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso.

Analise o passo a passo para a construção de um ângulo cuja medida de abertura é 90°.

1º) Traçamos a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Centramos o compasso em *A* e, com uma abertura qualquer, traçamos um arco cruzando a reta $\overleftrightarrow{AB}$ em dois pontos, determinando os pontos *C* e *D*.

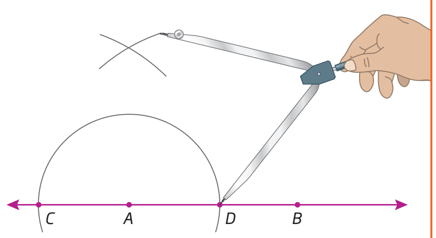


2º) Centramos o compasso em *C* e, com uma abertura maior que $\overline{CA}$, traçamos um arco.

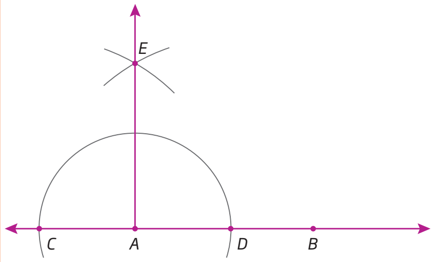


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

3º) Centramos o compasso em *D* e, com a mesma abertura do passo anterior, traçamos um arco, cruzando o arco anterior e determinando o ponto *E*.



4º) Traçamos $\overrightarrow{AE}$ determinando, assim, o ângulo $B\hat{A}E$, que mede 90°.



Observação

Na construção do ângulo de medida da abertura de 90°, determinamos dois pontos (*C* e *D*) equidistantes do vértice do ângulo (*A*) e, com isso, repetimos os mesmos passos da construção da mediatriz.

equidistante: tem a mesma medida de distância entre dois ou mais objetos (pontos, por exemplo).

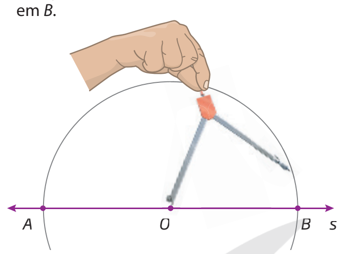
Um ângulo cuja medida de abertura é 45° pode ser construído traçando-se a bissetriz de um ângulo reto.

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso.

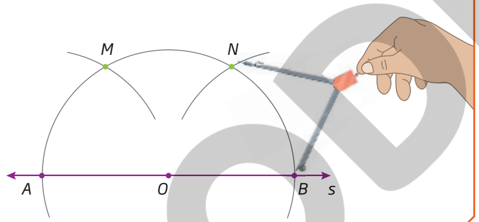
Retas paralelas

No 7º ano, construímos retas paralelas com o uso de esquadros. Agora, vamos estudar como construir retas paralelas usando régua e compasso.

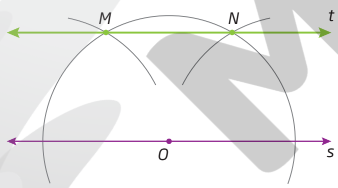
1º) Traçamos a reta *s* e marcamos um ponto *O* qualquer em *s*. Centramos o compasso em *O* e traçamos um arco que intercepta *s* em *A* e em *B*.



2º) Com centros em *A* e em *B* e uma abertura menor que $\overline{AB}$, traçamos arcos que interceptam o arco do passo anterior e determinamos os pontos *M* e *N*.



3º) Traçamos *t* // *s* passando por *M* e por *N*.

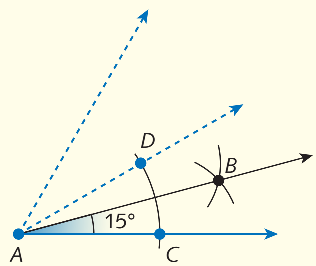


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

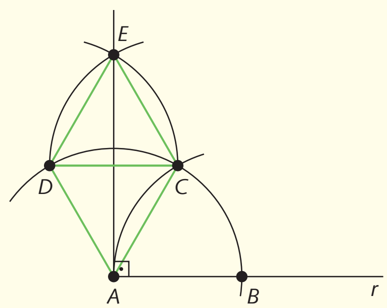
Solicite aos estudantes que utilizem régua e compasso e reproduzam os passos para construir retas paralelas. Em seguida, desafie-os a utilizar essa construção para construir um retângulo qualquer e, depois, um quadrado.

A construção das retas paralelas se justifica pelo seguinte fato: esses passos são necessários para a construção de um trapézio isósceles, e sabemos que, no trapézio, as bases são segmentos de reta paralelos. Não deixe de retornar a essa construção quando forem abordados os trapézios no capítulo **7**.

- Nas **atividades 13** e **14** da página seguinte, para a construção do ângulo com abertura medindo 15° e do ângulo com abertura medindo 90°, os estudantes deverão utilizar as construções aprendidas até o momento e aplicar a construção da bissetriz. Na **atividade 13**, por exemplo, podem construir um ângulo com abertura medindo 60° e sua bissetriz, obtendo dois ângulos com medida de abertura igual a 30°. Em seguida, podem traçar a bissetriz de um desses ângulos, obtendo assim dois novos ângulos com abertura medindo 15°. Para obter o ângulo com abertura medindo 90° na **atividade 14**, eles podem construir dois ângulos adjacentes e consecutivos com abertura medindo 60° e, em seguida, construir a bissetriz de um deles.
- Resposta da **atividade 13** da página seguinte:



- Resposta da **atividade 14** da página seguinte:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 15**, também da página seguinte, há mais de uma maneira de construir os ângulos apresentados. Por exemplo, para o ângulo com abertura medindo 150°, o estudante pode construir um ângulo reto e, em seguida, construir um ângulo com abertura medindo 60° adjacente ao ângulo reto ($90° + 60° = 150°$). Outra forma de construir esse ângulo é, a partir de um ângulo raso $B\hat{A}C$ e, em seguida, construir um ângulo com abertura medindo 30° ($D\hat{A}C$), consecutivo e não adjacente a $B\hat{A}C$ ($180° - 30° = 150°$). Reforce para eles os cuidados ao manusear o compasso.
- Para a **atividade 16** da página seguinte, caso os estudantes tenham dificuldade, comente que o ponto *P* deve ser considerado como um dos pontos obtidos no segundo passo da construção de uma reta paralela (*M* ou *N*), desta página. Alerte para os riscos em relação ao manuseio do compasso.

87

Lugares geométricos

BNCC:

Habilidade EF08MA17.

Objetivo:

Compreender a circunferência, a mediatriz, a bissetriz e a reta paralela como lugares geométricos.

Justificativa

Compreender a circunferência, a mediatriz, a bissetriz e a reta paralela como lugares geométricos possibilita aos estudantes ampliarem esses conceitos e aplicá-los na resolução de diferentes problemas cotidianos, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA17**.

Mapeando conhecimentos

Explique aos estudantes o que é lugar geométrico. Depois, organize a sala em quatro grupos e atribua para cada um as seguintes tarefas:

Grupo 1: Definir a circunferência como lugar geométrico.

Grupo 2: Definir a bissetriz como lugar geométrico.

Grupo 3: Definir a mediatriz como lugar geométrico.

Grupo 4: Definir a reta paralela a uma reta dada como lugar geométrico.

Incentive os estudantes de cada grupo a desenhar, medir, experimentar e conjecturar. Reserve um momento para que os grupos possam compartilhar suas conclusões e como chegaram a elas.

Para as aulas iniciais

Espera-se que não tenham encontrado dificuldades em perceber que a circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo (centro da circunferência).

Caso tenham apresentado dificuldades para definir a bissetriz, oriente-os a marcar um ponto qualquer P sobre a bissetriz e medir a distância entre ele e os lados do ângulo inicial. Destaque que, para medir essa distância, devem traçar um segmento de reta que ligue o ponto P ao lado do ângulo, formando um ângulo reto, e medir o comprimento desse segmento. Questione o que podem afirmar sobre as medidas de distância entre o ponto P e os lados do ângulo inicial.

Em relação à definição da mediatriz, sugira que marquem pontos na mediatriz e meçam a distância entre cada um desses pontos e as extremidades do segmento.

Por fim, para ajudá-los a definir a reta paralela, proponha que marquem pontos em uma das retas e meçam a distância entre cada um desses pontos e a outra reta.

Atividades

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso nas atividades.

Faça as atividades no caderno.

13 No caderno, trace a semirreta $\overrightarrow{AC}$ e construa o ângulo $B\hat{A}C$ de medida da abertura de 15°. **13.** Resposta em *Orientações*.

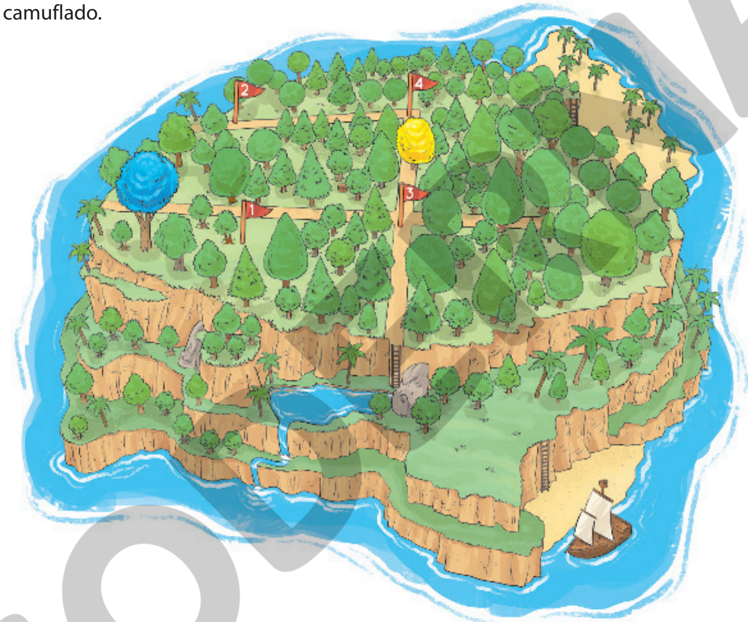
14 No caderno, construa um ângulo reto utilizando as construções passo a passo do ângulo de medida da abertura de 60° e da bissetriz. **14.** Resposta em *Orientações*.

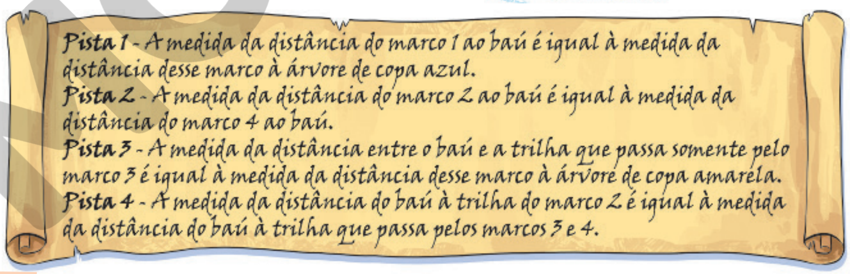
15 Dos ângulos de medida de abertura de 30°, 45°, 100°, 125° e 150°, quais podem ser construídos com régua e compasso usando as construções que aprendemos até aqui? Construa, no caderno, aqueles que forem possíveis. **15.** 30°, 45° e 150°

16 Desenhe, em seu caderno, uma reta r e um ponto P externo a essa reta. Em seguida, construa, com régua e compasso, uma reta s paralela à r, passando pelo ponto P. **16.** Resposta pessoal.

2 Lugares geométricos

Você já brincou de caça ao tesouro? Analise a ilha e as pistas que levam ao local em que está localizado um baú camuflado.





ILUSTRAÇÕES: CAIO BORACINI/ARQUIVO DA EDITORA

(**EF08MA17**) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

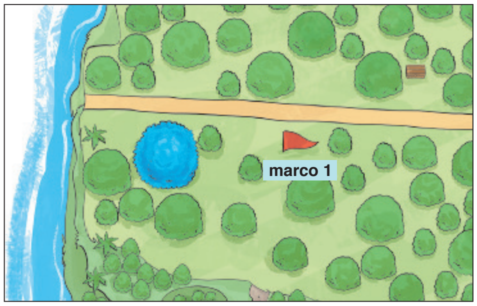
Com base nessas pistas, é possível determinar as regiões onde o baú está localizado. Para saber a localização exata do baú, é necessário decifrar as pistas.

Cada pista sugere uma propriedade das seguintes construções: circunferência, mediatriz, retas paralelas e bissetriz. A essas pistas damos o nome de **lugar geométrico**.

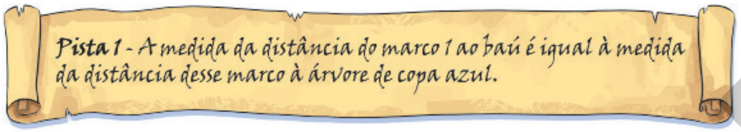
Lugar geométrico é a figura formada por todos os pontos do plano que têm em comum uma determinada propriedade.

Circunferência

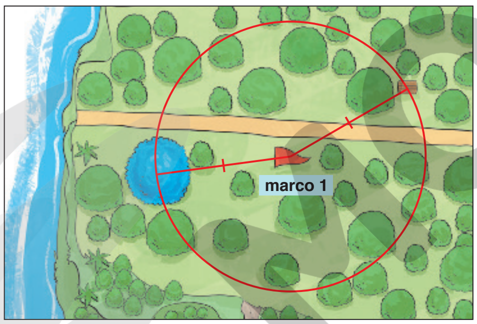
Verifique este recorte da ilustração da ilha.



A pista que será utilizada é a seguinte:



Como sabemos a medida da distância do marco 1 à árvore, é possível delimitar uma linha em que seja possível encontrar o baú. Sabemos que na circunferência encontram-se todos os pontos do plano que mantêm a mesma medida da distância a partir do seu centro. Isso significa que o baú do tesouro está em algum lugar da circunferência.



ILUSTRAÇÕES: CAIO BORACINI/ARQUIVO DA EDITORA

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo.

O estudo dos lugares geométricos, nesse momento, será feito de forma intuitiva, a partir da definição de cada um deles dentro de um contexto. Assim, não vamos utilizar a linguagem matemática formal para comparar conjuntos de pontos do plano. Consequentemente, as demonstrações das propriedades de cada um dos lugares geométricos apresentados ficarão para estudos posteriores.

Circunferência

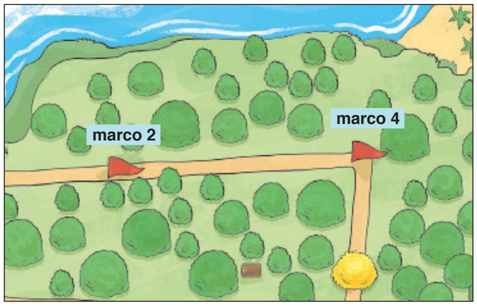
Ao apresentar a definição de circunferência como lugar geométrico, construa na lousa uma circunferência utilizando um giz preso a um barbante. Segure uma ponta do barbante no centro da circunferência e com a outra ponta, com o giz preso, risque a circunferência. Com o barbante preso, mostre que qualquer ponto da circunferência está à mesma medida da distância de seu centro (o ponto fixo), e essa medida da distância é determinada pela medida do comprimento do raio da circunferência (medida do comprimento do barbante).

Mediatriz

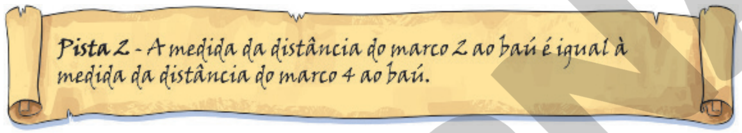
Se julgar adequado, ao explicar a mediatriz como lugar geométrico, relembre os passos da construção da mediatriz por meio de circunferências, nas orientações da página 83. Faça, na lousa, a construção da mediatriz e coloque mais de um par de circunferências concêntricas, mostrando que as intersecções estão sobre a mediatriz do segmento cujas extremidades são os centros dessas circunferências.

Mediatriz

Analise outro recorte feito a partir da ilustração da ilha.

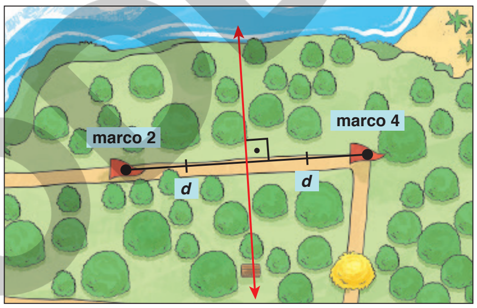


Vamos utilizar a seguinte pista:



Não sabemos a posição do baú, mas conhecemos a localização dos marcos 2 e 4; então, a partir do ponto médio do segmento de reta que une os marcos 2 e 4, as medidas de distância *d* são iguais.

A mediatriz é a reta perpendicular que passa pelo ponto médio, e é possível demostrar que, dado um ponto qualquer da mediatriz, a medida da distância entre esse ponto e uma das extremidades do segmento de reta (nesse caso, por exemplo, ponto que localiza o marco 2) é igual à medida da distância entre esse mesmo ponto e a outra extremidade do segmento de reta (ponto que localiza o marco 4).



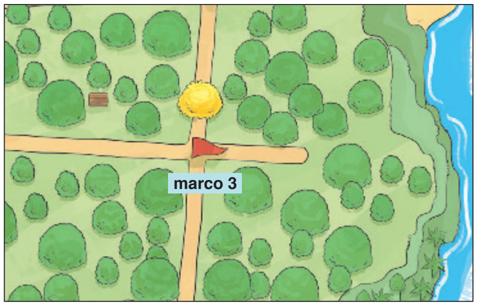
ILUSTRAÇÕES: CAIO BORACINI/ARQUIVO DA EDITORA

Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de dois pontos fixos dados (extremidades de um segmento de reta).

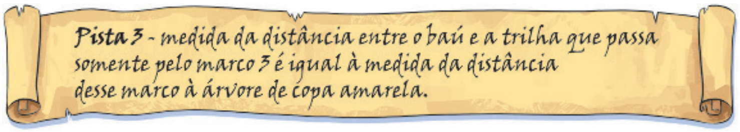
Assim, o tesouro está em algum lugar da mediatriz, o que reduz as possibilidades de localização do baú aos pontos de intersecção entre a mediatriz e a circunferência.

Retas paralelas

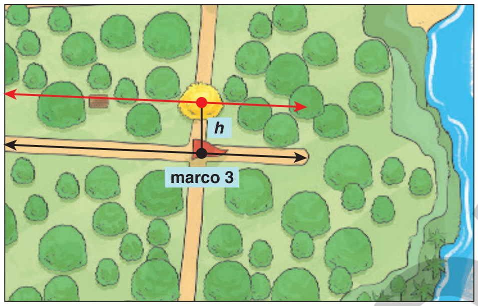
Confira outro recorte da ilustração da ilha.



A pista que vamos utilizar diz:



Como conhecemos a medida da distância *h* entre o marco 3 e a árvore de copa amarela, e o baú está à mesma medida da distância da trilha que contém apenas esse marco, podemos concluir que o baú está em uma reta paralela a essa trilha, passando pela árvore de copa amarela.



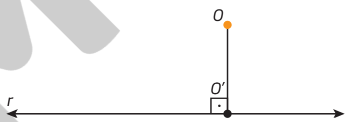
ILUSTRAÇÕES: CAIO BORACINI/ARQUIVO DA EDITORA

Reta paralela é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de uma reta dada.

Com essa pista, podemos garantir a localização exata do baú.

Observação

A medida da distância entre um ponto O e uma reta r é dada pela medida de comprimento do segmento de reta perpendicular a r, com uma extremidade no ponto O e a outra extremidade no ponto O', na intersecção do segmento com a reta r.



A medida da distância entre O e r é igual a OO'.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Retas paralelas

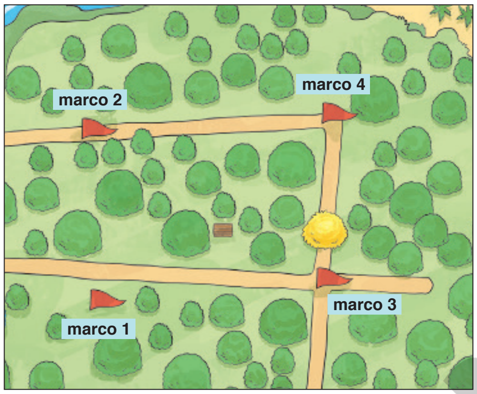
Após apresentar o conceito de reta paralela como lugar geométrico, proponha aos estudantes que verifiquem experimentalmente que, a rigor, existem duas retas paralelas que satisfazem essa condição: uma em cada semiplano determinado pela reta em questão. Essa verificação pode ser feita utilizando instrumentos de desenho ou com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica como o GeoGebra.

Bissetriz

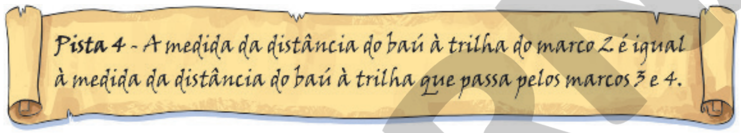
Pode não ser trivial para os estudantes compreenderem a bissetriz de um ângulo como uma semirreta com pontos que equidistam dos lados desse ângulo. Caso tenham dificuldade, construa a bissetriz de um ângulo na lousa.

Bissetriz

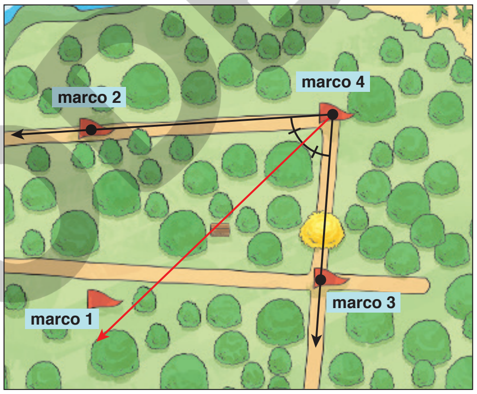
Verifique este último recorte da ilustração da ilha.



A última pista traz a seguinte informação:



Poderíamos ter utilizado essa pista antes de outras. Verifica-se que as semirretas (trilhas) que saem do marco 4 e passam pelos marcos 2 e 3 formam um ângulo e que um ponto qualquer da bissetriz desse ângulo tem a mesma medida de distância a cada lado do ângulo. Essa informação confirma a localização do baú.



ILUSTRAÇÕES: CAIO BORACINI/ARQUIVO DA EDITORA

Bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos lados desse ângulo.

Note na ilustração abaixo a localização exata do baú.

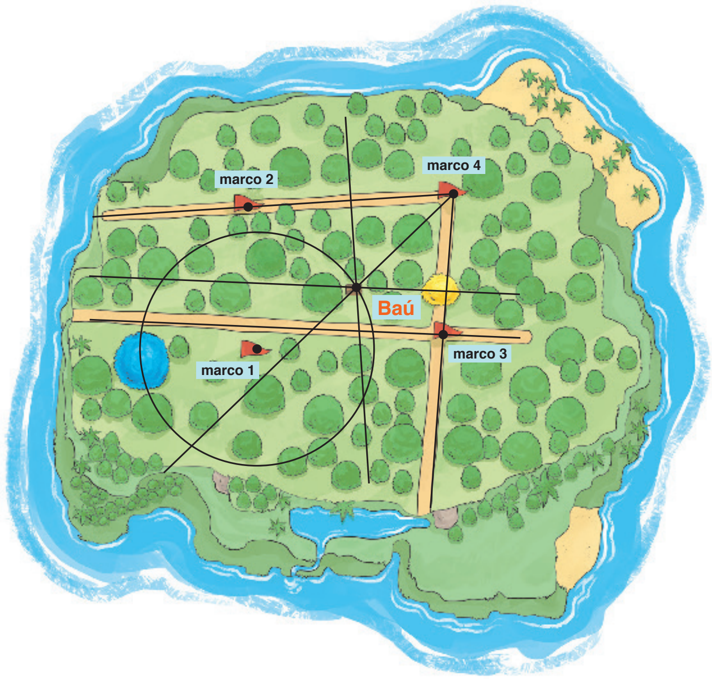


ILUSTRAÇÃO: CAIO BORACINI/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

Faça as atividades no caderno.

17. alternativa **c**

17 O lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de dois pontos fixos é denominado:

a) semirreta. **b)** ponto médio. **c)** mediatriz. **d)** bissetriz.

18 A afirmação abaixo é verdadeira? Justifique.

A medida da distância entre a rua das Américas e a dos Eucaliptos é a mesma em qualquer ponto, pois elas são paralelas.

18. Sim, pois as ruas são paralelas, e retas paralelas são o lugar geométrico do plano que mantém a mesma medida da distância de uma reta.

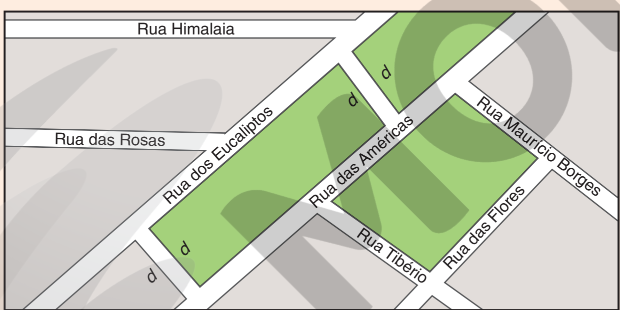


ILUSTRAÇÃO: SELMA CAPARROZ/ARQUIVO DA EDITORA

Imagem ilustrativa sem escala.

Sugestão de atividade extra

Após a realização da **atividade 18**, convide os estudantes a buscar, em mapas da região onde moram ou de alguma grande cidade brasileira, outros exemplos de ruas aparentemente paralelas e de ruas que parecem formar ângulos de medida de abertura iguais a 30°, 45°, 60° e 90°.

Os estudantes podem realizar uma brincadeira de caça ao tesouro utilizando esses mapas da mesma forma que foi feito no início desse tópico. Peça que se reúnam em grupos de quatro estudantes e elaborem um mapa do tesouro com base no mapa e nas ruas escolhidas. O tesouro deve estar em uma posição que seja possível de identificar por meio de pistas com descrições geométricas. Oriente os grupos a trocarem as atividades, entregando apenas o mapa e as descrições. Dê algum tempo para que tentem localizar o tesouro, anotem em uma folha e destroquem os mapas, as folhas com a resposta e as instruções de localização do tesouro. Cada grupo deve avaliar se os colegas seguiram corretamente as instruções e se conseguiram localizar o tesouro a partir das pistas. Se algum grupo não conseguir encontrar o tesouro, analise a resolução e o próprio enunciado, esclarecendo eventuais dúvidas.

Transformações geométricas

BNCC:

• Competência específica 3 (a descrição está na página VII).

• Habilidade EF08MA18.

Objetivos:

• Retomar os conceitos de translação, rotação e reflexão.

• Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas.

Justificativa

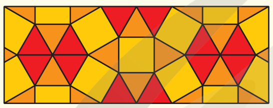
Retomar os conceitos de translação, rotação e reflexão é importante para que os estudantes consolidem os conhecimentos previamente adquiridos e possam explorar as composições de transformações geométricas.

É possível reconhecer as composições de transformações geométricas em contextos diversos, o que possibilita aos estudantes verificar como a Matemática pode se relacionar com outras áreas do conhecimento, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **3** de Matemática. O estudo dessas composições também amplia o repertório dos estudantes sobre esse conteúdo e contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA18.**

Mapeando conhecimentos

Reproduza, em papel ou arquivo eletrônico, algumas imagens de mosaicos construídos por translações, rotações e/ou reflexões de figuras; distribua as imagens entre os estudantes de cada grupo:

ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA



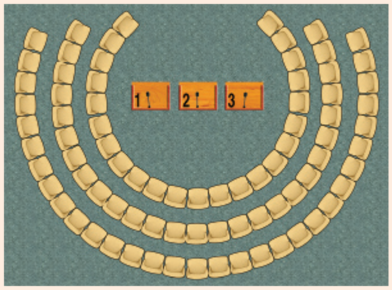
Em seguida, peça aos grupos que identifiquem translações, rotações e/ou reflexões. Reserve um momento para que os grupos compartilhem seus mosaicos e descobertas.

Para as aulas iniciais

Na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*, retomam-se os conceitos de translação, rotação e reflexão em relação a uma reta e em relação a um ponto. Faça a leitura coletiva dessa revisão com a turma e proponha que realizem as **atividades 18** e **19.** Discuta essas atividades com a turma e tire as possíveis dúvidas.

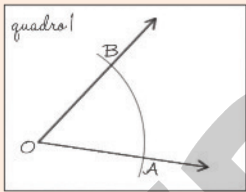
Você também pode propor aos estudantes que retomem os mosaicos explorados na dinâmica inicial e investiguem a equivalência entre algumas transformações e composições de transformações.

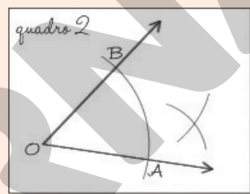
19 Na figura abaixo, as mesas de madeira no centro são denominadas tribunas. Qual delas o palestrante deve ocupar para que esteja à mesma medida de distância de cada poltrona de uma mesma fileira da plateia? **19.** tribuna 2

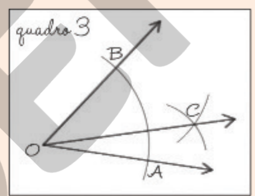


SELMA CAPARROZ/ ARQUIVO DA EDITORA

20 Mariana tentou construir a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ conforme os passos abaixo e percebeu, na última etapa, que a construção tinha um erro. Em qual quadro ocorreu o erro? Como Mariana deve corrigi-lo?







20. O erro aconteceu no quadro 2. Para traçar os arcos que determinam o ponto *C*, a abertura do compasso deve ser a mesma.

ILUSTRAÇÕES: CLÁUDIO CHYIO/ARQUIVO DA EDITORA

3 Transformações geométricas

Isometrias são transformações geométricas que preservam o formato e as medidas da figura inicial, como translação, rotação e reflexão, que podemos encontrar na ilustração a seguir.

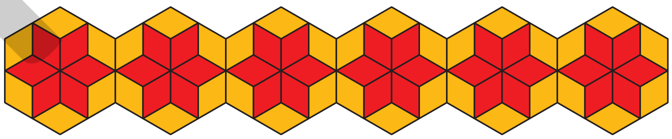


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

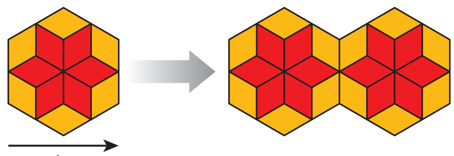
A figura obtida a partir de uma transformação geométrica é chamada de **imagem** dessa transformação.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

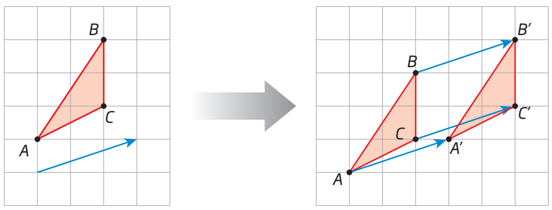
Translação

Translação é o deslocamento de uma figura dado por um vetor.

Um **vetor** (⟶) pode ser representado por um segmento orientado que indica a direção, o sentido e a medida da distância do deslocamento.

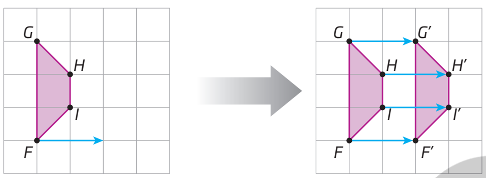


Confira a seguir algumas translações de polígonos na malha quadriculada.



O vetor (em azul) indica a direção, o sentido e a medida da distância do deslocamento. Note que cada ponto do triângulo foi transladado de acordo com o vetor. Assim, o triângulo *A'B'C'* é a translação do triângulo *ABC*.

Verifique mais um exemplo de translação.



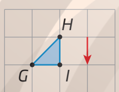
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade

Faça as atividades no caderno.

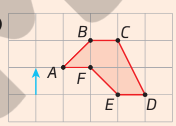
21 Em uma malha quadriculada, copie estas figuras e as translade de acordo com o vetor.

a)



21. a) Resposta em *Orientações.*

b)



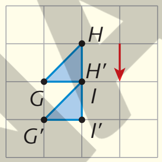
21. b) Resposta em *Orientações.*

Translação

Chame a atenção dos estudantes para o fato de que a translação consiste em deslocar, ou transportar, uma figura no plano, obtendo-se uma figura congruente à original. Após apresentar os exemplos desta página, você pode propor aos estudantes que, em uma folha de papel quadriculado, façam um desenho ou uma figura geométrica e o reproduzam em um local diferente do papel, realizando uma translação.

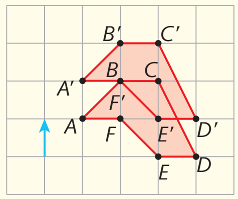
É importante também comentar que a representação de vetores se parece com a representação de semirretas. Enfatize com a turma que esses conceitos são diferentes.

- Resposta do **item a** da **atividade 21**:



- No **item b** da **atividade 21**, os estudantes podem estranhar o fato de as figuras se sobreporem na resposta. Explique que o deslocamento promovido pela translação não foi suficiente para que as figuras não se sobrepusessem e que a construção está correta.

Resposta do **item b** da **atividade 21**:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Rotação

É importante que os estudantes compreendam que para realizar uma rotação é necessário determinar um ponto (centro da rotação), a medida da abertura de um ângulo (ângulo da rotação) e um sentido (horário ou anti-horário).

Ao explorar a construção de uma rotação com transferidor e compasso, recomenda-se que você reproduza com a turma os passos descritos nesta página e vá tirando as dúvidas que possam surgir.

Oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

Sugestão de atividade extra

Antes de abordar o estudo sobre rotação, peça aos estudantes que pesquisem previamente o significado dessa palavra. Peça também que encontrem imagens que remetam a rotações na natureza ou em obras de arte. Os estudantes podem apresentar, por exemplo, imagens de algumas flores e frutos, como pétalas em torno de um centro, ou de um corte transversal de uma laranja. Explique que a rotação pode ser imaginada também em objetos de três dimensões, como os sólidos geométricos, a própria laranja ou, até mesmo, o planeta Terra. A rotação nesses casos se dá em torno de uma reta. Entretanto, o objeto de estudo serão as seções planas desses objetos, pois nesse momento nos concentraremos nas figuras planas. As imagens de exemplos podem ser obtidas em jornais, revistas ou impressas a partir da internet. Oriente os estudantes a colar as imagens no caderno, identificando o centro de rotação e justificando o motivo de acreditarem que as imagens apresentadas foram rotacionadas em torno de determinado ponto. Caso haja divergências entre o conceito e o que os estudantes apresentaram, explique os possíveis erros e esclareça eventuais dúvidas.

Rotação

Rotação é o giro de uma figura em torno de um centro de rotação, em determinado sentido (horário ou anti-horário), segundo um ângulo de rotação.

A figura abaixo foi rotacionada a partir de um giro de 60° no sentido horário. Sucessivas rotações de giro de 60° nesse sentido produzem a figura em vermelho a seguir.

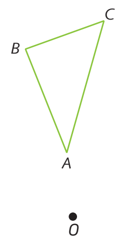
Na figura, o centro de rotação é um vértice do polígono, mas podemos escolher o centro de rotação em qualquer posição, inclusive externo ou interno à figura a ser rotacionada.

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso.

Construção de uma rotação com transferidor e compasso

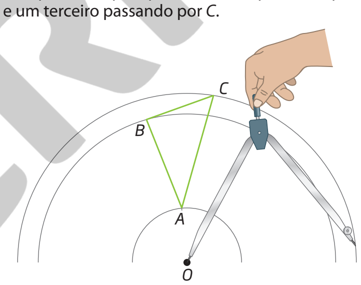
Podemos rotacionar uma figura utilizando um transferidor e um compasso.

Acompanhe os passos a seguir para obter a rotação de uma figura, dados o centro, a medida de abertura do ângulo e o sentido da rotação.

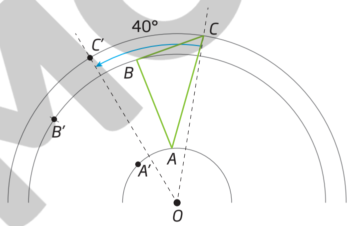


- centro de rotação: O
- medida da abertura do ângulo de rotação: 40°
- sentido da rotação: anti-horário

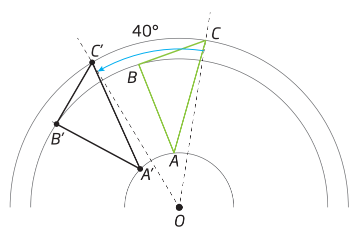
1º) Centramos o compasso no ponto O e traçamos um arco passando pelo ponto A, outro passando por B e um terceiro passando por C.



2º) Colocamos o centro do transferidor em O e, alinhando o transferidor com $\overline{AO}$, marcamos 40°; onde a medida de abertura do ângulo cruzar com o arco que passa pelo ponto A, marcamos o ponto A'. Fazemos o mesmo com os pontos B e C, marcando os pontos B' e C', atentando para o sentido do giro.



3º) Unimos os pontos A', B' e C', obtendo a rotação do triângulo ABC de um ângulo de medida da abertura de 40° no sentido anti-horário em torno do ponto O.



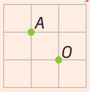
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

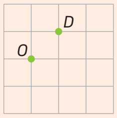
Faça as atividades no caderno.

22 Em uma malha quadriculada, copie as figuras abaixo e obtenha as rotações de centro O:

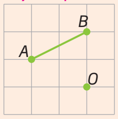
a) do ponto A, com um giro de 90°, no sentido horário;
22. a) Resposta em *Orientações*.



b) do ponto D, com um giro de 45°, no sentido horário;
22. b) Resposta em *Orientações*.

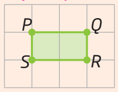


c) do segmento de reta $\overline{AB}$, com um giro de 60°, no sentido horário.
22. c) Resposta em *Orientações*.

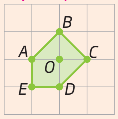


23 Copie as figuras abaixo em uma malha quadriculada e obtenha as rotações:

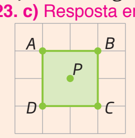
a) de centro P, no sentido horário, com uma rotação de um giro de 90°;
23. a) Resposta em *Orientações*.



b) de centro O, no sentido anti-horário, com uma rotação de um giro de 180°;
23. b) Resposta em *Orientações*.



c) de centro P, no sentido anti-horário, com uma rotação de um giro de 45°.
23. c) Resposta em *Orientações*.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

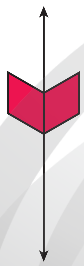
Reflexão

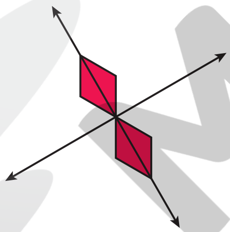
Reflexão é a transformação geométrica que reflete todos os pontos de uma figura em relação a uma reta (simetria axial) ou a um ponto (simetria central), mantendo cada ponto da figura à mesma medida da distância do eixo de simetria ou do centro de reflexão, respectivamente.

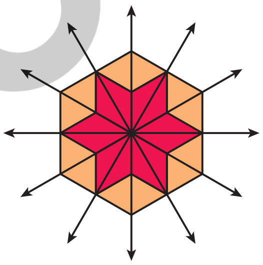
Simetria axial

Reconhecemos a **simetria axial** pela presença de um **eixo de simetria**. Uma figura pode ter mais de um eixo de simetria.

axial: palavra derivada de *axis*, termo latino que significa "eixo".


um eixo de simetria


dois eixos de simetria


vários eixos de simetria

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Reflexão

Antes de iniciar a exploração do tópico, pergunte aos estudantes se já repararam em como é a escrita BOMBEIROS ou AMBULÂNCIA na frente dos carros de emergência. Pergunte se conseguem explicar o motivo. Em seguida, peça que escrevam essas palavras no caderno e determinem sua reflexão, como na imagem a seguir.

Eixo de simetria

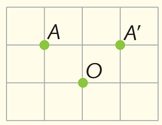
AMBULÂNCIA	AIƆNÂLUBMA
BOMBEIROS	SORIEBMOB

Peça aos estudantes que voltem à página do *Trocando ideias* e observem os grafismos presentes nas peças de cerâmica feitas por moradores locais da Ilha de Marajó, a fim de identificar a presença de simetria axial. A imagem a seguir, destaque a presença de um eixo de simetria em um dos vasos.

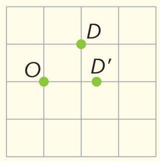
RITA BARRETO/FOTOARENA/ARQUIVO DA EDITORA

- Respostas da **atividade 22**:

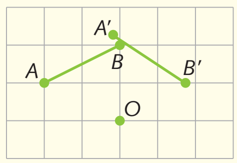
a)



b)



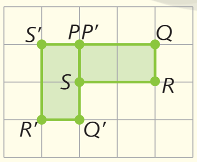
c)



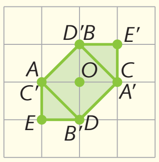
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- Respostas da **atividade 23**:

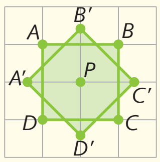
a)



b)



c)

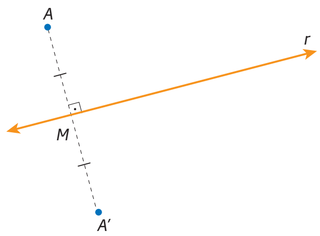


Proponha aos estudantes que, em uma folha de papel quadriculado, representem o simétrico de um ponto, de um segmento de reta e de uma reta em relação a um eixo de simetria. Você pode propor essa atividade antes ou depois de abordar o conteúdo desta página. Se optar por propor antes, ele servirá para diagnosticar os conhecimentos previamente adquiridos por eles. Se optar por propor depois, a atividade servirá para aplicar o que foi estudado. Você também pode propor que a atividade seja realizada com o GeoGebra.

Vamos representar o eixo de simetria pela reta *r*. Podemos determinar, em relação a esse eixo, a figura simétrica de um ponto, de um segmento de reta, de uma reta ou de uma figura plana qualquer.

Simetria de um ponto

Dois pontos distintos *A* e *A'* são simétricos em relação a uma reta *r* se esta divide o segmento de reta $\overline{AA'}$ perpendicularmente no seu ponto médio.

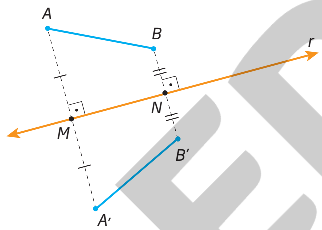


A' é simétrico de *A* em relação à reta *r*.

$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$

Simetria de um segmento de reta

Na figura abaixo, os pontos *A'* e *B'* são, respectivamente, simétricos de *A* e *B* em relação à reta *r*. Dizemos, então, que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são simétricos em relação à reta *r*.



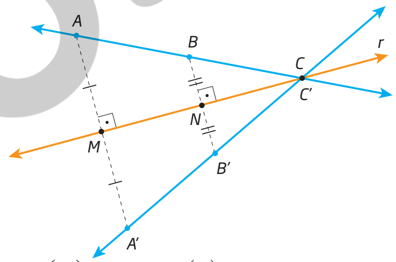
$\overline{A'B'}$ é simétrico de $\overline{AB}$ em relação à reta *r*.

$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$

$\overline{BN} \cong \overline{B'N}$

Simetria de uma reta

Os pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados, assim como seus simétricos *A'*, *B'* e *C'*. As retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{A'B'}$ são simétricas em relação à reta *r*.



$\overleftrightarrow{A'B'}$ é simétrica de $\overleftrightarrow{AB}$ em relação à reta *r*.

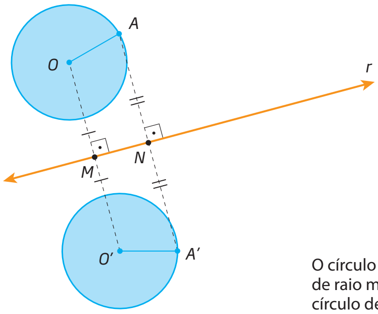
$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$

$\overline{BN} \cong \overline{B'N}$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Simetria de um círculo

Os centros *O* e *O'* são simétricos em relação à reta *r*, e os círculos têm raios com a mesma medida de comprimento.



$\overline{OM} \cong \overline{O'M}$

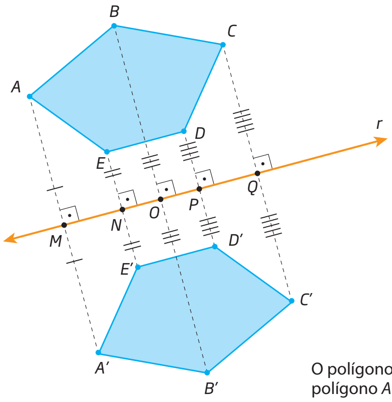
$\overline{AN} \cong \overline{A'N}$

$\overline{OA} \cong \overline{O'A'}$

O círculo de centro *O'* e comprimento de raio medindo *O'A'* é simétrico do círculo de centro *O* e comprimento de raio medindo *OA* em relação à reta *r*.

Simetria de um polígono

Na figura, note que os pontos *A'*, *B'*, *C'*, *D'* e *E'* são, respectivamente, simétricos de *A*, *B*, *C*, *D* e *E* em relação à reta *r*. Dizemos que os polígonos *ABCDE* e *A'B'C'D'E'* são simétricos em relação à reta *r*.



$\overline{AM} \cong \overline{A'M}$

$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$

$\overline{CQ} \cong \overline{C'Q}$

$\overline{DP} \cong \overline{D'P}$

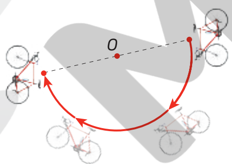
$\overline{EN} \cong \overline{E'N}$

O polígono *A'B'C'D'E'* é simétrico do polígono *ABCDE* em relação à reta *r*.

Simetria central

A **simetria central** é determinada em relação a um ponto denominado **centro de simetria**.

Essa transformação é equivalente a uma rotação de um giro de 180° em qualquer sentido (horário ou anti-horário).



O ponto *O* é o centro de simetria.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Após apresentar o simétrico de um polígono, pergunte aos estudantes: "O que podemos afirmar sobre os lados correspondentes dos polígonos *ABCDE* e *A'B'C'D'E'*? E sobre os ângulos correspondentes? Quais são os pontos médios dos segmentos de reta $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$?". Espera-se que eles respondam que os lados e os ângulos correspondentes dos polígonos *ABCDE* e *A'B'C'D'E'* são congruentes e que os pontos médios de $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$ são, respectivamente, *M*, *O*, *Q*, *P* e *N*.

Proponha que, em uma folha de papel quadriculado, representem um polígono e o seu simétrico em relação a uma reta. Caso julgue conveniente, proponha uma atividade similar com o GeoGebra.

Sugestão de leitura

No *link* indicado abaixo, há uma resposta de um professor de Física sobre o fenômeno da imagem refletida na superfície de um lago. Se achar pertinente, trabalhe essa questão com os estudantes, explicando a eles o que provoca o reflexo da montanha na água. Disponível em: https://cref.if.ufrgs.br/?contact-pergunta=porque-ocorre-reflexo-da-paisagem-na-superficie-da-agua. Acesso em: 3 ago. 2022.

Proponha aos estudantes que, em uma folha de papel, representem o simétrico de um ponto, de um segmento de reta, de uma reta, de um círculo e de um polígono em relação a um ponto, denominado centro de simetria. Você pode propor essa atividade antes ou depois de abordar o conteúdo desta página. Se optar por propor antes, ele servirá para diagnosticar os conhecimentos previamente adquiridos por eles. Se optar por propor depois, a atividade servirá para aplicar o que foi estudado. Você também pode propor que a atividade seja realizada com o GeoGebra.

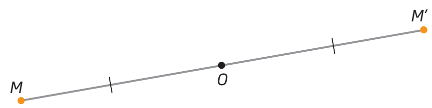
Após obterem o simétrico de um polígono, pergunte: “O que podemos afirmar sobre os lados correspondentes dos polígonos? E sobre os ângulos correspondentes?”. Se apresentarem dificuldades, oriente-os a realizar as medidas usando a régua e o transferidor, caso a atividade tenha sido feita em papel, ou por meio das ferramentas de medida do GeoGebra, se a atividade tenha sido feita nesse *software*.

Sugestão de atividade extra

Proponha a criação de painéis usando folhas de cartolina. Cada estudante deve ter uma folha de cartolina dividida ao meio. Peça que pesquisem imagens de mosaicos na internet e escolham alguma que tenha simetria. Utilizando canetas coloridas ou lápis de cor, peça para reproduzirem o padrão geométrico na parte superior da cartolina, preenchendo toda essa parte da folha. Na parte de baixo, oriente-os a explicar, por escrito, a forma geométrica, o tipo de simetria e as transformações geométricas envolvidas na elaboração do painel. A explicação deve ser direcionada ao público em geral, pois os painéis podem ficar em exposição na escola.

Simetria de um ponto

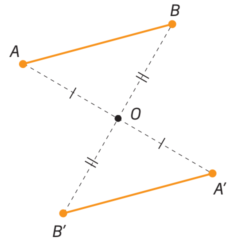
O simétrico de um ponto *M* em relação a um ponto *O* é o ponto *M'* tal que *O* é o ponto médio do segmento $\overline{MM'}$.



$\overline{MO} \cong \overline{M'O}$

M' é simétrico de *M* em relação ao ponto *O*.

Simetria de um segmento de reta

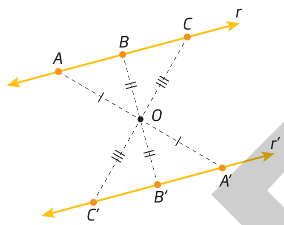


$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$

$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$

$\overline{A'B'}$ é simétrico de $\overline{AB}$ em relação ao ponto *O*.

Simetria de uma reta



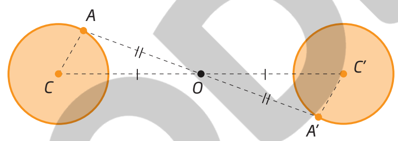
$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$

$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$

$\overline{CO} \cong \overline{C'O}$

r' é simétrica de *r* em relação ao ponto *O*.

Simetria de um círculo



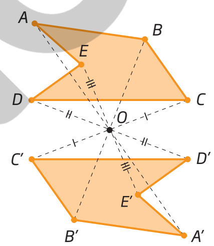
$\overline{CO} \cong \overline{C'O}$

$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$

$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

C e *C'* são simétricos em relação ao ponto *O*, e os círculos têm raios com a mesma medida de comprimento, ou seja, os círculos são simétricos em relação ao ponto *O*.

Simetria de um polígono



$\overline{AO} \cong \overline{A'O}$

$\overline{BO} \cong \overline{B'O}$

$\overline{CO} \cong \overline{C'O}$

$\overline{DO} \cong \overline{D'O}$

$\overline{EO} \cong \overline{E'O}$

O polígono *A'B'C'D'E'* é simétrico ao polígono *ABCDE* em relação ao ponto *O*.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Lendo e aprendendo

PLURALIDADE CULTURAL

Máscaras

As máscaras africanas tradicionais são um dos elementos da grande arte africana que mais evidentemente influenciou a Europa e a arte ocidental em geral no século XX.

São representações ou manifestações de forças normalmente invisíveis, usadas em ritos agrários, funerários ou de iniciação, rememorando mitos e outras tradições, através de suas formas, movimentos, cores e materiais. Às vezes, as máscaras têm pouca semelhança com a aparência humana, para deixar claro que um indivíduo ao usá-las, introjeta um personagem do mundo sobrenatural, tornando visível a presença desse personagem no mundo natural e humano. Habitualmente, são consideradas máscaras apenas objetos faciais e os adornos de cabeça esculpidos, sem levar em conta o traje que os acompanha. Do ponto de vista africano, porém, a máscara é todo um conjunto: a máscara é o próprio mascarado quando se põe em movimento.

Museu Afro Brasileiro (MAFRO). Disponível em: http://mafro.ceao.ufba.br/pt-br/colecao-africana/mascaras. Acesso em: 4 jul. 2022.

rito de iniciação: cerimônia (realização de uma tarefa ou ritual particular), que ocorre em muitas sociedades, para introduzir um novo membro.

SCARABEA/SHUTTERSTOCK

Máscara tradicional utilizada em Camarões.

MOISES FERNANDEZ ACOSTA/SHUTTERSTOCK

Máscara utilizada em cerimônias tradicionais na África do Sul.

Atividades

1. b) Não, porque, em alguns casos, ao utilizá-la, o indivíduo introjeta um personagem do mundo sobrenatural.

1. c) É o próprio mascarado quando se põe em movimento.

1. Responda às questões no caderno.

a) Em que ocasiões as máscaras africanas são utilizadas? **1. a)** Em ritos agrários, funerários ou de iniciação.

b) As máscaras africanas sempre têm aparência humana? Por quê?

c) O que é a máscara para os africanos?

2. Estas imagens foram criadas tomando como inspiração algumas máscaras africanas.

a) Que tipo de simetria está presente nestas imagens? Justifique.

b) Em uma folha de papel sulfite, desenhe uma máscara inspirada em uma máscara africana, aplicando o que você aprendeu sobre as transformações geométricas no plano.

2. b) Comentário em *Orientações*.

ANGELINA BAMBINA/SHUTTERSTOCK

3. Reúna-se com os colegas e façam uma pesquisa sobre a influência da cultura africana na formação do povo brasileiro. **3.** Comentário em *Orientações*.

2. a) Simetria axial, pois em cada figura há um eixo de simetria.

101

Lendo e aprendendo

BNCC:

- Competências gerais 6, 9 e 10 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 3 e 8 (as descrições estão na página VII).
- Habilidade EF08MA18.

Objetivos:

- Desenvolver a competência leitora.
- Reconhecer a presença de simetria nas máscaras africanas.
- Pesquisar sobre a influência da cultura africana para a formação do povo brasileiro.

Temas contemporâneos transversais:

PLURALIDADE CULTURAL

Inicie essa seção pedindo aos estudantes que leiam o texto individualmente e, depois, comente que as máscaras africanas são adereços utilizados em cerimônias e rituais e têm grande importância religiosa, mística e espiritual para diversos povos africanos. Nessas cerimônias, as máscaras têm como finalidade estabelecer contato com o mundo espiritual e com os deuses. Diga também que cada grupo étnico pode possuir diversas máscaras, cada uma delas com significados e utilizações diferentes.

Convém também reservar um tempo para analisar as fotografias da página. Deixe-os à vontade para verbalizar o que mais lhes chama a atenção e, aos poucos, incentive-os a identificar as simetrias presentes nelas. Se possível, exiba outros exemplos de máscaras africanas.

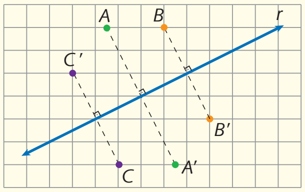
- Na **atividade 1**, os estudantes vão responder a algumas questões sobre o texto. Após terminarem, faça a correção oralmente. Você pode ampliar a proposta dessa atividade e solicitar aos estudantes que elaborem questões com base no texto. Depois, eles podem trocar as questões com um colega e responder às questões propostas por ele.
- A **atividade 2** permite aos estudantes mobilizar o que estudaram sobre as transformações geométricas no plano. No **item a**, espera-se que eles reconheçam a simetria axial das imagens. Se necessário, mostre o eixo de simetria de cada uma delas. Já no **item b**, eles vão aplicar as transformações geométricas no plano para desenhar uma máscara inspirada em uma máscara africana. Se possível, firme uma parceria com o(a) professor(a) de Arte para promover uma melhor experiência aos estudantes. A relação entre Matemática e Arte explorada na atividade favorece o desenvolvimento da competência específica **3** de Matemática.

- Na **atividade 3**, é solicitado aos estudantes que pesquisem sobre a influência da cultura africana na formação do povo brasileiro. O objetivo dessa atividade é mostrar que a cultura africana vai muito além das máscaras. Esse pode ser o momento oportuno para propor um projeto interdisciplinar em parceria com o professor de História. É importante que eles reconheçam que essa cultura tem influência na culinária, no aspecto religioso, na música, entre outros.

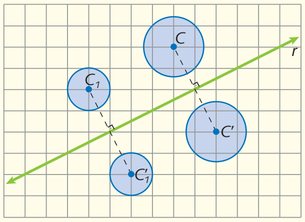
A temática do trabalho proposto busca a valorização da cultura africana, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **6** da BNCC. Além disso, os estudantes exercitam a empatia e o diálogo, o que contribui para o desenvolvimento das competências gerais **9** e **10** e da competência específica **8** de Matemática.

Oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

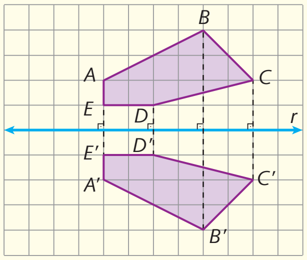
- Resposta da **atividade 24**:



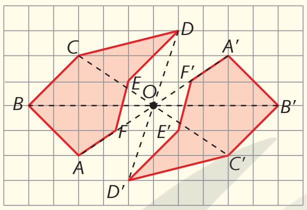
- Resposta da **atividade 25**:



- Resposta da **atividade 26**:



- Resposta da **atividade 27**:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Composição de transformações

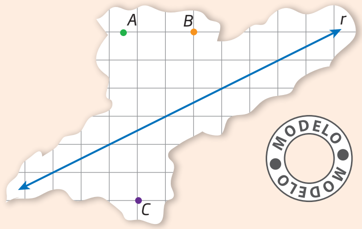
As composições de transformações estão presentes em mosaicos e em diferentes obras de arte. É importante que os estudantes percebam que podemos compor as mesmas transformações sucessivas vezes ou combinar transformações diferentes. Ao apresentar os exemplos, peça aos estudantes que os reproduzam em uma folha de papel quadriculado ou que criem seus próprios exemplos inspirados nos exemplos do livro.

Atividades

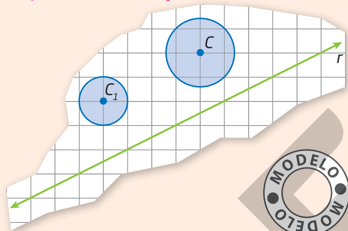
Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso na atividade **25**.

Faça as atividades no caderno.

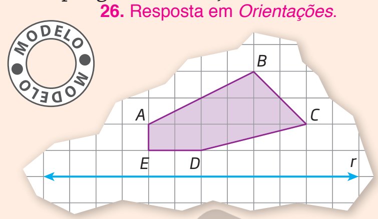
24 Em uma malha quadriculada, copie a figura abaixo. Depois, obtenha os pontos *A'*, *B'* e *C'* simétricos aos pontos *A*, *B* e *C* em relação à reta *r*. **24.** Resposta em *Orientações*.



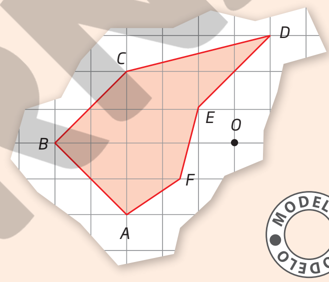
25 Em uma malha quadriculada, utilize o compasso para copiar os círculos abaixo. Depois, construa o simétrico de cada círculo em relação à reta *r*.
25. Resposta em *Orientações*.



26 Em uma malha quadriculada, copie o polígono abaixo. Depois, construa o simétrico desse polígono em relação à reta *r*.
26. Resposta em *Orientações*.



27 Em uma malha quadriculada, copie a figura abaixo. Depois, construa o polígono *A'B'C'D'E'F'* simétrico do polígono *ABCDEF* em relação ao ponto *O*.
27. Resposta em *Orientações*.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Composição de transformações

Podemos compor transformações realizando as mesmas transformações geométricas sucessivas vezes, ou combinar transformações diferentes.

Composição de translações

Esta figura mostra translações sucessivas. Transladamos o triângulo *PQR* utilizando o vetor verde e sua imagem (triângulo *P'Q'R'*), utilizando o vetor vermelho.

A primeira translação leva o triângulo *PQR* ao triângulo *P'Q'R'* e está representada pelo vetor verde. A segunda translação leva o triângulo *P'Q'R'* ao triângulo *P"Q"R"* e está representada pelo vetor vermelho.

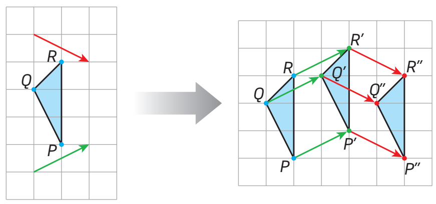


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

Ao transladar o mesmo triângulo por outro vetor, como mostra o exemplo abaixo, podemos obter, diretamente, o resultado final da translação sucessiva feita anteriormente.

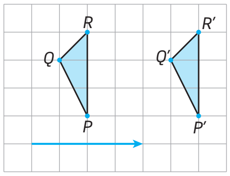


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

Tecnologias digitais em foco

Composição de translações

Nesta seção, vamos verificar experimentalmente, por meio do GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor pode indicar, uma propriedade da composição de translações.

Construa

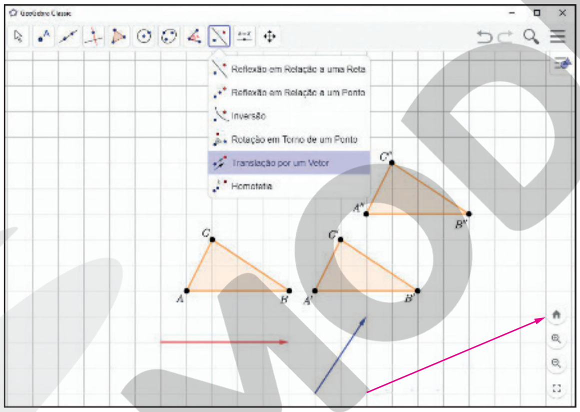
Siga os passos abaixo para transladar sucessivamente um polígono qualquer.

1º) Utilize a ferramenta e construa um polígono qualquer. Pode ser, por exemplo, um triângulo *ABC*.

2º) Use a ferramenta e construa dois vetores quaisquer.

3º) Clique na ferramenta . Depois, clique sobre o triângulo *ABC* e sobre o vetor vermelho. O polígono que aparecerá na tela (triângulo *A'B'C'*) é a imagem da translação pelo vetor vermelho.

4º) Clique na ferramenta . Depois, clique sobre o triângulo *A'B'C'* e sobre o vetor azul. O polígono que aparecerá na tela (triângulo *A"B"C"*) é a imagem da translação pelo vetor azul.



Neste exemplo, o triângulo *A'B'C'* foi obtido do triângulo *ABC* por meio da translação pelo vetor vermelho, e o triângulo *A"B"C"* foi obtido do triângulo *A'B'C'* por meio da translação pelo vetor azul.

© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

Explore

É possível obter o triângulo *A"B"C"* por meio de uma única translação do triângulo *ABC*. Descubra o vetor dessa translação e represente-o no GeoGebra.

Explore: Resposta na imagem anterior.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

Habilidade EF08MA18.

Objetivo:

Reconhecer e construir figuras obtidas por meio de composição de translações utilizando o *software* GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica.

Composição de translações

No 1º passo, você pode orientar a cada estudante que construa um polígono diferente.

Ao lerem o comando do 2º passo é possível que alguns deles não se recordem do conceito de vetor. Caso isso ocorra, relembre que o vetor determina o sentido, a direção e a medida da distância do deslocamento da figura na translação.

É importante que realizem o 3º passo, observem e, só depois, realizem o 4º passo.

Em *Explore*, os estudantes terão a oportunidade de investigar a possibilidade de obter o polígono que é imagem da segunda translação diretamente do polígono construído no 1º passo. É importante incentivá-los a experimentar a comparar sua construção com a dos colegas e a dialogar.

As atividades propostas nessa seção podem ser realizadas com qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de acesso a computadores, a proposta pode ser adaptada para ser realizada com a utilização de papel e instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor etc).

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

Habilidade EF08MA18.

Objetivo:

Reconhecer e construir figuras obtidas por meio de composição de reflexões em relação a retas utilizando o *software* GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica.

Composição de reflexões em relação a retas

No 1º passo, você pode orientar a cada estudante que construa um polígono diferente.

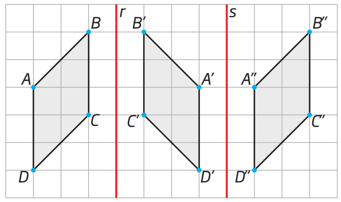
No 3º passo, eles vão construir uma reta *s* paralela a uma outra reta *r*. Embora esteja indicado o uso da ferramenta "Reta Paralela", você pode incentivá-los a obter a reta *s*, utilizando procedimentos análogos ao da construção com régua e compasso da reta paralela. Esse pode ser um momento oportuno para verificar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes.

É importante que realizem o 4º passo, observem e, só depois, realizem o 5º passo.

As atividades propostas nessa seção podem ser realizadas com qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de acesso a computadores, a proposta pode ser adaptada para ser realizada com a utilização de papel e instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor etc).

Composição de reflexões

Na figura abaixo, foram feitas duas reflexões em sequência do quadrilátero *ABCD*: uma em relação à reta *r* e outra em relação à reta *s*.



Note que o quadrilátero *A'B'C'D'* foi obtido do quadrilátero *ABCD* a partir da reflexão em relação à reta *r*. Já o quadrilátero *A"B"C"D"* foi obtido do quadrilátero *A'B'C'D'* por meio da reflexão em relação à reta *s*.

A reflexão da figura *A'B'C'D'* equivale uma translação da figura *ABCD*.

Tecnologias digitais em foco

Composição de reflexões em relação a retas

Nesta seção, vamos utilizar o GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor pode indicar, para explorar propriedades da composição de reflexões em relação a retas.

Construa

Siga os passos abaixo para refletir um polígono qualquer.

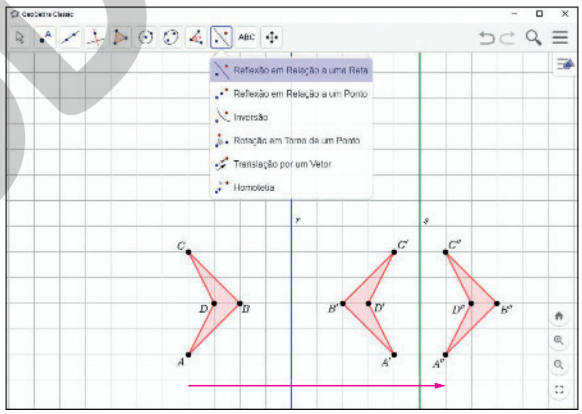
1º) Utilize a ferramenta e construa um polígono qualquer. Pode ser, por exemplo, um quadrilátero *ABCD*.

2º) Use a ferramenta e construa uma reta *r*.

3º) Use a ferramenta e construa uma reta *s* paralela à reta *r*.

4º) Clique na ferramenta . Depois, clique sobre o polígono e sobre a reta *r*. O polígono que aparecerá na tela (quadrilátero *A'B'C'D'*) é a imagem da reflexão pela reta *r*.

5º) Clique na ferramenta . Depois, clique sobre o quadrilátero *A'B'C'D'* e sobre a reta *s*. O polígono que aparecerá na tela (quadrilátero *A"B"C"D"*) é a imagem da reflexão pela reta *s*.



Neste exemplo, o quadrilátero *A'B'C'D'* foi obtido do quadrilátero *ABCD* por meio da reflexão em relação à reta *r*, e o quadrilátero *A"B"C"D"* foi obtido do quadrilátero *A'B'C'D'* por meio da reflexão em relação à reta *s*.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

Tecnologias digitais em foco

Explore

a) É possível obter o quadrilátero *A"B"C"D"* por meio de uma translação do quadrilátero *ABCD*. Represente o vetor dessa translação no GeoGebra.

b) Faça o que se pede.

1º) Utilize a ferramenta e trace uma reta que seja perpendicular às retas *r* e *s* e que intercepte *r* no ponto *P* e *s* no ponto *Q*.

2º) Utilize a ferramenta e meça a distância entre as retas *r* e *s*.

3º) Utilize a ferramenta e meça a distância entre os pontos *A* e *A"*. Ao que corresponde essa medida? Movimente o quadrilátero *ABCD* e verifique o que ocorre.

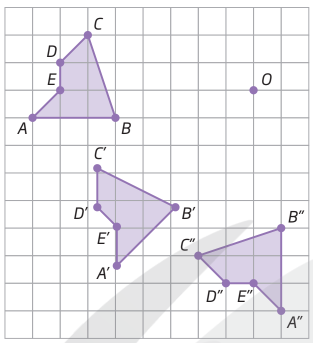
c) O que podemos afirmar em relação à medida de comprimento do vetor da translação que leva *ABCD* a *A"B"C"D"*?

d) E se as retas *r* e *s* não fossem paralelas? Seria possível obter o quadrilátero *A"B"C"D"* por meio de uma única transformação geométrica do quadrilátero *ABCD*? Investigue e escreva sua conclusão no caderno. *Dica:* Meça a abertura do ângulo formado pelas retas *r* e *s*.

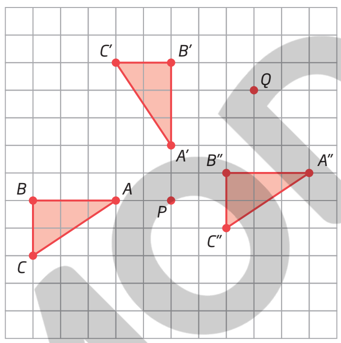
Explore: a) Resposta na imagem anterior. **b)** Espera-se que os estudantes respondam que essa medida é igual ao dobro da medida da distância entre as retas *r* e *s* e que essa igualdade mantém-se verdadeira com as movimentações. **c)** Espera-se que os estudantes percebam que a medida do comprimento do vetor é igual ao dobro da medida da distância entre as retas *r* e *s*. **d)** Espera-se que os estudantes percebam que, nesse caso, a reflexão sucessiva pelas retas *r* e *s* é equivalente a uma rotação no sentido anti-horário com centro no ponto de intersecção das retas e ângulo de medida da abertura igual ao dobro da medida da abertura do ângulo formado por *r* e *s*.

Composição de rotações

Podemos rotacionar figuras sucessivamente em torno de um mesmo ponto ou em torno de pontos diferentes. Analise os exemplos a seguir.



Note que o pentágono *A'B'C'D'E'* foi obtido do pentágono *ABCDE* por meio de uma rotação, no sentido anti-horário, de um giro de 45° ao redor do ponto *O*, e que o pentágono *A"B"C"D"E"* foi obtido do pentágono *A'B'C'D'E'* por meio de uma rotação, no sentido anti-horário, de um giro de 45° ao redor do ponto *O*.



Note que o triângulo *A'B'C'* foi obtido do triângulo *ABC* por meio de uma rotação, no sentido horário, de um giro de 90° ao redor do ponto *P*. Já o triângulo *A"B"C"* foi obtido do triângulo *A'B'C'* por meio de uma rotação, no sentido horário, de um giro de 270° ao redor do ponto *Q*.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

No **item a** do *Explore*, os estudantes terão a oportunidade de perceber que realizar duas reflexões sucessivas em relação a retas paralelas é o mesmo que realizar uma única translação. É importante incentivá-los a experimentar e levantar hipóteses.

No **item d** do *Explore*, eles vão verificar que, quando as retas não são paralelas, realizar duas reflexões sucessivas em relação a elas é o mesmo que realizar uma rotação no sentido anti-horário com centro no ponto de intersecção das retas e ângulo de medida de abertura igual ao dobro da medida da abertura do ângulo formado pelas retas. Proponha que façam esse item sem apresentar a dica. Se perceber que estão com dificuldades, dê a dica para eles. É importante que se sintam motivados para testar suas hipóteses e apresentar as conclusões.

Apresente os exemplos de composições de rotações para a turma. Se achar conveniente, proponha a eles que produzam outros exemplos, seja em papel quadriculado, seja no GeoGebra.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

Habilidade EF08MA18.

Objetivo:

Reconhecer e construir figuras obtidas por meio de composição de rotações em torno de um mesmo ponto utilizando o *software* GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica.

Composição de rotações em torno de um mesmo ponto

No 4º passo do *Construa*, enfatize com a turma que a segunda rotação deve ser realizada no mesmo sentido que a segunda. Comente que a construção deles não deve ser igual à do exemplo apresentado na seção.

No *Explore*, a ideia é que eles façam experimentações e percebam que realizar duas rotações sucessivas, no mesmo sentido, uma com um giro de $x°$ e outra com um giro de $y°$, em torno de um ponto O qualquer, corresponde a realizar uma única rotação no mesmo sentido das rotações anteriores, de um giro de $(x + y)°$ ao redor de O. Caso estejam com dificuldades, em vez de construírem um pentágono, proponha que construam um triângulo.

As atividades propostas nessa seção podem ser realizadas com qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de acesso a computadores, a proposta pode ser adaptada para ser realizada com a utilização de papel e instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor etc).

Tecnologias digitais em foco

Composição de rotações em torno de um mesmo ponto

Nesta seção, vamos utilizar o GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor pode indicar, para explorar propriedades da composição de rotações em torno de um mesmo ponto.

Construa

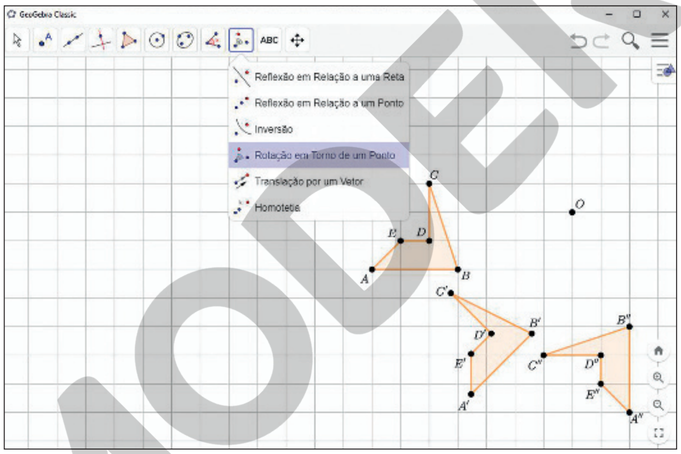
Siga os passos abaixo para realizar rotações sucessivas de um polígono qualquer em torno de um mesmo ponto.

1º) Construa um polígono qualquer, utilizando a ferramenta . Pode ser, por exemplo, um pentágono *ABCDE*.

2º) Marque um ponto *O* qualquer utilizando a ferramenta . Esse ponto será o centro da rotação.

3º) Clique na ferramenta . Depois, clique sobre o polígono e sobre o ponto *O*. Por fim, escolha a medida da abertura do ângulo e o sentido da rotação. O polígono que aparecerá na tela (pentágono *A'B'C'D'E'*) é a imagem da rotação.

4º) Clique na ferramenta . Depois, clique sobre o pentágono *A'B'C'D'E'* e sobre o ponto *O*. Por fim, escolha a medida da abertura do ângulo. O sentido da rotação deve ser o mesmo do 3º passo. O polígono que aparecerá na tela (pentágono *A"B"C"D"E"*) é a imagem da rotação.



© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

Nesse exemplo, o pentágono *A'B'C'D'E'* foi obtido do pentágono *ABCDE* por meio de uma rotação, no sentido anti-horário, de um giro de 45° ao redor do ponto *O*, e o pentágono *A"B"C"D"E"* foi obtido do pentágono *A'B'C'D'E'* por meio de uma rotação, no sentido anti-horário, de um giro de 45° ao redor do ponto *O*.

Explore

a) É possível obter o pentágono *A"B"C"D"E"* por meio de uma única transformação geométrica do pentágono *ABCDE*? Se sim, descreva essa transformação.

b) O que a investigação feita por você, no item anterior, sugere?

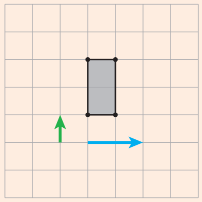
Explore: a) Sim; espera-se que os estudantes, após algumas investigações, percebam que o pentágono *A"B"C"D"E"* pode ser obtido do pentágono *ABCDE* por meio de uma rotação, no sentido anti-horário, de um giro de 90° ao redor do ponto *O*.
b) Espera-se que os estudantes respondam que a investigação feita sugere que realizar duas rotações sucessivas, no mesmo sentido, uma com um giro de $x°$ e outra com um giro de $y°$, em torno de um ponto *O* qualquer corresponde a realizar uma única rotação, no mesmo sentido das rotações anteriores, de um giro de $(x + y)°$ ao redor de *O*.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

Atividades

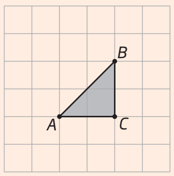
Faça as atividades no caderno.

28 Em uma malha quadriculada, copie a figura abaixo e a translade utilizando primeiro o vetor azul e, depois, o vetor verde. **28.** Resposta em *Orientações*.

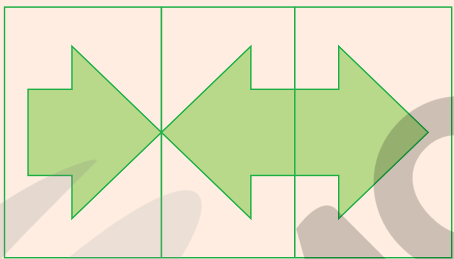


29 Em uma malha quadriculada, copie novamente a figura da atividade 28 e a translade primeiro utilizando o vetor verde e, depois, o vetor azul. **29.** Resposta em *Orientações*.

30 Copie a figura a seguir em uma malha quadriculada e faça 3 rotações sucessivas em torno do ponto *C*, no sentido horário, com um giro de 90°. **30.** Resposta em *Orientações*.



31 Analise a figura a seguir.



a) No caderno, elabore duas questões que possam ser respondidas observando as transformações geométricas. **31. a)** Respostas pessoais.

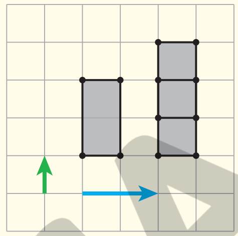
b) Troque de caderno com um colega e responda às questões criadas por ele. **31. b)** Respostas pessoais.

c) Analise as respostas do colega e dê um retorno a ele, dizendo o que ele respondeu corretamente e onde ele se equivocou. **31. c)** Resposta pessoal.

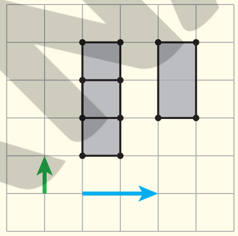
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- Compare as translações sucessivas das **atividades 28** e **29** e discuta sobre o que acontece ao trocarmos a ordem das transformações. Pergunte aos estudantes se as figuras obtidas ao final são sempre iguais ou se em alguma situação obtemos figuras diferentes. Espera-se que eles percebam que o resultado pode ser diferente, dependendo da composição de transformações.

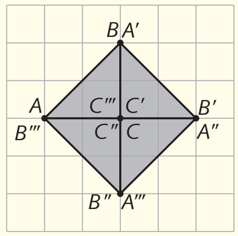
Resposta da **atividade 28**:



Resposta da **atividade 29**:



Resposta da **atividade 30**:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Ângulo

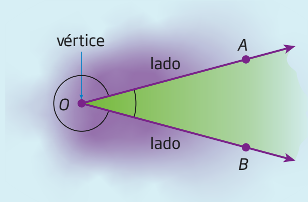
- Na **atividade 1**, os estudantes vão analisar alguns ângulos e identificar aqueles que são agudos (**item a**), obtusos (**item b**), raso (**item c**) e retos (**item d**). Este é o momento oportuno para verificar se compreenderam como se mede a abertura de ângulos com um transferidor e como podemos classificar ângulos de acordo com a medida da abertura. Também é importante verificar se, em cada item, os estudantes representam os ângulos de forma correta.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Ângulo

Ângulo é a união de duas semirretas de mesma origem, com uma das regiões do plano limitada por elas.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

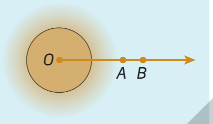
Classificação de ângulos

De acordo com a medida da abertura, um ângulo pode ser classificado em:

Ângulo nulo

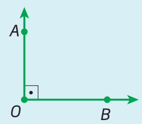
med($A\hat{O}B$) = 0°

Ângulo de uma volta



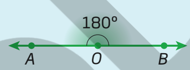
med($A\hat{O}B$) = 360°

Ângulo reto



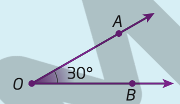
med($A\hat{O}B$) = 90°

Ângulo raso ou de meia-volta



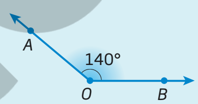
med($A\hat{O}B$) = 180°

Ângulo agudo



0° < med($A\hat{O}B$) < 90°

Ângulo obtuso



90° < med($A\hat{O}B$) < 180°

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

1. Analise os ângulos abaixo e indique:

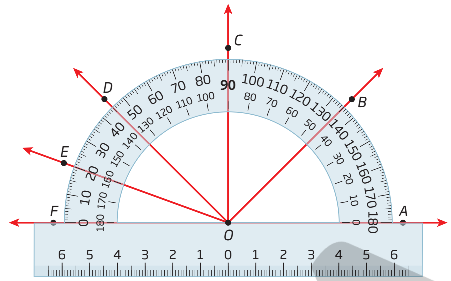


ILUSTRAÇÃO: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

1. a) $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $C\hat{O}E$, $D\hat{O}E$, $D\hat{O}F$ e $E\hat{O}F$

a) os ângulos agudos;

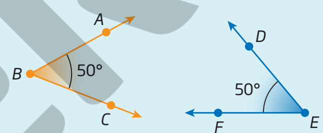
b) os ângulos obtusos; **1. b)** $A\hat{O}D$, $A\hat{O}E$, $B\hat{O}E$ e $B\hat{O}F$

c) o ângulo raso; **1. c)** $A\hat{O}F$

d) os ângulos retos. **1. d)** $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ e $C\hat{O}F$

Ângulos congruentes

Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida de abertura.

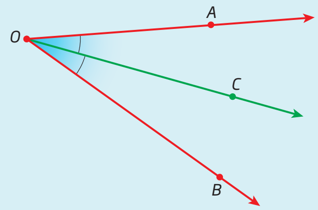


Os ângulos $A\hat{B}C$ e $D\hat{E}F$ são congruentes. Indicamos: $A\hat{B}C \cong D\hat{E}F$

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Bissetriz de um ângulo

Bissetriz de um ângulo é a semirreta interna a esse ângulo com origem no vértice do ângulo que o divide em dois ângulos congruentes.

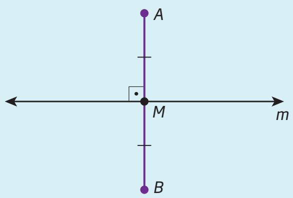


$A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$

GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Mediatriz de um segmento

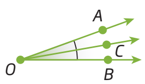
Mediatriz é a reta perpendicular a um segmento de reta que passa pelo ponto médio desse segmento.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Nesta figura, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$ e med$(A\hat{O}C) = 10°$. Determine a medida da abertura do ângulo $A\hat{O}B$.

2. med$(A\hat{O}B) = 20°$



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

3. Em uma reta, tomamos os pontos A, B e C, nessa ordem, com $AB = 8$ cm e $BC = 10$ cm. Sendo P o ponto médio de $\overline{AC}$, quanto mede o comprimento de $\overline{BP}$? **3.** 1 cm

Lugares geométricos

Lugar geométrico é a figura formada por todos os pontos do plano que têm em comum uma determinada propriedade.

Circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de um ponto fixo.

Mediatriz

Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de dois pontos fixos dados (extremidades de um segmento de reta).

Retas paralelas

Reta paralela é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de uma reta dada.

Bissetriz

Bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos lados desse ângulo.

4. Para manter a horta, um jardineiro sugeriu a instalação de uma torneira de irrigação em um lugar que tenha a mesma medida da distância dos muros. Descreva, em seu caderno, os possíveis lugares em que a torneira pode ser instalada.

4. Comentário em *Orientações*.

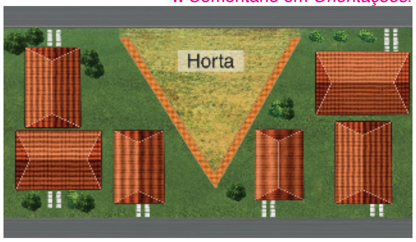


ILUSTRAÇÃO: SELMA CAPARROZ/ARQUIVO DA EDITORA

Transformações geométricas

Translação é o deslocamento de uma figura dado por um vetor.

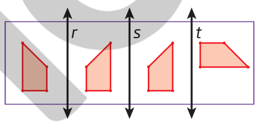
Rotação é o giro de uma figura em torno de um centro de rotação, em determinado sentido (horário ou anti-horário), segundo um ângulo de rotação.

Reflexão é a transformação geométrica que reflete todos os pontos de uma figura em relação a uma reta (simetria axial) ou a um ponto (simetria central), mantendo cada ponto da figura à mesma medida da distância do eixo de simetria ou do centro de reflexão, respectivamente.

Composição de transformações

Podemos compor transformações realizando as mesmas transformações geométricas sucessivas vezes, ou combinar transformações diferentes.

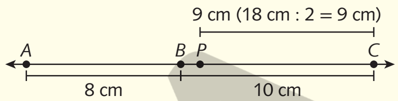
5. As transformações realizadas abaixo podem ser, na ordem apresentada: **5.** alternativa **b**



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

a) translação, reflexão e rotação.
b) reflexão, translação e rotação.
c) rotação, reflexão e translação.
d) reflexão, reflexão e translação.

- Na **atividade 2**, é possível que alguns estudantes concluam erroneamente que med $(A\hat{O}B) = 5°$. Isso pode acontecer caso não tenham se atentado à posição dos pontos na figura. Oriente-os a reproduzir a figura no caderno e indicar a medida da abertura do ângulo $A\hat{O}C$ nela. Dessa forma, os estudantes poderão perceber de maneira mais clara qual medida devem determinar.
- Caso tenham dificuldades para fazer a **atividade 3**, oriente-os a traduzir o enunciado por meio de uma figura, como a da referência a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Com base na figura, espera-se que os estudantes concluam que a medida do segmento de reta $\overline{BP}$ é igual a 1 cm.

Lugares geométricos

- Faça a leitura coletiva do enunciado da **atividade 4** com a turma e tire as eventuais dúvidas. Peça que observem a imagem e indiquem com o dedo os possíveis lugares em que a torneira pode ser instalada e por quê. Espera-se que eles concluam que a torneira deve ser instalada em qualquer ponto da bissetriz do ângulo formado pelos muros. Caso julgue necessário, proponha que reproduzam essa figura em papel vegetal e, depois, tracem a bissetriz do ângulo formado pelos muros do terreno. Peça também que confiram se a torneira, estando em qualquer ponto dessa bissetriz, resolve o problema de fato.

Transformações geométricas

- Na **atividade 5**, espera-se que os estudantes percebam que a figura inicial foi submetida a uma sucessão de transformações geométricas no plano. Para identificar se ocorreu reflexão, translação ou rotação, eles precisam observar a posição das figuras. Após identificarem a alternativa correta, incentive-os a justificar o porquê das **alternativas a**, **c** e **d** serem falsas. Isso pode ajudar os estudantes que apresentaram dificuldades ao realizar a atividade.

CAPÍTULO 5 – POLÍGONOS

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 3, 6 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

- Verificar se os estudantes reconhecem polígonos em objetos cotidianos.
- Verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o conceito de diagonal de um polígono.
- Introduzir a técnica do origami.

Inicie o trabalho com a seção *Trocando ideias* mostrando para a turma alguns exemplos concretos de origami ou de imagens de representações construídas utilizando essa técnica. Depois, esclareça que a inspiração dos origamistas (pessoas que se dedicam à arte do origami) está, principalmente, nos elementos da natureza e nos objetos cotidianos. Conte que o ato de dobrar o papel, para esses criadores, representa a transformação da vida, uma vez que, esse pedaço de papel, um dia, foi semente de uma planta que germinou, cresceu e se transformou em uma árvore. E que, depois, o homem transformou a planta em folhas de papel, cortando-as em quadrados e dobrando-as de diferentes maneiras para representar animais, plantas e outros objetos.

Convide-os a responder à primeira questão e verifique se reconhecem os triângulos e quadriláteros presentes em algumas partes das representações presentes nas fotografias. Caso tenham dificuldade, retome esses conceitos com eles. Você também pode aproveitar para questioná-los o porquê dos triângulos e quadriláteros serem considerados polígonos.

Para que realizem a atividade proposta no segundo item, você pode, se possível, distribuir papel dobradura para a turma ou pedir com antecedência que levem de casa. A atividade pode ser realizada em duplas caso julgue conveniente. No primeiro passo da construção, os estudantes vão se deparar com o conceito de diagonal. Esse é o momento oportuno para verificar o que sabem sobre esse conceito. Oriente-os durante toda a atividade. Após concluírem, exponha os trabalhos na sala ou em algum local da escola. A atividade pode ser feita em parceria com o(a) professor(a) de Arte.

Capítulo

5 Polígonos

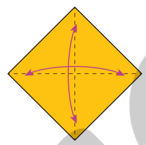
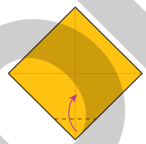
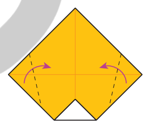
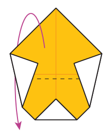
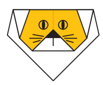
Trocando ideias

Origami é uma técnica japonesa de dobradura com a qual se constroem representações de determinados objetos ou seres sem cortar ou colar o papel.

PHOTKA/SHUTTERSTOCK

Representações utilizando a técnica do *origami*.

- As partes de algumas das representações na foto acima se parecem com **polígonos**. Que polígonos são esses? **Trocando ideias:** primeiro item: triângulos, quadriláteros e pentágonos.
- Siga os passos abaixo e construa a representação da cabeça de um leão.

				
1º passo. Dobre duas vezes sobre as diagonais do quadrado para formar marquinhas.	**2º passo**. Dobre uma das pontas para cima.	**3º passo**. Dobre duas pontas opostas de modo que fiquem próximas à linha vertical central e um pouco inclinadas.	**4º passo**. Dobre sobre a linha marcada para trás.	**5º passo**. Desenhe a face do leão e pronto!

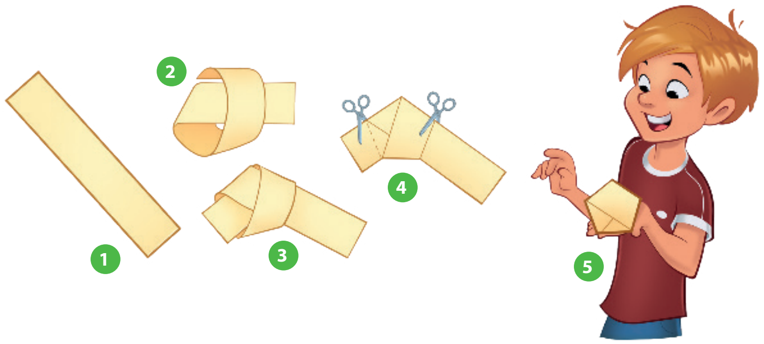
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Neste capítulo, vamos ampliar o estudo dos polígonos, dando atenção às diagonais, aos ângulos internos e ângulos externos e aos polígonos regulares.

O tema dessa seção possibilita a valorização de uma manifestação artística oriental, o que contribui para o desenvolvimento das competências gerais **3** e **6** da BNCC. Além disso, os estudantes são incentivados a exercitar o diálogo e a empatia, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8**.

1 Polígonos

Observe o passo a passo que Lucas realizou utilizando um pedaço de papel retangular e uma tesoura de pontas arredondadas. A figura formada por Lucas após finalizada a dobradura se parece com um polígono.



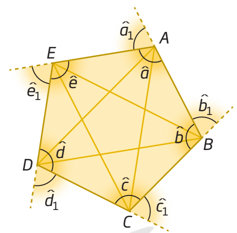
ENÁGIO COELHO/ARQUIVO DA EDITORA

Um polígono pode ser convexo ou não convexo. Para ser convexo, é necessário que todos os segmentos de reta, com extremidades no interior do polígono, tenham todos os seus pontos situados no interior desse polígono.

Continuaremos a estudar somente os polígonos convexos e, para simplificar, vamos tratá-los simplesmente por polígonos.

Elementos de um polígono

Observe o polígono *ABCDE* abaixo:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão de leitura

GENOVA, Carlos. ***Origami*: dobras, contas e encantos**. São Paulo: Escrituras, 2008.

Além de apresentar *origamis* a serem confeccionados, o livro explora a importância de figuras geométricas na composição das dobraduras.

Podemos destacar alguns de seus elementos.

- **Lados** são os segmentos de reta que formam o contorno do polígono: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$
- **Vértices** são os pontos que são extremidades dos lados do polígono: *A*, *B*, *C*, *D* e *E*
- **Diagonais** são os segmentos de reta cujas extremidades são vértices que não pertencem a um mesmo lado do polígono: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$
- **Ângulos internos** são os ângulos formados por dois lados consecutivos que contêm a região interna do polígono: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$
- **Ângulos externos** são os ângulos formados pelo prolongamento de um dos lados do polígono e por seu lado adjacente e que não contêm a região interna do polígono: $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$, $\hat{d}_1$ e $\hat{e}_1$

Polígonos

Objetivos:

- Reconhecer polígonos.
- Identificar os elementos de um polígono.

Justificativa

No **capítulo** serão estudadas como se determina o número de diagonais de um polígono, a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos e externos de um polígono e as propriedades dos polígonos regulares. Nesse âmbito, é importante que os estudantes reconheçam polígonos e identifiquem seus elementos (lados, vértices, diagonais, ângulos internos e ângulos externos).

Mapeando conhecimentos

Reproduza a **atividade 20** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e peça aos estudantes que a façam. Esse é o momento oportuno para diagnosticar se sabem o que é um polígono e se identificam e até representam alguns de seus elementos, como diagonais, ângulos internos e ângulos externos. É importante que, ao final, as representações dos estudantes possam ser compartilhadas e discutidas.

Para as aulas iniciais

Faça a leitura compartilhada da revisão sobre elementos de um polígono presentes na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, retome alguns dos polígonos representados pelos estudantes na dinâmica inicial para explorar a identificação de outros elementos, como lados e vértices.

Como os polígonos já foram objeto de estudo em anos anteriores, peça aos estudantes que escrevam uma definição e deem um exemplo de polígono convexo e não convexo. Espera-se que eles entendam um polígono como uma região plana delimitada por uma linha poligonal fechada. No caso de um polígono convexo, é necessário que todos os segmentos de reta, com extremidades no interior do polígono, tenham todos os seus pontos situados no interior desse polígono.

Retome os elementos de um polígono e destaque o fato de os ângulos externos serem suplementares aos ângulos internos.

Sugestão de leitura

Para aprofundar os conhecimentos sobre polígonos, sugerimos a leitura do trabalho "Descobrindo a arte de construir polígonos", que relata a realização de oficinas com estudantes de 8º ano com a temática de construção de polígonos.

Disponível em: http://sbemparana.com.br/arquivos/anais/epremxii/ARQUIVOS/POSTERES/Titulo/PO003.pdf. Acesso em: 4 ago. 2022.

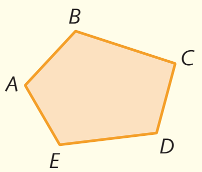
Nome dos polígonos

Explore a nomenclatura usada na classificação dos polígonos, relacionando os prefixos ao número de lados e de ângulos.

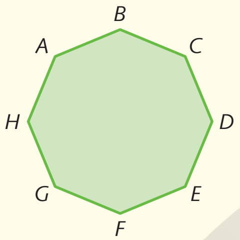
• Na **atividade 2** é importante que os estudantes percebam que os polígonos representados não precisam ser regulares. Desse modo, solicite a eles que representem na lousa diferentes polígonos para cada item.

Exemplos de resposta da **atividade 2**.

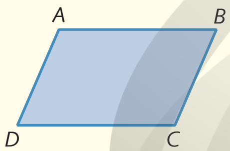
a)



b)



c)



• Nesse momento, a resolução da **atividade 4** se dá de forma intuitiva, sem a necessidade do uso de fórmulas ou de construção da figura propriamente dita.

• Do mesmo modo, para resolver a **atividade 5**, basta que os estudantes percebam que a soma das medidas da abertura dos ângulos internos é obtida adicionando 8 parcelas iguais a 135°, ou seja, a soma é 1080°.

Nome dos polígonos

Um polígono é nomeado de acordo com o número de lados, que é igual ao número de ângulos internos. Observe o nome de alguns polígonos.

Número de lados	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono

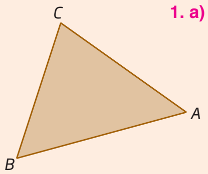
Número de lados	Nome do polígono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Atividades

Faça as atividades no caderno.

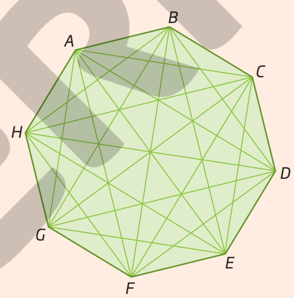
1 Nas figuras a seguir, nomeie o polígono e identifique seus lados, vértices e diagonais.

a)



1. a) triângulo *ABC*
lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$
vértices: *A*, *B*, *C*
diagonais: não há

b)



1. b) octógono *ABCDEFGH*
lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HA}$
vértices: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*
diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{BF}$, $\overline{BG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$, $\overline{CG}$, $\overline{CH}$, $\overline{DF}$, $\overline{DG}$, $\overline{DH}$, $\overline{EG}$, $\overline{EH}$, $\overline{FH}$

2 Use uma régua e construa, em seu caderno, os polígonos abaixo.

a) pentágono *ABCDE*; **b)** octógono *ABCDEFGH*; **c)** quadrilátero *ABCD*.

2. a) Exemplo de resposta em *Orientações*. 2. b) Exemplo de resposta em *Orientações*.

3 Responda às questões sobre um eneágono.

a) Quantos são seus ângulos internos? 3. a) 9 **b)** Quantos são seus vértices? 3. b) 9

4 Responda aos itens abaixo sobre um pentágono *ABCDE*.

a) Quantos lados ele possui? 4. a) 5

b) Quantas diagonais diferentes ele possui? 4. b) 5

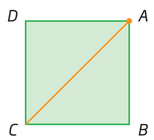
c) Identifique todas as suas diagonais. 4. c) $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$

5 A abertura do ângulo formado por dois lados consecutivos de um octógono mede 135°. Qual é a soma das medidas das aberturas de todos os ângulos internos desse octógono, sendo todos eles congruentes? 5. 1 080°

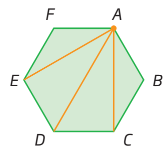
2. c) Exemplo de resposta em *Orientações*.

2 Diagonais de um polígono

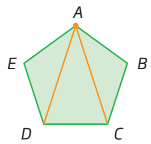
O número de diagonais de um polígono varia de acordo com o número de lados que ele possui. Analise o número de diagonais que partem do vértice *A* em cada polígono a seguir.



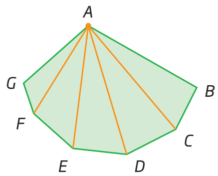
4 lados
1 diagonal
(4 – 3 = 1)



6 lados
3 diagonais
(6 – 3 = 3)



5 lados
2 diagonais
(5 – 3 = 2)



7 lados
4 diagonais
(7 – 3 = 4)

Assim, se um polígono tem *n* lados, podemos traçar $(n - 3)$ diagonais a partir de cada vértice. E como esse polígono possui *n* vértices, então podemos traçar $n \cdot (n - 3)$ diagonais. Porém, dessa forma, estamos contando a mesma diagonal duas vezes. Por exemplo, no hexágono *ABCDEF* acima, partindo do vértice *A*, temos a diagonal $\overline{AC}$ e, partindo do vértice *C*, temos a diagonal $\overline{CA}$, mas $\overline{AC}$ e $\overline{CA}$ determinam a mesma diagonal.

Logo, para determinar o número de diagonais (*d*) de um polígono de *n* lados, fazemos:

$$\boxed{d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}}$$

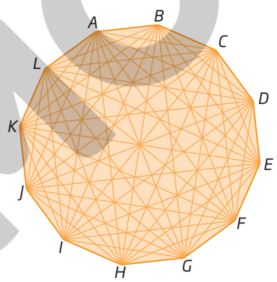
Considere um outro exemplo.

O dodecágono tem 12 lados. Vamos calcular o número de diagonais desse polígono.

$n = 12$

$d = \dfrac{12 \cdot (12 - 3)}{2} = 54$

Logo, o dodecágono tem 54 diagonais.



Representação de todas as diagonais de um dodecágono.

Diagonais de um polígono

Objetivo:

Determinar o número de diagonais de um polígono.

Justificativa

Determinar o número de diagonais de um polígono mobiliza conhecimentos das unidades temáticas Geometria, Números e Álgebra e possibilita resolver diferentes problemas.

Mapeando conhecimentos

Peça aos estudantes que representem em uma folha de papel alguns polígonos, tracem todas as diagonais de cada um, contem essas diagonais e completem um quadro como o da referência abaixo:

Número de lados do polígono	4	5	6	8	10
Número de diagonais					

Eles podem representar quantos e quais polígonos quiserem.

Em seguida, desafie-os a encontrar uma relação entre o número de diagonais e o número de lados de um polígono. Oriente-os a indicar o número de diagonais por *d* e o número de lados por *n*.

Para as aulas iniciais

Retome a dinâmica inicial e verifique quem conseguiu obter a relação entre *d* e *n*. Depois, oriente os estudantes que tiveram mais dificuldades. Peça que quantifiquem as diagonais que partem de um mesmo vértice, multipliquem essa quantidade pelo número de vértices e dividam o resultado final por 2 para eliminar as diagonais que foram contadas duas vezes. Por fim, peça que todos ampliem o quadro da dinâmica inicial, porém o número de diagonais deve ser preenchido com o uso da fórmula:

$$d = \frac{n(n - 3)}{2}$$

Caso a escola disponha de um laboratório de informática, prepare atividades para que, por meio da interação com um *software* de Geometria dinâmica, os estudantes possam construir os conhecimentos que serão formalizados posteriormente. Assim, em vez de dizer diretamente aos estudantes: “Se um polígono tem *n* lados, podemos traçar $(n - 3)$ diagonais a partir de cada vértice”, pode-se propor que cheguem a essa conclusão por meio da observação de regularidades ao utilizarem o *software*. Uma aula pautada no uso de ferramentas tecnológicas deve proporcionar aos estudantes a chance de serem os protagonistas de seu processo de aprendizagem.

Ângulos internos e ângulos externos de um polígono

Objetivos:

- Determinar a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono.
- Determinar a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos de um polígono.

Justificativa

Determinar a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos e externos de um polígono, amplia os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo e mobiliza conhecimentos das unidades temáticas Geometria, Grandezas e Medidas e Álgebra.

Mapeando conhecimentos

Reproduza a **atividade 21** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e peça aos estudantes que a façam. Esse é o momento oportuno para verificar se, para determinar o valor de x em cada item, eles utilizam o fato de que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo, de um quadrilátero e de um pentágono são iguais, respectivamente, a 180°, 360° e 540°.

Para as aulas iniciais

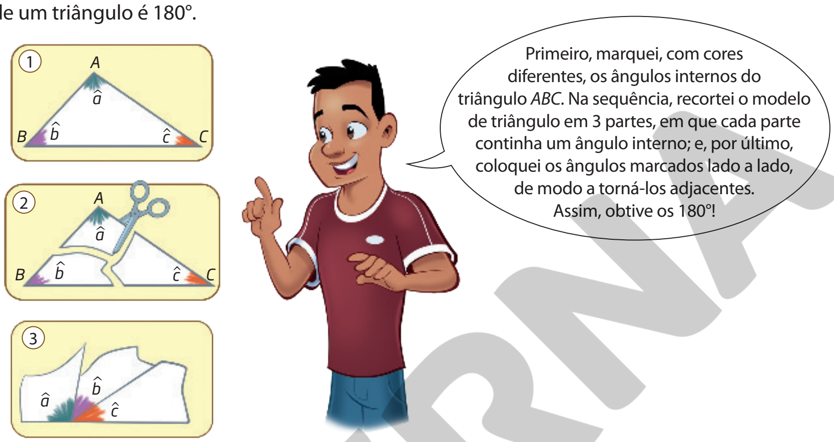
Faça a leitura coletiva da revisão sobre a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, resolva a **atividade 21** com a turma aplicando a relação $S_i = (n - 2) \cdot 108°$ e resolvendo as equações do 1º grau na incógnita x.

3 Ângulos internos e ângulos externos de um polígono

Soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono

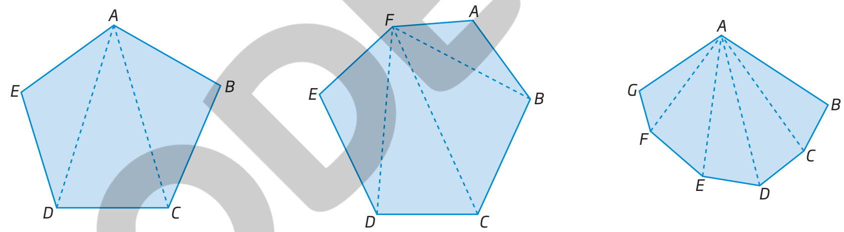
Analise o experimento feito por João para verificar que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

ILUSTRAÇÕES: ENÁGIO COELHO/ARQUIVO DA EDITORA



Traçando as diagonais que partem de um mesmo vértice, é possível decompor qualquer polígono em triângulos. Observe as figuras abaixo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



O polígono de 5 lados foi decomposto em 3 triângulos.

O polígono de 6 lados foi decomposto em 4 triângulos.

O polígono de 7 lados foi decomposto em 5 triângulos.

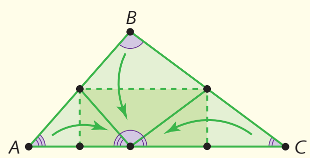
Fixando um dos vértices de um polígono e traçando as diagonais que partem desse vértice, decompomos o polígono de n lados em $(n - 2)$ triângulos.

Como a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de cada triângulo é 180°, podemos afirmar que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos (S_i) de um polígono de n lados corresponde a:

$$\boxed{S_i = (n - 2) \cdot 180°}$$

Sugestão de atividade extra

Organize os estudantes em duplas e peça a eles que recortem um pedaço de papel de modo que ele se pareça com um triângulo e que dobrem como sugerem as linhas pontilhadas da representação a seguir.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Ao fazer isso, espera-se que os estudantes percebam que é possível construir um ângulo raso (de 180°) justapondo os ângulos internos do triângulo. Com isso, eles podem verificar experimentalmente que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos do triângulo é igual a 180° e, procedendo da mesma forma com qualquer triângulo, podem concluir que essa é uma propriedade válida para todos os triângulos.

Considere mais alguns exemplos.

a) Qual é a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um hexágono?

$n = 6$

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

$S_i = (6 - 2) \cdot 180°$

$S_i = 4 \cdot 180°$

$S_i = 720°$

A soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um hexágono é 720°.

b) A soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono é 900°. Qual é esse polígono?

$S_i = 900°$

$S_i = (n - 2) \cdot 180°$

$900° = (n - 2) \cdot 180°$

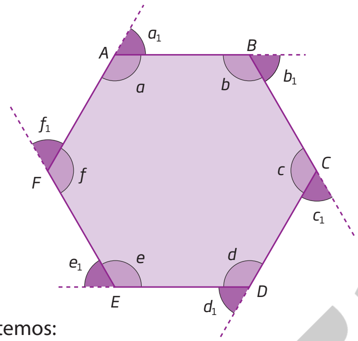
$\frac{900°}{180°} = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{180°}$

$5 = n - 2 \Rightarrow n = 7$

Logo, o polígono é um heptágono.

Soma das medidas das aberturas dos ângulos externos de um polígono

Considere o hexágono *ABCDEF*. Cada ângulo interno com o ângulo externo correspondente são adjacentes suplementares. Assim:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$a + a_1 = 180°$
$b + b_1 = 180°$
$c + c_1 = 180°$
$d + d_1 = 180°$
$e + e_1 = 180°$
$f + f_1 = 180°$

Adicionando as medidas das aberturas de todos os ângulos, temos:

$$\underbrace{a + b + c + d + e + f}_{\text{soma das medidas das aberturas dos ângulos internos } (S_i)} + \underbrace{a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1}_{\text{soma das medidas das aberturas dos ângulos externos } (S_e)} = \underbrace{180° + 180° + 180° + 180° + 180° + 180°}_{6 \cdot 180° = 1\,080°}$$

Assim: $S_i + S_e = 1\,080°$. Como $S_i = (n - 2) \cdot 180°$ e $n = 6$, então:

$(6 - 2) \cdot 180° + S_e = 1\,080°$
$4 \cdot 180° + S_e = 1\,080°$
$720° + S_e = 1\,080°$
$S_e = 360°$

Logo, a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos do hexágono é 360°.

Para qualquer polígono de n lados, temos:

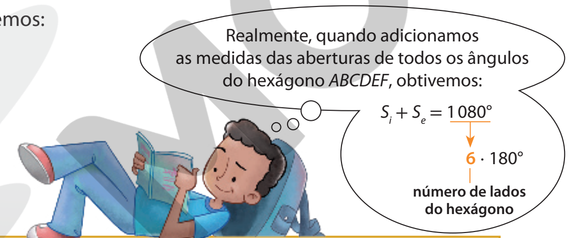
$S_i + S_e = n \cdot 180°$

$(n - 2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180°$

$n \cdot 180° - 360° + S_e = n \cdot 180°$

$S_e = 360°$

Assim:



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Em qualquer polígono, a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos é 360°.

Em vez de apresentar diretamente a decomposição de polígonos em triângulos e, então, obter a expressão que permite determinar a soma das medidas das aberturas dos seus ângulos internos, é interessante que, por meio de investigações, os estudantes sejam levados a perceber, por si mesmos, essa possibilidade de decomposição e, a partir de tal ideia, chegar à expressão visada.

Soma das medidas das aberturas dos ângulos externos de um polígono

O fato de que a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos de um polígono é igual a 360° pode ser percebido pelos estudantes por meio de investigações realizadas com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica. Até mesmo a verificação indicada no livro de que cada ângulo interno e seu externo correspondente são adjacentes suplementares pode ser facilitada pela utilização do *software*.

Em outros momentos da vida escolar dos estudantes, quando aparecer a questão das medidas das aberturas dos ângulos de um polígono, eles saberão como determinar a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos e também a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos de um polígono de n lados. Assim, em vez de apresentar diretamente o resultado visado, peça a eles que obtenham, a partir dos conhecimentos já construídos, as expressões que permitem obter a medida da abertura de cada ângulo externo e de cada ângulo interno de um polígono regular de n lados.

Para realizar a atividade do boxe *Veja que interessante*, será preciso uma folha de papel sulfite, régua, lápis de cor e tesoura com pontas arredondadas para cada estudante.

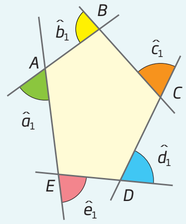
Incentive os estudantes a representar polígonos convexos de *n* lados, de modo que possam verificar que a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos é igual a 360°.

Veja que interessante

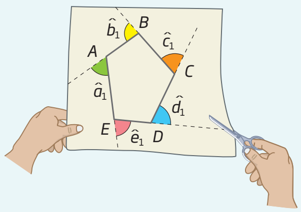
Faça as atividades no caderno.

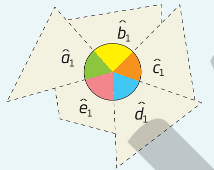
Vamos fazer um experimento com os ângulos externos de um polígono?

Em uma folha de papel, desenhe um polígono qualquer e indique seus ângulos externos. Verifique o modelo.



Em seguida, recorte, com uma tesoura de pontas arredondadas, cada um dos ângulos e una-os em torno de um dos vértices, de modo que se tornem adjacentes dois a dois.





Atividade

O que você pode verificar com esse experimento?

Veja que interessante: Espera-se que os estudantes percebam que, com o experimento, verificamos que a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos de um polígono é 360°.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

6 Determine o número de diagonais de um polígono de:

a) 5 lados; **6. a)** 5 diagonais

b) 9 lados; **6. b)** 27 diagonais

c) 15 lados; **6. c)** 90 diagonais

d) 20 lados. **6. d)** 170 diagonais

7 Determine a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos dos polígonos abaixo.

a) Quadrilátero **7. a)** 360°

b) Eneágono **7. b)** 1 260°

c) Undecágono **7. c)** 1 620°

d) Icoságono **7. d)** 3 240°

8 Indique o nome dos polígonos cuja soma das medidas das aberturas dos ângulos internos é:

a) 1 080° **8. a)** octógono

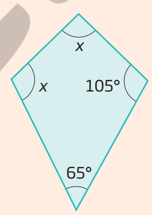
b) 1 980° **8. b)** polígono de 13 lados

c) 2 340° **8. c)** pentadecágono

d) 1 800° **8. d)** dodecágono

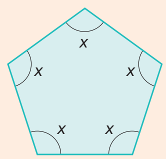
9 Em cada caso, calcule o valor de *x*, em grau.

a)



9. a) $x = 95°$

b)



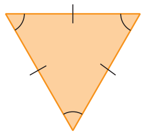
9. b) $x = 108°$

10 Determine o polígono que tem a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos e a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos iguais. **10.** quadrilátero

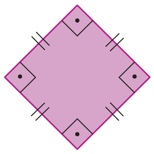
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

4 Polígonos regulares

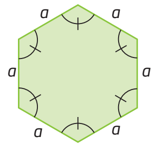
Um polígono que tem todos os lados com a mesma medida de comprimento e todos os ângulos com a mesma medida de abertura é denominado **polígono regular**. Os polígonos a seguir são exemplos de polígonos regulares.



triângulo equilátero



quadrado



hexágono regular

Medidas das aberturas do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular

Em um polígono regular de n lados, indicando a medida da abertura do ângulo interno por a_i e a medida da abertura do ângulo externo por a_e, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \text{ ou } a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} \quad \text{e} \quad a_e = \frac{S_e}{n} \text{ ou } a_e = \frac{360°}{n}$$

Agora, considere os exemplos abaixo.

a) Vamos determinar a medida da abertura do ângulo interno e a do ângulo externo de um decágono regular.

O decágono é o polígono que tem 10 lados.

Logo, $n = 10$. Assim:

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{10} = 36°$$

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n} = \frac{(10-2) \cdot 180°}{10} = 144°$$

Logo, a medida da abertura do ângulo externo é 36° e a medida da abertura do ângulo interno é 144°.

b) Vamos calcular o número de lados de um polígono regular cuja medida da abertura do ângulo interno é igual a 108°.

Como $a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$, então:

$$108° = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

$$108° \cdot n = 180° \cdot n - 360°$$

$$72° \cdot n = 360°$$

$$n = 5$$

Logo, o polígono tem 5 lados, ou seja, é um pentágono.

Sugestão de leitura

SMOOTHEY, Marion. **Atividades e jogos com quadriláteros**. São Paulo: Scipione, 1998. (Coleção Investigação matemática).

Partindo de situações cotidianas, o livro traz desafios com fósforos, dobraduras e quebra-cabeças que ajudam a compreender conceitos como: quadriláteros, ângulos, diagonais, pontos e retas.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

Polígonos regulares

BNCC:

- Competências gerais 2, 4 e 10 (as descrições estão na página VI).
- Competência específica 5 (a descrição está na página VII).
- Habilidades EF08MA15 e EF08MA16.

Objetivos:

- Compreender o conceito de polígono regular.
- Construir polígonos regulares com régua e compasso.

Justificativa

Compreender o conceito de polígono regular amplia os conhecimentos sobre polígonos adquiridos pelos estudantes. Já a construção de polígonos regulares com régua e compasso favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA15**.

Mapeando conhecimentos

Reúna os estudantes em grupos e distribua folhas de papel com alguns polígonos regulares representados nelas. Depois, peça que meçam os lados e as aberturas dos ângulos internos desses polígonos e verbalizem o que concluíram. Espera-se que eles reconheçam a congruência dos lados e dos ângulos internos de cada polígono. Depois, pergunte: "Como vocês fariam para determinar a medida da abertura de cada ângulo interno de um polígono regular?". Deixe que investiguem e conjecturem. Caso ache necessário, dê como dica partir da fórmula da soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono.

Para as aulas iniciais

Na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*, é retomado o conceito de polígono regular e como se determina a medida da abertura dos ângulos internos e externos de polígonos regulares. Faça a leitura coletiva dessa revisão com a turma. Depois retome a questão feita na dinâmica inicial e verifique se conseguiram concluir como se determina, de modo geral, a medida da abertura de cada ângulo interno de um polígono regular. Caso seja necessário, oriente-os a dividir a fórmula da soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono pela quantidade de ângulos internos do polígono regular. Por fim, explore com eles as **atividades 22** e **23**.

Sugestão de leitura

Sugerimos a leitura do trabalho “O ensino de polígonos regulares por meio de materiais manipuláveis”, que tem como objetivo apresentar uma proposta do uso de materiais concretos para o ensino de polígonos regulares inscritos na circunferência. Se considerar adequado, faça as atividades propostas com os estudantes. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/21/134. Acesso em: 4 ago. 2022.

Ângulo central de um polígono regular

Dizer que um polígono está inscrito em uma circunferência significa que todos os vértices desse polígono são pontos da circunferência.

Sugestão de atividade extra

A proposição “Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.” pode ser reescrita em sua forma condicional: “Se um polígono é regular, então pode ser inscrito em uma circunferência”. A sentença que chamamos de *contrapositiva* é construída assim: “Se um polígono não pode ser inscrito em uma circunferência, então ele não é regular”.

E se o polígono puder ser inscrito em uma circunferência, ele será regular com certeza? É o que veremos nesta atividade.

1. Divida a classe em duplas. Cada dupla deverá representar três circunferências em uma folha de papel. Peça aos estudantes que escolham grupos de quatro pontos, cinco pontos e seis pontos sobre as circunferências; um grupo sobre cada circunferência. Peça, então, que unam os pontos de modo a obterem polígonos.
2. Pergunte e deixe que discutam entre si: esses polígonos são regulares?
3. Finalmente, questione: Se todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência, então todo polígono inscrito em uma circunferência é regular?

Essa atividade explora as implicações lógicas, as recíprocas e as contrapositivas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

11 Determine as medidas das aberturas dos ângulos internos e dos ângulos externos dos seguintes polígonos:

a) quadrilátero regular; **11. a)** $a_i = 90°$; $a_e = 90°$

b) octógono regular; **11. b)** $a_i = 135°$; $a_e = 45°$

c) eneágono regular; **11. c)** $a_i = 140°$; $a_e = 40°$

d) icoságono regular. **11. d)** $a_i = 162°$; $a_e = 18°$

12 Qual é o polígono regular cujas medidas das aberturas dos ângulos internos são iguais às medidas das aberturas dos ângulos externos? **12.** quadrilátero regular ou quadrado

13 Em um polígono regular, a medida da abertura do ângulo externo é 40°. Quantos lados tem esse polígono? **13.** 9 lados

14 Em um polígono regular, $a_i - a_e = 60°$. Qual é esse polígono? **14.** hexágono

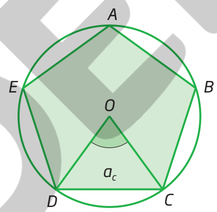
Ângulo central de um polígono regular

Uma circunferência **circunscrita** a um polígono contém todos os vértices desse polígono. Nesse caso, podemos dizer também que o polígono está **inscrito** na circunferência.

Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência.

Denominamos **ângulo central** de um polígono regular aquele cujo vértice é o centro da circunferência e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono.

No pentágono regular *ABCDE* abaixo, a_c indica a medida da abertura do ângulo central.

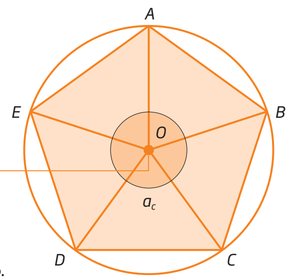


Sendo *O* o centro de um polígono regular, a soma das medidas das aberturas de todos os ângulos centrais (S_c) é 360° (uma volta completa).

$$\boxed{S_c = 360°}$$

Logo, em um polígono de *n* lados, a medida da abertura do ângulo central é:

$$\boxed{a_c = \frac{360°}{n}}$$



O é o centro do polígono regular e coincide com o centro da circunferência circunscrita a esse polígono.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ ARQUIVO DA EDITORA

118

Construção de polígonos regulares com régua e compasso

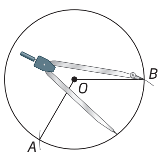
Podemos construir polígonos regulares a partir do seu ângulo central. Acompanhe a seguir a construção de um triângulo equilátero e a de um quadrado.

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso.

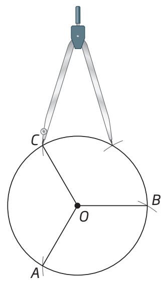
Triângulo equilátero

A medida da abertura do ângulo central do triângulo equilátero é igual a 120°. Observe a sequência de passos para construí-lo.

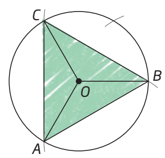
1º) Construímos uma circunferência de centro *O* com medida de comprimento de raio qualquer, e, com a mesma abertura do compasso, centrando-o em um ponto qualquer da circunferência, traçamos dois arcos, cruzando a circunferência em dois pontos, *A* e *B*. Construímos os segmentos de reta $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$, determinando o ângulo central $A\hat{O}B$.



2º) Centrando o compasso em *B* e mantendo a sua abertura inicial, traçamos mais dois arcos consecutivos na circunferência, marcando o ponto *C*. Traçamos $\overline{OC}$, determinando os ângulos centrais $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$.



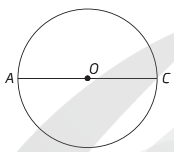
3º) Construímos os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$, formando, assim, o triângulo equilátero.



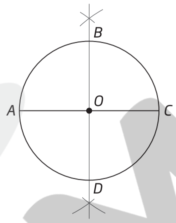
Quadrado

A medida da abertura do ângulo central do quadrado é igual a 90°. Observe a sequência de passos para construí-lo.

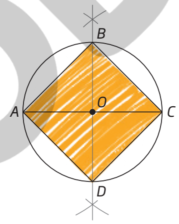
1º) Construímos uma circunferência de centro *O* com medida de comprimento de raio qualquer. Traçamos um diâmetro, marcando os pontos *A* e *C*, intersecções do diâmetro com a circunferência.



2º) Construímos uma reta perpendicular à $\overline{AC}$, passando por *O*, marcando os pontos *B* e *D*, intersecção da reta perpendicular com a circunferência. Assim, determinamos 4 ângulos centrais com medida de abertura 90°: $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$.



3º) Traçamos os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, formando, assim, o quadrado.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

No capítulo 7, apresentaremos a justificativa para a validade das construções apresentadas nesta página.

Antes de apresentar as construções do triângulo equilátero e do quadrado, propostas nesta página, verifique se os estudantes levantam hipóteses sobre essas construções. Para isso, pode-se propor algumas questões, como: “Em quantos pontos um quadrado inscrito intersecta a circunferência? E um triângulo equilátero? Como você faria para determinar esses pontos?”.

Oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

Sugestão de atividade extra

Após explorar as construções propostas nesta página, peça aos estudantes que, usando régua e compasso, construam outros polígonos regulares, como o hexágono regular. Algumas propostas de construções podem ser encontradas na dissertação “Polígonos construtíveis por régua e compasso: uma apresentação para professores da Educação Básica”, de Kelisson Ferreira de Lima.

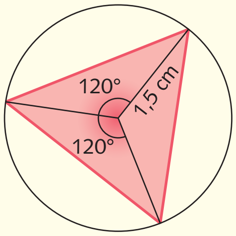
Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/25756/25756.PDF. Acesso em: 4 ago. 2022.

Você poderá justificar a construção do triângulo equilátero depois que o hexágono regular for construído.

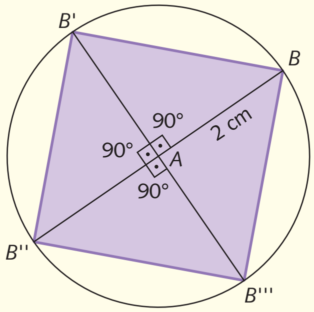
Quanto ao quadrado, a construção se justifica pelo fato de que, no quadrado, as diagonais são perpendiculares e são congruentes. Volte a essa construção quando os quadriláteros forem explorados.

• Exemplo de respostas da **atividade 16**:

a)



b)



• A **atividade 17** estimula o raciocínio lógico, o pensamento computacional, a criatividade e a elaboração de questões pelos estudantes, favorecendo o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **10** e da competência específica **5**.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

15 Calcule a medida da abertura do ângulo central de cada polígono regular.

a) hexágono; **15. a)** $a_c = 60°$

b) decágono; **15. b)** $a_c = 36°$

c) dodecágono; **15. c)** $a_c = 30°$

d) icoságono. **15. d)** $a_c = 18°$

16 Faça o que se pede.

a) Construa no caderno um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo raio mede 1,5 cm de comprimento. **16. a)** Exemplo de resposta em *Orientações*.

b) Construa no caderno um quadrado inscrito em uma circunferência cujo raio mede 2 cm de comprimento. **16. b)** Exemplo de resposta em *Orientações*.

17 Observe as frases abaixo. Se as colocarmos na sequência correta, obteremos o passo a passo para construir um hexágono regular.

A. Construa um ângulo central cuja medida da abertura seja igual a 60°.

B. Construa um ângulo central adjacente ao anterior.

C. Trace um segmento de reta consecutivo ao anterior, fechando o polígono.

D. Trace um segmento de reta unindo os pontos obtidos.

E. Marque a intersecção do último lado do ângulo construído com a circunferência.

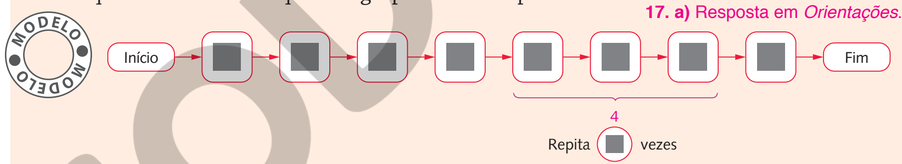
F. Construa uma circunferência.

G. Trace o segmento de reta consecutivo ao anterior, unindo-o ao último ponto obtido.

H. Marque a intersecção dos lados do ângulo com a circunferência.

a) Reproduza o fluxograma abaixo em seu caderno e complete-o com as letras correspondentes a cada uma das frases acima. Note que, no fluxograma, há um grupo de passos que devem ser repetidos para obtermos o hexágono regular. Indique, no campo adequado, a quantidade de vezes que esse grupo deve ser repetido.

17. a) Resposta em *Orientações*.



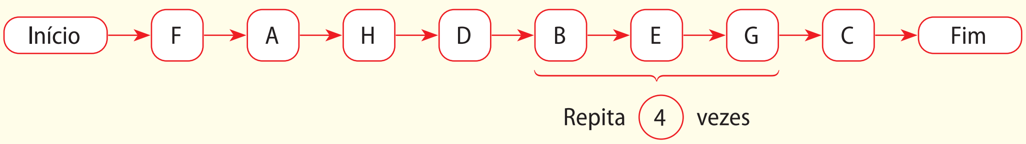
17. b) Resposta pessoal.

b) Utilizando a ideia acima como referência, elabore, no caderno, um esquema com uma sequência de comandos para a construção de outro polígono regular.

c) Troque de caderno com um colega e tente construir o polígono conforme a orientação no esquema. **17. c)** Resposta pessoal.

d) Discuta com o colega os fluxogramas elaborados, analisando se as instruções produziram o polígono desejado. Caso isso não tenha ocorrido, investiguem se houve falha no comando ou na sequência dos comandos inseridos no esquema. **17. d)** Resposta pessoal.

• Resposta do **item a** da **atividade 17**:



1. quadrado *ABCD*; lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$
vértices: *A*, *B*, *C*, *D*; diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{BD}$

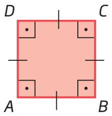
Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Polígonos

Uma linha poligonal fechada simples com sua região interna forma uma figura geométrica plana chamada **polígono**.

1. Dê o nome do polígono e identifique seus lados, vértices e diagonais.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

2. Um heptágono possui:

a) quantos vértices? **2. a)** 7

b) quantos lados? **2. b)** 7

Diagonais de um polígono

O número de diagonais de um polígono varia de acordo com o número de lados que ele possui. Logo, para determinar o número de diagonais (d) de um polígono de n lados, fazemos:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

3. Determine o número de diagonais de um polígono de:

a) 8 lados **3. a)** 20

b) 3 lados **3. b)** 0

Ângulos internos e ângulos externos de um polígono

Soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono

A soma das medidas das aberturas dos ângulos internos (S_i) de um polígono de n lados corresponde a:

$$S_i = (n-2) \cdot 180°$$

Soma das medidas das aberturas dos ângulos externos de um polígono

Em qualquer polígono, a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos é 360°.

4. A soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono é 720°. Qual é esse polígono? **4.** hexágono

5. Determine a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um pentágono. **5.** 540°

Polígonos regulares

Um polígono que possui todos os lados com a mesma medida de comprimento e todos os ângulos com mesma medida de abertura é denominado **polígono regular**.

Medidas das aberturas do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular

Em um polígono regular de n lados, indicando a medida da abertura do ângulo interno por a_i e a medida da abertura do ângulo externo por a_e, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \quad \text{ou} \quad a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

e

$$a_e = \frac{S_e}{n} \quad \text{ou} \quad a_e = \frac{360°}{n}$$

Ângulo central de um polígono regular

Denominamos **ângulo central de um polígono regular** aquele cujo vértice é o centro da circunferência e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono.

Sendo O o centro de um polígono regular, a soma das medidas das aberturas de todos os ângulos centrais (S_c) é 360° (uma volta completa).

$$S_c = 360°$$

Logo, em um polígono de n lados, a medida da abertura do ângulo central é:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

6. A medida da abertura do ângulo interno de um polígono regular é o triplo da medida da abertura do seu ângulo externo. Qual é esse polígono? **6.** octógono

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Polígonos

• Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes reconheçam o quadrilátero *ABCD* como um quadrado, uma vez que todos os ângulos internos são retos e têm todos os lados com a mesma medida de comprimento. Depois, eles devem indicar os lados, os vértices e as diagonais. Verifique se reconhecem que os lados e as diagonais são segmentos de reta e se utilizam a notação correta.

• Na **atividade 2**, os estudantes devem se lembrar de que um heptágono é um polígono com 7 lados. Oriente-os a representar um heptágono qualquer no caderno para verificar que o número de lados é igual ao número de vértices.

Diagonais de um polígono

• A **atividade 3** pode ser feita aplicando a relação $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ ou representando as diagonais de um polígono qualquer de oito lados e outro de três lados para depois contá-las. É importante que os estudantes tenham acesso a esses dois modos de resolução.

Ângulos internos e externos de um polígono

• As **atividades 4** e **5** são realizadas por meio da aplicação da relação $S_i = (n-2) \cdot 180°$, em que S_i é a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos do polígono e n é o número de lados. Após realizarem os cálculos, sugira que representem um pentágono e um hexágono qualquer em uma folha de papel, meçam as aberturas dos ângulos internos de cada um desses polígonos e, depois, adicionem essas medidas para verificar se obtém 540° e 720°, respectivamente. É possível que as somas obtidas por eles sejam próximas desses valores. Caso isso ocorra, comente sobre as possíveis razões: defeitos nos transferidores, falhas no processo de medição, entre outros.

Polígonos regulares

• A **atividade 6** demanda que os estudantes traduzam o enunciado da atividade para a linguagem algébrica. Espera-se que eles escrevam a seguinte expressão: $a_i = 3 \cdot a_e$. Depois, oriente-os a organizar a medida das aberturas dos ângulos internos e externos de alguns polígonos regulares em um quadro até descobrir o polígono que atende às condições do enunciado.

Como 135° = 3 · 45°, o polígono regular que atende às condições do enunciado é o octógono.

Polígono regulares	a_i	a_e
Quadrado	90°	90°
Pentágono	108°	72°
Hexágono	120°	60°
Octógono	135°	45°

CAPÍTULO 6 – PROBABILIDADE

Trocando ideias

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre o conceito de espaço amostral.
- Levantar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre o conceito de probabilidade.

Aproveite a imagem de abertura, que apresenta peças de alguns jogos possivelmente conhecidos pelos estudantes, para contextualizar diferentes situações que envolvam aleatoriedade. Incentive-os a dar exemplos de situações que vivenciaram nas quais sabiam os resultados possíveis, mas não poderiam prever o resultado final e registre-as na lousa. Depois, de maneira coletiva, tente descrever o espaço amostral de alguns dos experimentos aleatórios citados por eles.

Após esse diálogo inicial, proponha que respondam à primeira questão. Esclareça que um “dado honesto” é aquele em que cada uma das faces tem a mesma chance de ficar voltada para cima. Se apresentarem dificuldade, permita que manuseiem um dado de 6 faces, numerado de 1 a 6. Após responderem, você pode propor outras questões como: “Qual é a probabilidade de obter uma face com número par? Qual é a probabilidade de obter uma face cujo número é maior do que 2?”.

Em relação à segunda questão, é importante que conheçam as 52 cartas de um baralho comum para que possam conhecer o espaço amostral e, consequentemente, os resultados possíveis deste experimento. Se possível, leve um baralho comum e permita que os estudantes o manipulem. Eles devem concluir como em um baralho há 52 cartas, a probabilidade de se retirar o ás de copas é de 1 em 52, ou seja, $\frac{1}{52}$.

As questões incentivam a interação e o diálogo, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **9** e a competência específica **8** de Matemática.

Capítulo

6 Probabilidade

Trocando ideias

Em muitas situações que vivenciamos nos jogos, conhecemos os resultados possíveis, mas não podemos prever o resultado final. É o que acontece, por exemplo, ao lançarmos um “dado honesto” ou retirarmos uma carta de um baralho.

ELENA SCHWEITZER/SHUTTERSTOCK

Algumas peças de diferentes tipos de jogos: damas, xadrez, dominó, cartas etc.

Trocando ideias: primeiro item: 1, 2, 3, 4, 5 ou 6; $\frac{1}{6}$; segundo item: $\frac{1}{52}$.

- Quais são as possibilidades de resultado que podem aparecer no lançamento de um “dado honesto” como um dos dados preto da imagem? Qual é a probabilidade de sair a face 2?
- Qual é a probabilidade de se retirar, ao acaso, a carta “ás de copas” de um baralho comum?

Neste capítulo, vamos aprofundar as ideias sobre cálculo de probabilidade com base na construção do **espaço amostral**.

1 Possibilidades

Situações em que conhecemos os resultados possíveis mas nas quais não podemos assegurar o resultado final são chamadas de **experimentos aleatórios**.

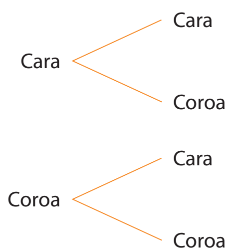
Todas as possibilidades, ou seja, todos os resultados possíveis em um experimento aleatório, compõem o **espaço amostral** desse experimento.

Vamos estudar alguns modos de obter e organizar o espaço amostral. Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Quais resultados podemos obter ao lançar duas "moedas honestas" diferentes?

Para obter o espaço amostral desse experimento, podemos construir uma **árvore de possibilidades**.



Observe que há 4 possibilidades de resultado ao lançar duas "moedas honestas": pode "sair" cara nas duas moedas, cara na primeira moeda e coroa na segunda, coroa na primeira moeda e cara na segunda e coroa nas duas moedas.

Situação 2

Jéferson tem bolas com os números 1, 3, 5 e 7 em uma caixa verde, e bolas com os números 2, 4 e 8 em uma caixa roxa. Caso ele sorteie uma bola de cada caixa, quais são as possibilidades diferentes de sorteio?

Para responder à pergunta, vamos organizar as possibilidades do sorteio, ou espaço amostral, em um quadro.

		Bolas numeradas da caixa verde			
		1	3	5	7
Bolas numeradas da caixa roxa	2	1 2	3 2	5 2	7 2
	4	1 4	3 4	5 4	7 4
	8	1 8	3 8	5 8	7 8

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, Jéferson tem 12 possibilidades diferentes de sortear uma bola de cada caixa.

Possibilidades

BNCC:

Habilidade EF08MA03.

Objetivos:

- Determinar o espaço amostral de experimentos aleatórios.
- Aplicar o princípio multiplicativo para determinar o número de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório.

Justificativa

Determinar o espaço amostral de experimentos aleatórios dá aos estudantes a oportunidade de analisar a fundo esses experimentos, levantar os resultados possíveis deles e calcular a probabilidade de ocorrência de eventos. Já a aplicação do princípio multiplicativo para determinar o número de elementos do espaço amostral de um experimento aleatório favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA03** e também contribui para o cálculo de probabilidades.

Mapeando conhecimentos

Proponha a seguinte questão para os estudantes: "Quantos resultados possíveis podemos obter ao lançar dois 'dados honestos' com as faces numeradas de 1 a 6?". Oriente-os a registrar esses resultados possíveis da maneira que acharem conveniente. Eles podem fazer desenhos, árvore de possibilidades ou um quadro, como o da referência seguir:

		"Dado honesto" 1					
		1	2	3	4	5	6
"Dado honesto" 2	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Com base nisso, espera-se que eles concluam que há 36 resultados possíveis.

Depois, questione-os: "Quantos resultados possíveis podemos obter ao lançar três 'dados honestos'? E quatro 'dados honestos'? É viável descrever todos os resultados possíveis para depois contar? Como vocês fariam?". Deixe que levantem hipóteses e promova a participação de todos.

Assim como os outros recursos apresentados, a árvore de possibilidades (situação **1**) auxilia a análise de problemas combinatórios, facilitando a compreensão do princípio multiplicativo, ou princípio fundamental da contagem, que será estudado a seguir.

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

Para as aulas iniciais

Recorde com os estudantes a ideia de combinação de possibilidade da multiplicação. Depois, retome os questionamentos da dinâmica inicial e ajude-os a responder aplicando o princípio multiplicativo. Em seguida, explore o cálculo do número de possibilidades de outros experimentos aleatórios.

Princípio multiplicativo

Após introduzir o conceito do princípio multiplicativo, comente com os estudantes que esse princípio é a ferramenta básica para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar os elementos do espaço amostral.

Nesse momento, vamos aplicar o princípio multiplicativo para determinar o total de possibilidades de cada uma das situações apresentadas anteriormente. Faça a leitura com os estudantes e, se possível, peça que comparem o total encontrado com o total listado anteriormente.

É importante que os estudantes percebam que o princípio multiplicativo deve ser usado para calcular o total de possibilidades sem determinar o espaço amostral, mas, se o problema pedir para identificar as possibilidades, será necessário listá-las.

Princípio multiplicativo

Em cada uma das situações apresentadas anteriormente, calculamos o total de possibilidades de o experimento ocorrer, determinando todo o espaço amostral desse experimento, ou seja, todos os resultados possíveis.

No entanto, é possível calcular o total de possibilidades sem determinar o espaço amostral. Vamos ver como isso poder ser feito, retomando as situações anteriores.

Situação 1

Ao lançar duas "moedas honestas", podemos obter cara ou coroa na primeira (2 possibilidades) e cara ou coroa na segunda (2 possibilidades). Dessa forma, o total de resultados possíveis ao lançar duas "moedas honestas" é:

2 possibilidades de resultado para a segunda "moeda honesta" (cara ou coroa)

$$2 \cdot 2 = 4$$

2 possibilidades de resultado para a primeira "moeda honesta" (cara ou coroa)

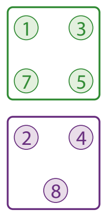
total de resultados possíveis ao lançar duas "moedas honestas"

O cálculo foi realizado com base no **princípio multiplicativo**.

> Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, *A* e *B*. Se *A* ocorrer de *m* maneiras, e se, para cada uma delas, *B* pode ocorrer de *n* maneiras, o número de maneiras que o acontecimento pode ocorrer é $m \cdot n$.

Situação 2

Jéferson tinha 4 possibilidades (1, 3, 5 e 7) de sortear uma bola da caixa verde e 3 possibilidades (2, 4 e 8) de sortear uma bola da caixa roxa. O total de possibilidades de sortear uma bola de cada caixa pode ser dado pela seguinte multiplicação:



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ ARQUIVO DA EDITORA

3 possibilidades de bolas que podem ser sorteadas da caixa roxa

$$4 \cdot 3 = 12$$

4 possibilidades de bolas que podem ser sorteadas da caixa verde

total de possibilidades de sortear uma bola de cada caixa

O princípio multiplicativo pode ser estendido para três ou mais etapas. Considere a situação a seguir.

Três "dados honestos" com as faces numeradas de 1 a 6 serão lançados simultaneamente. Quantas são as possibilidades de resultado?

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

Portanto, há 216 resultados possíveis ao lançar, simultaneamente, três "dados honestos".

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. a) Resposta em *Orientações*.

1 Dois estudantes serão eleitos monitores da turma por sorteio. Em uma urna estão os nomes de José, Joaquim e Marcela e na outra urna os nomes de Maria, Manoela, Marília e Aline.

a) Construa uma árvore de possibilidades com os possíveis resultados desse sorteio.

b) Quantas possibilidades de resultado esse sorteio pode ter? **1. b)** 12 possibilidades.

2 Uma moeda será lançada duas vezes. Quais são os possíveis resultados que podem ocorrer? **2.** (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, coroa) e (coroa, cara)

3 Angélica é deficiente visual, e para uma viagem de negócios levou 3 camisetas, 4 calças e 2 pares de sapatos. Para uma reunião, solicitou que Arthur (seu assistente) separasse uma troca de roupas qualquer para ela.

3. a) Resposta em *Orientações*.

a) Quais são as possibilidades de combinação que Artur pode separar para Angélica?

b) Quantas opções de combinação ela tem? **3. b)** 24 opções

4 A senha de acesso a um *site* é composta de uma letra e 3 algarismos.

a) De quantas maneiras diferentes um usuário desse *site* poderá escolher uma letra para compor sua senha? Considere as letras de nosso alfabeto. **4. a)** 26 maneiras

b) De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher os algarismos para compor sua senha? Justifique. **4. b)** 1 000 maneiras; as opções vão de 000 a 999.

c) Qual é o total de senhas diferentes que podem ser compostas para o acesso a esse *site*? **4. c)** 26 000 senhas diferentes

d) Júlio esqueceu os dois primeiros dígitos de sua senha e solicitou a seus dois filhos que fossem, um a um, tentando descobrir a senha que usava; aquele que ganhasse escolheria o que iriam jantar. Quantas possibilidades de combinação eles tinham como espaço amostral nesse caso? **4. d)** 260 possibilidades.

5 Um computador fará um sorteio, com os algarismos 0, 4, 5, 8 e 9, para compor um número seguindo o esquema abaixo.

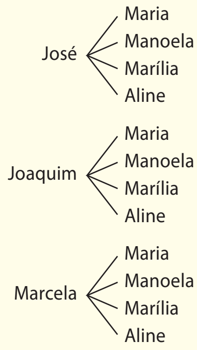
Milhar	Centena	Dezena	Unidade

Em duplas, verifiquem quantos números podem ser formados com a condição de que os algarismos não podem se repetir e a de que o número não pode começar em zero. **5.** 96 números

6 Elabore um problema que envolva um experimento aleatório e o princípio multiplicativo. Depois, troque de problema com um colega e resolva o problema que ele elaborou. **6.** Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

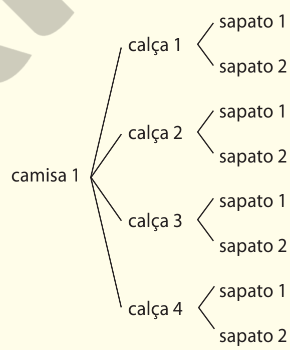
• Resposta do **item a** da **atividade 1**:



• No **item b** da **atividade 1**, espera-se que os estudantes concluam que há 12 resultados possíveis para o sorteio, pois há 3 resultados possíveis para o sorteio de uma urna e 4 da outra e $3 \cdot 4 = 12$.

• Para realizar a **atividade 3**, os estudantes podem aplicar o mesmo procedimento da **atividade 1**:

Numerando as camisas, as calças e os sapatos, os estudantes deverão repetir a árvore a seguir para as camisas 2 e 3:



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL /ARQUIVO DA EDITORA

• Na **atividade 5**, os estudantes deverão perceber que o algarismo zero não pode ocupar a casa do milhar. Logo, a quantidade de números naturais de quatro algarismos que podem ser formados 96, pois: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$.

Probabilidade

BNCC:
Habilidades EF08MA03 e EF08MA22.

Objetivo:
Calcular a probabilidade de um evento ocorrer.

Justificativa
O cálculo de probabilidades estimula o raciocínio e oferece aos estudantes a oportunidade de lidar com diferentes situações cotidianas que envolvam aleatoriedade. Por demandar, em alguns casos, a aplicação do princípio multiplicativo, esse tipo de cálculo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA03**. Além disso, o desenvolvimento da habilidade **EF08MA22** tem como focos o cálculo de probabilidades e o reconhecimento de que a soma das probabilidades de ocorrência de todos os eventos de um espaço amostral ser sempre igual a 1.

Mapeando conhecimentos
Reproduza as **atividades 24** e **25** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e peça aos estudantes que as realizem. Após terminarem, peça a alguns deles que expliquem a estratégia adotada.

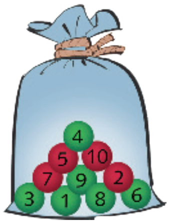
Para as aulas iniciais
Nesse tópico, retomamos o estudo das probabilidades. É importante que os estudantes compreendam o significado de espaço amostral e evento para, então, entender como se calcula probabilidades.

Faça a leitura coletiva da revisão do conceito de probabilidade presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, proponha aos estudantes que imaginem que foram colocadas 20 bolas numeradas de 1 a 20 em uma urna e que uma bola será sorteada. Em seguida, proponha os seguintes questionamentos:

- Qual é a probabilidade de "sair" uma bola com um número par? E uma bola com número ímpar? $\left(\text{Respostas: } \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$
- Qual é a probabilidade de "sair" uma bola com um número primo? $\left(\text{Resposta: } \frac{2}{5}\right)$
- Qual é a probabilidade de "sair" uma bola com um número menor do que 13? $\left(\text{Resposta: } \frac{3}{5}\right)$

2 Probabilidade

Neste momento, vamos relembrar como é feito o cálculo da **probabilidade** de ocorrência de um evento. Para isso, considere a situação a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Um experimento aleatório poderia ser, por exemplo, a retirada, sem ver, de uma bolinha de um saco que contém 6 bolinhas verdes e 4 bolinhas vermelhas. Não é possível afirmar que seria retirada necessariamente uma bolinha verde ou uma vermelha, poderia ser qualquer uma das duas.

- Mas qual seria a probabilidade de se retirar uma bolinha verde desse saco?
- E qual seria a probabilidade de se retirar uma bolinha vermelha?

O conjunto das 10 bolinhas (6 bolinhas verdes e 4 bolinhas vermelhas) forma o espaço amostral.

Chamamos de **evento** qualquer subconjunto do espaço amostral; nesse caso, temos dois eventos:

- evento *A*: retirar uma bolinha verde;
- evento *B*: retirar uma bolinha vermelha.

Observe que 6 casos são favoráveis ao evento *A* (retirar uma bolinha verde) e 4 casos são favoráveis ao evento *B* (retirar uma bolinha vermelha).

A probabilidade *P* da ocorrência de um evento é uma medida que pode assumir um valor de 0 a 1 e é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número de elementos do espaço amostral:

$$\boxed{P(\text{evento}) = \frac{\text{número de casos favoráveis do evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}}$$

Desse modo, a probabilidade de ocorrência do evento *A*, retirar uma bolinha verde, é:

$$\underbrace{P(A)}_{\text{probabilidade de ocorrer o evento } A} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Como também podemos indicar a probabilidade por meio de um número na forma decimal ou uma porcentagem, nesse caso, a probabilidade de se retirar uma bolinha verde é 0,6 ou 60%.

Já a probabilidade de ocorrência do evento *B*, retirar uma bolinha vermelha, é:

$$\underbrace{P(B)}_{\text{probabilidade de ocorrer o evento } B} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

Logo, a probabilidade de se retirar uma bolinha vermelha é 0,4 ou 40%.

Observe, na situação apresentada que a soma das probabilidades dos dois eventos é igual a 1:

$$P(A) + P(B) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Por esse motivo, dizemos que os eventos *A* e *B* são **complementares**.

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Agora, considere um novo evento:

- evento C: retirar a bolinha de número 7.

A probalidade de o evento C ocorrer é:

$$\underbrace{P(C)}_{\text{probabilidade de ocorrer o evento } C} = \frac{1}{10}$$

Logo, para cada uma das bolinhas, a probabilidade de ser retirada é de 0,1 ou 10%.

Podemos determinar a probabilidade dos eventos A e B de outra maneira. Observe:

- evento A: retirar uma bolinha verde.

$$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \underbrace{\frac{6}{10}}_{\text{soma das probabilidades de se retirar bolinhas verdes}}$$

- evento B: retirar uma bolinha vermelha.

$$P(B) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \underbrace{\frac{4}{10}}_{\text{soma das probabilidades de se retirar bolinhas vermelhas}}$$

Note que a soma de todas essas probabilidades é igual a 1:

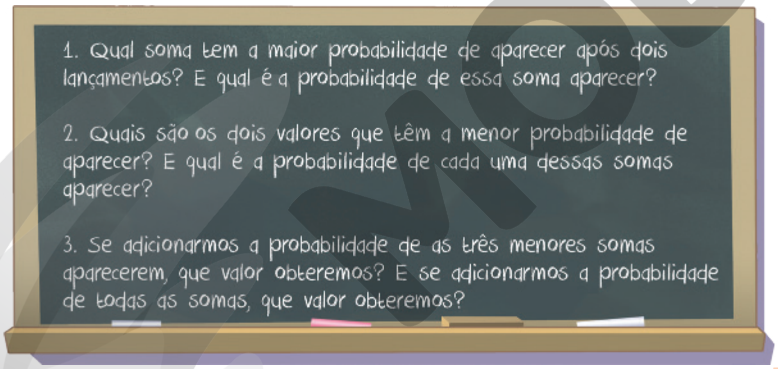
$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Observações

1. A soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
2. Quando a probabilidade de um evento ocorrer é 1, dizemos que esse evento é **certo**.
3. Quando a probabilidade de um evento ocorrer é 0, dizemos que esse evento é **impossível**.

Agora, observe a situação a seguir.

Na aula de Matemática, a professora Roberta organizou a turma em duplas e entregou um "dado honesto" a cada dupla. Ela solicitou que os estudantes construíssem o espaço amostral, listando as possibilidades da soma de pontos ao lançar o "dado honesto" duas vezes, e que, com base nos resultados, respondessem às seguintes perguntas:



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão de leitura

Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da Probabilidade e da Estatística na Escola Básica, de Cileda de Queiroz Silva Coutinho (org.). Campinas: Mercado de Letras, 2013.

Esta obra busca suscitar a reflexão e a discussão sobre o ensino e a aprendizagem dos conteúdos ligados à Estatística e à Probabilidade, assim como fornecer um material já testado e validado por pesquisas e que pode ser utilizado com os estudantes, adaptado às necessidades da turma, ou de outras, em níveis de escolaridade distintos dos sugeridos nos textos.

A exploração do evento C tem o intuito de fazer com que os estudantes concluam que a soma das probabilidades de todos os eventos de um espaço amostral é igual a 1.

Se considerar adequado, antes de apresentar a resolução do exemplo proposto, peça aos estudantes que o resolvam em grupo. Desse modo, será possível identificar as eventuais dúvidas dos estudantes em relação ao conteúdo, além de permitir uma socialização das estratégias utilizadas na resolução.

127

• Na **atividade 7**, oriente os estudantes a construírem um quadro para organizar o espaço amostral pedido no **item a**. Eles podem organizar um quadro como o da referência abaixo:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)
7	(1, 7)	(2, 7)	(3, 7)	(4, 7)	(5, 7)	(6, 7)
8	(1, 8)	(2, 8)	(3, 8)	(4, 8)	(5, 8)	(6, 8)

Primeiramente, Janaína e Ricardo organizaram o espaço amostral da soma de pontos dos lançamentos do "dado honesto" em um quadro.

Espaço amostral da soma de pontos dos lançamentos do "dado honesto"					
$1 + 1 = 2$	$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 4$	$4 + 1 = 5$	$5 + 1 = 6$	$6 + 1 = 7$
$1 + 2 = 3$	$2 + 2 = 4$	$3 + 2 = 5$	$4 + 2 = 6$	$5 + 2 = 7$	$6 + 2 = 8$
$1 + 3 = 4$	$2 + 3 = 5$	$3 + 3 = 6$	$4 + 3 = 7$	$5 + 3 = 8$	$6 + 3 = 9$
$1 + 4 = 5$	$2 + 4 = 6$	$3 + 4 = 7$	$4 + 4 = 8$	$5 + 4 = 9$	$6 + 4 = 10$
$1 + 5 = 6$	$2 + 5 = 7$	$3 + 5 = 8$	$4 + 5 = 9$	$5 + 5 = 10$	$6 + 5 = 11$
$1 + 6 = 7$	$2 + 6 = 8$	$3 + 6 = 9$	$4 + 6 = 10$	$5 + 6 = 11$	$6 + 6 = 12$

Após construírem o espaço amostral, para responder à primeira pergunta, verificaram que a soma 7 é a que aparece mais vezes. Como ela aparece 6 vezes de um total de 36, a probabilidade será de $\frac{6}{36}$, ou seja, $\frac{1}{6}$.

Para responder à segunda pergunta, notaram que a soma 2 e a soma 12 só apareceram uma vez cada uma. Portanto, a probabilidade de cada uma aparecer é $\frac{1}{36}$.

Para a terceira pergunta, verificaram que as três menores somas são: $2(1 + 1)$; $3(1 + 2)$; e $3(2 + 1)$. Como a probabilidade de obter cada soma é $\frac{1}{36}$, fizeram o seguinte cálculo:

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Para completar a resposta a essa pergunta, consideraram que há 36 possibilidades, e que cada uma tem $\frac{1}{36}$ de probabilidade de ocorrer. Desse modo, calcularam:

$$36 \cdot \frac{1}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

Logo, constataram que a soma de todas as probabilidades é igual a 1.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

7 Em um jogo de tabuleiro são usados um "dado honesto" de 6 faces, numerado de 1 a 6, e outro de 8 faces, numerado de 1 a 8. Em cada rodada, os jogadores lançam os dois "dados honestos" simultaneamente.

7. a) Resposta em *Orientações*.

a) Determine o espaço amostral do lançamento simultâneo desses dois "dados honestos".

b) Qual é a probabilidade de saírem os números 7 e 5 em um lançamento? **7. b)** $\frac{1}{48}$

c) Qual é a probabilidade de saírem os números 6 e 5 em um lançamento? **7. c)** $\frac{1}{24}$

d) Considerando a soma dos números nos dois "dados honestos" em um lançamento, qual é a probabilidade de a soma dos pontos resultar em um número par? **7. d)** $\frac{1}{2}$

8 Um sorteio será realizado entre os estudantes de quatro turmas diferentes da escola de Lúcio. Ele verificou a quantidade de estudantes de cada turma, calculou as probabilidades correspondentes e registrou:

- Probabilidade de o estudante sorteado ser da turma A: $\frac{1}{6}$
- Probabilidade de o estudante sorteado ser da turma B: $\frac{1}{4}$
- Probabilidade de o estudante sorteado ser da turma C: $\frac{1}{3}$
- Probabilidade de o estudante sorteado ser da turma D: ▬

Considerando que os cálculos de Lúcio estejam corretos, qual é a probabilidade de um estudante da turma D ser sorteado? **8.** $\frac{1}{4}$

9 Fábio e Cecília fazem aula em uma escola de dança. A turma deles, com ambos incluídos, possui 14 alunos, sendo 6 homens e 8 mulheres. No fim do ano, um rapaz e uma moça serão escolhidos, de forma aleatória, para fazer uma apresentação.

a) Quantas possibilidades de casais diferentes existem? **9. a)** 48

b) Qual é a probabilidade de Fábio ser escolhido? **9. b)** $\frac{1}{6}$

c) Qual é a probabilidade de Cecília ser escolhida? **9. c)** $\frac{1}{8}$

d) Qual é a probabilidade de Fábio e Cecília serem escolhidos? **9. d)** $\frac{1}{48}$

10 Uma indústria de brinquedos fabrica a mesma boneca com algumas variações de roupas e tons de cabelo. Essas bonecas são comercializadas em "saquinhos surpresa", em que não é possível verificar a combinação de roupas antes da compra. A seguir são apresentadas algumas variações.

CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Conforme as opções acima, de quantas maneiras diferentes essa boneca pode ser vendida? **10. a)** 18 maneiras diferentes.

b) A mãe de Mariana comprou uma dessas bonecas. Qual é a probabilidade de ela ter comprado uma boneca de cabelo preto, vestido amarelo e sapato preto? **10. b)** $\frac{1}{18}$

11 Ana, Renata e Daniel estão participando da gincana da escola, mas em equipes diferentes. A equipe de Ana tem 14 participantes, a de Renata tem 13 participantes e a de Daniel, 15 participantes. Será sorteado um integrante de cada equipe para a execução de uma das provas da gincana.

a) De quantas maneiras diferentes esse sorteio poderá ser realizado? **11. a)** 2730 maneiras diferentes.

b) Qual é a probabilidade de os sorteados serem Ana, Renata e Daniel? **11. b)** $\frac{1}{2\,730}$

12 Pense em um experimento aleatório e elabore duas perguntas em que um dos eventos tenha mais de 50% de probabilidade de ocorrer e em que o outro evento tenha 50% de probabilidade de ocorrência. Apresente seu problema a um colega para que ele possa confirmar as probabilidades previstas. **12.** Resposta pessoal.

- Para determinar a probabilidade pedida na **atividade 8**, os estudantes deverão considerar que a soma das probabilidades é igual a 1. Pode-se ampliar essa atividade e solicitar que determinem a quantidade de estudantes de cada turma, considerando que o total seja de 120 estudantes.
- As atividades de elaboração de questões são oportunidades interessantes de os estudantes mobilizarem seu repertório. Assim, para a **atividade 12** ajude-os a pensar em situações com as quais já trataram.

Uma fonte interessante de situações-problema envolvendo probabilidades é o lançamento de "dados honestos". Procure fazê-los pensar em eventos complementares, como resultados pares ou ímpares, resultados primos ou não primos, três tipos de eventos, lançamento de dados que não são honestos etc.

129

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Possibilidades

• Na **atividade 1**, os estudantes devem se atentar aos detalhes fornecidos no enunciado. Por exemplo, é dito que os dados são "honestos". Verifique se todos compreendem que isso significa que a chance de "sair" qualquer uma das faces é a mesma. Além disso, o experimento é lançar simultaneamente dois "dados honestos" com 8 faces numeradas de 1 a 8. Pergunte para a turma com que sólido geométrico cada um desses dados se parece. Depois, proponha aos estudantes que indiquem todas as possibilidades de resultado desse experimento em um quadro.

• Na **atividade 2**, para poder quantificar as diferentes possibilidades de montagem da cestinha, os estudantes podem armar uma árvore de possibilidades ou aplicar diretamente o princípio multiplicativo. Após concluírem a atividade, peça que compartilhem como a resolveram.

Probabilidade

• Na **atividade 3**, espera-se que os estudantes percebam que, como há 11 bolas na urna, a probabilidade de sortear uma bola de cor preta é de 5 em 11 ou $\frac{5}{11}$. Você pode ampliar a proposta desta atividade e pedir que determinem a probabilidade de uma pessoa sortear uma bola azul. Espera-se que eles concluam que essa probabilidade é de 6 em 11 ou $\frac{6}{11}$. Verifique como determinaram essa última probabilidade. É possível que alguns estudantes tenham calculado $1 - \frac{5}{11}$.

• Na **atividade 4**, reforce que espaço amostral são todos os resultados possíveis que podem ser obtidos ao lançar o "dado honesto". A probabilidade de "sair" a letra D é de 1 em 6 ou $\frac{1}{6}$, uma vez que, o experimento é equiprovável. Após concluírem, você pode propor aos estudantes que elaborem outras questões envolvendo o "dado honesto" descrito na atividade.

• Na **atividade 5**, espera-se que os estudantes concluam que a probabilidade de sortear um estudante que não usa óculos é de 30 em 50 ou $\frac{30}{50}$ ou $\frac{3}{5}$ (**item a**) e que a probabilidade de sortear um estudante que usa óculos é de 20 em 50 ou $\frac{20}{50}$ ou $\frac{2}{5}$ (**item b**). Caso ache conveniente, explore com os estudantes como determinar a probabilidade pedida no **item b** com base na probabilidade calculada no **item a**.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Possibilidades

Situações em que conhecemos os resultados possíveis mas nas quais não podemos assegurar o resultado final são chamadas de **experimentos aleatórios**.

Todas as possibilidades, ou seja, todos os resultados possíveis em um experimento aleatório compõem o **espaço amostral** desse experimento.

Princípio multiplicativo

Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, *A* e *B*. Se *A* ocorrer de *m* maneiras e se, para cada uma delas, *B* pode ocorrer de *n* maneiras, o número de maneiras que o acontecimento pode ocorrer é $m \cdot n$.

Esse princípio pode ser estendido para três ou mais etapas.

1. Quantos resultados possíveis podemos obter, ao lançar simultaneamente dois "dados honestos" com 8 faces numeradas de 1 a 8?
1. 64 resultados possíveis.

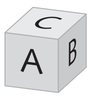
2. Um restaurante realizou um trabalho comunitário e ofertou a moradores em situação de rua uma cestinha com alguns itens para o café da manhã. Para a montagem da cesta, o restaurante disponibilizou 3 opções de café, 2 opções de pães e 4 opções de patês. Quantas possibilidades diferentes de café da manhã havia para os moradores em situação de rua? 2. 24 possibilidades diferentes.

Probabilidade

A **probabilidade** *P* da ocorrência de um evento é uma medida que pode assumir um valor de 0 a 1 e é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número de elementos do espaço amostral.

3. Em uma urna há 6 bolas azuis e 5 bolas pretas. Qual é a probabilidade de uma pessoa sortear uma bola de cor preta? 3. $\frac{5}{11}$

4. Suponha que um "dado honesto" que tenha em cada uma de suas faces as letras A, B, C, D, E e F será lançado.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

4. a) {A, B, C, D, E, F}

a) Qual é o espaço amostral desse experimento?

b) Qual é a probabilidade de "sair" a letra D na face superior ao lançar esse "dado honesto"? 4. b) $\frac{1}{6}$

5. Em uma sala de aula há 50 estudantes matriculados, dos quais 20 usam óculos e 30 não usam. Um estudante será sorteado. Determine a probabilidade desse estudante:

a) não usar óculos; 5. a) $\frac{3}{5}$

b) usar óculos. 5. b) $\frac{2}{5}$

6. Considere uma sequência com os números: 2, 3, 4, 5, 8, 11, 12, 15, 16, 17, 19, 21. Ao escolher um desses números ao acaso, qual é a probabilidade de o número escolhido:

a) ser par? 6. a) $\frac{5}{12}$

b) ser ímpar? 6. b) $\frac{7}{12}$

7. Júlia separou de dois naipes de um baralho apenas cartas de Ás até 7 e sorteou uma carta de cada naipe. Em seguida, pediu a João que tentasse adivinhar quais cartas ela tinha sorteado.

a) Copie no caderno o quadro abaixo referente ao espaço amostral desse experimento e complete-o. 7. a) Resposta em *Orientações*.

Espaço amostral						
Ás, Ás	2, Ás	3, Ás	4, Ás	5, Ás	6, Ás	
Ás, 2	2, 2		4, 2	5, 2		
		3, 3				
		3, 4	4, 4			
Ás, 5						
Ás, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6	
Ás, 7			4, 7	5, 7	6, 7	

b) Qual é a probabilidade de João acertar as duas cartas? 7. b) $\frac{1}{49}$

c) Qual é a probabilidade de Júlia ter sorteado duas cartas de mesmo valor? 7. c) $\frac{7}{49}$

d) Que dica Júlia poderia dar a João para que a probabilidade de ele acertar fosse de $\frac{1}{7}$? Converse com o professor e os colegas.

7. d) Espera-se que os estudantes percebam que, se Júlia contar qual é o valor de uma das cartas, a probabilidade de João acertar passa a ser $\frac{1}{7}$.

130

• A **atividade 6** apresenta uma sequência numérica aleatória. Oriente os estudantes a separar os números pares e ímpares dessa sequência antes de determinar as probabilidades pedidas nos **itens a** e **b**.

• Resposta do **item a** da **atividade 7**:

Espaço amostral						
Ás, Ás	2, Ás	3, Ás	4, Ás	5, Ás	6, Ás	7, Ás
Ás, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2	7, 2
Ás, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3	7, 3
Ás, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4	7, 4
Ás, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5	7, 5
Ás, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6	7, 6
Ás, 7	2, 7	3, 7	4, 7	5, 7	6, 7	7, 7

É hora de extrapolar

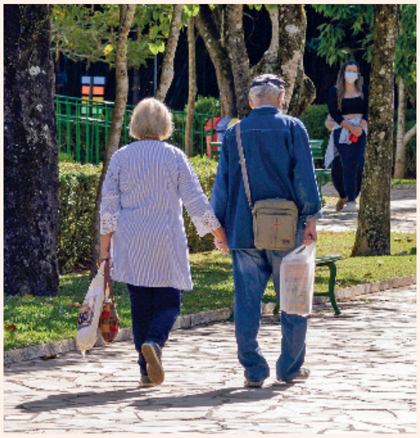
FORMAÇÃO CIDADÃ · SAÚDE

Faça as atividades no caderno.

Quais são os direitos dos idosos?

Segundo a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD), realizada pelo IBGE, o número de idosos brasileiros atingiu a marca de 34 milhões no quarto trimestre de 2019, representando 16,2% da população do país. As projeções do IBGE para a população brasileira apontam que esse percentual dobrará até o ano de 2045. Por isso, é fundamental que busquemos formas de assegurar os direitos e atender às necessidades dessa parcela expressiva da população do nosso país e também nos preparar para essa longa fase da vida.

Dados obtidos em: http://www.dieese.org.br/boletimespecial/2020/boletimEspecial01.html. Acesso em: 4 jul. 2022.



JOÃO PRUDENTE/PULSAR IMAGENS

Idosos caminhando no Parque das Águas em São Lourenço (MG). Foto de 2021.

Objetivo: Pesquisar os direitos dos idosos; analisar informações do *Relatório Mundial de Envelhecimento e Saúde*, da Organização Mundial da Saúde; pesquisar os cuidados com a saúde do idoso, e produzir e divulgar uma cartilha sobre os direitos dos idosos e com dicas de prevenção de queda para a população.

Etapa 1: Pesquisa sobre os direitos dos idosos no Brasil.

1. Responda às questões a seguir.
   a) A partir de que idade uma pessoa é considerada idosa pela legislação brasileira? **1. a)** 60 anos
   b) Qual(ais) direito(s) dos idosos você conhece? **1. b)** Resposta pessoal.

2. Reúnam-se em grupo e pesquisem na internet o *Estatuto do Idoso*. A pesquisa deverá abranger o ano em que foi criado, os objetivos, a categoria de pessoas incluída no estatuto e os principais direitos assegurados aos idosos. Selecionem pelo menos oito direitos. **2.** Resposta pessoal.

3. Comparem as respostas da atividade 1 aos resultados da pesquisa da atividade 2. Depois, respondam às questões a seguir.
   a) A classificação de idoso que vocês consideravam inicialmente está de acordo com a encontrada no estatuto? **3. a)** Resposta pessoal.
   b) Vocês tinham conhecimento dos direitos dos idosos? **3. b)** Resposta pessoal.
   c) Vocês acham que a população idosa tem conhecimento desses direitos? **3. c)** Resposta pessoal.

4. Elaborem uma lista única para a turma com todos os direitos dos idosos levantados na pesquisa. **4.** Resposta pessoal.

Etapa 2: Análise de dados do *Relatório Mundial de Envelhecimento e Saúde* da OMS.

5. Em maio de 2020, a Assembleia Geral da ONU declarou que 2021-2030 será a Década para um Envelhecimento Saudável. De acordo com a Organização Pan-Americana da Saúde (OPAS), "embora as pessoas vivam mais tempo, isso não significa que elas estejam vivendo saudavelmente e tendo suas necessidades atendidas", pois ainda ocorrem muitos erros e falta de atendimentos.

   Dados obtidos em: http://www.paho.org/pt/decada-do-envelhecimento-saudavel-nas-americas-2021-2030 Acesso em: 12 jul. 2022.

   a) Vocês concordam com a afirmação feita no texto? **5. a)** Resposta pessoal.
   b) Vocês conseguem identificar características que indiquem a qualidade de vida dos idosos que conhecem? **5. b)** Resposta pessoal.

- O **item b** da **atividade 1**, retoma uma das questões propostas na abertura desta Unidade. Espera-se que os estudantes mencionem alguns direitos dos idosos como isenção em transporte público, atendimento preferencial no Sistema Único de Saúde (SUS) e outros órgãos públicos, vagas exclusivas no transporte público e vagas em estacionamentos públicos e privados, medicamentos gratuitos etc.
- Na **atividade 2**, os estudantes deverão realizar uma pesquisa sobre o Estatuto do Idoso (Lei Federal 10.741/2003), que regula os interesses e as garantias para a proteção das pessoas com idade a partir de 60 anos.

É hora de extrapolar

BNCC:

- Competências gerais 4, 7, 9 e 10 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 5, 6, 7 e 8 (as descrições estão na página VII).

Temas contemporâneos transversais:

FORMAÇÃO CIDADÃ · SAÚDE

A seção propõe o fechamento da Unidade por meio de um trabalho colaborativo que explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de uma cartilha, que será compartilhada com a comunidade escolar.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a seção é dividida em etapas que promovem:

- Entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado.
- Pesquisa.
- Elaboração, em grupo, do produto proposto.
- Apresentação e exposição do produto.
- Reflexão e síntese do trabalho.

As etapas de pesquisa e elaboração da cartilha podem ser realizadas extraclasse. Verifique o perfil dos estudantes e oriente-os com relação ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho.

A seção também favorece o desenvolvimento das competências gerais **4**, **7**, **9** e **10** e das competências específicas **5**, **6**, **7** e **8**, procurando mobilizar conteúdos estudados nos capítulos que integram a Unidade. Portanto, é recomendável trabalhar a seção depois de estudar os capítulos, mas, se preferir trabalhar as etapas da seção à medida que os capítulos forem estudados, atente para os conhecimentos prévios necessários.

Pergunte aos estudantes por que o número de idosos tende a crescer nos próximos anos para verificar se eles relacionam esse crescimento ao aumento da expectativa de vida no país. Se achar oportuno, em parceria com o professor de Geografia, aprofunde os estudos sobre as projeções de crescimento e envelhecimento da população, as pirâmides etárias e as relações entre a distribuição etária da população e o desenvolvimento dos países.

- Para realizar a atividade 6, separe a turma em dois grupos: um deve defender que o gasto com as pessoas mais velhas é um investimento e o outro deve defender a posição contrária. É interessante que os estudantes entendam as ideias das pessoas que consideram o gasto com pessoas idosas um custo para que possam contra-argumentar.
- No item b da atividade 7, espera-se que os estudantes percebam que esse grupo de pessoas apresenta mobilidade reduzida e maior risco de queda em um veículo em movimento. Se achar conveniente, verifique se os estudantes já vivenciaram situações de desrespeito ao direito desse grupo de pessoas e o que eles acham que pode ser feito em relação a esse problema.
- Para responder à questão do item c da atividade 7, retome com os estudantes como é feito o cálculo de probabilidade. Resposta: $\frac{6}{46}$.

Explore a plotagem de gráficos sobre as projeções da população brasileira. Para isso, acesse o site https://www.ibge.gov.br/estatisticas/sociais/populacao/9109-projecao-da-populacao.html?=&t=resultados (acesso em: 17 ago. 2022) e faça o download da planilha eletrônica com os valores das projeções. Os estudantes podem fazer gráficos de segmentos para visualizar o aumento da população idosa no país.

7. a) Os grupos que possuem o direito ao assento preferencial em transportes públicos são: pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida, gestantes, lactantes, pessoas acompanhadas de crianças de colo, autistas, idosos e obesos.

6. Também de acordo com o relatório: "o gasto com populações mais velhas é um investimento, não um custo". Leiam o trecho a seguir e depois respondam à pergunta.

> **O gasto com populações mais velhas é um investimento, não um custo**
>
> Os gastos em sistemas de saúde, cuidados de longo prazo e ambientes propícios mais amplos são frequentemente retratados como custos. Este relatório assume uma abordagem diferente. Essa abordagem considera os gastos como investimentos que permitem a capacidade e, portanto, o bem-estar das pessoas maiores. Esses investimentos também ajudam as sociedades a atender suas obrigações relacionadas aos direitos fundamentais das pessoas mais velhas. Em alguns casos, o retorno sobre esses investimentos é direto (sistemas de saúde melhores conduzem a uma melhor saúde, que permite maior participação e bem-estar). Outros retornos podem ser menos óbvios, porém exigem o mesmo grau de consideração: por exemplo, investimento em cuidado de longo prazo ajudará pessoas com perda significativa de capacidade a manter vidas dignas e também pode permitir que as mulheres permaneçam no mercado de trabalho, além de promover a coesão social por meio do compartilhamento de riscos em uma comunidade.
>
> [...]
>
> Organização Mundial da Saúde. **Relatório Mundial de Envelhecimento e Saúde**, 2015. p. 11.

- O que vocês diriam a uma pessoa que acredita que o gasto com idosos é um custo e que não se deveria reservar recursos para cuidar dessa parcela da população? Como vocês a convenceriam do contrário?

6. Respostas pessoais.

Etapa 3: Análise de dados sobre o risco de quedas entre os idosos.

7. Um dos direitos garantidos pelo *Estatuto do Idoso* é a determinação de assentos preferenciais identificados nos transportes públicos. A imagem a seguir mostra os grupos de pessoas que têm direito ao uso dos assentos preferenciais em transportes públicos.

7. b) Espera-se que os estudantes respondam que é importante porque esse grupos têm mobilidade reduzida e os assentos preferenciais são uma garantia de que vão conseguir se acomodar nos transportes públicos.

ALEXANDRE TOKITAKA/PULSAR IMAGENS

a) Quais são os grupos de pessoas que possuem esse direito?

b) Por que é importante que esses grupos tenham direito aos assentos preferenciais?

c) Se em um ônibus há 46 assentos, sendo 6 deles preferenciais, e um jovem ocupa, aleatoriamente, um dos assentos, qual é a probabilidade de ele ocupar um assento preferencial?

7. c) $\frac{6}{46} = \frac{3}{23}$, ou seja, aproximadamente 13%

8. Segundo o Instituto Nacional de Traumatologia e Ortopedia do Ministério da Saúde, "a queda é um evento bastante comum e devastador em idosos. Embora não seja uma consequência inevitável do envelhecimento, pode sinalizar o início de fragilidade ou indicar doença aguda. Além dos problemas médicos, as quedas apresentam custo social, econômico e psicológico enormes, aumentando a dependência e a institucionalização. Estima-se que há uma queda para um em cada três indivíduos com mais de 65 anos, e que um em vinte daqueles que sofreram uma queda sofram uma fratura ou necessitem de internação. Dentre os mais idosos, com 80 anos ou mais, 40% caem a cada ano. Dos que moram em asilos e casas de repouso, a frequência de quedas é de 50%. A prevenção de quedas é tarefa difícil devido à variedade de fatores que as predispõem".

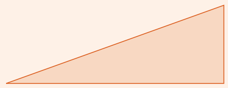
As normas que tratam do funcionamento das instituições destinadas ao atendimento de idosos (Portaria nº 810, de 22 de setembro de 1989) dizem que "os acessos ao prédio deverão possuir rampa com inclinação máxima de 5%, largura mínima de 1,50 m, dotada de guarda-corpo e corrimão, piso revestido com material não derrapante, que permita o livre rolamento de cadeiras de rodas, inclusive".

8. a) Espera-se que os estudantes respondam que as rampas são mais indicadas que as escadas porque exigem menos esforço de quem as utiliza, principalmente das pessoas que utilizam cadeiras de roda para se locomover.

a) Por que as rampas são mais indicadas que as escadas?

b) A seguir, temos o projeto de uma rampa que não é adequada ao uso pelos idosos. Sabe-se que, para adequá-la, é preciso diminuir a medida da abertura do ângulo de inclinação pela metade.

8. b) Resposta em *Orientações*.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso na atividade **8**.

- Determinem a medida da abertura do ângulo de inclinação do projeto da nova rampa usando apenas régua e compasso.
- Descrevam o passo a passo.

9. Os temas a seguir se referem à prevenção de acidentes com idosos. Escolham um deles para pesquisar e, depois, listem dicas. **9.** Resposta pessoal.

- **TEMA 1**: Dicas gerais para prevenir quedas.
- **TEMA 2**: Orientações e modificações para o quarto visando à prevenção de quedas.
- **TEMA 3**: Modificações na sala e no corredor para prevenir quedas.
- **TEMA 4**: O que mudar na cozinha para prevenir quedas.
- **TEMA 5**: Como evitar quedas em escadas.

Etapa 4: Confecção de uma cartilha coletiva.

10. Agora, vocês vão elaborar uma cartilha informativa. Cada página deve ter 16 cm × 10 cm.

Mas, antes, respondam: o que é uma cartilha informativa? Pesquisem essa forma de transmitir informações e tragam exemplos. **10.** Comentários em *Orientações*.

11. A cartilha deverá conter explicações sobre os direitos dos idosos e fornecer dicas para a prevenção de quedas. Retomem a lista de direitos dos idosos feita na etapa 1 e escolham um dos direitos para ser explicado pelo grupo. Organizem-se para que não haja abordagens repetidas entre os grupos.

12. Cada página elaborada deverá conter uma imagem produzida por vocês. Não usem imagens prontas de revistas, livros ou da internet. A imagem deverá se relacionar ao tema abordado na página da cartilha.

Discutam quais, quantas e como serão as imagens do grupo, produzam-nas e depois montem as páginas da cartilha com a imagem e o texto sobre o direito ou a dica escolhida.

13. Todos os grupos deverão elaborar uma capa para a cartilha.

Etapa 5: Apresentação e análise das páginas elaboradas e divulgação da cartilha.

14. Mostrem aos colegas as páginas elaboradas pelo grupo para que eles as analisem e comentem se as informações estão claras e se a imagem é adequada.

15. Anotem as dúvidas, as opiniões e as sugestões dos colegas.

16. Depois dos ajustes necessários, confeccionem a cartilha da turma.

Façam uma votação para escolher a capa da cartilha. Organizem a cartilha em duas partes: a primeira, com as páginas sobre os direitos dos idosos; a segunda, com dicas para prevenção de quedas.

17. Divulguem a cartilha da turma para a comunidade escolar.

Etapa 6: Síntese do trabalho realizado.

18. Algumas questões devem ser discutidas.

a) Por que é importante garantir com leis os direitos dos idosos? **18. a)** Resposta pessoal.

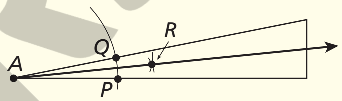
b) Apenas os idosos devem conhecer seus direitos ou estes devem ser conhecidos por toda a população? Por quê? **18. b)** Respostas pessoais.

c) É necessário se preparar física e financeiramente para a velhice? Como vocês fariam isso? **18. c)** Respostas pessoais.

19. Redijam um texto que descreva o processo realizado pelo grupo nas etapas 4 e 5. **19.** Resposta pessoal.

- Exemplos de resposta do **item a** da **atividade 8**: diminuem o risco de a pessoa pisar no lugar errado; com declividade baixa, as rampas exigem menos esforço dos joelhos; permitem a passagem de cadeiras de rodas; são mais adequadas para pessoas com dificuldade de locomoção etc.
- No **item b**, os estudantes podem traçar a bissetriz do ângulo de inclinação. Oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

1. Com a ponta-seca em *A*, faça uma circunferência de medida de comprimento de raio qualquer e nomeie por *P* e *Q* os pontos de intersecção da circunferência com os lados do ângulo.
2. Centramos o compasso em *P* e em *Q* e traçamos arcos que se cruzam na região interna do ângulo, obtendo um ponto *R*.
3. Trace a semirreta com origem em *A* e que passa por *R* para determinar a bissetriz do ângulo.



ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 9**, caso algum tema não tenha sido selecionado e mais de um grupo tenha escolhido o mesmo tema, converse com os estudantes para verificar se algum grupo trocaria de tema.
- Se achar conveniente, na **atividade 10**, abra uma discussão com a turma para que sejam indicadas as características de uma cartilha informativa: adequação ao público-alvo; linguagem clara e objetiva; visual leve e atraente; e fidedignidade das informações.
- Na **atividade 11**, é interessante solicitar à turma que se organize para que não haja repetições. Peça aos estudantes que pensem em estratégias para resolver os conflitos, caso ocorram, e auxilie-os no processo.

Sugestão de atividade para combater o *bullying*

É possível que alguns funcionários idosos tenham sofrido algum preconceito ou constrangimento no ambiente escolar. Desconsiderar a capacidade deles é uma das formas mais comuns de isso acontecer, o que leva o idoso a não se sentir querido e bem-vindo naquele ambiente. Para fazer com que esses funcionários se sintam acolhidos e motivados, é importante conscientizar toda a comunidade escolar. Oriente os estudantes a respeitar os direitos desses funcionários e ajudá-los sempre que possível.

Considere promover um projeto com os estudantes sobre como tornar o ambiente escolar mais acessível e acolhedor para os idosos. Proponha esses questionamentos para que reflitam: "O que na escola dificulta a locomoção dos idosos? Como melhorar? O que poderia ser feito para integrar melhor os jovens e os idosos da escola?".

Abertura da Unidade

BNCC:

- Competências gerais 3 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Motivar os estudantes para estudar os conteúdos da Unidade 3.
- Verificar se os estudantes reconhecem figuras geométricas planas em objetos ou imagens do cotidiano.
- Discutir com os estudantes a diversidade cultural dos povos indígenas.

Tema contemporâneo transversal:

Pergunte aos estudantes se já viram algum artesanato feito por comunidades indígenas. Reserve um tempo para ouvir as experiências deles. Depois, comente que esse tipo de artesanato é passado de geração para geração e pode ser realizado por meio de diferentes técnicas e empregando diversos materiais, como folhas de árvores, palhas, penas, fibras de plantas, entre outros. Os cestos eram utilizados inicialmente como utensílio doméstico e, depois, passaram a ser considerados artigos de decoração.

Ao questioná-los sobre o que sabem sobre a diversidade cultural dos povos indígenas, espera-se que alguns deles citem suas habitações, modos de vida, culinária etc. Nesse momento, você não precisa se aprofundar muito no assunto porque ele será retomado na seção *É hora de extrapolar*, proposta ao final desta Unidade.

Ao perguntar sobre as figuras geométricas planas que reconhecem nos cestos da imagem, peça para que justifiquem suas respostas. Você pode aproveitar a oportunidade para verificar o que sabem sobre essas figuras.

O contexto dessa abertura possibilita aos estudantes relacionar Matemática e Arte, o que permite o desenvolvimento da competência específica **3** de Matemática. As questões propostas, por sua vez, incentivam o diálogo e a interação favorecendo o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8**.

No **capítulo 7**, serão estudadas a congruência dos triângulos e a classificação dos quadriláteros. Já no **capítulo 8**, o foco são as medidas de área, volume e capacidade. Por fim, no **capítulo 9**, serão estudadas as equações do 2º grau com uma incógnita.

Unidade 3

ISMAR INGBER/PULSAR IMAGENS

Remos de madeira decorados da etnia Pataxó, em Porto Seguro (BA). Foto de 2019.

O artesanato indígena, com sua diversidade de cores e formatos, representa a preservação da cultura e a valorização da ancestralidade indígena.

O que você sabe sobre a diversidade cultural dos povos indígenas no Brasil? As figuras presentes no artesanato indígena se parecem com quais figuras geométricas planas? Ao final desta Unidade, você responderá a essas e outras questões.

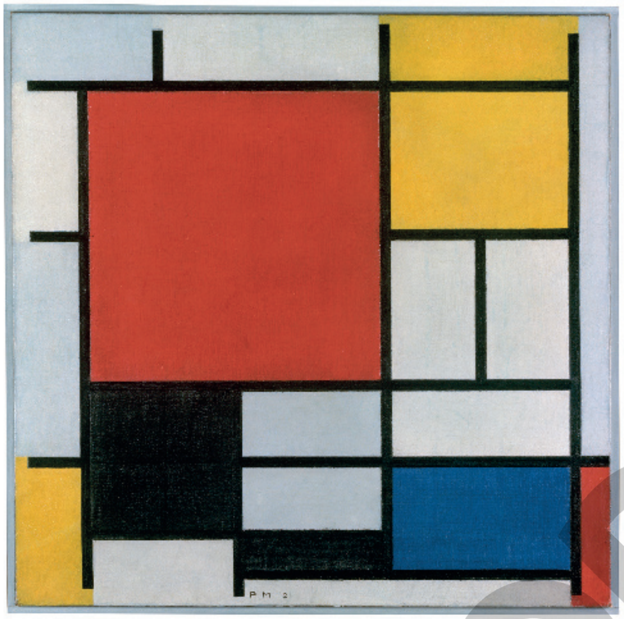
Na seção *É hora de extrapolar*, os estudantes vão analisar dados sobre a população indígena, pesquisar e analisar informações sobre os tipos de habitação dos povos indígenas e sobre a arte da cerâmica e da cestaria indígenas e realizar uma exposição de painéis para a comunidade escolar.

Capítulo 7

Triângulos e quadriláteros

Trocando ideias

Pieter Cornellis Mondrian (1872-1944), também conhecido como Piet Mondrian, foi um pintor holandês. Suas obras se caracterizam pela presença de linhas retas e de figuras retangulares, nas cores vermelha, azul, amarela, preta e branca, que ele considerava as cores elementares do Universo. Analise esta reprodução de uma de suas obras.



REPRODUÇÃO/MUSEU MUNICIPAL DE HAIA, HOLANDA

MONDRIAN, Piet. *Composição com vermelho, amarelo, azul e preto,* óleo sobre tela, 59,5 cm × 59,5 cm, 1921.

Conheça mais

No *site* do Museu de Arte Moderna de Nova York (EUA), é possível conhecer mais obras de Piet Mondrian.

Trocando ideias: primeiro item: exemplo de resposta: têm dois pares de lados paralelos e seus quatro ângulos internos são retos; segundo item: resposta pessoal.

- Cite duas características dos retângulos.
- Reúna-se com um colega e pesquisem obras de arte em que é possível identificar figuras que se parecem com triângulos e quadriláteros. Depois, compartilhem com a turma o que encontraram.

Neste capítulo, vamos estudar os **triângulos** e os **quadriláteros**.

Neste *Trocando ideias*, os estudantes são convidados a apreciar obras de arte, a valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e a exercitar a imaginação, o que favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3** e **6** da BNCC. Além disso, os estudantes realizam uma pesquisa, colocando em prática o espírito coletivo e a empatia com o próximo, o que possibilita o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8** de Matemática.

CAPÍTULO 7 – TRIÂNGULOS E QUADRILÁTEROS

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 2, 3, 6 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

- Levantar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre os retângulos.
- Verificar se os estudantes identificam triângulos e quadriláteros em obras de arte.

Antes de iniciar o trabalho com o *Trocando ideias*, se possível, mostre algumas obras de Piet Mondrian (1872-1944) para a turma e incentive-os a verbalizar o que mais lhes chamou atenção. Pergunte a eles se conseguem perceber algo em comum entre as obras. Após dar um tempo para que respondam, comente que essas são reproduções de obras de arte do artista holandês Pieter Cornellis Mondrian e que elas se caracterizam pela presença de linhas retas e de figuras retangulares, nas cores primárias (vermelho, azul e amarelo), que ele considerava as cores elementares do Universo. Em seguida, reserve um tempo para que analisem a reprodução da obra *Composição com grande plano vermelho, amarelo, preto, cinza e azul* presente na página e peça que façam as atividades propostas.

No primeiro item, eles devem citar duas características dos retângulos. Conforme eles forem dando suas respostas, registre-as na lousa. Eles podem citar que os retângulos têm dois pares de lados paralelos, tem quatro ângulos internos retos, têm lados opostos de mesma medida de comprimento, têm duas diagonais com mesma medida de comprimento etc. Esse é o momento oportuno para verificar o que sabem a respeito dessa figura.

No segundo item é solicitada uma pesquisa, a qual pode ser realizada na escola (em classe com livros ou na sala de informática) ou em casa. Oriente-os a investigar as obras de Rubem Valentim (1922-1991), Wassily Kandinsky (1866-1944) ou Luiz Sacilotto (1924-2003). Se julgar necessário, convide o(a) professor(a) de Arte para participar da condução desse trabalho. Reserve um momento para que compartilhem o que pesquisaram e discuta com eles algumas propriedades dos triângulos e quadriláteros que, eventualmente, conhecem.

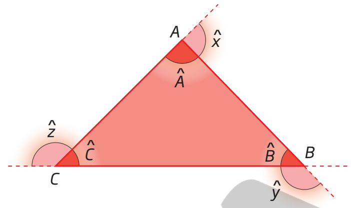
1 Triângulos

O **triângulo** é um polígono de três lados.

O formato triangular é muito utilizado na arquitetura e na engenharia pela rigidez que a estrutura triangular apresenta. Além disso, podemos observar o formato triangular em obras de arte, em revestimentos e em diferentes artigos de artesanato.

Vamos destacar alguns elementos deste triângulo *ABC*.

- **Vértices**: *A*, *B* e *C*.
- **Lados**: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.
- **Ângulos internos**: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.
- **Ângulos externos**: $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$.

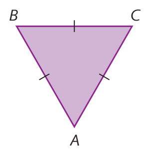


Classificação de triângulos

Os triângulos podem ser classificados quanto às medidas de comprimento dos lados e quanto às medidas de abertura dos ângulos.

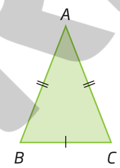
Quanto às medidas de comprimento dos lados

- **Equilátero**: os três lados são congruentes.



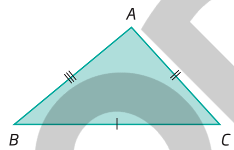
$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$

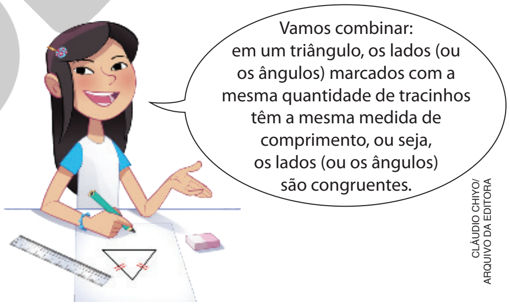
- **Isósceles**: dois lados são congruentes.



$\overline{AB} \cong \overline{AC}$

- **Escaleno**: não tem lados congruentes.





CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Observações

1. No triângulo isósceles *ABC* acima:
   - $\overline{BC}$ é a base;
   - $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos da base e, para qualquer triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes ($\hat{B} \cong \hat{C}$);
   - $\hat{A}$ é o ângulo do vértice oposto à base.
2. Em qualquer triângulo equilátero, todos os ângulos são congruentes.

Triângulos

Objetivos:
- Classificar triângulos.
- Reconhecer os pontos notáveis de um triângulo.

Justificativa

Classificar triângulos possibilita aos estudantes reconhecer que existem triângulos com diferentes características e os ajuda a desenvolver as capacidades de comparação e análise.

Reconhecer os pontos notáveis de um triângulo oferece aos estudantes a oportunidade de mobilizar diferentes conceitos como o de mediana, altura, bissetriz e mediatriz. Além disso, poderão explorar propriedades geométricas que envolvam esses pontos e resolver problemas aplicando essas propriedades.

Mapeando conhecimentos

Reproduza as **atividades 26** e **27** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e peça para que os estudantes as façam. Essas atividades servem para diagnosticar se recordam os principais elementos de um triângulo.

Em seguida, organize os estudantes em duplas e peça para que façam as seguintes atividades:

1. Construam um triângulo qualquer em uma folha de papel e tracem a mediana relativa a um dos lados desse triângulo. Depois, pergunte: “Quantas medianas tem um triângulo? Em quantos pontos elas se interceptam?”.
2. Construam um triângulo qualquer em uma folha de papel e tracem a bissetriz relativa a um dos ângulos desse triângulo. Depois, pergunte: “Quantas bissetrizes há nos ângulos internos de um triângulo? Em quantos pontos elas se interceptam?”.

Para as aulas iniciais

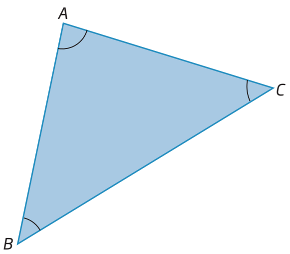
Retome as atividades da dinâmica inicial. Espera-se que eles percebam que, em um triângulo, há três medianas e três bissetrizes. É possível que alguns deles, por meio de experimentações, tenham percebido que as medianas de um triângulo se interceptam em um único ponto e as bissetrizes também. Caso tenham apresentado dificuldades, oriente-os a traçar as outras duas medianas no caso da **atividade 1** e as outras duas bissetrizes no caso da **atividade 2**. A proposta da **atividade 1**, pode ser ampliada com a seguinte atividade: “Meçam a distância entre o ponto de intersecção das medianas e os pontos médios dos lados e a distância entre o ponto de interseção e os vértices. O que vocês podem concluir?”. Após discutirem essa questão, você pode explorar a intersecção das alturas e mediatrizes de um triângulo.

Classificação de triângulos

Leia com o grupo a classificação de triângulos quanto às medidas do comprimento dos lados. Pergunte aos estudantes se o triângulo equilátero pode ser considerado isósceles. É importante destacar que para um triângulo ser isósceles basta que dois lados sejam congruentes, ou seja, um triângulo equilátero também pode ser considerado isósceles, pois tem os três lados congruentes.

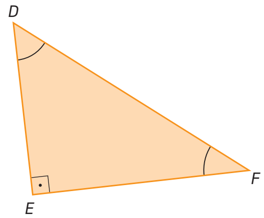
Quanto às medidas de abertura dos ângulos

- **Acutângulo**: os três ângulos internos são agudos.



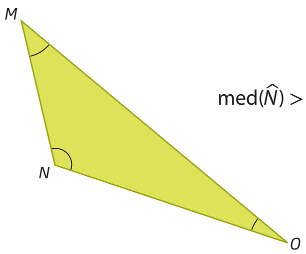
$med(\hat{A}) < 90°$, $med(\hat{B}) < 90°$ e $med(\hat{C}) < 90°$

- **Retângulo**: tem um ângulo interno reto.



$med(\hat{E}) = 90°$

- **Obtusângulo**: tem um ângulo interno obtuso.



$med(\hat{N}) > 90°$

Observação

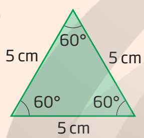
A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Assim, em um triângulo retângulo, há um ângulo reto e dois ângulos agudos, pois a soma das medidas de abertura dos outros dois ângulos deve ser 90°. O mesmo acontece com um triângulo obtusângulo: há um ângulo de medida de abertura maior que 90°; logo, os outros dois ângulos também são agudos, pois a soma de suas medidas de abertura é menor que 90°.

Atividades

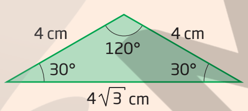
Faça as atividades no caderno.

1 Classifique cada um dos triângulos abaixo quanto às medidas de comprimento dos lados e às medidas de abertura dos ângulos.

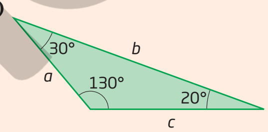
a)



b)



c)



1. a) equilátero e acutângulo
1. b) isósceles e obtusângulo
1. c) escaleno e obtusângulo

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

2 É possível construir um triângulo que tenha dois ângulos obtusos? Justifique sua resposta.

2. Não, pois a soma das medidas de abertura de dois ângulos obtusos é maior que 180° (soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer triângulo).

Relembre que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Aproveite para destacar que o triângulo equilátero tem todos os ângulos internos com abertura medindo 60°, e o triângulo isósceles tem pelo menos dois ângulos congruentes.

- Caso os estudantes encontrem dificuldades para resolver a **atividade 2**, sugira que utilizem três lápis e imaginem como seria o triângulo (caso fosse possível construí-lo). É esperado que eles percebam que, com dois ângulos obtusos, será impossível construir um triângulo.

Cevianas notáveis: mediana, altura e bissetriz

Aproveite a imagem para ilustrar a afirmação "O ponto G é o baricentro do $\triangle ABC$ e divide as medianas na razão de 1 para 2". Adote, como exemplo, a medida do comprimento de $\overline{AM_1}$ como 9 cm. Assim, $\overline{AG}$ terá 6 cm de comprimento e $\overline{GM_1}$ terá 3 cm. Cite outros valores para que eles calculem as medidas correspondentes.

Sugestão de leitura

Sugerimos a leitura das seções "Introdução", "Centro de gravidade" e "Equilíbrio no cotidiano" presentes no *site* de Ensino de Física *On-line* da USP, que explora conceitos de centro de gravidade e centro de massa a partir de uma perspectiva da Física.

Disponível em: http://www.cepa.if.usp.br/e-fisica/mecanica/basico/cap24/index.htm. Acesso em: 12 ago. 2022.

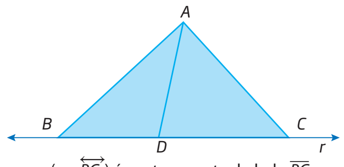
Cevianas notáveis: mediana, altura e bissetriz

Agora, vamos estudar a mediana, a altura e a bissetriz de um triângulo, que são chamadas de cevianas.

Ceviana é qualquer segmento de reta com uma extremidade em um vértice de um triângulo e a outra extremidade na reta suporte do lado oposto a esse vértice.

Reta suporte de um segmento de reta é a reta que contém esse segmento.

No triângulo ABC abaixo, $\overline{AD}$ é uma ceviana relativa ao lado $\overline{BC}$.

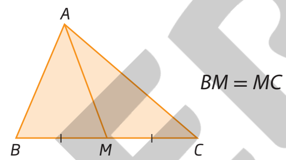


r (ou $\overleftrightarrow{BC}$) é a reta suporte do lado $\overline{BC}$.

Medianas de um triângulo

As **medianas** de um triângulo são as cevianas que têm uma extremidade em um dos vértices do triângulo e a outra extremidade no ponto médio do lado oposto a esse vértice.

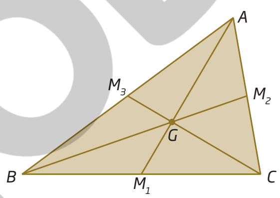
No triângulo ABC abaixo, $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$. Como M é ponto médio de $\overline{BC}$, $\overline{BM}$ e $\overline{MC}$ são congruentes.



Em um triângulo, podemos traçar uma mediana relativa a cada lado.

A intersecção das medianas de um triângulo determina um ponto chamado **baricentro** (***G***).

A seguir, temos que o ponto G é o baricentro do $\triangle ABC$, e pode-se provar que ele divide a medida do comprimento das medianas na razão de 1 para 2, ou seja:



$$\frac{M_1G}{AG} = \frac{M_2G}{BG} = \frac{M_3G}{CG} = \frac{1}{2}$$

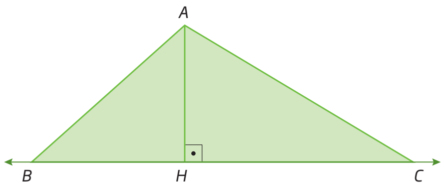
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

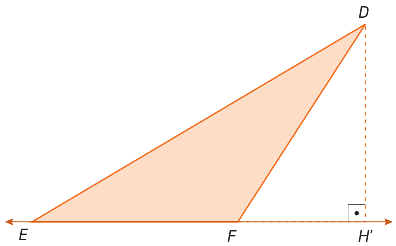
O baricentro de um objeto qualquer é considerado seu **centro de gravidade** (ou centro de massa). Isso quer dizer que, se apoiarmos um objeto em seu baricentro, ele ficará em equilíbrio.

Alturas de um triângulo

As **alturas** de um triângulo são as cevianas que têm uma extremidade em um dos vértices do triângulo e a outra extremidade na reta suporte do lado oposto ao vértice, formando um ângulo cuja abertura mede 90° com essa reta.

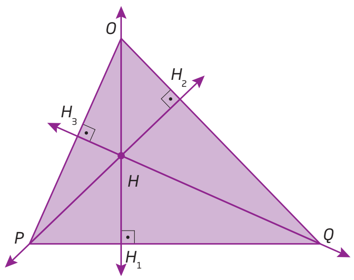


$\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

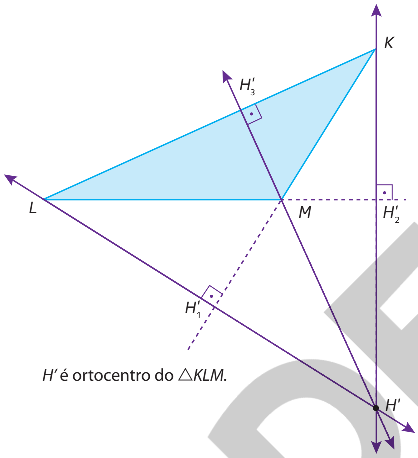


$\overline{DH'}$ é a altura relativa ao lado $\overline{EF}$.

A intersecção das retas suporte das três alturas determina um ponto chamado **ortocentro** (***H***).



H é o ortocentro do $\triangle OPQ$.



H' é ortocentro do $\triangle KLM$.

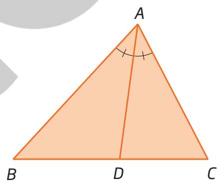
Observações

1. No triângulo acutângulo, o ortocentro é interno ao triângulo.
2. No triângulo retângulo, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.
3. No triângulo obtusângulo, o ortocentro é externo ao triângulo.

Bissetrizes de um triângulo

As **bissetrizes** internas de um triângulo são as cevianas que têm uma extremidade em um dos vértices do triângulo e a outra extremidade no lado oposto a esse vértice, dividindo cada ângulo interno em dois ângulos congruentes.

Neste triângulo ABC, $\overline{AD}$ é a bissetriz interna relativa ao ângulo $B\hat{A}C$.



$\text{med}(B\hat{A}D) = \text{med}(D\hat{A}C)$

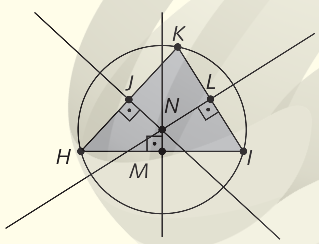
Comente com os estudantes sobre a necessidade da construção de retas suportes para traçarmos algumas alturas. Verifique se eles percebem essa necessidade ao traçar alturas em triângulos obtusângulos.

Pergunte aos estudantes se, ao traçarmos a bissetriz $\overline{AD}$, os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$ são congruentes. Espera-se que eles percebam que não, então aproveite para questionar se há algum caso particular em que isso poderia acontecer. A resposta a esse questionamento é sim, pois se o triângulo fosse isósceles, com $AB = AC$, ou se o triângulo fosse equilátero, a bissetriz em questão coincidiria com a mediana.

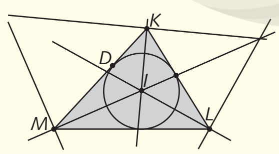
Enfatize aos estudantes que uma circunferência está inscrita em um polígono convexo quando tangencia internamente todos os lados do polígono. Peça a eles que observem que os pontos *D*, *E* e *F* não coincidem com os pontos *D'*, *E'* e *F'*.

Destaque aos estudantes que uma circunferência está circunscrita a um polígono quando todos os vértices do polígono pertencem à circunferência.

- Caso os estudantes tenham dificuldade para traçar as medianas solicitadas na **atividade 3**, retome o tópico "Mediana de um triângulo". Faça com que notem que, para determinar o baricentro de qualquer triângulo, basta traçar as medianas de dois lados quaisquer do triângulo.
- Na **atividade 4**, sugira aos estudantes que representem a circunferência inscrita no triângulo. Se tiverem dificuldades, comente que, para determinar uma circunferência, é preciso conhecer seu centro e a medida do comprimento do seu raio. O centro é o ponto de intersecção das bissetrizes e, para determinar o raio é preciso traçar uma reta perpendicular a um dos lados do triângulo, passando pelo incentro. Lembre-os de que basta traçar as bissetrizes internas de dois ângulos internos quaisquer do triângulo para determinar seu incentro.
- Se julgar conveniente, proponha a realização da **atividade 5** utilizando um *software* de Geometria dinâmica. Basta traçar as alturas relativas a dois lados quaisquer do triângulo para determinar seu ortocentro.
- A seguir, apresentamos as construções esperadas para a **atividade 6**. As medidas dos lados dos triângulos estão proporcionais ao solicitado no enunciado da atividade.
  - Para o item **a**:



  - Para o item **b**:

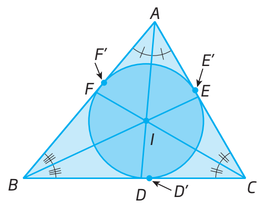


Oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

O ponto de intersecção das três bissetrizes de um triângulo é denominado **incentro** (***I***).

A bissetriz equidista dos lados que formam um ângulo; então, como o incentro é a intersecção das bissetrizes, esse ponto é equidistante dos três lados do triângulo, ou seja, a medida da distância entre o incentro e qualquer um dos lados do triângulo é sempre a mesma.

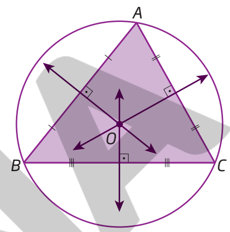
Essa propriedade permite traçar uma circunferência de centro *I* que intercepta cada lado do triângulo em um único ponto (D' em $\overline{BC}$, E' em $\overline{AC}$ e F' em $\overline{AB}$). Essa circunferência é **inscrita ao triângulo**.



I é o incentro do $\triangle ABC$,
$\overline{ID'} \cong \overline{IE'} \cong \overline{IF'}$

Observações

1. As **mediatrizes** de um triângulo são as mediatrizes de seus lados, ou seja, são as retas perpendiculares às retas suporte dos lados que passam pelo ponto médio do lado correspondente.
2. As mediatrizes dos lados de um triângulo se interceptam em um ponto chamado **circuncentro** (***O***).
3. A mediatriz equidista dos extremos de um segmento de reta; então, como o circuncentro é a intersecção das mediatrizes, esse ponto é equidistante dos três vértices do triângulo, ou seja, a medida da distância entre o circuncentro e qualquer um dos vértices do triângulo é sempre a mesma. Essa propriedade permite traçar uma circunferência de centro *O* que passa pelos três vértices do triângulo. Essa circunferência é **circunscrita ao triângulo**.
4. Em alguns triângulos, assim como ocorre com o ortocentro, o circuncentro pode ser interno ou externo ao triângulo.
5. O baricentro, o ortocentro, o incentro e o circuncentro são chamados de **pontos notáveis** de um triângulo.



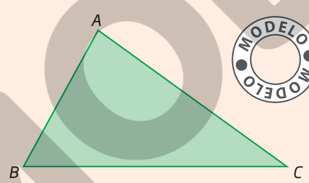
Atividades

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso nas atividades **3**, **4** e **6**.

Faça as atividades no caderno.

3 Utilizando régua e compasso, copie este triângulo no caderno, trace suas medianas e determine seu baricentro.

3. Comentário em *Orientações*.



4 Utilizando régua e compasso, construa, no caderno, um triângulo cujos lados tenham medidas de comprimento iguais a 6 cm, 5 cm e 8 cm. Em seguida, trace suas bissetrizes e determine seu incentro.

4. Comentário em *Orientações*.

5. Comentário em *Orientações*.

5 No caderno, desenhe um triângulo cujos lados tenham medidas de comprimento iguais a 7 cm, 4 cm e 6 cm. Em seguida, determine o encontro das alturas desse triângulo (ortocentro).

6 No caderno, desenhe um triângulo cujos lados tenham medidas de comprimento iguais a 6 cm, 7 cm e 8 cm. Depois, faça o que se pede.

a) Trace as mediatrizes dos lados, determinando o circuncentro do triângulo. Então, com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência que circunscreva esse triângulo.

b) Trace as bissetrizes dos ângulos, determinando o incentro do triângulo. Então, com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência inscrita nesse triângulo.

6. Comentário em *Orientações*.

Tecnologias digitais em foco

Pontos notáveis de triângulos isósceles e equiláteros

Nesta seção, vamos utilizar o GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor pode indicar, para explorar propriedades dos pontos notáveis de triângulos isósceles e equiláteros.

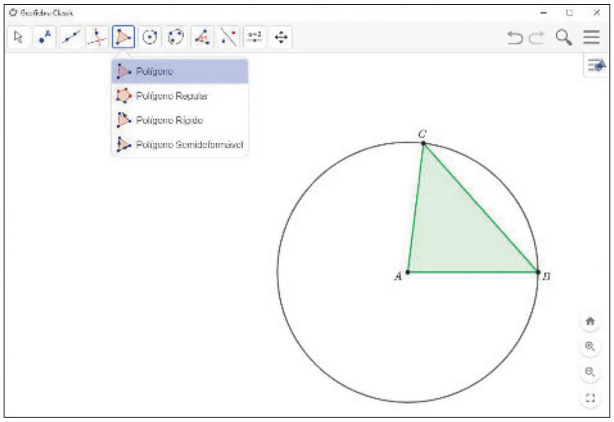
Construa

Siga os passos abaixo para construir um triângulo isósceles.

1º) Utilize a ferramenta e trace um segmento de reta $\overline{AB}$ qualquer.

2º) Utilize a ferramenta e trace a circunferência com centro em A passando por B.

3º) Escolha um ponto C qualquer na circunferência e, com a ferramenta , construa o triângulo com vértices nos pontos A, B e C.



O triângulo ABC é isósceles, pois $AB = AC$ (medidas de comprimento dos raios da circunferência).

4º) Utilize as ferramentas e e trace as medianas do triângulo. Depois, determine o baricentro (G).

5º) Esconda as construções, deixando visíveis apenas a mediana relativa à base e o baricentro.

6º) Utilize as ferramentas e e trace as alturas do triângulo. Depois, determine o ortocentro (H).

7º) Esconda as construções, deixando visíveis apenas a altura relativa à base e o ortocentro.

8º) Utilize as ferramentas e e trace as bissetrizes dos ângulos internos do triângulo. Depois, determine o incentro (I).

9º) Esconda as construções, deixando visíveis apenas a bissetriz relativa ao ângulo oposto à base e o incentro.

10º) Utilize a ferramenta e trace as mediatrizes dos lados do triângulo. Depois, determine o circuncentro (O).

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

- Competência geral 5 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 2 (a descrição está na página VII).
- Habilidade EF08MA15.

Objetivo:

Explorar as propriedades dos pontos notáveis de triângulos isósceles e equiláteros.

Pontos notáveis de triângulos isósceles e equiláteros

Nesta seção, os estudantes deverão construir, no GeoGebra, um triângulo isósceles e, depois, as suas medianas, alturas, bissetrizes, mediatrizes e, em seguida, identificar os pontos notáveis (baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro). Oriente-os a realizar os passos de 1 a 11. Após realizarem o 5º, 7º, 9º e 11º passos, dê uma pausa para que possam comparar as construções realizadas e tecer comentários.

As atividades propostas nesta seção podem ser realizadas com qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de acesso a computadores, a proposta pode ser adaptada para ser realizada com a utilização de papel e instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor etc).

No item **a** do *Explore*, na página seguinte, os estudantes vão movimentar os vértices do triângulo construído e verificar experimentalmente que a mediatriz, a altura e a mediana relativas à base e a bissetriz do ângulo oposto à base coincidem e estão contidas na reta que é a mediatriz relativa à base. No item **b**, eles devem observar que os pontos notáveis estão alinhados. Já no item **c**, os estudantes são convidados a construir um triângulo equilátero, determinar todos os pontos notáveis dele e movimentar os vértices desse triângulo para verificar experimentalmente que os pontos notáveis coincidem. É importante enfatizar que as investigações realizadas apenas sugerem que essas propriedades são válidas e que elas serão demonstradas após o estudo da congruência de triângulos.

Esse uso do GeoGebra contribui de forma significativa para o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC. Além disso, a atividade proporciona aos estudantes desenvolver o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **2** de Matemática.

Congruência de triângulos

BNCC:

- Competência específica 2 (a descrição está na página VII).
- Habilidade EF08MA14.

Objetivos:

- Compreender o conceito de congruência de triângulos.
- Reconhecer triângulos congruentes segundo um dos casos: LAL, ALA, LLL e LAA_o.

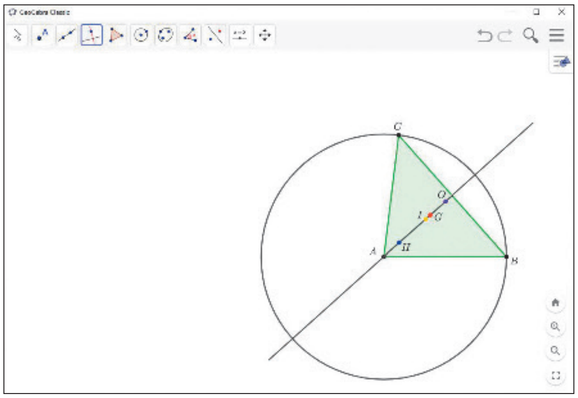
Justificativa

Compreender o conceito de congruência de triângulos amplia os conhecimentos dos estudantes sobre congruência de segmentos de reta e congruência de ângulos.

O reconhecimento de triângulos congruentes segundo um dos casos, LAL, ALA, LLL e LAA_o, ajuda a identificar triângulos congruentes sem a necessidade de verificar as seis congruências: três entre lados e três entre ângulos. Esse conhecimento, aliado à compreensão do conceito de congruência, é de grande valia também para demonstrar diferentes propriedades já estudadas e justificar algumas construções com régua e compasso que já realizaram.

Tecnologias digitais em foco

11º) Esconda as construções, deixando visíveis apenas a mediatriz relativa à base e o circuncentro.



Explore

a) Movimente os vértices do triângulo isósceles construído a fim de modificar sua configuração. O que acontece com a mediatriz, a altura e a mediana relativas à base $\overline{BC}$ e com a bissetriz relativa ao ângulo oposto a essa base?

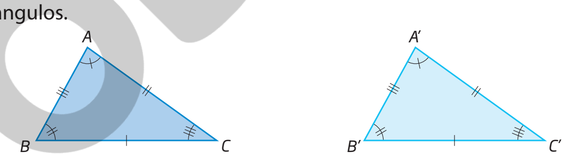
b) Os pontos notáveis do triângulo isósceles construído estão alinhados? Isso acontece mesmo quando você movimenta os vértices do triângulo?

c) Construa um triângulo equilátero e determine seus pontos notáveis (baricentro, ortocentro, incentro e circuncentro). Depois, movimente os vértices do triângulo. O que você nota em relação aos pontos notáveis?

Explore:
a) A altura, a mediana e a bissetriz coincidem e estão contidas na reta que é a mediatriz relativa à base.
b) Espera-se que os estudantes percebam que, em um triângulo isósceles, os pontos notáveis estão sempre alinhados.
c) Espera-se que os estudantes percebam que os pontos notáveis coincidem.

2 Congruência de triângulos

Analise estes triângulos.



Note que esses triângulos têm três pares de lados congruentes e três pares de ângulos congruentes. Se os recortássemos, poderíamos sobrepor um ao outro sem sobras ou faltas. Nesse caso, dizemos que esses triângulos são **congruentes** entre si. Podemos escrever:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \qquad \hat{A} \cong \hat{A}'$$
$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'} \quad \text{e} \quad \hat{B} \cong \hat{B}'$$
$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'} \qquad \hat{C} \cong \hat{C}'$$

142

Mapeando conhecimentos

Organize a sala em grupos e distribua para cada grupo uma folha de papel com três triângulos reproduzidos: dois deles devem ser congruentes e o outro não. Depois, oriente os grupos a reproduzir os três triângulos em uma folha de papel vegetal, recortar essas figuras e tentar sobrepor umas às outras. Depois, questione-os: “É possível sobrepor essas figuras? Quais delas?”. Depois, solicite que analisem os ângulos e os lados dos triângulos que coincidiram e pergunte: “O que podemos afirmar sobre a medida do comprimento dos lados correspondentes desses triângulos? E sobre as medidas das aberturas dos ângulos internos correspondentes?”.

Para as aulas iniciais

Explique aos estudantes que, quando os três lados e os três ângulos de dois triângulos são congruentes, esses triângulos são congruentes e que, quando dois triângulos são congruentes, os lados e os ângulos deles são congruentes. Depois, peça a eles que representem triângulos congruentes em uma folha de papel e compartilhem as representações feitas com um colega para que possam verificar se os lados e os ângulos correspondentes dos triângulos feitos pelo colega são congruentes. Certifique-se de que todos tenham régua e transferidor para realizar a tarefa.

Logo, o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *A'B'C'*. Indicamos essa congruência assim:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

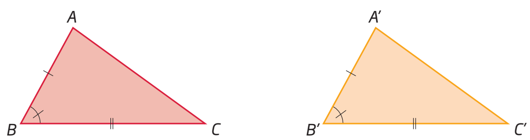
> Dois triângulos são congruentes quando os lados correspondentes e os ângulos correspondentes são congruentes.

Podemos concluir que dois triângulos são congruentes mesmo sem conhecer todas as medidas de comprimento dos lados e as medidas de abertura dos ângulos. Verifique a seguir os **casos de congruência de triângulos**.

1º caso de congruência: LAL (Lado-Ângulo-Lado)

Dois triângulos são congruentes quando dois lados e o ângulo compreendido entre eles são, respectivamente, congruentes.

Confira os triângulos *ABC* e *A'B'C'*.



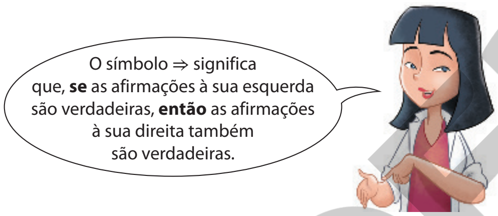
Temos:

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

$\hat{B} \cong \hat{B'}$ $\Rightarrow$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

Lemos: "implica".

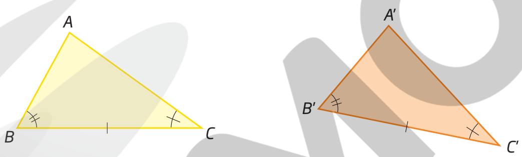


GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

2º caso de congruência: ALA (Ângulo-Lado-Ângulo)

Dois triângulos são congruentes quando um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado são, respectivamente, congruentes.

Analise os triângulos *ABC* e *A'B'C'*.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Temos:

$\hat{B} \cong \hat{B'}$

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ $\Rightarrow$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$\hat{C} \cong \hat{C'}$

(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

Comente com os estudantes que, para a congruência de triângulos, valem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

- Reflexiva: todo triângulo é congruente a si mesmo.
- Simétrica: se um triângulo ABC é congruente a um triângulo A'B'C', então o triângulo A'B'C' é congruente ao triângulo ABC.
- Transitiva: se um triângulo ABC é congruente a um triângulo DEF, e o triângulo DEF é congruente a um triângulo A'B'C', então o triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C'.

Ao propor as atividades de verificação sugeridas a seguir, oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

1o caso de congruência: LAL (Lado-Ângulo-Lado)

Antes de apresentar o caso de congruência LAL, proponha aos estudantes que utilizem régua e compasso para construir, em uma folha de papel, um triângulo no qual um dos ângulos tenha medida de abertura igual a 30° e esse ângulo seja formado por lados de medida de comprimento iguais a 6 cm e 4 cm. Depois, peça a eles que comparem os triângulos que fizeram com o dos colegas e verifiquem se são todos congruentes. Espera-se que concluam que sim.

Depois, faça a leitura coletiva do texto do livro com a turma. Desenvolva o exemplo na lousa se achar necessário. Chame a atenção deles para o modo como representamos dois triângulos que são congruentes (ABC A'B'C'). Esclareça que essa representação indica que o vértice A corresponde ao vértice A', o vértice B corresponde ao vértice B' e o vértice C corresponde ao vértice C'.

2o caso de congruência: ALA (Ângulo-Lado-Ângulo)

Solicite que construam dois triângulos. Ambos devem ter um lado com a mesma medida de comprimento e os dois ângulos adjacentes a esse lado devem ter a mesma medida de abertura. Verifique se percebem que os triângulos construídos são congruentes. Incentive-os a trocar ideias com os colegas.

Após o estudo do caso ALA, exiba um exemplo de triângulos que apresentam dois ângulos correspondentes congruentes e que tenham um dos lados com a mesma medida de comprimento, porém este lado não está compreendido entre os ângulos congruentes correspondentes. Pergunte para a turma se podemos afirmar que esses triângulos são congruentes. Espera-se que eles respondam que não.

3º caso de congruência:
LLL (Lado-Lado-Lado)

Antes de apresentar o caso de congruência LLL, proponha aos estudantes que utilizem régua e compasso para construir, em uma folha de papel, um triângulo com lados de medida de comprimento 7 cm, 4 cm e 6 cm. Depois, peça a eles que comparem os triângulos que fizeram com o dos colegas e verifiquem se são todos congruentes. Espera-se que concluam que sim.

Depois, faça a leitura coletiva do texto do livro com a turma. Desenvolva o exemplo na lousa se achar necessário.

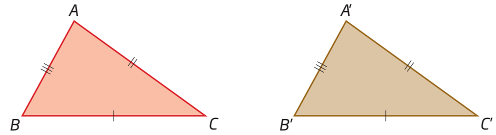
4º caso de congruência:
LAA_o (Lado-Ângulo-Ângulo oposto)

No 4º caso de congruência, utilizando as imagens como exemplo, comente que, quando falamos de ângulo oposto, estamos nos referindo ao ângulo formado no único vértice que não pertence ao segmento de reta $\overline{BC}$, que nesse caso foi considerado o lado (L).

3º caso de congruência: LLL (Lado-Lado-Lado)

Dois triângulos são congruentes quando os três lados são, respectivamente, congruentes.

Verifique os triângulos *ABC* e *A'B'C'*.



Temos:

$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$

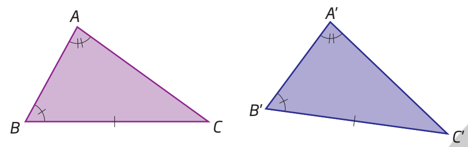
$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ $\Rightarrow$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

4º caso de congruência: LAA_o (Lado-Ângulo-Ângulo oposto)

Dois triângulos são congruentes quando um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado são, respectivamente, congruentes.

Confira os triângulos *ABC* e *A'B'C'*.



Temos:

$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

$\hat{B} \cong \hat{B}'$ $\Rightarrow$ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

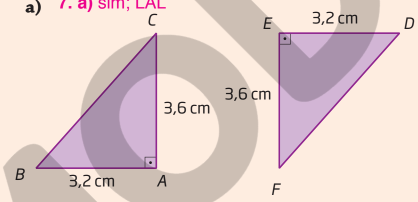
$\hat{A} \cong \hat{A}'$

Atividades

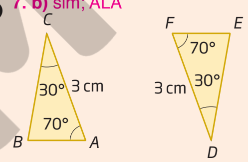
Faça as atividades no caderno.

7 Em cada item, verifique se os triângulos são congruentes e, em caso afirmativo, indique o caso correspondente.

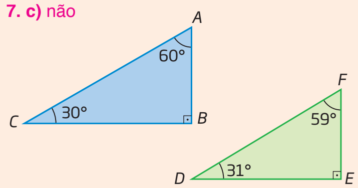
a) 7. a) sim; LAL



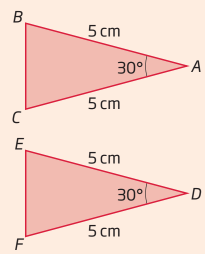
b) 7. b) sim; ALA



c) 7. c) não



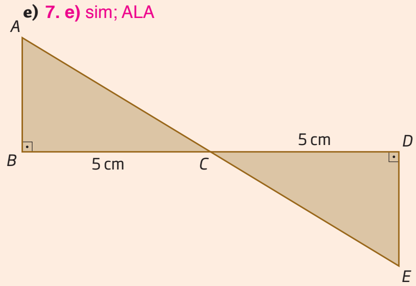
d) 7. d) sim; LAL



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

144

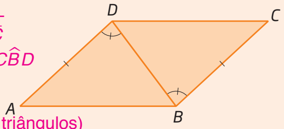
e) 7. e) sim; ALA



8 Os triângulos de cada item são congruentes. Indique qual caso garante a congruência e quais são os ângulos e lados correspondentes que justificam o caso de congruência.

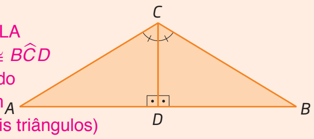
a) $\triangle ADB$ e $\triangle CBD$

8. a) caso LAL
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$
$A\hat{D}B \cong C\hat{B}D$
$\overline{DB}$ (lado comum aos dois triângulos)



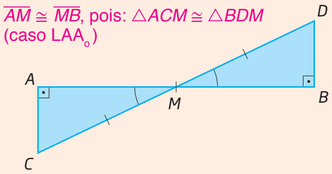
b) $\triangle CAD$ e $\triangle CBD$

8. b) caso ALA
$A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$
$\overline{CD}$ (lado comum aos dois triângulos)
$\hat{D}$ (ângulos retos)



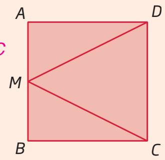
9 Por que podemos afirmar que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$?

9. $\overline{AM} \cong \overline{MB}$, pois: $\triangle ACM \cong \triangle BDM$ (caso LAA_o)

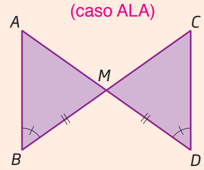


10 No quadrado $ABCD$, M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Prove que $\overline{MC} \cong \overline{MD}$.

10. $\overline{MC} \cong \overline{MD}$, pois: $\triangle AMD \cong \triangle BMC$ (caso LAL)



11 Justifique a congruência dos triângulos na figura abaixo. 11. $\triangle AMB \cong \triangle CMD$ (caso ALA)



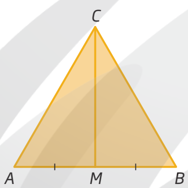
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

3 Justificativas de algumas propriedades e construções com régua e compasso

Demonstração da propriedade dos ângulos internos de um triângulo equilátero

Vamos demonstrar que, em qualquer triângulo equilátero, os três ângulos internos são congruentes, com 60° de medida de abertura cada um.

Considere o triângulo equilátero ABC abaixo e a mediana $\overline{CM}$ relativa ao lado $\overline{AB}$.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Temos que:

- $\overline{CM}$ é lado comum.
- $\overline{MA} \cong \overline{MB}$, pois M é ponto médio de $\overline{AB}$.
- $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, pois $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero.

Logo, pelo caso LLL: $\triangle CMA \cong \triangle CMB$.

Portanto, $\hat{A} \cong \hat{B}$ (I)

- Para a **atividade 10**, explique aos estudantes que uma prova é diferente de apenas mostrar ou enunciar uma propriedade. Devemos utilizar fatos previamente conhecidos para provar que alguma propriedade enunciada é verdadeira. Eventualmente, há mais de um caminho para chegarmos a essa conclusão. Portanto, os estudantes devem construir uma argumentação consistente e matematicamente verdadeira a partir das informações: $ABCD$ é quadrado e M é ponto médio de $\overline{AB}$ para chegar à conclusão de que $\overline{MC} \cong \overline{MD}$.

Justificativas de algumas propriedades e construções com régua e compasso

Objetivo:

Justificar algumas propriedades e construções com régua e compasso.

Justificativa

É importante que os estudantes percebam que propriedades, teoremas e procedimentos que estudam na Matemática podem ser demonstrados. Justificar propriedades e construções com régua e compasso permite a eles mobilizar conceitos e perceber como os raciocínios são encadeados. Nesse âmbito, eles podem perceber que a Matemática não é uma disciplina que se resume a um conjunto de fórmulas e regras que devem aplicar de forma acrítica.

Mapeando conhecimentos

Forme uma roda de conversa com a turma e pergunte quem sabe demonstrar ou justificar alguma propriedade da Matemática. Convide os estudantes que responderam que sabem para explicar aos demais colegas e fazer os registros da demonstração ou justificativa na lousa. Observe se distinguem as hipóteses e a tese e se conseguem encadear as ideias.

Para as aulas iniciais

Retome as demonstrações da dinâmica inicial e tire as eventuais dúvidas.

Propriedade dos ângulos internos de um triângulo equilátero

Nesta página e na seguinte, demonstra-se que os três ângulos de um triângulo equilátero são congruentes e medem 60° cada um. Recorde com a turma que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° e comente que esse resultado será utilizado na demonstração que vão estudar.

Desenvolva a demonstração do livro na lousa e complete-a com a participação da turma. É importante que eles identifiquem os triângulos semelhantes e argumentem com base nos critérios estudados anteriormente. Deixe que avaliem quando precisarão utilizar o fato de que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°.

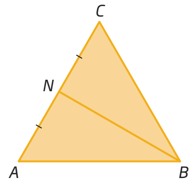
Justificativa da construção de bissetriz

Nesta página, justifica-se a construção com régua e compasso da bissetriz de um ângulo. Antes de apresentar essa justificativa, recorde o procedimento apresentado no capítulo **4**.

Oriente os estudantes quanto aos cuidados no manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

É importante que a justificativa desse procedimento seja feita com a participação da turma. Por isso, peça a eles que façam um levantamento das informações que sabem de antemão com base na construção realizada. Depois, pergunte: "Com base nessas informações, vocês conseguem identificar triângulos congruentes? Se sim, por qual critério? O que falta para concluir que $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz de $A\hat{O}B$?".

Considere agora a mediana $\overline{BN}$ relativa ao lado $\overline{CA}$.



Temos que:

- $\overline{BN}$ é lado comum.
- $\overline{NC} \cong \overline{NA}$, pois N é ponto médio de $\overline{AC}$.
- $\overline{CB} \cong \overline{AB}$, pois $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero.

Logo, pelo caso LLL: $\triangle BNC \cong \triangle BNA$.

Portanto, $\hat{C} \cong \hat{A}$ (II)

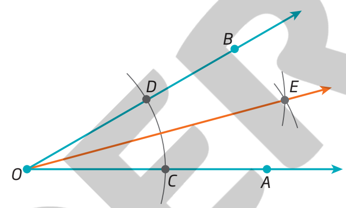
De I e II, temos: $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$

Como $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180°$, temos que: $\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 60°$

Assim, demonstramos que os ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes e medem, cada um, 60° de abertura.

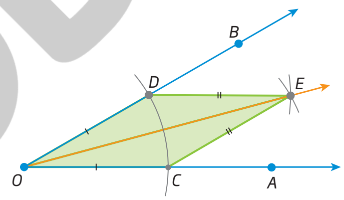
Justificativa da construção da bissetriz

A bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ foi construída seguindo o procedimento apresentado no capítulo 4.



Vamos verificar que, de fato, com os passos realizados, $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Considere o $\triangle DOE$ e o $\triangle COE$.



Com base na construção realizada, temos que $\overline{OD} \cong \overline{OC}$, $\overline{DE} \cong \overline{CE}$ e $\overline{OE}$ é lado comum aos triângulos.

Logo, pelo caso LLL: $\triangle DOE \cong \triangle COE$.

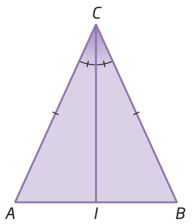
Então, $B\hat{O}E \cong A\hat{O}E$ e, portanto, $\overrightarrow{OE}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Demonstração da propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles

Vamos demonstrar que, em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

Considere o triângulo isósceles *ABC* abaixo com $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, sendo $\overline{CI}$ a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{C}$.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Temos que:

- $\overline{CI}$ é lado comum.
- $I\hat{C}A \cong I\hat{C}B$, pois $\overline{CI}$ é bissetriz.
- $\overline{CA} \cong \overline{CB}$, pois $\triangle ABC$ é um triângulo isósceles.

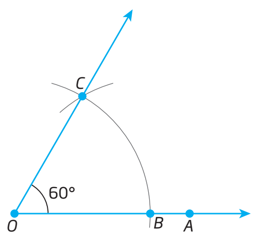
Logo, pelo caso LAL: $\triangle CIA \cong \triangle CIB$.

Portanto, $\hat{A} \cong \hat{B}$

Assim, concluímos que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes.

Justificativa da construção do ângulo de medida da abertura de 60°

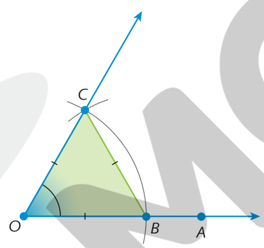
O ângulo de medida da abertura de 60° da figura abaixo foi construído seguindo o procedimento apresentado no capítulo 4.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos verificar que, de fato, com os passos realizados, a abertura de $B\hat{O}C$ mede 60°.

Considere o $\triangle OBC$.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Com base na construção realizada, temos que $\overline{OC} \cong \overline{OB} \cong \overline{CB}$.

Logo, o $\triangle OBC$ é equilátero e, portanto, seus ângulos internos medem 60° de abertura.

Então, med$(B\hat{O}C) = 60°$.

Demonstração da propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles

Ao demonstrar que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, relembre que triângulos isósceles têm dois lados congruentes. Em seguida, faça com a turma a demonstração da propriedade. Após traçar a bissetriz relativa ao ângulo oposto à base do triângulo, deixe que os estudantes identifiquem que os triângulos formados são congruentes pelo caso LAL e, consequentemente, concluam que os ângulos da base do triângulo isósceles são congruentes.

Justificativa da construção do ângulo da medida de abertura de 60°

Explique aos estudantes que eles vão verificar como se justifica a construção do ângulo de medida de abertura igual a 60° apresentado no capítulo **4**. Recorde esse procedimento com eles.

Antes de apresentar a justificativa para a turma, desafie-os a tentar argumentar sozinhos. Caso tenham dificuldades, dê a dica de considerar um triângulo equilátero.

Justificativa da construção de um triângulo equilátero

Recorde com a turma o procedimento para a construção de um triângulo equilátero apresentado no capítulo **5** e comente que agora eles vão estudar a justificativa desse procedimento. Caso julgue necessário, proponha que tentem justificar sozinhos antes de explorar a justificativa com eles.

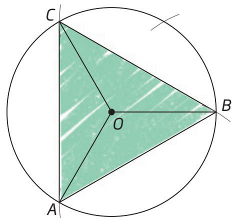
Você pode reproduzir a demonstração do livro na lousa e completá-la com a participação da turma. É importante que eles identifiquem os triângulos semelhantes pelo caso LAL.

Justificativa da construção do quadrado

Recorde com a turma o procedimento para a construção de um quadrado apresentado no capítulo **5**. Em seguida, peça aos estudantes que se inspirem na justificativa do procedimento para a construção de um triângulo equilátero e justifiquem o procedimento para a construção do quadrado. Incentive-os a argumentar e compartilhar ideias. Depois, você pode convidar alguns estudantes para que expliquem aos demais como fizeram.

Justificativa da construção do triângulo equilátero

O triângulo equilátero abaixo foi construído seguindo o procedimento apresentado no capítulo 5.



Vamos verificar que, de fato, com os passos realizados, o triângulo construído é equilátero.

Com base na construção realizada, sabemos que a abertura de cada ângulo central mede 120° (360° : 3 = 120°), ou seja, med($A\hat{O}B$) = med($B\hat{O}C$) = med($C\hat{O}A$) = 120°.

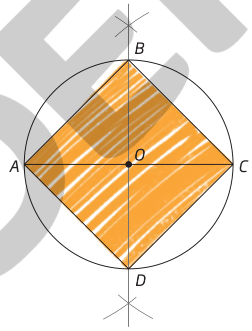
Além disso, $\overline{AO} \cong \overline{BO} \cong \overline{CO}$, pois esses segmentos de reta correspondem a raios da circunferência e, portanto, têm a mesma medida de comprimento.

Logo, pelo caso LAL: $\triangle AOB \cong \triangle BOC \cong \triangle COA$.

Assim: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ e, portanto, o $\triangle ABC$ é um triângulo equilátero.

Justificativa da construção do quadrado

O quadrado abaixo foi construído seguindo o procedimento apresentado no capítulo 5.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos verificar que, de fato, com os passos realizados, o quadrilátero obtido é um quadrado.

Com base na construção realizada, sabemos que a abertura de cada ângulo central mede 90° (360° : 4 = 90°), ou seja, med($A\hat{O}D$) = med($D\hat{O}C$) = med($C\hat{O}B$) = med($B\hat{O}A$) = 90°.

Além disso, $\overline{AO} \cong \overline{DO} \cong \overline{CO} \cong \overline{BO}$, pois esses segmentos de reta correspondem a raios da circunferência e, portanto, têm a mesma medida de comprimento.

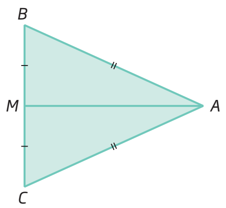
Logo, pelo caso LAL: $\triangle AOD \cong \triangle DOC \cong \triangle COB \cong \triangle BOA$

Assim: $\overline{AD} \cong \overline{DC} \cong \overline{CB} \cong \overline{BA}$ e, portanto, o quadrilátero $ABCD$ é um quadrado.

Demonstração da propriedade da mediana, altura e bissetriz de um triângulo isósceles

Vamos demonstrar que, em qualquer triângulo isósceles, a mediana e a altura relativas à base coincidem com a bissetriz relativa ao ângulo oposto à base.

Considere o triângulo isósceles ABC abaixo com $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ e mediana $\overline{AM}$ relativa à base $\overline{BC}$.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Primeiro, vamos demonstrar que $\overline{AM}$ também é a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.

Considerando os triângulos AMB e AMC, temos que:

- $\overline{AM}$ é lado comum.
- $\overline{BM} \cong \overline{CM}$, pois M é ponto médio de $\overline{BC}$.
- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, pois $\triangle ABC$ é um triângulo isósceles.

Logo, pelo caso LLL: $\triangle AMB \cong \triangle AMC$.

Assim: $M\hat{A}B \cong M\hat{A}C$ e, portanto, $\overline{AM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.

Agora, vamos demonstrar que $\overline{AM}$ também é a altura relativa à base $\overline{BC}$.

Como $\triangle AMB \cong \triangle AMC$, temos: $A\hat{M}B \cong A\hat{M}C$.

Além disso, $A\hat{M}B$ e $A\hat{M}C$ são ângulos suplementares, ou seja, $\text{med}(A\hat{M}B) + \text{med}(A\hat{M}C) = 180°$.

Dessa forma, temos:

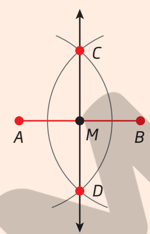
$2 \cdot \text{med}(A\hat{M}B) = 180°$, ou seja, $\text{med}(A\hat{M}B) = 90°$.

Portanto, $\overline{AM}$ é a altura relativa à base $\overline{BC}$.

Atividade

Faça a atividade no caderno.

12 A mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$ foi construída seguindo o procedimento apresentado no capítulo 4.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Reúna-se com um colega e verifiquem que, de fato, com os passos realizados, $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$. **12.** Resposta em *Orientações*.

Dica: Considere os triângulos ACD e BCD e os triângulos ACB e ADB.

Demonstração da propriedade da mediana, altura e bissetriz de um triângulo isósceles

Recorde com os estudantes que na seção *Tecnologias digitais em foco* das páginas 141 e 142, eles tiveram a oportunidade de verificar por meio de experimentações que, em qualquer triângulo isósceles, a mediana e a altura relativas à base coincidem com a bissetriz relativa ao ângulo oposto à base. Reforce que a atividade que fizeram no GeoGebra apenas sugere que a propriedade é verdadeira, mas não garante sua validade e que, por isso, é importante demonstrá-la nesse momento.

Desenvolva a demonstração do livro na lousa e complete-a com a participação da turma. É importante que eles identifiquem os triângulos congruentes, que concluam que a mediana é também a bissetriz relativa ao ângulo oposto à base e, por fim, que a mediana também é a altura relativa à base.

- A **atividade 12** é, na verdade, uma demonstração. Os arcos com centro em A e em B têm a mesma medida de comprimento de raio; portanto, as medidas das distâncias AC, BC, BC e BD são iguais. Assim,

$\triangle ACB$ é isósceles de base $\overline{AB}$, com $C\hat{A}B \cong C\hat{B}A$

$\triangle ACD$ é isósceles de base $\overline{CD}$, com $A\hat{C}D \cong A\hat{D}C$

Ora, $\triangle ACD \cong \triangle BCD$ (LLL); então, $A\hat{C}M \cong B\hat{C}M$, ou seja, $\overleftrightarrow{CM}$ (ou $\overleftrightarrow{CD}$) é a reta suporte da bissetriz de $A\hat{C}B$.

Como sabemos que a bissetriz do ângulo do vértice de um triângulo isósceles é também mediana e mediatriz da base, está demonstrado que $\overleftrightarrow{CD}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Quadriláteros

Objetivos:

- Reconhecer os elementos de um quadrilátero.
- Verificar que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°.

Justificativa

Para estudar os quadriláteros e suas propriedades é importante que os estudantes reconheçam seus elementos (vértices, lados, diagonais e ângulos internos).

Mais importante do que saber que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é igual a 360°, é entender o porquê de essa propriedade ser válida para qualquer quadrilátero convexo. Lidar com essas verificações ajuda os estudantes a atribuírem significado a essa propriedade.

Mapeando conhecimentos

Desenhe um quadrilátero qualquer na lousa e peça a alguns estudantes que identifiquem seus vértices, lados, diagonais e ângulos internos. Depois, pergunte: "Qual é a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos desse quadrilátero? Como vocês justificam essa afirmação?". Esse é o momento oportuno para mapear os conhecimentos previamente adquiridos por eles sobre os conteúdos que serão estudados no tópico.

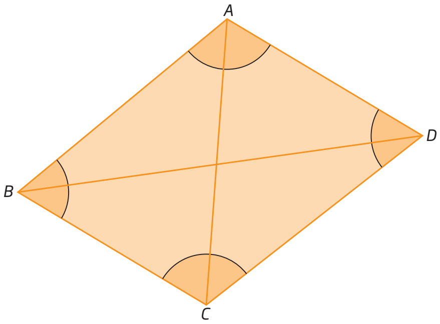
Para as aulas iniciais

Proponha aos estudantes que representem um quadrilátero convexo qualquer em uma folha de papel, marquem seus ângulos internos com cores diferentes e, depois, recortem-no e juntem os pedaços conforme as figuras desta página (não deixe que tenham acesso à página nesse momento). Espera-se que identifiquem o valor total de 360°.

Relembre alguns dos elementos dos quadriláteros e pergunte quais são os quadriláteros convexos que os estudantes conhecem. Espera-se que eles comentem sobre trapézios, retângulos, quadrados e outros paralelogramos.

4 Quadriláteros

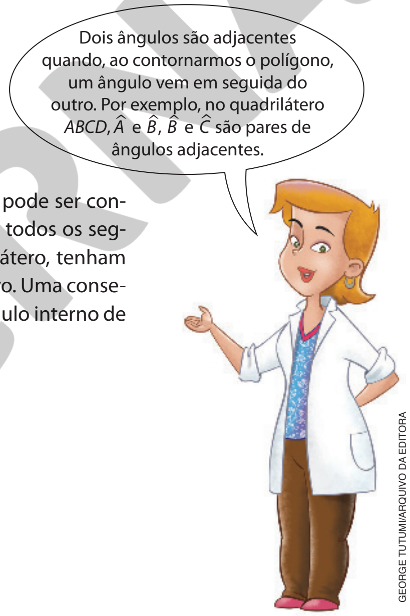
O **quadrilátero** é um polígono de quatro lados. Verifique alguns elementos do quadrilátero *ABCD* abaixo.



- **Vértices**: *A*, *B*, *C* e *D*.
- **Lados**: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.
- **Diagonais**: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.
- **Ângulos internos**: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

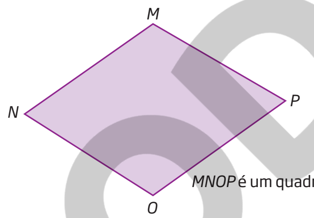
Em um quadrilátero, dois lados ou dois ângulos não adjacentes são chamados **opostos**. Então, no quadrilátero *ABCD*, temos:

- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$ são pares de lados opostos;
- $\hat{A}$ e $\hat{C}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são pares de ângulos opostos.

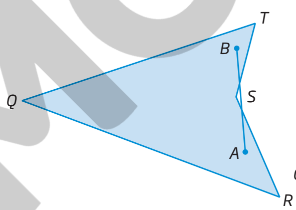


GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Assim como qualquer outro polígono, um quadrilátero pode ser convexo ou não convexo. Para ser **convexo**, é necessário que todos os segmentos de reta, com extremidades no interior do quadrilátero, tenham todos os seus pontos situados no interior desse quadrilátero. Uma consequência disso é que a medida de abertura de qualquer ângulo interno de um quadrilátero convexo é menor que 180°.



MNOP é um quadrilátero convexo.



QRST é um quadrilátero não convexo.

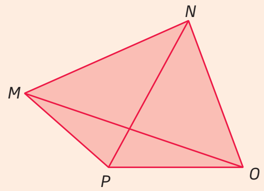
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos estudar apenas os quadriláteros convexos.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

13 Analise este quadrilátero *MNOP*.



Agora, no caderno, identifique:

a) os vértices; **13. a)** *M*, *N*, *O* e *P*

b) os lados; **13. b)** $\overline{MN}$, $\overline{NO}$, $\overline{OP}$ e $\overline{MP}$

c) o lado oposto ao lado $\overline{MP}$; **13. c)** $\overline{NO}$

d) as diagonais; **13. d)** $\overline{MO}$ e $\overline{PN}$

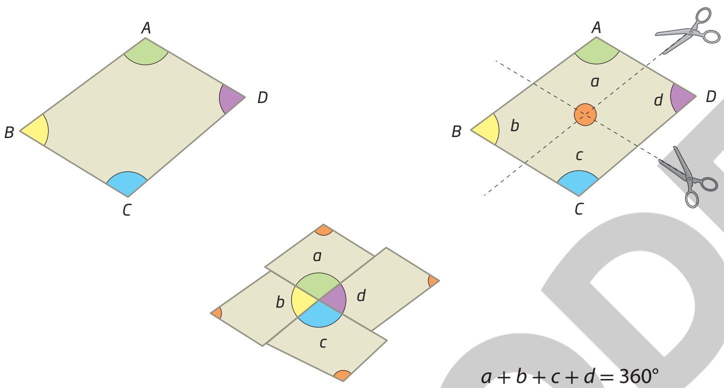
e) o ângulo oposto ao ângulo $\hat{P}$. **13. e)** $\hat{N}$ ou $M\hat{N}O$

14 Desenhe dois quadriláteros não convexos e dois quadriláteros convexos. Em seguida, troque os desenhos com um colega e verifique como ele fez os dele. **14.** Resposta pessoal.

Soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo

A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°.

Podemos verificar essa relação desenhando um quadrilátero, marcando seus ângulos e recortando-o, como mostrado a seguir.



$a + b + c + d = 360°$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Observações

1. A fórmula geral para determinar a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de qualquer polígono convexo é:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°, \text{ em que } n \text{ é o número de lados do polígono.}$$

Como, no caso dos quadriláteros, $n = 4$, temos:

$$S_i = (4 - 2) \cdot 180° = 2 \cdot 180° = 360°$$

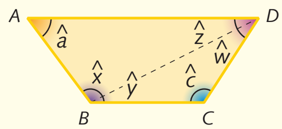
2. A soma das medidas de abertura dos ângulos externos de um polígono convexo qualquer é 360°.

$$S_e = 360°$$

- Antes de propor a realização da **atividade 13**, retome com os estudantes o fato de que, no início deste capítulo, falamos sobre a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo. Então, peça a eles que reflitam sobre traçar uma das diagonais do quadrilátero. Em seguida, questione-os sobre a relação desse experimento com a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos do quadrilátero. Espera-se que percebam que formarão dois triângulos. Como a soma das medidas dos ângulos internos de cada um é 180°, então, teremos 360°, o que equivale à soma da medida das aberturas dos ângulos internos de qualquer quadrilátero.
- Na **atividade 14**, pergunte aos estudantes como eles podem identificar se o quadrilátero é convexo ou não. Espera-se que digam que, dados dois pontos quaisquer no interior desse quadrilátero, *A* e *B*, o segmento $\overline{AB}$ está sempre contido no interior do quadrilátero e que qualquer ângulo interno de um quadrilátero convexo tem medida de abertura menor que 180°.

Soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo

Após a leitura das observações **1** e **2**, você pode mostrar aos estudantes como demonstrar essa propriedade decompondo um quadrilátero convexo em triângulos, conforme mostra a figura a seguir:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Comente com a turma que, considerando o triângulo *ABD*, temos que a soma das medidas das aberturas dos ângulos $\hat{a}$, $\hat{x}$ e $\hat{z}$ é igual a 180°. Analogamente, no triângulo *BCD*, a soma das medidas das aberturas dos ângulos $\hat{y}$, $\hat{c}$ e $\hat{w}$ é 180°.

$a + x + z = 180°$ e $y + c + w = 180°$

Para saber a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos do quadrilátero, adicionamos as medidas das aberturas dos ângulos internos dos dois triângulos que o formam:

$a + x + z + y + c + w = 180° + 180°$

$a + x + z + y + c + w = 360°$

Como $x + y = b$ e $z + w = d$, temos:

$a + b + c + d = 360°$

Portanto, a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos do quadrilátero é igual a 360°.

Classificação dos quadriláteros

Objetivos:

- Classificar paralelogramos em losangos, retângulos e quadrados.
- Classificar trapézios em isósceles, escaleno e retângulo.

Justificativa

Classificar paralelogramos e trapézios permite aos estudantes reconhecer que existem paralelogramos e trapézios com diferentes características e amplia os conhecimentos adquiridos por eles sobre esses quadriláteros. Além disso, lidar com essas classificações favorece o cálculo da medida da área dessas figuras.

Mapeando conhecimentos

- Reproduza as **atividades 28** e **29** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e solicite aos estudantes que as realizem em duplas. Incentive as duplas a justificar suas respostas em cada item das duas atividades.

Para as aulas iniciais

Faça a leitura coletiva da revisão de quadriláteros presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* e verifique se ficou alguma dúvida remanescente das **atividades 28** e **29**. Aproveite a oportunidade e proponha que construam paralelogramos e trapézios de diferentes tipos no GeoGebra. A atividade pode ser realizada no laboratório de informática da escola, caso tenha um disponível, ou pode ser feita como tarefa para casa.

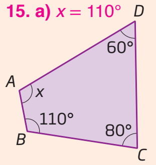
Aproveite o diagrama para fazer, como atividade oral, um levantamento dos conhecimentos prévios dos estudantes sobre as propriedades dos quadriláteros.

Atividades

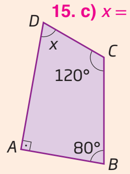
Faça as atividades no caderno.

15 Em cada caso, determine o valor de x, em grau, indicado nos quadriláteros.

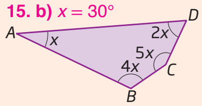
a) **15. a)** $x = 110°$



c) **15. c)** $x = 70°$



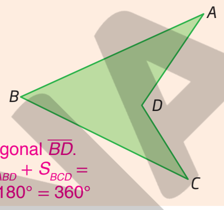
b) **15. b)** $x = 30°$



16 Sabendo que as aberturas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo medem, em grau, x, $2x$, $3x$ e $4x$, determine essas medidas. **16.** 36°, 72°, 108° e 144°

17 Em um quadrilátero convexo, as aberturas dos ângulos internos medem, em grau, $x + 20°$, $x + 40°$, $x + 50°$ e $x - 10°$. Calcule as medidas de abertura dos ângulos desse quadrilátero. **17.** 85°, 105°, 115° e 55°

18 Considere este quadrilátero não convexo *ABCD*. Mostre que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos, tal como nos quadriláteros convexos, também é igual a 360°.

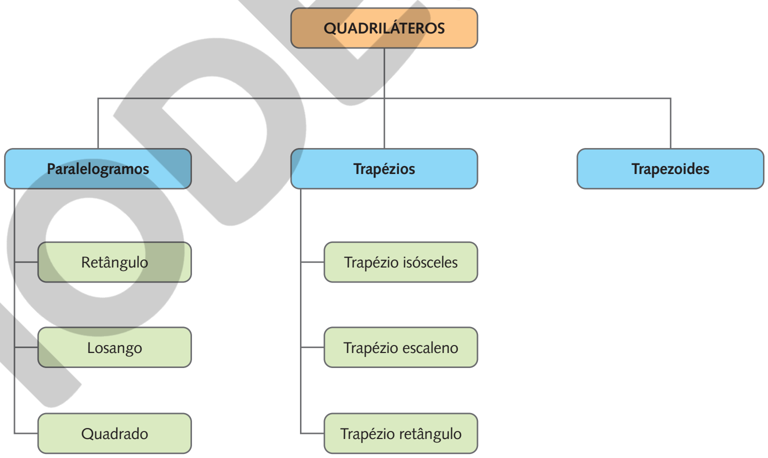


18. Traçar diagonal $\overline{BD}$.
$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} =$
$= 180° + 180° = 360°$

5 Classificação dos quadriláteros

Os quadriláteros podem ser classificados em paralelogramos, trapézios e trapezoides.

Observe o diagrama abaixo.



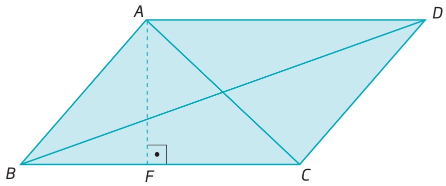
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Essa classificação é feita de acordo com algumas características em comum. Vamos estudar essas características e algumas propriedades.

Paralelogramos

Paralelogramo é o quadrilátero convexo que tem os dois pares de lados opostos paralelos.

Confira o paralelogramo *ABCD* abaixo.



$\overline{AB} \mathbin{//} \overline{CD}$
$\overline{AD} \mathbin{//} \overline{CB}$

Temos que:

- Os lados opostos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.
- Os lados opostos $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$ são paralelos.
- Qualquer lado pode ser considerado base.
- $\overline{AF}$ é uma altura relativa à base $\overline{BC}$.
- Os segmentos de reta $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são as diagonais do quadrilátero.
- Os ângulos internos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são opostos.
- Os ângulos internos $B\hat{A}D$ e $D\hat{C}B$ são opostos.
- A soma das medidas de abertura dos ângulos internos é 360°.

Tecnologias digitais em foco

Propriedades dos paralelogramos

Nesta seção, vamos utilizar o GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor pode indicar, para explorar algumas propriedades dos paralelogramos.

Construa

Siga os passos abaixo para construir um paralelogramo.

1º) Utilize a ferramenta e trace um segmento de reta $\overline{AB}$ qualquer.

2º) Com a ferramenta , marque um ponto *C* qualquer, tal que *C* não pertença a $\overline{AB}$.

3º) Utilize a ferramenta e trace a reta *r*, paralela ao segmento de reta $\overline{AB}$, passando por *C*.

4º) Utilize a ferramenta e trace o segmento de reta $\overline{AC}$.

5º) Utilize a ferramenta e trace a reta *s*, paralela ao segmento de reta $\overline{AC}$, passando por *B*.

6º) Com a ferramenta , marque o ponto *D*, intersecção das retas *r* e *s*.

7º) Construa o paralelogramo *ABDC* utilizando a ferramenta .

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

As atividades propostas nesta seção podem ser realizadas com qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de acesso a computadores, a proposta pode ser adaptada para ser realizada com a utilização de papel e instrumentos de desenho (régua, compasso, transferidor etc).

Paralelogramos

Apresente o conceito de paralelogramo e, em seguida, peça aos estudantes que representem alguns paralelogramos em uma folha de papel. Depois, peça a eles que comparem as representações que fizeram com as dos colegas. Com essa proposta, espera-se que percebam que os paralelogramos não são todos iguais; por exemplo, retângulos e quadrados são tipos específicos de paralelogramos, mas provavelmente os estudantes não farão essa descoberta nesse momento.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

• Competência geral 5 (a descrição está na página VI).

• Competência específica 2 (a descrição está na página VII).

Objetivo:

Explorar algumas propriedades dos paralelogramos.

Propriedades dos paralelogramos

Nesta seção, os estudantes vão verificar experimentalmente que:

• os lados opostos de um paralelogramo são congruentes;

• os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes;

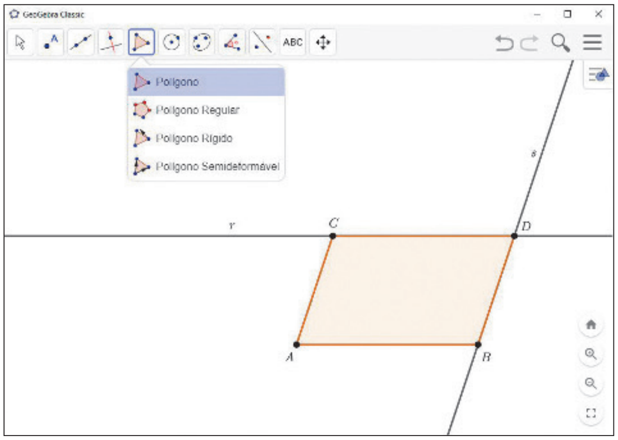
• as diagonais de um paralelogramo se cruzam em seus respectivos pontos médios.

Assim, como nos outros casos, comente que as atividades realizadas apenas sugerem que essas propriedades são válidas e que elas serão demonstradas, nas páginas seguintes, por meio da congruência de triângulos. Propostas como essa favorecem o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC e da competência específica **2** de Matemática, pois promovem o espírito investigativo.

Oriente-os a realizar cada um dos passos do *Construa*. Convém, sempre que possível, permitir que comparem suas construções com as dos colegas.

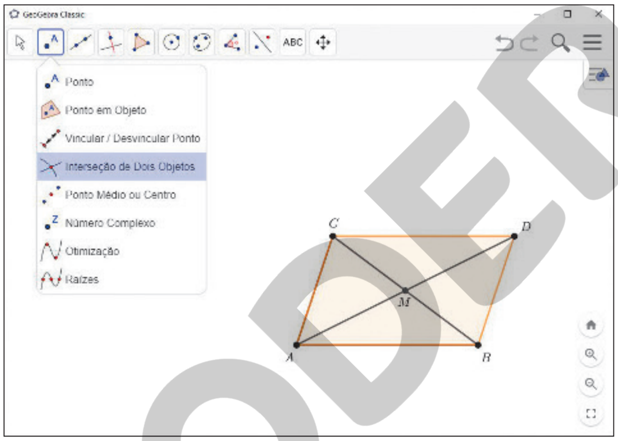
Ao fazerem os **itens a**, **b** e **c** do *Explore*, é importante que movimentem as construções após realizarem as medidas utilizando as ferramentas do *software*. A ideia é que percebam que a propriedade continua sendo válida, independentemente da configuração da construção. Esse é o momento oportuno para incentivar o diálogo, a experimentação e o estabelecimento de conjecturas.

Tecnologias digitais em foco



8º) Esconda todas as construções auxiliares e trace, com a ferramenta , os segmentos de reta $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, diagonais do paralelogramo.

9º) Com a ferramenta , marque o ponto *M*, intersecção das diagonais.



Explore

a) Com a ferramenta , meça o comprimento dos lados do paralelogramo e movimente-o. O que você pode verificar em relação a essas medidas?

b) Com a ferramenta , meça a abertura dos ângulos internos do paralelogramo e movimente-o. O que você pode verificar em relação a essas medidas?

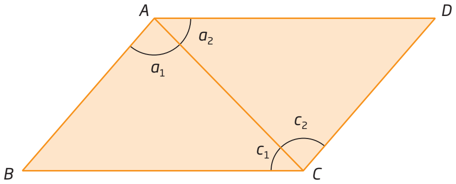
c) Meça agora o comprimento dos segmentos de reta $\overline{AM}$ e $\overline{MD}$, faça o mesmo com os segmentos de reta $\overline{BM}$ e $\overline{MC}$ e movimente o paralelogramo. O que é possível verificar?

Explore:
a) Espera-se que os estudantes percebam que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.
b) Espera-se que os estudantes percebam que os ângulos internos opostos de um paralelogramo são congruentes.
c) Com base nessas medidas, os estudantes vão verificar que $AM = MD$ e $BM = MC$. Isso sugere que *M* é o ponto médio das duas diagonais. Assim, a exploração feita sugere que as diagonais de um paralelogramo se cruzam em seus respectivos pontos médios.

Nesta página, demonstram-se as propriedades investigadas pelos estudantes na seção *Tecnologias digitais em foco* anterior. Desenvolva as demonstrações na lousa e complete-as com a ajuda da turma. Assim como nas outras demonstrações estudadas no capítulo, é importante que eles identifiquem ângulos congruentes em retas paralelas cortadas por transversais, os triângulos congruentes e argumentem utilizando os casos de congruência estudados.

Algumas propriedades do paralelogramo

Considere um paralelogramo *ABCD* qualquer. Traçando a diagonal $\overline{AC}$, obtemos os triângulos *ADC* e *CBA*.

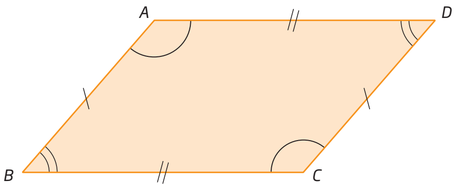


Comparando esses triângulos, podemos observar que:

- $a_1 = c_2$ (ângulos alternos internos formados por paralelas têm a mesma medida de abertura).
- $\overline{AC}$ é o lado comum aos triângulos *ADC* e *CBA*.
- $a_2 = c_1$(ângulos alternos internos).

Assim, pelo caso ALA, temos que $\triangle ADC \cong \triangle CBA$. De maneira análoga, traçando a diagonal $\overline{BD}$, concluímos que $\triangle BAD \cong \triangle DCB$.

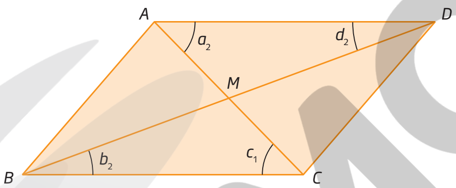
Como os triângulos *ADC* e *CBA* são congruentes, assim como os triângulos *BAD* e *DCB*, podemos concluir que: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{DA} \cong \overline{BC}$), e, portanto, os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.



Da congruência dos triângulos *ADC* e *CBA*, concluímos também que med($\hat{D}$) = med($\hat{B}$) e, da congruência dos triângulos *BAD* e *DCB*, concluímos que med($\hat{A}$) = med($\hat{C}$).

Portanto, os ângulos internos opostos de um paralelogramo são congruentes.

Ao traçar as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ do paralelogramo *ABCD*, verificamos que as diagonais se encontram no ponto *M* e obtemos os triângulos *AMD* e *CMB*. Confira.



Comparando esses triângulos, podemos notar que:

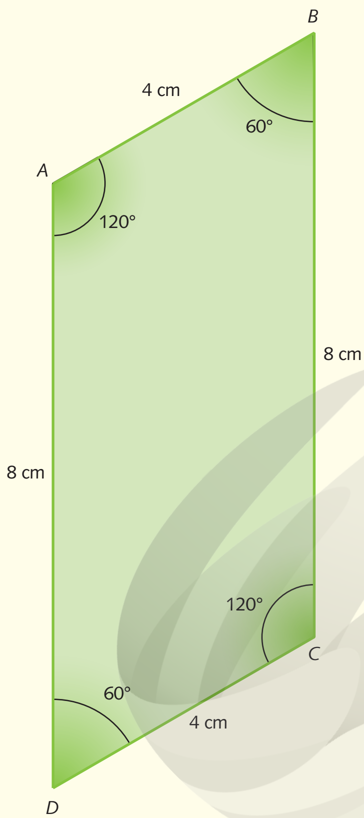
- $a_2 = c_1$ (ângulos alternos internos).
- $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ (lados opostos de um paralelogramo).
- $b_2 = d_2$ (ângulos alternos internos).

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Peça aos estudantes que respondam à pergunta proposta pela personagem: “Por que os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares?”. A resposta pode ser construída em forma de demonstração. Peça a eles que elaborem essa demonstração no caderno.

Um dos caminhos é por meio da congruência de triângulos. Utilize como modelo a segunda figura da página 155, o paralelogramo *ABCD* com a diagonal $\overline{AC}$. Explique que é suficiente demonstrarem que $\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{A}) = 180°$ e $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{D}) = 180°$, supondo, sem perda de generalidade, que vale para todos os pares, afinal $\hat{B} \cong \hat{D}$ e $\hat{A} \cong \hat{C}$.

- Na **atividade 19**, amplie a exploração dos **itens b** e **c**, perguntando aos estudantes quais são as características em comum entre as diagonais do quadrado e as do losango. Espera-se que eles percebam que as diagonais estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.
- Resposta da **atividade 20**:

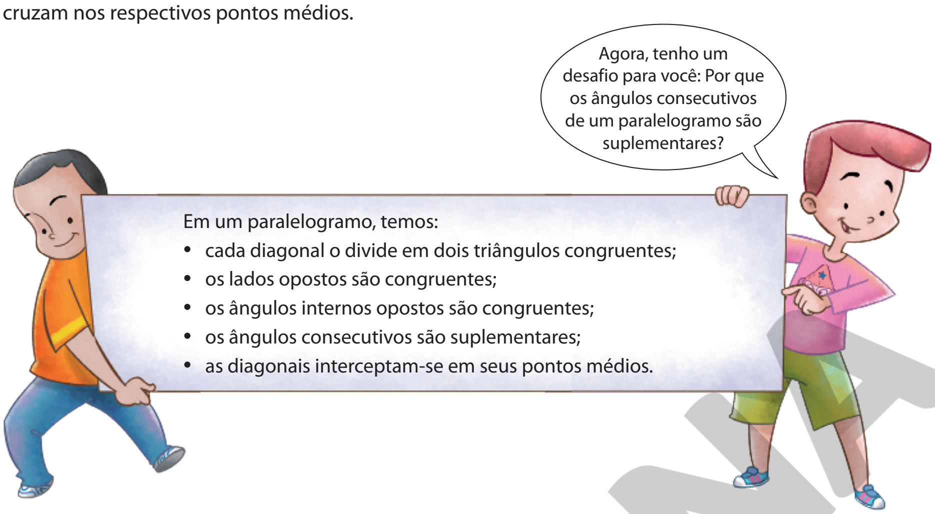


ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Passos da construção:

- Construir um ângulo com 60° de medida de abertura com vértice *B* e lados $BA = 4$ cm e $BC = 8$ cm;
- Traçar uma reta *r* paralela a $\overline{AB}$ passando por *C*;
- Traçar uma reta *s* paralela a $\overline{BC}$ passando por *A*;
- Na intersecção de *r* e *s* está o vértice *D*.

Assim, pelo caso ALA, temos que $\triangle AMD \cong \triangle CMB$ e, portanto, $\overline{AM} \cong \overline{CM}$ e $\overline{BM} \cong \overline{DM}$. Isso significa que *M* é o ponto médio de $\overline{AC}$ e de $\overline{BD}$. Assim, concluímos que as diagonais de um paralelogramo se cruzam nos respectivos pontos médios.



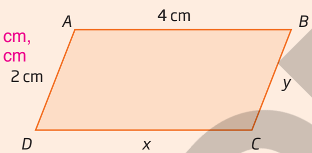
GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

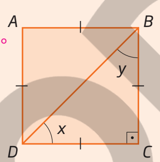
Faça as atividades no caderno.

19 Analise os paralelogramos abaixo e, em cada caso, determine *x* e *y*.

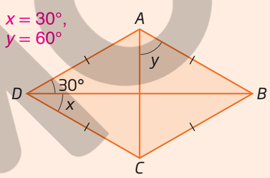
a) 19. a) $x = 4$ cm, $y = 2$ cm



b) 19. b) $x = y = 45°$



c) 19. c) $x = 30°$, $y = 60°$



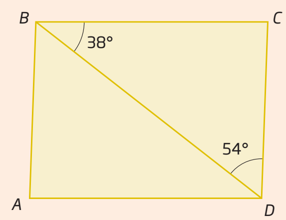
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

20 Construa um paralelogramo *ABCD* tal que: $BC = 8$ cm, $AB = 4$ cm e $\text{med}(A\hat{B}C) = 60°$.
20. Resposta em *Orientações*.

21 A medida de perímetro de um paralelogramo é igual a 66 cm. Calcule as medidas de comprimento dos lados, sabendo que a diferença entre elas é de 14 cm.
21. 23,5 cm; 23,5 cm; 9,5 cm e 9,5 cm

22 A abertura de um ângulo externo de um paralelogramo mede 64°. Faça um esboço da figura e calcule as medidas de abertura dos ângulos internos. **22.** 116°, 116°, 64° e 64°

23 No paralelogramo *ABCD*, a diagonal $\overline{BD}$ forma com o lado $\overline{BC}$ um ângulo cuja abertura mede 38° e com o lado $\overline{CD}$, um ângulo cuja abertura mede 54°. Calcule as medidas de abertura dos ângulos internos desse paralelogramo.



23. $\text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{A}) = 88°$, $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{D}) = 92°$

156

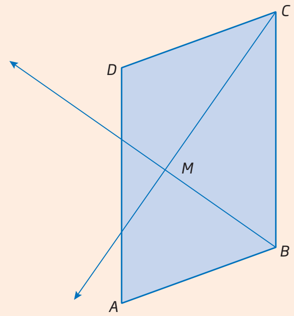
Justificativa da construção:

O paralelogramo *ABCD* é tal que $AB = CD = 4$ cm e $BC = AD = 8$ cm; $\text{med}(A\hat{B}C) = \text{med}(C\hat{D}A) = 60°$ e $\text{med}(B\hat{C}D) = \text{med}(D\hat{A}B) = 120°$

Após a construção da figura solicitada na **atividade 20**, retome as propriedades do paralelogramo estudadas nas páginas anteriores, pedindo aos estudantes que as observem na figura construída.

Para exemplificar a observação de que "existem quadriláteros que têm diagonais congruentes mas não são retângulos", mostre aos alunos a imagem de um trapézio isósceles, que será apresentado ainda neste capítulo.

24 No paralelogramo abaixo, temos: med($\hat{C}$) = 70°, $\overrightarrow{CM}$ é bissetriz do ângulo $D\hat{C}B$, e $\overrightarrow{BM}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Determine a medida de abertura do ângulo $B\hat{M}C$. **24.** 90°



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

25. 50°, 50°, 130° e 130°

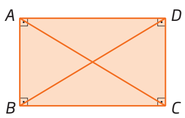
25 A diferença entre as medidas de abertura de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é 80°. Quais são as medidas de abertura, em grau, dos ângulos desse quadrilátero?

A seguir, estudaremos alguns paralelogramos que podem ser classificados em retângulos, losangos ou quadrados, por apresentarem propriedades particulares.

Retângulo

Retângulo é o paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos.

Dado um retângulo *ABCD* qualquer, temos:



$$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{D}) = 90°$$

LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Como o retângulo é um paralelogramo, são válidas as propriedades do paralelogramo. Além disso, podemos afirmar que, em todo retângulo, as diagonais são congruentes ($\overline{AC} \cong \overline{BD}$).

Vamos demonstrar que em todo retângulo as diagonais são congruentes.

Considerando os triângulos equiláteros *ABC* e *DCB*, temos que:

- $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, pois o retângulo é um paralelogramo e seus lados opostos são congruentes.
- $A\hat{B}C \cong D\hat{C}B$, pois são ângulos retos.
- $\overline{BC}$ é lado comum.

Logo, pelo caso LAL: $\triangle ABC \cong \triangle DCB$.

Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{DB}$, ou seja, as diagonais do retângulo são congruentes.

Observação

A recíproca da propriedade demonstrada acima não é verdadeira. Isto significa que existem quadriláteros que têm as diagonais congruentes mas não são retângulos.

Defina losango e apresente a propriedade dos losangos: as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos do losango. Faça a demonstração dessa propriedade na lousa com a participação da turma.

Antes do estudo do quadrado, faça os seguintes questionamentos para os estudantes: "Podemos afirmar que o quadrado é um losango? Por quê? O que podemos afirmar sobre as diagonais de um quadrado?". Deixe os estudantes à vontade para fazer desenhos, conjecturar e compartilhar suas ideias. Após esse momento, faça a leitura coletiva do texto do livro com eles.

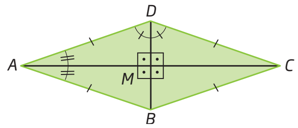
Após explorar com a turma a classificação dos quadriláteros, faça afirmações e peça aos estudantes que discutam e validem se são verdadeiras ou falsas. Por exemplo: "Todo quadrado é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um quadrado."; "Todo retângulo é um quadrado, mas nem todo quadrado é um retângulo."; "Todo retângulo é um paralelogramo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo.".

Losango

Losango é o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.

Como o losango é um paralelogramo, são válidas as propriedades dos paralelogramos.

Também podemos afirmar que, em todo losango, as diagonais são perpendiculares entre si e estão contidas nas respectivas bissetrizes dos ângulos internos.



Então, dado um losango $ABCD$ qualquer, temos: $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AD}$

Vamos demonstrar essas propriedades.

Considerando os triângulos AMD e CMD, temos que:

- $\overline{AD} \cong \overline{CD}$, pois são lados do losango.
- $\overline{AM} \cong \overline{CM}$, pois M é ponto médio de $\overline{AC}$.
- $\overline{MD}$ é lado comum.

Logo, pelo caso LLL: $\triangle AMD \cong \triangle CMD$.

Assim, $A\hat{D}M \cong C\hat{D}M$ e, portanto, $\overline{DB}$ é bissetriz de $A\hat{D}C$.

De maneira análoga, pelo caso LLL, $\triangle AMB \cong \triangle CMB$, $\triangle AMB \cong \triangle AMD$ e $\triangle CMD \cong \triangle CMB$.

Assim, $A\hat{B}M \cong C\hat{B}M$, $B\hat{A}M \cong D\hat{A}M$ e $D\hat{C}M \cong B\hat{C}M$.

Portanto, $\overline{DB}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$ e $\overline{AC}$ é bissetriz de $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$.

Além disso, $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares, pois $A\hat{M}D$ e $C\hat{M}D$ são congruentes e suplementares, ou seja, são ângulos retos.

Observação

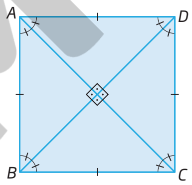
Também podemos enunciar que todo quadrilátero cujas diagonais estão contidas nas respectivas bissetrizes dos ângulos internos e são perpendiculares entre si é um losango. Essa afirmação pode ser demonstrada, mas não o faremos aqui.

Quadrado

Quadrado é o paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos e os quatro lados congruentes.

O quadrado é um paralelogramo e um caso particular de retângulo e de losango; assim, valem, além das propriedades do paralelogramo, todas as propriedades dos retângulos e dos losangos:

- As diagonais são congruentes.
- As diagonais são perpendiculares entre si.
- As diagonais estão contidas nas respectivas bissetrizes dos ângulos internos.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Então, dado um quadrado $ABCD$ qualquer, temos:

$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{D}) = 90°$

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$

$\overline{AC} \cong \overline{BD}$

• Na **atividade 26**, peça aos estudantes que justifiquem as afirmativas falsas. Caso encontrem dificuldades, retome os conceitos explorados nas páginas anteriores. Amplie a atividade e peça aos estudantes que reescrevam as sentenças falsas tornando-as verdadeiras.

Atividades

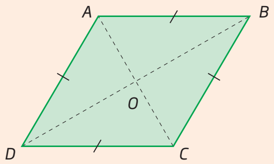
Faça as atividades no caderno.

26. alternativas **a**, **b**, **c**, **d**, **f**

26 Quais das sentenças a seguir são verdadeiras?

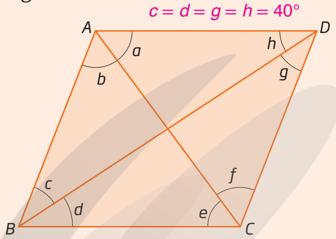
a) Todo quadrado é um losango.
b) Existem retângulos que são losangos.
c) Todo paralelogramo é um quadrilátero.
d) Todo quadrado é um retângulo.
e) Um losango pode não ser um paralelogramo.
f) Em um losango, os quatro lados são sempre congruentes.
g) Todo retângulo é um paralelogramo e todo paralelogramo é um retângulo.

27 Quais das sentenças a seguir são verdadeiras? **27.** alternativas **a**, **b**, **c**, **d**, **f**



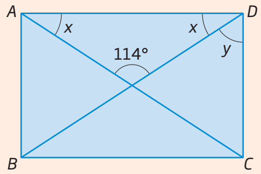
a) $\text{med}(B\hat{O}C) = 90°$
b) $\text{med}(D\hat{A}C) = \text{med}(B\hat{C}A)$
c) $AO = OC$
d) $BO = OD$
e) $AC = BD$
f) $\triangle BCD$ é isósceles
g) $\triangle ABC$ é equilátero

28 Sabendo que a abertura do ângulo $B\hat{A}D$ mede 100°, determine, em grau, as medidas de abertura indicadas pelas letras no losango $ABCD$. **28.** $a = b = e = f = 50°$, $c = d = g = h = 40°$

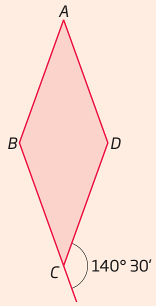


29 Uma diagonal de um losango forma com um lado um ângulo cuja abertura mede 36°. Calcule, em grau, as medidas de abertura dos ângulos desse losango.
29. 72°, 72°, 108° e 108°

30 As diagonais de um retângulo formam um ângulo cuja abertura mede 114°. Determine as medidas de abertura, em grau, dos ângulos que essas diagonais formam com os lados do retângulo. **30.** $x = 33°$, $y = 57°$

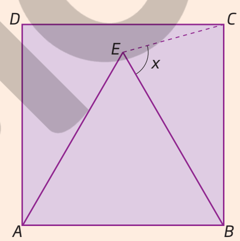


31 A abertura de um ângulo externo de um losango mede 140° 30′. Qual é a medida de abertura, em grau, do maior de seus ângulos internos? **31.** $\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{D}) = 140° 30'$



32 A bissetriz de um ângulo obtuso de um losango forma, com um dos lados, um ângulo cuja abertura mede 64°. Determine a medida de abertura, em grau, de cada ângulo desse losango. **32.** 128°, 128°, 52° e 52°

33 Na figura abaixo, temos um quadrado $ABCD$ e um triângulo equilátero ABE. Sabendo que o triângulo BEC é isósceles, determine a medida de abertura do ângulo $B\hat{E}C$. **33.** 75°



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Trapézios

Pergunte aos estudantes se é possível construir um trapézio retângulo com apenas um ângulo reto. É esperado que eles percebam que não, pois não haveria um par de lados paralelo, o que é característica do trapézio.

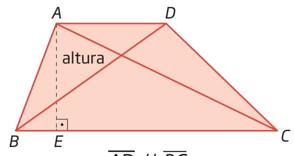
Sugestão de leitura

BONGIOVANNI, Vincenzo. As diferentes definições dos quadriláteros notáveis. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 55, p. 29-32, 2004.

Trapézios

Trapézio é todo quadrilátero convexo que tem apenas um par de lados paralelos.

A partir deste trapézio *ABCD*, temos:



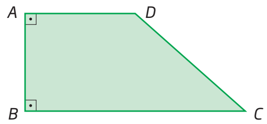
$\overline{AD} \ // \ \overline{BC}$

- **Base maior**: $\overline{BC}$.
- **Base menor**: $\overline{AD}$.
- $\overline{AE}$ é uma **altura do trapézio**.
- **Pares de ângulos suplementares**: $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}D$; $A\hat{D}C$ e $D\hat{C}B$.
- **Diagonais**: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Os trapézios são classificados em trapézio retângulo, trapézio isósceles e trapézio escaleno.

Trapézio retângulo

Trapézio retângulo é aquele que tem dois ângulos retos.



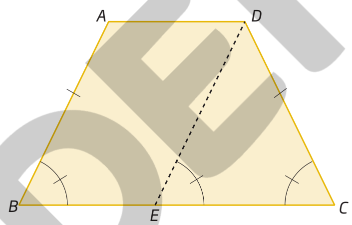
$\overline{AD} // \overline{BC}$

$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{B}) = 90°$

Trapézio isósceles

Trapézio isósceles é aquele em que os lados não paralelos são congruentes.

Considere um trapézio isósceles *ABCD* qualquer.



Confira que, traçando pelo vértice *D* uma reta paralela a $\overline{AB}$, determinamos o ponto *E* na base maior, obtendo o triângulo *DEC* e o paralelogramo *ADEB*.

Dessa forma, temos que:

- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (lados opostos de um paralelogramo).
- $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ (trapézio isósceles).

Como $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ e $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, concluímos que $\overline{DE} \cong \overline{DC}$ e, assim, o triângulo *EDC* é isósceles.

Temos ainda que:

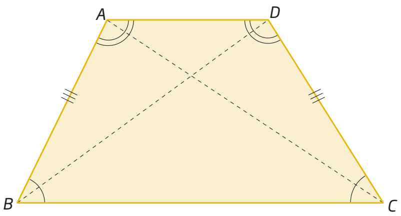
- $D\hat{C}E \cong D\hat{E}C$ (ângulos da base do triângulo isósceles).
- $A\hat{B}E \cong D\hat{E}C$ (ângulos correspondentes).

Como $D\hat{C}E \cong D\hat{E}C$ e $A\hat{B}E \cong D\hat{E}C$, concluímos que $D\hat{C}E \cong A\hat{B}E$, ou seja, os ângulos adjacentes à base maior são congruentes.

$B\hat{A}D$ e $C\hat{D}A$ são ângulos colaterais internos, respectivamente, a $A\hat{B}E$ e $D\hat{C}E$. Como $A\hat{B}E \cong D\hat{C}E$, seus suplementares são congruentes, ou seja, $B\hat{A}D \cong C\hat{D}A$. Portanto, os ângulos adjacentes à base menor também são congruentes.

Assim, se um trapézio é isósceles, os ângulos adjacentes às mesmas bases são congruentes.

Traçando as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, obtemos os triângulos BAD e CDA, que são congruentes pelo caso LAL de congruência de triângulos. Podemos, assim, concluir que as diagonais do trapézio isósceles são congruentes.



$\overline{AB} \cong \overline{DC}$

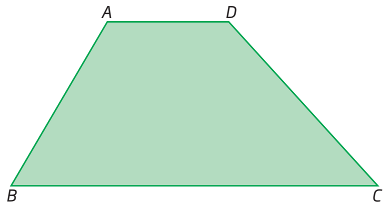
$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{D})$

$\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C})$

$\overline{AC} \cong \overline{DB}$

Trapézio escaleno

Trapézio escaleno é aquele em que os lados não paralelos não são congruentes.



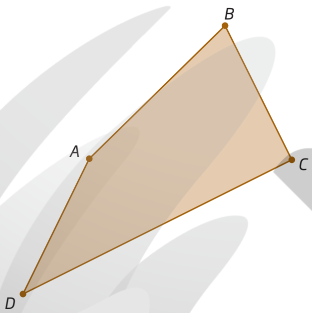
$\overline{AB}$ não é congruente a $\overline{DC}$.

Observação

Todo trapézio retângulo é escaleno.

Trapezoides

Trapezoide é todo quadrilátero convexo que não tem lados paralelos.



$\overline{AB} \nparallel \overline{DC}$

$\overline{AD} \nparallel \overline{BC}$

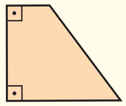
Lemos: "não paralelo"

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

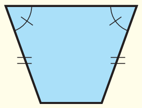
Trapezoides

Convide alguns estudantes para que representem trapezoides na lousa. Esse é o momento oportuno para verificar se compreenderam o conceito.

- Na **atividade 37**, destaque que os ângulos da base de um trapézio isósceles, assim como os de um triângulo isósceles, são congruentes.
- Exemplo de resposta para a **atividade 40**:



Trapézio retângulo



Trapézio isósceles

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO /ARQUIVO DA EDITORA

37. a) Traçando as diagonais do quadrilátero azul, obtemos 2 pares de triângulos isósceles congruentes (1 e 2; 3 e 4). Como cada ângulo interno do quadrilátero tem a mesma medida de abertura, essa medida é: $\frac{360°}{4} = 90°$. Portanto, o quadrilátero azul é um retângulo.

Atividades

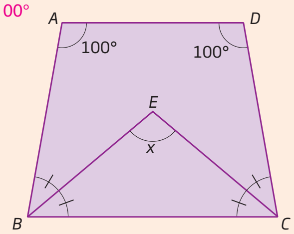
Faça as atividades no caderno.

34 Em um trapézio isósceles, a abertura de um dos ângulos externos mede 100° 40'. Determine as medidas de abertura dos ângulos internos desse trapézio.
34. 100° 40', 100° 40', 79° 20' e 79° 20'

35 Em um trapézio isósceles, a soma das medidas de abertura dos ângulos obtusos é 250°. Quanto medem as aberturas dos ângulos agudos? **35.** 55° e 55°

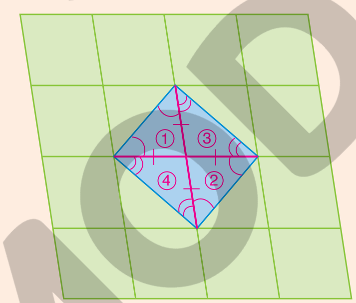
36 A abertura de um dos ângulos obtusos de um trapézio isósceles mede 100°. Determine, em grau, a medida x de abertura do ângulo $\hat{E}$ formado pelas bissetrizes dos ângulos internos da base maior.

36. $x = 100°$



37 Reúna-se com um colega e resolvam as questões a seguir.

a) O quadrilátero da figura abaixo é formado por losangos idênticos. O quadrilátero azul, no centro, é um retângulo. Justifiquem essa afirmação.



b) Em um trapézio retângulo, a bissetriz de um ângulo reto forma com a bissetriz do ângulo agudo do trapézio um ângulo cuja abertura mede 110°. Determinem a medida de abertura do suplemento do maior ângulo do trapézio. **37. b)** 50°

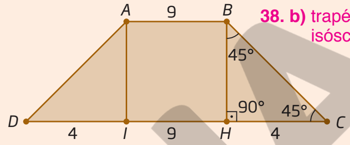
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

38 Identifique cada figura a seguir como trapézio retângulo, isósceles ou escaleno. Em seguida, junte-se a um colega e converse com ele sobre o porquê de sua resposta.

a)

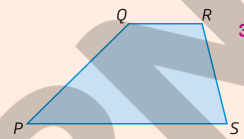
38. a) trapézio retângulo ou escaleno

b)



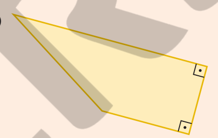
38. b) trapézio isósceles

c)



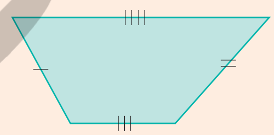
38. c) trapézio escaleno

d)



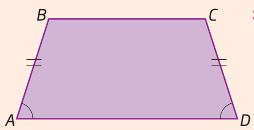
38. d) trapézio retângulo ou escaleno

e)



38. e) trapézio escaleno

f)



38. f) trapézio isósceles

39 Qual é a diferença entre um trapézio e um trapezoide? **40.** Comentário em *Orientações*.

40 Desenhe, em seu caderno, um trapézio retângulo e um trapézio isósceles. Faça, quando necessário, as marcações para indicar congruência de lados e de ângulos.

39. Espera-se que os estudantes respondam que um trapézio tem dois lados paralelos, enquanto um trapezoide não tem lados paralelos.

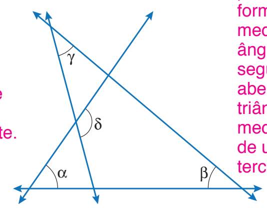
162

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

As quatro retas da figura a seguir formam alguns ângulos.

Interpretação e identificação dos dados:
primeiro item: Resposta pessoal.
segundo item: Sim, o triângulo formado pelos ângulos de medidas de abertura α e β e o formado pelos ângulos de medidas de abertura β e γ. As aberturas dos terceiros ângulos medem 87° e 105°, respectivamente.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Plano de resolução:
primeiro item: Analisar o quadrilátero formado pelos dois ângulos com as medidas de abertura calculadas e os ângulos com medidas de abertura β e δ.
segundo item: A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°. A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°.
terceiro item: $\delta = 129°$

Considerando que $\alpha = 54°$, $\beta = 39°$ e $\gamma = 36°$, qual é a medida de abertura δ?

Resolvendo em equipe: alternativa **e**

a) 99°
b) 105°
c) 121°
d) 126°
e) 129°

Interpretação e identificação dos dados	• Analise as informações do enunciado e anote as que você julgar relevantes para a resolução do problema. • Na figura, há contornos de triângulos com duas medidas de abertura de ângulos internos dadas? Se sim, podemos determinar a medida de abertura do terceiro ângulo?
Plano de resolução	• Conhecidas as medidas de abertura dos três ângulos do enunciado e as medidas de abertura dos ângulos determinados anteriormente, qual é o procedimento para encontrar a medida de abertura δ? • Que conceito sobre triângulos e quadriláteros é fundamental para a resolução deste problema? • Determine a medida de abertura δ.
Resolução	• Reúna-se com dois colegas. • Mostre a eles seu plano de resolução e verifique se há ideias em comum entre vocês. • Discutam as diferenças e as semelhanças entre cada plano e escolham um deles para a execução do processo de resolução. **Observação** Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.
Verificação	• Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.
Apresentação	• Elaborem uma síntese, por meio de cartazes, sobre triângulos e quadriláteros. Triângulos: classificação de triângulos quanto às medidas de comprimento dos lados e quanto às medidas de abertura dos ângulos; pontos notáveis; casos de congruência; soma das medidas de abertura dos ângulos internos. Quadriláteros: classificação e elementos de paralelogramos e trapézios; soma das medidas de abertura dos ângulos internos; propriedades dos paralelogramos, dos retângulos, dos losangos e dos quadrados; propriedades dos trapézios.

Resolvendo em equipe

BNCC:

• Competência geral 9 (a descrição está na página VI).

• Competências específicas 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

A seção destaca as etapas selecionadas para encaminhar a resolução de problemas. Elas devem ser analisadas e discutidas com e pelos estudantes. Além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **2** e **10** e da competência específica **2** de Matemática, a seção permite a transferência de estratégias de resolução para outros contextos e situações.

Para esta atividade, organize a turma em grupos de quatro ou cinco integrantes. Peça aos estudantes que relacionem os ângulos apresentados na imagem e fundamentem suas ideias com argumentos. Dê um tempo para que eles discutam e produzam um cartaz. Comente que esses cartazes poderão ser um material de consulta para todos do grupo nas próximas aulas. Feito isso, solicite a eles que socializem as estratégias para que os grupos possam descobrir diferentes modos de resolução.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Triângulos

- A **atividade 1** descreve a decomposição de um quadrado em triângulos. Espera-se que os estudantes percebam que a diagonal $\overline{DB}$ divide o quadrado em dois triângulos retângulos e isósceles. Como $x = y$ e $x + y = 90°$, então $x = y = 45°$.
- A **atividade 2** é de caráter conceitual. Nela os estudantes devem relacionar as cevianas às suas respectivas definições. Amplie a atividade e peça a eles que representem as medianas, alturas e bissetrizes de um triângulo qualquer.

Congruência de triângulos

- A **atividade 3** propõe aos estudantes que provem que dois ângulos são congruentes. Caso tenham dificuldades, oriente-os a reproduzir a figura no caderno, destacar os segmentos que têm mesma medida de comprimento e identificar triângulos congruentes. Espera-se que eles percebam que os triângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$ são congruentes pelo caso LAL. Portanto, o ângulo com vértice em A é congruente ao ângulo com vértice em C.
- A **atividade 4** propõe aos estudantes que provem que dois segmentos de reta são congruentes. Espera-se que eles concluam que os triângulos são congruentes pelo caso ALA, pois:

$A\hat{B}M \cong D\hat{C}M$ (hipótese)

$\overline{CM} \cong \overline{MB}$ (hipótese)

$A\hat{M}B \cong D\hat{M}C$ (ângulos opostos pelo vértice)

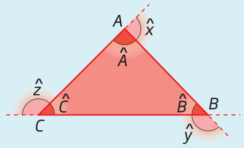
Oriente-os a reproduzir a figura no caderno e a destacar com uma mesma cor os ângulos e segmentos de reta congruentes.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Triângulos

O **triângulo** é um polígono de três lados. Vamos destacar alguns elementos deste triângulo.



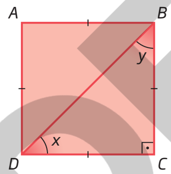
- **Vértices**: A, B e C.
- **Lados**: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.
- **Ângulos internos**: $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.
- **Ângulos externos**: $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$.

A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Cevianas notáveis: mediana, altura e bissetriz

Ceviana é qualquer segmento de reta com uma extremidade em um vértice de um triângulo e a outra extremidade na reta suporte do lado oposto a esse vértice.

1. Em um quadrado $ABCD$, traçamos a diagonal $\overline{DB}$ e obtemos o triângulo BCD. Sabendo que $x = y$, determine as medidas de abertura dos ângulos internos do triângulo BCD.



1. 45°, 45°, 90°

2. Associe cada ceviana à sua definição.

2. III-A, I-B e II-C

I. Medianas **II.** Alturas **III.** Bissetrizes

A. Cevianas que têm uma extremidade em um dos vértices do triângulo e a outra extremidade no lado oposto a esse vértice, dividindo cada ângulo interno em dois ângulos congruentes.

B. Cevianas que têm uma extremidade em um dos vértices do triângulo e a outra extremidade no ponto médio do lado oposto a esse vértice.

C. Cevianas que têm uma extremidade em um dos vértices do triângulo e a outra extremidade na reta suporte do lado oposto ao vértice, formando um ângulo cuja abertura mede 90° com essa reta.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Congruência de triângulos

Dois triângulos são congruentes quando os lados correspondentes e os ângulos correspondentes são congruentes. Há quatro **casos de congruência de triângulos**.

1º caso de congruência: LAL (Lado-Ângulo-Lado)

Dois triângulos são congruentes quando dois lados e o ângulo compreendido entre eles são, respectivamente, congruentes.

2º caso de congruência: ALA (Ângulo-Lado-Ângulo)

Dois triângulos são congruentes quando um lado e dois ângulos adjacentes a esse lado são, respectivamente, congruentes.

3º caso de congruência: LLL (Lado-Lado-Lado)

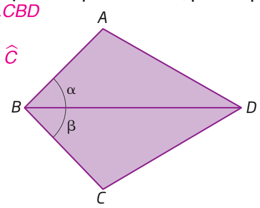
Dois triângulos são congruentes quando os três lados são, respectivamente, congruentes.

4º caso de congruência: LAA_o (Lado-Ângulo-Ângulo oposto)

Dois triângulos são congruentes quando um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado são, respectivamente, congruentes.

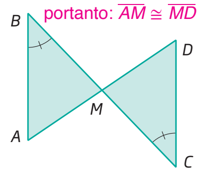
3. Sabendo que $\alpha = \beta$ e $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, prove que $\hat{A} \cong \hat{C}$.

3. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (caso LAL); portanto: $\hat{A} \cong \hat{C}$



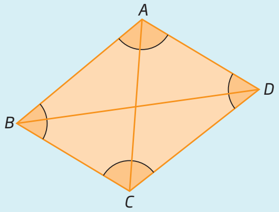
4. Sabendo que $\overline{CM} \cong \overline{MB}$ e $\hat{B} \cong \hat{C}$, prove que $\overline{AM} \cong \overline{MD}$.

4. $\triangle ABM \cong \triangle DCM$ (caso ALA); portanto: $\overline{AM} \cong \overline{MD}$



Quadriláteros

O **quadrilátero** é um polígono de quatro lados. Verifique alguns elementos deste quadrilátero.



- **Vértices**: A, B, C e D.
- **Lados**: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.
- **Diagonais**: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.
- **Ângulos internos**: $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$.

Um quadrilátero pode ser convexo ou não convexo. Para ser **convexo**, é necessário que todos os segmentos de reta, com extremidades no interior do quadrilátero, tenham todos os seus pontos situados no interior desse quadrilátero.

A soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°.

5. As medidas de abertura dos ângulos de um quadrilátero convexo são indicadas por a, b, c e d. Sabendo que $b = 2a$, $c = 2b$ e $d = a + c$, determine as medidas de abertura a, b, c e d, em grau. **5.** $a = 30°$, $b = 60°$, $c = 120°$ e $d = 150°$

Classificação dos quadriláteros

Paralelogramos

Paralelogramo: quadrilátero convexo que tem os lados opostos paralelos; seus lados opostos e ângulos opostos são congruentes; seus ângulos consecutivos são suplementares; suas diagonais interceptam-se nos pontos médios.

Retângulo: paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos; todas as propriedades do paralelogramo são válidas para ele; suas diagonais são congruentes.

Losango: paralelogramo que tem os quatro lados congruentes; todas as propriedades do paralelogramo são válidas para ele; suas diagonais são perpendiculares entre si e estão contidas nas respectivas bissetrizes dos ângulos internos.

Quadrado: paralelogramo que é um caso particular de retângulo e de losango; todas as propriedades do paralelogramo, do retângulo e do losango são válidas para ele.

Trapézios

Trapézio: todo quadrilátero convexo que tem apenas um par de lados paralelos.

Trapézio retângulo: tem dois ângulos retos.

Trapézio isósceles: os lados paralelos são congruentes.

Trapézio escaleno: os lados não paralelos não são congruentes.

6. afirmações **a**, **c**, **e**.

6. Copie as afirmações verdadeiras no caderno.

a) Retângulo é o paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos.

b) Losango é o paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos e os quatro lados congruentes.

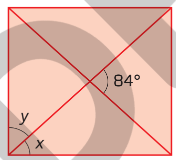
c) Os lados opostos e os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes.

d) Todo retângulo é um quadrado.

e) As diagonais de um paralelogramo interceptam-se em seus pontos médios.

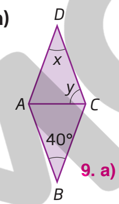
7. A diferença entre as medidas de abertura de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo é 108°. Calcule as medidas de abertura desses ângulos, em grau. **7.** 144° e 36°

8. Neste retângulo, determine x e y, em grau.
8. $x = 42°$, $y = 48°$



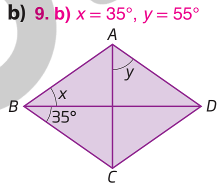
9. Nos losangos abaixo, determine x e y, em grau.

a)



9. a) $x = 40°$, $y = 70°$

b) **9. b)** $x = 35°$, $y = 55°$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

10. Em um trapézio isósceles, as bases medem 25 cm e 5 cm de comprimento, respectivamente, e o perímetro mede 64 cm. Quanto mede o comprimento de cada um dos outros lados? **10.** 17 cm

Quadriláteros

- Para realizar a **atividade 5**, os estudantes precisam traduzir o enunciado para a linguagem algébrica e lembrar que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é 360°. Espera-se que eles escrevam e façam as seguinte relações entre as sentenças algébricas:

$a + b + c + d = 360°$

$c = 2b = 2 \cdot (2a) = 4a$

$d = a + c = a + 4a = 5a$

$a + 2a + 4a + 5a = 360°$

$12a = 360°$

$a = 30°$

Assim, $b = 60°$, $c = 120°$ e $d = 150°$.

Classificação dos quadriláteros

- A **atividade 6** propõe aos estudantes que avaliem afirmações relacionadas aos quadriláteros e suas propriedades. Incentive-os a justificar o porquê das afirmações serem verdadeiras ou falsas. Espera-se que eles percebam que a afirmação do **item b** é falsa, porque o losango tem os quatro ângulos congruentes mas não necessariamente estes ângulos são retos. A afirmação do **item d** também é falsa, uma vez que nem todo retângulo é um quadrado. Você pode apresentar exemplos de retângulos que não sejam quadrados para a turma. Vale ressaltar que a recíproca da afirmação do **item d** é verdadeira, ou seja, todo quadrado é um retângulo. Comente isso com a turma.
- Para realizar a **atividade 7**, os estudante devem se lembrar de que, em um paralelogramo, os ângulos consecutivos são suplementares. Assim, se indicarem por x e y as medidas de abertura dos ângulos consecutivos, devem obter as seguintes equações:

$x + y = 180°$

$x - y = 108°$

Resolvendo o sistema formado pelas equações acima, espera-se que concluam que $x = 36°$ e $y = 144°$.

- Na **atividade 8**, os estudantes devem se lembrar de que, como o quadrilátero é um retângulo, suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios. Dessa forma, os quatro triângulos presentes na figura são isósceles. Utilizando o fato de que, em um triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes e também que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é 180°, os estudantes conseguem determinar x e y. Retome algum conceito caso seja necessário.

- Para determinar x e y em cada item da **atividade 9**, os estudantes precisam mobilizar o conceito de losango, lembrar que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e reconhecer congruências entre triângulos. Ao realizar cada item, incentive a argumentação.
- Na **atividade 10**, verifique se todos os estudantes compreendem que trapézio isósceles é aquele em que os lados paralelos são congruentes. Em seguida, incentive-os a traduzir o problema em uma equação. Indicando por x a medida do comprimento de cada um dos outros lados, temos que um exemplo de equação é:

$30 + 2x = 64$, em que x é um número racional maior que zero.

Ao resolver a equação, espera-se que os estudantes concluam que $x = 17$ cm. Portanto, cada um dos outros lados mede 17 cm.

CAPÍTULO 8 – ÁREA, VOLUME E CAPACIDADE

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 2, 4 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre figuras equivalentes.
- Conhecer o tangram e relacionar suas peças com triângulos e quadriláteros.

Inicie a aula perguntando para os estudantes se já manusearam um tangram. Espera-se que alguns deles contem alguma experiência que tiveram nos anos iniciais do ensino fundamental, por exemplo. Se possível, disponibilize peças de tangram para que os estudantes possam manusear e formar algumas figuras.

Espera-se que não tenham dificuldades para perceber que as peças do tangram se parecem com quadrados, paralelogramos e triângulos. Você pode ampliar a questão do primeiro item e pedir aos estudantes que classifiquem os triângulos do tangram em relação à medida dos lados e dos ângulos. Espera-se que eles concluam que todos os triângulos são triângulos retângulos e isósceles. É importante incentivá-los a justificar suas respostas.

As perguntas do segundo item exploram a noção intuitiva de figuras equivalentes, ou seja, figuras que têm a mesma medida de área. É importante que os estudantes percebam que, apesar de terem formatos diferentes, podemos decompor cada uma dessas figuras sempre nas mesmas sete figuras que correspondem às peças do tangram e, por essa razão dizemos que essas figuras são equidecomponíveis. Se achar conveniente defina esses conceitos para a turma.

Neste *Trocando ideias*, os estudantes exercitam sua curiosidade intelectual e mobilizam diferentes linguagens (verbal e visual), o que contribui para o desenvolvimento das competências gerais **2** e **4** da Educação Básica. Além disso, colocam em prática o seu espírito investigativo e interagem com os colegas, o que contribui para o desenvolvimento da competência geral **9** da Educação Básica e das competências específicas **2** e **8** de Matemática.

Capítulo 8

Área, volume e capacidade

Trocando ideias

O tangram é um quebra-cabeça chinês composto de 7 peças. Com ele é possível formar diferentes figuras sem sobrepor peças.


GALINA PETROVA/SHUTTERSTOCK

Trocando ideias: primeiro item: quadrados, paralelogramos e triângulos; segundo item: espera-se que os estudantes respondam que a medida da área das figuras é igual, porque elas são formadas pelas mesmas peças do tangram.

- As peças do tangram se parecem com quais figuras geométricas planas?
- As figuras ao redor do tangram central foram formadas com peças de um mesmo tangram. O que podemos afirmar sobre a medida da área de cada uma destas figuras? Por quê? Converse com os colegas.

Neste capítulo vamos estudar medidas de área, volume e capacidade.

166

Sugestão de proposta para a promoção da saúde mental dos estudantes

Reúna os estudantes em grupos para que possam formar figuras como as ilustradas nesta página. Você pode solicitar que confeccionem as peças em cartolina. Atividades como essa estimulam a criatividade e geram sensação de bem-estar, pois a cada arranjo de peças eles obtêm uma nova figura. Atividades em grupo aumentam a interatividade, comunicação e cooperação entre colegas de turma e, consequentemente, promovem a saúde mental dos estudantes.

1 Medida da área de figuras planas

Vamos retomar o cálculo da medida da área de alguns quadriláteros, como retângulos, quadrados, paralelogramos, trapézios e losangos, além do cálculo de área de triângulos.

Medidas das áreas do retângulo e do quadrado

Acompanhe as situações.

Situação 1

Joana foi encarregada de comprar um terreno para uma empresa, sabendo que poderia pagar até R$ 500,00 pelo metro quadrado do terreno.

Joana lembrou que para determinar a **medida da área de um retângulo** deve multiplicar a medida do comprimento da base pela medida do comprimento da altura.

$$A_{retângulo} = b \cdot h$$

medida do comprimento da base (b); medida do comprimento da altura (h)

ENÁGIO COELHO/ARQUIVO DA EDITORA

Substituindo os valores correspondentes à medida da largura e à medida do comprimento do terreno na expressão, Joana determinou a medida da área do terreno.

$$A_{terreno} = 12 \text{ m} \cdot 20 \text{ m} = 240 \text{ m}^2$$

Para determinar o valor máximo que poderia pagar pelo terreno, Joana multiplicou o valor correspondente à medida da área encontrada por 500.

$$240 \cdot 500 = 120\,000$$

Portanto, Joana poderia pagar, no máximo, R$ 120 000,00 por esse terreno.

Observações

1. Os matemáticos já provaram que a fórmula $A_{retângulo} = b \cdot h$ vale para quaisquer valores racionais positivos de b e h.
2. Não se esqueça de que, para obter a medida da área de qualquer figura, as medidas usadas no cálculo devem estar expressas na mesma unidade de medida de comprimento.

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Medida da área de figuras planas

BNCC:

Habilidades EF08MA06 e EF08MA19.

Objetivo:

Calcular a medida da área de triângulos e quadriláteros.

Justificativa

Calcular a medida da área de triângulos e quadriláteros é importante, pois muitas situações do cotidiano envolvem a determinação da medida da área de terrenos, cálculo de orçamentos para pintura ou de assentamento de cerâmica de um cômodo, determinação da medida da área de um pedaço de tecido, entre outras. Além disso, possibilita resolver e elaborar problemas que envolvem medidas de área e, consequentemente, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19**.

Mapeando conhecimentos

Organize a turma em duplas e distribua uma folha de papel com alguns triângulos e quadriláteros para que calculem a medida da área dessas figuras. Observe as estratégias empregadas por eles. É possível que apliquem diretamente as expressões de cálculo ou utilizem as ideias de decomposição e composição de figuras.

Para as aulas iniciais

Na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*, retoma-se o cálculo da medida da área do triângulo e de alguns quadriláteros. Peça aos estudantes que façam a leitura dessa revisão e realizem a **atividade 30**. Reserve um momento para fazer a correção coletiva da atividade.

Nos anos anteriores, os estudantes já estudaram o conceito de área e estabeleceram as expressões de cálculo da medida de área de triângulos e de quadriláteros. Neste momento, iremos retomar essas expressões por meio do trabalho com resoluções de problemas.

Medidas das áreas do retângulo e do quadrado

Na situação proposta, Joana está avaliando alguns terrenos e estimando os valores com base no preço máximo a ser pago por metro quadrado. Comente com os estudantes que os valores de terrenos são estabelecidos com base no preço de um metro quadrado, que pode variar de acordo com diferentes fatores, como localização, formato e características físicas.

Medidas das áreas do triângulo e do paralelogramo

É apresentada uma situação-problema em que é solicitado o cálculo da medida da área de dois triângulos e um paralelogramo. Aproveite esse momento para verificar a compreensão dos estudantes em relação às expressões indicadas para o cálculo da medida da área desses polígonos.

Se considerar adequado, solicite aos estudantes que deduzam a expressão algébrica para o cálculo da medida da área de um triângulo de base a e altura b a partir da expressão que determina a medida da área de um retângulo de lados que tenham comprimento medindo a e b. Como essa dedução foi apresentada no ano anterior, espera-se que os estudantes se lembrem dessa relação, mas, se tiverem dificuldades, retome esse conteúdo antes de propor as atividades deste tópico.

Assim como no caso do triângulo, a expressão algébrica para o cálculo da medida da área de um quadrado pode ser deduzida a partir da medida da área de um retângulo de mesma medida de base e de altura. É importante que os estudantes compreendam essa relação para atribuírem significado às expressões apresentadas.

Situação 2

Após visitarem o primeiro terreno, o corretor convidou Joana para conhecer outro.

ENÁGIO COELHO/ARQUIVO DA EDITORA

Joana sabia que um quadrado é um caso particular de retângulo; logo, para determinar a **medida da área de um quadrado**, ela deveria proceder como no cálculo da medida da área de um retângulo.

$$\boxed{A_{\text{quadrado}} = a \cdot a = a^2}$$

medida do comprimento do lado — medida do comprimento do lado

Substituindo a medida do lado do terreno nessa expressão, Joana determinou a medida da área do terreno.

$$A_{\text{terreno}} = 9\text{ m} \cdot 9\text{ m} = (9\text{ m})^2 = 81\text{ m}^2$$

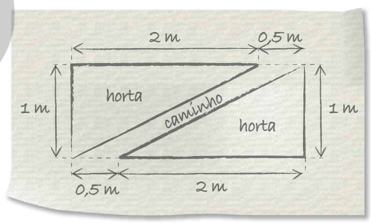
Para determinar o valor máximo a pagar por esse terreno, Joana calculou:

$$81 \cdot 500 = 40\,500$$

Portanto, Joana poderia pagar, no máximo, R$ 40 500,00 por esse terreno.

Medidas das áreas do triângulo e do paralelogramo

O esquema abaixo indica as medidas de comprimento da horta que Vitória vai construir. Entre as regiões triangulares há um espaço que se parece com um paralelogramo; nesse espaço, ela colocará placas de granito, compondo um caminho.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Para comprar o material necessário, Vitória precisa calcular as respectivas medidas de áreas destinadas à horta e ao caminho.

A **medida da área de um triângulo** pode ser determinada pela metade do produto da medida de comprimento da base pela medida de comprimento da altura correspondente.

$$\boxed{A_{\text{triângulo}} = \frac{\overset{\text{medida do comprimento da base}}{b} \cdot \overset{\text{medida do comprimento da altura}}{h}}{2}}$$

Substituindo as medidas correspondentes, a medida da área de uma região triangular é:

$$A = \frac{2\text{ m} \cdot 1\text{ m}}{2} = 1\text{ m}^2$$

Como a horta será construída em duas regiões triangulares com as mesmas medidas de altura e comprimento, a medida de suas áreas são iguais. Logo, 2 m² será a medida da área reservada para à construção da horta.

O caminho se parece com um paralelogramo cuja base mede 0,5 m de comprimento e a altura mede 1 m de comprimento. A **medida da área de um paralelogramo** é dada pela multiplicação entre a medida de comprimento de uma das bases pela medida de comprimento da altura correspondente a essa base.

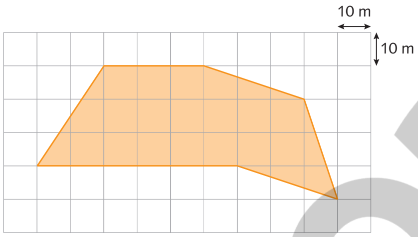
$$\boxed{A_{\text{paralelogramo}} = \underset{\text{medida do comprimento de uma das bases}}{b} \cdot \underset{\text{medida do comprimento da altura}}{h}}$$

Logo, a medida da área desse caminho é de:

$$A = 0{,}5\text{ m} \cdot 1\text{ m} = 0{,}5\text{ m}^2$$

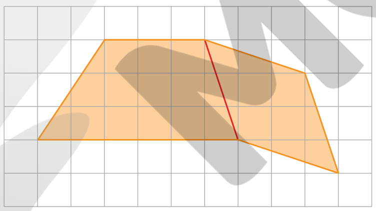
Medidas das áreas do trapézio e do losango

Juliano precisa calcular a medida da área aproximada de um terreno que se parece com um hexágono. A figura abaixo corresponde à planta desse terreno.



Nessa planta, cada centímetro equivale à medida de 10 m de comprimento real.

Analisando a planta, Juliano percebeu que é possível decompor esse terreno em dois quadriláteros: um trapézio e um losango.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

Medidas das áreas do trapézio e do losango

Na situação apresentada, para determinar a medida aproximada da área de um terreno, calculou-se a medida da área de um trapézio e de um losango, nos quais a representação do terreno foi decomposta. Aproveite esse momento para recordar o conceito de figuras equivalentes, que correspondem a figuras com mesma medida de área.

Essa situação ilustra o seguinte fato: em muitos casos, não será possível obter a medida da área por meio de uma expressão direta, então é conveniente decompor a figura em outras, como quadriláteros e triângulos, cujas expressões do cálculo da medida da área são conhecidas.

Caso os estudantes tenham dificuldades em compreender as expressões apresentadas para o cálculo da medida da área, trabalhe a decomposição e composição de figuras, relacionando a medida da área de trapézios e de losangos com a medida da área de retângulos.

Sugestão de atividade extra

Se tiver oportunidade, proponha aos estudantes, organizados em grupos, a realização do experimento "Qual é a área do quadrilátero?", do portal M³ Matemática Multimída. Nele, são apresentadas diferentes formas para o cálculo, algumas vezes aproximado, da medida da área de um quadrilátero. Em seguida, é pedida a construção de um quadrilátero. Na etapa final, cada grupo deve fazer aproximações para a medida da área do polígono, utilizando os métodos apresentados, e discutir qual forma foi a mais eficiente.

Juliano sabe que a **medida da área de um trapézio** é dada pela metade do produto da soma das medidas de comprimento das bases maior e menor pela medida de comprimento da altura.

medida do comprimento da base maior
medida do comprimento da base menor
medida do comprimento da altura

$$\boxed{A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}}$$

Com base na planta, Juliano percebeu que no trapézio a medida do comprimento da base menor (b) é 30 m, a medida do comprimento da base maior (B) é 60 m e a medida do comprimento da altura (h) é 30 m. Substituindo esses valores na expressão, ele determinou a medida da área do trapézio.

$$A = \frac{(30\ \text{m} + 60\ \text{m}) \cdot 30\ \text{m}}{2} = \frac{90\ \text{m} \cdot 30\ \text{m}}{2} = \frac{2700}{2}\ \text{m}^2 = 1350\ \text{m}^2$$

Com uma régua, Juliano mediu as diagonais do losango e obteve 2,8 cm como medida de comprimento aproximada para a diagonal menor e 5,7 cm para a diagonal maior. A **medida da área de um losango** é igual à metade do produto das medidas de comprimento das diagonais maior e menor.

medida do comprimento da diagonal maior
medida do comprimento da diagonal menor

$$\boxed{A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}}$$

Considerando que cada centímetro corresponde a 10 m de comprimento real, Juliano determinou que a medida do comprimento da diagonal menor (d) é aproximadamente 28 m e a medida do comprimento da diagonal maior (D) é aproximadamente 57 m. Logo, a medida da área aproximada será:

$$A \simeq \frac{57\ \text{m} \cdot 28\ \text{m}}{2} \simeq \frac{1596}{2}\ \text{m}^2 \simeq 798\ \text{m}^2$$

O símbolo $\simeq$ significa "aproximadamente igual".

Desse modo, Juliano concluiu que a medida da área aproximada do terreno é de 2148 m², pois:

$$1350\ \text{m}^2 + 798\ \text{m}^2 = 2148\ \text{m}^2$$

Atividades

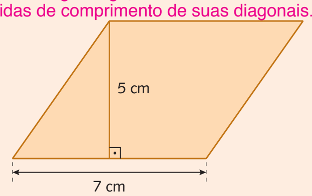
Faça as atividades no caderno.

1 A comunidade de um bairro resolveu restaurar o gramado de um antigo campo de futebol. Quantos metros quadrados de grama serão necessários para cobrir o campo, que tem medida de comprimento igual a 105 m e medida de comprimento da largura igual a 68 m? **1.** 7140 m²

2 Um quadrado tem diagonal medindo 5 cm de comprimento. Qual é a medida da área desse quadrado? Explique como você pensou para responder a essa questão. **2.** 12,5 cm². Espera-se que os estudantes percebam que um quadrado também é um losango. Logo, a medida de sua área pode ser determinada pela metade do produto das medidas de comprimento de suas diagonais.

3 Determine a medida da área do paralelogramo e, depois, responda à questão a seguir.

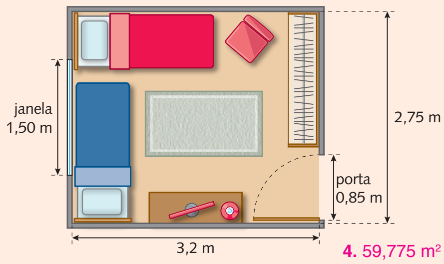
Se dobrarmos a medida do comprimento da altura do paralelogramo e dividirmos a medida do comprimento da base por 2, o que poderemos afirmar sobre a medida da área dessa nova figura? Converse com o professor e com os colegas. **3.** 35 cm². As medidas das áreas serão iguais, ou seja, as figuras serão equivalentes.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

5. a) A medida da área do quadrado é o dobro da medida da área do triângulo.

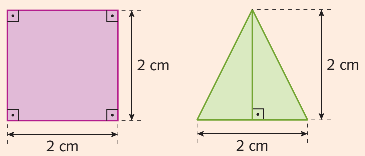
4 Heloísa vai pintar as paredes de três quartos de sua residência. Para saber a quantidade de tinta necessária, ela avaliou a planta de um desses quartos, sabendo que todos têm as mesmas medidas de comprimento.



4. 59,775 m²

A medida da distância do chão ao teto do quarto de Heloísa é de 2 m, a medida do comprimento da altura da porta é igual a 1,90 m e a janela tem 1,50 m de medida de comprimento de largura e 1,50 m de medida de comprimento de altura. Com base nessas informações, determine a medida da área total das paredes que serão pintadas.

5 Observe os polígonos a seguir.

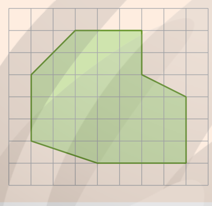


a) Qual é a relação entre a medida das áreas desses dois polígonos?

b) Desenhe no caderno um triângulo que tenha a mesma medida de área desse quadrado. Há somente um modo de desenhar esse triângulo? Converse com o professor e com os colegas.

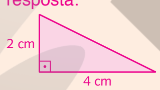
6 Determine a medida da área das figuras a seguir, sabendo que a medida do comprimento do lado de cada quadradinho é igual a 1 cm.

a)

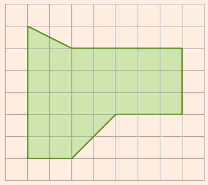


6. a) 33,5 cm²

5. b) Espera-se que os estudantes respondam que não. Exemplo de resposta:

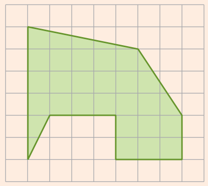


b)



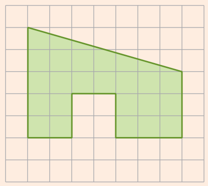
6. b) 28 cm²

c)



6. c) 27,5 cm²

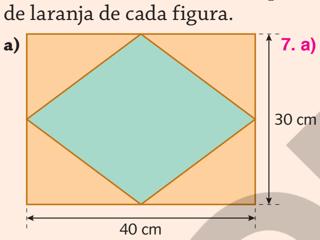
d)



6. d) 24 cm²

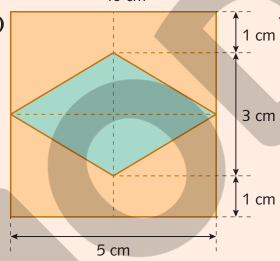
7 Calcule a medida da área da parte pintada de laranja de cada figura.

a)



7. a) 600 cm²

b)



7. b) 17,5 cm²

8 Desenhe a planta de um cômodo de sua residência e indique as respectivas medidas. Elabore um problema envolvendo a planta desenhada por você e faça o cálculo de área. Troque seu problema com um colega e solicite a ele que o resolva. Depois, verifiquem se as resoluções estão corretas.

8. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- Para realizar a **atividade 4**, os estudantes deverão determinar a medida da área das paredes de um dos quartos e, depois, multiplicar a medida obtida por 3. É importante que os estudantes considerem descontar a medida da área da porta e a da janela.
- Na **atividade 6**, oriente os estudantes a decompor as figuras da malha em triângulos e/ou quadriláteros para determinar a medida da área correspondente.

171

Medida da área do círculo

BNCC:

Habilidades EF08MA06 e EF08MA19.

Objetivo:

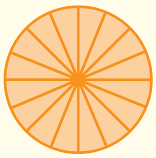
Calcular a medida da área de círculos, coroas circulares e setores circulares.

Justificativa

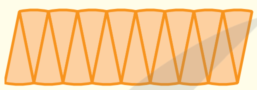
Calcular a medida da área de círculos, coroas circulares e setores circulares amplia os conhecimentos sobre cálculos de medidas de área dos estudantes e possibilita resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA19**.

Mapeando conhecimentos

Peça aos estudantes que desenhem um círculo em uma folha de papel e, depois, dividiam esse círculo em 16 setores circulares congruentes com o auxílio de um transferidor. Espera-se que eles obtenham uma figura como a da referência a seguir.



Depois, solicite aos estudantes que recortem todos os setores circulares obtidos e cole-os em outra folha de papel de modo a obter uma região plana como a representada a seguir.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

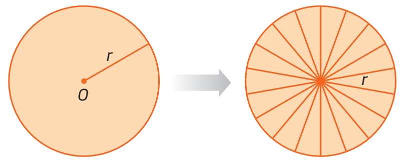
Em seguida, pergunte: "A região formada se parece com qual figura geométrica plana? Se *r* indica a medida do comprimento do raio do círculo, como podemos indicar a medida do comprimento da altura dessa região? Que expressão algébrica representa a medida do comprimento da base dessa região? Qual é a medida aproximada da área do círculo?".

Para as aulas iniciais

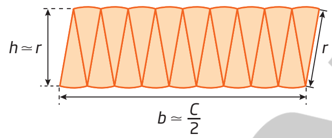
Ajude os estudantes a responder aos questionamentos feitos na dinâmica inicial. Por fim, desafie-os a determinar uma expressão para o cálculo da medida da área de uma coroa circular. Incentive-os a levantar hipóteses e a trocar ideias com os colegas.

2 Medida da área do círculo

Considere o círculo de centro *O* e raio de medida de comprimento *r*. Podemos decompor esse círculo em 18 setores circulares congruentes. Confira as figuras abaixo.



É possível reagrupar esses setores em uma figura que se parece com um paralelogramo. A medida do comprimento da altura *h* é aproximadamente igual a *r*, e a medida de comprimento da base *b* é aproximadamente igual a $\frac{C}{2}$, em que *C* é a medida do comprimento da circunferência.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Ao decompor qualquer círculo em *n* setores circulares congruentes, sendo *n* um número muito grande, cada setor é tão pequeno que sua medida de área é próxima da medida da área de um triângulo. Quanto maior for a quantidade *n* de setores em que dividirmos o círculo, maior será essa aproximação. Nesse caso, verificamos que a medida da área do círculo corresponde aproximadamente à medida da área do paralelogramo formado pelos *n* triângulos.

Como a medida do comprimento da base do paralelogramo é aproximadamente igual à metade da medida do comprimento da circunferência e a medida do comprimento da altura é aproximadamente igual à medida do comprimento do raio, podemos escrever:

$$A \simeq \frac{2\pi r}{2} \cdot r$$

Tomando por base essa ideia, pode-se inferir que: $\boxed{A_{\text{círculo}} = \pi r^2}$

Acompanhe a situação abaixo.

Andreia sabe que com 1 novelo de determinada linha, ela consegue confeccionar um tapete de tricô de 1 500 cm² de medida de área. Quantos novelos dessa linha Andreia usará para fazer um tapete circular cujo raio mede 100 cm de comprimento?

ENÁGIO COELHO/ARQUIVO DA EDITORA

Inicialmente, vamos determinar a medida aproximada da área do tapete de formato circular. Para isso, vamos considerar $\pi = 3{,}14$:

$$A_{\text{tapete}} \simeq 3{,}14 \cdot (100\ \text{cm})^2 \simeq 3{,}14 \cdot 10\,000\ \text{cm}^2 \simeq 31\,400\ \text{cm}^2$$

Para determinar a quantidade de novelos para a confecção do tapete, basta dividir a medida aproximada da área total do tapete pela medida da área confecionada a partir de 1 novelo:

$$31\,400 : 1\,500 \simeq 20{,}93$$

Logo, Andreia precisará de 21 novelos para confeccionar o tapete.

172

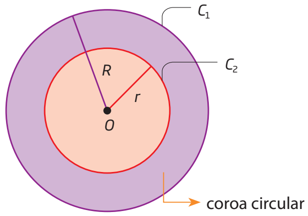
No exemplo apresentado, foi determinada a área de um tapete circular para estimar a quantidade de linha necessária para sua fabricação. Comente com os estudantes que o recurso da estimativa é bastante utilizado em diversas áreas, a fim de evitar a falta ou o desperdício de recursos.

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

Medida da área da coroa circular

Coroa circular é uma região limitada por duas circunferências concêntricas (os centros são coincidentes) situadas em um mesmo plano e com medidas de comprimento de raio diferentes.



Na ilustração, temos a circunferência C_1 de centro O e raio com medida de comprimento R e a circunferência C_2, também de centro O e raio com medida de comprimento r.

A medida da área (A) da coroa circular é obtida pela diferença entre a medida da área A_{C_1} do círculo C_1 e a medida da área A_{C_2} do círculo C_2.

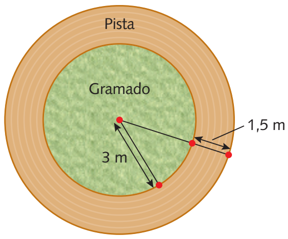
$$A = A_{C_1} - A_{C_2}$$

$$A = \pi R^2 - \pi r^2$$

$$\boxed{A = \pi(R^2 - r^2)}$$

Acompanhe o exemplo abaixo.

Um clube esportivo construirá uma pista de corrida que se parece com uma coroa circular, como mostra a figura.



Sugestão de leitura

GUELLI, Oscar. **A invenção dos números**. São Paulo: Ática, 1996. (Coleção Contando a história da Matemática).

Este livro apresenta um pouco da história dos diversos sistemas de numeração, a descoberta do número π e outros contextos que alteraram a história da humanidade.

Qual é a medida aproximada da área da pista, considerando $\pi = 3{,}14$?

A medida aproximada da área da pista é obtida pela diferença entre as medidas das áreas do círculo C_1, cujo raio mede 4,5 m de comprimento (3 m + 1,5 m), e do círculo C_2, cujo raio mede 3 m de comprimento:

$A_{C_1} \simeq 3{,}14 \cdot (4{,}5 \text{ m})^2 \simeq 3{,}14 \cdot 20{,}25 \text{ m}^2 \simeq 63{,}585 \text{ m}^2$

$A_{C_2} \simeq 3{,}14 \cdot (3 \text{ m})^2 \simeq 3{,}14 \cdot 9 \text{ m}^2 \simeq 28{,}26 \text{ m}^2$

Logo, para determinar a medida aproximada da área da pista, fazemos:

$$63{,}585 \text{ m}^2 - 28{,}26 \text{ m}^2 = 35{,}325 \text{ m}^2$$

Poderíamos determinar a medida aproximada da área da pista utilizando a expressão da medida da área de uma coroa circular:

$$A = \pi(R^2 - r^2)$$

Substituindo os valores correspondentes a R (medida do comprimento do raio de C_1) e r (medida do comprimento do raio de C_2), temos:

$$A \simeq 3{,}14 \cdot [(4{,}5 \text{ m})^2 - (3 \text{ m})^2] \simeq 3{,}14 \cdot [20{,}25 \text{ m}^2 - 9 \text{ m}^2] \simeq 3{,}14 \cdot 11{,}25 \text{ m}^2 \simeq 35{,}325 \text{ m}^2$$

Logo, a medida aproximada da área da pista é de 35,325 m².

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão de vídeo

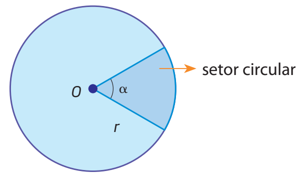
Para ilustrar o cálculo da medida da área de um círculo, sugerimos o vídeo *Roda do sonho*, do portal M³ Matemática Multimídia, que faz uso das personagens Pablo e Arquimedes para abordar a conclusão de Arquimedes sobre a medida da área de um círculo, que é equivalente à medida da área de um triângulo retângulo que tem como medida da base a medida do perímetro desse círculo e como medida da altura a medida do comprimento do seu raio. São também comentados o problema clássico da quadratura do círculo e a expressão da medida da área do círculo, como o produto do número π pelo quadrado da medida do comprimento do raio.

Ao trabalhar o cálculo da medida da área de um setor circular, é importante que os estudantes percebam que a medida da área do setor circular é diretamente proporcional à medida da abertura do seu ângulo central. Essa compreensão será um importante auxílio para a construção e interpretação de gráficos de setores. Para esses casos, é muito importante que os estudantes tenham alguns referenciais, como 50% (metade da medida da área do círculo) corresponde a um setor circular que tem medida da abertura de ângulo central é igual a 180° e 25% (um quarto da medida da área do círculo) corresponde a um setor circular que tem medida de abertura de ângulo central igual a 90°.

- Na **atividade 13** da página seguinte, os estudantes deverão determinar a medida do comprimento do diâmetro de um círculo, com base na medida de sua área. Se alguns estudantes concluírem que a resposta para o problema é 3 cm, isso pode ser um indício de que determinaram a medida do comprimento do raio em vez da medida do comprimento do diâmetro. Incentive-os a verificar se a resposta alcançada atende as condições do problema.
- Na **atividade 14** da página seguinte, os estudantes deverão determinar a medida da área do círculo correspondente ao espaço em que as árvores serão plantadas e a medida da área da coroa circular onde as flores serão plantadas. Já a medida da área do canteiro de flores pode ser determinada subtraindo da medida da área do círculo maior a medida da área do círculo menor.

Medida da área de um setor circular

Considere o setor circular da figura. A medida da abertura do seu ângulo central é α e a medida da sua área é diretamente proporcional à medida da abertura desse ângulo (em grau).



Assim, podemos escrever:

$$\frac{A_{setor}}{A_{círculo}} = \frac{\alpha}{360°}$$

$$\frac{A_{setor}}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360°}$$

Logo, a medida da área de um setor circular de raio r e ângulo central de medida de abertura α, em grau, é dada por:

$$\boxed{A_{setor} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2}$$

Acompanhe o exemplo.

Qual é a medida da área do setor circular de ângulo central com abertura medindo 40° e raio de 20 cm de medida de comprimento?

Podemos calcular a medida da área do setor usando a expressão:

$$A_{setor} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

Substituindo os valores correspondentes, temos:

$$A = \frac{40°}{360°} \cdot \pi \cdot (20\text{ cm})^2 = \frac{1}{9} \cdot \pi \cdot 400\text{ cm}^2 \simeq 44{,}44\pi\text{ cm}^2$$

Portanto, a medida da área desse setor é de aproximadamente $44{,}44\pi$ cm².

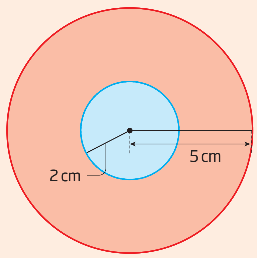
Atividades

Faça as atividades no caderno.

9 Calcule a medida da área de um círculo cujo raio mede 9 m de comprimento. **9.** 81π m²

10 Calcule a medida da área de um setor circular de ângulo central com abertura medindo 108° e raio de 8 cm de comprimento. **10.** $19{,}2\pi$ cm²

11 Calcule a medida da área da parte vermelha da figura. **11.** 21π cm²

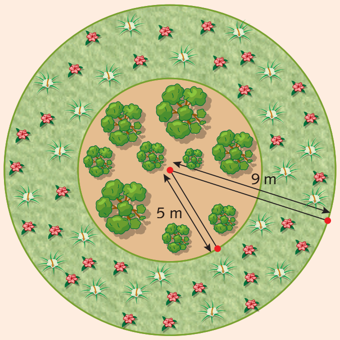


ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

12 Calcule a medida da área da coroa circular determinada por duas circunferências concêntricas cujos raios medem 8 cm e 5 cm de comprimento. **12.** 39π cm²

13 Uma piscina de formato circular ocupará, aproximadamente, 28,26 m² de medida de área. Considerando $\pi = 3{,}14$, qual é a medida do comprimento do diâmetro dessa piscina? **13.** 6 m

14 Em um jardim, Fabiana fará um canteiro circular, onde plantará algumas árvores de médio porte. Ao redor desse canteiro, ela plantará algumas flores. Observe o esboço que ela fez com as respectivas medidas desse canteiro.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Para cada um dos canteiros, Fabiana utilizará um tipo de adubo. O adubo A, que será usado no canteiro das árvores, custa R$ 10,00 o quilograma. Já o adubo B, que será usado nos canteiros das flores, custa R$ 7,00 o quilograma. Cada quilograma será usado para adubar 1 m² de cada espaço. Considerando $\pi = 3{,}14$, responda:

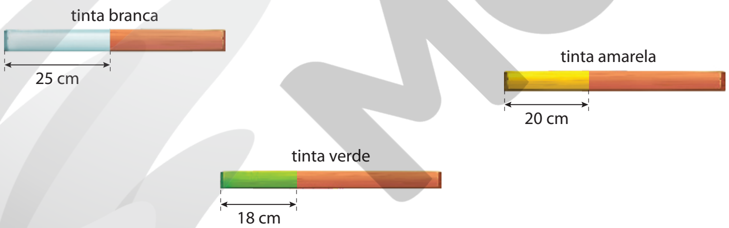
a) Quantos quilogramas de cada adubo serão necessários? **14. a)** Adubo A: 78,5 kg; adubo B: 175,84 kg

b) Quanto Fabiana gastará em adubo? **14. b)** R$ 2015,88

3 Medidas de volume e capacidade

Anderson ganhou três latas de tinta que haviam sobrado da reforma da casa de um amigo. As latas não estavam cheias.

Anderson pretendia usar o que sobrou das latas de tinta para pintar as paredes de três cômodos de sua residência. Para saber a quantidade de tinta de cada lata, ele primeiro colocou um pedaço de madeira até encostar no fundo da lata e, depois, mediu o comprimento da madeira suja de tinta. As medidas obtidas por Anderson estão representadas a seguir.



ILUSTRAÇÕES: ENÁGIO COELHO/ARQUIVO DA EDITORA

Na situação apresentada, é importante destacar que a medida da espessura da lata e a medida do comprimento do pedaço de madeira usado para medir a altura da tinta na lata influenciam no cálculo da medida do volume de tinta. Por esse motivo, indicamos que o valor calculado é uma aproximação.

(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular

Medidas de volume e capacidade

BNCC:

Habilidades EF08MA20 e EF08MA21.

Objetivos:

- Calcular a medida do volume de paralelepípedos reto-retângulos.
- Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico.

Justificativa

A habilidade **EF08MA20** envolve reconhecer a diferença entre medida de volume de um sólido geométrico e medida da capacidade de um recipiente, ou seja, compreender que a medida do volume de um sólido como a "quantidade" de espaço que esse sólido ocupa e a medida da capacidade de um recipiente como a medida do volume da parte interna dele. Ou seja, espera-se que eles percebam que volume e capacidade são as mesmas grandezas em situações diferentes. Nesse âmbito, é importante que reconheçam a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico. O cálculo do volume de paralelepípedos reto-retângulos, nesse contexto, auxilia na compreensão dessas relações e também a resolver e elaborar problemas que envolvem cálculos de medidas de volume, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA21**.

Mapeando conhecimentos

Forme uma roda de conversa e pergunte para os estudantes: "Qual é a diferença entre medida de volume de um sólido geométrico e medida da capacidade de um recipiente? Como se calcula a medida do volume de paralelepípedos reto-retângulos? E a medida do volume de cubos? Qual é a relação entre um litro e um decímetro cúbico? E entre um litro e um metro cúbico?".

Para as aulas iniciais

Retome com a turma o cálculo da medida do volume de paralelepípedos reto-retângulos e do cubo, fazendo a leitura coletiva da revisão presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, proponha que façam as **atividades 31** e **32**.

Se possível, em parceria com a turma, confeccione um recipiente cúbico que tenha arestas internas com 1 decímetro de medida de comprimento e depois, despeje 1 litro de água dentro dele. A ideia é que percebam que 1 L = 1 dm³.

Sugestão de atividade extra

Se considerar adequado, proponha aos estudantes uma atividade prática em que deverão colocar, em uma caixa de leite vazia, quantidades específicas de um líquido, sem o auxílio de um copo medidor. Para essa atividade, serão necessários os seguintes materiais: caixas de leite vazias (sem a “tampa”), água, régua, varetas de madeira e corante.

Organize os estudantes em grupos e proponha a eles que despejem diferentes quantidades de água dentro das caixas, por exemplo: 500 mL, 400 mL, 250 mL etc.

Utilizando estratégias próprias, como medir as dimensões da caixa para determinar a medida do volume ou fazer marcações internas de altura e usar a proporção, os estudantes deverão obter quantidades próximas às solicitadas. Para verificar se o conteúdo corresponde ao solicitado, pode-se usar um copo graduado como instrumento de medição.

Sabendo que a medida do comprimento e a da largura das latas é 23 cm, qual é a medida do volume aproximado de tinta em cada lata?

Quando enchemos um recipiente com líquido, verificamos que ele ocupa o formato do recipiente. Logo, podemos imaginar que as tintas no interior das latas ocupam o espaço correspondente ao volume de um paralelepípedo.

A medida do **volume de um paralelepípedo** é obtida multiplicando-se as medidas de comprimento, largura e altura, conforme a expressão a seguir.

$$\boxed{V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot h}$$

Então, como Anderson obteve as medidas aproximadas das alturas, temos:

- medida aproximada do volume de tinta branca:

$$V = 23 \text{ cm} \cdot 23 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} = 13\,225 \text{ cm}^3$$

- medida aproximada do volume de tinta amarela:

$$V = 23 \text{ cm} \cdot 23 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm} = 10\,580 \text{ cm}^3$$

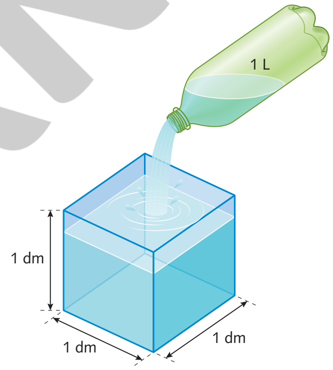
- medida aproximada do volume de tinta verde:

$$V = 23 \text{ cm} \cdot 23 \text{ cm} \cdot 18 \text{ cm} = 9\,522 \text{ cm}^3$$

Após medir a área das paredes de seus cômodos, Anderson verificou que seriam necessários 10 litros de tinta branca, 9 litros de tinta amarela e 8 litros de tinta verde. A quantidade de tinta disponível será suficiente?

Antes de responder a essa pergunta, vamos relembrar as unidades de medida de capacidade e de volume que fazem parte do Sistema Internacional de Unidades (SI).

O **litro** (**L**) é a unidade-padrão de medida de capacidade e corresponde à medida da capacidade de um cubo com arestas medindo 1 decímetro de comprimento, ou seja, 1 L corresponde à medida de volume igual a 1 decímetro cúbico.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\boxed{1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3}$$

O decímetro cúbico (dm^3) é uma das unidades de medida de volume, assim como o centímetro cúbico (cm^3).

Observe, no quadro abaixo, os múltiplos e os submúltiplos do litro, que estão no SI.

	Quadro de unidades de medida de capacidade						
	Múltiplos			**Unidade-padrão**	**Submúltiplos**		
Unidade	quilolitro	hectolitro	decalitro	**litro**	decilitro	centilitro	mililitro
Símbolo	kL	hL	daL	**L**	dL	cL	mL
Relação com o litro	1 000 L	100 L	10 L	**1 L**	0,1 L	0,01 L	0,001 L

Em relação às unidades de medida de volume, o **metro cúbico** (**m³**), que corresponde à medida do volume de um cubo cujas arestas medem 1 m, é a unidade-padrão de medida de volume. O quadro a seguir apresenta os múltiplos e os submúltiplos do metro cúbico.

	Quadro de unidades de medida de volume						
	Múltiplos			Unidade-padrão	Submúltiplos		
Unidade	quilômetro cúbico	hectômetro cúbico	decâmetro cúbico	**metro cúbico**	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
Símbolo	km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
Relação com o metro cúbico	10^9 m^3	1 000 000 m^3	1 000 m^3	**1 m^3**	0,001 m^3	10^{-6} m^3	10^{-9} m^3

Observe que cada unidade de medida de volume equivale a 1 000 vezes a unidade de medida imediatamente inferior.

$$km^3 \xrightarrow{\cdot 1000} hm^3 \xrightarrow{\cdot 1000} dam^3 \xrightarrow{\cdot 1000} m^3 \xrightarrow{\cdot 1000} dm^3 \xrightarrow{\cdot 1000} cm^3 \xrightarrow{\cdot 1000} mm^3$$

$$km^3 \xleftarrow{:1000} hm^3 \xleftarrow{:1000} dam^3 \xleftarrow{:1000} m^3 \xleftarrow{:1000} dm^3 \xleftarrow{:1000} cm^3 \xleftarrow{:1000} mm^3$$

Voltando ao problema inicial, vamos verificar se a quantidade de tinta disponível é suficiente para Anderson.

- Ele precisa de 10 L de tinta branca e tem 13 225 cm^3 dessa tinta. Vamos expressar a medida do volume de tinta disponível em dm^3; para isso, basta dividir 13 225 cm^3 por 1 000:

$$13\,225\ cm^3 : 1\,000 = 13{,}225\ dm^3$$

Como 1 dm^3 corresponde a 1 L, a quantidade de tinta disponível é aproximadamente 13,225 L. Portanto, a quantidade de tinta branca disponível é suficiente para Anderson.

Usando o mesmo raciocínio, verificamos se as quantidades de tintas amarela e verde são suficientes:

- tinta amarela:

  $10\,580\ cm^3 : 1\,000 = 10{,}58\ dm^3$

- tinta verde:

  $9\,522\ cm^3 : 1\,000 = 9{,}522\ dm^3$

Logo, Anderson tem disponível aproximadamente 10,58 L de tinta amarela e aproximadamente 9,522 L de tinta verde. Respondendo à pergunta do problema, ele tem tinta suficiente, pois precisa de 9 L de tinta amarela e 8 L de tinta verde.

Agora, observe mais uma situação.

Antonela contratou a empresa de Enzo para construir em seu sítio uma piscina com medida de capacidade de 60 000 L.

Para o projeto, a única restrição era que a medida da profundidade da piscina não poderia ser maior do que 1,6 metro. Com isso, Enzo propôs a Antonela uma piscina com as seguintes medidas: 7,5 m de largura, 5 m de comprimento e 1,6 m de altura.

Antonela, então, perguntou: "Com essas medidas, a piscina teria medida de capacidade suficiente para 60 mil litros?".

Aproveite esse momento para relembrar com os estudantes as transformações entre as unidades de medida de volume e capacidade e suas relações. Se considerar adequado, proponha uma atividade a ser realizada na lousa com a participação de todos os estudantes da turma. Para isso, escreva uma medida na lousa e peça a um estudante que a transforme em outra unidade de medida, por exemplo: transformar 20 dm^3 em litro. Faça isso algumas vezes, de modo que todos possam participar.

• Na **atividade 17**, os estudantes deverão determinar quantos litros de água devem ser colocados no vaso até atingir um terço da medida de sua altura. Espera-se que eles percebam que essa quantidade corresponde a um terço da medida da capacidade total do vaso, que, nesse caso, corresponde a 1,5 L.

• Na **atividade 18**, os estudantes deverão, inicialmente, transformar 22 500 L em metros cúbicos, obtendo, assim, 22,5 m³.

Para responder, Enzo expôs os seguintes cálculos:

Cálculo da medida do volume

$V_{paralelepípedo} = a \cdot b \cdot h = 7{,}5\ m \cdot 5\ m \cdot 1{,}6\ m = 60\ m^3$

A medida do volume da piscina é igual a $60\ m^3$.
Como $1\ m^3 = 1000\ L$, então a medida de capacidade da piscina será de 60 000 L de água.

Sugestão de leitura

POSKIT, Kjartan. **Medidas desesperadas**: comprimento, área e volume. São Paulo: Melhoramentos, 2006. (Coleção Saber Horrível)

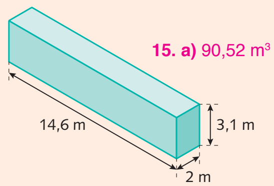
Utilizando um contexto irreverente, criativo e intrigante, o livro contempla situações que auxiliam na compreensão de conteúdos como: medidas antigas e atuais, área, perímetro, volume, ângulos e figuras geométricas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

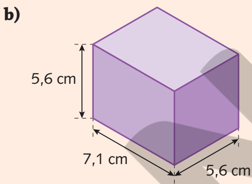
15 Calcule a medida do volume dos sólidos abaixo.

a)



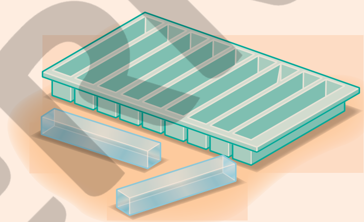
15. a) $90{,}52\ m^3$

b)

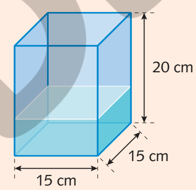


15. b) $222{,}656\ cm^3$

16 Sara e André passaram em uma lojinha quando estavam voltando para casa de um passeio e compraram uma forminha de gelo diferente. O gelo, quando formado, se parecia com um bloco retangular. Na embalagem está escrito que o gelo formado tem as seguintes medidas: 12 mm de largura, 12 mm de altura e 96 mm de comprimento. Qual é a medida do volume do gelo feito nessa forma? 16. $13\,824\ mm^3$



17 Um vaso se parece com um bloco retangular, como indica a figura abaixo. Se colocarmos água até um terço da sua medida de altura, quantos litros de água colocaremos nesse vaso? 17. 1,5 L



18 Camila vai construir uma piscina em seu quintal que ocupará uma região retangular cujos lados medem 3 m e 5 m de comprimento. Qual deverá ser a medida da profundidade dessa piscina de modo que a medida de capacidade total seja 22 500 L? 18. 1,5 m

19 Ivan pediu a um *designer* que criasse uma embalagem que se parecesse com um paralelepípedo reto-retângulo e que ocupasse uma medida de volume de $216\ cm^3$.

a) Desenhe duas opções de embalagem com essas características. 19. a) Respostas pessoais.

b) Acrescente uma característica à encomenda de Ivan para que a embalagem possa ter um único formato. 19. b) Exemplo de resposta: deve ter o formato de um cubo.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Lendo e aprendendo

EDUCAÇÃO FINANCEIRA · MEIO AMBIENTE · FORMAÇÃO CIDADÃ

Só o dilúvio salva

Cenário otimista para chuvas prevê reservatórios brasileiros em 2022 ainda mais abaixo do que já estão hoje

Foi em agosto deste ano, quando a conta de luz começou a subir, que a dona de casa Ana Paula Barbosa anunciou à família: não se liga mais o ventilador. Em Duque de Caxias, na Baixada Fluminense, ventilador em agosto não é luxo. Apesar do inverno, a temperatura na cidade chegou a 36 °C — e parece um pouco mais alta dentro da casa onde vivem cinco pessoas. Às vezes a sensação de calor é sufocante. Os dois filhos mais velhos, que agora trabalham e estudam em casa, tiveram que se adaptar. "A nossa qualidade de vida foi para o buraco", resume a mãe. Ela inaugurou outras medidas para economizar na conta de luz. Passou a lavar a roupa na mão, cortou o ferro de passar e manteve as luzes do quintal desligadas. Para os dois filhos mais velhos, o aperto foi um pouco maior. "É muito ruim pedir para o seu filho, que está estudando o dia todo nesse calor, não ligar o ventilador de teto", conta Barbosa. "Todo mundo começa a ficar irritado porque está desconfortável. É desconforto para trabalhar, desconforto para estudar e até para dormir. E todos os dias são assim." O ventilador foi cortado até na hora de dormir. Mesmo com as restrições, a conta de luz do mês ficou em 400 reais, 10% da renda mensal da família, e 120 reais mais cara que a de julho. Parece pouco, mas é quase o preço do botijão de gás, lembra Barbosa.

O jeito foi tirar do orçamento destinado à alimentação. O leite do lanche teve que ser cortado. O queijo e o presunto do sanduíche também. A variedade de legumes foi substituída por angu, e as frutas foram reduzidas. A preocupação é com o futuro. "Como vamos passar o verão no Rio de Janeiro sem ligar o ventilador? Fico pensando o que mais vou ter que cortar para pagar a luz. A única coisa que dá para tirar é a alimentação", diz Barbosa. Ela vai ter que enxugar ainda mais o orçamento nos próximos meses, porque a crise energética só tende a piorar: as projeções sobre a capacidade dos reservatórios de hidrelétricas do Sudeste e Centro-Oeste indicam que o Brasil caminha para chegar ao ano que vem num cenário de escassez hídrica e energética ainda pior que o de 2021, afirmam especialistas [...].

A estimativa é de que em fevereiro de 2022 os reservatórios dessas regiões — os mais importantes para a geração de energia elétrica no país — estejam num volume perto de 17% da capacidade total. Esses mesmos reservatórios fecharam o mês de fevereiro de 2021 com 29,7% da capacidade. As previsões são de meteorologistas da consultoria MegaWhat, especializada no setor energético, e levam em conta os mapas de chuva dos próximos seis meses, convertidos em vazão dos rios. No cenário mais pessimista, o nível desses reservatórios pode chegar a 11% em fevereiro do ano que vem — e no mais otimista de todos, a 22,9%, ainda muito abaixo do registrado em 2021. O racionamento está batendo à porta, e não só na casa de Caxias.

[...]

O cenário de escassez prolongada calculado pela MegaWhat é confirmado pelo Operador Nacional do Sistema Elétrico (ONS), responsável por despachar a energia elétrica no Brasil e regular o setor. O órgão estima que os reservatórios do Sudeste e Centro-Oeste chegarão a novembro deste ano com apenas 11,3% do volume total (em 2020, estava em torno de 20%). Isso na melhor das hipóteses, caso o governo consiga gerar mais energia e retire a pressão sobre as hidrelétricas. Na pior das hipóteses, esses reservatórios podem chegar a 8%. Essa é uma média de toda a região, o que significa que algumas reservas poderão estar com volume ainda mais baixo do que esse.

Dilúvio: Chuva muito abundante.

Angu: Massa espessa que se faz misturando, ao fogo, farinha de milho (fubá), de mandioca ou de arroz com água e, às vezes, sal.

Lendo e aprendendo

BNCC:

- Competências gerais 6, 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

- Desenvolver a competência leitora.
- Reconhecer como os conceitos de volume e capacidade são tratados pela mídia.
- Refletir sobre o consumo consciente de energia e sobre o controle das crises hídricas do país.

Temas contemporâneos transversais:

EDUCAÇÃO FINANCEIRA · MEIO AMBIENTE · FORMAÇÃO CIDADÃ

O texto da seção aborda a crise hídrica que afetou o Brasil em 2021. Faça a leitura coletiva com os estudantes e, depois, incentive-os a comentar sobre o que mais lhes chamou atenção. Se achar conveniente, explore a matéria na íntegra com a turma.

Comente com os estudantes que as causas mais comuns para a crise hídrica, tanto no mundo quanto no Brasil, são: desperdício de água; diminuição do nível de chuvas; aumento do consumo de água devido ao crescimento populacional, industrial e da agricultura. Caso tenha ocorrido outra crise após a que foi relatada na matéria, trate-a com a turma.

A temática trazida pela matéria promove a consciência socioambiental e o consumo responsável. Esse momento de diálogo inicial contribui para o desenvolvimento das competências gerais **7** e **9** da Educação Básica, pois os argumentos são feitos com base em informações e dados confiáveis e o diálogo e a empatia são, a todo momento, exercitados.

Verifique se os estudantes compreendem os dados informados no texto. Você pode propor perguntas do tipo: “No cenário mais otimista, qual era a estimativa do volume total dos reservatórios do Sudeste e Centro-Oeste em novembro de 2021? E no cenário mais pessimista?”. Deixe que os estudantes troquem ideias e tire possíveis dúvidas.

Caso julgue necessário, convide o(a) professor(a) de Ciências da Natureza para enriquecer as discussões. Essa valorização de saberes de outras áreas, com o intuito de ajudá-los a desenvolver a consciência socioambiental e o consumo responsável, contribui para o desenvolvimento da competência geral **6** da Educação Básica.

• Se achar necessário antecipe as questões da **atividade 1**. Após terminarem, faça a correção coletiva. Você pode ampliar a proposta dessa atividade e solicitar aos estudantes que elaborem questões com base no texto. Depois, eles podem trocar as questões com um colega e responder às propostas por ele.

Lendo e aprendendo

[...]

Na análise de Altino Ventura, ex-presidente da Eletrobras, um tipo de racionamento de energia elétrica já está em vigor agora, por meio dos preços. Um racionamento com “r” minúsculo, diz ele. É o que está acontecendo com a família de Ana Paula Barbosa, em Duque de Caxias. Todo dia, ela vai ao relógio da casa, que mede o consumo de energia elétrica, e verifica quantos quilowatts a família está gastando. Não dá para passar de 7, senão o orçamento estoura. “Quando passa um pouco eu tenho que pedir para alguém deixar de usar alguma coisa, algum aparelho, para não ultrapassar os quilowatts determinados”, explica a dona de casa. Mas se o preço continuar aumentando, não vai ter de onde tirar, diz ela. Além do ventilador, o micro-ondas já não é mais usado, nem a fritadeira elétrica. “Chegamos ao ponto de ter os aparelhos e não conseguirmos mais usá-los. Se eu cortar mais eu chego na pré-história. Mudar de hábito é legal quando se tem economia, não quando você precisa fazer isso para sobreviver.”

Para Ventura, o racionamento por aumento de preço é o pior que existe, porque penaliza mais quem tem menos condição de pagar e ainda dá um sinal inflacionário. Dados do Ipea mostram que, entre os mais pobres, o peso do aumento de energia elétrica na inflação é três vezes o observado entre os mais ricos. Agora em setembro, começa a valer a bandeira de escassez hídrica, com taxa extra de 14,20 reais para cada 100 kWh consumidos, acima da bandeira vermelha patamar 2 — até então, o máximo de cobrança adicional feita por energia. A bandeira de escassez será aplicada até abril do ano que vem.

O aumento aconteceu porque as termelétricas começaram a ser acionadas para compensar o déficit de energia diante da baixa dos reservatórios — o menor desde 2001. Hoje, todas as termelétricas do país estão em operação, e o custo dessa fonte energética — mais cara e poluente — foi progressivamente repassado aos consumidores. [...]

LICHOTTI, C. Só o dilúvio salva. **Piauí**, 9 set. 2021. Disponível em: https://piaui.folha.uol.com.br/so-o-diluvio-salva/. Acesso em: 6 jul. 2022.

kWh: Símbolo de quilowatt-hora que corresponde à energia produzida ou consumida no intervalo de 1 h com potência de 1 kW ou 10^3 W, no contexto da Eletricidade.

Déficit: Diferença entre o valor previsto e o valor realmente obtido.


THIAGO MESQUITA/FUTURA PRES

Represa Jaguari em Jacareí (SP). Considerada a segunda maior do Sistema Cantareira, operava com nível abaixo do normal em setembro de 2021.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Responda às questões no caderno.

a) Quando a matéria foi publicada? **1. a)** No dia 9 de setembro de 2021.

b) Qual era a renda mensal aproximada da família de Ana Paula Barbosa em 2021? **1. b)** R$ 4 000,00

c) Qual foi o valor da conta de luz no mês de julho da família de Ana Paula Barbosa? **1. c)** R$ 280,00

d) Por que foi cobrada uma taxa extra na conta de luz dos brasileiros em setembro de 2021? **1. d)** Porque as termoelétricas tiveram de ser acionadas para compensar o déficit de energia diante da baixa dos reservatórios.

2. Qual é o tema principal da matéria? **2.** alternativa **d**

a) A história da dona de casa Ana Paula Barbosa.

b) O aumento das chuvas do Brasil em 2021.

c) O uso de fontes renováveis de energia.

d) A crise hídrica no Brasil em 2021.

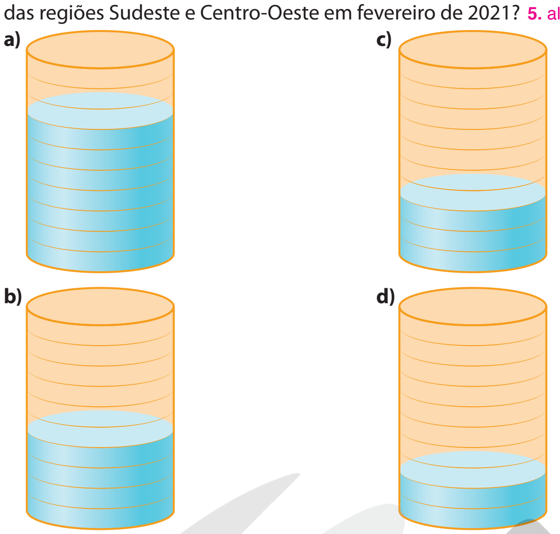
3. Espera-se que os estudantes respondam que a intenção é transmitir a ideia de que a situação dos reservatórios é muito crítica (reservatórios operando com níveis muito abaixo do normal) e que, portanto, seria necessário um dilúvio para melhorar o nível desses reservatórios.

3. Qual é a intenção por trás do título "Só o dilúvio salva"?

4. Segundo o ex-presidente da Eletrobras, Altino Ventura, o país estava vivendo, em setembro de 2021, um racionamento de energia com "r" minúsculo. O que ele quis dizer com isso?

4. Espera-se que os estudantes respondam que ele quis dizer que o racionamento de energia vivido no Brasil em setembro de 2021 era feito com base em pequenas ações, adotadas pelas famílias e que são motivadas pelo aumento do preço da energia elétrica.

5. Qual das imagens abaixo melhor retrata o nível dos reservatórios de hidrelétricas das regiões Sudeste e Centro-Oeste em fevereiro de 2021? **5.** alternativa **c**



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

6. Em 2021, Ana Paula Barbosa tomou uma série de medidas para diminuir o consumo de energia de sua residência e, consequentemente, pagar um valor menor de conta de luz. Quais das medidas adotadas por ela são também adotadas na sua casa? Além dessas medidas, você e sua família adotam outras? Responda no caderno. **6.** Respostas pessoais.

7. Na sua opinião, como crises hídricas como a que ocorreu no Brasil em 2021 podem ser combatidas? Produza um pequeno texto com sua opinião e, depois, compartilhe-o com os colegas. **7.** Respostas pessoais.

• A **atividade 2** permite avaliar se os estudantes conseguem identificar o tema principal da matéria. É importante incentivá-los a justificar suas respostas.

• Na **atividade 3**, os estudantes vão avaliar o título da matéria. Comente com eles que o título, além de informar, tem a função de captar a atenção do leitor. Então, antes mesmo que respondam à questão proposta na atividade, pergunte se eles consideram que o título da matéria cumpre a função de atrair o leitor. Depois dessa discussão inicial, deixe-os à vontade para refletir sobre a intenção do título "Só o dilúvio salva". Reserve um tempo para que compartilhem as respostas.

• Na **atividade 4**, os estudantes são convidados a interpretar a expressão utilizada pelo ex-presidente da Eletrobras, quando disse que o país estava vivendo, em setembro, um racionamento com "r" minúsculo. Após responderem à atividade, peça a alguns estudantes que leiam suas respostas em voz alta para a turma. Incentive os demais a validarem ou refutarem a resposta do colega, sempre com respeito e empatia.

• Para fazer a **atividade 5**, os estudantes devem, primeiro, identificar no texto que, em fevereiro de 2021, o nível dos reservatórios das hidrelétricas das regiões Sudeste e Centro-Oeste estava em 29,7% da capacidade. Depois, devem analisar as imagens e perceber que elas representam reservatórios divididos em dez partes iguais, concluindo, assim, que o reservatório do item **a** está com 70% da capacidade, o do item **b** está com 40%, o do item **c** com pouco menos de 30% (alternativa correta) e o do item **d**, com 20%.

• A interação com os colegas é incentivada nas **atividades 6** e **7** e, por esse motivo, a competência geral **9** da Educação Básica e a competência específica **8** de Matemática, têm o seu desenvolvimento favorecido.

• A **atividade 6** explora aspectos relacionados ao consumo responsável, uma vez que incentiva os estudantes a refletirem sobre as mudanças de hábito de uma família para diminuir o consumo de energia e o valor da conta de luz. Conforme os estudantes forem compartilhando suas respostas, anote na lousa as medidas que eles, juntamente com a família, adotam para economizar energia. Para aqueles que ainda não tomam nenhuma providência nesse sentido, desafie-os a mudar alguns hábitos e a comparar o consumo de energia e o valor das contas de luz antes e depois dessa mudança de hábitos. Você pode reservar uma aula futura para discutir os avanços alcançados por esses estudantes.

• Por fim, na **atividade 7**, os estudantes vão escrever um texto com a opinião deles sobre o que pode ser feito para combater crises hídricas. Espera-se que eles apontem, entre outras atitudes, a conscientização da população e a utilização de fontes alternativas de energia.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Medidas da área de figuras planas

• Na **atividade 1**, os estudantes devem multiplicar a medida do comprimento da base (15 cm) pela medida do comprimento da altura (8 cm) para determinar a medida da área do paralelogramo. Verifique se apresentam a medida da área com a unidade de medida de área correta.

• Na **atividade 2**, espera-se que os estudantes reconheçam que a figura representada no **item a** é um quadrado e que a figura representada no **item b** é um triângulo. Depois, eles devem calcular $(8\text{ cm})^2$ para determinar a medida da área do quadrado e $\frac{(6\text{ cm}) \cdot (6\text{ cm})}{2}$ para determinar a medida da área do triângulo. Também, em cada caso, verifique se, durante a realização dos cálculos, lidam corretamente com as unidades de medida de comprimento e de área.

• Para calcular a medida da área da parte azul da figura como solicitado na **atividade 3**, os estudantes podem calcular a medida da área do retângulo e subtrair dela a medida da área do losango. Para isso, espera-se que eles considerem que 40 cm e 100 cm correspondem, respectivamente, às medidas de comprimento das diagonais menor e maior do losango.

Medida da área do círculo

• Na **atividade 4**, é possível que alguns estudantes tenham dificuldades para compreender o termo “concêntricas”. Esclareça que circunferências concêntricas são aquelas que têm o mesmo centro. Em seguida, oriente-os a fazer um esboço da situação. Ao fazer isso, espera-se que percebam que precisam determinar a medida da área de uma coroa circular.

• Para calcular a medida da área do setor circular solicitada na **atividade 5**, os estudantes podem aplicar a relação que foi recordada ou aplicar o fato de que a medida da área do setor circular é diretamente proporcional à medida da abertura do ângulo central. É importante que os estudantes tenham contato com estas duas estratégias de resolução para que percebam que não precisam memorizar fórmulas.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Medida da área de figuras planas

Medida da área de um retângulo

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h$$

b: medida do comprimento da base; h: medida do comprimento da altura

Medida da área do quadrado

$$A_{\text{quadrado}} = a \cdot a = a^2$$

a: medida do comprimento do lado; a: medida do comprimento do lado

Medida da área do triângulo

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

b: medida do comprimento da base; h: medida do comprimento da altura

Medida da área do paralelogramo

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

b: medida do comprimento da base; h: medida do comprimento da altura

Medida da área do trapézio

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

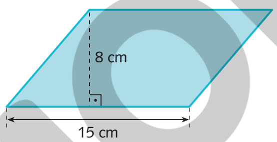
B: medida do comprimento da base maior; b: medida do comprimento da base menor; h: medida do comprimento da altura

Medida da área do losango

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

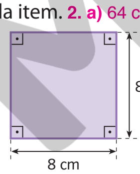
D: medida do comprimento da diagonal maior; d: medida do comprimento da diagonal menor

1. Determine a medida da área do paralelogramo a seguir. **1.** 120 cm²

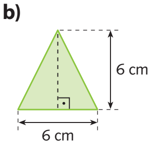


2. Determine a medida da área da figura plana de cada item. **2. a)** 64 cm² **2. b)** 18 cm²

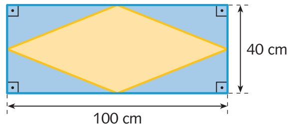
a)



b)



3. Calcule a medida da área da parte pintada de azul. **3.** 2 000 cm²



Medida da área do círculo

Medida da área do círculo

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$

r: medida do comprimento do raio

Medida da área da coroa circular

$$A = \pi\,(R^2 - r^2)$$

R: medida do comprimento do raio do círculo maior; r: medida do comprimento do raio do círculo menor

Medida da área de um setor circular

A medida da área de um setor circular de raio r e ângulo central de medida de abertura α, em grau, é dada por: $A_{\text{setor}} = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

4. Calcule a medida da área da região determinada por duas circunferências concêntricas cujos raios medem 10 cm e 4 cm de comprimento. **4.** $A = 84\pi$ cm²

5. Calcule a medida da área do setor circular cuja medida da abertura do ângulo central é 30° e a medida do comprimento do raio é 5 cm. **5.** $2{,}08\pi$ cm²

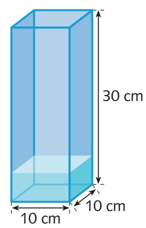
Medidas de volume e capacidade

$$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot h$$

a: medida do comprimento; b: medida da largura; h: medida da altura

O **litro** (**L**) é a unidade-padrão de medida de capacidade e corresponde à medida de capacidade de um cubo com arestas medindo 1 dm de comprimento, ou seja, 1 L = 1 dm³

6. Uma caixa se parece com um bloco retangular. Colocando água em até um sexto de sua medida da altura, quantos litros de água serão inseridos nessa caixa? **6.** 0,5 L



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Medidas de volume e capacidade

• Na **atividade 6**, os estudantes vão calcular o volume de uma caixa que se parece com um bloco retangular para depois calcular quantos litros de água foram inseridos na caixa. É possível que alguns estudantes calculem somente a medida do volume da caixa. Essa ocorrência é um indício de que não compreenderam a situação-problema. Se esse for o caso, faça a leitura coletiva do enunciado e tire as eventuais dúvidas. Aproveite a oportunidade para verificar se compreendem a diferença entre volume e capacidade (a medida do volume de um sólido é a “quantidade” de espaço que esse sólido ocupa e a medida da capacidade de um recipiente é a medida do volume da parte interna dele).

Capítulo 9

Equações do 2º grau

Trocando ideias

A raiva transmitida por cães e gatos a humanos é uma doença que não tem cura, e sua transmissão pode acontecer por meio de mordida, lambida ou arranhão do animal infectado. Por ano, cerca de 60 mil pessoas morrem pela doença, e a vacinação é uma forma de erradicá-la.

Reprodução do cartaz oficial da Campanha Nacional de Vacinação Contra a Raiva de 2021.

Trocando ideias: primeiro item: resposta pessoal; segundo item: 64 cm e 46 cm

- Você tem um cão ou gato de estimação? Se sim, ele já foi vacinado contra a raiva? Converse com os colegas.
- Sabendo que a medida da área do cartaz oficial é 2944 cm² e que seus lados medem x e $\frac{23x}{32}$ de comprimento, determine a medida, em centímetro, do comprimento dos lados do cartaz oficial. Faça os cálculos no caderno.

Neste capítulo, vamos aprender a resolver algumas **equações do 2º grau com uma incógnita** e a resolver problemas como o do item anterior.

Sugestão de proposta para a promoção da saúde mental dos estudantes

A relação dos estudantes com seus animais de estimação pode aliviar sintomas de ansiedade, depressão e estresse. Por esse motivo, considere promover, na escola, uma ação em que os estudantes, acompanhados de seus responsáveis, possam levar seus animais de estimação. Nesse evento, busque conscientizar a todos sobre a importância de cuidar dos animais e vaciná-los. Caso seja possível, promova algumas gincanas envolvendo os pets. Convide os professores de outras áreas para ajudá-lo nessa empreitada.

CAPÍTULO 9 – EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 2, 4 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 3, 5, 6 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- Conscientizar os estudantes sobre a importância da Campanha Nacional de Vacinação Contra a Raiva.

Temas contemporâneos transversais:

Inicie a aula propondo aos estudantes que respondam as questões do primeiro item. Reserve um tempo para tenham a oportunidade de contar suas experiências. Depois, explique que a raiva é uma doença que mata e pode ser transmitida por inúmeros animais como furões, raposas, guaxinins, gambás etc., no entanto, a campanha foca nos cães e gatos por serem os animais que costumam conviver com mais frequência com os humanos. É importante que eles se conscientizem de que a vacinação protege não somente os animais, como todas as pessoas que convivem com eles, sendo, portanto, uma atitude cidadã que protege a saúde de todos a nossa volta.

Organize a turma em duplas para que resolvam o problema proposto no segundo item. Esse é o momento oportuno para verificar se os estudantes conseguem traduzir uma situação-problema por meio da linguagem algébrica, se reconhecem uma equação e se conseguem resolver uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ utilizando suas estratégias pessoais. Esse problema coloca os estudantes diante de uma situação em que devem dialogar, utilizar diferentes linguagens (verbal e simbólica) e ferramentas matemáticas (cálculo da medida da área de retângulos e linguagem algébrica), investigar e mobilizar diferentes áreas da Matemática.

Ao final, peça que as duplas compartilhem as resoluções.

Equação do 2º grau com uma incógnita

BNCC:
- Competências específicas 2 e 6 (as descrições estão na página em VII).
- Habilidades EF08MA06 e EF08MA09.

Objetivos:
- Reconhecer equações do 2º grau com uma incógnita.
- Identificar as raízes de uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Justificativa

Reconhecer equações do 2º grau com uma incógnita amplia os conhecimentos anteriores dos estudantes sobre equações. Já a identificação das raízes de uma equação do 2º grau do tipo $ax^2 = b$ permite aos estudantes reconhecer que esse tipo de equação tem 0, 1 ou 2 raízes reais.

Mapeando conhecimentos

Escreva na lousa equações do 2º grau com uma incógnita completas e incompletas e pergunte para a turma: “Qual é o grau dessas equações? Quais valores satisfazem cada uma dessas equações? Vocês sabem resolver algumas dessas equações? Explique como.” A ideia é que determinem as raízes dessas equações por tentativa e erro ou utilizando estratégias pessoais.

Para as aulas iniciais

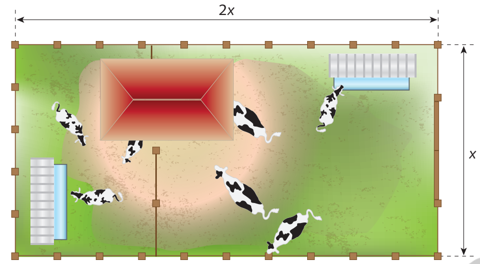
O conceito de equação do 1º grau com uma incógnita, de raiz de uma equação e o procedimento para resolvê-las são retomados na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Explore essas revisões e as **atividades** de **33** a **38** com a turma.

Em seguida, revisite os questionamentos e as equações que escreveu na lousa na dinâmica inicial. Verifique se os estudantes perceberam a diferença entre as equações de 1º e 2º graus com uma incógnita e peça que compartilhem as estratégias empregadas para determinar as raízes das equações. Convém orientá-los a verificar se as raízes encontradas satisfazem a equação.

1 Equação do 2º grau com uma incógnita

Acompanhe a situação a seguir.

Um curral tem formato retangular e medida de área igual a 288 m². Sabendo que uma das dimensões mede o dobro da outra, quanto mede cada uma das dimensões desse curral?



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Indicando por x a medida do comprimento da menor dimensão, temos que $2x$ corresponde à medida do comprimento da maior dimensão e $x \cdot 2x$ corresponde à medida da área do curral. Assim:

$$x \cdot 2x = 288$$
$$2x^2 = 288$$
$$2x^2 - 288 = 0, \text{ com } U = \mathbb{R}_+^*$$

$\mathbb{R}_+^*$**:** Conjunto dos números reais positivos.

Uma maneira de calcular a medida do comprimento de cada uma das dimensões desse curral é resolver essa equação.

A equação $2x^2 - 288 = 0$ é um exemplo de **equação do 2º grau com uma incógnita**, nesse caso, indicada pela letra x.

> Denominamos **equação do 2º grau** na incógnita x aquela que pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

Os números a, b e c são chamados **coeficientes** da equação do 2º grau. Agora, observe alguns exemplos em que identificamos os valores dos coeficientes de equações do 2º grau.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ é uma equação do 2º grau, com $a = 1$, $b = -5$ e $c = 6$.

b) $6x^2 - x - 1 = 0$ é uma equação do 2º grau, com $a = 6$, $b = -1$ e $c = -1$.

c) $7x^2 - x = 0$ é uma equação do 2º grau, com $a = 7$, $b = -1$ e $c = 0$.

d) $x^2 - 36 = 0$ é uma equação do 2º grau, com $a = 1$, $b = 0$ e $c = -36$.

Observação

As equações abaixo não são equações do 2º grau com uma incógnita:

a) $x^2 + 2y^2 = 8$, pois possui duas incógnitas: x e y.

b) $x^3 + 4x^2 - x = -7$, pois o maior expoente da incógnita x é 3.

c) $(3y^2 - 2)^2 = 0$, pois o maior expoente da incógnita y é 4, já que $(3y^2 - 2)^2$ é igual a $3y^4 - 6y^2 + 4$.

184

Inicie a explicação do tópico relembrando o significado de coeficiente. É importante que os estudantes distingam uma equação do 2º grau de uma equação do 1º grau e que consigam reconhecer quais equações do 2º grau são completas e quais são incompletas.

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Equações completas e incompletas

Quando uma equação do 2º grau com uma incógnita, na forma $ax^2 + bx + c = 0$, tem todos os coeficientes (a, b, c) diferentes de zero, dizemos que a equação é **completa**. Considere os exemplos.

a) $x^2 - 9x + 20 = 0 \; \begin{cases} a = 1 \\ b = -9 \\ c = 20 \end{cases}$

b) $-x^2 + 10x - 16 = 0 \; \begin{cases} a = -1 \\ b = 10 \\ c = -16 \end{cases}$

Quando b e/ou c são iguais a zero, dizemos que a equação é **incompleta**. Considere os exemplos.

a) $x^2 - 36 = 0 \; \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -36 \end{cases}$

b) $x^2 - 10x = 0 \; \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \\ c = 0 \end{cases}$

c) $4x^2 = 0 \; \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

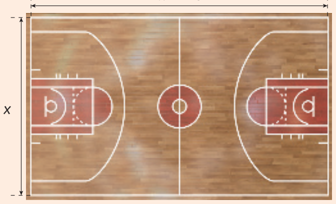
Neste capítulo, vamos estudar as equações do 2º grau incompletas; no próximo ano, será aprofundado o trabalho com as equações consideradas completas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Exemplo de resposta: $x^2 + 13x - 420 = 0$, com $U = \mathbb{R}^*_+$

1 Uma quadra de basquete tem medida de área igual a 420 m². Escreva a equação do 2º grau que pode ser utilizada para determinar a medida do comprimento e a medida da largura da quadra, de acordo com a figura representada abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

2 Identifique as equações do 2º grau.

a) $6x + 5 = 0$

b) $x^2 - 6x + 9 = 0$

c) $y^2 - 4y = 0$

d) $0x^2 + 5x + 6 = 0$

e) $9 - y^2 = 0$

f) $(2z - 3)^2 = 0$

2. alternativas **b**, **c**, **e**, **f**

3 Considerando $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, determine os coeficientes das equações.

a) $-3x^2 + 6x = 0$ **3. a)** $a = -3$, $b = 6$, $c = 0$

b) $3x^2 - 12 = 0$ **3. b)** $a = 3$, $b = 0$, $c = -12$

c) $25 - 10x + x^2 = 0$ **3. c)** $a = 1$, $b = -10$, $c = 25$

d) $(k + 1)x^2 - 2kx = 0$, com $k + 1 \neq 0$

3. d) $a = k + 1$, $b = -2k$, $c = 0$

4 Escreva no caderno a equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que:

a) $a = 5$, $b = -1$ e $c = 0$ **4. a)** $5x^2 - x = 0$

b) $a = 4$, $b = 0$ e $c = -9$ **4. b)** $4x^2 - 9 = 0$

c) $a = 0{,}2$, $b = 1$ e $c = 0{,}5$

4. c) $0{,}2x^2 + x + 0{,}5 = 0$

5 Um quadrado cujo comprimento do lado mede x tem medida da área igual a 625 m². Escreva uma equação do 2º grau para determinar o valor de x.

5. Exemplo de resposta: $x^2 - 625 = 0$, com $U = \mathbb{R}^*_+$

6 Classifique as equações do 2º grau em completas ou incompletas.

a) $3x^2 + 5x = 0$ **6. a)** incompleta

b) $-3x^2 + 9 = 0$ **6. b)** incompleta

c) $x^2 + 7x + 12 = 0$ **6. c)** completa

d) $6x^2 = 0$ **6. d)** incompleta

e) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ **6. e)** completa

7 Determine os valores possíveis de m na equação $(3m - 2)x^2 + (2m + 1)x - 4 = 0$, de modo que ela seja do 2º grau. **7.** $\mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$

8 Escreva a equação $5 - \frac{(x-3)}{4} = 2x - (x - 2)^2$ na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

8. Exemplo de resposta: $4x^2 - 25x + 39 = 0$

Equações completas e incompletas

Após apresentar o conceito de equações completas e incompletas, enfatize que neste capítulo o foco é o estudo das equações do 2º grau com uma incógnita do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que $b = 0$.

• Na **atividade 7**, verifique se os estudantes são capazes de perceber que, para responder à questão, basta impor que o coeficiente de x^2 seja diferente de zero, isto é: $3m - 2 \neq 0$.

Sugestão de atividade extra

Peça à turma que façam uma pesquisa, cujo objetivo é responder: "Historicamente, as equações do 2º grau, completas ou incompletas, ajudaram a resolver que tipo de problema?". Espera-se que os estudantes cheguem à conclusão de que os problemas tratados eram relacionados a medidas de área.

185

Raiz de uma equação do 2º grau

Podemos associar este tópico à determinação do valor numérico de uma expressão algébrica, pois, para verificar se um número é raiz de uma equação, substituímos a incógnita pelo número efetuamos os cálculos. É importante que os estudantes percebam, entretanto, que no contexto de uma equação, as letras assumem o papel de incógnita; enquanto em uma expressão algébrica, as letras representam uma variável. Questione-os a respeito dessa distinção, verificando se a diferença está clara. Esclareça eventuais dúvidas.

Raiz de uma equação do 2º grau

Raiz de uma equação é um número que, ao substituir a incógnita, torna a sentença verdadeira.

Podemos verificar se um número é ou não raiz de uma equação substituindo a incógnita por esse número. Se a sentença for verdadeira, o número considerado é raiz da equação; se a sentença for falsa, o número não é raiz da equação.

Vamos verificar se, por exemplo, os números –3, 0, 1 e 3 são raízes da equação $3x^2 - 27 = 0$.

Para $x = -3$:

$3x^2 - 27 = 0$

$3 \cdot (-3)^2 - 27 = 0$

$3 \cdot 9 - 27 = 0$

$0 = 0 \longrightarrow$ sentença verdadeira

Para $x = 0$:

$3x^2 - 27 = 0$

$3 \cdot (0)^2 - 27 = 0$

$3 \cdot 0 - 27 = 0$

$-27 = 0 \longrightarrow$ sentença falsa

Para $x = 1$:

$3x^2 - 27 = 0$

$3 \cdot (1)^2 - 27 = 0$

$3 \cdot 1 - 27 = 0$

$-24 = 0 \longrightarrow$ sentença falsa

Para $x = 3$:

$3x^2 - 27 = 0$

$3 \cdot (3)^2 - 27 = 0$

$3 \cdot 9 - 27 = 0$

$0 = 0 \longrightarrow$ sentença verdadeira

Então, verificamos que –3 e 3 são raízes da equação, enquanto 0 e 1 não são raízes de $3x^2 - 27 = 0$.

Agora, vamos verificar um novo exemplo em que precisamos determinar p na equação $(2p - 1)x^2 - 2 = 0$, sabendo que 2 é raiz.

Substituindo a incógnita x por 2, já que 2 é raiz da equação, podemos obter o valor de p.

$(2p - 1) \cdot (2)^2 - 2 = 0$

$(2p - 1) \cdot 4 - 2 = 0$

$8p - 4 - 2 = 0$

$8p - 6 = 0$

$8p = 6$

$p = \frac{6}{8}$

$p = \frac{3}{4}$

Portanto, o valor de p é $\frac{3}{4}$, sabendo que a raiz da equação $(2p - 1)x^2 - 2 = 0$ é 2.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9 Dados os números –4, –2, –1, 0, 1, 2 e 4, quais deles são raízes da equação $-2x^2 + 8 = 0$? **9.** –2 e 2

10 Em $\left(\frac{3k}{2}\right)x^2 - \frac{5}{2} = 0$, com $k \neq 0$, qual é o valor de k para que $-\frac{1}{2}$ seja raiz dessa equação? **10.** $k = \frac{20}{3}$

11 Verifique se –0,2 é raiz das equações abaixo.

a) $x^2 + 9 = 0$ **11. a)** não

b) $125x^2 - 5 = 0$ **11. b)** sim

12 Dê um exemplo de equação do 2º grau com uma incógnita, de modo que:

a) 0 seja uma raiz; **12. a)** Exemplo de resposta: $x^2 = 0$

b) não possua raízes reais.

12. b) Exemplo de resposta: $x^2 + 1 = 0$

2 Resolução de equações do 2º grau

Resolver uma equação do 2º grau consiste em encontrar as raízes dessa equação que pertencem ao conjunto universo dela. Essas raízes, que pertencem ao conjunto universo, são as **soluções** dessa equação e formam o seu **conjunto solução**, que é indicado por S.

Acompanhe nos exemplos a seguir como resolver algumas equações do 2º grau incompletas.

a) Vamos resolver a equação $2x^2 - 72 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.

$2x^2 - 72 + 72 = 0 + 72$ → Adicionamos 72 a ambos os membros da equação.

$2x^2 = 72$

$\frac{2x^2}{2} = \frac{72}{2}$ → Dividimos os dois membros por 2.

$x^2 = 36$

$x = \sqrt{36} = 6$ ou $x = -\sqrt{36} = -6$

Como –6 e 6 são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \{-6, 6\}$.

b) Vamos resolver a equação $-3x^2 = 0$, em $\mathbb{R}$.

$\frac{-3x^2}{-3} = \frac{0}{-3}$ → Dividimos os dois membros por –3.

$x^2 = 0$

$x = -0 = 0$ ou $x = +0 = 0$

Como a equação tem duas raízes reais iguais a zero e 0 pertence ao conjunto universo, então $S = \{0\}$.

Observação

Quando a raiz da equação não pertence ao conjunto universo, podemos representar o conjunto solução como $\varnothing$ ou { }. Observe o exemplo abaixo.

- Vamos resolver a equação $3x^2 + 6 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.

$3x^2 + 6 - 6 = 0 - 6$ → Subtraímos 6 de ambos os membros da equação.

$3x^2 = -6$

$\frac{3x^2}{3} = \frac{-6}{3}$ → Dividimos os dois membros por 3.

$x^2 = -2$

Como não existe um número real que, elevado ao quadrado, seja igual a –2, dizemos que a equação não tem raízes reais ou não tem solução em $\mathbb{R}$. Ou seja, $S = \varnothing$ ou $S = \{\ \}$.

Faça a seguinte pergunta aos estudantes: "Se o conjunto universo considerado no 1º exemplo fosse o conjunto dos números naturais, a equação $2x^2 - 72 = 0$ teria quantas soluções? Por quê?". Espera-se que eles respondam que a equação teria uma única solução, pois –6 não é um número natural.

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Resolução de equações do 2º grau

BNCC:

- Competência geral 8 (a descrição está na página VI).
- Habilidade EF08MA09.

Objetivos:

- Resolver equações do 2º grau com uma incógnita do tipo $ax^2 = b$.
- Resolver e elaborar problemas que envolvam equações do 2º grau com uma incógnita do tipo $ax^2 = b$.

Tema contemporâneo transversal:

SAÚDE

Justificativa

Resolver equações do 2º grau com uma incógnita do tipo $ax^2 = b$ amplia o repertório de cálculo dos estudantes e permite a eles resolver e elaborar diferentes problemas que podem se traduzidos por meio de equações desse tipo, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA09**.

Mapeando conhecimentos

Proponha aos estudantes que resolvam as seguintes equações, considerando $U = \mathbb{R}$.

- $x^2 - 36 = 0$.
- $25x^2 - 1 = 0$.
- $x^2 + 81 = 0$.

Observe as estratégias empregadas por eles e incentive a troca de ideias.

Para as aulas iniciais

Retome as equações da dinâmica inicial e peça a alguns estudantes que expliquem como fizeram para resolvê-las. É importante incentivar os demais estudantes a verificar se as raízes encontradas pelo colega satisfazem a equação e se ele de fato encontrou todas as raízes reais. Em seguida, comente que as estratégias utilizadas para resolver esse tipo de equação são similares às estratégias utilizadas para a resolução de equações do 1º grau com uma incógnita. Em seguida, mostre como resolver cada uma das equações. Você também pode discutir com eles qual seria o conjunto solução de cada equação, caso o conjunto universo de cada uma fosse $\mathbb{N}$.

O boxe *Veja que interessante* trata do Índice de Massa Corpórea (IMC). A exploração desse tema favorece o desenvolvimento da competência geral **8**.

Comente que a fórmula para o cálculo desse índice só é válida para adultos e que outros fatores devem ser considerados antes de chegar a qualquer conclusão a respeito das condições de saúde de uma pessoa. Após essa conversa, peça que apresentem exemplos de outras situações que conhecem e que envolvem expressões como a que foi obtida para representar o IMC.

Veja que interessante

Faça as atividades no caderno.

SAÚDE

Você já ouviu falar em IMC?

O IMC (Índice de Massa Corpórea) é calculado a partir da razão entre a medida da massa (em quilograma) e o quadrado da medida do comprimento da altura (em metro) de uma pessoa adulta. Esse índice foi desenvolvido no século XVIII pelo cientista belga Adolphe Quételet, mas somente em 1980 passou a ser utilizado como um dos padrões internacionais de referência para medidas de obesidade pela Organização Mundial da Saúde (OMS).

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

O IMC pode ser utilizado como parâmetro para adultos de 20 a 59 anos de idade. Esse índice não se aplica a crianças e adolescentes nem a idosos; para essas faixas etárias, são aplicados métodos específicos. Em pessoas muito musculosas, também pode acontecer de o índice indicar sobrepeso indevidamente.

Tomando como exemplo um rapaz com 82 kg e 1,85 m, temos:

$$\text{IMC} = \frac{82}{(1{,}85)^2} = \frac{82}{3{,}4225} \simeq 23{,}96$$

De acordo com o resultado do IMC obtido, classificamos o indivíduo dentro de uma faixa, conforme o quadro.

IMC	Classificação
abaixo de 17	muito abaixo do ideal
de 17 a 18,49	abaixo do ideal
de 18,5 a 24,99	ideal
de 25 a 29,99	acima do ideal
de 30 a 34,99	obesidade de grau 1
de 35 a 39,99	obesidade de grau 2
a partir de 40	obesidade de grau 3

Algumas classificações podem trazer riscos à saúde, como a "obesidade", que pode gerar problemas como hipertensão, diabetes (tipo II), doenças cardiovasculares etc., e o "abaixo do ideal", que pode causar queda de cabelo, infertilidade, estresse, entre outras complicações.

O IMC é considerado um parâmetro para avaliar se a massa de um adulto em relação à sua altura é adequada, mas, para verificar se uma pessoa é saudável, há outras ferramentas para essa verificação. Os profissionais de saúde, por exemplo, conseguem avaliar de forma mais criteriosa se a medida de massa de um indivíduo está ou não adequada utilizando algumas técnicas e outros parâmetros, como:

- análise do percentual de gordura;
- medida do comprimento da circunferência da cintura;
- relação cintura × quadril.

Veja que interessante:
1. Observando somente o IMC, o homem com 82 kg de medida de massa e 1,85 m de medida de comprimento de altura tem o IMC ideal. Caso a medida de massa passe a ser 105 kg, ele será classificado como portador de obesidade grau 1.
2. Resposta pessoal.

Atividades

1. Observando como parâmetro somente o IMC de um homem adulto de 42 anos com 82 kg de medida de massa e 1,85 m de medida de comprimento de altura, o que podemos afirmar? E se a medida de sua massa aumentar para 105 kg?
2. Calcule o IMC de algum adulto da sua casa e verifique em qual classificação ele se encontra. (Lembre-se de verificar se ele possui idade entre 20 e 59 anos.)

188

Atividades

13. c) $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$

Faça as atividades no caderno.

13 Calcule as raízes reais de cada equação.

a) $(x - 2)^2 + 4x = 4$ 13. a) $x = 0$

b) $2x^2 - \frac{3}{4} = x^2 + \frac{1}{4}$ 13. b) $x = -1$ ou $x = 1$

c) $\frac{x-3}{2} + \frac{2x-3}{4} = x^2 + x - \frac{17}{2}$

d) $3m^2 + 2 = 4m^2 + 2$ 13. d) $m = 0$

e) $\left(\frac{x}{5} - 5\right) \cdot \left(\frac{x}{5} + 5\right) = 0$ 13. e) $x = -25$ ou $x = 25$

14 Determine o conjunto solução de cada equação, sendo $U = \mathbb{R}$. 14. c) $S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right\}$

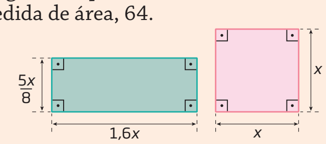
a) $x^2 - 64 = 0$ 14. a) $S = \{-8, 8\}$

b) $3x^2 + 7 = 0$ 14. b) $S = \varnothing$

c) $9x^2 - 16 = 0$

d) $3x^2 = 0$ 14. d) $S = \{0\}$

15 Responda às questões, sabendo que o retângulo e o quadrado abaixo têm a mesma medida de área, 64.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a medida do comprimento do lado do quadrado? 15. a) 8

b) Qual é a medida do perímetro do quadrado? E a do retângulo? 15. b) 32; 35,6

16 A diferença entre o quadrado de x e 4 é igual a 140. Qual é o valor de x? 16. $x = -12$ ou $x = 12$

Resolução de problemas

Na resolução de problemas com equações do 2º grau, podemos seguir as etapas do fluxograma a seguir:

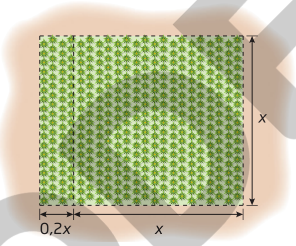
Início → Interpretar o problema e estabelecer a equação que o traduz. → Determinar as raízes da equação. → Verificar se as raízes encontradas satisfazem as condições do problema. → Fim

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe a resolução de alguns problemas que envolvem equações do 2º grau.

Problema 1

Sebastião tem um terreno quadrado para o plantio de milho. Um vizinho vendeu um pedaço de terra para Sebastião, aumentando a medida da largura do terreno inicial em 20%. Sebastião pretende cercar todo o terreno para evitar que alguns animais estraguem a plantação. Se a medida da área do terreno com a parte vendida pelo vizinho é de 750 m², qual será a medida do comprimento total da cerca?



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos indicar por x a medida do comprimento da lateral do terreno de Sebastião.

Precisamos encontrar o valor de x para determinar a medida do perímetro do terreno. Podemos traduzir o problema pela seguinte equação:

$$\underbrace{x}_{\text{medida do comprimento da lateral}} \cdot \underbrace{(0{,}2x + x)}_{\text{medida da largura}} = \underbrace{750}_{\text{medida da área, em metro quadrado, do terreno}}$$

Calculando as raízes da equação, temos:

$$x \cdot 1{,}2x = 750 \Rightarrow 1{,}2x^2 = 750 \Rightarrow x^2 = \frac{750}{1{,}2} \Rightarrow x^2 = 625 \Rightarrow x = 25 \text{ ou } x = -25$$

Como x é uma medida de comprimento, não pode ser um número negativo; portanto: $x = 25$.

Assim, as dimensões do terreno medem 30 m e 25 m; então, a medida do comprimento total da cerca será de 110 m.

Em vários itens dessas atividades, os estudantes podem retomar os conceitos de fatorações algébricas, procurando, assim, novas estratégias para a resolução de equações do 2º grau, exercitando suas habilidades algébricas.

Resolução de problemas

A resolução completa de um problema que recai em equação de 2º grau demanda muito mais do que a mera resolução da equação. A transcrição da situação-problema, da língua materna para a linguagem matemática, exige maturidade dos estudantes, que vai sendo adquirida à medida que novas situações vão se apresentando. Assim, o professor precisa dedicar tempo a essa etapa e delinear estratégias para exercitar tais habilidades. Muitas vezes, como se sabe, o problema dos estudantes nessas atividades não é a resolução da equação em si; esbarramos nas limitações da competência leitora dos estudantes, e a Matemática pode trazer muitas contribuições na superação desses desafios.

Um aspecto importante dessas resoluções reside no fato de que, quando uma situação-problema é modelada por uma equação de segundo grau, nem todas as raízes da equação satisfazem à situação modelada. No **problema 2**, por exemplo, a solução raiz -13 não satisfaz à situação-problema, uma vez que x indica a idade da criança; portanto, só pode assumir valores não negativos. Essa restrição deverá ser percebida pelos estudantes à medida que eles avançam nessas resoluções. Essa é, em suma, a importância de se determinar o conjunto universo da equação com base no contexto do problema apresentado.

- Nas **atividades 18**, **19** e **21**, os estudantes devem utilizar o cálculo das medidas das áreas de figuras planas. Se necessário, relembre como estes cálculos são realizados.
- Na **atividade 20**, verifique se os estudantes percebem que devem resolver a equação $(x - 2) \cdot (x + 2) = 60$ para determinar o valor de x.

Problema 2

Luiz tem dois irmãos. O produto da idade do irmão mais novo pela idade do irmão mais velho é igual a 144. Se o irmão mais novo tem 5 anos a menos que Luiz e o mais velho, 5 anos a mais que Luiz, qual é a idade de Luiz?

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Indicando a idade de Luiz por x, a idade do irmão mais novo pode ser representada pela expressão $x - 5$ e a idade do irmão mais velho, por $x + 5$. Podemos, então, traduzir o problema pela seguinte equação:

$$(x - 5) \cdot (x + 5) = 144$$

Calculando as raízes da equação, temos:

$$x^2 - 25 = 144 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13 \text{ ou } x = -13$$

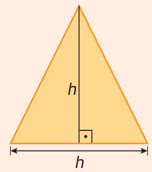
Como o valor de x representa a idade de Luiz, não faz sentido considerar a raiz -13. Portanto, Luiz tem 13 anos.

Atividades

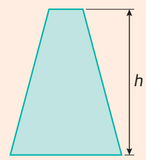
Faça as atividades no caderno.

17 O produto de um número positivo por sua quarta parte é igual a 100. Calcule esse número. **17.** 20

18 Em determinado triângulo, a medida do comprimento da base é numericamente igual à medida do comprimento da altura. Se a medida da área do triângulo é 72 cm², qual é a medida do comprimento da altura desse triângulo? **18.** 12 cm



19 A soma da medida do comprimento da base maior com a medida do comprimento da base menor é numericamente igual à medida do comprimento da altura de um trapézio de medida de área 18 cm². Qual é a medida do comprimento da altura desse trapézio? **19.** 6 cm

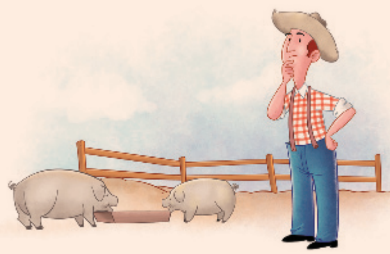


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

20 Se x é um número par positivo e o produto do número par anterior a ele com o número par posterior a ele resulta em 60, qual é o valor de x? **20.** 8

21 Ricardo vai construir um chiqueiro retangular cuja medida da área é 32 m².

Quais serão as dimensões desse chiqueiro se a medida do comprimento de um dos lados for o dobro da medida do comprimento do outro? **21.** 4 m e 8 m



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução de equações incompletas do 2º grau com calculadora ou planilha eletrônica

As equações que resolvemos até agora são da forma $ax^2 + c = 0$, com incógnita x, $a \neq 0$ e a e c como números reais. Vamos isolar a incógnita x, realizando a mesma operação em ambos os membros da igualdade.

$ax^2 + c = 0$

$ax^2 + c - c = -c$ ⟶ Adicionamos $-c$ nos dois membros.

$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} = -\frac{c}{a}$ ⟶ Dividimos os dois membros por a.

$x = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ ou $x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ ⟶ Extraímos a raiz quadrada dos dois membros da igualdade.

Assim, podemos calcular as raízes de equações da forma $ax^2 + c = 0$ realizando as operações com o auxílio de uma calculadora ou, até mesmo, utilizando uma planilha eletrônica.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Roberta revestiu com lajotas quadradas o chão de um salão, que se parece com um retângulo cuja medida do comprimento é o quádruplo da medida da largura. Ela precisa comprar material para fazer o rodapé do salão, que estará presente em três paredes, sendo duas delas as mais longas. Se a medida da área do salão é 36 m², ela precisará comprar material para quantos metros de rodapé?

DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

Primeiro, Roberta precisa calcular a medida do comprimento dos lados do retângulo que representa o salão. Ela indicou a medida da largura do salão por x e traduziu o problema pela seguinte equação:

$$4x \cdot x = 36 \text{ ou } 4x^2 = 36$$

Após testar alguns valores, Roberta percebeu que x podia ser igual a 3 ou –3, pois $4 \cdot (-3)^2 = 4 \cdot 9 = 36$ e $4 \cdot (3)^2 = 4 \cdot 9 = 36$. Assim, ela descobriu duas raízes para a equação $4x^2 = 36$, uma positiva e outra negativa. No entanto, como x indica uma medida, então $x = 3$, ou seja, a medida da largura do salão é igual a 3 m.

Resolução de equações incompletas do 2º grau com calculadora ou planilha eletrônica

Nesta página, explora-se a resolução de equações incompletas do 2º grau usando calculadora ou o *software* de planilha eletrônica, visando contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EF08MA09**.

Caso os estudantes não tenham uma calculadora, há outras opções, como o uso de um aplicativo de celular ou de um computador. Eventualmente, algumas particularidades sobre o uso (ou mesmo da lógica) desses aparelhos podem ser diferentes de um modelo para outro. Se eles tiverem alguma dificuldade, acompanhe o processo de execução dos cálculos com cada um deles, esclarecendo eventuais dúvidas e adaptando o processo de cálculo quando necessário. A mesma observação vale para os *softwares* de planilha eletrônica.

A raiz positiva da equação $4x^2 = 36$ também poderia ser encontrada usando uma calculadora. Analise a sequência de teclas que Roberta pressionou:

[36] [÷] [4] [=] [√]

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Ao fazer isso, no visor de sua calculadora apareceu o número 3.

DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

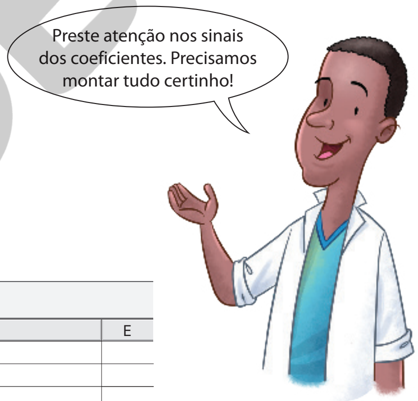
Portanto, Roberta deve comprar material suficiente para duas paredes de 12 m de medida de comprimento e uma de 3 m de medida de largura, ou seja, 27 m de rodapé.

Situação 2

Para calcular, por exemplo, a medida do tempo de queda de um objeto que foi abandonado de uma altura medindo 80 m, usaremos uma planilha eletrônica. A equação que pode nos dar a medida do tempo aproximado é a seguinte:

$$5x^2 - 80 = 0$$

Em um *software* de planilha eletrônica, preparamos a planilha assim:



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Fórmula

	A	B	C	D	E
1					
2		$5x^2 - 80 = 0$			
3		$a = 5$ e $c = -80$			
4					
5		a	$-c$	x (medida do tempo em segundo)	
6					
7					
8					

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Em seguida, inserimos os valores de a e de $-c$ nas células B7 e C7, respectivamente.

Note que inserimos $-c$, ou seja, $-(-80)$.

C7	Fórmula	$=-(-80)$			
	A	B	C	D	E
1					
2		$5x^2 - 80 = 0$			
3		$a = 5$ e $c = -80$			
4					
5					
6		a	$-c$	x (medida do tempo em segundo)	
7		5	80		
8					

Por fim, em D7, digitamos = RAIZ (C7/B7), indicando que o resultado desta célula corresponde a $\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

Como precisamos determinar a medida de tempo, apenas a raiz positiva da equação nos interessa.

D7	Fórmula	= RAIZ(C7/B7)			
	A	B	C	D	E
1					
2		$5x^2 - 80 = 0$			
3		$a = 5$ e $c = -80$			
4					
5					
6		a	$-c$	x (medida do tempo em segundo)	
7		5	80	= RAIZ(C7/B7)	
8					

Assim, teremos a raiz positiva da equação.

D7	Fórmula	= RAIZ(C7/B7)			
	A	B	C	D	E
1					
2		$5x^2 - 80 = 0$			
3		$a = 5$ e $c = -80$			
4					
5					
6		a	$-c$	x (medida do tempo em segundo)	
7		5	80	4	
8					

Portanto, $x = 4$, ou seja, a medida do tempo de queda do objeto é 4 s.

Atividades

22. a) 2 **22. b)** 6 **22. c)** 9 **22. d)** 31 **22. e)** 3,5 **22. f)** 327

Faça as atividades no caderno.

22 Usando uma calculadora ou planilha eletrônica, determine a raiz positiva de cada equação.

a) $5x^2 - 20 = 0$

b) $7x^2 = 252$

c) $2x^2 = 162$

d) $4x^2 = 3\,844$

e) $4x^2 = 49$

f) $5x^2 = 534\,645$

23 Crie uma equação incompleta da forma $ax^2 + c = 0$ e proponha a um colega que utilize uma planilha eletrônica para resolvê-la. Você deve resolver a que ele propuser. Se discordarem da resolução, conversem a respeito e procurem entender qual foi o equívoco. **23.** Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

• Na **atividade 22**, verifique se os estudantes conseguem trabalhar adequadamente com a calculadora. Comente, se for necessário, que em algumas calculadoras o ponto deve ser usado no lugar da vírgula.

Se julgar pertinente e tiver oportunidade, peça aos estudantes que utilizem uma planilha eletrônica para resolver os itens propostos.

Para as raízes não exatas, trabalhe com o arredondamento de números.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Equações do 2º grau com uma incógnita

• A **atividade 1** envolve o reconhecimento de equações do 2º grau com uma incógnita. Incentive os estudantes a justificar o porquê das equações das alternativas **a**, **d** e **f** não serem equações do 2º grau com uma incógnita. Espera-se que eles percebam que a equação da alternativa **a** é uma equação do 1º grau com uma incógnita (x), que a equação da alternativa **d** também é uma equação do 1º grau com uma incógnita (x), pois o coeficiente de t^2 é zero. Já a equação da alternativa **f** é uma equação do 2º grau, mas apresenta duas incógnitas (x e y).

• Na **atividade 2**, dados os coeficientes, os estudantes vão escrever equações do 2º grau com uma incógnita. Após concluírem a atividade, faça a correção coletiva.

• Na **atividade 3**, os estudantes devem traduzir para a linguagem algébrica uma situação-problema. É importante não só que escrevam a equação, mas também que determinem o conjunto universo dela com base no contexto da situação-problema. Ao final, você pode desafiá-los a determinar a medida do comprimento de cada lado do quadrado. Espera-se que eles concluam que cada lado desse quadrado mede 12 cm de comprimento.

• Na **atividade 4**, os estudantes vão classificar equações do 2º grau com uma incógnita em completas ou incompletas. Você pode ampliar a proposta dessa atividade e pedir para que classifiquem as equações que obtiveram na **atividade 2**.

• Nas **atividades 5** e **6**, espera-se que os estudantes, nas equações, substituam x pelos números para verificar quais deles são raízes da equação. Outra possibilidade é determinar as raízes de cada equação de antemão. É importante que eles percebam que podem fazer essas atividades utilizando essas diferentes estratégias. Caso optem pela resolução das equações, incentive-os a compartilhar como fizeram. As raízes da equação da **atividade 5**, por exemplo, podem ser determinadas por meio de cálculos mentais.

Resolução de equações do 2º grau

• Na **atividade 8**, os estudantes vão determinar o conjunto solução de algumas equações do 2º grau com uma incógnita incompletas. Verifique qual estratégia utilizam para resolver essas equações. Após concluírem a atividade, pergunte qual seria o conjunto solução de cada uma caso o conjunto universo fosse o conjunto dos números naturais.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Equação do 2º grau com uma incógnita

Denominamos **equação do 2º grau** na incógnita x aquela que pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$.

1. Identifique as equações do 2º grau com uma incógnita. **1.** alternativas **b**, **c**, **e**

a) $2x - 5 = 0$
b) $m^2 - 2m - 5 = 0$
c) $9 - z^2 = 0$
d) $0t^2 + 3x - 5 = 0$
e) $(2x - 1)^2 = 0$
f) $x^2 + 2y - 3 = 0$

2. Escreva no caderno a equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que:

a) $a = 2$, $b = -3$ e $c = 7$ **2. a)** $2x^2 - 3x + 7 = 0$
b) $a = -3$, $b = 1$ e $c = 5$ **2. b)** $-3x^2 + x + 5 = 0$
c) $a = 3$, $b = 3$ e $c = 3$ **2. c)** $3x^2 + 3x + 3 = 0$
d) $a = -2$, $b = 0$ e $c = 4$ **2. d)** $-2x^2 + 4 = 0$
e) $a = 1$, $b = 6$ e $c = 0$ **2. e)** $x^2 + 6x = 0$
f) $a = 3$, $b = 0$, $c = 0$ **2. f)** $3x^2 = 0$

3. Um quadrado cuja medida do comprimento de cada lado é igual a x tem medida de área igual a 144 m². Escreva uma equação do 2º grau que torne possível encontrar o valor de x.
3. Exemplo de resposta: $x^2 - 144 = 0$, com $U = \mathbb{R}^*_+$

Equações completas e incompletas

Quando uma equação do 2º grau com uma incógnita, na forma $ax^2 + bx + c = 0$, tem todos os coeficientes (a, b e c) diferentes de zero, dizemos que a equação é **completa**.

Exemplo: $x^2 - 8x + 10 = 0$.

Quando b e/ou c são iguais a zero, dizemos que a equação é **incompleta**.

Exemplos:

a) $x^2 - 3x = 0$;
b) $x^2 - 9 = 0$
c) $x^2 = 0$

4. Classifique as equações do 2º grau em completas ou incompletas.

a) $2x^2 + 4x = 0$ **4. a)** incompleta
b) $-x^2 + 7x + 2 = 0$ **4. b)** completa
c) $-x^2 - 9 = 0$ **4. c)** incompleta
d) $8 + 3x - x^2 = 0$ **4. d)** completa

Raiz de uma equação do 2º grau

Raiz de uma equação é um número que, ao substituir a incógnita, torna a sentença verdadeira.

5. Verifique quais dos números abaixo são raízes da equação $4x^2 - 16 = 0$.

a) 3 **5. a)** não
b) 4 **5. b)** não
c) 2 **5. c)** sim
d) −2 **5. d)** sim
e) 0 **5. e)** não

6. Dados os números −3, −2, −1, 0, 1, 2 e 3, quais deles são raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$? **6.** 2 e 3

7. O número 1 é raiz de qual(is) equação(ões) a seguir? **7.** b, c

a) $x^2 - 4x - 4 = 0$
b) $x^2 - 1 = 0$
c) $x^2 + x - 2 = 0$
d) $-2x^2 + 16x = 0$

Resolução de equações do 2º grau

Resolver uma equação do 2º grau consiste em encontrar as raízes dessa equação que pertencem ao conjunto universo dela.

8. Determine o conjunto solução das equações, sendo $U = \mathbb{R}$.

a) $x^2 - 49 = 0$ **8. a)** $S = \{-7, 7\}$
b) $-x^2 = 0$ **8. b)** $S = \{0\}$
c) $4 - x^2 = 0$ **8. c)** $S = \{-2, 2\}$
d) $5x^2 + 8 = 0$ **8. d)** $S = \{\ \}$ ou $S = \varnothing$

9. Determine os valores de x em cada caso.

a) A diferença entre o quadrado de x e 8 é igual a 41. **9. a)** $x = -7$ ou $x = 7$
b) A soma entre o quadrado de x e 10 é igual a 74. **9. b)** $x = -8$ ou $x = 8$

10. O produto de um número positivo por sua sexta parte é igual a 24. Calcule esse número. **10.** 12

11. Determine a medida de perímetro de um retângulo cuja área mede 243 cm² e a medida do comprimento é o triplo da medida da largura. **11.** 72 cm

• Nas **atividades 9** e **10**, os estudantes devem primeiro transpor para a linguagem algébrica os enunciados em língua materna. Depois, devem resolver as equações do 2º grau com uma incógnita que obtiverem. No caso do **item a** da **atividade 9** é possível que alguns estudantes obtenham a equação $(x - 8)^2 = 41$ em vez de $x^2 - 8 = 41$.

Caso isso ocorra, explique que ela corresponde ao quadrado da diferença de x e 8 e não à diferença entre o quadrado de x e 8.

Confusão similar a essa pode ocorrer com o **item b** da mesma atividade. Nesse item, é possível que alguns estudantes obtenham $(x + 10)^2 = 74$ em vez de $x^2 + 10 = 74$.

PLURALIDADE CULTURAL

É hora de extrapolar

Faça as atividades no caderno.

O que você sabe sobre a diversidade cultural dos povos indígenas no Brasil?

Segundo o Censo demográfico de 2010, feito pelo IBGE, aproximadamente 897 mil pessoas se declararam ou se consideraram indígenas, o que representou um aumento em relação ao número obtido na pesquisa censitária realizada no ano 2000, que foi de 734 mil pessoas. O Censo 2010 também revelou a existência de 274 línguas indígenas faladas entre as 305 etnias diferentes. Os modos de cultura desses importantes povos brasileiros apresentam semelhanças e diversidades que vale a pena conhecer.

1

MARCOS AMEND/PULSAR IMAGENS

2

MAESTROBOOKS/GETTY IMAGES

3

LUCIOLA ZVARICK/PULSAR IMAGENS

4

DU ZUPPANI/PULSAR IMAGENS

Fotos: (1) Indígenas da etnia Enawenê-Nawê pescando de arco e flecha em área com aguapés do Rio Iquê, Juína (MT). Foto de 2020. (2) Mulheres indígenas da Amazônia trabalhando com computadores, Palmas (TO). Foto de 2018. (3) Meninos indígenas da etnia Waurá na escola da aldeia Piyulaga, Gaúcha do Norte (MT). Foto de 2019. (4) Indígena da etnia Kalapalo lavando mandioca para obter polvilho, Querência (MT). Foto de 2018.

Objetivos: Analisar dados sobre a população indígena, pesquisar e analisar informações sobre os tipos de habitação dos povos indígenas e a arte da cerâmica e da cestaria indígenas e realizar uma exposição de painéis para a comunidade escolar.

Etapa 1: Análise de dados do fôlder *O Brasil Indígena* produzido pelo IBGE.

1. Reúnam-se em grupos. Antes de realizar a pesquisa sobre os povos indígenas, respondam às perguntas a seguir no caderno.

a) Vocês conhecem alguns povos indígenas? Se sim, citem os nomes. **1. a)** Resposta pessoal.

b) O que vocês sabem sobre os modos de viver dos índios brasileiros? **1. b)** Resposta pessoal.

2. Pesquisem e leiam o fôlder *O Brasil Indígena*, que traz os principais resultados sobre a população indígena brasileira apurados pelo Censo demográfico 2010 realizado pelo IBGE, e respondam às questões a seguir:

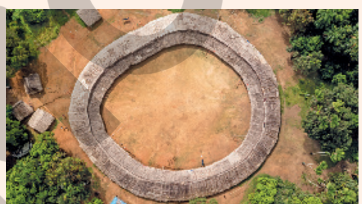
a) Foram realizadas pesquisas censitárias nos anos de 1991 e 2000 para contabilizar a população indígena brasileira. Os números obtidos nessas pesquisas foram 294 mil e 734 mil, respectivamente. O relatório aponta que esse crescimento expressivo não poderia ser explicado apenas pelos efeitos demográficos comuns (natalidade, mortalidade e migração). Que outro fator é apontado para explicar esse aumento dos valores populacionais?

b) "Não existem terras indígenas em áreas urbanas." Segundo dados sobre a distribuição espacial dos indígenas, essa afirmação é verdadeira ou falsa? **2. b)** falsa

Etapa 2: Analisar informações sobre os tipos de habitação indígena e sobre a arte da cerâmica e da cestaria.

3. Leia o trecho a seguir e, depois, faça o que se pede.

> A aldeia Yanomami é uma casa de forma circular ou poligonal de diâmetro entre 20 e 40 metros. A parte superior é aberta para permitir a penetração de luz solar e a saída da fumaça. Essa abertura coincide internamente com a "praça central" da aldeia, onde se realizam cerimônias e pajelanças. [...] A aldeia-casa dura apenas um ou dois anos; após esse período é reconstruída em outro lugar.
>
> Habitação indígena: a aldeia. **Terra Brasileira**, s.d. Disponível em: http://www.terrabrasileira.com.br/indigena/cotidiano/411aldeia.html. Acesso em: 6 jul. 2022.


MARCOS AMEND/PULSAR IMAGENS

Aldeia Watoriki em Território Indígena Yanomami, Barcelos (AM). Foto de 2021.

2. a) A pesquisa aponta o aumento no número de pessoas que se reconheceram como indígenas, principalmente nas áreas urbanas do país.

195

É hora de extrapolar

BNCC:

- Competências gerais 2, 4 e 7 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 6 e 8 (as descrições estão na página VII).

A seção propõe o fechamento da Unidade por meio de um trabalho colaborativo que explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um painel sobre um povo indígena, que será compartilhado com a comunidade escolar.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a seção é dividida em etapas que promovem:

- entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado;
- pesquisa individual ou coletiva;
- elaboração, em grupo, do produto proposto;
- apresentação e exposição do produto;
- reflexão e síntese do trabalho.

As etapas de pesquisa e elaboração do produto podem ser realizadas extraclasse. Verifique o perfil dos estudantes e oriente-os com relação ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho.

A seção também favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **7** e das competências específicas **2**, **6** e **8**, procurando mobilizar conteúdos estudados nos capítulos que integram a Unidade. Portanto, é recomendável propor a seção depois de estudar os capítulos, mas, se preferir trabalhar as etapas da seção à medida que os capítulos forem estudados, atente para os conhecimentos prévios necessários.

As atividades propostas nesta seção retomam e ampliam as questões apresentadas na abertura da Unidade.

- Na **atividade 1**, verifique quais povos indígenas são de conhecimento da turma, compartilhando as respostas dos grupos.
- Na **atividade 2**, oriente os estudantes a encontrar o fôlder *O Brasil Indígena* em: https://indigenas.ibge.gov.br/estudos-especiais-3/o-brasil-indigena/download. Acesso em: 27 jun. 2022

Se achar conveniente, peça aos estudantes que comparem a área calculada no item **a** da **atividade 3** com a área da sala de aula ou da quadra da escola para terem uma dimensão do tamanho.

- Na **atividade 5**, converse com os estudantes sobre os direitos de uso de imagens retiradas da internet e de livros, orientando-os a buscar tais informações. Se julgar oportuno, aprofunde a discussão sobre as licenças Creative Commons.

Na etapa **3**, espera-se que os estudantes citem alguns exemplos de influências de outras tradições na cultura brasileira, como *fast-food* e estrangeirismos na língua.

A etapa **4** sugere que os trabalhos sejam apresentados para a turma antes de serem apresentados à comunidade escolar. Esse tipo de atividade propõe tanto a reflexão e a análise sobre o trabalho desenvolvido basedo na crítica recebida, quanto o cuidado e o respeito para criticar o trabalho dos colegas, baseando-se em argumentos de forma ética e cooperativa.

Para discutir as questões propostas na etapa **5**, proponha uma roda de conversa, permitindo que os estudantes se expressem livremente, valorizando a diversidade cultural. Essa discussão antecipa e fortalece a fundamentação da escrita proposta na **atividade 13**.

3. a) 2 826 metros quadrados
3. b) Não, a medida da área da aldeia cuja medida do comprimento do raio é 40 m será o quádruplo da medida da área da aldeia cuja medida do comprimento do raio é 20 m.

a) Qual é a medida de área aproximada de uma casa yanomami de formato circular cujo raio mede 30 metros de comprimento? Considere $\pi = 3{,}14$.

b) Se uma aldeia A circular tem raio medindo 20 metros de comprimento e outra, B, tem raio medindo 40 metros de comprimento, podemos afirmar que a medida da área da aldeia B corresponde ao dobro da medida da área da A? Justifique.

4. Escavações arqueológicas revelaram que a confecção de artefatos de cerâmica fazia parte dos costumes de diversos povos indígenas que habitaram ou ainda habitam o Brasil. Foram encontrados objetos que visavam ao armazenamento ou ao uso culinário, além de vasos e outros objetos ornamentais que provavelmente eram utilizados em cerimoniais. Atualmente, as mulheres Kadiwéu produzem vasos, enfeites de parede e outros ornamentos. Tais peças são preenchidas por padrões compostos de figuras de várias cores, como mostrado nas imagens.


PAULO FRIDMAN/PULSAR IMAGENS

Vasos de cerâmica indígena, em Bonito (MS).


LUCIOLA ZVARICK/PULSAR IMAGENS

Artesã da etnia Kadiwéu produzindo cerâmica na Aldeia Alves de Barros, Porto Murtinho (MS).

Muitos dos padrões e desenhos utilizados pelos indígenas se parecem com figuras geométricas. Analisem as imagens dos vasos e identifiquem essas figuras. **4.** Exemplo de resposta: polígonos, linhas poligonais e linhas curvas.

5. Outras manifestações artísticas ocorrem na cestaria e na pintura corporal. Pesquisem na internet imagens desses tipos de arte com padrões que contenham figuras geométricas. Selecionem duas delas e identifiquem as figuras geométricas. Então, apresentem as imagens, que poderão ser utilizadas na etapa de produção do painel para os colegas de turma. Caso elas não sejam referentes ao povo indígena selecionado, disponibilize-as para os demais colegas.

Etapa 3: Produção dos painéis sobre as características de povos indígenas brasileiros.

Etapa 3: Comentário em *Orientações*.

6. Leia o texto a seguir e responda à questão.

> Muitos povos [indígenas] reúnem, em seu cotidiano, modos de viver herdados de seus antepassados, além de produtos, instituições e relações sociais adquiridas após a intensificação do contato com os "brancos".
>
> Quem são? **Povos Indígenas no Brasil**, 25 jan. 2021. Disponível em: https://pib.socioambiental.org/pt/Quem_s%C3%A3o. Acesso em: 6 jul. 2022.

Podemos afirmar que, atualmente, os modos de viver dos brasileiros "não índios" também são influenciados e modificados por outras tradições culturais, inclusive as tradições indígenas? Se sim, citem alguns exemplos. Se não, expliquem por quê.

7. Escolham uma das populações indígenas do país e realizem uma pesquisa sobre: local, número populacional, língua falada, organização da sociedade, história e aspectos culturais. Além dessas informações, selecionem imagens e não se esqueçam de anotar as referências de todos os materiais utilizados.

8. Com base nas informações obtidas, elaborem um painel informativo, digital ou impresso, sobre o povo indígena escolhido.

Etapa 4: Apresentação e análise dos painéis.

Etapa 4: Comentário em *Orientações*.

9. Disponibilizem o painel elaborado pelo grupo para que os colegas analisem e façam comentários em relação à clareza das informações, à escolha das imagens e ao tamanho e à disposição de textos e imagens.

10. Anotem as dúvidas, as opiniões e as sugestões dos colegas.

11. Depois dos ajustes necessários, organizem uma exposição dos painéis para a comunidade escolar.

Etapa 5: Síntese do trabalho realizado.

12. Algumas questões que devem ser discutidas:

a) As informações que vocês conheciam sobre os povos indígenas no início do trabalho correspondem às informações obtidas nas pesquisas? **12. a)** Resposta pessoal.

b) É importante que a população brasileira conheça mais sobre os povos indígenas? Por quê? **12. b)** Respostas pessoais.

13. Redijam um texto que descreva o processo realizado pelo grupo nas etapas 3 e 4.

5. Comentário em *Orientações*.

13. Comentário em *Orientações*.

Unidade 4

ANDRES OLIVEIRA

SAÚDE

A quantidade de horas que você dorme é adequada? E a quantidade de horas diárias ou semanais dedicadas para a prática de atividades físicas? O que os estudos recomendam? Ao final desta Unidade, você responderá a essas e outras questões.

ANDRES OLIVEIRA

Atividade física e sono de qualidade são fundamentais para a saúde.

197

Na seção *É hora de extrapolar*, os estudantes vão analisar dados e pesquisar sobre a importância do sono e da prática de atividades físicas. Além disso, eles terão a oportunidade de planejar e executar uma pesquisa amostral, elaborando um relatório e apresentando os resultados para os colegas de turma.

Abertura da Unidade

BNCC:

• Competências gerais 2 e 9 (as descrições estão na página VI).

• Competências específicas 2 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

• Motivar os estudantes para estudar os conteúdos da Unidade 4.

• Verificar se os estudantes reconhecem a necessidade de se realizar pesquisas estatísticas para se obter dados sobre a população.

• Incentivar os estudantes a refletir sobre o tempo dedicado ao sono e a prática de atividades físicas.

Tema contemporâneo transversal:

SAÚDE

Pergunte aos estudantes se eles praticam atividade física e quantas horas eles costumam dormir por noite, se acham esse tempo suficiente e por quê. Dê um tempo para que se manifestem. Segundo a Sociedade Brasileira de Pediatria (SBP), a quantidade de horas de sono adequada para jovens até 17 anos é de 8 a 10 h por noite. Assim, é necessária uma organização da rotina antes de dormir para que isso aconteça. A Organização Mundial de Saúde (OMS) recomenda pelos menos 60 minutos diários de atividade física (moderada ou intensa) para a idade deles e que essas atividades podem ser realizadas por meio de brincadeiras, jogos, esportes, locomoção etc. Enfatize que esse tema será retomado na seção *É hora de extrapolar*, proposta do final da Unidade.

As questões propostas exercitam a curiosidade e o espírito de investigação, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **2** e da competência específica **2** da BNCC. Por promover o diálogo e a interação entre os pares, as questões também favorecem o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8**.

No **capítulo 10**, serão estudadas grandezas diretamente e inversamente proporcionais. Já no **capítulo 11**, o foco será nas pesquisas estatísticas, suas variáveis e medidas de tendência central. Por fim, no **capítulo 12**, será estudada a finalidade de cada tipo de gráfico estatístico.

CAPÍTULO 10 – GRANDEZAS E PROPORCIONALIDADE

Trocando ideias

BNCC:

• Competência geral 9 (a descrição está na página VI).

• Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

• Levantar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre grandezas diretamente proporcionais.

• Conscientizar os estudantes sobre a importância das tabelas nutricionais presentes nos rótulos das embalagens.

Tema contemporâneo transversal:

SAÚDE

Antes de iniciar o trabalho com este *Trocando ideias*, se possível, disponibilize para a turma rótulos de diferentes produtos para serem analisados. Você também pode pedir que os próprios estudantes providenciem com antecedência esses rótulos. Comente que, além dos ingredientes, tabela nutricional e data de validade, em alguns casos, estão presentes informações sobre restrições alimentares, como intolerância a glúten ou a lactose. Reserve um tempo para que avaliem alguns rótulos e verbalizem o que mais lhes chamou atenção. Esse momento de troca e interação favorece o desenvolvimento da competência geral **9** da Educação Básica e da competência específica **8** de Ciências da Natureza.

As questões propostas no primeiro e segundo itens, envolvem a noção de grandezas diretamente proporcionais. Deixe-os à vontade para utilizar suas estratégias pessoais. É importante que eles percebam que, se a quantidade de leite em pó dobrar/triplicar, a quantidade de água filtrada ou fervida também dobra/triplica, e assim por diante.

Caso tenham dificuldade para perceber essa relação, oriente-os a construir um quadro como o mostrado a seguir:

Quantidade de leite em pó	Quantidade de água fervida ou filtrada
78 g	200 mL
156 g	400 mL
234 g	600 mL
312 g	800 mL
390 g	1000 mL

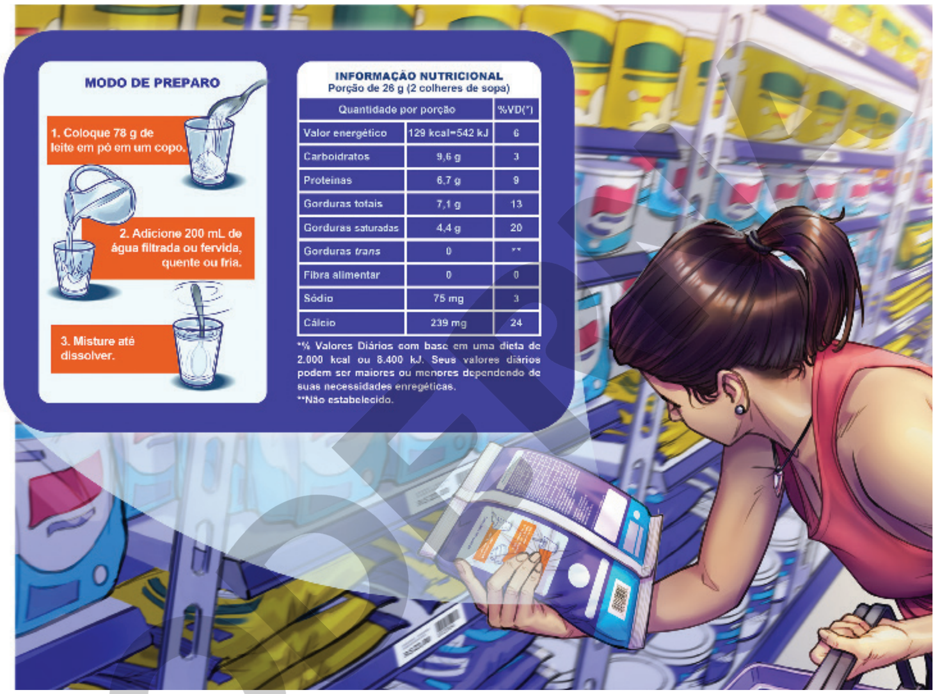
Capítulo 10

Grandezas e proporcionalidade

SAÚDE

Trocando ideias

A leitura dos rótulos dos alimentos é uma importante fonte de informação sobre o que estamos consumindo. Nos rótulos, encontramos os ingredientes, a tabela nutricional, a data de validade, o modo de preparo, entre outras informações.



NATANAEL GOMES ALVES/ARQUIVO DA EDITORA

- Se foram colocados 156 g de leite em pó em um recipiente, quantos mililitros de água fervida ou filtrada deverão ser adicionados?
- Em 500 mL de água fervida ou filtrada, quantos gramas de leite em pó devem ser usados no preparo?
- Nos rótulos das embalagens há uma tabela nutricional. Você sabe para que ela serve? Converse com os colegas.

Neste capítulo, vamos relembrar as ideias de **grandezas diretamente proporcionais** e **inversamente proporcionais**. Além disso, vamos analisar a variação dessas grandezas construindo gráficos no plano cartesiano que as relacionam. **Trocando ideias**: primeiro item: 400 mL; segundo item: 195 g; terceiro item: Resposta pessoal.

As tabelas nutricionais informam o consumidor sobre as propriedades nutricionais do alimento, ajudando-os a adotar alimentos mais saudáveis em sua dieta, fazendo escolhas mais conscientes ao adquirir os produtos que vão consumir. Segundo a Agência Nacional de Vigilância Sanitária (Anvisa), as tabelas nutricionais devem apresentar, entre outras coisas, quantidades por porção e valores diários de calorias, carboidratos, proteínas, gorduras totais, gorduras saturadas, gorduras trans, fibra alimentar e sódio.

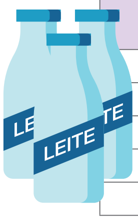
1 Grandezas e proporcionalidade

Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado. São exemplos de grandeza: comprimento, massa, tempo, temperatura, área, volume, capacidade, velocidade, população, valor monetário etc.

Vamos estudar o que são grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Grandezas diretamente proporcionais

Um engenheiro de produção fez um levantamento sobre a produtividade de uma máquina de envasar leite e organizou os dados no quadro a seguir.



Quantidade de leite envasado (litro)	Medida do tempo de produção (hora)
900	0,5
1 800	1
2 700	1,5
7 200	4
14 400	8

ILUSTRAÇÕES: RAFAEL OLIVETTI/ARQUIVO DA EDITORA

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza é igual à razão entre os valores correspondentes da segunda grandeza.

Essa propriedade pode ser identificada entre os valores presentes no quadro acima: quantidade de leite envasado e medida do tempo de produção. Analise:

- $\frac{1\,800}{900} = \frac{1}{0,5} = 2$
- $\frac{7\,200}{1\,800} = \frac{4}{1} = 4$
- $\frac{2\,700}{1\,800} = \frac{1,5}{1} = \frac{3}{2}$
- $\frac{14\,400}{7\,200} = \frac{8}{4} = 2$

A razão entre os valores correspondentes das duas grandezas é sempre a mesma. Essa razão é chamada de **constante de proporcionalidade**. Confira:

$$\frac{900}{0,5} = \frac{1\,800}{1} = \frac{2\,700}{1,5} = \frac{7\,200}{4} = ... = \underbrace{1\,800}_{\text{constante de proporcionalidade}}$$

A partir da constante de proporcionalidade e da propriedade fundamental das proporções, podemos determinar uma sentença algébrica que relacione as medidas dessas grandezas.

Vamos indicar a quantidade de leite envasado, em litro, pela letra p e a medida do tempo de produção, em hora, por t. Temos que p e t representam números reais positivos. A razão entre p e t resulta na constante de proporcionalidade, ou seja, $\frac{p}{t} = 1\,800$. Assim, temos:

$$p = 1\,800 \cdot t$$

Com essa sentença, podemos encontrar a quantidade de leite envasado, em litro, para qualquer medida de tempo de produção, em hora, e vice-versa. Acompanhe os exemplos.

a) Vamos calcular quantos litros de leite são envasados em 12 horas de produção da máquina.

$p = 1\,800 \cdot t$

$p = 1\,800 \cdot 12$

$p = 21\,600$

São envasados 21 600 litros de leite em 12 horas de produção da máquina.

Grandezas e proporcionalidade

BNCC:

Habilidades EF08MA12 e EF08MA13.

Objetivos:

- Identificar grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais.
- Expressar a relação entre duas grandezas por meio de uma sentença algébrica.

Justificativa

Identificar grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais auxilia os estudantes a lidar com diferentes situações cotidianas e é o pontapé inicial para que possam expressar a relação entre duas grandezas por meio de sentenças algébricas. Essa representação mobiliza conceitos de unidades temáticas e é uma ferramenta para a resolução de problemas.

Mapeando conhecimentos

Reproduza na lousa os quadros a seguir:

Medida do comprimento do lado do quadrado	Medida do perímetro do quadrado
1 cm	4 cm
2 cm	8 cm
4 cm	16 cm

Medida da velocidade média	Medida de intervalo de tempo
120 km/h	2 h
60 km/h	4 h
30 km/h	8 h

Explore as variações entre as grandezas dos quadros e então pergunte: "Que tipo de variação ocorre entre as grandezas do primeiro quadro? É o mesmo tipo de variação que ocorre no segundo quadro?"

Para as aulas iniciais

Relembre os conceitos de razão, proporção, grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais presentes na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, proponha aos estudantes que façam as **atividades** de **39** a **43**. Retome os questionamentos da dinâmica inicial e ajude-os a responder a alguns deles.

Grandezas diretamente proporcionais

Grandezas diretamente proporcionais se caracterizam pela maneira como se dão as variações: quando uma grandeza varia de um fator multiplicativo k, a outra grandeza varia também do mesmo fator k. Depois de explorar a situação apresentada, comente o significado da constante de proporcionalidade: 1 800 é a quantidade de leite em litros envasado em uma hora, e os valores das grandezas volume de leite e tempo se relacionam por meio dessa constante.

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Grandezas inversamente proporcionais

Faça uma parceria com o professor de Ciências para desenvolver esse conteúdo. A corrente elétrica é o movimento ordenado de elétrons dentro de um material, enquanto a resistência é a oposição que o material oferece à passagem de corrente elétrica. Trabalhando apenas as definições, os estudantes percebem rapidamente que as variações das duas grandezas se dão em sentidos opostos. Trabalhe, então, a situação apresentada e defina grandezas inversamente proporcionais; mencione a razão entre elas e comente que, quando uma grandeza é multiplicada pelo fator multiplicativo k, a outra grandeza é dividida pelo mesmo fator k.

Aqui, a constante de proporcionalidade é dada pelo produto de valores correspondentes das duas grandezas.

b) Quantas horas de produção da máquina são necessárias para envasar 12600 litros de leite?

$12\,600 = 1\,800 \cdot t$

$\frac{12\,600}{1\,800} = t$

$t = 7$

São necessárias 7 horas de produção da máquina para envasar 12600 litros de leite.

Observações

1. Nos problemas que acabamos de resolver, as letras *p* e *t* assumem o papel de incógnitas das equações obtidas.
2. Quando não estiver explícito, vamos assumir que o conjunto universo das equações encontradas a partir das proporções é o conjunto dos números reais.

Grandezas inversamente proporcionais

Um professor de Física fez um experimento com os estudantes para mostrar a relação entre as medidas da corrente elétrica e da resistência de um resistor.

Usando um amperímetro, ele obteve algumas medidas, disponibilizando-as para a turma no quadro a seguir.

FOTOATA/GETTY IMAGES

Amperímetro é um instrumento usado para medir a corrente elétrica.

Medida da corrente elétrica (ampère)	Medida da resistência (ohm)
5	44
10	22
20	11
44	5

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda grandeza.

Isso pode ser observado para as medidas da corrente elétrica e da resistência. Confira:

- $\frac{10}{5} = \underbrace{\frac{2}{1} \text{ e } \frac{22}{44}}_{\text{razões inversas}} = \frac{1}{2}$
- $\frac{20}{5} = \underbrace{\frac{4}{1} \text{ e } \frac{11}{44}}_{\text{razões inversas}} = \frac{1}{4}$
- $\frac{44}{10} = \underbrace{\frac{22}{5} \text{ e } \frac{5}{22}}_{\text{razões inversas}}$

A razão entre os valores de uma grandeza pelo inverso dos valores correspondentes da outra grandeza é sempre a mesma.

$$\frac{5}{\frac{1}{44}} = \frac{10}{\frac{1}{22}} = \frac{20}{\frac{1}{11}} = \frac{44}{\frac{1}{5}} = \ldots = 220$$

constante de proporcionalidade

Com a constante de proporcionalidade e a propriedade fundamental das proporções, podemos encontrar uma sentença algébrica que relacione as medidas dessas grandezas.

200

Sugestão de atividade extra

Organize os estudantes em trios e peça que escolham duas grandezas e verifiquem se são diretamente proporcionais; caso não sejam, solicite que escolham outras grandezas que sejam diretamente proporcionais. Cada grupo deverá criar um quadro relacionando os valores das duas grandezas e calcular a razão entre os valores registrados. Em seguida, peça a cada trio que apresente o quadro, destacando as grandezas diretamente proporcionais, bem como a razão obtida.

LEMBRE-SE: Escreva no caderno.

Vamos indicar a medida da corrente elétrica, em ampère, pela letra *i* e a medida da resistência de um resistor, em ohm, por *r*, sendo que *i* e *r* representam números reais positivos. A razão entre *i* e o inverso de *r* resulta na constante de proporcionalidade $\frac{i}{\frac{1}{r}} = 220$. Assim, temos:

$$i = \frac{220}{r}$$

Com isso, podemos determinar a medida da corrente elétrica, em ampère, para qualquer medida de resistência, em ohm, e vice-versa. Vamos analisar alguns exemplos dessa aplicação.

a) Se a medida da corrente elétrica é 0,5 ampère, qual é a medida da resistência?

$i = \frac{220}{r}$ ou $r = \frac{220}{i}$

$r = \frac{220}{0{,}5}$

$r = 440$

A medida da resistência é 440 ohms.

b) Para uma medida de resistência de 1 000 ohms, qual é a medida da corrente elétrica?

$i = \frac{220}{r}$

$i = \frac{220}{1\,000}$

$i = 0{,}22$

A medida da corrente elétrica é 0,22 ampère.

c) Se a medida da corrente elétrica é 0,8 ampère, é possível que a medida da resistência seja igual a 300 ohms?

$i = \frac{220}{r}$ ou $r = \frac{220}{i}$

$r = \frac{220}{0{,}8}$

$r = 275$

Não é possível, pois a medida da resistência é 275 ohms.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. alternativas **a**, **c**, **d**

1 Entre estes pares de grandezas, identifique os de grandezas diretamente proporcionais.

a) Número de trabalhadores e quantidade de morangos coletados em uma plantação.

b) Medida do tempo de crescimento de um animal e a idade dele.

c) Medidas de perímetro e de comprimento do lado de um quadrado.

d) Medida de comprimento de uma corda e o preço pago por ela.

e) Medida do tempo decorrido em uma partida de basquete e número de cestas.

2 Se a constante de proporcionalidade entre os valores de um par de grandezas diretamente proporcionais (*x* e *y*) vale 10, escreva em seu caderno uma sentença algébrica que os relacione.

2. Exemplos de resposta: $x = 10 \cdot y$ ou $\frac{x}{10} = y$

• Em complemento à **atividade 1**, faça com que os estudantes percebam que nem toda situação em que duas grandezas variam no mesmo sentido (isto é, em que ambas aumentam ou ambas diminuem) caracteriza um caso de grandezas diretamente proporcionais.

• Depois de realizar a **atividade 3**, faça com que os estudantes percebam que, de maneira análoga ao que acontece com as gradezas diretamente proporcionais, nem toda situação em que duas grandezas variam em sentidos opostos (isto é, quando uma delas aumenta, a outra diminui) caracteriza um caso de grandezas inversamente proporcionais.

Após realizarem as atividades, reserve um momento para discutir cada uma coletivamente. Incentive os estudantes a verbalizar como fizeram e a tirar as dúvidas.

Esse é um momento oportuno para verificar se os estudantes compreendem que em relações entre duas grandezas também há casos em que não há proporcionalidade entre elas. Para exemplificar, é possível citar a seguinte situação: "Uma quitanda vende uma unidade de melancia por R$ 30,00. Ao comprar duas melancias, o cliente paga apenas R$ 56,00. Nesse caso, o número de melancias e o preço cobrado são grandezas diretamente proporcionais? Se não, quanto deveria custar duas melancias para que houvesse proporcionalidade?". Espera-se que os estudantes percebam que, apesar de o número melancias aumentar e o preço cobrado também aumentar, não há uma relação de proporcionalidade entre as grandezas envolvidas e que, para haver proporcionalidade entre o número de melancias e o preço cobrado, duas melancias deveriam custar R$ 60,00.

5. b) Exemplo de resposta: Sejam d e h números reais positivos, em que d indica a medida da distância em quilômetro e h, a medida do tempo em hora: $d = 70 \cdot h$

3 Um professor de Ciências fez uma experiência e obteve as seguintes medidas de duas grandezas em laboratório.

A	2	4	6	8	10
B	5	2,5	1,67	1,25	1

Sobre os valores de A e B, podemos afirmar que: **3.** alternativa **d**

a) os valores de A são diretamente proporcionais aos valores de B.

b) a razão entre os valores de A e B é constante.

c) os valores de A podem ser obtidos multiplicando-se os valores de B por 2,5.

d) os valores de A são inversamente proporcionais aos valores de B.

4 Um motorista levará um passageiro de uma cidade A para uma cidade B. Se ele dirigir um trecho da estrada a 80 km/h constantes, percorrerá esse trecho em 2 h. Em quanto tempo ele percorrerá esse mesmo trecho se dirigir a 100 km/h constantes? **4.** 1 h 36 min

5 Carla tem uma caminhonete e trabalha como entregadora de mercadorias para uma loja. Ela está viajando por uma estrada até outra cidade a uma medida de velocidade constante. Neste quadro, analise a medida da distância percorrida e a medida do tempo de viagem em dois momentos.

Medida da distância (km)	Medida do tempo (h)
105	$1\frac{1}{2}$
122,5	$1\frac{3}{4}$

5. a) 70

a) Qual é a constante de proporcionalidade entre essas medidas de grandezas?

b) Escreva uma sentença algébrica que as relacione.

c) Se Carla permaneceu a uma medida de velocidade constante durante 4 h 15 min, qual foi a medida da distância percorrida? **5. c)** 297,5 km

6 Neste quadro, os valores de x são inversamente proporcionais aos valores de y.

x	y
2	10
5	4

Escreva em seu caderno:

a) a constante de proporcionalidade; **6. a)** 20

b) uma sentença algébrica que relacione os valores de x e y; **6. b)** Exemplo de resposta: $x \cdot y = 20$

c) os valores de y para $x = 2{,}5$ e para $x = 40$, usando a sentença algébrica.

6. c) 8 e 0,5, respectivamente

7 Uma gráfica imprime cartões de visita usando uma impressora nova. Confira, neste quadro, a relação entre o número de cartões impressos e a medida do tempo de funcionamento da impressora.

Número de cartões impressos	Medida do tempo de funcionamento da impressora
8000	2 h
14000	3 h 30 min

7. a) 6000 cartões

a) Quantos cartões a impressora produz em 1 h 30 min de funcionamento?

b) Escreva, em seu caderno, uma sentença algébrica que relacione o número de cartões impressos e a medida do tempo, em hora, que a impressora funcionou.

c) Em 37 h 30 min de funcionamento da impressora, quantos cartões foram impressos? **7. c)** 150000 cartões

8 Elabore, em seu caderno, uma atividade na qual haja duas grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais e seja necessário encontrar uma sentença algébrica que relacione os valores dessas grandezas. O objetivo de encontrar a sentença algébrica nesta atividade é calcular alguns valores que não estão entre aqueles fornecidos na situação elaborada por você. Troque sua atividade com um colega e resolva a atividade proposta por ele. Se houver divergências entre as sentenças algébricas encontradas e as esperadas, conversem e tentem chegar a uma conclusão. Se tiverem dificuldades, peçam ajuda para o professor. **8.** Resposta pessoal.

7. b) Exemplo de resposta: sejam n um número natural (número de cartões) e h um número real positivo (medida do tempo em hora), podemos escrever $n = 4000 \cdot h$.

2 Representação da relação entre grandezas no plano cartesiano

Já analisamos como os valores de duas grandezas variam por meio de quadros e sentenças algébricas. Agora, vamos estudar que é possível relacionar os valores de uma grandeza aos valores de outra por meio de um gráfico no plano cartesiano.

Gráficos de grandezas diretamente proporcionais

Acompanhe as situações a seguir, em que vamos representar graficamente a variação dos valores de grandezas diretamente proporcionais.

Situação 1

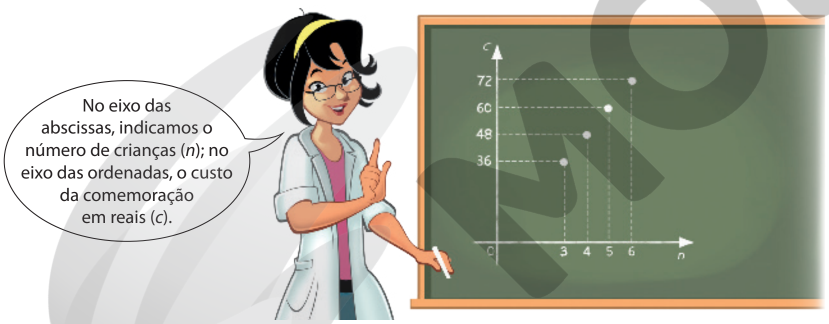
Gabriel fará aniversário no final de semana. Seus pais pretendem comprar alguns lanches e convidar os amigos da escola para comemorar em casa. Para isso, estão fazendo os cálculos de quanto vão gastar na comemoração.

Analise o quadro com estimativas de gasto abaixo.

Número de crianças (n)	3	4	5	6
Custo da comemoração em reais (c)	36	48	60	72

Cada um desses pares de valores (número de crianças e custo) pode ser associado a um ponto do plano cartesiano. Podemos representar o número de crianças pela letra n e o custo, em reais, por c, em que n é um número natural, e c, um número real positivo. Assim, temos pares ordenados na forma (n, c).

Como o número de crianças só pode ser um número natural, o gráfico que representa a relação entre o número de crianças e o custo da comemoração não é uma linha contínua, mas pontos alinhados, como você pode notar a seguir.



ILUSTRAÇÕES: ENÁGIO COELHO/ARQUIVO DA EDITORA

Representação da relação entre grandezas no plano cartesiano

BNCC:

Habilidades EF08MA12 e EF08MA13.

Objetivo:

Representar graficamente a relação entre duas grandezas no plano cartesiano.

Justificativa

Representar graficamente a relação entre duas grandezas no plano cartesiano ajuda a compreender como uma grandeza varia em função da outra e, também, contribui para que os estudantes atribuam significado ao conceito de função, que será estudado mais adiante. Além disso, lidar com essas representações gráficas mobiliza conceitos de outras unidades temáticas.

Mapeando conhecimentos

Organize os estudantes em duplas e proponha que representem, em um plano cartesiano, as relações entre as grandezas dos quadros a seguir:

Medida do comprimento do lado do quadrado	Medida do perímetro do quadrado
1 cm	4 cm
2 cm	8 cm
4 cm	16 cm

Medida da velocidade média	Medida de intervalo de tempo
120 km/h	2 h
60 km/h	4 h
30 km/h	8 h

Para as aulas iniciais

Discuta com a turma as representações gráficas que obtiveram na dinâmica inicial. Questione-os sobre o motivo de o primeiro gráfico ser parte de uma reta e o outro ser uma curva (hipérbole). Explore também o porquê de o primeiro gráfico ser uma semirreta: lembre-os de que comprimento e perímetro são medidas não negativas.

Gráficos de grandezas diretamente proporcionais

Ao explorar a primeira situação, peça aos estudantes que identifiquem a constante de proporcionalidade correspondente aos valores apresentados. Espera-se que eles respondam que a constante de proporcionalidade é 12.

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

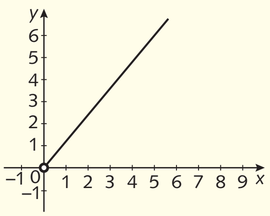
(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Com os estudantes, analise o gráfico elaborado com base na situação **1**, explorando os eixos e os pontos marcados. Nesse caso, é importante ressaltar que a representação gráfica não pode ser uma reta, já que a quantidade de crianças pertence somente ao conjunto dos números naturais.

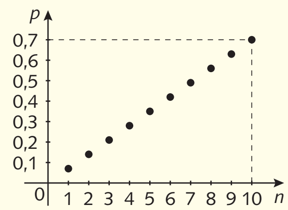
Antes de explorar a segunda situação, peça aos estudantes que exemplifiquem outras situações em que duas grandezas diretamente proporcionais tenham seus valores representados nos números reais.

Na situação **2**, a representação gráfica traz uma semirreta, já que as duas grandezas relacionam números reais. Chame a atenção para o fato de o ponto (0,0) não pertencer à representação, em decorrência da definição de razão.

- Resposta da **atividade 10**:

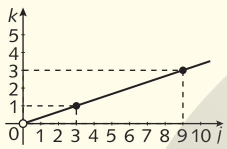


- Resposta do **item b** da **atividade 11**:

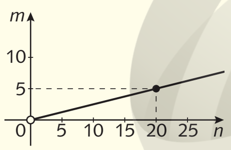


- Respostas da **atividade 12**:

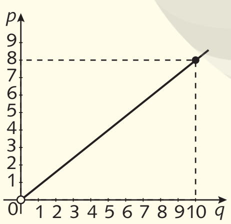
a)



b)



c)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 2

Em um posto de gasolina, em 2022, cada litro de etanol custava R$ 5,00. Neste quadro, confira como o preço a ser pago se relaciona com a quantidade de litros de etanol abastecidos.

Litros de etanol (*l*)	5,0	10,0	15,0	20,0
Preço em R$ (*p*)	25,00	50,00	75,00	100,00

O gráfico a seguir ilustra a situação.

ENÁGIO COELHO/ARQUIVO DA EDITORA

Note que os pontos representados no plano cartesiano acima estão alinhados. Como o preço a ser pago pode assumir qualquer valor real maior que 0, o gráfico que representa a relação entre essas grandezas será uma linha contínua que parte do par ordenado (0, 0), passa pelo par ordenado (5, 25) e continua infinitamente.

Observação

O par ordenado (0, 0) não faz parte do gráfico, pois $\frac{p}{l} = 5$ e $l \neq 0$.

11. a) Exemplo de resposta: Considerando *p* o preço e *n* o número de folhas, com *p* real e *n* natural, uma possibilidade de sentença algébrica é: $p = 0{,}07 \cdot n$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9 Em cada item, determine a sentença algébrica que expressa a relação entre os valores das grandezas.

9. a) Exemplo de resposta: $k = \frac{j}{3}$

a)

k	1	3	6
j	3	9	18

b)

m	4	5	6
n	16	20	24

9. b) Exemplo de resposta: $m = 0{,}25 \cdot n$

c)

p	8	16	24
q	10	20	30

9. c) Exemplo de resposta: $p = 0{,}8 \cdot q$

10. Resposta em *Orientações*.

10 Os valores de duas grandezas estão relacionados pela sentença algébrica $y = 1{,}2 \cdot x$. Construa, em seu caderno, o gráfico dessa relação, sabendo que tanto *x* quanto *y* podem assumir qualquer valor real positivo.

11 Considere que o preço de 10 folhas de sulfite é R$ 0,70. Em seu caderno, expresse a relação, entre o número de folhas e o preço a ser pago por elas por meio de:

a) uma sentença algébrica;

b) um gráfico no plano cartesiano.

11. b) Resposta em *Orientações*.

12 Em seu caderno, para cada item da atividade 9, desenhe um gráfico supondo que as duas grandezas têm seus valores representados no conjunto dos números reais positivos.

12. Resposta em *Orientações*.

Gráficos de grandezas inversamente proporcionais

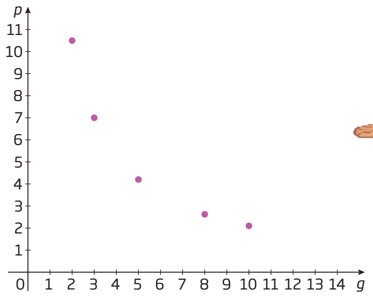
O gráfico que representa a relação entre os valores de duas grandezas inversamente proporcionais não é uma linha reta. Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Um prêmio será dividido igualmente entre mais de um ganhador. Neste quadro, confira o valor estimado, em milhões de reais, do prêmio com base no número de ganhadores.

Número de ganhadores (*g*)	2	3	5	8	10
Prêmio em milhões de reais (*p*)	10,5	7	4,2	2,625	2,1

O gráfico a seguir relaciona o número de ganhadores e o valor estimado do prêmio, em milhões de reais.



Resposta: $p = \frac{21}{g}$, em que g é um número natural diferente de zero.

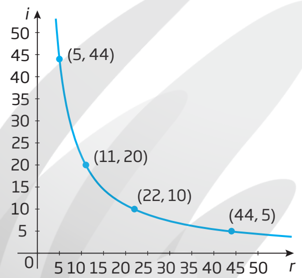
Como o número de ganhadores só pode ser um número natural, o gráfico que representa a relação entre o número de ganhadores e o prêmio não é uma linha contínua, mas pontos que pertencem a uma curva.

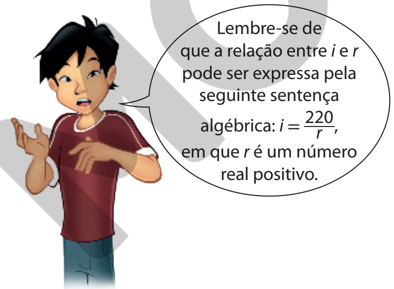
Situação 2

Vamos representar graficamente a relação entre a medida da corrente elétrica e a medida da resistência estudada no tópico *Grandezas inversamente proporcionais*.

Medida da resistência (ohm)	Medida da corrente elétrica (ampère)
44	5
22	10
11	20
5	44

Podemos dizer que a corrente elétrica e a resistência são grandezas inversamente proporcionais. Podemos representar por pontos no plano cartesiano os pares ordenados formados pela medida de resistência r e pela medida de corrente elétrica i correspondente. Como a resistência pode assumir qualquer valor real positivo, o gráfico que representa a relação entre essas grandezas é uma linha curva contínua.





ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

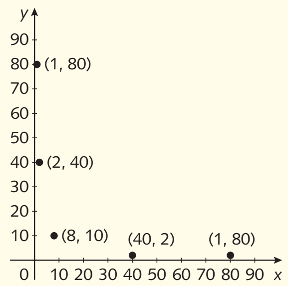
ILUSTRAÇÕES: ENÁGIO COELHO/ARQUIVO DA EDITORA

Gráficos de grandezas inversamente proporcionais

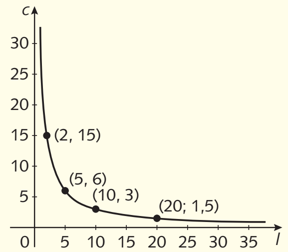
Na situação **1**, chame a atenção dos estudantes para o fato de que o gráfico é formado somente por pontos, pois os valores da grandeza *g* pertencem ao conjunto dos números naturais.

Comente com os estudantes que o gráfico que relaciona valores de duas grandezas inversamente proporcionais é chamado de hipérbole.

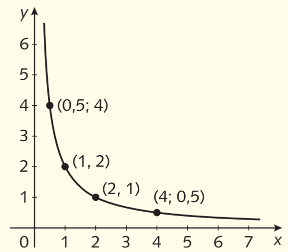
- Na **atividade 13**, indicando por x o número de participantes e por y o número de maçãs, temos:



- Exemplo de gráfico para a **atividade 14**:



- Exemplo de gráfico para a **atividade 15**:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

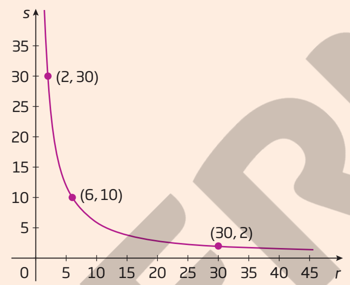
Faça as atividades no caderno.

13 Uma palestrante, ao ser convidada para um evento sobre a escassez de alimento no mundo, levou um pacote de maçãs contendo 80 unidades para dividir entre a plateia. O evento não possuía um número limitado de participantes e a palestrante dividiria as maçãs igualmente entre eles, cortando-as em partes iguais se necessário. No caderno, represente graficamente a relação entre a quantidade de maçãs e o número de participantes do evento.
13. Resposta em *Orientações*.

14 A medida da área de um retângulo é igual a 30 cm². Indicando a medida do comprimento por c e a medida da largura por l e considerando que c e l são números reais positivos, construa um gráfico em seu caderno relacionando os possíveis valores para c e l. Marque pelo menos 4 pontos no gráfico. **14.** Resposta em *Orientações*.

15 Duas grandezas inversamente proporcionais têm valores no conjunto dos números reais, que estão relacionados por meio da sentença algébrica $x \cdot y = 2$. No caderno, represente graficamente a relação entre os valores dessas grandezas, marcando pelo menos 4 pontos pertencentes à curva. **15.** Resposta em *Orientações*.

16 Analise este gráfico e responda às perguntas no caderno.

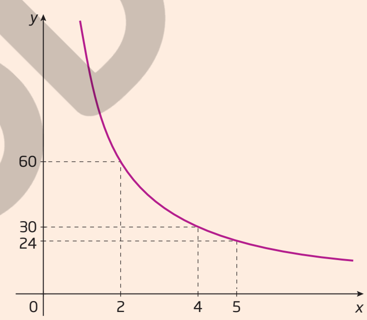


16. a) 60

a) Qual é a constante de proporcionalidade da relação entre os valores r e s das grandezas?

b) Escreva uma sentença algébrica que relacione os valores dessas grandezas. **16. b)** Exemplo de resposta: $s = \frac{60}{r}$, em que r é um número real positivo.

17 Confira o gráfico a seguir e crie uma atividade conforme a orientação.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

17. Resposta pessoal.

Elabore um contexto no qual o gráfico acima represente a relação entre os valores das duas grandezas. Troque sua atividade com um colega, solicitando que ele encontre uma sentença algébrica que relacione os valores dessas grandezas, indicando a constante de proporcionalidade.

5. b) Exemplo de resposta: $d = 50 \cdot t$, em que t é um número real positivo.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Grandezas e proporcionalidade

Grandeza é tudo aquilo que pode ser medido ou contado. Duas ou mais grandezas podem estar relacionadas e variar seus valores de acordo com determinada proporção.

Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza é igual à razão entre os valores correspondentes da segunda grandeza.

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza é igual ao inverso da razão entre os valores correspondentes da segunda grandeza.

1. Em cada item, indique se a relação descrita entre as medidas é diretamente proporcional.

a) A medida de temperatura de um corpo e a hora em que foi medida. 1. a) não

b) A medida de comprimento dos lados de um polígono regular e sua medida de perímetro. 1. b) sim

c) A medida do tempo de produção de uma impressora e o número de páginas impressas.

d) A medida de tempo de uma partida de futebol e o número de gols. 1. d) não 1. c) sim

2. Sabendo que a constante de proporcionalidade entre os valores de um par de grandezas diretamente proporcionais, indicadas por a e b, vale 8, escreva em seu caderno uma sentença algébrica que relacione a e b.
2. Exemplo de resposta: $a = 8 \cdot b$

3. A máquina de uma gráfica produz 120 livros em 1 hora. Em quanto tempo 4 máquinas iguais produziriam a mesma quantidade de livros?
3. 15 min

4. Uma mulher vai de uma cidade a outra dirigindo seu carro em um trecho de estrada a 60 km/h constantes. Ela percorre esse trecho em 3 h. Qual seria a medida de tempo necessária para ela fazer esse mesmo trajeto a 90 km/h constantes? 4. 2 h

5. Um caminhoneiro entrega mercadorias para uma empresa de cosméticos. Ele viaja pela estrada de uma cidade a outra com uma medida de velocidade constante. Este quadro mostra a medida da distância percorrida e a medida de tempo gasto na viagem.

Medida da distância (km)	Medida de tempo (h)
125	2,5
150	3,0

a) Determine a constante de proporcionalidade entre as medidas das grandezas. 5. a) 50

b) Escreva uma sentença algébrica relacionando as medidas das grandezas.

c) Se a medida de tempo em uma terceira viagem feita por esse caminhoneiro foi 1,75 h, qual foi a medida da distância percorrida por ele?
5. c) 87,5 km

6. Neste quadro, os valores de A são inversamente proporcionais aos valores de B.

A	B
3	15
5	9

Escreva no caderno:

a) a constante de proporcionalidade; 6. a) 45

b) uma sentença algébrica que relaciona os valores de A e B; 6. b) Exemplo de resposta: $A \cdot B = 45$

c) o valor de B para $A = 2$. 6. c) $B = 22{,}5$

7. Usando os valores de P e Q apresentados neste quadro, escreva no caderno uma sentença algébrica que os relacione.

P	2	4	6
Q	6	12	18

7. Exemplos de resposta: $P = \frac{Q}{3}$ ou $Q = 3 \cdot P$

Representação da relação entre grandezas no plano cartesiano

É possível relacionar os valores de uma grandeza aos valores de outra por meio de um gráfico no plano cartesiano.

• As **atividades 6** e **7** apresentam valores em quadros. Na **atividade 6**, espera-se que os estudantes reconheçam que os valores de B são inversamente proporcionais aos valores de A, e na **atividade 7**, espera-se que eles percebam que os valores de Q são diretamente proporcionais aos valores de P. Deixe-os à vontade para trocar ideias e conjecturar.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Grandezas e proporcionalidade

• Na **atividade 1**, é importante incentivar os estudantes a argumentar. Eles podem recorrer às experiências práticas para justificar as respostas dos **itens a**, **c** e **d**. Para justificar a resposta do **item b**, eles podem recorrer ao conceito de perímetro e/ou fazer um quadro relacionando a medida do perímetro e a medida do comprimento do lado de alguns polígonos regulares.

• A **atividade 2** trabalha com a representação da relação entre grandezas por meio de uma sentença algébrica. Retome o conceito de constante de proporcionalidade caso ache necessário. Como $\frac{a}{b} = 8$, temos $a = 8b$.

• Na **atividade 3**, espera-se que os estudantes reconheçam que o número de máquinas e a medida do tempo para produzir uma mesma quantidade de livros são inversamente proporcionais. Caso tenham dificuldades para perceber isso, oriente-os a construir um quadro relacionando o número de máquinas e a medida do tempo de produção.

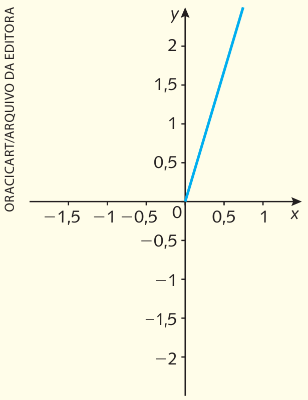
• Na **atividade 4**, espera-se que os estudantes reconheçam que a medida da velocidade constante e a medida do tempo para percorrer um mesmo trajeto são inversamente proporcionais. Eles podem realizar essa atividade por meio da construção de um quadro em que estejam relacionadas as medidas de velocidade constante e as medidas de tempo para percorrer o trajeto ou eles podem determinar a medida da distância do trajeto (180 km) e utilizar esse dado para calcular a medida do tempo necessário para percorrê-lo a 90 km/h. É importante que os estudantes percebam que há diferentes caminhos para resolver esse problema.

• No **item a** da **atividade 5**, espera-se que os estudantes percebam que a constante de proporcionalidade corresponde à medida da velocidade constante com que o caminhoneiro viaja (50 km/h). No **item b**, caso tenham dificuldades, oriente os estudantes a utilizar a resposta obtida no **item a**. Para responder à questão do **item c**, eles podem utilizar a sentença algébrica obtida no **item b**:

$$d = (50 \text{ km/h}) \cdot (1{,}75 \text{ h}) = 87{,}5 \text{ km}$$

Representação da relação entre grandezas no plano cartesiano

- Resposta da **atividade 8**:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 9**, espera-se que os estudantes percebam que o preço pago, em reais, é diretamente proporcional à quantidade de litros abastecidos de etanol. Para determinar o preço do litro do etanol, eles devem perceber que, se foram pagos R$ 15,00 por 5 L, então o preço do litro é R$ 3,00.
- No **item a** da **atividade 10**, espera-se que os estudantes percebam que:

$$\frac{2}{\frac{1}{30}} = \frac{6}{\frac{1}{10}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60$$

Portanto:

$\frac{s}{\frac{1}{r}} = 60$ ou $s = \frac{60}{r}$ ou $s \cdot r = 60$.

- Nos **itens c** e **d** da **atividade 11**, espera-se que os estudantes percebam que, embora os valores de *y* aumentem conforme os valores de *x* também aumentam, isso não acontece na mesma proporção. Por esse motivo, dizemos que a relação entre as grandezas, em ambos os casos, não é proporcional. É importante incentivá-los a justificar suas respostas em cada item.

Gráficos de grandezas diretamente proporcionais

Se os valores da grandeza do eixo das abscissas são números naturais, o gráfico da relação entre os valores não é uma linha contínua, mas pontos alinhados; se os valores dessa grandeza são números reais, o gráfico é uma linha reta contínua.

Gráficos de grandezas inversamente proporcionais

O gráfico da relação entre os valores de duas grandezas inversamente proporcionais não é uma linha reta.

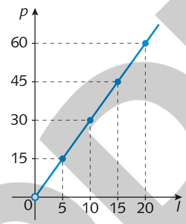
Se os valores da grandeza do eixo das abscissas são números naturais, o gráfico da relação entre os valores não é uma linha contínua, mas pontos que pertencem a uma curva; se os valores dessa grandeza são números reais, o gráfico é uma linha curva contínua.

8. Os valores das grandezas *x* e *y* estão relacionados por meio da sentença algébrica $y = 3{,}4 \cdot x$. No caderno, represente graficamente esta relação, sendo que *x* e *y* podem assumir qualquer valor real positivo.

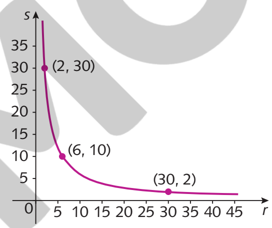
8. Resposta em *Orientações*.

9. Este gráfico relaciona o preço pago, em reais, *p* (eixo *y*), com a quantidade de litros abastecida *l* (eixo *x*). Com base neste gráfico, determine o preço do litro do etanol.

9. R$ 3,00



10. Duas grandezas, *s* e *r*, são inversamente proporcionais.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Analisando o gráfico referente a elas, determine:

10. a) Exemplo de resposta: $s \cdot r = 60$

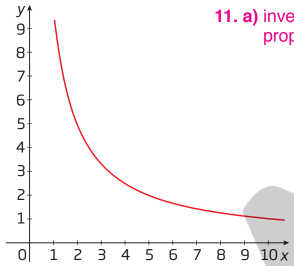
a) uma sentença algébrica que relaciona *s* e *r*.

b) o valor de *s* quando $r = 10$; **10. b)** $s = 6$

c) o valor de *r* quando $s = 5$. **10. c)** $r = 12$

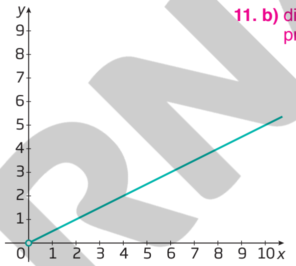
11. Analise estes gráficos e classifique a relação entre as grandezas que eles representam como diretamente, inversamente ou não proporcional.

a)



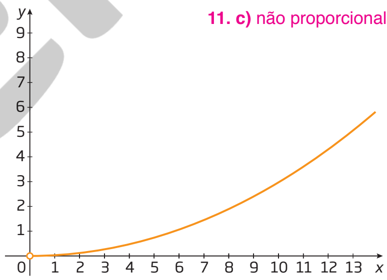
11. a) inversamente proporcional

b)



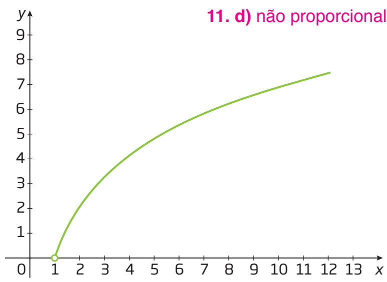
11. b) diretamente proporcional

c)



11. c) não proporcional

d)



11. d) não proporcional

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo 11

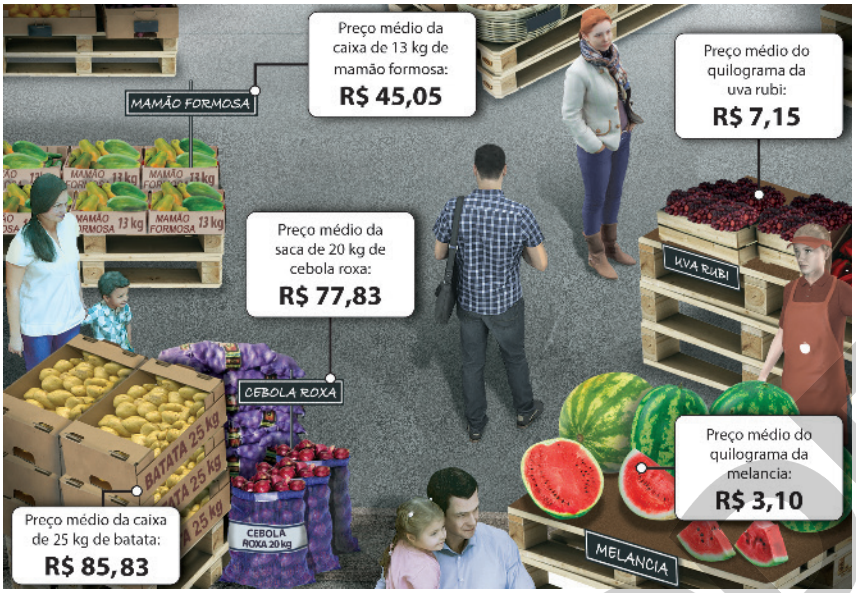
Medidas de tendência central e pesquisa estatística

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Trocando ideias

Em 2021 e 2022, o Brasil sofreu com a alta no preço dos alimentos. Fatores climáticos, a pandemia de coronavírus e a alta no preço dos combustíveis estiveram entre os principais fatores que levaram o país a conviver com esse problema.

Analise, abaixo, o preço médio de alguns alimentos na capital de São Paulo no dia 4 de fevereiro de 2022.



ALEX SILVA/ARQUIVO DA EDITORA

Dados disponíveis em: https://www.hfbrasil.org.br/br/banco-de-dados-precos-medios-dos-hortifruticolas.aspx. Acesso em: 9 fev. 2022.

- Em sua opinião, o que podemos fazer para lidar com a alta dos preços dos alimentos? Converse com os colegas.
- O preço do quilograma da melancia era R$ 3,10 em qualquer lugar da capital de São Paulo em 4 de fevereiro de 2022? Por quê?
- Como você acha que foi calculado o preço médio da caixa de 25 kg de batata na capital de São Paulo em 4 de fevereiro de 2022? Converse com os colegas.

Neste capítulo retomaremos alguns conceitos que podem nos ajudar com pesquisas estatísticas e aprenderemos novas medidas que vão nos auxiliar na compreensão do comportamento dos dados de uma pesquisa. **Trocando ideias**: primeiro item: resposta pessoal; segundo item: não, porque R$ 3,10 era o preço médio e, portanto, havia lugares na capital de São Paulo em que o preço do quilograma da melancia era menor ou maior do que esse valor; terceiro item: resposta pessoal.

Na última questão, a ideia é que levantem hipóteses ou estabeleçam conjecturas. Após conversarem, diga que uma possibilidade é a de que foi feita uma pesquisa em estabelecimentos comerciais de diferentes locais da capital de São Paulo para saber o preço pelo qual aquele alimento estava sendo vendido. Em seguida, os preços foram adicionados e, por fim, o total obtido foi dividido pelo número de estabelecimentos consultados.

Neste *Trocando ideias*, os estudantes argumentam com base em dados e informações confiáveis, estabelecem conjecturas e mobilizam conceitos das Unidades temáticas *Números* e *Probabilidade e estatística*. Nesse âmbito, se favorece o desenvolvimento das competências gerais **7** e **9** e das competências específicas **2**, **3**, **4** e **8** da BNCC.

CAPÍTULO 11 – MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL E PESQUISA ESTATÍSTICA

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 3, 4 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Conscientizar os estudantes sobre a importância do consumo sustentável e da realização de pesquisa de preços.
- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a noção e o cálculo da média aritmética.

Tema contemporâneo transversal:

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Forme uma roda de conversa com a turma e peça que leiam as informações presentes no infográfico da página. Depois, peça a alguns deles que comentem o que acharam mais importante. Se achar conveniente, proponha as seguintes questões: “Vocês costumam ir ao supermercado ou à feira? Vocês têm acompanhado o preço de determinado produto nesses últimos dias? Qual?”. Reserve um tempo para que contem suas experiências e, em seguida, convide-os a refletir sobre a questão proposta no primeiro item. Espera-se que eles respondam que realizam pesquisa de preços, que procuram substituir aquele alimento que está mais caro por outro similar que está custando mais barato, que procuram evitar o desperdício de alimentos em suas residências etc.

As questões propostas no segundo e terceiro itens têm como objetivo levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a noção e o cálculo da média aritmética. É importante que eles compreendam que os preços médios que aparecem no infográfico representam todos os preços pelos quais os alimentos estavam sendo comercializados na capital de São Paulo em 04/02/2022. Se achar conveniente, verifique se algum deles se lembra do conceito de média aritmética.

Pesquisa estatística

BNCC:
- Competência geral 1 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 1 (a descrição estána página VII).
- Habilidade EF08MA26.

Objetivos:
- Distinguir pesquisas censitárias e amostrais.
- Conhecer as diferentes técnicas de amostragem.

Justificativa

Pesquisas estatísticas são realizadas quando pretendemos estudar características de determinado conjunto de elementos, que pode ser de pessoas, objetos, entre outros. Nesse contexto, é importante que os estudantes reconheçam que há pesquisas que necessitam que toda a população seja investigada e outras que não e, também, que conheçam diferentes técnicas de amostragem para que percebam em que situações uma é mais conveniente que a outra, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA26**.

Mapeando conhecimentos

Forme uma roda de conversa com os estudantes e proponha as seguintes questões: "Se quisermos saber o esporte preferido dos estudantes da turma, é melhor consultar a turma toda ou só uma parte dela? Por quê? Se quisermos saber a opinião dos moradores da cidade sobre a qualidade do transporte público, convém consultar todos os moradores? Por quê? Como selecionar uma parte dos moradores que represente bem toda a população que vive na cidade para participar da pesquisa?".

Para as aulas iniciais

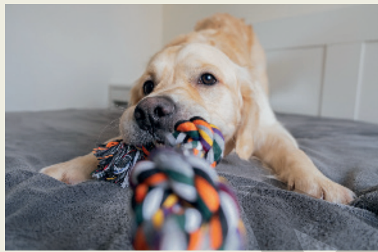
Explique a diferença entre pesquisa censitária e amostral e questione sobre os motivos de nem todas as pesquisas serem censitárias.

Em seguida, organize a turma em dois grandes grupos e proponha que realizem uma pesquisa em que a população seja todos os estudantes do 8º ano da escola. O tema deve ser de livre escolha da turma. A ideia é que um grupo faça a pesquisa consultando todos os estudantes das turmas de 8º ano e o outro grupo faça a pesquisa selecionando uma amostra. Depois, reserve uma aula para que os grupos possam comparar e discutir os resultados obtidos.

1 Pesquisa estatística

Leia a seguinte informação.

Segundo a Associação Brasileira da Indústria de Produtos para Animais de Estimação (Abinpet), em 2020, o faturamento do segmento foi de aproximadamente R$ 27 bilhões de reais, cerca de 21% a mais do que em 2019. Isso significa que as pessoas estão gastando mais com seus animais, o que gera oportunidades de negócio para os empreendedores do ramo.


KASHAEVA IRINA/SHUTTERSTOCK

Cão da raça Golden Retriever.

Dados disponíveis em: Associação Brasileira da Indústria de Produtos para Animais de Estimação. **Mercado PET Brasil 2021**. São Paulo: Abinpet, 2021.

Estatísticas como essa motivam os pesquisadores a buscar mais informações a respeito do assunto. Por exemplo: "Por qual motivo as pessoas estão gastando mais com seus animais de estimação?".

A seguir, vamos retomar alguns conceitos e apresentar outros que podem contribuir para realizar e analisar pesquisas estatísticas.

População, amostra e pesquisa censitária ou amostral

A diretora de uma escola quer saber a opinião dos estudantes a respeito da qualidade do lanche servido no intervalo.

Para isso, ela vai realizar uma pesquisa e coletar informações dos estudantes. Portanto, todos os estudantes da escola compõem a **população** (ou **universo estatístico**) de interesse.

Ao planejar a pesquisa, a diretora percebeu que demoraria muito tempo para entrevistar todos os estudantes. Então, para viabilizar a pesquisa, decidiu escolher aleatoriamente 10 estudantes de cada sala.

O grupo de estudantes selecionados compõe uma **amostra**. Toda amostra deve ser escolhida de forma conveniente e estratégica, para que os dados coletados por meio dela retratem a população como um todo.

ILUSTRAÇÕES: CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

População, amostra e pesquisa censitária ou amostral

Este tópico, juntamente com as atividades propostas, visam ao desenvolvimento da habilidade **EF08MA26**, trazendo as diferentes maneiras de seleção de amostras – sistemática, casual simples e estratificada.

(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).

Um pouco de história

Faça as atividades no caderno.

Estatística: origem e finalidade

Os primeiros dados estatísticos foram encontrados no Egito antigo e datam de aproximadamente 5000 a.C., e estão relacionados a prisioneiros de guerra. A palavra "estatística" vem do latim *status*, que significa estado; essa palavra passou a ser utilizada porque os recenseamentos eram feitos por ordem dos governantes, que queriam obter dados da população para taxar impostos; daí vem também a palavra *censo*, derivada de *cesere*, que em latim significa taxar.

Outras contagens populacionais foram realizadas no Egito e em outras regiões. Há registros de que, por volta de 2300 a.C., na China, por ordem do imperador Yao, foi realizado um censo da população e das lavouras cultivadas. Posteriormente, por volta dos séculos VIII ao IV a.C., os gregos e romanos também realizaram censos da população para recrutar soldados para o exército.


LÉO FANELLI/ARQUIVO DA EDITORA

A palavra "estatística", no sentido de obtenção, estudo e interpretação de dados, foi utilizada pela primeira vez na Alemanha, por volta do século XVIII. No Brasil, o primeiro censo foi realizado em 1872.

Atividade

Os questionários dos censos no Brasil eram realizados em papel. Pesquise: em que ano foi realizado o primeiro censo digital? **Um pouco de história:** 2010

Pesquisa censitária

A **pesquisa censitária** é aquela em que são obtidos os dados de toda a população, garantindo maior precisão na análise e na interpretação das informações. Um exemplo de pesquisa censitária é o Censo Demográfico, realizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

A pesquisa censitária pode ser inviável em algumas situações. Por exemplo, no período que antecede as eleições são realizadas diversas pesquisas de intenção de voto. Se toda a população brasileira fosse entrevistada, haveria muitos dados para serem processados e cada pesquisa seria equivalente ao próprio processo eleitoral.

Pesquisa amostral

A **pesquisa amostral** é aquela em que são obtidos os dados de parte de uma população, ou seja, de uma amostra. Esse tipo de pesquisa é bastante comum em nosso cotidiano, principalmente de maneira informal. Por exemplo, em feiras de rua, é comum os vendedores oferecerem aos clientes um pedaço ou uma unidade de determinada fruta para convencê-lo de que as frutas são de boa qualidade. Em situações como essa, a pesquisa amostral é a mais adequada, pois não faria sentido o cliente provar todas as frutas à venda antes de comprá-las.

SERGIO RANALLI/PULSAR IMAGENS

Feira livre em Londrina (PR). Foto de 2020.

A partir do conhecimento da história da Estatística, apresentada neste *boxe Um pouco de história*, os estudantes podem perceber que as teorias são fruto de desafios enfrentados pelos matemáticos da época, desenvolvidas com grande esforço e ordenadas de maneira diferente da apresentada, depois de todo o processo de formalização. Assim, essa seção busca favorecer o desenvolvimento da competência geral **1** e da competência específica **1**.

Se julgar interessante, uma sugestão é visitar o portal da coleção M³ Matemática Multimídia que apresenta áudios que trazem fatos históricos que levaram ao desenvolvimento da Estatística.

Sugestão de atividade extra

Caso considere interessante, peça aos estudantes que pesquisem informações sobre a realização do último censo realizado no Brasil. No *site* do IBGE, eles poderão encontrar informações sobre todas as etapas de realização da pesquisa.

Sugestão de leitura

O texto *História: contagem da população*, do IBGE, traz um pouco da história dos censos no mundo e no Brasil. Se julgar oportuno, compartilhe com os estudantes.

211

Neste momento, é possível retomar o questionamento a respeito dos motivos de nem todas as pesquisas serem censitárias. Espera-se que eles respondam que, apesar de os resultados desse tipo de pesquisa serem mais precisos, a coleta de dados costuma ser trabalhosa, demorada e muito cara.

Ao introduzir o conteúdo sobre pesquisa amostral, comente com os estudantes que, ao usar uma amostra da população para a pesquisa, ela pode ser viciada ou tendenciosa quando representa apenas algumas características da população, não permitindo, assim, que seja feita a estatística inferencial.

Percebeu que nem sempre a pesquisa censitária se mostra viável? Assim, uma pesquisa amostral pode ser mais vantajosa ou a única possível, dependendo do objeto de estudo e das características que pretendemos investigar.

Imagine que a intenção seja analisar a medida do tempo que um lote de lâmpadas leva para queimar. Para chegar a um resultado, não é possível testar todas elas e tomar a média dessa medida de tempo, pois esse seria um processo destrutivo. Nesse caso, como podemos escolher a amostra?

Vamos conhecer algumas técnicas de amostragem.

ALEKSANDR GRECHANYUK/SHUTTERSTOCK

O objeto de estudo de uma pesquisa estatística pode variar desde a análise do perfil da população brasileira até o tempo de duração de lâmpadas.

a) Em uma linha de produção, as peças costumam sair com qualidade muito parecida e apresentam-se ordenadas. Por esse motivo e por produzirem uma enorme quantidade de peças por hora, o controle de qualidade é feito por amostragem. Nesse caso, a seleção da amostra é feita por meio da retirada periódica de um elemento da população, ou seja, a cada determinada quantidade de elementos, um é retirado para análise.

Chamamos esse tipo de amostragem de **sistemática**.

b) O professor de Educação Física quer descobrir o esporte preferido de seus estudantes. Como não teria tempo suficiente para consultar todos eles, resolveu selecionar uma amostra de seis estudantes de cada turma escolhidos aleatoriamente. Para isso, escreveu em um papel o número de chamada dos estudantes, sorteando seis deles por turma. Essa técnica de amostragem se chama **casual simples**.

Nesse tipo de seleção de amostra, os elementos da população são rotulados e, por meio de sorteio, os integrantes da amostra são selecionados para participar da pesquisa.

ILUSTRAÇÕES: CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

c) Uma livraria realizou uma pesquisa para saber quais gêneros literários eram os preferidos dos seus leitores. Para isso, entrevistou 90 pessoas, sendo 30 crianças, 30 adolescentes e 30 adultos. A divisão da amostra em 3 segmentos (ou estratos) caracteriza uma amostragem **estratificada**.

Atividades

1. a) Os cerca de 154 000 habitantes da cidade de Pouso Alegre em Minas Gerais.
1. b) 3 080 pessoas entrevistadas.

Faça as atividades no caderno.

1 A cidade de Pouso Alegre, em Minas Gerais, tem aproximadamente 154 000 habitantes. Uma empresa de tecnologia da cidade realizou uma pesquisa com 3 080 pessoas para saber quantas delas têm acesso à internet no celular.

ILUSTRAÇÕES: CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

No caderno, responda às perguntas.

a) Qual é a população dessa pesquisa?

b) Quantas pessoas compõem a amostra da pesquisa?

c) Que porcentagem do universo estatístico a amostra representa? **1. c)** 2%

2 Em seu caderno, indique o tipo de pesquisa mais adequada para cada situação. Se a pesquisa for amostral, informe a técnica de amostragem (estratificada, casual simples ou sistemática). Justifique suas escolhas.

a) Em uma escola com 3 mil estudantes, conhecer a profissão dos pais deles. A escola fica na fronteira entre a zona urbana e a zona rural.

b) Conhecer a opinião de estudantes sobre a lista de exercícios aplicada em uma turma do 8º ano.

c) Determinar a resistência da borracha de bexigas de festas de aniversário.

d) Determinar o representante de classe de uma turma do 8º ano.

e) Determinar a altura média dos estudantes do 8º ano de uma escola.

2. Respostas em *Orientações*.

Após apresentar algumas técnicas de amostragem para uma pesquisa, comente com os estudantes que qualquer uma delas permite obter amostras representativas da população e generalizar com confiança, para a população, os resultados obtidos a partir da amostra.

- A seguir apresentamos exemplos de resposta para a **atividade 2**.
  - Para o **item a**: pesquisa amostral estratificada, escolhendo uma amostra referente a estudantes que moram no campo e outra aos que moram na cidade.
  - Para o **item b**: como a população é bem específica e formada por estudantes de uma única turma, a pesquisa censitária seria viável.
  - Para o **item c**: pesquisa amostral sistemática, já que avaliar a resistência de todas as bexigas produzidas é um processo destrutivo.
  - Para o **item d**: pesquisa censitária, pois para a escolha do representante é preciso que todos façam sua escolha.
  - Para o **item e**: pesquisa amostral casual simples, escolhendo aleatoriamente alguns estudantes das salas de 8º ano.

213

Variáveis estatísticas

Comente com os estudantes que a coleta de dados do processo estatístico é feita por meio da definição das variáveis da pesquisa a ser realizada. Em Estatística, variável é definida como uma característica do elemento pesquisado. Estatisticamente falando, cada variável pode ter um número de resultados possíveis em uma pesquisa.

Verifique se na turma ocorre uma tendência comum: confundir variável qualitativa ordinal com variável quantitativa discreta. Caso isso ocorra, apresente outros exemplos referentes a essas variáveis, deixando a diferença entre elas mais clara e compreensível.

Variáveis estatísticas

A medida do tempo de duração de uma lâmpada e a porcentagem de lares brasileiros que possuem animais de estimação são características (ou atributos) chamadas, em Estatística, de **variáveis**. Observe que essas variáveis têm valores com significados diferentes e que podemos classificá-las conforme veremos a seguir.

Variável qualitativa

Quando o valor de uma variável representa uma característica ou atributo, dizemos que ela é uma **variável qualitativa**. Por exemplo, no caso de uma amostra de determinada fruta como a cereja, poderíamos dizer que as frutas são muito doces, pouco doces, sem sabor, ácidas ou muito ácidas. Outro exemplo de variável qualitativa seria a preferência por um determinado time de futebol, podendo ser qualquer time.

Observe outros exemplos.

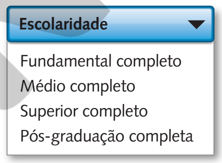
a) Estado civil: casado(a), solteiro(a), divorciado(a);

b) Cidade em que nasceu: Manaus, Amapá, Rio de Janeiro ou qualquer outra cidade;

c) Cor dos olhos: verdes, castanhos, azuis, entre outros.

Uma variável qualitativa pode ser de dois tipos: ordinal ou nominal.

Variável qualitativa ordinal: é uma variável cujos valores podem ser ordenados. São exemplos: o grau de dificuldade das questões de uma prova (fácil, médio ou difícil), o nível de escolaridade, a satisfação quanto a um serviço prestado por alguma empresa (pouco satisfeito, satisfeito ou muito satisfeito), entre outros.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Variável qualitativa nominal: os valores desse tipo de variável não podem ser ordenados. São exemplos: a cidade de nascimento, a cor favorita, o sexo, a cor do cabelo, entre outros.

Variável quantitativa

Os valores de uma **variável quantitativa** são expressos por números indicando geralmente contagem ou medida de alguma grandeza. Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Medida de comprimento

b) Número de animais de estimação

c) Número de irmãos

d) Medida de massa

e) Medida de volume

f) Medida de tempo

CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Uma variável quantitativa também pode ser de dois tipos: discreta ou contínua.

Variável quantitativa discreta: é aquela que indica, geralmente, contagem de algo, como o número de vezes que se toma o transporte público por semana, o número de filhos, a quantidade de sapatos que se tem, a quantidade de pontos feitos em uma partida de basquete, entre outras.

MARCO CICCOLELLA/SHUTTERSTOCK

Equipes femininas de basquete de Alemanha e Japão disputando partida nos Jogos Paralímpicos de Tóquio, no Japão. Foto de 2021.

Variável quantitativa contínua: indica, geralmente, uma medida. Essa variável pertence ao conjunto dos números reais. Pode indicar, por exemplo, a medida da distância percorrida de casa até a escola, a medida da altura dos estudantes de uma turma, a medida do tempo para completar a prova de 100 metros rasos etc.

ROIBU/SHUTTERSTOCK

O atleta italiano Marcell Jacobs Lamont, vencedor da corrida dos 100 metros rasos masculino durante os Jogos Olímpicos de Tóquio 2020, com 9,80 s. Foto de 2021.

O esquema a seguir sintetiza as variáveis e seus tipos.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Conhecer a categoria da variável pode ajudar na escolha do tipo de gráfico mais adequado para representar os dados.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

3 Uma pequena empresa está expandindo seus serviços e organizou na seguinte planilha alguns dados de todos os funcionários contratados.

3. Variáveis qualitativas nominais: primeiro nome e sexo; variável qualitativa ordinal: escolaridade; variáveis quantitativas contínuas: salário e tempo de serviço.

	A	B	C	D	E
1	**Primeiro nome**	**Sexo**	**Escolaridade**	**Tempo de serviço**	**Salário (R$)**
2	Marcos	M	Ensino Médio	4 anos	3 500,00
3	Maria	F	Ensino Superior	3,5 anos	4 500,00
4	Willian	M	Ensino Superior	2,75 anos	3 500,00
5	Jéferson	M	Ensino Médio	5 anos	2 950,00
6	Luciana	F	Ensino Médio	2,5 anos	2 950,00

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- Em seu caderno, identifique as variáveis e seus tipos.

Comente com os estudantes sobre a importância de cada uma das etapas do processo estatístico. A coleta de dados, a organização e a apuração, e a apresentação dos dados obtidos, por meio de tabelas e gráficos, fazem parte da Estatística descritiva, ao passo que a análise e a interpretação dos resultados integram a Estatística inferencial ou indutiva.

- Diga aos estudantes que a planilha apresentada na **atividade 3** é também chamada de quadro de dados brutos.

Sugestão de atividade extra

Em conjunto com os estudantes, escolha uma situação para, a partir dela, realizar uma coleta de dados e, então, com base nesse banco de dados, fazer um estudo estatístico da situação para que emerjam as etapas do processo estatístico e também os conceitos estudados até o momento.

Antes de iniciar o processo de coleta de dados, discuta o objetivo do estudo a ser realizado. É a partir dessa reflexão que eles determinarão quais serão as variáveis a serem analisadas e, consequentemente, quais tipos de dados referentes à situação devem ser coletados. Essa discussão pode ser realizada com base na comparação dessa situação com outras abordadas pelos meios de comunicação a partir de um tratamento estatístico.

Determinados os objetivos do estudo estatístico a ser realizado, as variáveis a serem analisadas e, portanto, os dados a serem coletados, é importante que eles reflitam sobre como a amostra deve ser selecionada.

215

Medidas de tendência central

BNCC:

Habilidade EF08MA25.

Objetivos:

- Compreender e determinar a média aritmética, a mediana e a moda de um conjunto de dados.
- Planejar e executar uma pesquisa amostral e produzir um relatório conclusivo, apresentando os dados coletados.

Tema contemporâneo transversal:

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Justificativa

Compreender e determinar as medidas de tendência central possibilita aos estudantes perceber que essas medidas representam, de alguma forma, todos os valores de um conjunto de dados e favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA25**.

Mapeando conhecimentos

Reproduza o seguinte conjunto de dados na lousa: 71, 40, 86, 55, 63, 70, 44, 2000, 37, 68, 53, 55, 57, 60, 82, 91, 62, 72, 56, 42, 36. Em seguida, pergunte aos estudantes: “Qual número melhor representa esse conjunto de dados? Por quê?”. Incentive-os a estabelecer conjecturas e trocar ideias. É possível que alguns deles recorram à média aritmética, mas chame a atenção para o fato da influência do valor 2000 na média, o que faz com que essa medida não represente bem esse conjunto de dados.

Para as aulas iniciais

Recorde os conceitos de média aritmética simples e média aritmética ponderada da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, explore com a turma as **atividades 44** e **45**.

Defina moda e mediana e proponha aos estudantes que determinem a média, a moda e a mediana do conjunto de dados da dinâmica inicial. Em seguida, peça que comparem as medidas de tendência central obtidas e verifiquem qual delas representa melhor o conjunto de dados. Incentive-os a argumentar.

4 Em seu caderno, classifique as variáveis em qualitativas (ordinal ou nominal) ou quantitativas (contínuas ou discretas):

a) cor da água coletada em um rio; **4. a)** qualitativa nominal

b) número de peças produzidas por uma máquina por hora; **4. b)** quantitativa discreta

c) precipitação pluviométrica durante um ano na cidade de Nova Serrana (MG); **4. c)** quantitativa contínua

d) nível de escolaridade; **4. d)** qualitativa ordinal

e) salários dos funcionários de uma empresa; **4. e)** quantitativa contínua

f) medida do tempo que leva para ir ao trabalho; **4. f)** quantitativa contínua

g) número de livros de uma biblioteca; **4. g)** quantitativa discreta

h) número de ações negociadas na bolsa de valores de Nova York; **4. h)** quantitativa contínua

i) grau de proficiência em um idioma. **4. i)** qualitativa ordinal

5 Em uma pesquisa realizada com os participantes de um *workshop* sobre empreendedorismo, coletou-se dados relacionados aos seguintes indicadores: idade, sexo, quantidade de filhos, grau de instrução, renda, área de formação e fonte de renda.

a) Das variáveis acima, quais são as quantitativas e quais são as qualitativas?

b) Das variáveis quantitativas, quais são as discretas? **5. b)** idade e quantidade de filhos

6 No caderno, elabore um pequeno questionário para que um colega o responda. No questionário deve haver perguntas que permitam coletar dados de 5 variáveis quantitativas diferentes, discretas ou contínuas.

Troque de questionário com seu colega e peça a ele que responda às suas perguntas, e você responderá às perguntas elaboradas por ele. Próximo de cada resposta, anotem se a variável é quantitativa discreta ou contínua. Verifiquem se a classificação das variáveis e as respostas dadas estão de acordo com o esperado. Caso haja divergência na resposta, conversem e tentem resolver as dúvidas. Se as dúvidas permanecerem, consultem o professor.

5. a) quantitativas: idade, quantidade de filhos e renda; qualitativas: sexo, grau de instrução, área de formação e fonte de renda

2 Medidas de tendência central

Vamos estudar as **medidas de tendência central (ou de posição) média**, **mediana** e **moda**, que são obtidas a partir dos dados coletados da população ou de uma amostra, e que nos ajudam a compreender a distribuição dos valores das variáveis quantitativas e analisar a **amplitude** de um conjunto de dados. Para isso, considere a seguinte situação.

Clara anotou no calendário as medidas de temperatura máxima dos últimos 15 dias do mês de janeiro de 2023 em sua cidade.

JANEIRO/2023

Domingo	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
15	16	17 23 °C	18 24 °C	19 24 °C	20 23 °C	21 21 °C
22 21 °C	23 24 °C	24 19 °C	25 15 °C	26 22 °C	27 24 °C	28 24 °C
29 24 °C	30 19 °C	31 15 °C	1	2	3	4

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

(**EF08MA25**) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

Médias

A **média aritmética simples** dos números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n,$ que podemos indicar por $\overline{x}$, é dada por:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}}$$

Considerando as medidas de temperatura máxima dos últimos 15 dias do mês de janeiro anotadas por Clara, o cálculo da média aritmética simples é obtido por:

$$\overline{x} = \frac{23\ °C + 24\ °C + 24\ °C + \dots + 24\ °C + 19\ °C + 15\ °C}{15} = \frac{322\ °C}{15}$$

soma de todas as medidas de temperatura máxima
quantidade de valores adicionados

A média das medidas de temperatura máxima na última quinzena de janeiro de 2023 foi de, aproximadamente, 21,47 °C.

A **média aritmética ponderada** pode facilitar o cálculo da média quando temos valores repetidos ou quando os valores possuem graus de importância diferentes. Para obter a média ponderada, multiplicamos cada valor por seu respectivo peso (frequência com que o valor ocorre ou grau de importância dado) e adicionamos os produtos. Depois, dividimos o resultado obtido pela soma dos pesos.

A média aritmética ponderada dos números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, em que x_1 tem peso p_1, x_2 tem peso p_2, x_3 tem peso p_3 etc., é dada por:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}}$$

Para facilitar, organizamos no quadro as medidas de temperatura máxima anotadas por Clara e indicamos a frequência com que cada uma delas ocorreu nos últimos 15 dias do mês de janeiro.

Medidas da temperatura máxima (°C)	Frequência
15	2
19	2
21	2
22	1
23	2
24	6

Portanto, a média ponderada das medidas de temperatura máxima é dada por:

$$\overline{x} = \frac{2 \cdot 15\ °C + 2 \cdot 19\ °C + 2 \cdot 21\ °C + 1 \cdot 22\ °C + 2 \cdot 23\ °C + 6 \cdot 24\ °C}{2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 6} = \frac{322\ °C}{15} \simeq 21{,}47\ °C$$

Assim como a média aritmética simples, a média aritmética ponderada das medidas de temperatura máxima da última quinzena de janeiro na cidade de Clara é de, aproximadamente, 21,47 °C.

Mediana

A **mediana** (***Md***) é o valor que ocupa a posição central de um conjunto de dados colocados em ordem crescente ou decrescente. A essa ordenação, damos o nome de **rol**.

Se a distribuição tiver um número ímpar de dados, haverá um valor que ocupa a posição central, e este será a mediana.

Se a distribuição tiver um número par de dados, haverá dois valores que ocupam as posições centrais. Assim, a mediana será a média aritmética desses dois valores centrais.

Médias

Ao explicar as noções de média aritmética simples e de média aritmética ponderada, peça aos estudantes que busquem outras situações, além das apresentadas, em que cada um desses tipos de média seja utilizado.

Sempre que possível, explore os recursos digitais, além do uso da calculadora. Planilhas eletrônicas possuem ferramentas e recursos que permitem realizar o tratamento estatístico, como é o caso do cálculo da média.

Mediana

Comente com os estudantes que a média não representa bem as características de um conjunto de dados quando há valores muito maiores ou muito menores do que os demais e, por esse motivo, utilizamos outras medidas de tendência central como a mediana.

A média, bem como a mediana e a moda, caracterizam um conjunto de dados. Comente com os estudantes que cada uma dessas medidas de posição (ou de tendência central) pode ser mais conveniente que a outra, ou pode até mesmo ser usada em conjunto para analisar os dados de uma situação. Entretanto, é preciso ter cuidado para que, ao empregar essas medidas, não haja distorção das informações que estão sendo analisadas.

Moda

É importante que os estudantes compreendam que a moda é o valor que tem maior frequência em um conjunto de dados e que costumamos utilizar a moda quando a variável é qualitativa, pois, nesse caso, não conseguimos determinar a média nem a mediana.

Amplitude

Explique aos estudantes que quanto menor for a amplitude dos dados, mais próximos eles estarão da média, da moda e da mediana.

Clara registrou 15 medidas de temperatura em seu calendário; portanto, uma dessas medidas ocupa a posição central. Vamos dispor as medidas em ordem crescente.

$$\underbrace{15\ °C, 15\ °C, 19\ °C, 19\ °C, 21\ °C, 21\ °C, 22\ °C}_{\text{7 medidas}}, \mathbf{23\ °C}, \underbrace{23\ °C, 24\ °C, 24\ °C, 24\ °C, 24\ °C, 24\ °C, 24\ °C}_{\text{7 medidas}}$$

posição central

$Md = 23\ °C$

Se, por algum motivo, não houver informação para o dia 17 de janeiro, em que a medida da temperatura máxima registrada foi de 23 °C, a mediana é calculada assim:

$$\underbrace{15\ °C, 15\ °C, 19\ °C, 19\ °C, 21\ °C, 21\ °C}_{\text{6 medidas}}, \mathbf{22\ °C}, \mathbf{23\ °C}, \underbrace{24\ °C, 24\ °C, 24\ °C, 24\ °C, 24\ °C, 24\ °C}_{\text{6 medidas}}$$

posições centrais

$$Md = \frac{22\ °C + 23\ °C}{2} = \frac{45\ °C}{2} = 22{,}5\ °C$$

Nesse caso, a mediana é 22,5 °C.

Moda

Moda é o valor ou os valores que apresentam a maior frequência em um conjunto de dados, ou seja, que ocorrem mais vezes. Para as medidas de temperatura máxima anotadas por Clara, sabemos que:

- a frequência da medida 15 °C é 2;
- a frequência da medida 19 °C é 2;
- a frequência da medida 21 °C é 2;
- a frequência da medida 22 °C é 1;
- a frequência da medida 23 °C é 2;
- a frequência da medida 24 °C é 6.

Assim, podemos concluir que a moda é 24 °C pois é a medida que apresenta a maior frequência. Portanto, a medida de temperatura máxima que mais ocorreu nos últimos 15 dias de janeiro de 2023 na cidade de Clara foi 24 °C.

Observação

Ao contrário da média ou da mediana, a moda não é necessariamente única. Podemos ter um conjunto de dados com duas modas (bimodal), sem nenhuma moda (amodal) ou com mais de dois valores modais (multimodal).

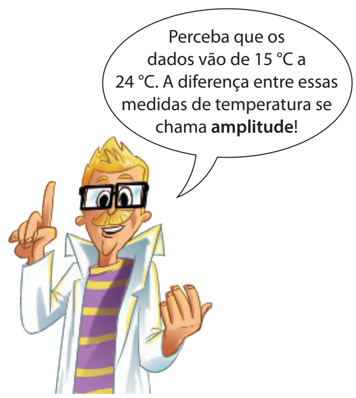
Amplitude

A **amplitude** de um conjunto de dados é a diferença entre o menor e o maior valor que aparecem nesse conjunto. Considerando as medidas de temperaturas anotadas por Clara, podemos notar que a menor medida é 15 °C e a maior é 24 °C. Nesse caso, a amplitude é calculada assim:

$$24\ °C - 15\ °C = 9\ °C$$

Logo, a amplitude desse conjunto de dados é 9 °C.

A partir dos valores da média (21,47 °C), da mediana (23 °C) e da moda (24 °C), mesmo sem observar todos os dados diretamente, podemos concluir que as medidas obtidas estão mais próximas de 24 °C do que de 15 °C.



CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

Faça as atividades no caderno.

7 A tela do computador a seguir mostra o número de visitantes em um parque nos 31 dias do mês de julho de 2023.

7. b) Resposta pessoal.

AVELINO GUEDES/ARQUIVO DA EDITORA

7. a) média aritmética: 99; mediana: 94; moda: 88

a) Calcule a média aritmética, a mediana e a moda desse conjunto de dados.

b) Na sua opinião, qual dessas medidas de tendência central é mais significativa para a avaliação do número de visitantes no mês de julho? Justifique.

c) Em quantos dias o público presente no parque foi acima da média? 7. c) 12 dias

d) Calcule a amplitude desse conjunto de dados. Escreva uma frase relacionando-a às medidas de tendência central calculadas.
7. d) amplitude: 122; Resposta pessoal.

8 Uma instituição que atende crianças carentes cadastrou, em janeiro de 2024, 50 crianças para receber roupas como doação. Na tabela a seguir, observe o tamanho das roupas e a quantidade de crianças.

Quantidade de crianças por tamanho de roupa	
Tamanho da roupa	**Quantidade de crianças**
8	9
10	14
12	12
14	7
16	8

Dados obtidos pela instituição de caridade em janeiro de 2024.

a) Calcule a moda, a mediana e a amplitude desses dados. 8. a) moda: 10; mediana: 12; amplitude: 8

b) O que cada uma dessas medidas representa nessa situação? Converse com o professor e os colegas. 8. b) Resposta em *Orientações.*

9 A distribuição dos salários de uma empresa está representada na tabela a seguir.

Distribuição dos salários da empresa	
Salário	**Número de funcionários**
R$ 800,00	22
R$ 900,00	9
R$ 1 000,00	8
R$ 1 050,00	8
R$ 1 100,00	7
R$ 1 300,00	6
R$ 2 300,00	4
R$ 5 220,00	1

Dados obtidos pelo departamento pessoal da empresa em dezembro de 2023.

Calcule o salário médio dos funcionários dessa empresa, a moda desses salários e a amplitude do conjunto de dados. Depois, escreva um parágrafo relacionando essas medidas.

10 Reúna-se com um colega e, juntos, escolham um dos seguintes temas:

- Alimentação saudável
- Transporte urbano
- Atividade física

A partir do tema escolhido, planejem uma pesquisa amostral. A população deve ser formada por estudantes da sua escola. Pensem em uma amostra que represente a população em pelo menos 4 variáveis (duas qualitativas e duas quantitativas). Elaborem questões adequadas para coletar esses dados. Entrevistem a amostra definida por vocês. Organizem os dados e calculem a média, a mediana, a moda e a amplitude das variáveis quantitativas.

10. Respostas pessoais.

9. salário médio: R$ 1 108,00; moda: R$ 800,00; amplitude: R$ 4 420,00

- No **item b** da **atividade 8**, espera-se que os estudantes percebam que, nesse caso, a mediana indica que pelo menos metade das crianças usa roupa de tamanho menor ou igual a 12; a moda indica que o tamanho de roupa mais usado pelas crianças é o 10; a amplitude indica que há variação de 8 tamanhos entre o menor e o maior tamanho de roupa.
- No cálculo do salário médio, proposto na **atividade 9**, sugerimos o uso da calculadora por envolver valores altos.

Comente com os estudantes que, por exemplo, na medicina, quando existem muitos relatos de doentes com sintomas similares, os cientistas buscam, por meio de estudos e pesquisas, medicamentos para encontrar a cura ou amenizar os sintomas.

É com base no tratamento estatístico desses dados que sabemos a eficácia de um procedimento ou a probabilidade de ocorrência de efeitos colaterais.

Na questão do boxe *Veja que interessante*, espera-se que os estudantes identifiquem alguns exemplos de problemas que podem prejudicar a interpretação do leitor e eventuais tomadas de decisão: incorreções nas escalas dos eixos, escalas inapropriadas, falta de legenda ou de informações complementares importantes (por exemplo, a data da coleta das informações), gráficos de setores cuja soma das porcentagens é maior que 100% etc.

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Veja que interessante

A Estatística na área de Saúde

Assim como em outras áreas (Educação, Economia etc.), estudos mostram que a Estatística tem papel relevante nos avanços na área da Saúde obtidos nos últimos séculos, podendo utilizar a análise de dados para testar hipóteses e assim verificar determinada evidência.

Pensando em um tratamento inovador, por exemplo, é possível fazer diversos testes em laboratório e verificar que, em determinadas condições, algumas reações químicas sempre ocorrem, mas, devido à diversidade entre os seres humanos, as reações a determinado tratamento podem ocorrer de forma diferente entre as pessoas. Nesse contexto, a Estatística pode não garantir que uma pessoa será curada de uma doença utilizando certo tratamento, mas é possível inferir que, se em um estudo de determinado grupo com 1 000 pacientes com a mesma patologia 990 obtiverem resultado favorável após esse tratamento, há grandes chances de ele ser eficaz.

ILUSTRAÇÕES: CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Em contrapartida, o uso inadequado da Estatística também pode ser responsável por erros de interpretação, mostrando resultados falsos ou suposições sem justificativas.

Atividade

Realize uma pesquisa sobre "Gráficos que induzem ao erro" e como os dados estatísticos podem ser manipulados para produzir notícias falsas. Leve para a sala de aula o conteúdo encontrado e converse com seus colegas e com seu professor. **Veja que interessante:** Resposta em *Orientações*.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Pesquisa estatística

Pesquisa censitária: todos os elementos da população são consultados.

Pesquisa amostral: uma parte da população é consultada. Uma pesquisa amostral pode ser sistemática, casual simples ou estratificada.

- **Amostra sistemática:** nos casos em que os elementos da população se apresentam ordenados, a cada determinada quantidade de elementos, um é retirado para análise.
- **Amostra casual simples:** Nesse tipo de seleção da amostra, os elementos da população são rotulados e, por meio de alguma espécie de sorteio, os integrantes da amostra são selecionados para participar da pesquisa.
- **Amostra estratificada:** Muitas vezes, a população estudada se divide em subpopulações, chamadas estratos. A amostra é obtida por meio da seleção de indivíduos de cada estrato.

1. Uma empresa multinacional possui 15 000 funcionários. O RH da empresa selecionou 4 500 funcionários para saber quantas pessoas querem aderir ao novo plano de saúde proposto por eles. Em seu caderno, responda:

a) qual é a população da pesquisa? **1. a)** os 15 000 funcionários

b) quantos funcionários compõem a amostra da pesquisa? **1. b)** 4 500 funcionários

c) que porcentagem do universo estatístico a amostra representa? **1. c)** 30%

2. Uma universidade realizou uma pesquisa para saber em quais cursos os estudantes entrevistados estavam matriculados. Para isso, entrevistou 120 estudantes, sendo 40 de humanas, 40 de exatas e 40 de biológicas. Que tipo de pesquisa amostral foi realizada? **2.** alternativa **c**.

a) sistemática
b) casual simples
c) estratificada
d) probabilística

3. Uma fábrica mantém seu controle de qualidade por meio de amostragem. A cada 100 peças, é selecionada uma para a inspeção do controle de qualidade. Que tipo de pesquisa amostral essa fábrica realiza? **3.** alternativa **a**.

a) sistemática
b) casual simples
c) estratificada
d) probabilística

Variáveis estatísticas

O tempo de duração de uma lâmpada e a porcentagem de lares brasileiros que possuem animais de estimação são características (ou atributos) chamadas, em Estatística, de **variáveis**.

O esquema a seguir sintetiza as variáveis e seus tipos.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

4. Em seu caderno, classifique as variáveis em qualitativas (ordinal ou nominal) ou quantitativas (contínuas ou discretas):

a) cor dos olhos; **4. a)** qualitativa nominal
b) salários dos professores de uma escola;
c) quantidade de semáforos em SP;
d) quantidade de palavras em um texto;
e) altura dos estudantes do 8º ano;
f) nome dos pacientes de um hospital;
g) gêneros masculino e feminino.

4. b) quantitativa contínua **4. c)** quantitativa discreta **4. d)** quantitativa discreta **4. e)** quantitativa contínua **4. f)** qualitativa nominal **4. g)** qualitativa nominal

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Pesquisa estatística

• A **atividade 1** aborda os conceitos de população e amostra. Se possível, debata com a turma como o RH da empresa pode selecionar uma amostra de 4 500 funcionários que seja representativa da população.

• Na **atividade 2**, espera-se que os estudantes reconheçam que a população está dividida em estratos: estudantes das áreas de humanas, exatas e biológicas. Como a amostra foi selecionada por meio de entrevistas com estudantes de cada área, então a pesquisa realizada é do tipo estratificada.

• Na **atividade 3**, espera-se que os estudantes reconheçam que um elemento da população (peça) é selecionado para inspeção a cada determinada quantidade de elementos (100 peças); logo, a pesquisa amostral realizada pela fábrica é do tipo sistemática. Após realizarem a atividade, proponha que apresentem outros exemplos de pesquisas amostrais sistemáticas.

Variáveis estatísticas

• A **atividade 4** lida com a classificação de variáveis estatísticas. Caso julgue conveniente, discuta cada item coletivamente com a turma.

Medidas de tendência central

• A **atividade 5** explora o conceito de média aritmética. Espera-se que os estudantes adicionem as quantidades de brigadeiros vendidos em cada dia da semana e, depois, dividam o resultado obtido por 5. Se considerar necessário, analise com a turma em quais dias da semana a quantidade de brigadeiros vendidos foi superior à média de brigadeiros vendidos na semana.

• Para calcular a média dos salários dos funcionários da confeitaria solicitada no **item a** da **atividade 6**, os estudantes devem adicionar os salários dos funcionários e dividir o resultado obtido por 4. Antes que realizem o **item b**, pergunte a eles se a média dos salários dos funcionários da confeitaria será maior ou menor após a contratação do cozinheiro especializado. Espera-se que concluam que a média será maior, pois o salário desse cozinheiro será superior ao salário de cada funcionário.

• Na **atividade 7**, os estudantes vão determinar moda, média e mediana de um mesmo conjunto de dados. Após concluírem a atividade, incentive-os a comparar os valores dessas três medidas de tendência central. Como os valores são próximos ou iguais a 2, espera-se que eles concluam que é possível afirmar que os funcionários dessa empresa têm, em geral, 2 filhos.

• A **atividade 8** envolve o cálculo da média aritmética simples. Após a resolução da atividade, podem ser propostos alguns questionamentos: "Qual estudante obteve a maior média? E a menor? Qual é a média das notas de Matemática dos quatro estudantes?". Caso considere conveniente, peça que elaborem questões com base nas notas e nas médias que calcularam.

• A **atividade 9** envolve a leitura e a interpretação de uma tabela simples, além da determinação da média, moda e mediana desse conjunto de dados. Para calcular a média, no **item b**, espera-se que os estudantes adicionem as quantidades de proteína da primeira coluna da tabela, multiplicadas pela sua respectiva frequência, e dividam o resultado obtido pela quantidade de atletas que participaram da pesquisa (70). É possível que alguns estudantes apenas adicionem as quantidades de proteína e dividam o resultado por 6. Essa ocorrência, é um indício de que não entenderam o enunciado da atividade ou estão com dificuldades de compreender o conceito de média aritmética ponderada. Converse com esses estudantes e esclareça as dúvidas.

Medidas de tendência central

São **medidas de tendência central** a média aritmética, a mediana e a moda.

A **média aritmética simples** dos números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, que podemos indicar por $\bar{x}$, é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

A **média aritmética ponderada** dos números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, em que x_1 tem peso p_1, x_2 tem peso p_2, x_3 tem peso p_3 etc., é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Mediana é o valor que ocupa a posição central de um conjunto de dados em ordem crescente ou decrescente.

- Se a distribuição tiver um número ímpar de dados, haverá um valor que ocupa a posição central, e este será a mediana.
- Se a distribuição tiver um número par de dados, haverá dois valores que ocupam as posições centrais. Assim, a mediana será a média aritmética desses dois valores centrais.

Moda é o valor ou os valores que apresentam a maior frequência em um conjunto de dados, ou seja, que ocorrem mais vezes.

5. Em uma semana de funcionamento, uma doceria registrou o número de brigadeiros vendidos a cada dia da semana.

Seg	Ter	Qua	Qui	Sex
60	58	55	62	68

Determine a média aritmética do número de brigadeiros vendidos nesses dias. **5.** 60,6

6. Uma confeitaria tem 4 funcionários cujos salários são:

R$ 2 300,00 ; R$ 1 570,00 ; R$ 1 370,00 ; R$ 1 440,00

a) Calcule a média de salários dos funcionários dessa confeitaria. **6. a)** R$ 1 670,00

b) Será necessário contratar um cozinheiro especializado em doces, visando o crescimento da confeitaria. Qual será a nova média dos salários, sabendo que esta nova mão de obra custará R$ 3 200,00? **6. b)** R$ 1 976,00

7. Na tabela abaixo está o número de filhos dos 50 funcionários de uma empresa.

Número de filhos dos funcionários de uma empresa

Número de filhos	Frequência absoluta
0	10
1	5
2	25
3	10

Dados obtidos pelo RH da empresa em janeiro de 2024.

Com base nos dados da tabela, determine:

a) a moda; **7. a)** 2

b) a quantidade média de filhos; **7. b)** 1,7

c) a mediana. **7. c)** 2

8. Determine a média das notas de Matemática de cada um dos estudantes a seguir.

Renata	6,5	7,8	6,0	6,8
Cátia	8,0	8,5	6,5	7,5
Marcos	5,0	5,5	4,5	6,0
Mateus	4,5	7,5	8,5	9,0

8. Renata: 6,78; Cátia: 7,63; Marcos: 5,25; Mateus: 7,38

9. Na tabela abaixo está descrita a quantidade de proteína, em gramas, que alguns atletas de uma academia consomem por mês.

Quantidade de proteína, em gramas, consumida mensalmente pelos atletas

Quantidade de proteína	Frequência
2 510 g	8
2 620 g	11
2 700 g	10
2 860 g	12
2 950 g	18
3 200 g	11

Dados obtidos pelos atletas da academia em 2023.

Com base na tabela, determine:

a) a quantidade de atletas que participaram da pesquisa; **9. a)** 70

b) a média de proteína consumida mensalmente; **9. b)** 2 836 g

c) a moda da quantidade de proteína;

d) a mediana da quantidade de proteína.

9. c) 2 950 g **9. d)** 2 860 g

Capítulo 12

Gráficos estatísticos

Trocando ideias

O acesso à informação de maneira rápida e organizada é de grande importância na sociedade atual. Para tanto, as diferentes mídias habitualmente se utilizam de informações visuais, entre elas os gráficos, para apresentar dados que abordam temas de interesse da população, como questões econômicas, políticas, esportivas, dentre outras.

Manchete e gráficos publicados no jornal **Folha de S.Paulo**, em 9 de fevereiro de 2022.

- Em que situações é mais adequado utilizar gráficos de segmentos? E gráficos de barras?
- Reúna-se com um colega, observem os gráficos e tirem algumas conclusões. Depois, compartilhe-as com o restante da turma.

Neste capítulo, vamos verificar a adequação de alguns gráficos e classificar frequências contínuas para que resumam da melhor maneira possível os dados de uma pesquisa, de modo que ajudem na tomada de decisões.

Trocando ideias: primeiro item: os gráficos de segmentos são adequados para comparar uma mesma informação no decorrer do tempo e os gráficos de barras são adequados para comparar dados entre si; segundo item: comentários em *Orientações*.

223

Os gráficos estatísticos aparecem com frequência em diferentes meios de comunicação. É importante proporcionar aos estudantes a experiência de ler e interpretar diferentes tipos de gráficos publicados pela mídia para que desenvolvam um olhar crítico sobre as informações apresentadas e possam questioná-las.

As discussões levantadas pelas questões possibilitam aos estudantes argumentarem com base em dados e informações confiáveis. Além disso, eles precisam mobilizar as linguagens verbal e gráfica. Portanto, a proposta deste *Trocando ideias* favorece o desenvolvimento das competências gerais **7** e **9** e das competências específicas **4**, **6** e **8**.

CAPÍTULO 12 – GRÁFICOS ESTATÍSTICOS

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 4, 6 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Levantar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre as vantagens e desvantagens de se utilizar um ou outro tipo de gráfico estatístico.
- Ler e interpretar gráficos publicados pela mídia.

Tema contemporâneo transversal:

Depois de analisarem os quatro gráficos referentes à notícia, no primeiro item, verifique se os estudantes percebem que um tipo de gráfico pode ser mais adequado que outro, dependendo da situação, do que se pretende analisar e das informações. Os gráficos de segmentos são adequados para comparar uma mesma informação no decorrer do tempo, enquanto os gráficos de barra favorecem a comparação entre quantidades. Se achar conveniente, explore o que eles sabem sobre outras representações gráficas, como o gráfico de setores ou os pictogramas.

Forme duplas para realizarem a atividade proposta no segundo item. Se achar conveniente, peça a cada dupla que registre na lousa suas conclusões. Espera-se que os estudantes identifiquem que, em todos os gráficos e em todas as categorias, em 2021, houve um aumento no número de crianças de 6 e 7 anos que não sabem ler e escrever em comparação com 2012 e 2016. Se possível, incentive-os a elaborar questões com base nos gráficos apresentados.

Apresentação de dados

BNCC:

Habilidade EF08MA24.

Objetivos:

• Organizar dados de uma variável contínua em classes.

• Construir tabelas de distribuição de frequência.

Tema contemporâneo transversal:

Justificativa

Organizar dados de uma variável contínua em classes é um passo importante para a construção de tabelas de distribuição de frequências e, consequentemente, facilita a interpretação desses dados. Além disso, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF08MA24**.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes a medida da altura de cada um e anote na lousa. Depois, forme grupos e peça que organizem esses dados em intervalos. Cada grupo terá autonomia para definir a quantidade e a amplitude dos intervalos. Depois, proponha que construam uma tabela de distribuição de frequência, conforme o modelo a seguir, e comparem com os demais grupos:

Distribuição de frequência das medidas das alturas dos estudantes da turma	
Medida da altura (em cm)	**Frequência**

Dados obtidos pelo grupo em ______.

Para as aulas iniciais

Pergunte aos estudantes o que concluíram na dinâmica inicial. Espera-se que eles percebam que, se escolhermos classes com amplitude pequena, a tabela terá muitas linhas, ou que mudaria pouco em comparação com uma tabela simples. Já se as classes tivessem amplitude grande, haveria muitos dados em cada classe, o que inviabilizaria a comparação. Reforce a necessidade de determinar uma quantidade de classes com uma amplitude que permita a fácil análise dos dados sem perda de informações. Construa com eles uma tabela de distribuição de frequência dos dados coletados na dinâmica inicial que atenda a esses quesitos.

1 Apresentação de dados

A Estatística fornece métodos para coleta, organização, apresentação, análise e interpretação de dados oriundos de estudos ou de experimentos realizados em qualquer área do conhecimento.

Após definido o objetivo da pesquisa e realizado o planejamento das ações, partimos para a coleta e a organização dos dados que serão utilizados em sua apresentação. Com a análise dos dados organizados, podemos obter conclusões e tomar decisões com base nelas.

Distribuição de frequência

Vamos analisar duas situações em que veremos como fazer a distribuição de frequência.

Situação 1

Observe a medida da altura, em centímetro, dos 32 estudantes de uma turma do 8º ano:

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

150	164	172	149	174	182	158	155
156	142	176	168	161	158	184	157
180	165	147	152	148	177	166	163
150	172	186	145	162	167	156	178

A estatura dos estudantes é uma variável quantitativa contínua. Os dados acima são os **dados brutos** da pesquisa, pois não estão organizados para nossa análise.

Para iniciar o processo de organização, podemos colocar os dados em ordem crescente ou decrescente. Nesse caso, vamos colocá-los em ordem crescente.

142	145	147	148	149	150	150	152
155	156	156	157	158	158	161	162
163	164	165	166	167	168	172	172
174	176	177	178	180	182	184	186

Observe que, quando ordenamos os dados, fica mais fácil identificar a menor medida de altura, que é 142 centímetros, e a maior medida de altura, que é 186 centímetros. Logo, a amplitude desse conjunto de dados é 44 centímetros. Além disso, podemos verificar qual é a frequência com que os valores aparecem; por exemplo, 157 centímetros aparece uma única vez, enquanto o 158 centímetros aparece duas vezes.

Podemos agrupar esses dados em intervalos preestabelecidos, que chamamos de **classes**. É conveniente que essas classes tenham mesma amplitude, ou seja, mesmo "tamanho". Nesse exemplo, vamos trabalhar com cinco classes com amplitude de 10 centímetros.

$140 \vdash 150$

$150 \vdash 160$

$160 \vdash 170$

$170 \vdash 180$

$180 \vdash 190$

Na notação $150 \vdash 160$, o valor da esquerda (150) está incluso na classe, e o valor da direita (160), não.

224

Distribuição de frequência

Ao organizar os dados brutos, esse conjunto de dados recebe o nome de **rol**.

A notação $150 \vdash 160$ é um intervalo fechado à esquerda e aberto à direita, ou seja, o dado x que pertence a essa classe é tal que $150 \leqslant x < 160$.

(EF08MA24) Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.

Escolhida a amplitude das classes, verificamos a frequência de cada uma, contando as ocorrências dos valores em cada intervalo. A essa frequência, damos o nome de **frequência absoluta**, mas, por simplicidade, a trataremos aqui como frequência.

Observe a tabela de distribuição de frequência da variável medida da altura nessa turma do 8º ano.

Distribuição de frequência das medidas das alturas dos 32 estudantes do 8º ano	
Medida da altura (em cm)	**Frequência (F)**
140 ⊢— 150	5
150 ⊢— 160	9
160 ⊢— 170	8
170 ⊢— 180	6
180 ⊢— 190	4

Dados obtidos pela turma do 8º ano em 2023.

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Nessa tabela, temos, por exemplo, na classe 140 ⊢— 150, uma frequência igual a 5, que corresponde às medidas: 142 cm, 145 cm, 147 cm, 148 cm e 149 cm. A contagem de frequência também é indicada nas demais classes.

Observações

1. A soma de todas as frequências ($5 + 9 + 8 + 6 + 4 = 32$) é chamada **frequência total (F_t)**.
2. Dividindo a frequência (F) de uma classe pela frequência total (F_t), obtemos um número chamado **frequência relativa (F_r)**
   Assim, na situação apresentada anteriormente, a frequência relativa da classe 160 ⊢— 170 é 25%, pois:

$$\frac{F}{F_t} = \frac{8}{32} = 0{,}25 \text{ ou } 25\%$$

Situação 2

Um dentista que atende crianças e adolescentes por meio de plano fixo mensal precisa saber qual é a maior faixa etária de seus pacientes, pois pretende dar a eles um desconto de 10% no próximo mês. Para isso, acessou a ficha cadastral de todos e utilizou uma planilha eletrônica para organizar as idades em ordem crescente. Em seguida, elaborou a seguinte tabela de distribuição de frequências.

Distribuição de frequência das idades dos 90 pacientes com plano fixo mensal	
0 ⊢— 5	5
5 ⊢— 10	13
10 ⊢— 15	54
15 ⊢— 20	18

Dados obtidos pelo dentista em 2024.

Repare que, nesse caso, foram indicadas quatro classes cuja amplitude é de 5 anos. Caso o dentista tivesse optado por classes cuja amplitude fosse de 10 anos, a análise dele seria menos detalhada.

Comente com os estudantes que, caso as classes não apresentem a mesma amplitude, a comparação entre as frequências de cada classe fica prejudicada, uma vez que uma frequência maior em uma classe pode ser fruto apenas da amplitude determinada, e não da característica pesquisada. Comente também que a opção do valor atribuído ao extremo de uma classe pode ser arbitrária, mas o importante é indicar claramente quais são os valores que estão sendo agrupados em cada uma das classes.

Caso julgue conveniente, discuta com os estudantes sobre a determinação da quantidade de classes em uma distribuição de frequência, com a finalidade de que realizem a análise do objetivo que se tem em vista do conjunto de dados a ser exibido.

225

Ao trabalhar com a noção de frequência relativa, aproveite para retomar aspectos relativos à porcentagem e à representação de frações na forma decimal.

- Resposta do **item a** da **atividade 1**:

Distribuição de frequência da medida da massa dos estudantes		
Classe	**Frequência**	**Frequência relativa**
50 ⊢— 60	6	$\frac{6}{20} = 0{,}30$ ou 30%
60 ⊢— 70	4	$\frac{4}{20} = 0{,}20$ ou 20%
70 ⊢— 80	5	$\frac{5}{20} = 0{,}25$ ou 25%
80 ⊢— 90	3	$\frac{3}{20} = 0{,}15$ ou 15%
90 ⊢— 100	2	$\frac{2}{20} = 0{,}10$ ou 10%
Frequência total	20	100%

Considerando a distribuição de frequência que ele fez, percebemos que 54 dos 90 pacientes estão na classe 10 ⊢— 15. Calculando a frequência relativa dessa classe, temos:

$$F_r = \frac{54}{90} = 0{,}6 \text{ ou } 60\%$$

Portanto, os pacientes da classe 10 ⊢— 15 vão receber o desconto de 10% no plano do próximo mês.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 A professora de Educação Física de uma escola fez o levantamento da medida de massa de 20 estudantes. Considere o quadro abaixo.

87	85,5	72	54	68,3
73,4	92,3	56	75	66
52	86	70,9	65	52,7
60,1	56,4	52	90	71

a) Copie a tabela a seguir no caderno, substituindo corretamente cada ▬ pelos valores correspondentes. 1. a) Resposta em *Orientações*.

Distribuição de frequência da medida da massa dos estudantes		
Classe	**Frequência**	**Frequência relativa**
50 ⊢— 60	6	$\frac{6}{20} = 0{,}30$ ou 30%
60 ⊢— 70	▬	▬
70 ⊢— 80	5	▬
80 ⊢— 90	▬	▬
90 ⊢— 100	2	▬
Frequência total	20	100%

Dados obtidos pela professora de Educação Física dos estudantes em 2024.

b) Qual é a soma das frequências relativas de todas as classes? 1. b) 100%

2 Para incentivar a leitura, a biblioteca pública de certo bairro fez o levantamento da quantidade de livros de literatura que todas as famílias daquela região têm em casa. Os dados foram organizados na seguinte tabela de distribuição de classes.

Distribuição de frequência da quantidade de livros por família	
Classe	**Frequência**
0 ⊢— 8	25
8 ⊢— 16	30
16 ⊢— 24	15
24 ⊢— 32	12
32 ⊢— 40	10
40 ⊢— 48	8

Dados obtidos pela biblioteca pública no 1º semestre de 2024.

Sabendo que a biblioteca pretende entregar livros à classe de famílias que possui a menor quantidade de livros em casa, responda às questões.

a) Qual é a amplitude de cada classe dessa tabela? 2. a) 8 livros.

b) Quantas famílias vivem nessa região? 2. b) 100 famílias.

c) Que porcentagem das famílias que vivem nessa região vai receber livros? 2. c) 25%.

d) Pense em outra ação de incentivo à leitura que a biblioteca poderia propor e explique sua sugestão. 2. d) Resposta pessoal.

FORMAÇÃO CIDADÃ

3 Em grupo, façam o levantamento da quantidade de livros que cada estudante da turma possui em casa. Depois, decidam quantas classes vocês vão organizar para construir a tabela de distribuição de frequência desses dados. Ao final, elaborem um parágrafo comentando o que é possível observar com essa pesquisa. Comparem o parágrafo do seu grupo com os demais. 3. Resposta pessoal.

226

2 Gráficos de segmentos, de barras e de setores

Em Estatística, o gráfico tem como principal função apresentar os dados de uma pesquisa. A representação gráfica deve ser simples, clara e conter informações verdadeiras.

Vamos relembrar alguns tipos de gráficos estudados em anos anteriores. Para isso, observe na tabela a seguir os dados da Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP) sobre a produção de petróleo, no Brasil, entre os anos de 2016 a 2021.

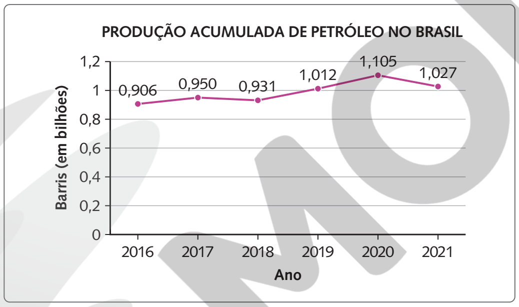
Produção acumulada de petróleo no Brasil de 2016 a 2021

Ano	Produção (em bilhões de barris)
2016	0,906
2017	0,950
2018	0,931
2019	1,012
2020	1,105
2021	1,027

Dados obtidos em: https://www.gov.br/anp/pt-br/centrais-de-conteudo/dados-estatisticos/reservas-nacionais-de-petroleo-e-gas-natural. Acesso em: 6 jul. 2022.

Vamos representar esses dados em três tipos de gráficos: gráfico de segmentos, gráfico de barras horizontais e gráfico de barras verticais.

a) Gráfico de segmentos (ou gráfico de linhas)



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: https://www.gov.br/anp/pt-br/centrais-de-conteudo/dados-estatisticos/reservas-nacionais-de-petroleo-e-gas-natural. Acesso em: 6 jul. 2022.

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

Gráficos de segmentos, de barras e de setores

BNCC:
Habilidade EF08MA23.

Objetivos:
- Ler, interpretar e construir gráficos (segmentos, barras e setores).
- Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

Justificativa

Gráficos de segmentos, barras e setores aparecem com muita frequência em nosso cotidiano e, por isso, é importante saber lê-los e interpretá-los. Em algumas ocasiões, os estudantes vão realizar pesquisas estatísticas e, por esse motivo, precisarão avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar os dados que coletaram. Essa avaliação também contribui para que a habilidade **EF08MA23** tenha o seu desenvolvimento favorecido.

Mapeando conhecimentos

Proponha aos estudantes que façam a **atividade 46** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Nessa atividade, eles são convidados a tecer comentários sobre um gráfico de barras, um gráfico de segmentos e um gráfico de setores. Observe se levam em consideração o título, a legenda e a fonte de cada um dos gráficos ao fazer a leitura.

Para as aulas iniciais

Solicite aos estudantes que pesquisem em jornais, revistas ou na internet gráficos de segmentos, barras e setores. Depois, reúna todo o material que trouxeram, forme uma roda de conversa com eles e discuta cada um dos gráficos, tanto do ponto de vista matemático como do ponto de vista do contexto no qual estão inseridos.

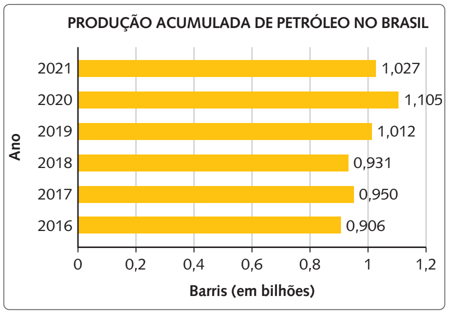
Antes de retomar e trabalhar o conteúdo de gráficos de setores, é útil retomar as ideias de medidas de abertura de ângulos e proporcionalidade. Para a construção e interpretação de um gráfico de setores, é importante que os estudantes tenham alguns referenciais, como 50% (metade do círculo) e 25% (metade da metade do círculo). Isso facilita a identificação de valores sem que seja necessário realizar cálculos exatos.

Questione os estudantes o motivo pelo qual o gráfico de setores não representa adequadamente a situação sobre a produção de petróleo apresentada neste tópico no gráfico de segmentos e nos gráficos de barras (horizontais e verticais). Caso considere interessante, mostre, construindo coletivamente o gráfico com o auxílio de *software* de planilha eletrônica, e verifique se os estudantes possuem o conhecimento (trabalhado em anos anteriores) de quais situações são mais bem representadas por cada tipo de gráfico.

- Gráfico de segmentos: quando a situação aborda a variação de um mesmo fato ao longo do tempo.
- Gráfico de barras (horizontais ou verticais): quando necessitamos fazer a comparação de informações.
- Gráfico de setores: quando a situação representa partes de um total.

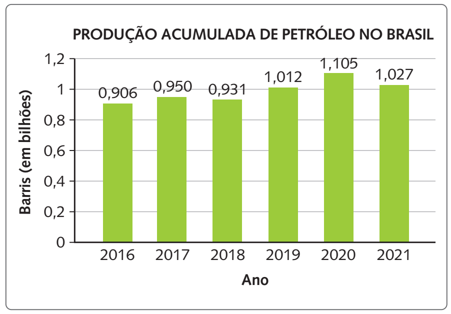
Portanto, como a situação aborda a variação da produção de petróleo no Brasil de 2016 a 2021, então os gráficos mais adequados para representá-la são o de segmentos e o de barras.

b) Gráfico de barras horizontais



Dados obtidos em: https://www.gov.br/anp/pt-br/centrais-de-conteudo/dados-estatisticos/reservas-nacionais-de-petroleo-e-gas-natural. Acesso em: 6 jul. 2022.

c) Gráfico de barras verticais



Dados obtidos em: https://www.gov.br/anp/pt-br/centrais-de-conteudo/dados-estatisticos/reservas-nacionais-de-petroleo-e-gas-natural. Acesso em: 6 jul. 2022.

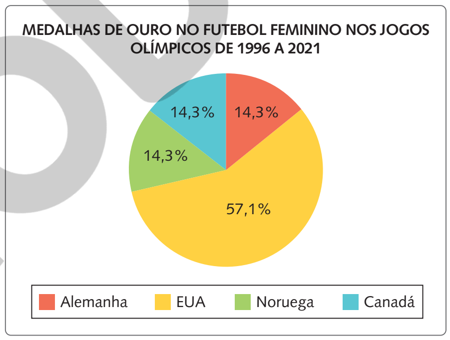
Acompanhe essa outra situação.

O futebol feminino tem uma história recente nas Olimpíadas. Das seis edições ocorridas entre 1996 e 2021, os Estados Unidos foi o país que obteve o maior número de medalhas de ouro. Observe os dados a seguir sobre todos os países medalhistas de ouro desse período.

Medalha de ouro no futebol feminino nos Jogos Olímpicos de 1996 a 2021				
Países	Alemanha	EUA	Noruega	Canadá
Quantidade de medalhas	1	4	1	1

Dados obtidos em: https://olympics.com/pt/noticias/retrospetiva-do-futebol-olimpico-da-pioneira-gra-bretanha-ao-brasil-bicampeao. Acesso em: 6 jul. 2022.

Com a quantidade de medalhas, calculamos as porcentagens e elaboramos o seguinte **gráfico de setores**.



Dados obtidos em: https://olympics.com/pt/noticias/retrospetiva-do-futebol-olimpico-da-pioneira-gra-bretanha-ao-brasil-bicampeao. Acesso em: 6 jul. 2022.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Para que um gráfico apresente as informações de forma clara, simples e precisa, ele deve ter:

- clareza: o gráfico deve ser capaz de disponibilizar informações de forma simples, mesmo para as situações mais complexas, possibilitando a compreensão;
- coerência: todos os elementos do gráfico, assim como as cores e a disposição, devem ter a função de informar algo;
- consistência: as informações devem ser apresentadas de forma exata, sem manipulação dos dados e sem forçar uma interpretação tendenciosa.

Cada tipo de gráfico pode evidenciar um tipo de informação; assim, antes de escolher o gráfico que vamos utilizar, precisamos definir o que queremos transmitir. Por exemplo, se o objetivo é comparar as partes e cada parte com o todo, podemos usar um gráfico de setores.

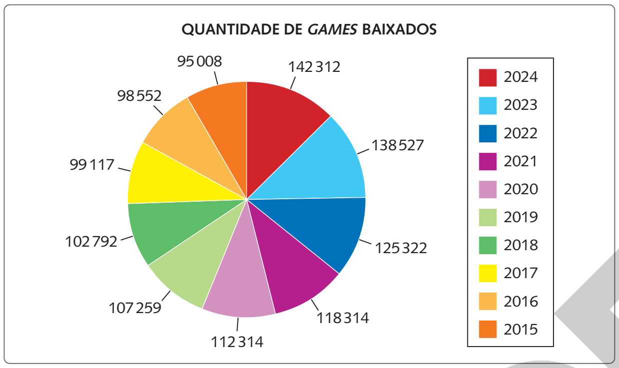
Se desejamos comparar dados entre si, podemos utilizar um gráfico de barras.

Para observar a variação de um dado ao longo do tempo, o gráfico de segmentos costuma ser o mais indicado.

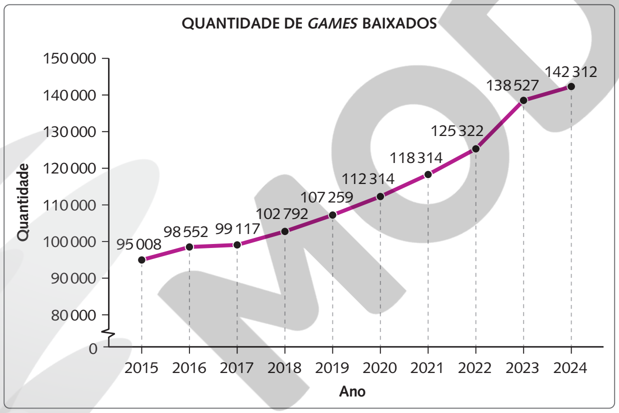
Observe os dois gráficos que apresentam dados referentes à quantidade de *games* baixados por Izabel entre 2015 e 2024.

Repare que o gráfico de setores, nesse caso, não traz uma informação visual clara, pois os setores têm medidas parecidas. Nesse caso, o mais adequado é o gráfico de segmentos, pois permite observar a variação da quantidade de *games* baixados por Izabel ao longo do tempo.

Pelo mesmo motivo, não utilizamos o gráfico de setores para representar os dados da produção do petróleo no Brasil entre 2016 e 2021, pois estes foram bem representados pelos gráficos de barras horizontais e verticais e pelo gráfico de segmentos.



Dados obtidos por Izabel entre 2015 e 2024.



Dados obtidos por Izabel entre 2015 e 2024.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão de atividade extra

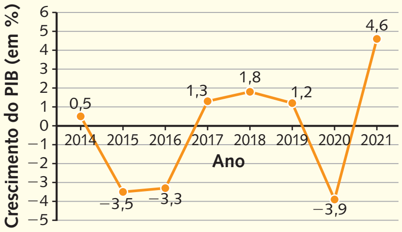
Proponha aos estudantes que busquem em jornais e revistas (impressos ou digitais) notícias que façam uso de cada um dos tipos de gráfico estudados até o momento. Depois, solicite que interpretem os dados apresentados e que reflitam se o tipo de gráfico escolhido foi o mais adequado à situação. Essa análise é importante, pois, quando tiverem de optar pela organização de dados de uma pesquisa, os estudantes deverão saber quais características são relevantes para escolher um tipo de gráfico.

229

• Resposta do **item d** da **atividade 5**:

CRESCIMENTO ANUAL DO PRODUTO INTERNO BRUTO (PIB)

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos em: BRASIL. Ministério da Economia. Secretaria de Política Econômica. **Resultado do PIB de 2021 e perspectiva**, 4 mar. 2022.

Sugestão de atividade para combater o *bullying*

Organize os estudantes em grupos e peça que realizem uma pesquisa estatística sobre o *bullying* na escola. As questões, o tipo de pesquisa e a maneira como os dados serão coletados devem ficar a cargo dos grupos. Depois, peça que avaliem o tipo de gráfico mais adequado para representar os dados coletados. Por fim, organize um seminário para que os grupos apresentem os resultados da pesquisa. É importante também aproveitar a oportunidade para refletir sobre os dados levantados por eles e pensar em ações de combate ao *bullying*.

4. a) Gráfico de barras verticais. Esse gráfico se refere à participação na conta mensal de energia elétrica de equipamentos como lavadora de roupas 500 W, televisor 29", lâmpadas incandescentes 100 W etc.

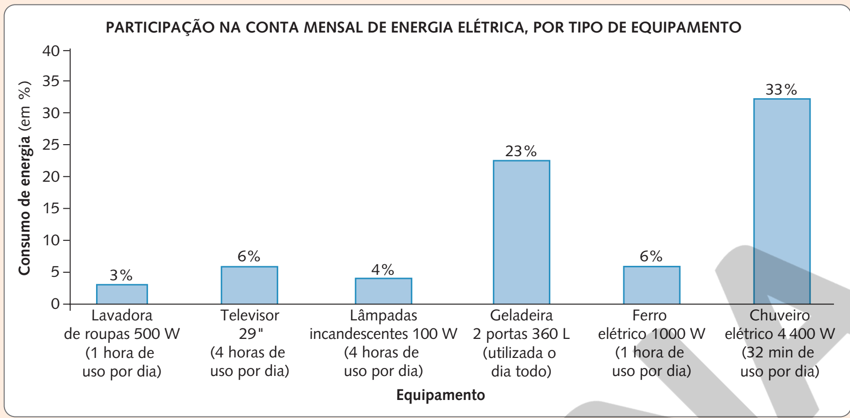
Atividades

4. b) chuveiro elétrico 4 400 W
4. c) Não, porque esses dados não apresentam variação ao longo do tempo.

Faça as atividades no caderno.

4 Observe o gráfico e, depois, responda às questões.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

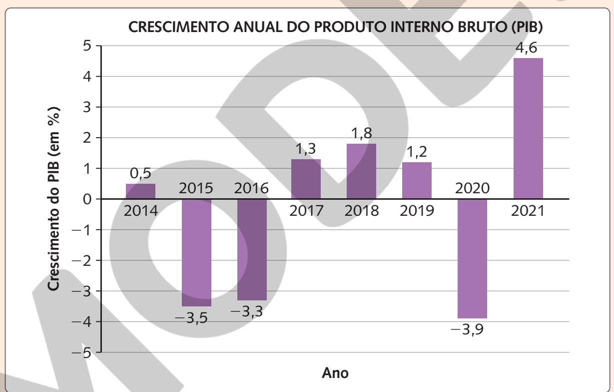


Dados obtidos em: Agência Nacional de Energia Elétrica, Companhia Paulista de Força e Energia. **Programa de Eficiência Energética. Sua energia transforma o mundo**. São Paulo: CPFL Energia, 2021.

a) Que tipo de gráfico é esse? A que assunto se refere?
b) Que equipamento tem maior consumo de energia elétrica?
c) Esses dados poderiam ser representados em um gráfico de segmentos? Explique sua resposta.

5 O gráfico abaixo apresenta o crescimento anual do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil de 2014 a 2021. Observe atentamente esse gráfico e, depois, responda às questões.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos em: BRASIL. Ministério da Economia. Secretaria de Política Econômica. **Resultado do PIB de 2021 e perspectiva**, 4 mar. 2022.

a) Que tipo de gráfico foi utilizado para apresentar o crescimento anual do PIB?
b) Em que ano ocorreu a maior taxa de crescimento anual do PIB? **5. b)** 2021
c) Em que ano ocorreu a menor taxa de crescimento anual do PIB? **5. c)** 2020
d) Construa no caderno um gráfico de segmentos com base nos dados desse gráfico.

5. a) gráfico de barras verticais
5. d) Resposta em *Orientações*.

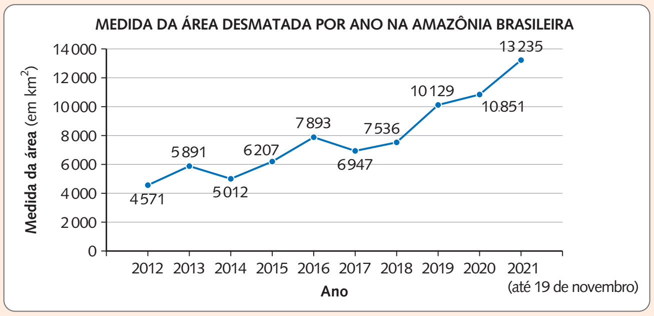
6 Em uma escola há 400 estudantes matriculados no ensino do 1º ao 6º ano. A tabela a seguir mostra a distribuição desses estudantes em cada ano escolar.

Distribuição de frequência dos estudantes de acordo com o ano escolar						
Ano	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Frequência	64	68	70	75	65	58

Dados obtidos pela escola no início de 2024.

Explique qual tipo de gráfico você considera mais adequado para representar essa distribuição de frequência e justifique sua resposta. **6.** Resposta pessoal.

7 Observe o gráfico abaixo.



Dados obtidos em: http://www.obt.inpe.br/OBT/assuntos/programas/amazonia/prodes. Acesso em: 6 jul. 2022.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, responda às questões.

a) Em que ano ocorreu o menor desmatamento na Amazônia brasileira, nesse período? **7. a)** 2012

b) Em que ano ocorreu o maior desmatamento na Amazônia brasileira? A quantos quilômetros quadrados, aproximadamente, corresponde a medida da área desmatada nesse ano?

c) De 2016 a 2017, qual foi, em quilômetro quadrado, a redução da medida da área desmatada na Amazônia brasileira? **7. c)** 946 km² **7. b)** 2021; 13 235 km²

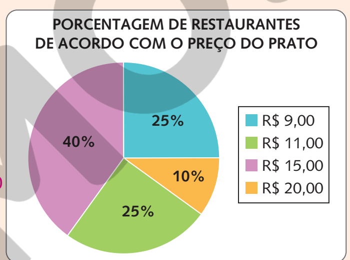
d) Se os valores referentes aos pontos dos segmentos não fossem apresentados nesse gráfico, você conseguiria chegar à alguma conclusão a respeito do desmatamento na Amazônia brasileira nos últimos anos? **7. d)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, ainda assim, é possível notar que o desmatamento vem crescendo.

8 Cleide fez um levantamento do preço de determinado prato de comida em 100 restaurantes de sua cidade. O gráfico representa a porcentagem de restaurantes com cada valor informado.

a) Que valor ela gastaria se comprasse um prato em cada um desses restaurantes? **8. a)** R$ 1 300,00

b) Qual é a média dos valores desse prato? **8. b)** R$ 13,00

c) Que outro tipo de gráfico você utilizaria para representar esses dados? **8. c)** Resposta pessoal.

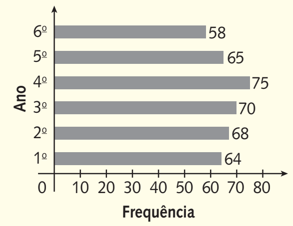


Dados obtidos por Cleide no 3º trimestre de 2023.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- O gráfico da **atividade 6**:

DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA DOS ESTUDANTES DE ACORDO COM O ANO ESCOLAR



Dados obtidos pela escola no início de 2024.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- A **atividade 7** explora a interpretação de um gráfico de segmentos. Já é esperado que os estudantes percebam que esse tipo de gráfico é frequentemente usado para apresentar dados que variam ao longo do tempo, ou para identificar tendências de aumento ou decréscimo dos dados apresentados. É importante que eles sejam estimulados a identificar os intervalos de crescimento, de decréscimo ou de constância da variável representada ao trabalhar com esse tipo de gráfico.
- As **atividades 8** e **9** trazem a leitura e a interpretação de gráfico de setores. Retome, se achar conveniente, o motivo pelo qual o gráfico de setores foi utilizado para representar as situações. Além disso, no **item b** da **atividade 8** é retomado o conceito de média aritmética.

Cartograma e pictograma

BNCC:

Competência específica 3 (a descrição está na página VII).

Objetivo:

Ler e interpretar cartogramas e pictogramas.

Temas contemporâneos transversais:

FORMAÇÃO CIDADÃ · EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Justificativa

A leitura e interpretação de cartogramas possibilita aos estudantes mobilizar conhecimentos de Geografia e Matemática, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **3**.

Os pictogramas aparecem com frequência em diversos meios de comunicação e a leitura e interpretação desse tipo de gráfico amplia o repertório dos estudantes.

Mapeando conhecimentos

Organize a sala em grupos e distribua alguns cartogramas e pictogramas para que façam a leitura e, depois, um resumo das principais conclusões que podem tirar com base em cada um. Os cartogramas podem ser obtidos em livros de Geografia ou atlas (o professor de Geografia poderá auxiliá-lo na seleção dos cartogramas para essa tarefa) e os pictogramas podem ser retirados preferencialmente de mídias impressas como jornais e revistas.

Para as aulas iniciais

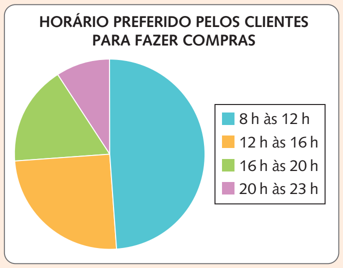
Organize novamente a sala em grupos (os mesmos da dinâmica inicial) e peça que compartilhem os cartogramas, pictogramas e conclusões com os demais grupos.

Cartograma

Ao introduzir as ideias de cartograma e pictograma, solicite aos estudantes que busquem exemplos desses tipos de representação. A interpretação dos pictogramas e dos cartogramas também deve ser suficientemente explorada em sala de aula, e os exemplos trazidos pelos estudantes podem contribuir para a realização de atividades relacionadas ao assunto.

9 Uma rede de supermercados perguntou para 2 000 pessoas o horário que preferem fazer compras. O resultado dessa pesquisa está apresentado neste gráfico de setores.

Apesar de o gráfico não indicar as porcentagens dos setores, você consegue identificar em qual horário a maioria dos entrevistados prefere ir ao supermercado? Explique sua resposta. **9.** Sim, pois o maior setor corresponde a praticamente metade do círculo, ou seja, aproximadamente metade dos entrevistados prefere ir ao supermercado das 8 h às 12 h.



Dados obtidos pela rede de supermercados no 1º bimestre de 2023.

10 Pesquise em jornais ou revistas um gráfico de setores e, em seguida, elabore duas questões com base nos dados desse gráfico para que um colega responda. **10.** Resposta pessoal.

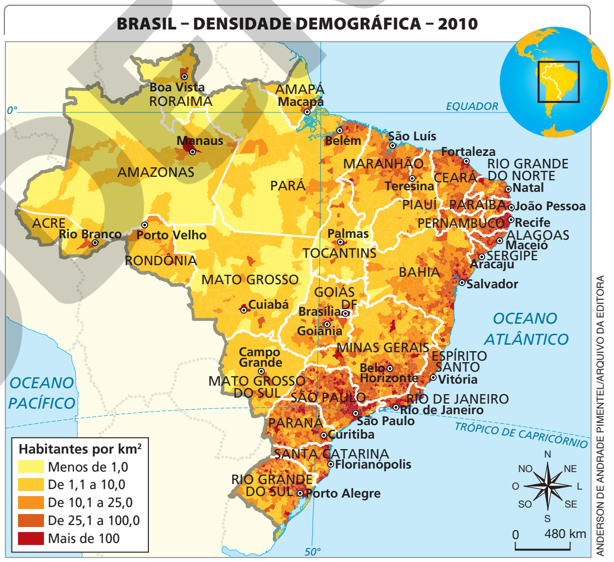
11 Junte-se a um colega e descrevam uma situação onde seria mais viável usar o gráfico de segmentos do que o gráfico de setores. Justifique sua resposta. **11.** Resposta pessoal.

3 Cartograma e pictograma

Cartograma

Cartograma é um mapa esquemático em que, por meio de pontos, figuras e linhas previamente convencionados, representam-se a região de ocorrência, a importância, a movimentação e a evolução de um fenômeno.

Esse modelo de gráfico é usado quando o objetivo é representar os dados estatísticos diretamente relacionados com áreas geográficas ou políticas. Observe o seguinte exemplo.



Elaborado com base em: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 112.

Sugestão de trabalho interdisciplinar

Caso julgue oportuno, em conjunto com o professor de Geografia, realize a interpretação detalhada do cartograma apresentado no material. Para direcionar os estudantes, podem ser feitos questionamentos: "Qual é o estado com maior densidade demográfica em cada região? E no país?".

Se possível, podem ser feitas comparações entre a densidade demográfica de alguns estados com base no cartograma e, depois, os estudantes podem pesquisar a densidade demográfica de cada estado no *site* do IBGE para conferir as comparações feitas.

Pictograma

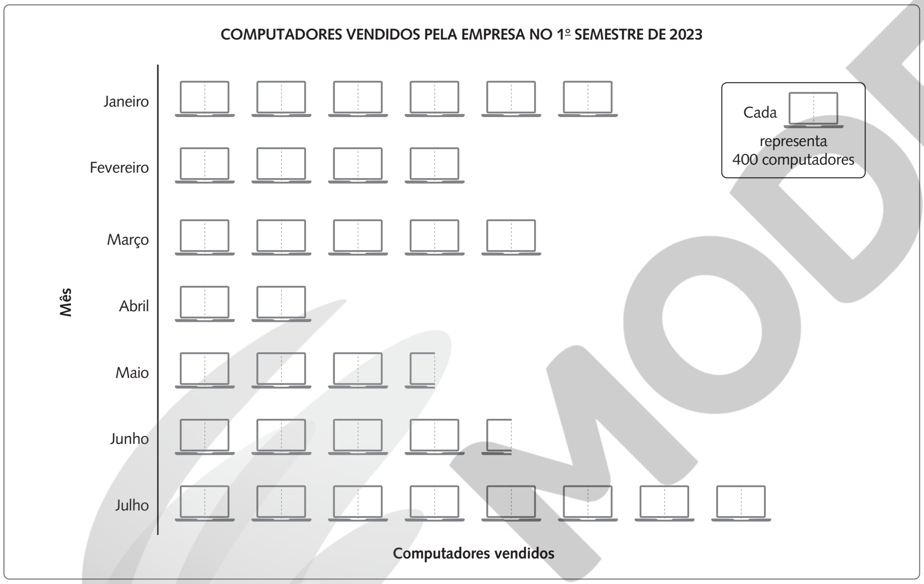
Pictograma é um tipo de gráfico estatístico cujos dados são representados por meio de figuras chamadas de ícones. Considere, por exemplo, as seguintes quantidades de computadores vendidos em certa empresa durante o 1º semestre de 2023.

Quantidade de computadores vendidos pela empresa no 1º semestre de 2023

Mês	Computadores vendidos
Janeiro	2400
Fevereiro	1600
Março	2000
Abril	800
Maio	1400
Junho	1800
Julho	3200

Dados obtidos pela empresa no 1º semestre de 2023.

Esses dados foram representados no pictograma abaixo. Repare que meio ícone representa metade da quantidade equivalente a um ícone completo.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pela empresa no 1º semestre de 2023.

Pictograma

Neste tópico, os estudantes vão ler e interpretar pictogramas em que aparecem partes de ícones. Esse tipo de gráfico aparece com frequência em jornais e revistas por ter forte apelo visual; por isso, é importante que os estudantes saibam lidar com a informação representada dessa forma.

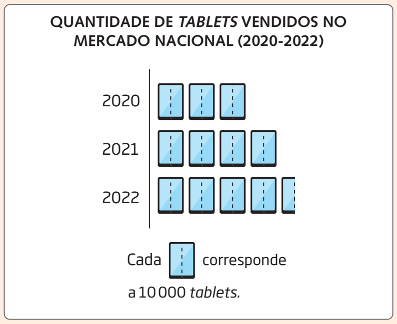
Estas atividades visam verificar se os estudantes compreenderam e assimilaram as características de pictogramas e cartogramas.

• Aproveite o contexto da **atividade 15** para discutir questões ambientais relacionadas à água, à escassez, ao consumo, ao desperdício etc. Os pictogramas vão variar de acordo com as respostas dos estudantes. Verifique se eles não esqueceram nenhum elemento importante para a leitura do gráfico, como a legenda, e se realizaram a representação gráfica dos ícones corretamente e de acordo com os dados levantados.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

12 Observe o pictograma a seguir e determine a quantidade de *tablets* vendidos no mercado nacional, por uma distribuidora, em 2020, 2021 e 2022.

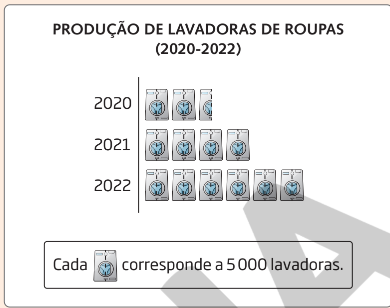


Dados obtidos pela distribuidora entre 2020 e 2022.

12. 2020: 30 000 *tablets*
2021: 40 000 *tablets*
2022: 45 000 *tablets*

13 Pesquise um cartograma em atlas, enciclopédias ou *sites* e apresente-o à turma, explicando quais são os dados representados. 13. Resposta pessoal.

14 O pictograma a seguir corresponde à produção de lavadoras de roupas de uma fábrica, em 2020, 2021 e 2022



Dados obtidos pela fábrica entre 2020 e 2022.

Determine:

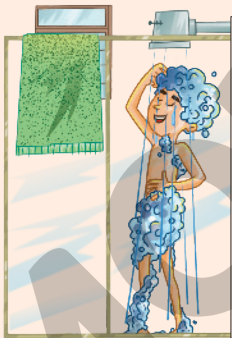
a) a quantidade de lavadoras produzidas em 2020 e em 2021; 14. a) 12 500; 20 000

b) o percentual de crescimento da produção de 2022 em relação ao ano anterior. 14. b) 50%

15 Segundo a ONU (Organização das Nações Unidas), 110 L de água por dia é suficiente para atender às necessidades básicas de uma pessoa. Analise o consumo de água em algumas atividades do dia a dia.

FORMAÇÃO CIDADÃ

EDUCAÇÃO FINANCEIRA



Banho: Um banho de chuveiro elétrico com duração de dois minutos e com a válvula aberta parcialmente consome, em média, 12 L de água.

Beber água: Médicos recomendam o consumo diário de cerca de 2 L de água, já que o corpo perde aproximadamente essa quantidade por meio da respiração, da urina e do suor.

Descarga: Dar duas descargas por dia em um sanitário com caixa acoplada consome 12 L de água.

Escovar os dentes: Uma torneira aberta por cinco segundos em três ocasiões ao dia gasta cerca de 3 L de água.

a) Construa no caderno um pictograma com a distribuição da quantidade de água que você gasta com as atividades citadas acima. Considere o tempo que você leva para realizar cada atividade a fim de determinar a quantidade de água usada. 15. a) Resposta pessoal.

b) Apresente seu pictograma ao professor e aos colegas e converse sobre que atitudes devemos tomar para economizar água e sobre a importância dessa economia. 15. b) Resposta pessoal.

Lendo e aprendendo

SAÚDE

FORMAÇÃO CIDADÃ


ALOISIO MAURICIO/FOTOARENA

Criança vendendo balas, em um farol da Avenida Brasil na região do Ibirapuera em São Paulo (SP). Foto de 2018.

A triste realidade do trabalho infantil

Número cresce e, por causa da pandemia, tende a piorar ainda mais no próximo ano

Criança tem o direito de brincar e ir para a escola. A afirmação não poderia estar mais correta, mas, infelizmente, não é a realidade para cerca de 160 milhões de jovens em todo o mundo.

Segundo o UNICEF, esse é o número de crianças e adolescentes em situação de trabalho infantil. O índice voltou a crescer após uma tendência de queda registrada entre 2000 e 2016. E o que já está ruim pode ficar ainda pior: a entidade alerta que outros 8,9 milhões correm o risco de ingressar nessa condição até 2022, como resultado da crise causada pela pandemia da Covid-19.

A pobreza extrema é a principal razão que leva as crianças ao trabalho. [...]

Nas grandes metrópoles, por exemplo, é comum vermos crianças nos faróis, vendendo balas ou até fazendo malabarismo. Apesar de as cenas cortarem o coração e termos vontade de ajudar, especialistas dizem que dar dinheiro não é o correto a fazer, pois isso incentiva os jovens a permanecerem nas ruas. E, assim, as chances de não estarem na escola ou largarem os estudos muito cedo aumentam. Uma alternativa é ajudar instituições que oferecem apoio psicológico e social aos seus familiares.

[...]

Além do problema básico de não estarem na escola, o trabalho infantil traz outras diversas consequências para as crianças. Atuar na agricultura, com o plantio de cana de açúcar, por exemplo, que é muito comum no Brasil, pode resultar em doenças musculares e ósseas; na pesca, em exposição excessiva ao sol e em problemas com o sono; e, na mineração, em doenças respiratórias. Em todos os casos, há grandes chances de os jovens terem problemas psicológicos e serem privados de sua infância, seu potencial e sua dignidade. Ou seja, trabalhar é prejudicial ao seu desenvolvimento físico e mental em diversos aspectos.

[...]

(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.

Lendo e aprendendo

BNCC:

- Competências gerais 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competência específica 3 (a descrição está na página VII).
- Habilidade EF08MA04.

Objetivos:

- Desenvolver a competência leitora.
- Ler e interpretar dados presentes em um infográfico.
- Calcular porcentagens.
- Transpor dados de um gráfico de setores para uma tabela simples.
- Refletir sobre o trabalho infantil no Brasil.

Temas contemporâneos transversais:

FORMAÇÃO CIDADÃ SAÚDE

Peça aos estudantes que leiam o texto da seção individualmente. Depois, organize uma roda de conversa com a turma para falar sobre a situação do trabalho infantil no Brasil e no mundo. Solicite a eles que primeiro opinem sobre os dados trazidos no texto e que, se possível, contem exemplos que já vivenciaram em relação ao trabalho infantil.

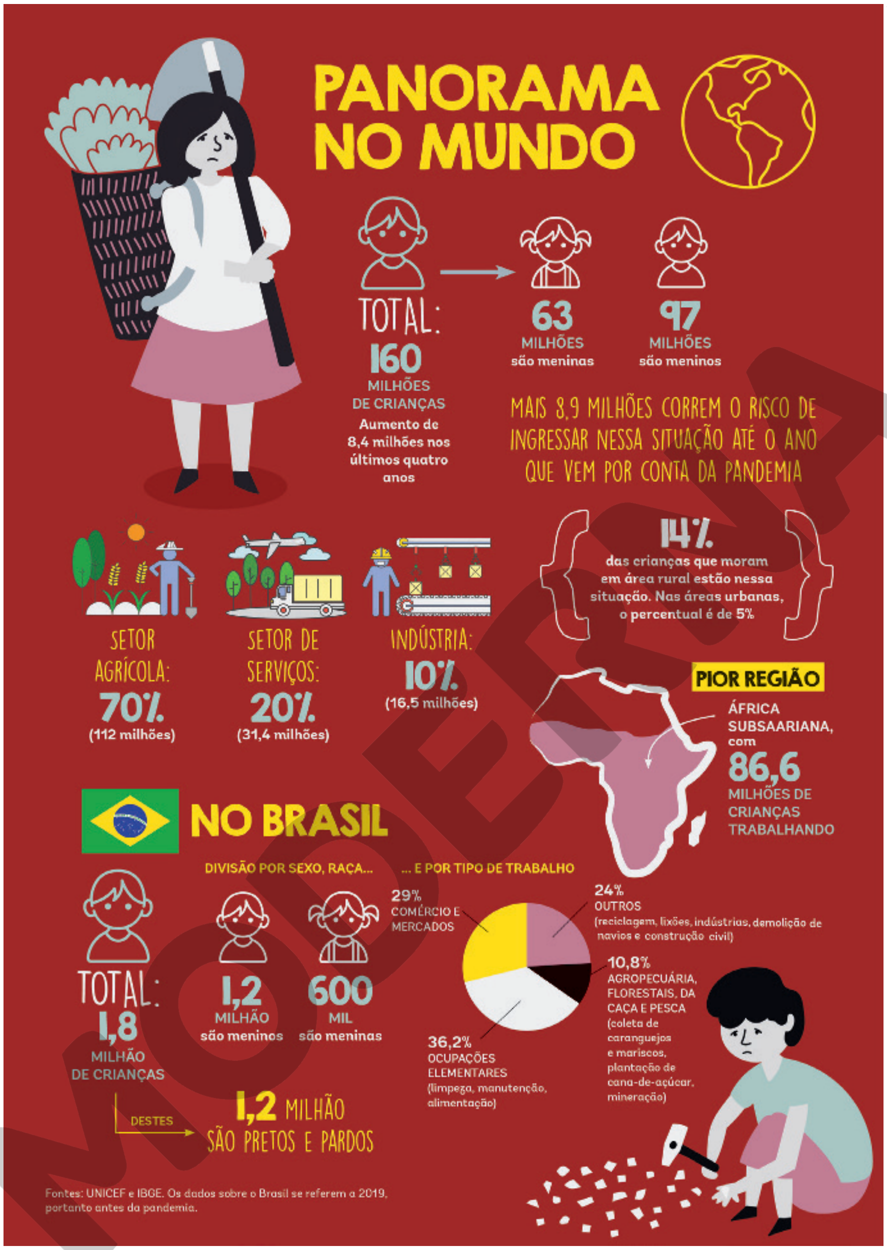
Se achar necessário, organize na lousa duas listas: uma com as causas e outra com as consequências do trabalho infantil.

Em geral, as causas para uma criança ingressar no mercado de trabalho envolvem a vulnerabilidade socioeconômica familiar e a necessidade de auxiliar no complemento da renda, assim como a baixa perspectiva de vida em relação ao futuro.

Crianças e adolescentes que se encontram em uma situação de trabalho infantil podem apresentar graves **problemas de saúde**. Esses podem ir da **fadiga excessiva** ao desenvolvimento de problemas respiratórios, ansiedade, irritabilidade e distúrbios de sono. Além disso, o **contexto social do trabalho** ao qual as crianças são submetidas pode impactá-las **psicologicamente** de maneira muito forte, prejudicando a maneira como elas se relacionam e aprendem. Outro ponto importante diz respeito ao aspecto educacional: crianças que trabalham apresentam grandes **dificuldades no aprendizado escolar**, levando ao **abandono**.

Explore os dados apresentados no infográfico com a turma. Chame a atenção para a fonte e para o ano em que esses dados foram coletados. Caso queira explorar outros dados relacionados ao trabalho infantil, além desses que foram apresentados, você pode acessar o *site* https://livredetrabalhoinfantil.org.br/trabalho-infantil/estatisticas/ (acesso em: 5 ago. 2022).

A análise desses dados favorece o desenvolvimento da competência geral **7**, pois os estudantes são levados a argumentar e a se posicionar eticamente a favor dos direitos humanos. A competência geral **9** também tem o seu desenvolvimento favorecido, uma vez que, a empatia e o diálogo são exercitados pelos estudantes.



CINTHIA BEHR/REVISTA QUALÉ

PEIXOTO, F.; CABRAL, M. C. A triste realidade do trabalho infantil. **Qualé**, São Paulo, ed. 36. p. 6-9, 4 a 18 out. 2021.

Atividades

1. Responda às questões no caderno.

a) Em que mês e ano a matéria foi publicada? **1. a)** em outubro de 2021

b) Quantas crianças e adolescentes no mundo, aproximadamente, foram submetidos ao trabalho infantil em 2021? **1. b)** 160 000 000.

c) Qual é a principal razão que leva as crianças ao trabalho? **1. c)** a pobreza extrema

d) De acordo com os especialistas, o que é recomendável fazer para ajudar as crianças em situação de trabalho infantil? **1. d)** Ajudar instituições que oferecem apoio psicológico e social aos seus familiares.

e) Qual era a região do mundo que concentrava mais crianças em situação de trabalho infantil em 2021? **1. e)** África Subsaariana

2. As afirmações dos itens **a**, **b** e **c** são verdadeiras.

2. Copie as afirmações verdadeiras no caderno.

a) Em 2021, aproximadamente 61% das crianças em situação de trabalho infantil no mundo eram meninos.

b) Em 2021, de cada 5 crianças em situação de trabalho infantil no mundo, 1 trabalhava no setor de serviços.

c) Em 2019, $\frac{2}{3}$ das crianças em situação de trabalho infantil no Brasil eram pretas ou pardas.

d) Em 2019, de cada 3 crianças em situação de trabalho infantil no Brasil, 2 eram meninas.

3. Copie a tabela no caderno e complete-a com base no gráfico de setores da página anterior. Utilize uma calculadora para efetuar os cálculos.

3. Resposta em *Orientações*.

Divisão das crianças brasileiras em situação de trabalho infantil, em 2019, por tipo de trabalho

Tipo de trabalho	Número aproximado de crianças
Ocupações elementares (limpeza, manutenção, alimentação)	
Comércio e mercados	
Agropecuária, florestais, da caça e pesca (coleta de caranguejos e mariscos, plantação de cana-de-açúcar, mineração)	194 400
Outros (reciclagem, lixões, indústrias, demolição de navios, construção civil)	

PEIXOTO, F.; CABRAL, M. C. A triste realidade do trabalho infantil. **Qualé**, São Paulo, ed. 36. p. 9, 4 a 18 out. 2021.

4. Na sua opinião, o que é preciso fazer para erradicar o trabalho infantil no Brasil? Em seu caderno, escreva um texto com sua opinião sobre o tema. Depois, leia-o em voz alta para a turma. **4.** Resposta pessoal. Comentários em *Orientações*.

- Na **atividade 1**, os estudantes vão responder a algumas questões sobre o texto. Após terminarem, faça a correção oralmente. Você pode ampliar a proposta desta atividade e solicitar aos estudantes que elaborem questões com base no texto. Depois, eles podem trocar as questões com um colega e responder as propostas por ele.
- Na **atividade 2**, os estudantes vão avaliar se algumas afirmações são verdadeiras ou falsas. É importante incentivá-los a justificar as respostas.
- Na **atividade 3**, os estudantes vão transpor os dados de um gráfico de setores para uma tabela simples. Além disso, vão apresentar os dados na forma de números absolutos. Por envolver conceitos e procedimentos das Unidades temáticas *Números* e *Probabilidade e estatística*, a atividade contribui para o desenvolvimento da competência específica **3**. Após concluírem, você pode propor algumas questões relacionadas ao gráfico ou à tabela.

Resposta da **atividade 3**.

Divisão das crianças brasileiras em situação de trabalho infantil, em 2019, por tipo de trabalho

Tipo de trabalho	Número aproximado de crianças
Ocupações elementares (limpeza, manutenção, alimentação)	651 600
Comércio e mercados	522 000
Agropecuária, florestais, da caça e pesca (coleta de caranguejos e mariscos, plantação de cana-de-açúcar, mineração)	194 400
Outros (reciclagem, lixões, indústrias, demolição de navios, construção civil)	432 000

PEIXOTO, F.; CABRAL, M. C. A triste realidade do trabalho infantil. **Qualé**, São Paulo, ed. 36, p. 9, 4 a 18 out. 2021.

- A **atividade 4** é de caráter reflexivo. Os estudantes devem opinar a respeito do que precisa ser feito para erradicar o trabalho infantil no Brasil. Caso perceba que eles estão com dificuldade para escrever sobre o tema, dê algumas dicas. Diga que a erradicação do trabalho infantil requer um processo constante de conscientização. Uma das maneiras é investir na formação dos futuros cidadãos, tornando-os conscientes e comprometidos com uma sociedade sem exploração de crianças e adolescentes. Outra forma é cobrando as autoridades para que haja políticas eficazes que ajudem essas famílias a superarem seus problemas socioeconômicos. Antes que escrevam o texto, permita que troquem ideias sobre o assunto para que outros pontos sejam levantados.

Resolvendo em equipe

BNCC:

- Competências gerais 2, 6 e 10 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2 e 5 (as descrições estão na página VII).

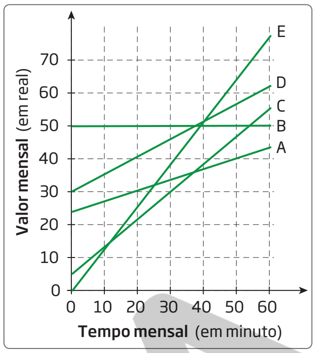
A seção destaca as etapas selecionadas para encaminhar a resolução de problemas. Elas devem ser analisadas e discutidas com os estudantes. Além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **2** e **10** e das competências específicas **2** e **5**, a seção permite a transferência de estratégias de resolução para outros contextos e situações.

Aproveite o contexto para discutir o tema consumo com a turma. Peça aos estudantes que analisem os planos de telefonia apresentados no gráfico, avaliando o custo e o benefício de cada um. No plano B, o custo é de 50 reais, independentemente da quantidade de minutos gastos no mês. Em seguida, encaminhe a discussão para outros contextos, relacionados ao consumo, que façam sentido para a realidade da comunidade escolar, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **6**.

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(Enem) No Brasil, há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone. Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa? **Resolvendo em equipe:** alternativa **c**

a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

Interpretação e identificação dos dados	• Analise as informações do enunciado e anote as que você julgar relevantes para a resolução do problema. • Há um único plano no qual não é possível gastar R$ 30,00. Que plano é esse? • Observando o gráfico, qual é a medida do tempo mensal, em minuto, usando o plano A, em que se gasta R$ 30,00? **Interpretação e identificação dos dados:** primeiro item: resposta pessoal segundo item: o plano B terceiro item: a medida do tempo mensal é de 20 minutos.
Plano de resolução	**Plano de resolução:** primeiro item: o plano A • Qual é o plano mais vantajoso para o usuário que pretende ter um uso mensal de 60 minutos? • Analise os planos C, D e E com relação ao gasto de R$ 30,00 por mês e escreva uma conclusão. segundo item: No plano C, com R$ 30,00, a medida do tempo mensal de chamadas é igual a 30 minutos; o plano D cobra do usuário R$ 30,00 para que ele comece a usar o plano, ou seja, 0 minuto mensal; finalmente, o plano E disponibiliza pouco mais de 20 minutos para o valor de R$ 30,00.
Resolução	• Reúna-se com um colega. • Mostre a ele seu plano de resolução e verifique se há ideias comuns entre vocês. • Discutam as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolham um dos planos para a execução do processo de resolução. **Resolução:** terceiro item: o plano mais vantajoso é o C. **Observação** Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno.
Verificação	• Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.
Apresentação	• Pesquisem no *site* da Agência Nacional de Telecomunicações (Anatel) os direitos e as garantias dos usuários de telefonia. • Organize os temas pesquisados e faça uma exposição dos trabalhos para a comunidade escolar.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Apresentação de dados

Distribuição de frequência

Podemos agrupar dados estatísticos em intervalos preestabelecidos, que chamamos de **classes**.

Frequência absoluta é o número de elementos correspondentes a determinada classe.

Frequência total (F_t) é a soma de todas as frequências absolutas.

Frequência relativa (F_r) é a razão entre o número de elementos de determinada classe pela frequência total (F_t)

1. Observe a tabela com dados coletados por um professor de Educação Física do 8º ano em janeiro de 2024.

Medida da massa dos estudantes de uma turma do 8º ano	
Medida da massa (em quilograma)	**Frequência**
44 ⊢ 46	2
46 ⊢ 48	6
48 ⊢ 50	7
50 ⊢ 52	5

Dados obtidos pelo professor de Educação Física em janeiro de 2024.

a) Qual é a amplitude de cada classe dessa tabela? **1. a)** 2 kg

b) Quantos estudantes tiveram a sua massa medida? **1. b)** 20 estudantes.

c) Calcule a frequência relativa de cada classe.
1. c) 44 ⊢ 46: 0,1; 46 ⊢ 48: 0,3; 48 ⊢ 50: 0,35; 50 ⊢ 52: 0,25

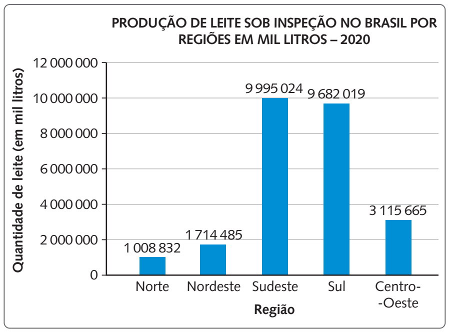
Gráficos de segmentos, de barras e de setores

Gráfico de segmentos: é utilizado para observar a variação de um dado ao longo do tempo.

Gráfico de barras: é utilizado para comparar dados entre si.

Gráfico de setores: é utilizado para comparar as partes e cada parte com o todo.

2. Observe o gráfico e depois responda às questões.

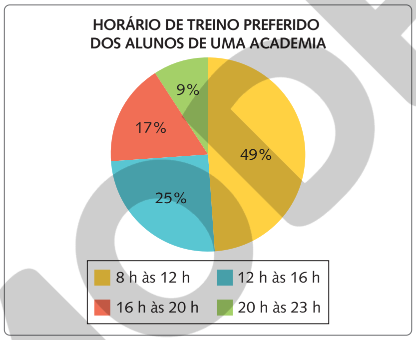


Fonte: IBGE, Pesquisa Trimestral do Leite. Elaboração: Conab.

a) Qual região produziu mais leite em 2020? E menos leite? **2. a)** Sudeste; Norte

b) Qual região produziu aproximadamente 12,2% do total do leite produzido no Brasil em 2020? **2. b)** Centro-Oeste

3. Uma academia fez uma pesquisa entre seus alunos para saber qual o horário preferido deles para treinar. Foram entrevistados 1 200 alunos e os dados foram apresentados no gráfico de setores a seguir.



Dados obtidos pela academia em janeiro de 2024.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é o horário preferido da maioria para treinar? **3. a)** das 8 h às 12 h

b) De acordo com o gráfico, quantos alunos preferem treinar das 20 h às 23 h?

c) Quantos alunos preferem o horário de 12 h até as 20 h? **3. c)** 504 alunos.

3. b) 108 alunos.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Apresentação de dados

• Na **atividade 1**, os estudantes vão ler e interpretar dados apresentados em uma tabela de distribuição de frequências. No **item c**, para determinar as frequências relativas, eles devem se recordar de que precisam dividir a frequência de cada classe pelo total de estudantes (calculado no **item b**).

Gráficos de segmentos, de barras e de setores

• A **atividade 2** envolve a leitura e a interpretação de um gráfico de barras verticais. Para responder às questões do **item a**, basta que comparem as barras correspondentes a cada uma das regiões. Para responder ao **item b**, eles precisam calcular o total de leite produzido no Brasil em 2020 e, depois, dividir a quantidade de leite produzida em cada região pelo total produzido no Brasil para verificar em qual região o resultado obtido é próximo de 0,122 ou 12,2%. Antes de realizarem a divisão, se achar conveniente, incentive-os a estimar qual região produziu aproximadamente 12,2% do total de leite produzido no Brasil em 2020.

• Na **atividade 3**, os estudantes vão responder a questões relacionadas a um gráfico de setores. Para responder ao **item b**, eles precisam considerar que 9% dos alunos prefere treinar das 20 h às 23 h e que foram entrevistados 1 200 alunos. Dessa maneira, precisam calcular 9% de 1 200 alunos, que é igual a 108 alunos. Para responder ao **item c**, espera-se que eles percebam que 42% dos alunos preferem o horário das 12 h às 20 h (setores azul e vermelho do gráfico) e que 42% de 1 200 alunos é igual a 504 alunos. Após concluírem a atividade, peça para que compartilhem com os colegas como fizeram cada item. Esse momento de troca favorece o desenvolvimento da competência geral **9** da BNCC.

É hora de extrapolar

BNCC:

- Competências gerais 2, 4, 5, 7, 8 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 4, 5, 6, 7 e 8 (as descrições estão na página VII).
- Habilidade EF08MA27.

Tema contemporâneo transversal:

SAÚDE

A seção propõe o fechamento da unidade por meio de um trabalho colaborativo, que explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um relatório conclusivo, que será compartilhado com a turma.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a seção é dividida em etapas que promovem:

- entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado;
- pesquisa coletiva;
- elaboração, em grupo, do produto proposto (relatório sobre a pesquisa realizada);
- apresentação e exposição do relatório;
- reflexão e síntese do trabalho.

As etapas de pesquisa e elaboração do relatório podem ser realizadas extraclasse. Verifique o perfil dos estudantes e oriente-os com relação ao prazo.

A seção visa complementar o desenvolvimento da habilidade **EF08MA27**, além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5**, **7**, **8** e **9** e das competências específicas **4**, **5**, **6**, **7** e **8**, procurando mobilizar conteúdos estudados nos capítulos que integram a Unidade. Portanto, é recomendável trabalhar a seção depois de estudar os capítulos, mas, se preferir trabalhar as etapas à medida que os capítulos forem estudados, atente para os conhecimentos prévios necessários.

Se achar oportuno, trabalhe a seção em parceria com os professores de Ciências e Educação Física. Os temas das pesquisas poderão ser aprofundados, solicitando que os estudantes pesquisem o que ocorre com o corpo quando dormimos e quando praticamos atividades físicas.

- Para o **item c** da **atividade 2**, espera-se que os estudantes apresentem respostas como: A luz dos aparelhos eletrônicos inibe a secreção de melatonina, hormônio que "avisa o corpo" que é hora de dormir. Além disso, o uso dos aparelhos eletrônicos estimula o cérebro e o deixa em estado de alerta, fazendo com que a pessoa durma por menos horas.

SAÚDE

Faça as atividades no caderno.

É hora de extrapolar

O tempo que você dorme é adequado? E o tempo que você pratica atividades físicas?

É sabido que, independentemente da idade, a quantidade e a qualidade do sono e a prática regular de atividades físicas são importantes para uma boa saúde e qualidade de vida. Porém, mesmo reconhecendo a importância do sono e dos exercícios físicos, muitos brasileiros não têm esses hábitos incorporados às suas rotinas, quadro que precisa ser mudado para que todos tenham uma saúde melhor.

Objetivo: Analisar dados e pesquisar a importância do sono e da prática de atividades físicas, planejar e executar uma pesquisa amostral, elaborar um relatório e apresentar os resultados para os colegas de turma.

Etapa 1: Pesquisa sobre a importância da qualidade do sono

1. Reúna-se com três colegas e façam um levantamento dos seguintes dados com os integrantes de seu grupo:

a) Quantas horas você dorme por dia durante a semana (de segunda a sexta)? **1. a)** Resposta pessoal.

b) Quantas horas você dorme por dia aos finais de semana (sábado e domingo)? **1. b)** Resposta pessoal.

c) Você costuma assistir à televisão ou mexer em aparelhos eletrônicos antes de dormir? Se sim, por quanto tempo? **1. c)** Resposta pessoal.

2. Observem, no quadro a seguir, a quantidade de horas de sono, recomendada por especialistas, para os indivíduos em idade escolar.

Horas de sono recomendadas para os indivíduos em idade escolar, por dia	
Idade	**Quantidade de horas**
6 a 13 anos	9 a 11 horas
14 a 17 anos	8 a 10 horas

Fonte: National Sleep Foundation. Dados disponíveis em: https://www.sleepfoundation.org/how-sleep-works/how-much-sleep-do-we-really-need. Acesso em: 6 jul. 2022.

Calculem a média da quantidade de horas que os integrantes do grupo dormem durante a semana e durante os finais de semana e respondam às questões. **2.** Respostas pessoais. Os valores dependerão dos dados coletados na atividade 1.

a) Os valores obtidos são próximos? O que isso significa?

b) Os valores estão de acordo com o recomendado pelos especialistas?

c) O uso de aparelhos eletrônicos antes de dormir não é recomendado pelos especialistas. Por que esse hábito pode prejudicar o sono? Para obter uma resposta mais completa, pesquisem o tema.

3. Considerem o quadro a seguir, que traz as quantidades de horas dormidas por dia pelos integrantes de dois grupos, durante uma semana.

	Identificação dos integrantes de cada grupo					
Grupo	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Grupo 1	9 horas	8 horas	9 horas	9 horas	10 horas	9 horas
Grupo 2	7 horas	7 horas	12 horas	11 horas	7 horas	10 horas

Agora, observem o cálculo da média de horas do sono dos integrantes para cada grupo e respondam às questões.

- Média de horas do sono do Grupo 1: 9 horas

$$\frac{9+8+9+9+10+9}{6}=\frac{54}{6}=9$$

- Média de horas do sono do Grupo 2: 9 horas

$$\frac{7+7+12+11+7+10}{6}=\frac{54}{6}=9$$

(**EF08MA27**) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

3. b) A mediana, a moda e a amplitude de cada grupo, são, respectivamente:
- Grupo 1: 9 horas, 9 horas e 2 horas
- Grupo 2: 8,5 horas, 7 horas e 5 horas

a) Considerem que os integrantes dos grupos tenham 14 anos de idade. Como a média dos dois grupos foi de 9 horas, podemos afirmar que todos indivíduos, tanto do Grupo 1 quanto do Grupo 2, estão dormindo uma quantidade de horas adequada? **3. a)** Sim, porque a recomendação dos especialistas é que indivíduos dessa idade durmam de 8 a 10 horas por dia.

b) Determinem a mediana, a moda e a amplitude dos dados correspondentes aos Grupos 1 e 2.

c) A média caracteriza melhor qual conjunto de dados: o do grupo 1 ou do grupo 2? Por quê?

4. Façam uma pesquisa, em *sites* ou livros especializados, sobre o sono. A pesquisa deve contemplar: quantidade de horas de sono recomendada para as diferentes faixas etárias, bons hábitos para dormir melhor e como a falta de sono pode prejudicar a qualidade de vida de uma pessoa.

4. Resposta pessoal.

Etapa 2: Pesquisa sobre a importância da prática de atividades físicas

5. A Organização Mundial de Saúde (OMS) divulgou um documento que traz algumas recomendações sobre a prática de atividades físicas de acordo com a faixa etária. Analisem, algumas dessas recomendações.

Idade	Recomendações
5 aos 17 anos	• Praticar pelo menos 60 minutos diários de atividade física (moderada ou intensa): brincadeiras, jogos, esportes, locomoção, educação física etc. • Mais de 60 minutos diários proporcionam mais benefícios para a saúde.
18 aos 64 anos	• Praticar, semanalmente, pelo menos 150 minutos de atividade aeróbica moderada ou 75 minutos de atividade aeróbica intensa. • As atividades aeróbicas devem ser feitas em períodos de, no mínimo, 10 minutos de duração. • Para benefícios adicionais para a saúde, praticar semanalmente 300 minutos de atividade aeróbica moderada ou 150 minutos de atividade aeróbica intensa.
65 anos ou mais	• Praticar, semanalmente, 150 minutos de atividade aeróbica moderada ou 75 minutos de atividade aeróbica intensa. • As atividades aeróbicas devem ser feitas em períodos de, no mínimo, 10 minutos de duração. • Para benefícios adicionais para a saúde, praticar semanalmente 300 minutos de atividade aeróbica moderada ou 150 minutos de atividade aeróbica intensa. • Realizar atividade física três ou mais dias por semana como forma de melhorar o equilíbrio e evitar quedas.

Dados disponíveis em: http://apps.who.int/iris/bitstream/handle/10665/44399/9789241599979_eng.pdf;jsessionid=FEE7FD0CA200373987CF3A613D7E21D2?sequence=1. Acesso em: 6 jul. 2022.

Agora, respondam às questões.

5. a) Respostas pessoais.

a) Que tipo de atividade física vocês praticam? Qual é a frequência com que vocês praticam essa atividade?

b) A frequência da prática de atividades físicas realizada pelos integrantes do grupo está dentro do que é recomendado pela OMS? **5. b)** Resposta pessoal.

c) Se uma pessoa costuma realizar um percurso caminhando por 30 minutos a uma velocidade de 6 km/h, atividade física considerada moderada, e deseja percorrer a mesma medida de distância correndo a 9 km/h para alterar o nível da atividade para intensa, por quanto tempo ela deve realizar a atividade?

5. c) 20 minutos

3. c) Espera-se que os estudantes respondam que caracterizaria melhor o conjunto de dados do grupo 1 porque a amplitude desse conjunto é menor do que a do conjunto de dados correspondente ao grupo 2.

- No **item a** da **atividade 3**, espera-se que os estudantes compreendam que, com base apenas na média, não é possível fazer tal afirmação. Note que, no Grupo 1, todos os estudantes dormem uma quantidade de horas adequada, porém isso ocorre com apenas um integrante do Grupo 2 (F), enquanto os demais dormem um período maior ou menor que o recomendado. No **item c**, é importante que os estudantes notem que, no Grupo 2, a moda ser 7 indica que a frequência dessa medida é a maior entre os dados e que uma amplitude 5 indica que a variação entre os dados é maior que a do Grupo 1, cuja amplitude é 2.
- A **atividade 4** retoma uma das questões da abertura desta Unidade. Aproveite-a para comparar os conhecimentos da turma naquele momento e agora.
- No **item c** da **atividade 5** retome com os estudantes as estratégias para resolver problemas de proporcionalidade envolvendo grandezas inversamente proporcionais. Os estudantes poderão observar que, ao aumentar a medida de velocidade em 1,5 vez, a medida de tempo necessário será de $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ da medida de tempo inicial.

Sugestão de leitura

A reportagem *Celular antes de dormir afeta sono, hormônios e desenvolvimento infantil*, de Adriana Stock, para a BBC Brasil, traz informações sobre como o uso do celular antes de dormir pode afetar o desenvolvimento infantil.

• Peça aos estudantes que compartilhem as estratégias utilizadas na resolução do **item a** da **atividade 6**. É importante que notem que precisam calcular 39,3% de 24%, determinando aproximadamente 9,4%, ou calcular os valores absolutos: 24% de 161,8 milhões, depois 39,3% do valor obtido e, por último, calcular o percentual desse valor correspondente a 161,8 milhões.

• Para a **atividade 7**, os estudantes podem entrevistar médicos, professores de Educação Física, treinadores esportivos, esportistas etc.

• Na **atividade 8**, se possível, para a definição do questionário da etapa **3**, oriente-os a realizar um pré-teste: apliquem o questionário elaborado para alguns itens dentro da amostra definida a fim de verificar se as perguntas estão claras, se as alternativas contemplam a diversidade de respostas e se os dados coletados estão de acordo com o esperado. Esse teste pode ajudar a identificar problemas no questionário antes de aplicá-lo em toda a amostra determinada.

• Na **atividade 11**, se possível, oriente os estudantes a elaborar o relatório como um documento eletrônico, que possa ser compartilhado. Esse tipo de recurso favorece a participação de todos os membros do grupo. O que poderá facilitar a apresentação dos resultados obtidos, em que eles também poderão utilizar recursos eletrônicos.

• Na **atividade 16**, acompanhe a escrita do texto e, se necessário, relembre processos importantes que você acompanhou e que os estudantes estejam esquecendo de descrever no trabalho.

6. a) Comentários em *Orientações.*

6. Na Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios (PNAD) realizada em 2015 pelo IBGE, uma das temáticas abordadas foi a Prática de Esporte e Atividade Física. A pesquisa revelou que futebol é o esporte mais praticado, sendo a escolha de 39,3% das pessoas que praticam esportes, e que 62,1% das pessoas com 15 anos ou mais não praticavam esportes ou atividades físicas.

a) Sabendo que 24% das 161,8 milhões de pessoas entrevistadas pratica esporte, as pessoas que praticam o futebol correspondem a que percentual dessa população total?

b) Qual é o percentual de pessoas que praticam futebol no seu grupo? Esse percentual é maior que o percentual nacional ou menor? **6. b)** Respostas pessoais.

7. Façam uma pesquisa sobre a importância de praticar atividades físicas. Vocês podem buscar as informações em *sites* ou livros especializados e também podem entrevistar profissionais que têm conhecimento sobre o assunto. **7.** Comentários em *Orientações.*

Etapa 3: Planejamento e execução de pesquisa sobre o sono e a prática de atividades físicas

8. Comentários em *Orientações.*

8. Nesta etapa, vocês farão uma pesquisa amostral sobre qualidade de vida, visando ao sono e/ou à prática de atividades físicas. A pesquisa deverá conter pelo menos uma pergunta cuja resposta seja uma variável quantitativa. Para isso, é preciso realizar um planejamento. Retomem as pesquisas feitas sobre o sono (atividade 4) e sobre atividade física (atividade 7), definindo com o grupo as características da pesquisa que será realizada. Leiam a seguir alguns questionamentos que poderão ajudá-los.

- O tema específico e o objetivo da pesquisa: o que vocês pretendem investigar sobre o sono e/ou atividades físicas? Por que a pesquisa que vocês pretendem realizar é relevante? A que público-alvo a pesquisa se destina?
- A população investigada e a amostra escolhida: qual será a população da pesquisa? Quantas pessoas vão compor a amostra? Como essas pessoas serão escolhidas? Será uma amostra estratificada?
- O questionário e a coleta de dados: quais perguntas comporão o questionário? Como serão as perguntas: abertas ou fechadas? Há alguma pergunta cuja resposta é uma variável quantitativa? Como será feita a coleta e o armazenamento dos dados? Vocês utilizarão uma planilha eletrônica para registrar e organizar os dados ou farão essas anotações no papel?
- A divulgação dos resultados: como vocês pretendem divulgar os resultados da pesquisa?

9. Depois do planejamento elaborado, realizem a coleta de dados. Não se esqueçam de distribuir as tarefas de forma adequada entre os integrantes do grupo.

10. Organizem os dados coletados e apurem-nos de acordo com os objetivos da pesquisa. Em seguida, discutam qual gráfico e/ou tabela são os mais adequados para representar cada tipo de dado. Façam também o cálculo das medidas de tendência central e amplitude para a(s) pergunta(s) de variáveis quantitativas que vocês acharem adequadas para analisar os dados da pesquisa.

11. Analisem os dados, as tabelas, os gráficos e as medidas de tendência central e elaborem um relatório sobre a pesquisa realizada. O relatório deverá conter introdução, objetivos da pesquisa, análise dos dados, bem como os gráficos, as tabelas, as medidas calculadas, as conclusões da pesquisa e a descrição sobre a divulgação dos dados. **11.** Comentários em *Orientações.*

Etapa 4: Análise dos relatórios e apresentação dos resultados para a classe

12. Estabeleçam uma parceria com outro grupo para que vocês leiam e analisem o relatório um do outro. Façam uma leitura cuidadosa e criteriosa do relatório analisando a clareza das informações, a adequação dos gráficos e a coerência das conclusões.

13. Anotem as dúvidas, as opiniões e as sugestões dos colegas e façam os ajustes necessários.

14. Divulguem os resultados da pesquisa para a turma (combinem as datas com o professor), mostrando as características, os dados e a conclusão da pesquisa.

Etapa 5: Síntese do trabalho realizado

15. As seguintes questões devem ser discutidas.

a) A pesquisa realizada atingiu os objetivos traçados? **15. a)** Resposta pessoal.

b) Os resultados obtidos corresponderam às expectativas iniciais? **15. b)** Resposta pessoal.

c) A divulgação dos resultados ajudará as pessoas a buscar hábitos mais saudáveis? **15. c)** Resposta pessoal.

16. Redijam um texto que descreva o processo realizado pelo grupo nas etapas **3** e **4**. Comentário em *Orientações.*

Teste seus conhecimentos

1\. alternativa **c**

1. Qual dos números racionais a seguir tem dízima periódica como representação decimal?

a) $\frac{12}{15}$ **b)** $\frac{8}{16}$ **c)** $\frac{9}{13}$ **d)** $\frac{99}{8}$

2. O 4º termo da sequência dada por $a_1 = 0$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 5$ é: 2. alternativa **a**

a) –8,75 **b)** –7,5 **c)** –3 **d)** –3,75

3. Um cientista obteve as seguintes medidas de massa de 4 elementos que está estudando:

A: $0{,}2 \cdot 10^5$ g C: $8{,}3 \cdot 10^{-6}$ g

B: $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ g D: $0{,}1 \cdot 10^2$ g

Qual dos elementos tem menor medida de massa? 3. alternativa **c**

a) A **b)** B **c)** C **d)** D

4. O valor de $18^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{3}}$ é um número entre:

a) 4 e 5 4. alternativa **b** **c)** 22 e 23

b) 12 e 13 **d)** 80 e 82

5. Uma loja vende apenas triciclos e bicicletas para o transporte de adultos, totalizando 150 rodas no estoque. Quantas bicicletas estão disponíveis nessa loja, se há 22 triciclos? 5. alternativa **c**

a) 22 **b)** 28 **c)** 42 **d)** 53

6\. alternativa **a**

6. Fernando foi à feira comprar algumas frutas. Em uma barraca, ele reparou que, se levasse 12 unidades de laranja e 7 unidades de limão, pagaria R$ 7,75. Caso levasse 6 unidades de laranja e 4 unidades de limão, pagaria R$ 4,00. O preço da unidade de limão nessa barraca é:

a) R$ 0,25 **c)** R$ 1,00

b) R$ 0,50 **d)** R$ 1,25

7. A prefeitura de certa cidade deseja construir uma estrada que seja equidistante de dois prédios, *A* e *B*, da cidade. No rascunho do projeto elaborado pelo engenheiro, esses dois prédios foram marcados como dois pontos. Com isso, a estrada pode ser representada pela:

a) circunferência que passa por *A* e *B*.

b) semirreta $\overrightarrow{AB}$. 7. alternativa **d**

c) bissetriz de $\overline{AB}$.

d) mediatriz de $\overline{AB}$.

8. Observe a seguinte imagem.

DENGALI/SHUTTERSTOCK

As 4 camadas horizontais inferiores podem ser obtidas a partir de uma transformação geométrica das 4 camadas horizontais superiores. Que transformação é essa? 8. alternativa **c**

a) Rotação com um giro de 360°, no sentido horário, em relação ao centro da imagem.

b) Rotação com um giro de 90°, no sentido horário, em relação ao centro da imagem.

c) Reflexão em relação a uma reta horizontal que passa no centro da imagem.

d) Translação vertical de 4 camadas para baixo.

9\. alternativa **c**

9. Bruno construiu um polígono regular com 30 lados em um *software* de geometria dinâmica. Ao medir a abertura de um ângulo interno do polígono, qual medida deve aparecer?

a) 12° **b)** 162° **c)** 168° **d)** 192°

10. Para criar a senha de acesso a um *site*, o usuário precisa escolher três elementos nesta ordem: um símbolo entre quadrado, círculo e triângulo, uma vogal e um número de 1 a 5. Suelen decidiu que vai utilizar o triângulo ou o círculo como símbolo. Quantas senhas são possíveis criar com essa escolha? 10. alternativa **c**

a) 25 **b)** 45 **c)** 50 **d)** 75

11\. alternativa **b**

11. Em um evento escolar estão 24 professores, 46 estudantes e 56 pais. No evento, será sorteado um livro. Se cada pessoa tem a mesma chance de ser sorteada, qual é a probabilidade de o ganhador não ser um professor?

a) $\frac{4}{21}$ **b)** $\frac{51}{63}$ **c)** $\frac{40}{63}$ **d)** $\frac{13}{21}$

12. Laís desenhou um losango e traçou suas diagonais. Sabendo que a abertura do ângulo formado entre a maior diagonal e um dos lados do losango mede 15°, qual é a medida de abertura do maior ângulo interno desse losango?

a) 15° **b)** 30° **c)** 75° **d)** 150°

12\. alternativa **d**

Teste seus conhecimentos

• Na **atividade 1**, os estudantes devem identificar qual das frações é fração geratriz de uma dízima periódica. Espera-se que os estudantes analisem o denominador de cada fração ou que efetuam a divisão do numerador pelo denominador.

• Na **atividade 2**, os estudantes vão determinar o 4º termo de uma sequência numérica por meio da sua lei de formação. Se julgar interessante, comente que se trata de um sequência recursiva, pois determinado termo pode ser calculado com base no termo anterior.

• A **atividade 3** envolve a leitura e comparação de números expressos em notação científica. Uma maneira de realizar a questão é reescrever todos os números de modo que a potência de base 10 tenha o mesmo expoente. Dessa forma, o problema se resume a comparar os números na forma decimal que multiplicam essas potências.

• A **atividade 4** avalia como os estudantes lidam com potências de expoente fracionário e o cálculo aproximado de raízes quadradas. Eles que eles apliquem as propriedades da potenciação para facilitar os cálculos.

• Na **atividade 5** os estudantes vão traduzir a situação-problema por meio de uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Indicando por *t* a quantidade de triciclos e por *b* a de bicicletas, temos:

$3t + 2b = 150$, em que *t* e *b* são números naturais.

Como há 22 triciclos disponíveis na loja, os estudantes podem determinar o número de bicicletas substituindo *t* por 22 na equação e efetuando os cálculos.

• Na **atividade 6**, espera-se que os estudantes percebam que devem resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas para calcular o preço da unidade de cada fruta. Verifique se percebem que as incógnitas das duas equações são números racionais maiores do que zero, pois representam preços.

• Na **atividade 7**, os estudantes precisam perceber que qualquer ponto da estrada a ser construída deve ser equidistante dos prédios *A* e *B*, ou seja, no rascunho do projeto trata-se da mediatriz do segmento de reta com extremidades nesses pontos.

• Na **atividade 8**, espera-se que os estudantes reconheçam que a imagem apresenta simetria e que um dos seus eixos está posicionado no centro da imagem, na horizontal. A figura também apresenta um eixo de simetria vertical. Chame a atenção para isso, ao explorar a atividade em momento posterior.

• Na **atividade 9**, os estudantes precisam recordar que a medida da abertura do ângulo interno de um polígono regular pode ser calculada dividindo a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos pelo número de lados do polígono.

• Na **atividade 10**, os estudantes podem utilizar o princípio fundamental da contagem para determinar o número de combinações possíveis.

• Na **atividade 11**, espera-se que os estudantes percebam que para calcular a probabilidade de não sortear um professor eles podem fazer $\frac{102}{126}$ ou $1 - \frac{24}{126}$.

• Na **atividade 12**, espera-se que os estudantes recordem que as diagonais do losango são perpendiculares entre si e determinam 4 triângulos congruentes. Considerando que a medida da abertura de um ângulo interno desse triângulo é 15°, pode-se calcular a medida da abertura do outro ângulo interno agudo e, depois, multiplicar por 2 para obter a medida da abertura do maior ângulo interno do losango.

• Na **atividade 13** os estudantes podem considerar todas as medidas em metro para calcular a medida da área dos tecidos e verificar qual delas é a maior.

• Na **atividade 14**, espera-se que os estudantes percebam que a medida de volume do paralelepípedo mencionado pode ser calculada multiplicando as medidas do comprimento e da largura (que são iguais) pela medida da altura, para chegar a 1 215 cm^3. Ao considerar que 1 L = 1000 cm^3, podem analisar a situação apresentada.

• Na **atividade 15**, espera-se que os estudantes percebam que o formato quadrado vai se manter. Portanto, indicando por x a medida do comprimento do lado atual e aumentando em 15%, podem considerar que a medida do comprimento do novo lado pode ser indicada por $1{,}15x$. Assim, obterão a seguinte equação, considerando a medida da área da nova plantação: $(1{,}15x)^2 = 529$, em que x é um número real maior que zero.

• Na **atividade 16**, espera-se que os estudantes recordem que a medida da velocidade média é calculada pela razão entre a medida da distância percorrida, em km, pela medida do tempo em h. Assim, ao aumentar a medida da velocidade média, a medida do tempo deve diminuir proporcionalmente. Lembrando que o produto dos valores correspondentes das grandezas é constante, os estudantes podem descobrir que com 60 km/h é possível realizar a viagem em 40 minutos, economizando 8 minutos.

• Na **atividade 17**, os estudantes precisam analisar os dados obtidos para determinar as medidas de tendência central e amplitude. Para isso, podem organizar os dados em ordem crescente ou decrescente, a fim de calcular a mediana.

• A **atividade 18** avalia o conhecimento dos estudantes sobre termos utilizados em uma pesquisa estatística e as técnicas de amostragem estudadas. Espera-se que eles identifiquem cada um desses termos na leitura da situação e percebam que a amostra foi obtida pela técnica sistemática.

• Na **atividade 19** os estudantes precisam analisar as frequências absolutas de cada classe e recordar que a frequência relativa de determinada classe é calculada ao dividir a frequência absoluta dela pela frequência total. Nesse caso, a frequência total é dada pela soma das frequências absolutas, ou seja, 560 pessoas.

Teste seus conhecimentos

13. Mateus está em dúvida entre qual tecido deve comprar. Na loja, há os seguintes formatos:
- quadrado, cuja medida de comprimento do lado é 85 cm;
- triângulo, cujas medidas de comprimento da base e da altura são, respectivamente, 90 cm e 1,5 m;
- losango, cujas medidas de comprimento das diagonais são 1,2 m e 1,8 m;
- círculo, cuja medida de comprimento do raio é 50 cm.

13. alternativa **c**

Se ele deseja comprar o tecido com maior medida da área, deve escolher o formato de:

a) quadrado. **b)** triângulo. **c)** losango. **d)** círculo.

14. Thaís tem um recipiente em formato que lembra um paralelepípedo com medida de comprimento de altura de 15 cm e base quadrada com lado medindo 9 cm de comprimento. É possível despejar 1 litro de água nesse recipiente sem derramar? **14.** alternativa **c**

a) Não, pois seriam derramados 215 mL.
b) Não, pois seriam derramados 35 mL.
c) Sim e ainda caberiam mais 215 mL.
d) Sim e ainda caberiam mais 35 mL.

15. Marisa tem uma plantação em formato de quadrado e vai ampliar sua medida de comprimento do lado em 15%, mantendo o formato quadrado. Sabendo que a nova área da plantação medirá 529 m^2, qual é a medida de comprimento do lado da plantação atual? **15.** alternativa **a**

a) 20 m **b)** 23 m **c)** 27 m **d)** 30 m

16. Da casa de Estefani até a casa de Lucas são 40 km de viagem. Ela realizou esse percurso em 48 minutos com medida de velocidade média de 50 km/h. Se a medida de velocidade média fosse 60 km/h, quantos minutos ela economizaria de viagem? **16.** alternativa **a**

a) 8 minutos. **b)** 10 minutos. **c)** 24 minutos. **d)** 40 minutos.

17. Em uma pesquisa estatística foi registrada a quantidade de viagens de avião feitas pelos entrevistados:

0	4	6	0	5	3
4	2	4	4	1	2

A menor medida estatística desse conjunto de dados é:

a) a amplitude. **b)** a média. **c)** a moda. **d)** a mediana.

17. alternativa **b**

18. Em uma pesquisa amostral sobre os pacientes de seu consultório, Ronaldo utilizou a amostragem casual simples, selecionando 3 pacientes em sequência a cada 10 pacientes, para verificar a variável qualitativa ordinal "nível de satisfação da consulta" e a variável quantitativa contínua "medida do tempo de espera".

Sobre os termos estatísticos apresentados nessa situação, o que está errado é o tipo: **18.** alternativa **b**

a) de pesquisa.
b) de amostragem.
c) da variável qualitativa.
d) da variável quantitativa.

19. Em uma pesquisa sobre a medida de massa, em quilograma, dos frequentadores de um clube, foram obtidos estes dados em 2023.

Distribuição de frequência das medidas de massa dos frequentadores do clube

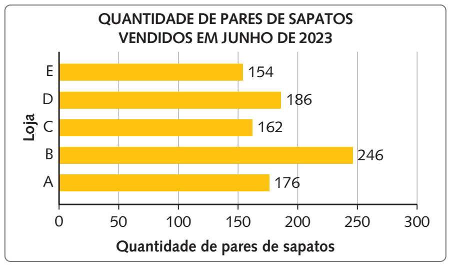
Medida de massa (em kg)	Frequência (F)
30 ⊢ 45	142
45 ⊢ 60	148
60 ⊢ 75	108
75 ⊢ 90	80
90 ⊢ 105	70
105 ⊢ 120	12

Dados obtidos pelo clube em 2023.

Qual era a frequência relativa dos frequentadores desse clube que estavam na classe 90 ⊢ 105? **19.** alternativa **b**

a) 11,6% **b)** 12,5% **c)** 14,3% **d)** 70%

20. Cássia é dona de algumas lojas de calçados. Em junho de 2023, ela elaborou este gráfico para verificar a quantidade de pares de sapatos vendidos em cada loja.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos por Cássia em junho de 2023.

Nesse mês, quantas lojas ficaram abaixo da média mensal de vendas? **20.** alternativa **d**

a) 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3

• Na **atividade 20** os estudantes precisam analisar o gráfico de barras horizontais apresentado na questão para calcular a média aritmética mensal da quantidade de pares de sapatos vendidos. Assim, podem concluir que as lojas A, C e E ficaram abaixo da média mensal.

Respostas

Revisão dos conteúdos de anos anteriores

Para o capítulo 1: Conjuntos numéricos

Página 10

1. **a)** número natural: 5; números inteiros: 5 e –5
b) nenhum número natural; número inteiro: –2,0
c) números naturais: 10 e 12; números inteiros: todos os números
d) nenhum número natural; nenhum número inteiro

2. **a)** $A \rightarrow 5$; $C \rightarrow -3$ **c)** $Z \rightarrow 0$; $W \rightarrow -20$
b) $X \rightarrow -34$; $Y \rightarrow -33$ **d)** $M \rightarrow -60$; $N \rightarrow 0$

3. **a)** F **b)** V **c)** F **d)** V

4. itens **a**, **d**

5. **a)** $<$ **b)** $>$ **c)** $<$ **d)** $>$

6. A: 4; B: $\frac{1}{2}$; C: $\frac{9}{4}$; D: $\frac{9}{2}$

Para o capítulo 2: Potenciação e radiciação

Páginas 11 e 12

7. itens **a**, **b**, **c**, **f**, **g**

8. **a)** +1 296 **d)** 64 **g)** 0,0081
b) +216 **e)** –1,331 **h)** $\frac{1}{32}$
c) +729 **f)** $-\frac{1}{8}$

9. **a)** 8 **c)** 10 **e)** 7
b) –9 **d)** –4 **f)** –2

10. A – II; B – I; C – IV; D – III

11. **a)** $\frac{2}{5}$ **b)** $\frac{3}{8}$ **c)** –5 **d)** $\frac{1}{4}$

12. itens **a**, **d**

13. **a)** 16 **b)** 81 **c)** 64 **d)** 0,04

Para o capítulo 3: Sistemas de equações do 1º grau

Página 12

14. $M(2, 5)$; $N(-3, 1)$; $P(0, -6)$; $Q(4, -6)$

15. Construção de figuras.

Para o capítulo 4: Ângulos e transformações geométricas

Páginas 12 a 14

16. **a)** F **b)** V **c)** V **d)** F

17. $E\hat{O}B$ e $D\hat{O}C$; $C\hat{O}B$ e $B\hat{O}A$

18. **a)** reflexão **b)** eixo de simetria

19. Construção de figuras.

Para o capítulo 5: Polígonos

Páginas 15 e 16

20. Construção de figura.

21. **a)** $x = 62°$ **b)** $x = 25°$ **c)** $x = 110°$

22. Polígono do item **a**, pois todos os ângulos internos têm a mesma medida de abertura e todos os lados têm a mesma medida de comprimento.

23. **a)** quadrado **b)** triângulo equilátero

Para o capítulo 6: Probabilidade

Página 16

24. itens **b**, **c**

25. **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{12}$

Para o capítulo 7: Triângulos e quadriláteros

Páginas 16 e 17

26. Construção de figura.

27. **a)** V **b)** F **c)** V **d)** F

28. **a)** trapézio
b) outro quadrilátero
c) paralelogramo
d) trapézio

29. itens **a**, **c**, **d**

Para o capítulo 8: Área, volume e capacidade

Páginas 18

30. **a)** 344 cm² **c)** 142,5 cm²
b) 105 cm² **d)** 7,25 cm²

31. 525 cm³

32. **a)** 1 728 cm³ **b)** 0,064 m³ **c)** 729 cm³

Para o capítulo 9: Equações do 2º grau

Páginas 19 e 20

33. itens **a**, **c**

34. itens **b**, **d**, **e**

35. itens **a**, **d**

36. alternativa **a**

37. **a)** $S = \{-4\}$ **b)** $S = \{41\}$ **c)** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

38. itens **a**, **c**

Para o capítulo 10: Grandezas e proporcionalidade

Páginas 20 e 21

39. **a)** $\frac{30}{3} = 10$ **b)** $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$ **c)** $\frac{90}{123}$

40. itens **a**, **c**

41. **a)** $x = 15$ **b)** $x = 30$ **c)** $x = 50$

42. **a)** 36 **b)** 80

43. 96

Para o capítulo 11: Medidas de tendência central e pesquisa estatística

Página 21

44. R$ 38,28

45. marca A: 7,5; marca B: 7,3

Para o capítulo 12: Gráficos estatísticos

Página 22

46. Resposta pessoal.

Capítulo 1

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Página 41

1. **a)** V **b)** F **c)** F

2. **a)** antecessor: 210; sucessor: 212
b) antecessor: 198; sucessor: 200
c) antecessor: 299; sucessor: 301

3. 2, 5, 7, 12, 19, 31

4. **a)** 8, 9, 10, 11 **b)** –10, –9

5. R$ 2 590,00

6. itens **a**, **b**, **d**

7. **a)** 0, 5 **c)** 1,23
b) 0,6 **d)** –1,111...

8. **a)** $\frac{5}{9}$ **b)** $\frac{12}{90}$ **c)** $\frac{122}{99}$ **d)** $\frac{22}{900}$

9. **a)** V **b)** F **c)** F **d)** V

10. –12 pertence aos conjuntos dos inteiros, racionais e reais; $\sqrt{7}$ pertence aos conjuntos dos irracionais e reais; $\frac{15}{3}$ pertence ao conjunto dos naturais, inteiros, racionais e reais; 1,88 pertence ao conjunto dos racionais e reais; π pertence ao conjunto dos irracionais e reais; $\frac{3}{7}$ pertence ao conjunto dos racionais e reais.

Capítulo 2

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 55 e 56

1. **a)** 27 **c)** 4 **e)** $\frac{25}{16}$ **g)** –1
b) –4 **d)** $\frac{4}{9}$ **f)** 1 **h)** 2

2. **a)** 6 **b)** –11 **c)** 97

3. **a)** $2,7 \cdot 10^{-1}$ **d)** $1,2 \cdot 10^{-3}$
b) $8,95 \cdot 10^{2}$ **e)** $5 \cdot 10^{7}$
c) $3,6 \cdot 10^{3}$ **f)** $4,4 \cdot 10^{-8}$

4. **a)** 3^{18} **c)** 2^{-6} **e)** 2^{7}
b) 5^{6} **d)** 8^{-2}

5. **a)** 31 **c)** 0 **e)** 56
b) 0 **d)** 6

6. **a)** 7 **d)** 15 **g)** $\frac{11}{10}$
b) 5 **e)** $\frac{2}{3}$ **h)** $\frac{2}{13}$
c) 13 **f)** $\frac{4}{7}$ **i)** $\frac{1}{5}$

7. **a)** 5,20 **b)** 17,32 **c)** 2,45 **d)** 1,58

8. **a)** 8,7 **b)** 2,6 **c)** 1,9 **d)** 22,4

9. **a)** 5 **b)** 4 **c)** $\frac{65}{6}$

10. **a)** 9 801 **b)** 106 **c)** 1 296

11. **a)** –9 **b)** 2 **c)** 3 **d)** $\frac{3}{4}$

12. $-\frac{8}{7}$

245

Capítulo 3

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Página 72

1. Construção de figura.
2. 12 cédulas de R$ 5,00 e 8 de R$ 10,00.
3. **a)** (3, 2) **b)** (–1, 4) **c)** (6, 3) **d)** (4, 2)

Capítulo 4

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 108 e 109

1. **a)** $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $C\hat{O}E$, $D\hat{O}E$, $D\hat{O}F$ e $E\hat{O}F$
   b) $A\hat{O}D$, $A\hat{O}E$, $B\hat{O}E$ e $B\hat{O}F$
   c) $A\hat{O}F$
   d) $A\hat{O}C$, $B\hat{O}D$ e $C\hat{O}F$
2. med($A\hat{O}B$) = 20°
3. 1 cm
4. A torneira deve ser instalada em qualquer ponto da bissetriz do ângulo formado pelos muros do terreno.
5. alternativa **b**

Capítulo 5

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Página 121

1. quadrado *ABCD*; lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ vértices: *A*, *B*, *C*, *D*; diagonais: $\overline{AC}$, $\overline{BD}$
2. **a)** 7 **b)** 7
3. **a)** 20 **b)** 0
4. hexágono
5. 540°
6. octógono

Capítulo 6

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Página 130

1. 64 resultados possíveis.
2. 24 possibilidades diferentes.
3. $\frac{5}{11}$
4. **a)** {A, B, C, D, E, F} **b)** $\frac{1}{6}$
5. **a)** $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{2}{5}$
6. **a)** $\frac{5}{12}$ **b)** $\frac{7}{12}$
7. **a)**

Espaço amostral						
Ás, Ás	2, Ás	3, Ás	4, Ás	5, Ás	6, Ás	7s, Ás
Ás, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2	7, 2
Ás, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3	7, 3
Ás, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4	7, 4
Ás, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5	7, 5
Ás, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6	7, 6
Ás, 7	2, 7	3, 7	4, 7	5, 7	6, 7	7, 7

b) $\frac{1}{49}$ **c)** $\frac{7}{49}$

d) Exemplo de resposta: Júlia poderia informar o valor de uma das cartas.

Capítulo 7

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 164 e 165

1. 45°, 45°, 90°
2. III-A, I-B e II-C
3. $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (caso LAL); logo: $\hat{A} \cong \hat{C}$
4. $\triangle ABM \cong \triangle DCM$ (caso ALA); logo: $\overline{AM} \cong \overline{MD}$
5. $a = 30°$, $b = 60°$, $c = 120°$ e $d = 150°$
6. afirmações **a**, **c**, **e**
7. 144° e 36°
8. $x = 42°$, $y = 48°$
9. **a)** $x = 40°$, $y = 70°$ **b)** $x = 35°$, $y = 55°$
10. 17 cm

Capítulo 8

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Página 182

1. 120 cm²
2. **a)** 64 cm² **b)** 18 cm²
3. 2 000 cm²
4. $A = 84\pi$ cm²
5. $2{,}08\pi$ cm²
6. 0,5 L

Capítulo 9

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Página 194

1. alternativas **b**, **c**, **e**
2. **a)** $2x^2 - 3x + 7 = 0$ **d)** $-2x^2 + 4 = 0$
   b) $-3x^2 + x + 5 = 0$ **e)** $x^2 + 6x = 0$
   c) $3x^2 + 3x + 3 = 0$ **f)** $3x^2 = 0$
3. Exemplo de resposta: $x^2 - 144 = 0$, com $U = \mathbb{R}^*_+$
4. **a)** incompleta **c)** incompleta
   b) completa **d)** completa
5. **a)** não **c)** sim **e)** não
   b) não **d)** sim
6. 2 e 3
7. **b**, **c**
8. **a)** $S = \{-7, 7\}$ **c)** $S = \{-2, 2\}$
   b) $S = \{0\}$ **d)** $S = \{\ \}$ ou $S = \varnothing$
9. **a)** $x = -7$ ou $x = 7$ **b)** $x = -8$ ou $x = 8$
10. 12
11. 72 cm

Capítulo 10

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 207 e 208

1. **a)** não **b)** sim **c)** sim **d)** não
2. Exemplo de resposta: $a = 8 \cdot b$
3. 15 min
4. 2 h
5. **a)** 50 **c)** 87,5 km
   b) Exemplo de resposta: $d = 50 \cdot t$, em que t é um número real positivo.
6. **a)** 45 **c)** $B = 22{,}5$
   b) Exemplo de resposta: $A \cdot B = 45$
7. Exemplos de resposta: $P = \frac{Q}{3}$ ou $Q = 3 \cdot P$
8. Construção de gráfico.
9. R$ 3,00
10. **a)** Exemplo de resposta: $s \cdot r = 60$
    b) $s = 6$
    c) $r = 12$
11. **a)** inversamente proporcional
    b) diretamente proporcional
    c) e **d)** não proporcional

Capítulo 11

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 221 e 222

1. **a)** os 15 000 funcionários
   b) 4 500 funcionários
   c) 30%
2. alternativa **c**
3. alternativa **a**
4. **a)**, **f)** e **g)** qualitativa nominal
   b) e **e)** quantitativa contínua
   c) e **d)** quantitativa discreta
5. 60,6
6. **a)** R$ 1 670,00
   b) R$ 1 976,00
7. **a)** 2 **b)** 1,7 **c)** 2
8. Renata: 6,75; Cátia: 7,62; Marcos: 5,25; Mateus: 7,37
9. **a)** 70 **c)** 2 950 g
   b) 2 836 g **d)** 2 860 g

Capítulo 12

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Página 239

1. **a)** 2 kg
   b) 20 estudantes
   c) 44 ⊢ 46: 0,1; 46 ⊢ 48: 0,3; 48 ⊢ 50: 0,35; 50 ⊢ 52: 0,25
2. **a)** Sudeste; Norte **b)** Centro-Oeste
3. **a)** das 8 h às 12 h **c)** 504 alunos
   b) 108 alunos

Teste seus conhecimentos

1. alternativa **c**
2. alternativa **a**
3. alternativa **c**
4. alternativa **b**
5. alternativa **c**
6. alternativa **a**
7. alternativa **d**
8. alternativa **c**
9. alternativa **c**
10. alternativa **c**
11. alternativa **b**
12. alternativa **d**
13. alternativa **c**
14. alternativa **c**
15. alternativa **a**
16. alternativa **a**
17. alternativa **b**
18. alternativa **b**
19. alternativa **b**
20. alternativa **d**

Referências bibliográficas comentadas

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Este livro, organizado em quatro capítulos, permite que o leitor tenha contato com os primórdios da Matemática por meio de episódios históricos.

BERLONQUIN, Pierre. **100 jogos geométricos**. Lisboa: Gradiva, 2005.

Este livro apresenta 100 jogos geométricos ordenados criteriosamente pelo autor, do mais fácil para o mais difícil, para que, enquanto o leitor se diverte, adquira maior rapidez de raciocínio e uma notável flexibilidade intelectual.

BOLT, Brian. **Actividades matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1991.

Este livro contém atividades matemáticas destinadas a estimular o pensamento criativo e incentivar o leitor a desenvolver a compressão de números, conceitos espaciais e pensamento matemático em geral.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher; Edusp, 2010.

Este livro apresenta um estudo aprofundado da história da Matemática desde o Egito antigo até as tendências mais recentes. Mostra também a fascinante relação entre o desenvolvimento dos conhecimentos sobre números, formas e padrões e a evolução da humanidade.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC; SEB, 2018.

Documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

BROCARD, Joana; SERRAZINA, Lurdes; ROCHA, Isabel. **O sentido do número**: reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar, 2008.

Neste livro reúne-se um conjunto de textos produzidos no âmbito do projeto "Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares", cujo trabalho se centrou em torno do desenvolvimento do sentido do número para as crianças, concebeu materiais para aulas e refletiu sobre características do currículo que favorecem o sentido do número.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do ensino da Matemática**. São Paulo: Cortez, 2009.

Este livro subsidia o futuro professor no domínio dos conteúdos básicos e da metodologia da Matemática e sugere uma transformação no modo de perceber e compreender o papel dessa disciplina no currículo escolar.

CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. São Paulo: Scipione, 2001.

Este livro baseia-se na ideia de que o estudante constrói seu próprio conhecimento com base em suas ações e problematizações. Aborda as principais dúvidas tanto do estudante de Pedagogia quanto do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 2002.

Este livro propõe a discussão dos fatores que atuam negativamente no aprendizado de Matemática, classifica os vários tipos de problema que se apresentam e mostra as etapas envolvidas na sua resolução.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011.

Este livro busca introduzir a história da Matemática aos estudantes de graduação dos cursos superiores dessa disciplina. Assim sendo, além da narrativa histórica, há muitos expedientes pedagógicos visando assistir, motivar e envolver o estudante.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

Este livro mostra a riqueza pedagógica que existe na utilização correta de jogos, para ensinar Matemática, para desenvolver o pensamento criativo e até mesmo para transformar o erro em aprendizado.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

Este livro oferece, em linguagem acessível, uma visão completa e inovadora da epopeia do cálculo entre as civilizações. Um convite para uma viagem impressionante às origens da representação simbólica dos números.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1998.

Este livro traça uma resumida, mas completa, história da Matemática, acompanhando a evolução do raciocínio de nossos ancestrais desde a Pré-História, passando por civilizações como a dos egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, hebreus, maias, chineses, hindus e árabes.

247

IMENES, Luiz Márcio. **A numeração indo-arábica**. São Paulo: Scipione, 1990. (Vivendo a Matemática).

Este livro discorre sobre os sistemas de numeração, em uma proposta integrada com História, explorando a Matemática de uma maneira divertida, mas comprometida com o conteúdo.

KAMII, Constance. **Reinventando a Aritmética**: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1995.

Este livro faz uma análise crítica do ensino da Aritmética para as crianças dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Com toda sua sensibilidade e seu conhecimento da teoria piagetiana, a autora aborda temas como importância da interação social, autonomia como finalidade da educação, numerais, adição e subtração.

KARLSON, Paul. **A magia dos números**. Rio de Janeiro: Globo, 1961.

Este livro usa a história da Matemática como bússola em uma jornada desde a Aritmética até o cálculo diferencial e integral. O que destaca essa obra não é apenas a linguagem informal e muitas vezes mordaz do autor, mas principalmente o grau de detalhismo que ele concedeu aos inúmeros assuntos que compõem o livro.

LIMA, Elon lages. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

Este livro é composto de pequenos ensaios sobre Matemática elementar. Em uma coleção de capítulos independentes, aborda tópicos de Matemática que constam dos programas escolares dos diferentes níveis de ensino.

MARANHÃO, Maria Cristina S. **Matemática**. São Paulo: Cortez, 1994. (Magistério).

Este livro reflete sobre a problemática do ensino da Matemática com base na experiência da autora, bem como nos estudos e nas pesquisas na área. Dessa maneira, a autora sugere o desenvolvimento de alguns temas que considera indispensáveis para preparar um estudante para o Ensino Médio.

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Este livro aborda a resolução de problemas como um recurso para desafiar a curiosidade dos leitores. O autor destaca a importância de situações que apresentam indagações aos estudantes e contribuem para que desenvolvam o interesse pelo raciocínio independente.

ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática**. São Paulo: Ática, 2010.

Este livro é destinado a educadores interessados em educação matemática. Levando em consideração o interacionismo e a psicogenética, discute os principais tópicos da Matemática de Pré-escola e Ensino Fundamental, viabilizando sua aplicação em sala de aula.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Este livro contribui para a discussão sobre o lugar e o significado das competências e das habilidades no Ensino Fundamental, enfatizando as habilidades de ler, escrever e resolver problemas de Matemática.

TAHAN, Malba. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro: Record, 2012.

Este livro traz recreações e curiosidades da Matemática que transformam a aridez dos números e a exigência de raciocínio em brincadeira, ao mesmo tempo útil e prazerosa. O autor consegue fazer a união da ciência com o lúdico, transformando a leitura em um agradável passatempo.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2001.

O livro narra a história de Beremiz Samir, um viajante com o dom intuitivo da Matemática, manejando os números com a facilidade de um ilusionista. Problemas aparentemente sem solução tornam-se de uma transparente simplicidade quando expostos a ele.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Teoria e prática de Matemática**. São Paulo: FTD, 2009.

O livro constitui uma valiosa ferramenta para os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A obra trabalha o desenvolvimento das habilidades matemáticas básicas fundamentado em problemas ligados à experiência prática do estudante, em jogos e em situações que estimulam sua participação na construção de conceitos e o ajudam a compreender a relevância da Matemática como instrumento de transformação da realidade.

ZABALA, Antoni (org.). **Como trabalhar os conteúdos procedimentais em aula**. Trad. Ernani Rosa. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 1999.

Este livro, por meio de uma abordagem prática, mostra como trabalhar 42 conteúdos procedimentais que pertencem a diferentes áreas do Ensino Fundamental.

ZARO, Milton. **Matemática experimental**. São Paulo: Ática, 1996.

O objetivo deste livro é estimular a criatividade do professor no desenvolvimento de atividades com os estudantes, aplicando o método científico na Matemática por meio da técnica da redescoberta, exercitando a redação de textos e experimentos.

248

ISBN 978-85-16-13556-0

9 788516 135560