ÊNIO SILVEIRA

9º ano

MANUAL DO PROFESSOR

Desafios da Matemática com Ênio Silveira

Componente curricular: MATEMÁTICA

PNLD 2024 - Objeto 1
Código da coleção:
0021 P24 01 00 020 020

MODERNA

ÊNIO SILVEIRA
Engenheiro mecânico pela Universidade Federal do Ceará.
Engenheiro eletricista pela Universidade de Fortaleza.
Diretor de escola particular.
Autor de obras didáticas de Matemática.

Desafios da Matemática com Ênio Silveira

9º ano

MANUAL DO PROFESSOR

Componente curricular: MATEMÁTICA

1ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay, Mateus Coqueiro Daniel de Souza
Edição de texto: Carlos Eduardo Marques, Daniel Vitor Casartelli Santos, Mateus Coqueiro Daniel de Souza, Paulo César Rodrigues dos Santos
Assistência editorial: Cintia Alessandra Valle Burkert Machado, Kátia Takahashi, Selene Coletti, Thaís Marinho Ramalho de Souza Garcia
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Noctua Art, Vinícius Rossignol Felipe
Capa: Douglas Rodrigues José, Bruno Tonel, Daniela Cunha, Apis Design
Foto: *Tablet* e estetoscópio.
IAN HOOTON/Getty Images
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Natália Demuri Manoel
Editoração eletrônica: Teclas Editorial
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero
Revisão: Ana Maria C. Tavares, Cecília Oku, ReCriar Editorial
Coordenação de pesquisa iconográfica: Flávia Aline de Morais
Pesquisa iconográfica: Pâmela Nogueira
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silveira, Ênio
Desafios da matemática com Ênio Silveira : 9º ano: manual do professor. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-16-13560-7

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

22-114745 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

A imagem da capa mostra um *tablet* e um estetoscópio. Dados estatísticos e gráficos estão presentes no cotidiano de diferentes profissões. No caso dos médicos, para receitar medicamentos ou recomendar tratamentos, é preciso analisar dados e gráficos de exames realizados pelos pacientes.

Apresentação

Professor, esta Coleção tem como objetivo principal servir de apoio didático para suas aulas. No *Manual do Professor*, você encontra algumas reflexões sobre o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Observe que falamos "de ensino e de aprendizagem", separadamente, pois entendemos que são processos que se articulam, mas são distintos: processo de ensino mais processo de aprendizagem. Na escola, buscamos sempre que ambos andem juntos, complementem-se, e esse pressuposto guia a organização desta Coleção. Lembramos você, professor, que a escolha do livro didático deve ser feita sempre com base no conhecimento de sua realidade escolar. E, já que escolheu trabalhar com esta Coleção, queremos ajudá-lo a atingir seus objetivos didáticos, valorizando a autonomia pedagógica na organização e gestão de suas aulas.

Partimos do pressuposto que o professor é o grande mediador na relação entre os estudantes e a Matemática escolar: ele planeja, organiza, elabora as situações de aprendizagem e faz a gestão do trabalho, sempre buscando que seus estudantes adquiram conhecimentos para serem aplicados em situações presentes e futuras, tanto no âmbito escolar como na vida fora dos muros da escola.

Esta Coleção atende aos requisitos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), abrangendo o desenvolvimento das competências e habilidades tanto nos conteúdos quanto nas atividades e seções complementares. A Coleção também traz à tona aspectos relacionados à interdisciplinaridade, aos temas contemporâneos transversais (TCTs), à utilização da história da Matemática, ao uso significativo das tecnologias digitais no ensino desta disciplina, ao pensamento computacional, entre outros.

Organizamos este *Manual do Professor* em duas partes:

- Na primeira parte (*Orientações gerais*), há considerações em relação à BNCC e ao modo como as competências e habilidades previstas neste documento são desenvolvidas na Coleção. São apresentadas também reflexões acerca da interdisciplinaridade, dos temas contemporâneos transversais, do uso de tecnologias digitais, do pensamento computacional, de avaliações e das características dos estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental com orientações de como ajudá-los a desenvolver as capacidades de criticar, criar, propor, argumentar e inferir. Há também sugestões de avaliações formativas relacionadas aos capítulos do *Livro do Estudante*, uma sugestão de avaliação de preparação para exames de larga escala, resoluções e comentários de todas as atividades propostas no *Livro do Estudante* e sugestões de leitura, *sites* e vídeos.
- Na segunda parte (*Orientações*), disposta em formato de U, há a reprodução comentada das páginas do *Livro do Estudante*. Nela, também são apresentadas as competências e habilidades da BNCC desenvolvidas em cada tópico ou seção, os objetivos traçados com a justificativa da pertinência de cada um e, também, sugestões de como diagnosticar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes e de como conduzir as aulas iniciais com base nesses diagnósticos. Além disso, estão presentes nestas *Orientações* sugestões de atividades interdisciplinares, de combate ao *bullying* e que auxiliam na promoção da saúde mental dos estudantes.

De modo geral, as orientações e sugestões deste *Manual do Professor* buscam auxiliar o desenvolvimento de conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam de maneira significativa para uma formação mais integral, humana e crítica do estudante e do professor. Queremos que os estudantes pensem matematicamente, resolvam problemas diversos e concluam essa etapa da Educação Básica preparados para continuar seus estudos.

Sumário

Orientações gerais

A BNCC E O ENSINO DE MATEMÁTICA

A BNCC é um documento do Ministério da Educação (MEC) que define as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da Educação Básica. Tais aprendizagens são organizadas com base em competências e habilidades que direcionam a formação integral de todos os estudantes em suas variadas dimensões (intelectual, afetiva, ética, física, sociopolítica etc.).

Prevista nos principais documentos que regulam a educação do país, como a Constituição (1988), a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN 9.394/1996) e o Plano Nacional de Educação (2014), sua aprovação e a implementação visam garantir uma educação de qualidade e mais igualitária a todos os estudantes brasileiros.

Na BNCC, a Matemática é considerada uma área do conhecimento essencial para que estudantes resolvam problemas, investiguem, estabeleçam conjecturas, troquem ideias e desenvolvam projetos em que possam aplicar os conceitos e procedimentos estudados de maneira crítica e significativa. Nesse sentido, é importante que as competências gerais e as competências específicas da área sejam mobilizadas por meio de atividades frequentes e intencionais. Colocar estudantes diante de situações que os convidem a usar a Matemática para desenvolver suas capacidades intelectuais, bem como as habilidades de observação, exploração, análise e reflexão, favorece a formação integral em suas variadas dimensões. Dessa forma, a BNCC é trabalhada de forma efetiva.

Na BNCC, o ensino e a aprendizagem da área são organizados em cinco Unidades temáticas que se correlacionam: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Observe o esquema a seguir.

UNIDADES TEMÁTICAS

NÚMEROS
Finalidade: desenvolver o pensamento numérico e aplicar conceitos da Matemática Financeira.
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: resolver problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas. Calcular porcentagens. Reconhecer, comparar e ordenar números reais.

ÁLGEBRA
Finalidade: desenvolver o pensamento algébrico (generalizar ideias matemáticas).
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: compreender os diferentes significados das letras em uma expressão. Generalizar propriedade. Investigar a regularidade de uma sequência numérica. Estabelecer a variação entre duas grandezas. Relacionar variável e função; incógnita e equação. Resolver equações e inequações de maneira algébrica e gráfica. Traduzir uma situação dada em diferentes linguagens.

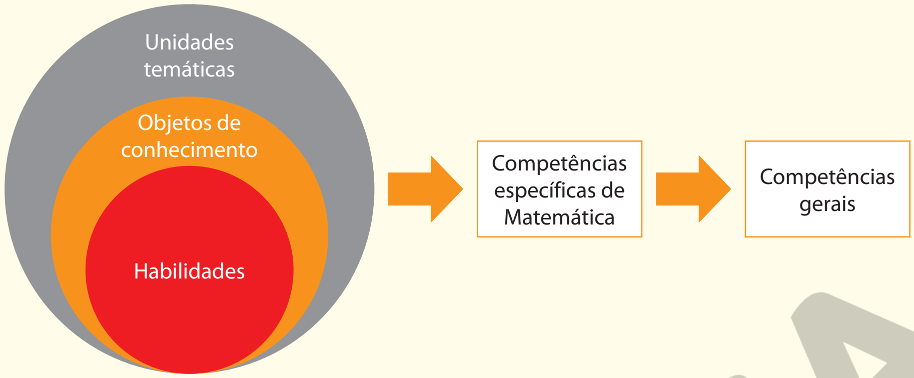
GEOMETRIA
Finalidade: desenvolver o pensamento geométrico (investigar propriedades, estabelecer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes).
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: estudar as figuras geométricas e suas propriedades. Desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. Reconhecer e representar figuras simétricas.

GRANDEZAS E MEDIDAS
Finalidade: estudar as relações métricas e articular os pensamentos numérico, geométrico e algébrico.
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: resolver problemas envolvendo diferentes grandezas (comprimento, tempo, massa, área, volume, capacidade etc.) e suas respetivas unidades de medida. Explorar as unidades de medida de armazenamento de computadores.

PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
Finalidade: estudar a incerteza e o tratamento de dados.
Expectativas para os Anos Finais do Ensino Fundamental: planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas, incluindo medidas de tendência central e tabelas e/ou gráficos de diferentes tipos.

Para desenvolver o que se espera em cada unidade temática, a BNCC prevê um conjunto de objetos de conhecimento e habilidades relacionadas. É o trabalho com estes objetos e habilidades que vai assegurar o desenvolvimento das competências específicas de Matemática que, por sua vez, promoverão o desenvolvimento das competências gerais, conforme mostra o esquema a seguir.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Relação entre unidades temáticas, objetos de conhecimento, habilidades e competências.

A seguir, vamos nos debruçar sobre as competências gerais, as competências específicas de Matemática e as habilidades do 9º ano.

Competências gerais

A BNCC elenca um conjunto de dez competências gerais que devem ser desenvolvidas de forma integrada aos componentes curriculares, ao longo de toda a Educação Básica. Define-se competência como um atributo que permite mobilizar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, permitindo o pleno exercício da cidadania. Esse direcionamento está ligado aos princípios éticos, estéticos e políticos das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) e da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB).

Reproduzimos a seguir o texto das competências gerais, segundo a BNCC.

COMPETÊNCIAS GERAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA	
Competência geral 1	Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
Competência geral 2	Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
Competência geral 3	Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
Competência geral 4	Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
Competência geral 5	Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
Competência geral 6	Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
Competência geral 7	Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
Competência geral 8	Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo- se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
Competência geral 9	Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
Competência geral 10	Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 9-10. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

Podemos sintetizar as 10 competências gerais da BNCC, por meio do seguinte esquema:

1. Conhecimento
Valorizar e utilizar os conhecimentos sobre o mundo físico, social, cultural e digital.

2. Pensamento científico, crítico e criativo
Exercitar a curiosidade intelectual e utilizar as ciências com criticidade e criatividade.

3. Repertório cultural
Valorizar as diversas manifestações artísticas e culturais.

4. Comunicação
Utilizar diferentes linguagens.

5. Cultura digital
Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de forma crítica, significativa e ética.

6. Trabalho e projeto de vida
Valorizar e apropriar-se de conhecimentos e experiências.

7. Argumentação
Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis.

8. Autoconhecimento e autocuidado
Conhecer-se, compreender-se na diversidade humana e apreciar-se.

9. Empatia e cooperação
Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação.

10. Responsabilidade e cidadania
Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação.

CAIO MARTINELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Esquema adaptado do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep)

Competências específicas de Matemática

A BNCC estabelece também as competências específicas para cada componente curricular. Em articulação com as competências gerais da Educação Básica descritas na BNCC, a Matemática deve garantir aos estudantes o desenvolvimento das seguintes competências específicas.

COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL	
Competência específica 1	Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
Competência específica 2	Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
Competência específica 3	Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
Competência específica 4	Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
Competência específica 5	Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
Competência específica 6	Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
Competência específica 7	Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
Competência específica 8	Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 267. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

Habilidades

As habilidades presentes na BNCC dizem respeito às aprendizagens essenciais que devem ser garantidas aos estudantes nos diferentes contextos escolares. O desenvolvimento delas visa promover a igualdade educacional, levando em consideração as particularidades do meio no qual cada escola está inserida.

O quadro a seguir relaciona cada unidade temática com seus objetos de conhecimento e as habilidades essenciais de Matemática a serem desenvolvidas no 9º ano, segundo a BNCC.

Unidades temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Números	Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica	**(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade).
		(EF09MA02) Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
	Potências com expoentes negativos e fracionários	**(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
	Números reais: notação científica e problemas	**(EF09MA04)** Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.
	Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	**(EF09MA05)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.
Álgebra	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	**(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes	**(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.
Geometria	Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
	Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	**(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica.
	Semelhança de triângulos	**(EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Unidades temáticas	Objetos de conhecimento	Habilidades
Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
		(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
	Polígonos regulares	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também softwares.
	Distância entre pontos no plano cartesiano	**(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
	Vistas ortogonais de figuras espaciais	**(EF09MA17)** Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.
Grandezas e medidas	Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas Unidades de medida utilizadas na informática	**(EF09MA18)** Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.
	Volume de prismas e cilindros	**(EF09MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
Probabilidade e estatística	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	**(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
	Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação	**(EF09MA21)** Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
	Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos	**(EF09MA22)** Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
	Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório	**(EF09MA23)** Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: Educação é a Base. Brasília, DF, 2018. p. 316 - 319. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

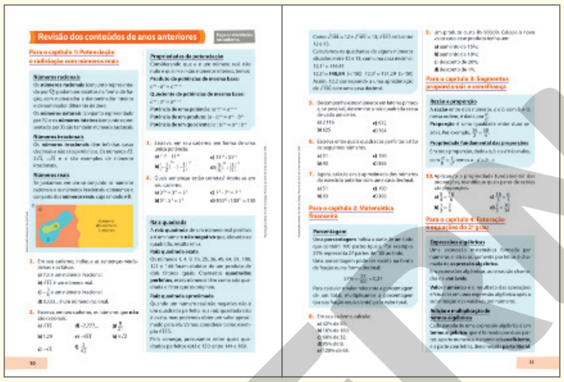
A BNCC E A COLEÇÃO

Esta Coleção é organizada em quatro volumes. Cada volume está dividido em quatro Unidades compostas de dois ou mais capítulos. Os volumes e os capítulos foram estruturados de modo a favorecer o desenvolvimento das competências gerais e específicas bem como das habilidades propostas para a Matemática, indicadas na BNCC.

As competências gerais e específicas de Matemática na Coleção

Ao longo da Coleção, o desenvolvimento das competências gerais e específicas de Matemática é proporcionado de diferentes maneiras, por meio de textos teóricos, atividades, seções especiais, boxes etc. A seguir, oferecemos informações detalhadas sobre as seções e os boxes da Coleção e, também, sobre como as competências gerais e específicas podem ter o seu desenvolvimento favorecido na proposta de cada um.

Seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*

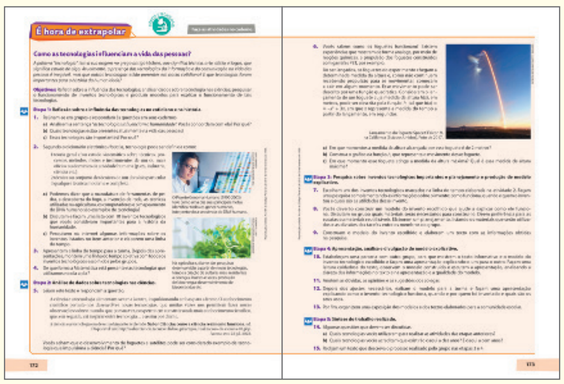


Presente no início de cada volume, esta seção traz resumos seguidos de atividades dos principais conceitos e procedimentos estudados em anos anteriores. A seção é estruturada para cada um dos capítulos do *Livro do Estudante* a fim de que o professor explore seu conteúdo antes de iniciar o trabalho com cada capítulo. No entanto, caso o professor julgue oportuno, o conteúdo da seção também pode ser todo trabalhado no início do ano letivo. É importante enfatizar que o professor pode e deve se sentir à vontade para adaptar o conteúdo da seção à realidade e às necessidades da turma e da escola.

Competências gerais: a seção traz atividades que exploram diferentes linguagens (competência geral **4**). Algumas delas incentivam a argumentação e o diálogo e oferecem aos estudantes a oportunidade de exercitar a empatia (competências gerais **7** e **9**).

Competências específicas: algumas atividades propostas desenvolvem o raciocínio lógico e o espírito de investigação (competência específica **2**). Outras permitem aos estudantes relacionar conceitos de diferentes unidades temáticas (competência específica **3**), utilizar processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas (competência específica **5**) e empregar distintos registros e linguagens (competência específica **6**). Além disso, são propostas atividades que estimulam a interação dos estudantes com seus pares e que os colocam diante de situações em que devem investigar, organizar, representar e comunicar informações (competências específicas **4** e **8**).

Abertura de Unidade e seção *É hora de extrapolar*



A abertura de Unidade apresenta a lista de capítulos que a integram, além de uma cena acompanhada de algumas questões que têm por objetivo instigar a curiosidade dos estudantes para os assuntos que serão estudados na Unidade. A cena e as questões estão relacionadas com o conteúdo da seção *É hora de extrapolar*, que fecha a Unidade. As questões não precisam ser respondidas em um primeiro momento, pois elas serão retomadas ao final da Unidade para que os estudantes reflitam sobre o que aprenderam.

Competências gerais: as aberturas de Unidade estimulam a curiosidade, a reflexão e o diálogo entre os estudantes (competências gerais **2** e **9**). Alguns dos contextos trazidos possibilitam a valorização da diversidade de saberes e vivências (competência geral **6**), a argumentação com base em fatos, dados e informações confiáveis (competência geral **7**) e levam os estudantes a refletir e cuidar da sua saúde física e emocional (competência geral **8**).

Competências específicas: as situações e questões trazidas nas aberturas evidenciam como a Matemática e as outras áreas do conhecimento se integram (competência específica **3**) e oferecem aos estudantes a oportunidade de fazer observações de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais (competência específica **4**). As questões também fazem com que os estudantes enfrentem situações-problema em múltiplos contextos (competências específicas **2** e **6**) e utilizem ferramentas matemáticas para resolvê-las (competência específica **5**), bem como promovem a interação deles com os colegas (competência específica **8**).

Ao final de cada Unidade, é proposta a seção *É hora de extrapolar*. Nela, os estudantes são convidados a realizar um trabalho colaborativo, como um pequeno projeto explorando a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um produto final (embalagens, cartazes, obras de arte e revistas), que será compartilhado com a turma ou com a comunidade escolar. Com a finalidade de organizar o trabalho, a seção é dividida em etapas, as quais promovem:

- entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado;
- pesquisa individual ou coletiva;
- elaboração, em grupo, do produto proposto;
- apresentação e exposição do produto;
- reflexão sobre a atuação do grupo e síntese do trabalho.

É nesta seção, ainda, que são retomadas as questões feitas na abertura de Unidade correspondente.

As etapas de pesquisa e elaboração do produto podem ser feitas extraclasse. Será necessário que o professor oriente-os com relação ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho.

É recomendável trabalhar a seção depois de estudar os capítulos, mas, se o professor preferir trabalhar as etapas da seção à medida que os capítulos forem estudados, deverá atentar para os conhecimentos prévios necessários.

Competências gerais: os trabalhos propostos na seção possibilitam aos estudantes investigar, refletir, analisar criticamente, imaginar e criar (competência geral **2**). Em algumas seções eles terão a oportunidade de explorar obras de arte e pesquisar sobre diferentes manifestações culturais (competência geral **3**). Na seção, os estudantes também utilizam distintas linguagens para elaborar o produto final ou expô-lo (competência geral **4**); podem recorrer à internet para pesquisar ou disseminar informações (competência geral **5**); argumentam com base em fatos, dados e informações confiáveis (competência geral **7**) e exercitam a empatia e o diálogo (competência geral **9**).

Competências específicas: a seção desperta o espírito investigativo, a capacidade de argumentar e traz à tona a relação entre os diferentes campos da Matemática e também da Matemática com outras áreas do conhecimento, (competências específicas **2** e **3**). Para concretizar alguns trabalhos, os estudantes deverão utilizar processos e ferramentas matemáticas e enfrentar situações-problema em múltiplos contextos (competências específicas **5** e **6**). Algumas das propostas abordam assuntos de urgência social e dão aos estudantes a oportunidade de discuti-las (competências específicas **7** e **8**).

Seção *Trocando ideias*

A seção *Trocando ideias* "abre" cada um dos capítulos e traz à tona temas do cotidiano que visam despertar o interesse dos estudantes para o que será estudado no capítulo e também busca, por meio de questões, identificar os conhecimentos prévios deles. A ideia é que as questões sejam discutidas coletivamente.

Competências gerais: os contextos e as questões propostos na seção despertam a curiosidade dos estudantes (competência geral **2**), permitem a eles valorizar diferentes manifestações artísticas e culturais (competência geral **3**) e, em alguns casos, mobilizam diferentes linguagens (competência geral **4**). Há também propostas que proporcionam aos estudantes argumentarem com base em dados e informações confiáveis (competência geral **7**) e refletem sobre situações relacionadas à saúde física e emocional (competência geral **8**). Além disso, incentiva o diálogo (competência geral **9**).

Competências específicas: a seção tem como objetivos promover a interação entre os estudantes (competência específica **8**), despertar a capacidade de argumentar (competência específica **2**) e trazer à tona a relação entre os campos da Matemática e também entre a Matemática e outras áreas (competências específicas **3**). Os estudantes também analisam aspectos quantitativos e qualitativos do cotidiano (competência específica **4**) e utilizam ferramentas matemáticas para responder a alguma questão proposta (competência específica **5**). A mobilização de diferentes registros e linguagens é exigência de algumas propostas que exploram, por exemplo, a leitura e a interpretação de gráficos e fluxogramas (competência específica **6**).

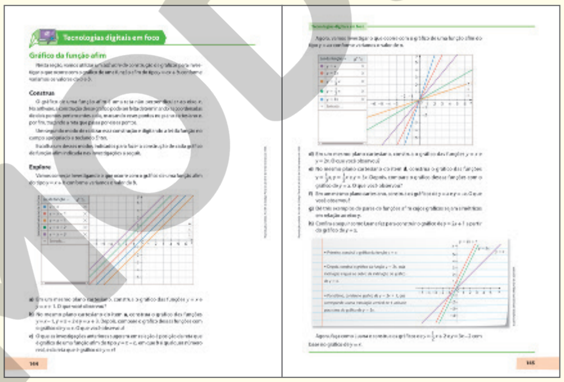
Seção *Lendo e aprendendo*

A seção *Lendo e aprendendo* aparece no decorrer das Unidades e traz textos de jornais, revistas ou da internet que abordam temas atuais e de urgência social. O objetivo da seção é desenvolver a compreensão leitora por meio do desenvolvimento de vocabulário, fluência em leitura oral, compreensão de textos e produção de escrita. Além disso, a seção leva os estudantes a refletir sobre os temas tratados e discuti-los.

Competências gerais: os estudantes lidam com diferentes manifestações artísticas (competência geral **3**), valorizam a diversidade de saberes e vivências culturais (competência geral **6**), argumentam com base em fatos, dados e informações confiáveis (competência geral **5**) e exercitam a empatia, o diálogo e a cooperação (competência geral **9**).

Competências específicas: a seção contribui para que os estudantes compreendam as relações entre conceitos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento (competência específica **3**) e para que discutam diferentes questões com seus pares (competência específica **8**).

Seção *Tecnologias digitais em foco*

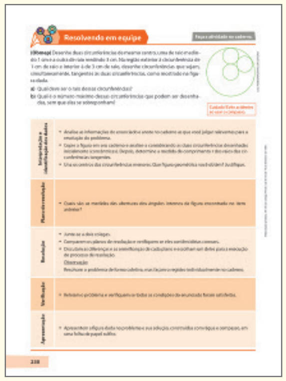


A seção *Tecnologias digitais em foco* aparece no decorrer de alguns capítulos e explora conteúdos de Matemática por meio de tecnologias digitais, como *softwares* de Geometria dinâmica, planilhas eletrônicas, calculadoras etc. A seção é, em geral, dividida em duas etapas denominadas *Construa* e *Explore*. Em *Construa*, são apresentados passos para que os estudantes construam, por exemplo, figuras geométricas. Em *Explore*, eles utilizam as ferramentas do *software*, para investigar e testar hipóteses a respeito de alguma característica ou propriedade da figura que construíram.

Competências gerais: o uso de tecnologias digitais exercita a curiosidade intelectual dos estudantes e os coloca diante de situações em que devem investigar, refletir e analisar (competências gerais **2** e **5**). A seção também permite que os estudantes exercitem a empatia e o diálogo (competência geral **9**).

Competências específicas: a seção ajuda os estudantes a desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de argumentar (competência específica **2**). Ainda por meio desta seção, os estudantes utilizam as tecnologias digitais para resolver problemas e validar resultados (competência específica **5**) e lidam com diferentes registros e linguagens (competência específica **6**). A interação dos estudantes com seus pares ocorre principalmente nas tarefas propostas na etapa *Explore* (competência específica **8**).

Seção *Resolvendo em equipe*

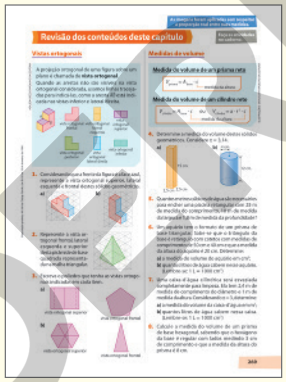


Alguns capítulos apresentam esta seção que destaca as etapas que encaminham a resolução de problemas, as quais devem ser analisadas e discutidas com os estudantes. O trabalho em equipe é muito importante sob diversos pontos de vista: permite ao estudante aprender com os colegas, explicitar conhecimentos e dúvidas, facilitando a ação do professor, e validar o raciocínio construído por meio do diálogo com os colegas. Além disso, saber trabalhar em equipe é uma competência exigida nas mais diversas profissões.

Competências gerais: a seção contribui para que os estudantes resolvam problemas (competência geral **2**), utilizem diferentes linguagens (competência geral **4**), argumentem com base em dados e informações confiáveis (competência geral **7**) e exercitem a empatia (competência geral **9**). É preciso, ainda, que diante da pluralidade de ideias, os estudantes sejam flexíveis (competência geral **10**).

Competências específicas: os problemas a serem resolvidos desenvolvem o raciocínio lógico (competência específica **2**), alguns envolvem conceitos e procedimentos de diferentes campos da Matemática (competência específica **3**) e outros precisam de processo e ferramentas matemáticas para serem solucionados (competência específica **5**). Os contextos dos problemas são diversos e envolvem diferentes registros (competência específica **6**). Além disso, o encaminhamento proposto incentiva os estudantes a compartilhar suas estratégias e conclusões (competência específica **2**).

Seção *Revisão dos conteúdos deste capítulo*

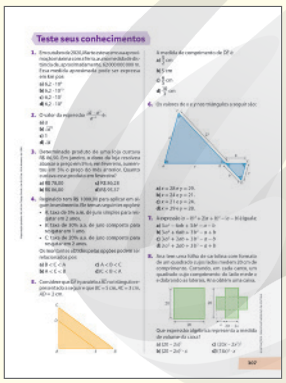


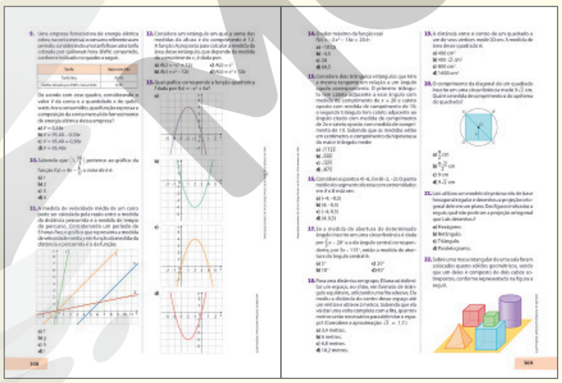
Presente no final de cada capítulo, esta seção traz resumos seguidos de atividades dos principais conceitos e procedimentos estudados no capítulo. As revisões e atividades podem ser exploradas aos poucos, conforme se avança no estudo do capítulo, ou podem ser trabalhadas ao final com o objetivo de verificar o que os estudantes aprenderam e as principais dificuldades que ainda enfrentam.

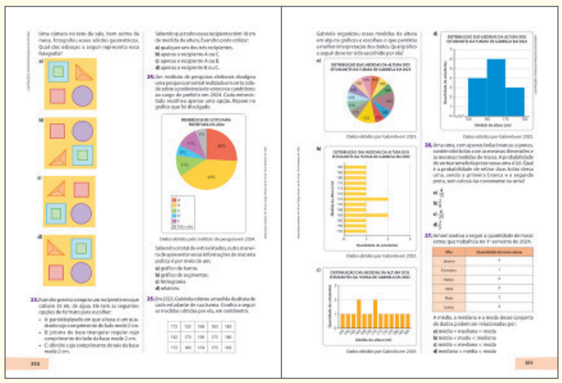
Competências gerais: a seção traz atividades que exploram diferentes linguagens (competência geral **4**). Algumas delas incentivam a argumentação e o diálogo e oferecem aos estudantes a oportunidade de exercitar a empatia (competências gerais **7** e **9**).

Competências específicas: na seção, são propostas atividades que desenvolvem o raciocínio lógico e o espírito de investigação (competência específica **2**), outras que demandam a utilização de processos e ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas (competência específica **5**) e ainda outras que fazem com que os estudantes mobilizem diferentes registros e linguagens (competência específica **6**).

Seção *Teste seus conhecimentos*





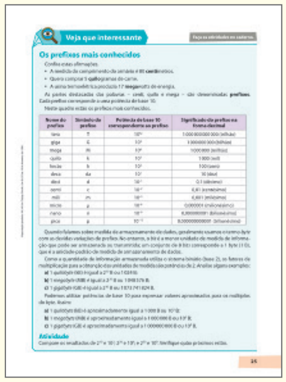


Presente no final de cada volume, esta seção propõe questões de múltipla escolha com o objetivo de avaliar os conhecimentos adquiridos pelos estudantes no decorrer do ano letivo e prepará-los para a realização de exames de larga escala.

Competências gerais: algumas questões da seção possibilitam aos estudantes refletir e analisar (competência geral **2**) e outras utilizam diferentes registros (competência geral **4**). São propostas ainda questões em que os estudantes devem avaliar dados e informações confiáveis (competência geral **7**).

Competências específicas: questões que estimulam o raciocínio lógico (competência específica **2**) e que envolvem conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (competência específica **3**) estão presentes nesta seção. Além disso, são propostos problemas cuja solução se dá via utilização de processos e ferramentas matemáticas e também problemas envolvendo diferentes registros (competências específicas **5** e **6**).

Boxe *Veja que interessante*

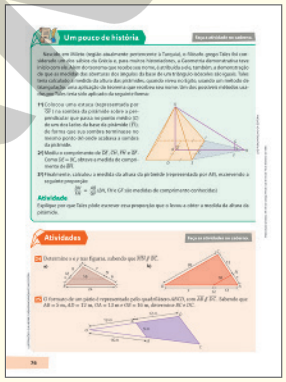


Boxe que complementa e enriquece o conteúdo estudado. Ao final, é proposta uma atividade para o estudante.

Competências gerais: o boxe traz temas diversos relacionados ao mundo físico, social, cultural e digital (competência geral **1**), exercita a curiosidade dos estudantes por meio de atividades sobre esses temas (competência geral **2**) e, em algumas propostas, os estudantes têm a oportunidade de apreciar manifestações artísticas e culturais (competência geral **3**). O boxe possibilita, ainda, em alguns momentos a valorização da diversidade de saberes (competência geral **6**) e coloca os estudantes diante de situações em que devem argumentar com base em informações confiáveis (competência geral **7**). Algumas atividades solicitam aos estudantes que dialoguem com os colegas, e isso permite que desenvolvam a empatia e a capacidade de agirem com flexibilidade (competências gerais **9** e **10**).

Competências específicas: alguns textos desse boxe possibilitam aos estudantes reconhecer como a Matemática contribui para solucionar problemas (competências específicas **1** e **2**). Outros trazem à tona a relação da Matemática com as demais áreas do conhecimento (competência específica **3**), e a atividade promove a interação entre os estudantes (competência específica **8**).

Boxe *Um pouco de história*



Boxe que traz textos relacionados à história da Matemática para contextualizar alguns assuntos. Ao final, é proposta uma atividade para o estudante.

Competências gerais: é inerente à proposta desse boxe a valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos (competência geral **1**). A curiosidade, a investigação e a resolução de problemas são incentivados por meio das atividades propostas (competência geral **2**). Os estudantes têm ainda a oportunidade de argumentar e dialogar com base em fatos e informações confiáveis a respeito da história da Matemática (competências gerais **7** e **10**).

Competências específicas: os textos e as atividades propostos no boxe têm por objetivo levar os estudantes a reconhecer a Matemática como uma ciência viva que é resultado das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos (competência específica **1**). A capacidade de argumentar (competência específica **2**), de relacionar os campos da Matemática (competência específica **3**), de lidar com diferentes registros e linguagens (competência específica **6**) e de escutar os colegas com atenção e empatia (competência específica **8**) são capacidades que podem ser desenvolvidas por meio das propostas desse boxe.

O quadro a seguir mostra as competências gerais e específicas de Matemática desenvolvidas em cada capítulo do volume 9 desta Coleção.

QUADRO DAS COMPETÊNCIAS GERAIS E ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA DO VOLUME 9		
Capítulos	**Competências gerais**	**Competências específicas**
1 – Potenciação e radiciação com números reais	2, 4, 5, 7 e 9.	2, 3, 4, 7 e 8.
2 – Matemática financeira	9.	8.
3 – Segmentos proporcionais e semelhança	1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8.
4 – Fatoração e equações do 2º grau	2, 4, 9 e 10.	1, 2, 3, 5, 6 e 8.
5 – Função afim	2, 5, 9 e 10.	1, 2, 3, 5 e 8.
6 – Função quadrática	2, 7 e 9.	1, 2, 3, 5, 6 e 8.
7 – Relações métricas no triângulo retângulo	9.	2, 3 e 8.
8 – Circunferência, arcos e ângulos	2, 3, 5, 6 e 9.	2, 5 e 8.
9 – Polígonos regulares	2, 4, 7, 9 e 10.	2, 3, 4, 5, 7 e 8.
10 – Vistas ortogonais e volume	1, 3, 6 e 9.	8.
11 – Construção de gráficos estatísticos	2, 4, 5, 6 e 9.	2, 3, 6, 5 e 8.
12 – Probabilidade e estatística	2, 5, 7, 9 e 10.	2, 4, 5, 6, 7 e 8.

As habilidades da BNCC na Coleção

A Matemática trabalhada nos Anos Finais do Ensino Fundamental não tem um fim em si mesma; além de aprofundar e sistematizar as aprendizagens anteriores dos estudantes, abre as portas para novas aprendizagens, considerando as diversas áreas do conhecimento, contribuindo para o desenvolvimento intelectual do estudante.

Nesta Coleção, a seleção dos conteúdos foi feita nessa perspectiva, e as abordagens propostas pressupõem o desenvolvimento de atitudes relacionadas à formação cidadã do estudante. Escolhemos abordar conceitos e procedimentos (seleção e abordagem) tanto para aprofundar e retomar os conhecimentos prévios dos estudantes quanto para iniciar a aquisição de novos conhecimentos a serem consolidados em anos posteriores de escolaridade.

O professor pode acrescentar atividades, questionamentos, de modo a atender as especificidades de seus estudantes: o livro didático não pode ser uma amarra para o professor, mas, sim, um facilitador de seu trabalho.

O quadro a seguir apresenta uma visão geral de como as habilidades do 9º ano foram desenvolvidas em cada Unidade, capítulo a capítulo.

HABILIDADES DO 9º ANO		
Unidades	**Capítulos**	**Habilidades**
1	1 – Potenciação e radiciação com números reais	EF09MA01, EF09MA02, EF09MA03, EF09MA04 e EF09MA18.
	2 – Matemática financeira	EF09MA05.
	3 – Segmentos proporcionais e semelhança	EF09MA10, EF09MA12 e EF09MA14.
2	4 – Fatoração e equações do 2º grau	EF09MA09.
	5 – Função afim	EF09MA06, EF09MA07 e EF09MA08.
	6 – Função quadrática	EF09MA06.
3	7 – Relações métricas no triângulo retângulo	EF09MA13, EF09MA14 e EF09MA16.
	8 – Circunferência, arcos e ângulos	EF09MA11.
	9 – Polígonos regulares	EF09MA15.
4	10 – Vistas ortogonais e volume	EF09MA17 e EF09MA19.
	11 – Construção de gráficos estatísticos	EF09MA21 e EF09MA22.
	12 – Probabilidade e estatística	EF09MA20 e EF09MA23.

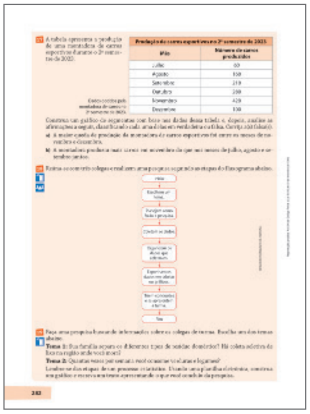
Exemplos concretos de trabalho com competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC na Coleção

Uma das finalidades do trabalho com as habilidades é assegurar o desenvolvimento das competências específicas de Matemática que, por sua vez, podem promover o desenvolvimento de competências gerais.

O quadro a seguir mostra, por meio de exemplos concretos da Coleção, a diferença de se trabalhar com competências gerais, específicas e habilidades.

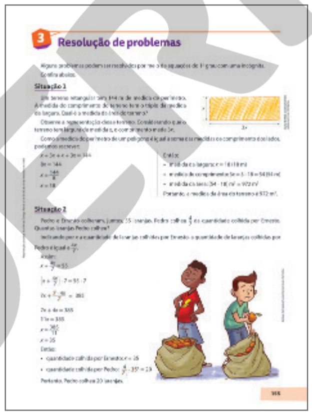
Página 282 do capítulo 12 do volume 6

Nas **atividades 18** e **19** da página 282, os estudantes vão realizar uma pesquisa estatística, o que permite o desenvolvimento da habilidade **EF06MA33**. Ambas as propostas envolvem o uso de tecnologias digitais para a organização dos dados coletados o que favorece o desenvolvimento da competência específica **5**. Além disso, as pesquisas podem estar relacionadas à questões de urgência social e para serem realizadas é necessário que os estudantes interajam com seus pares, o que pressupõe o desenvolvimento das competências específicas **7** e **8**. Por meio destas competências específicas desenvolvem-se as competências gerais **7**, **9** e **10**, que versam sobre argumentação, exercício da empatia e agir com flexibilidade e resiliência.



Página 155 do capítulo 6 do volume 7

No tópico *Resolução de problemas* são apresentados exemplos de problemas que podem ser resolvidos por meio de equações do 1º grau com uma incógnita. Também são propostos problemas para os estudantes resolverem e isso favorece o desenvolvimento da habilidade **EF07MA18**. Esses problemas permitem aos estudantes mobilizar conceitos e procedimentos de diferentes campos da Matemática, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **3**. A competência específica **5** também tem o seu desenvolvimento favorecido porque os problemas propostos são modelados e resolvidos por meio de equações. Já a variedade de problemas propostos é o que contribui para o desenvolvimento da competência específica **6**. Essas competências específicas, por sua vez, contribuem para que as competências gerais **2** e **4** tenham o seu desenvolvimento favorecido, uma vez que estão relacionadas à resolução de problemas e ao uso de diferentes linguagens, respectivamente.

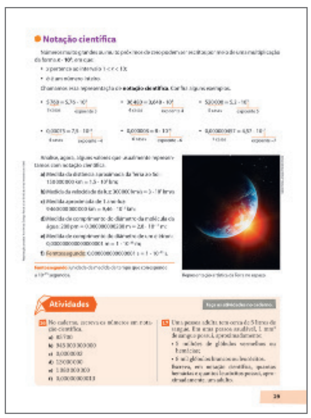


Página 77 do capítulo 4 do volume 8

O estudo das composições de transformações geométricas desenvolve a habilidade **EF08MA18**. Por meio desse estudo, os estudantes têm a oportunidade de verificar como Matemática e Arte se relacionam, contribuindo para que a competência específica **3** tenha o seu desenvolvimento favorecido. É por meio dessa competência que se desenvolvem as competências gerais **1**, **2**, **3**, **4** e **6**.

Página 29 do capítulo 1 do volume 9

Ao trabalhar a representação dos números em notação científica, desenvolve-se a habilidade **EF09MA04**. O trabalho com essa habilidade possibilita aos estudantes reconhecer como esse conceito é empregado para expressar números muito grandes ou muito pequenos em diversas áreas como Astronomia e Química, o que contribui para o desenvolvimento da competência específica **3** de Matemática, que, por sua vez, contribui para o desenvolvimento das competências gerais **4** e **7**.



OS ESTUDANTES NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

O estudante que se encontra nos Anos Finais do Ensino Fundamental está inserido na transição entre a infância e a adolescência, período marcado por intensas e profundas mudanças nos aspectos físico, psicológico, social e emocional. Ele é um sujeito "em desenvolvimento, com singularidades e formações identitárias e culturais próprias, que demandam práticas escolares diferenciadas, capazes de contemplar suas necessidades e diferentes modos de inserção social" (BRASIL, 2018, p. 60).

Por isso, é preciso compreendê-lo, e para tanto é necessário aprender a ouvi-lo por meio da comunicação afetiva, em um movimento de aproximação, trocando experiências, vivências e histórias, em um ressignificar do processo de ensino e de aprendizagem.

É importante também estar atento às interações que eles estabelecem com os grupos sociais dos quais fazem parte, o que permite entender seus modos de agir e suas necessidades.

Assim, o ambiente escolar precisa refletir o clima de diálogo, do saber ouvir, da empatia e da boa convivência, combatendo toda forma de violência, como a prática do *bullying*, comportamento intencional e agressivo na forma de insultos, xingamentos, apelidos, ameaças, difamação, isolamento e exclusão social. Enfim, fazer do ambiente escolar um espaço inclusivo em todos os sentidos, pensando na formação do estudante como um sujeito ativo, protagonista do seu processo de aprendizagem e agente de transformação da sociedade.

A fim de garantir que isso aconteça diante da heterogeneidade das turmas, o professor precisa estar atento a tais necessidades, revendo sua prática e refletindo sobre as estratégias utilizadas.

Uma das formas de se trabalhar com grupos grandes de forma mais eficaz é pensar nas tarefas matemáticas propostas. A professora Jo Boaler, autora do livro *Mentalidades Matemáticas*, propõe o uso das **tarefas abertas**, pois permite a participação de toda a turma. Segundo ela, toda tarefa pode ser transformada numa tarefa aberta desde que se pergunte aos estudantes "sobre suas diferentes maneiras de ver e resolver questões matemáticas e encorajando a discussão dos diversos modos de ver os problemas" (2018, p. 83). Outro ponto é oferecer **distintas opções de tarefa** com diferentes níveis e áreas da matemática envolvidos, as quais são escolhidas pelo estudante, e não pelo professor. É uma mudança de ponto de vista, o que possibilitará ao estudante escolher suas próprias rotas de aprendizagem, "encontrando conteúdo individualizado, acompanhado por oportunidades para o trabalho em grupo e colaboração" (2018, p. 104).

Esta mesma autora também sugere o uso das **estratégias equitativas** com o objetivo de tornar a Matemática mais inclusiva. Como forma de melhorar o desempenho coletivo, ela propõe que se ofereçam conteúdos matemáticos de alto nível a todos os estudantes, e não somente àqueles que sempre tiram as melhores notas. Isso está imbricado à outra ideia que precisa ser mudada: a de que somente alguns podem ter êxito na Matemática. Por isso, oportunizar a todos o pensar profundamente a Matemática. Isso implica, por sua vez, trazer experiências práticas, um currículo baseado em projetos e com aplicabilidade na vida real, além de trabalhar colaborativamente, fato que precisa ser ensinado. Trabalhar em grupo é fundamental para um bom desempenho matemático. E por último, é preciso rever a ideia do dever de casa. Para a autora, é necessário mudar a natureza das tarefas, fazendo "perguntas que os incentivem a pensar na Matemática da aula e focar as ideias fundamentais" que são importantes para a aprendizagem (2018, p. 94).

Isso tudo dialoga com outra proposta de trabalho, conectada com as atuais necessidades das diferentes turmas de estudante: as **metodologias ativas**, que, segundo José Moran (2019, p. 7), são "alternativas pedagógicas que colocam o foco do processo de ensino e de aprendizagem nos aprendizes, envolvendo-os na aquisição do conhecimento por descoberta, por investigação ou resolução de problemas numa visão de escola como comunidade de aprendizagem (onde há participação de todos os agentes educativos, professores, gestores, familiares e comunidade de entorno e digital)".

São exemplos de metodologias ativas a **aprendizagem baseada em problemas**, **aprendizagem baseada em projetos** e a **sala de aula invertida**.

- **Aprendizagem baseada em problemas:** é uma metodologia organizada por temas em torno de problemas e não de disciplinas. Nela os estudantes combinam teoria e prática para solucionar problemas.
- **Aprendizagem baseada em projetos:** é uma metodologia em que os estudantes se envolvem para resolver um problema ou desenvolver um projeto que tenha relação com a sua vida fora da sala de aula. Nesta metodologia, eles lidam com questões interdisciplinares e trabalham em equipe.
- **Sala de aula invertida:** o estudante se apropria do conteúdo previamente, e a aula torna-se o lugar de aprendizagem ativa, onde há perguntas, discussões e atividades práticas. O professor pode explorar as dificuldades dos estudantes em vez de expor o conteúdo da disciplina.

Em todas elas, os recursos tecnológicos podem ou não estar presentes. Quando presentes, o seu uso pode auxiliar o desenvolvimento da autonomia, empatia, protagonismo, responsabilidade, participação e cooperação.

Nesse contexto, é importante também levar em consideração elementos da cultura juvenil (*funk*, *hip-hop*, grafite, tatuagem, esportes, entre outros) e os comportamentos construídos por eles nos diferentes contextos sociais e culturais dos quais participam. Ao fazer isso, o processo de construção de conhecimento é enriquecido. Uma das formas de se trabalhar as culturas juvenis com os estudantes é por meio da aprendizagem baseada em projetos que, nesta Coleção, são sugeridos principalmente na seção *É hora de extrapolar*. Outras possibilidades são as discussões em sala de aula e os fóruns promovidos pela escola. Essa inserção da cultura juvenil ressignifica o espaço escolar, intensifica o processo de reflexão e crítica e promove a aprendizagem.

Assim, é possível vislumbrar possibilidades de aprendizagem para toda a turma, aguçando o olhar inclusivo do professor, que, ao acolher as dificuldades, busca meios para atendê-las, sem deixar de lado os diferentes níveis de conhecimento que habitam a sala de aula.

Capacidade de criticar, criar e propor

A criatividade e o pensamento crítico vêm ganhando cada vez mais espaço nas pautas de discussões sobre o que precisamos desenvolver nos estudantes. A criatividade tem relação com o potencial do ser humano para enfrentar o novo e seguir avançando na ciência, na tecnologia, na comunicação, na arte e em outras áreas do conhecimento. Pode ser compreendida também como a elaboração de ideias, processos e/ou produtos que apresentem algum grau de ineditismo, mesmo que seja para a própria pessoa. O pensamento crítico, por sua vez, é a competência de a pessoa se posicionar de modo racional e analítico diante de diferentes situações cotidianas.

A Matemática é uma área do conhecimento com potencial para desenvolver as capacidades de criticar, criar e propor, na medida em que coloca os estudantes diante de situações em que devem resolver problemas, generalizar propriedades, analisar dados, construir figuras etc. Para resolver um problema, por exemplo, o estudante precisa, primeiro, entender o enunciado e analisá-lo de maneira crítica. Depois, precisa imaginar como vai solucioná-lo. Em seguida, deve colocar em prática as ideias e, por fim, testar e refletir sobre o que fez.

O infográfico a seguir traz algumas orientações de como ajudar os estudantes a produzir análises críticas, criativas e propositivas:

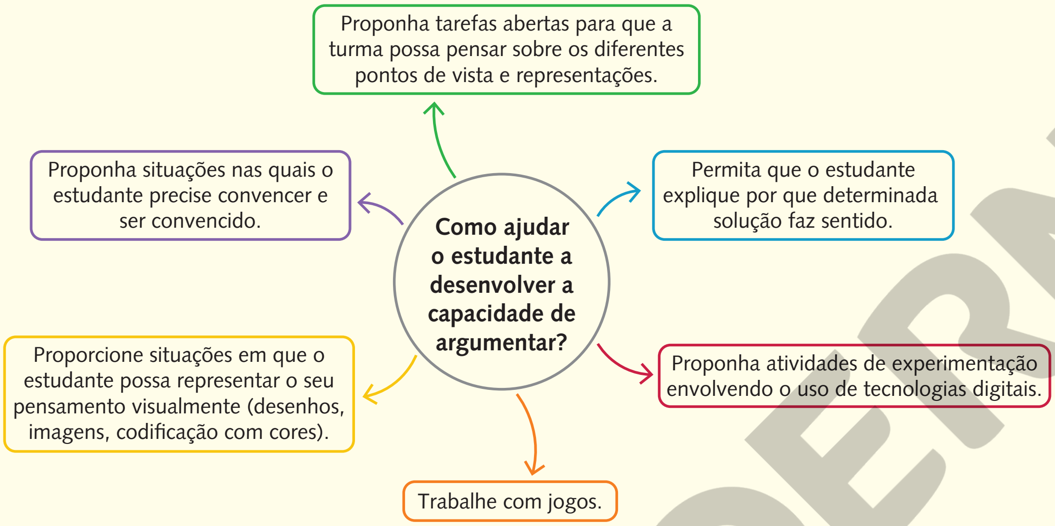
ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Capacidade de argumentar

A aprendizagem em Matemática muitas vezes é um processo dialógico, ou seja, pressupõe o desenvolvimento da capacidade de argumentar. Na BNCC, essa capacidade está prevista nas competências específicas **2** e **4** de Matemática e na competência geral **7** e tem relação com a capacidade do indivíduo de explicar sua forma de pensar verbalmente ou por escrito.

Em Matemática, os estudantes são incentivados a argumentar quando são colocados diante de situações em que devem resolver problemas, demonstrar propriedades, realizar experimentações, validar ou generalizar resultados, analisar erros, ler e interpretar dados representados em tabelas e/ou gráficos, construir figuras utilizando instrumentos de desenhos etc.

O esquema a seguir traz algumas sugestões de como auxiliar os estudantes a desenvolver a capacidade de argumentar.

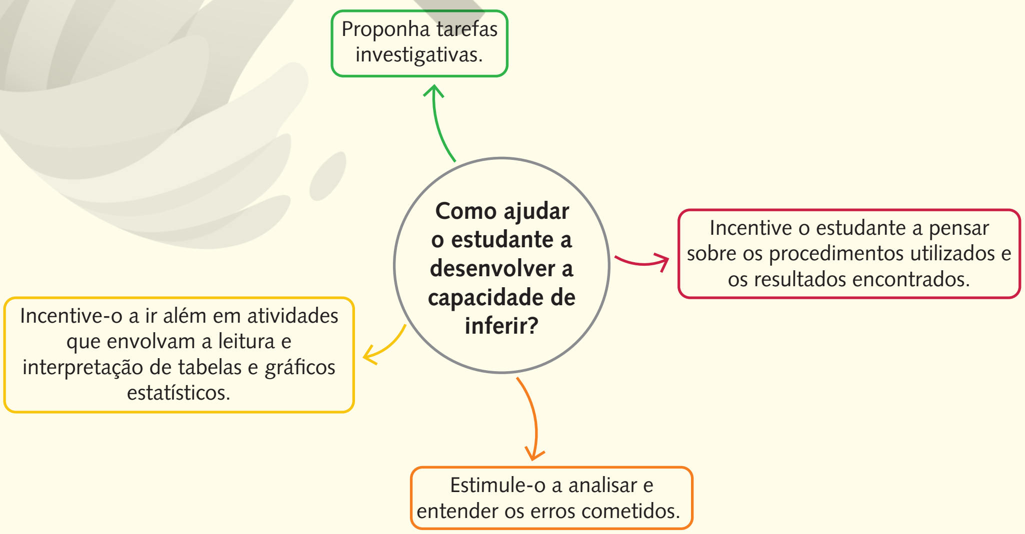


Capacidade de inferir

Inferir é tirar conclusões com base em uma ou mais proposições utilizando o raciocínio lógico. Essa é uma habilidade essencial que pode propiciar aprendizagens significativas não só na Matemática, como em outras áreas do conhecimento.

Em Matemática, os estudantes podem inferir informações embasadas em dados estatísticos representados em tabelas e/ou gráficos. Também podem analisar sequências numéricas e inferir a regra de formação delas ou, ainda, inferir quando realizam tarefas investigativas.

O esquema a seguir traz algumas sugestões de como contribuir para que os estudantes desenvolvam a capacidade de inferir.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

A INCLUSÃO DOS ESTUDANTES COM DEFICIÊNCIA

A Lei Brasileira de Inclusão de Pessoa com Deficiência instituiu o Estatuto da Pessoa com Deficiência (Lei 13.146/2015), garantindo, entre outros aspectos, o acesso à educação, e assegurando a inclusão escolar em todos os níveis e modalidades de ensino de acordo com os interesses e as necessidades de aprendizagem de cada um.

Com base nas premissas da lei, uma escola inclusiva é aquela que acolhe e inclui a todos sem discriminação, respeitando as diferenças e dificuldades, acreditando que todos podem aprender e que o processo de aprendizagem de cada pessoa é único, daí ser necessário adequar as estratégias e as condições para que todos possam aprender e desenvolver seu potencial.

As diferentes deficiências (visual, auditiva, intelectual, física, múltiplas) devem ser trabalhadas na sua especificidade para que possa ser garantida a aprendizagem de cada um. As altas habilidades ou superdotação também precisam de um olhar pontual.

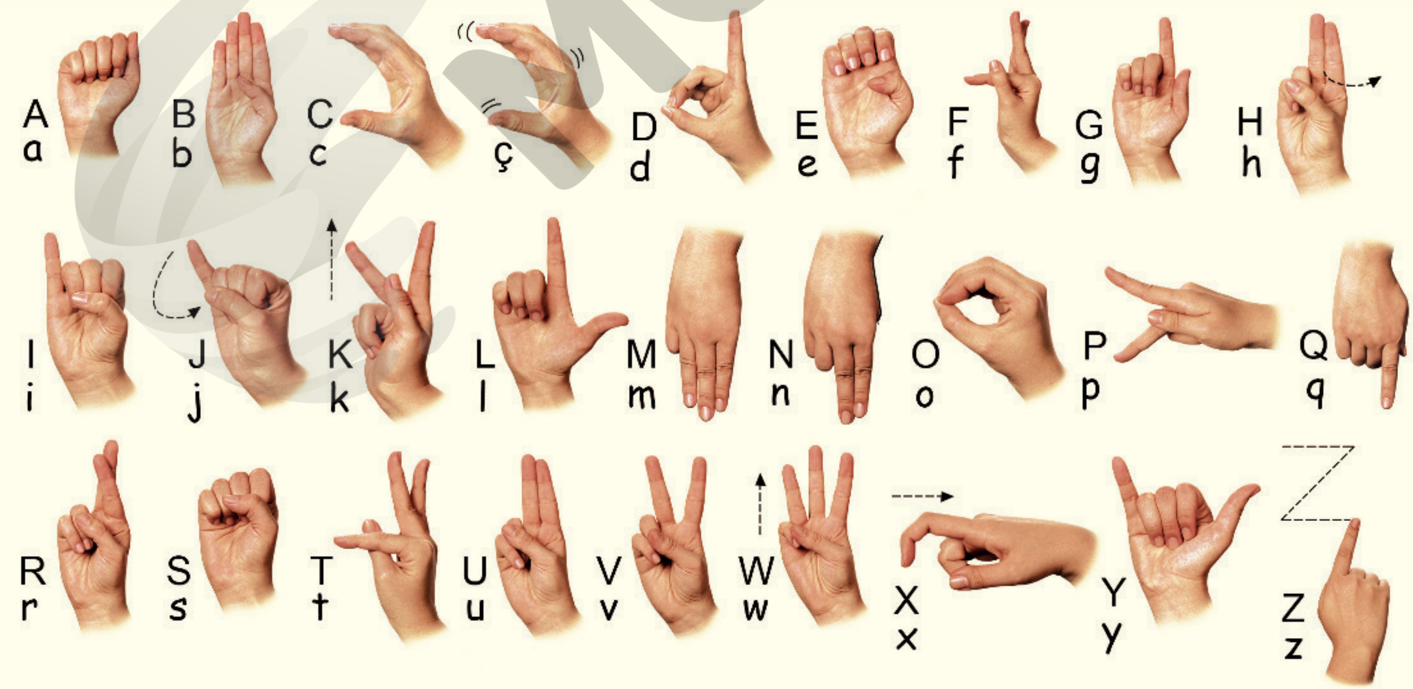
Nesse sentido, são grandes os desafios enfrentados pela escola como um todo e pela equipe escolar em particular. Em muitos casos, faz-se necessário a existência de equipe multidisciplinar para orientar as possibilidades de trabalho de acordo com uma necessidade específica. Além, é claro, do investimento na formação continuada do professor e de todos que vão trabalhar com determinado tipo de deficiência ou dificuldade a fim de criar uma rede de apoio, aprimorando os conhecimentos, flexibilizando os materiais e as intervenções com estes e os demais alunos.

Outro ponto a ser destacado refere-se à existência de um projeto pedagógico inclusivo, ou seja, que contenha ações que viabilizem a aquisição de materiais necessários ao atendimento de todas as diferenças bem como a flexibilização do currículo para acolher a realidade de cada um.

A contribuição do professor de Matemática

Cada professor dentro da sua especificidade e com a ajuda da equipe encontrará os melhores meios para adequar as propostas a fim de promover o desenvolvimento da aprendizagem de todos. Contudo, disponibilizar momentos de trocas entre os membros da equipe escolar permitirá aumentar as estratégias e os materiais que possam contribuir para as dificuldades referentes à inclusão.

O professor precisa estar atento ao tipo da deficiência para planejar seu trabalho e fazer as adequações necessárias. Em se tratando de deficiência auditiva, é possível o uso da Língua Brasileira de Sinais (Libras), instituída pela Lei 10.436/2002, a qual é uma combinação do movimento das mãos e de pontos no corpo e no espaço em que os sinais são feitos.



PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

Os algarismos também são representados por sinais. Como são menos, é mais fácil memorizá-los, e você poderá utilizá-los para as explicações:


0


1


2


3


4


5


6

RICARDO SIWEC/ARQUIVO DA EDITORA


7


8


9

O ideal seria que todo estudante com deficiência auditiva tivesse um intérprete de Libras que pudesse traduzir as aulas. Outra possibilidade para incluir estes estudantes, é a utilização de vídeos relativos aos conteúdos que contenham intérprete de Libras.

Quando se trata de deficiência visual, pode-se utilizar o Braille: sistema de sinalização ou de comunicação tátil. Este sistema possibilita escrever as atividades e complementar as explicações. Para tanto, é necessário o uso da máquina de escrever Braille. Vale lembrar que outros meios podem ser utilizados pelas pessoas com deficiência visual, como caracteres ampliados, linguagem escrita e oral, dispositivos multimídia, sistemas auditivos e os meios de voz digitalizados.

No que se refere às deficiências intelectuais, é preciso adequar as propostas tendo em vista a idade e as necessidades de cada estudante. O uso de materiais manipulativos é uma estratégia que contribui bastante nesses casos. Neles estão inclusos tampinhas, ábaco, colar de contas, material dourado para a contagem e a construção da ideia de número, canudos, linhas, palitos, massinha para a Geometria Espacial; geoplano, entre outros.

Jogos de tabuleiro, quebra-cabeças e jogos de memória são também ferramentas que possibilitam o trabalho de diferentes conteúdos matemáticos e podem ser adequados aos diferentes graus de dificuldades da turma. As propostas precisam conter desafios possíveis de serem executados, aumentando, posteriormente, as regras, os números de participantes e, até mesmo, o grau de complexidade.

Também, há muitos *softwares* e programas que podem ser utilizados e que tornam ainda mais significativo o processo de ensino e de aprendizagem quando se trata da inclusão.

Além disso, o uso das metodologias ativas pode ser bastante inclusivo, uma vez que poderá fortalecer o protagonismo dos estudantes por meio de "desafios, atividades e jogos colaborativos; uso de tecnologias; realização de projetos; aprendizado através de problemas e situações reais (informação contextualizada); e a sala de aula invertida" (PAVÃO, A. C. O.; PAVÃO, S. M. O., 2021, p. 30). Cabe a cada professor adequar as propostas de acordo com a realidade de sua turma.

A inclusão é um direito. É importante acolher os estudantes com deficiência e dar a eles todas as condições necessárias para que se sintam motivados a desenvolver o seu potencial.

O PROFESSOR E SEU LOCAL DE FALA

Uma das missões do professor é criar ambientes que acolham os estudantes e forneçam uma boa experiência de aprendizado. Nesse contexto, a interação professor/estudantes é fundamental, pois possibilita compreender como vivem, suas necessidades, seus anseios, seu projeto de vida e o que pode motivá-los para ter uma aprendizagem significativa. Por meio dessa interação, é possível explorar problemas reais e buscar as informações de maneira coletiva, reconhecendo que os próprios estudantes podem ser a fonte de conhecimento. É importante encorajar a troca e a construção entre eles e se envolver nas discussões e nos trabalhos.

Esta relação com os estudantes também é uma forma de criar, valorizar e manter uma cultura de paz dentro das salas de aula e, consequentemente, na comunidade escolar como um todo. De acordo com as orientações da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), para promover a cultura de paz nas escolas é preciso construir, no dia a dia, um ambiente pacífico e conciliador. Nesse âmbito, o professor pode desempenhar papel fundamental criando um ambiente de confiança, colocando-se à disposição para ouvir os estudantes e fornecendo condições para que tenham uma conduta respeitosa entre si na sala de aula e além dos muros da escola.

Trabalhar de forma colaborativa com outros professores da escola e também com os demais profissionais da comunidade escolar como secretários, inspetores, merendeiras etc. (caso estes tenham interesse) permite criar uma comunidade de aprendizagem que pode ser propícia para a concepção e execução de projetos que respondam às demandas do desenvolvimento humano integral e podem trazer retorno para a própria comunidade ao redor da escola.

INTERDISCIPLINARIDADE

Partindo do pressuposto que o conhecimento não é compartimentado, é necessário investir numa visão interdisciplinar da sua concepção a fim de garantir sua construção de uma forma global. A interdisciplinaridade, tão discutida desde o século passado, é quando dois ou mais componentes curriculares se relacionam para aprofundar o conhecimento, integrando os saberes e superando essa visão fragmentada.

Podemos dizer que é uma forma de encontrar conexões entre as áreas do conhecimento para o estudo de um tema de interesse, objetivando responder aos questionamentos por ele gerados. Esse processo dá significação e significado à aprendizagem, permitindo ao estudante estabelecer também ligações com conceitos já estudados e com o seu cotidiano. O que reforça a ideia de que interdisciplinaridade e aprendizagem significativa caminham imbricadas entre si.

Quando um estudante se defronta com um problema, o conhecimento adquirido previamente acerca da situação apresentada não se limita à abordagem unicamente disciplinar, mas ultrapassa-a. Maingain e Dufour (2002) observam que o conhecimento é global, pautado em multidimensão, que não necessariamente se restringem aos componentes curriculares; entretanto, um campo disciplinar oferece as sistematizações necessárias. A combinação das multidimensões e das sistematizações constrói representações de uma situação particular, sendo, portanto, compreendida como uma perspectiva interdisciplinar. Em outras palavras, pensar a interdisciplinaridade na Educação Básica significa estabelecer relação entre as diferentes áreas do conhecimento para além da mera justaposição, mas aquém de uma fusão e, consequentemente, da desintegração do saber disciplinar.

Assim, nesta Coleção, são favorecidas situações de aprendizagem que, para além dos limites de cada componente curricular, incentivam a participação social, a cooperação e a tomada de decisão.

Tudo isso corrobora com a visão interdisciplinar e estabelece um diálogo com a BNCC e as competências gerais de aprendizagem, uma vez que permite, também, compreender a realidade, investigar, levantar hipóteses, defender ideias, respeitar a si e ao outro, contextualizando a aprendizagem com as necessidades e os interesses do estudante e favorecendo a tomada de decisões pautadas na ética.

Dessa maneira, o professor, que é pesquisador de sua prática, buscará os melhores caminhos para planejar boas estratégias e exercitar a interdisciplinaridade.

Um deles é o uso das **metodologias ativas**, como a aprendizagem baseada em projetos. A seção *É hora de extrapolar*, por exemplo, oferece oportunidades para que sejam desenvolvidos projetos que envolvam temáticas com potencial de mobilizar conhecimentos de diferentes áreas.

Vale ressaltar que, utilizando a ótica de escuta e observação, também é possível elaborar sequências de atividades envolvendo temas de interesse dos estudantes, sem constituir um projeto, mas com o foco interdisciplinar.

Atitudes interdisciplinares

Para que a interdisciplinaridade seja colocada em prática, é necessário que a escola invista na **formação continuada** de todos os segmentos, de forma a promover o estudo das necessidades prementes da turma e das novas estratégias para serem colocadas em prática. Aprofundar o conhecimento do professor nas metodologias ativas, por exemplo, permite a prática interdisciplinar.

Criar momentos de interações e trocas entre as equipes gestoras e os professores abre espaço para a discussão das diferentes ideias e da própria prática, por meio de experiências exitosas que permitirão ressignificá-la. Além disso, investir nas reflexões sobre a **gestão do tempo** em sala de aula é uma forma de buscar organizar as atividades.

Planejar as sequências do que será trabalhado seja em conjunto com outros professores, seja consigo mesmo é fundamental, bem como garantir momentos para replanejar o que não está dando certo ou que precisa de ajustes.

Outro ponto é trabalhar a **pesquisa**, aspecto que requer bastante atenção, uma vez que este é um procedimento que precisa ser ensinado e retomado constantemente. Aprender a pesquisar ajuda a investigar as hipóteses e encontrar as soluções.

O uso da **gamificação** é também uma forma de promover a interdisciplinaridade. A gamificação consiste em utilizar elementos de jogos e técnicas de *design* de jogos em contextos diferentes. Em atividades ou propostas gamificadas, espera-se que os estudantes se engajem na resolução de problemas ou na superação de desafios, que aceitem as regras do jogo, que concordem em jogar com pessoas diferentes e que aceitem *feedback* corretivo para alcançar o resultado desejado. Em resumo, a gamificação não é transformar qualquer atividade em um *game*, mas, sim, aprender a partir dos *games*, ou seja, aproveitar elementos dos *games* que podem melhorar uma experiência de aprendizagem sem ignorar o mundo real.

O trabalho interdisciplinar só é efetivo se for desenvolvido por uma equipe comprometida. Além disso, os professores, mediadores do trabalho interdisciplinar, devem se preocupar mais com o processo do que com o produto. Para auxiliar nesse processo, esta Coleção sugere possibilidades de trabalhos interdisciplinares ao longo das *Orientações*, mas é importante ressaltar que compete a cada escola e a cada equipe de profissionais definir o projeto que será desenvolvido de acordo com a sua realidade. Nesse sentido, cabe a reflexão e a discussão coletiva para que se realize um trabalho interdisciplinar consistente e coerente com as propostas da escola e que seja enriquecedor para o estudante.

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS (TCTs)

Em 1996, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) traziam os temas transversais, os quais contemplavam temáticas relacionadas à vida cotidiana e à vida das pessoas. Não eram novas disciplinas curriculares, mas sim áreas do conhecimento que perpassavam os campos disciplinares. Em outras palavras, buscavam inserir questões sociais como objeto de aprendizagem.

Com a BNCC, tais conceitos foram ampliados, e os temas contemporâneos transversais foram introduzidos, objetivando explicitar a ligação entre os diferentes componentes curriculares e as situações vivenciadas pelo estudante no cotidiano. Essas situações podem ser relacionadas aos problemas do mundo atual que afligem os estudantes, afetando a vida humana em escala local, regional e global.

Os TCTs estão distribuídos em seis macroáreas temáticas: *Cidadania e Civismo*, *Ciência e Tecnologia*, *Economia*, *Meio Ambiente*, *Multiculturalismo* e *Saúde*, englobando 15 temas contemporâneos.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. p. 13 . Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

Para que o trabalho aconteça em sala de aula, é imprescindível refletir sobre o que estamos ensinando e o que os estudantes precisam aprender no que se refere a estas temáticas, mapeando quais TCTs poderão ser trabalhados atendendo a tais necessidades. Analisar como esses temas podem perpassar a área de conhecimento a partir do conteúdo a ser trabalhado é outro aspecto importante. Por exemplo, ao trabalhar porcentagem em Matemática é possível discutir o consumo e o consumismo (o que realmente necessitamos obter e o que compramos desnecessariamente), bem como a distribuição da renda e o trabalho.

Para isto **a leitura e a pesquisa** são fundamentais juntamente com as trocas estabelecidas a partir **do trabalho em grupo**, a socialização das ideias e a sistematização de discussões.

Os TCTs na Coleção

Os TCTs são abordados em diferentes momentos da Coleção: seções, boxes e atividades diversas. Nesse trabalho, os estudantes são incentivados a refletir, defender suas opiniões e a pesquisar sobre diferentes assuntos. O trabalho muitas vezes dialoga com as competências específicas e gerais da BNCC.

Na Coleção, utilizam-se ícones para identificar a possibilidade de trabalho com os TCTs.

Ícones que indicam o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais

FORMAÇÃO CIDADÃ · PLURALIDADE CULTURAL · MEIO AMBIENTE

SAÚDE · EDUCAÇÃO FINANCEIRA · CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Cada um destes ícones se relaciona com uma das macroáreas temáticas conforme mostra o quadro a seguir.

RELAÇÃO ENTRE AS MACROÁREAS TEMÁTICAS E OS ÍCONES DA COLEÇÃO

Macroáreas temáticas	Meio ambiente	Economia	Saúde	Cidadania e civismo	Multiculturalismo	Ciência e tecnologia
Ícones da Coleção	MEIO AMBIENTE	EDUCAÇÃO FINANCEIRA	SAÚDE	FORMAÇÃO CIDADÃ	PLURALIDADE CULTURAL	CIÊNCIA E TECNOLOGIA

O quadro a seguir apresenta um panorama geral de como o trabalho com os temas contemporâneos transversais é distribuído ao longo dos capítulos do volume 9.

O TRABALHO COM OS TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS NO VOLUME 9

MEIO AMBIENTE	EDUCAÇÃO FINANCEIRA	SAÚDE	FORMAÇÃO CIDADÃ	PLURALIDADE CULTURAL	CIÊNCIA E TECNOLOGIA
Capítulo 3.	Capítulos 1, 2 e 3.	Capítulos 1, 3, 4, 5 e 7.	Capítulos 1, 3, 5, 7, 11 e 12.	Capítulos 10, 11 e 12.	Capítulos 1, 4, 8 e 10.

Além dos momentos sinalizados no *Livro do Estudante*, outros são sugeridos nas *Orientações* presentes neste *Manual do Professor*, podendo enriquecer ainda mais as atividades propostas.

A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A abordagem de episódios da história da Matemática permite aos estudantes a percepção de que a Matemática não é uma ciência pronta e acabada. Ela se desenvolveu ao longo do tempo e continua se desenvolvendo. Textos breves que trazem informações sobre fatos e pessoas ligadas ao seu desenvolvimento permitem ao professor promover discussões e sugerir pesquisas aos estudantes, com o objetivo de promover a compreensão do desenvolvimento histórico de diferentes conceitos e, consequentemente, ampliar os horizontes da aprendizagem matemática.

No estudo de conteúdos da Geometria, por exemplo, o trabalho com pesquisas que permitam conhecer elementos sobre sua história, os locais onde a Geometria se desenvolveu, as características sociais e geográficas desses locais pode contribuir para a compreensão do contexto no qual o objeto matemático em estudo se desenvolveu.

A aprendizagem matemática tem, assim, como ferramenta didática disponível a história da Matemática, junto à resolução de problemas e à modelagem. Nesta Coleção, o boxe *Um pouco de história* busca trazer informações que podem servir de ponto de partida para a complementação e o aprofundamento dos conteúdos abordados.

AS TECNOLOGIAS DIGITAIS E O ENSINO DE MATEMÁTICA

Atualmente, tanto a computação como as tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) estão presentes na sociedade, moldando a comunicação, o meio de transporte, as relações interpessoais e influenciando a vida das pessoas. A ciência e a tecnologia evoluem rapidamente, e essa constante transformação reflete diretamente no funcionamento da sociedade e, consequentemente, no mundo do trabalho e da educação.

A prontidão para a atuação profissional compreende o conhecimento de diversas tecnologias e linguagens, e a escola é um dos ambientes mais propícios para a construção de tal conhecimento. Não cabe ao Ensino Fundamental o preparo de mão de obra especializada. No entanto, em uma época em que as tecnologias digitais estão mais acessíveis, haja vista a quantidade de telefones celulares no Brasil, a escola não pode ficar alheia a essa realidade, deixando de instrumentalizar os estudantes para o uso dessas tecnologias, especialmente para que conheçam os bons e os maus usos delas e que saibam se prevenir.

No que diz respeito à utilização das tecnologias digitais no ensino de Matemática, deseja-se que este uso possibilite a expansão das oportunidades de aquisição de conhecimento – por exemplo, a calculadora e os *softwares* para a aprendizagem da Matemática devem favorecer, entre outras coisas, a busca por novas estratégias para a resolução de problemas ou o desenvolvimento do raciocínio lógico. Sobre esse assunto, discorre Aguiar (2008), p. 64.

> A utilização e a exploração de aplicativos e/ou *softwares* computacionais em Matemática podem desafiar o estudante a pensar sobre o que está sendo feito e, ao mesmo tempo, levá-lo a articular os significados e as conjecturas sobre os meios utilizados e os resultados obtidos, conduzindo-o a uma mudança de paradigma com relação ao estudo, na qual as propriedades matemáticas, as técnicas, as ideias e as heurísticas passem a ser objeto de estudo.

É importante que o uso do computador na escola não se limite apenas à função do uso dos editores de texto ou de *slides*; os estudantes devem aprender a utilizá-lo como uma ampliação das faculdades cognitivas e capacidades humanas. A sociedade contemporânea demanda um grande conhecimento tecnológico, não apenas em relação ao uso das tecnologias de maneira eficaz, mas também referente à elaboração de soluções para problemas cotidianos simples ou complexos de qualquer natureza.

Nesta Coleção, o uso de tecnologias digitais é incentivado por meio da seção *Tecnologias digitais em foco* e também por meio de atividades identificadas pelo ícone *Calculadora e* softwares:

Calculadora e
softwares

A intenção é colocar os estudantes diante de situações em que devem resolver problemas, experimentar, formular hipóteses e argumentar. As propostas podem envolver estratégias como o uso de calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de Geometria dinâmica como o GeoGebra. Nesse contexto, espera-se criar um ambiente favorável para que eles se sintam motivados a aprender cada vez mais e de maneira significativa os conteúdos da disciplina.

PENSAMENTO COMPUTACIONAL

A expressão "pensamento computacional" surgiu em 2006, no artigo *Computational Thinking*, da pesquisadora Jeannette Wing. Nele, Wing relaciona o termo à resolução de problemas de maneira sistemática, decompondo um problema complexo em subproblemas e automatizando a solução, de forma que pudesse ser executada por uma máquina.

O pensamento computacional se apoia em quatro pilares. São eles:

- **Decomposição:** consiste em quebrar um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulte na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema ou uma situação complexa podem ser resolvidos aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- **Reconhecimento de padrões:** ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- **Abstração:** no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e os dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários. Permite-se, assim, uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.
- **Algoritmo:** a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante salientar que, dependendo do problema, nem todos os pilares serão necessários e estarão presentes. Além disso, para desenvolver o pensamento computacional e trabalhar com ele em sala de aula, apesar de a intenção ser a implementação computacional de uma solução, não é necessário um computador.

O pensamento computacional na Coleção

A BNCC considera que a aprendizagem de Álgebra contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes, uma vez que precisam mobilizar diferentes linguagens para traduzir situações-problema. Além disso, o documento destaca que:

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos (BRASIL, 2018, p. 271).

Nesta Coleção, são propostas diferentes atividades envolvendo construção, leitura e interpretação de fluxogramas. Essas atividades favorecem o desenvolvimento da competência especifica **6** de Matemática e da competência geral **4** da BNCC e são identificadas pelo ícone *Pensamento computacional*.

Pensamento
computacional

Na Coleção, os fluxogramas também são utilizados na sistematização de alguns conteúdos.

De modo geral, o pensamento computacional também está presente, na Coleção, por meio da aplicação de algoritmos e procedimentos (algoritmos das operações, métodos para determinar o mmc ou mdc de números naturais, aplicação da fórmula resolutiva de equações do 2º grau etc.), reconhecimento de padrões em sequências numéricas ou de figuras e, também, quando se propõe a elaboração e/ou resolução de problemas.

SUGESTÕES DE CRONOGRAMAS

O quadro a seguir oferece ao professor possibilidades de trabalho com os capítulos do volume 9 da Coleção durante o ano letivo. O professor pode e deve se sentir à vontade para adaptar as sugestões aqui indicadas de acordo com a realidade e as necessidades da turma e da escola, uma vez que a aprendizagem depende da combinação de muitos fatores e, por conseguinte, os métodos e as estratégias que se mostram eficientes com um grupo de estudantes podem não ter o mesmo resultado com outro.

O arranjo desse quadro possibilita ao professor a previsão de uma organização bimestral, trimestral ou semestral.

	SUGESTÕES DE CRONOGRAMAS (BIMESTRAL, TRIMESTRAL E SEMESTRAL)			
	Capítulos do volume 9	Bimestres	Trimestres	Semestres
UNIDADE 1	**Capítulo 1** – Potenciação e radiciação com números reais	1º bimestre	1º trimestre	1º semestre
	Capítulo 2 – Matemática financeira			
	Capítulo 3 – Segmentos proporcionais e semelhança			
UNIDADE 2	**Capítulo 4** – Fatoração e equações do 2º grau	2º bimestre		
	Capítulo 5 – Função afim		2º trimestre	
	Capítulo 6 – Função quadrática			
UNIDADE 3	**Capítulo 7** – Relações métricas no triângulo retângulo	3º bimestre		2º semestre
	Capítulo 8 – Circunferência, arcos e ângulos			
	Capítulo 9 – Polígonos regulares		3º trimestre	
UNIDADE 4	**Capítulo 10** – Vistas ortogonais e volume	4º bimestre		
	Capítulo 11 – Construção de gráficos estatísticos			
	Capítulo 12 – Probabilidade e estatística			

ORIENTAÇÕES PARA AVALIAÇÃO

Avaliar é algo complexo e muito discutido entre as equipes escolares, principalmente quando almeja-se uma avaliação focada na evolução e no desenvolvimento das aprendizagens dos estudantes. Para isso, é necessário ir além da simples demonstração dos resultados, trazendo o “percurso, os obstáculos e os novos caminhos a serem percorridos para o alcance dos objetivos ainda não atingidos”.

A BNCC vem propor uma ressignificação da avaliação, uma vez que há uma progressão na aquisição das habilidades, o que implica buscar mecanismos que mostrem o desenvolvimento do estudante no processo de ensino e de aprendizagem, no que se refere à aquisição ou não de tais habilidades.

Para isso é preciso refletir sobre o que avaliar e como fazê-lo. O professor precisa ter claro o que espera que cada turma aprenda em cada situação didática planejada. Necessita planejar intervenções que levem em consideração as orientações nacionais, mas também as necessidades de cada turma e cada estudante em particular.

É importante que as avaliações sejam aplicadas de forma contínua ao longo do processo educativo. A análise dos dados obtidos ao longo desse caminhar permitirá ao professor reorientar o processo de ensino e de aprendizagem. Ao estudante, fornecerá elementos para reforçar e incentivar a aprendizagem, tornando-se, assim, parte ativa do seu processo de aprendizagem.

Vários são os instrumentos que permitem ao professor obter as informações necessárias para o melhor planejamento, assim como atender à necessidade de quantificação da aprendizagem: atribuir uma nota ou um conceito. Destaca-se a importância da utilização de vários instrumentos simultaneamente, de forma a melhorar as oportunidades para que o estudante mostre efetivamente o que aprendeu (ou o que não aprendeu e precisa ser retomado pelo professor). Por exemplo: provas, relatórios, autoavaliação, trabalhos em equipe, participação em discussões orais, abertura para expor dúvidas e, especialmente, a possibilidade de discutir seus erros, compreender por que errou e corrigi-los.

Cabe ao professor, com base no conhecimento que tem de suas turmas, escolher os instrumentos mais adequados aos objetivos fixados em seu plano de ensino. Algumas dessas medidas são subjetivas, mas os critérios utilizados devem ser explicitados aos estudantes.

Entretanto, independentemente do instrumento escolhido, é necessário registrar os resultados obtidos por meio de pautas de observação, registros escritos ou audiovisuais e portfólios, a fim de acompanhar o desenvolvimento de cada um. A seguir, apresentamos uma sugestão de quadro que você pode utilizar para avaliar algumas capacidades desenvolvidas pelos estudantes ao longo do ano letivo.

SUGESTÃO DE QUADRO PARA REGISTRO DA AVALIAÇÃO DE CAPACIDADES DESENVOLVIDAS PELOS ESTUDANTES

Nome: ______

Turma: ______ **Data:** ___/___/___

Capacidade avaliada	Desempenho individual		
	Plenamente satisfatório	Satisfatório	Insatisfatório
Elaborar e resolver problemas.			
Compreender conceitos e procedimentos.			
Realizar cálculos mentais.			
Mobilizar diferentes linguagens e registros.			
Compreender textos publicados em diferentes mídias.			
Mobilizar conhecimentos de diferentes unidades temáticas.			
Realizar investigações utilizando tecnologias digitais.			
Criticar, criar e propor.			
Argumentar.			
Inferir.			
Construir, ler e interpretar tabelas e gráficos estatísticos.			
Trabalhar em equipe.			

O professor pode e deve se sentir à vontade para definir o critério que vai utilizar durante o preenchimento do quadro e até mesmo pode mudar as capacidades avaliadas, de acordo com a realidade da sua turma ou da escola em que trabalha. Também podem ser feitas versões similares do mesmo quadro, levando em consideração as habilidades e competências da BNCC.

Outro ponto é a necessidade de não limitar a avaliação aos aspectos cognitivos, uma vez que a formação do estudante deve ser a mais completa: aspectos comportamentais, atitudinais, também, devem ser considerados. Lembramos que um objetivo a ser fixado é o de uma educação democrática, inclusiva, e a avaliação tem papel fundamental nesse processo.

Na Coleção, as atividades da seção *Revisão de conteúdos de anos anteriores* podem compor avaliações diagnósticas e as atividades da seção *Revisão dos conteúdos deste capítulo*, por sua vez, podem servir para que sejam elaboradas avaliações formativas.

Propomos a seguir sugestões de avaliações de caráter formativo (uma relacionada a cada capítulo do *Livro do Estudante*) e uma sugestão de avaliação de preparação para exames de larga escala.

Sugestões de avaliação formativa

Para o capítulo 1: Potenciação e radiciação com números reais

Questões	Objetivos
1	Calcular uma expressão numérica com números reais.
2	Resolver problema envolvendo notação científica.
3	Efetuar cálculos e comparar radicais.
4	Racionalizar denominador.

1. O valor da expressão $\dfrac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - 5}{(0,2)^4 \cdot 25}$ é:

a) -124 b) $-\dfrac{124}{625}$ c) $\dfrac{20}{25}$ d) 500

2. No último fim de semana, foi realizada uma campanha de vacinação em determinada cidade durante dois dias. No sábado, foram vacinadas $5{,}89 \cdot 10^5$ pessoas, e, no domingo, $1{,}341 \cdot 10^6$ pessoas receberam a vacina. O número que expressa a quantidade de pessoas vacinadas no fim de semana é:

a) 723 100 **c)** 7 231 000
b) 1 930 000 **d)** 19 300 000

3. Considere que n é um número inteiro maior do que zero e observe os seguintes números.

$A = \sqrt[3]{n}$ $B = \sqrt[5]{n}$ $C = \sqrt[9]{n}$ $D = \dfrac{A \cdot C}{B}$

No caderno, escreva esses números em ordem crescente.

4. Ao racionalizar $\dfrac{\sqrt{15}}{15 - \sqrt{15}}$, chegamos em:

a) $\dfrac{1}{15}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{15}+1}{15}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{15}+1}{14}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{15}-1}{14}$

Respostas

1. alternativa d
2. alternativa b
3. $C < B < D < A$
4. alternativa c

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA03**. Durante a resolução dessa questão, os estudantes podem utilizar diferentes estratégias para calcular a expressão. Caso tenham dúvidas, pode-se propor a eles que escrevam cada número como uma potência de 5, levando-os a perceber que $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2$ e que $(0{,}2)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = 5^{-4}$.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA04**. Essa questão envolve uma situação-problema que deve ser resolvida por adição de números dados em notação científica. Para calcular a soma, os estudantes podem escrever os números com uma potência de 10 de mesmo expoente ou escrever cada número sem o uso de potências. Caso optem pelo **item a**, pode ser que os estudantes tenham calculado $5{,}89 + 1{,}341$ e multiplicado por 10^5. Caso optem pelo **item c**, eles podem ter calculado a mesma soma e multiplicado por 10^6. O **item d** pode ter sido escolhido ao calcularem $5{,}89 + 13{,}41$ e multiplicarem por 10^6.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA03**. Essa questão envolve a comparação de raízes de um número inteiro positivo qualquer. Em caso de dificuldades, recorde as propriedades e as operações com radicais e a escrita de radicais como potências de expoente fracionário. Espera-se que eles calculem a expressão $\dfrac{\sqrt[3]{n} \cdot \sqrt[9]{n}}{\sqrt[5]{n}}$ e cheguem em $D = \sqrt[45]{n^{11}}$. Com isso, é possível comparar os demais números $A = \sqrt[45]{n^{15}}$, $B = \sqrt[45]{n^9}$ e $C = \sqrt[45]{n^5}$. Assim, eles podem concluir que $C < B < D < A$.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA02**. Essa é uma questão prática de racionalização de denominadores. Em caso de dificuldades, podem-se apresentar exemplos de racionalização de denominadores para que os estudantes analisem e identifiquem padrões.

Para o capítulo 2: Matemática financeira

Questões	Objetivos
1	Resolver situação-problema envolvendo compra a prazo.
2	Comparar aplicações a juro simples e composto.
3	Avaliar sistemas de aplicação de juro e porcentagens.

1. Heitor comprará um produto em uma loja que oferece as seguintes condições:

- à vista: R$ 320,00;
- a prazo: entrada de R$ 100,00 e acréscimo de 10% sobre o valor restante, parcelado em duas vezes.

Caso Heitor opte pelo pagamento a prazo, o valor de cada parcela será:

a) R$ 99,00 **c)** R$ 121,00
b) R$ 110,00 **d)** R$ 126,00

2. Lúcia tem R$ 3 600,00 para realizar algum investimento e está em dúvida entre estas opções.

Opção	Regime	Taxa de juro	Intervalo de tempo
A	juro simples	2% a.m.	5 meses
B	juro simples	1% a.m.	10 meses
C	juro composto	5% a.m.	2 meses
D	juro composto	0,5% a.m.	2 meses

A opção que vai render maior montante a Lúcia é:

a) A **b)** B **c)** C **d)** D

3. Leia cada afirmação e indique se é verdadeira ou falsa.

a) Uma aplicação a juro composto sempre vai render mais do que uma aplicação a juro simples.
b) No cálculo de juro, o intervalo de tempo e a taxa da aplicação devem estar em uma mesma unidade de medida de tempo.
c) Para calcular o valor a pagar por um produto que custava x reais e foi vendido com desconto de 2%, basta calcular $0{,}98x$.
d) Um produto custava x reais e foi vendido com 20% de desconto. Para retornar ao preço original dele, basta multiplicar o preço de venda por 1,2.

Respostas

1. alternativa c
2. alternativa c
3. **a)** Falsa; **b)** Verdadeira; **c)** Verdadeira; **d)** Falsa

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**. Essa questão apresenta uma situação-problema de compra a prazo. Os estudantes precisam identificar o valor de entrada (R$ 100,00) para, depois, calcular o acréscimo de 10% e dividir por dois, descobrindo o valor de cada parcela. Caso optem pelo **item a**, calcularam um desconto de 10% em vez do acréscimo. Caso optem pelo **item b**, provavelmente se esqueceram de calcular o acréscimo de 10%. Caso optem pelo **item d**, calcularam o acréscimo sobre o valor total, antes de subtrair a entrada. Em caso de dificuldades, pode-se propor que escrevam cada passo da opção a prazo, analisando os valores obtidos.

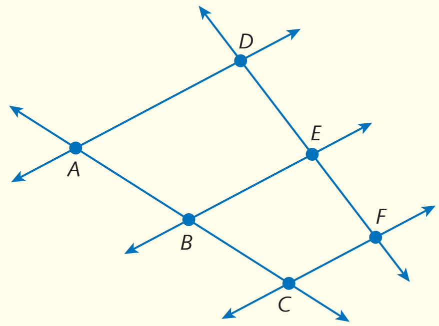
A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA03**. Essa questão envolve a comparação de quatro aplicações, sendo duas a juro simples e duas a juro composto. Espera-se que os estudantes percebam que as aplicações A e B, que estão a juro simples, vão render o mesmo valor, pois o juro é calculado pelo produto do capital, da taxa de juro e do intervalo de tempo. Assim, basta comparar a taxa das aplicações C e D, que estão no mesmo intervalo de tempo, e perceber que a C tem uma taxa maior e, portanto, vai render mais que a D. Em caso de dificuldades, pode-se propor aos estudantes que elaborem outras situações envolvendo juro simples e composto, aplicados com um mesmo capital, a fim de verificar semelhanças e diferenças.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**. Essa questão retoma conceitos de juro e porcentagem. Para mostrar que a primeira afirmação é falsa, basta apresentar um exemplo de que uma aplicação a juro simples renda mais do que uma aplicação a juro composto. Espera-se que os estudantes percebam que aplicações dependem da taxa de juros, do intervalo de tempo e do capital. A segunda afirmação é verdadeira, pois a taxa de juro e o intervalo de tempo precisam estar na mesma unidade de medida de tempo: bimestre, semestre, mês, ano etc. A terceira afirmação é verdadeira, pois $2\% = 0{,}02$; logo, o produto passou a custar $100\% - 2\% = 98\% = 0{,}98$. Para mostrar que a quarta afirmação é falsa, basta apresentar um exemplo que envolva as porcentagens mencionadas. Em caso de dificuldades, pode-se propor aos estudantes que retomem o estudo de porcentagens e o conceito de juro simples e composto.

Para o capítulo 3: Segmentos proporcionais e semelhança

Questões	Objetivos
1	Aplicar o teorema de Tales em retas paralelas cortadas por transversal.
2	Reconhecer polígonos semelhantes.
3	Aplicar o teorema de Tales em triângulos.
4	Calcular medidas de comprimento dos lados de triângulos semelhantes a partir da razão de semelhança.
5	Aplicar semelhança de triângulos para calcular medidas de comprimento.

1. Considere que, na figura a seguir, $AC = 10$, $DF = 12$ e $DE = 6$.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

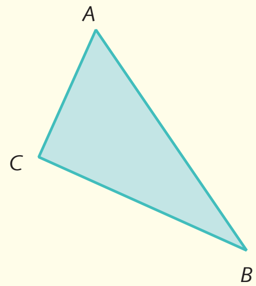
A medida AB é igual a:

a) 5
b) 6
c) 7,2
d) 20

2. Márcia representou um retângulo cujas medidas de comprimento dos lados são 26 cm e 32 cm. Com base nessa informação, sinalize se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) Todo retângulo é semelhante ao retângulo de Márcia, pois tem ângulos retos.
b) Um retângulo com lados correspondentes medindo 13 cm e 19 cm de comprimento é semelhante ao de Márcia.
c) Um retângulo com lados correspondentes medindo 13 cm e 16 cm de comprimento é semelhante ao de Márcia.
d) Ao cortar o retângulo de Márcio pela metade, obtém-se um retângulo semelhante ao dela.

3. Elis representou o seguinte triângulo em uma cartolina e resolveu traçar um segmento de reta paralelo ao lado $\overline{AC}$ de modo que passe pelo ponto médio do lado $\overline{BC}$. Ao fazer isso, o segmento de reta traçado vai passar pelo ponto médio de $\overline{AB}$. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Explique sua resposta.



4. Considere dois triângulos semelhantes com razão de semelhança igual a 1,6. Sabendo que o comprimento do maior lado do maior triângulo mede 20 cm, então o comprimento do maior lado do outro triângulo mede:

a) 20 cm
b) 12,5 cm
c) 18,4 cm
d) 32 cm

5. Para um experimento da escola, Letícia e Carlos foram até a entrada da cidade onde vivem. Nela, há letras grandes fincadas perpendicularmente ao chão com o nome da cidade. Eles levaram um pedaço de madeira de 45 cm e Carlos fincou perpendicularmente ao chão, enquanto Letícia media o comprimento da sombra que a letra I fazia naquele exato momento. Sabendo que esse comprimento media 6 m e o pedaço de madeira fazia uma sombra de 30 cm, calcule a medida da altura da letra I desse local.

Respostas

1. alternativa a

2. **a)** Falsa; **b)** Falsa; **c)** Verdadeira; **d)** Falsa

3. Verdadeira

4. alternativa b

5. 9 m

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA10**. Essa questão trabalha com a aplicação do teorema de Tales, a partir das medidas de comprimento dadas no enunciado. Os estudantes precisam escrever a proporção correta entre as medidas, ou seja, $\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{10}{12} = \frac{AB}{6} \Rightarrow AB = 5$. Ao optar pelo **item b**, eles devem ter considerado $AB = DE$. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de proporção.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**. Essa questão trabalha com o conceito de semelhança de retângulos. Os estudantes precisam recordar que retângulos semelhantes têm medidas de abertura de ângulos correspondentes congruentes e medidas de comprimento dos lados correspondentes proporcionais; portanto, nem todos os retângulos são semelhantes ao de Márcia, mesmo todos tendo medidas de abertura de ângulos correspondentes congruentes. Em caso de dificuldades, pode-se recordar semelhança de polígonos.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**. Nessa questão, os estudantes podem utilizar o teorema de Tales aplicado em um triângulo para julgar se a afirmação é verdadeira ou falsa. Em caso de dificuldades, pode-se propor aos estudantes que indiquem medidas de comprimento para verificar alguns exemplos ao aplicar o teorema de Tales e, em seguida, retomar esse teorema em triângulos.

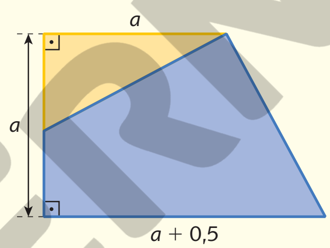
A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA12**. Essa questão trata do conceito de razão de semelhança em triângulos. Os estudantes precisam recordar que a razão é calculada a partir da correspondência entre as medidas de comprimento dos lados. A razão de semelhança 1,6 pode ser obtida dividindo-se a medida de comprimento do maior lado do maior triângulo pela medida de comprimento do maior lado do outro triângulo. Ao optar pelo **item a**, os estudantes não consideraram a razão de semelhança e consideraram os triângulos congruentes. Ao optar pelo **item c**, os estudantes subtraíram a razão de semelhança da medida de comprimento do maior lado. Ao optar pelo **item d**, os estudantes multiplicaram a razão de semelhança pela medida de comprimento do maior lado. Em caso de dificuldades, pode-se recordar o conceito de razão de semelhança.

A **questão 5** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA12**. Essa questão trabalha com uma aplicação da semelhança de triângulos na obtenção de medidas de comprimento. Os estudantes precisam perceber que a letra I e o pedaço de madeira formam dois triângulos semelhantes com suas respectivas sombras, já que o comprimento de cada sombra está sendo medida no mesmo momento. Ao considerar a medida x da altura da letra I e todas as medidas de comprimento em centímetro, eles podem montar a seguinte proporção: $\frac{x}{45} = \frac{600}{30}$. É importante que eles utilizem a mesma unidade de medida de comprimento para realizarem os cálculos. Em caso de dificuldades, pode-se recordar o conceito de proporção.

Para o capítulo 4: Fatoração e equações do 2º grau

Questões	Objetivos
1	Escrever expressões algébricas que representem medida da área de figuras planas.
2	Identificar produtos notáveis.
3	Identificar trinômio quadrado perfeito.
4	Resolver situação-problema utilizando equação do 2º grau incompleta.
5	Utilizar equação do 2º grau para resolver problemas.
6	Analisar o discriminante de equação do 2º grau.
7	Analisar equação completa do 2º grau.

1. Camila representou o seguinte trapézio retângulo de modo que um dos vértices do triângulo amarelo é ponto médio do lado do trapézio. A expressão que representa a medida da área azul dessa figura é:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a) $a^2 + 0,25a$
b) $0,75a^2 + 0,25a$
c) $1,25a^2 + 0,25a$
d) $2,5a - 0,5a^2$

2. Copie no caderno e associe cada produto notável a sua expressão desenvolvida.

$(2y - x)^2$	$-y^2 + 4x^2$
$(2x - y)(2x + y)$	$4x^2 + y^2 - 4xy$
$(-2x + y)^2$	$-4xy + x^2 + 4y^2$

3. Observe o seguinte polinômio.

$$\frac{12}{16}m^2 + p^2 - \frac{3}{2}mp$$

Para que ele seja um trinômio quadrado perfeito, é necessário:

a) adicionar m^3.
b) adicionar $\frac{3}{4}p^2$.
c) subtrair $\frac{3}{16}m^2$.
d) subtrair $\frac{9}{14}m^2$.

4. Jonas desenhou um quadrado e um retângulo que têm mesma medida de área. Sabendo que o comprimento da base do retângulo mede 30 cm e o comprimento da altura dele mede metade do comprimento do lado do quadrado, a medida de área do retângulo é:

a) 112,5 cm² **b)** 225 cm² **c)** 450 cm² **d)** 900 cm²

5. Da soma do dobro do quadrado de um número com o quíntuplo desse número, subtrai-se 25 e obtém-se zero. O menor número que pode ser esse número é:

a) –5 **b)** –2,5 **c)** 2,5 **d)** 5

6. Qual é o menor número inteiro que pode ser colocado no lugar de k de modo que a equação $5x^2 - 6x + k = 0$ não tenha raízes reais?

a) –1 **b)** –2 **c)** 1 **d)** 2

7. Considere a equação $2x^2 + 7x - 4 = 0$ e, depois, sinalize se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) A forma fatorada dessa equação é $2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 4) = 0$.

b) O discriminante dessa equação é igual a zero.

c) Essa equação tem duas raízes iguais.

d) As raízes dessa equação são $-\frac{1}{2}$ e 4.

Respostas

1. alternativa b

2.

$(2y - x)^2$	$-y^2 + 4x^2$
$(2x - y)(2x + y)$	$4x^2 + y^2 - 4xy$
$(-2x + y^2)$	$-4xy + x^2 + 4y^2$

3. alternativa c

4. alternativa b

5. alternativa a

6. alternativa d

7. **a)** Verdadeira; **b)** Falsa; **c)** Falsa; **d)** Falsa

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam perceber que a medida de área azul é obtida pela diferença entre a medida de área do trapézio e a medida de área do triângulo. Assim, eles podem escrever uma expressão algébrica que represente esse valor, por exemplo, $\frac{(a + a + 0{,}5) \cdot a}{2} - \frac{0{,}5a \cdot a}{2}$ e simplificá-la. Ao optar pelo **item a**, os estudantes escreveram a expressão da medida de área do trapézio. Ao optar pelo **item c**, os estudantes calcularam a soma da medida da área do trapézio com a do triângulo. Em caso de dificuldades, podem-se recordar o cálculo da medida da área de figuras planas e o conceito de expressão algébrica.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar o quadrado da soma de dois termos, o quadrado da diferença de dois termos e o produto da soma pela diferença de dois termos para identificar a forma desenvolvida deles. Os estudantes podem cometer equívocos com os expoentes e os sinais dos produtos que aparecem na questão. Caso isso ocorra, pode-se propor a eles que reescrevam os produtos e apliquem a propriedade distributiva da multiplicação.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**. Com essa questão, os estudantes podem analisar um polinômio e verificar o que precisa ser adicionado ou subtraído para que ele se torne trinômio quadrado perfeito. Isso vai ajudá-los na resolução de equações do 2º grau. Em caso de dificuldades, podem-se apresentar outros exemplos de trinômios quadrados perfeitos para que os estudantes analisem semelhanças e padrões.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**. Para resolver essa questão, os estudantes podem considerar a medida de comprimento do lado do quadrado como *x*; portanto, as medidas de comprimento da base e da altura do retângulo medem, respectivamente, 30 cm e $\frac{x}{2}$. Com isso, eles podem escrever uma equação do 2º grau e relacionando as medidas de área, descobrir a medida de comprimento da altura do retângulo e calcular a medida da área dele. Se surgirem dificuldades, podem-se propor aos estudantes que façam um esboço da situação e analisem as medidas mencionadas pela questão.

A **questão 5** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam transpor o texto para a linguagem algébrica. Ao fazer isso, podem chegar na equação $2x^2 + 5x - 25 = 0$ e resolvê-la, descobrindo duas raízes (–5 e 2,5). Basta, então, analisar qual delas é a menor. Em caso de dificuldades, pode-se relembrar o que significa ser raiz de uma equação para que eles substituam os valores dos itens na equação obtida.

A **questão 6** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam lembrar da relação entre o número de raízes reais de uma equação do 2º grau e o discriminante dela. Ao escrever uma inequação em que o discriminante é menor que zero, conseguem descobrir que $k > 1{,}8$. É importante que eles observem que o enunciado pede o menor número inteiro que atende à condição dada, portanto 2. Em caso de dificuldades, pode-se retomar a definição de discriminante de uma equação do 2º grau.

A **questão 7** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar a forma fatorada, as raízes e o discriminante da equação dada. É um momento de retomada de alguns conceitos de equação do 2º grau. Em caso de dificuldades, pode-se propor que resolvam a equação utilizando alguma das estratégias estudadas, a fim de avaliar cada afirmação. Ao considerar o **item a** como afirmação verdadeira, eles podem deduzir que as demais são falsas, já que pela forma fatorada é possível identificar as raízes da equação.

Para o capítulo 5: Função afim

Questões	Objetivos
1	Calcular valores de uma função e compreender a relação entre as variáveis.
2	Escrever lei de formação de funções que representam situações.
3	Resolver situação-problema utilizando função.
4	Analisar a representação gráfica de funções afim.
5	Identificar inequações equivalentes.

1. Considere a função $p = -4x^2 + \frac{1}{4}$ e sinalize se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

a) O valor dessa função é zero quando $x = 0$.

b) Nessa função, *p* é a variável dependente e *x* é a independente.

c) O valor dessa função é zero quando $x = -\frac{1}{4}$ ou $x = \frac{1}{4}$.

d) Se $p = 4$, então $x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $x = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

2. Em um programa computacional, Rodrigo consegue desenhar blocos retangulares em segundos. Para isso, ele criou um programa que relaciona as medidas do comprimento, da largura e da altura de um bloco retangular com as respectivas expressões: $3x$, $\frac{3}{2}x$ e $\frac{1}{2}x$. Se ele tiver que digitar uma função $v(x)$ para calcular a medida de volume desses blocos, Rodrigo deve digitar:

a) $v(x) = 5x^3$

b) $v(x) = \frac{9}{4}x^3$

c) $v(x) = \frac{81}{16}x^3$

d) $v(x) = \frac{9}{2}x^3$

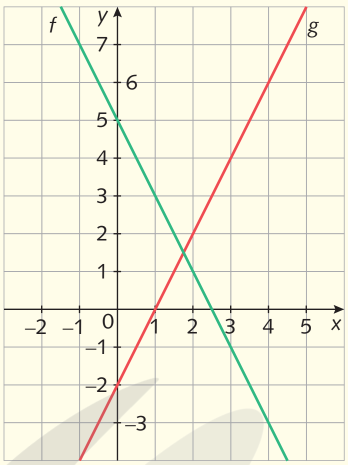
3. Bruno vende caixas de bombons, como a mostrada na imagem.


NEW AFRICA/SHUTTERSTOCK

Ele gasta R$ 0,15 pela produção de cada bombom e R$ 0,80 pela caixa. Para a última encomenda que recebeu, Bruno precisa entregar 200 caixas dessas. Com essa produção, ele gastará:

a) R$ 190,00
b) R$ 490,00
c) R$ 530,00
d) R$ 2 090,00

4. Observe a representação gráfica de duas funções a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, sinalize se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) As duas funções são constantes e lineares, pois não têm curvas.
b) O zero das duas funções é 1,75.
c) A função g é positiva quando $x > 1$.
d) Para $x = 4$, o valor da função f é menor do que o valor da função g.

5. Repare na imagem a seguir que representa uma balança com algumas bolas.

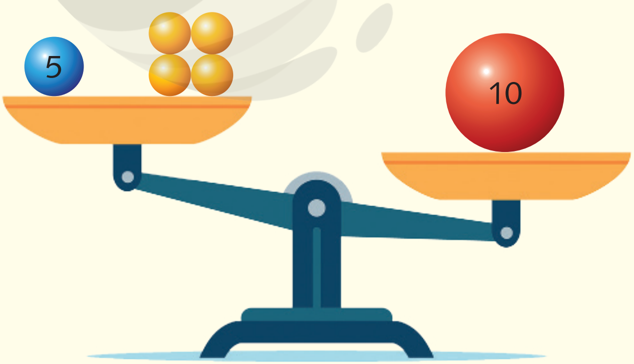


IMAGEM: TARTILA/SHUTTERSTOCK
ILUSTRAÇÃO: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que as bolas de mesma cor têm mesma medida de massa e que o número indicado representa a medida de massa da bola correspondente em quilograma, copie no caderno as inequações que são equivalentes à inequação que representa essa situação, sendo x a medida de massa de cada bola laranja.

$4x + 5 < 10$	$4x > 5$	$20x + 25 < 50$
$4x < 5$	$20x + 10 < 20$	$4x + 5 > 10$

Respostas

1. **a)** Falsa; **b)** Verdadeira; **c)** Verdadeira; **d)** Falsa

2. alternativa b

3. alternativa b

4. **a)** Falsa; **b)** Falsa; **c)** Verdadeira; **d)** Verdadeira

5. $4x + 5 < 10$, $4x < 5$ e $20x + 25 < 50$.

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**. Essa questão trabalha com o conceito de variável dependente e independente, além do cálculo de valores da função. Os estudantes precisam recordar que o valor da função é zero quando $p = 0$; assim, podem resolver a equação do 2º grau e descobrir os valores que anulam a função. No **item d**, pode acontecer um equívoco dos estudantes em relação ao sinal que aparece dentro da raiz quadrada. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de valor da função e resolução de equação do 2º grau incompleta.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam recordar o cálculo da medida de volume de blocos retangulares. Tendo as expressões que representam as medidas das dimensões de um bloco retangular, podem multiplicá-las e obter a função da medida do volume. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o cálculo da medida do volume de blocos retangulares.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**. Durante a resolução dessa questão, os estudantes podem escrever a função $v(x)$ que representa o valor gasto pela produção em relação à quantidade x de caixas vendidas, por exemplo, $v(x) = (0,15 \cdot 11 + 0,80) \cdot x$ e considerar 200 caixas de encomenda. Ao optar pelo **item a**, os estudantes consideraram apenas um bombom por caixa. Em caso de dificuldades, pode-se propor aos estudantes que calculem o custo de 1 caixa, 2 caixas e 3 caixas e analisem a relação entre os valores.

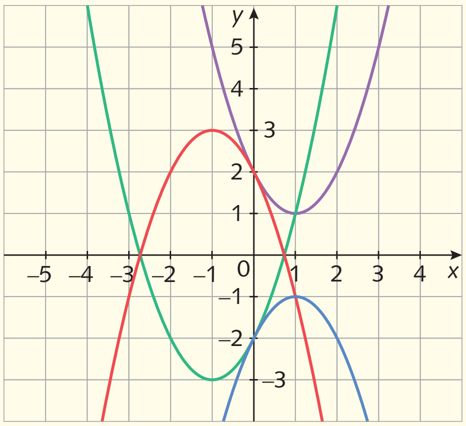
A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar comportamento, zeros e valores das funções representadas a partir do gráfico. Ao considerar o **item b** verdadeiro, os estudantes devem ter confundido o ponto de intersecção das funções (quando elas têm mesmo valor) com o zero delas. Para aprofundar a questão, pode-se propor que determinem a lei de formação das funções ($f(x) = -2x + 5$ e $g(x) = 2x - 2$) e calculem alguns valores. Em caso de dificuldades, pode-se retomar a análise gráfica de outras funções afim.

A **questão 5** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA03**. Durante a resolução dessa questão, os estudantes precisam compreender o conceito de inequação equivalente, bem como identificar a inequação que representa a relação entre as medidas de massa das bolas que estão na balança. Em caso de dificuldades, podem-se propor inequações mais simples e pedir aos estudantes que as representem por meio de figuras.

Para o capítulo 6: Função quadrática

Questões	Objetivos
1	Analisar representação gráfica de função quadrática.
2	Calcular os zeros de uma função quadrática.
3	Relacionar as coordenadas do vértice aos coeficientes da função quadrática.
4	Analisar ponto de mínimo ou máximo em gráfico de função quadrática.
5	Construir gráfico de função quadrática.

1. Confira os gráficos de funções quadráticas desenhados a seguir.



No caderno, copie as frases abaixo completando com as cores adequadas.

a) A função $f(x) = x^2 + 2x - 2$ está representada pelo gráfico da cor ▇.

b) A função $g(x) = -x^2 + 2x - 2$ está representada pelo gráfico da cor ▇.

c) A função $h(x) = -x^2 - 2x + 2$ está representada pelo gráfico da cor ▇.

d) A função $i(x) = x^2 - 2x + 2$ está representada pelo gráfico da cor ▇.

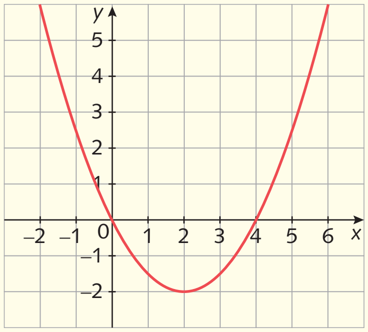
2. O gráfico da função $f(x) = -\frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$ intersecta o eixo das abscissas nos pontos de pares ordenados:

a) (3, 0) e (1, 0).
b) (3, 0) e (–1, 0).
c) (–3, 0) e (–1, 0).
d) (–3, 0) e (1, 0).

3. Para que a função $f(x) = -5x^2 + px + k$ tenha (2, –1) como coordenadas do vértice da parábola que a representa, é necessário que:

a) $p = 20$ e $k = -31$.
b) $p = 20$ e $k = -21$.
c) $p = -21$ e $k = 20$.
d) $p = -31$ e $k = 20$.

4. Considere o gráfico da função representada a seguir e indique se as afirmações são verdadeiras ou falsas.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

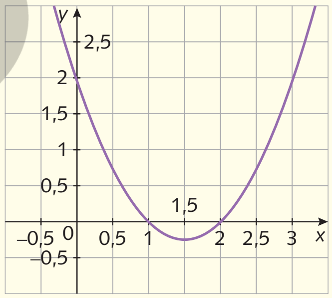
a) O gráfico dessa função tem ponto de máximo.
b) Essa função é do tipo $y = ax^2 + bx$.
c) O valor mínimo dessa função é –2.
d) A diferença entre o valor mínimo e o valor máximo dessa função é 4.

5. Construa, em seu caderno, o gráfico de uma função que tenha as seguintes características:

- intersecta o eixo das ordenadas em (0, 2);
- $y = -0{,}25$ é o valor mínimo da função.
- $x = 2$ é um dos zeros da função;
- a lei de formação da função é do tipo $y = x^2 + 3kx + 2$.

Respostas

1. **a)** verde; **b)** azul; **c)** vermelha; **d)** lilás
2. alternativa d
3. alternativa b
4. **a)** Falsa; **b)** Verdadeira; **c)** Verdadeira; **d)** Falsa
5.



Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**. Nessa questão, os estudantes precisam analisar os coeficientes das funções quadráticas dadas nos itens e comparar com os pontos de intersecção no eixo das ordenadas e a concavidade das parábolas para decidir a cor de cada gráfico. Não há necessidade de calcularem os zeros das funções. Em caso de dificuldades, pode-se propor a eles que calculem algum valor da função e verifiquem se o par ordenado encontrado pertence ao gráfico analisado.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**. Para descobrir os pares ordenados em que o gráfico da função dada intersecta o eixo das abscissas, podem-se calcular os zeros da função ou substituir cada par ordenado dos itens e verificar se a igualdade se mantém. Em caso de dificuldades, pode-se relembrar com os estudantes como determinar os zeros de uma função quadrática.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**. Nessa questão, os estudantes precisam recordar que as coordenadas do vértice podem ser obtidas a partir dos coeficientes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ como $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $f(x_v)$. Assim, podem calcular o valor de p e substituir na função para calcular o valor de k. Em caso de dificuldades, pode-se relembrar o conceito de coordenadas dos vértices da parábola e apresentar exemplos de funções quadráticas mais simples, completas e incompletas, para que eles identifiquem essas coordenadas.

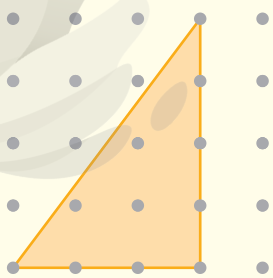
A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**. Nessa questão, os estudantes retomam o conceito de vértice da parábola como ponto de mínimo ou ponto de máximo, bem como o valor referente a ele. Em caso de dificuldades, pode-se apresentar o esboço de funções completas e incompletas para que os estudantes analisem o vértice e definam se é ponto de mínimo ou ponto de máximo.

A **questão 5** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**. Os estudantes devem construir o gráfico da função com base nas informações dadas. A primeira informação indica o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas. A segunda informação indica o valor mínimo da função, portanto a concavidade é para cima. Pela terceira e pela quarta informação, os estudantes podem substituir (2, 0) em $y = x^2 + 3kx + 2$ para determinar o valor de k e descobrir a lei de formação da função. Com isso, determina-se o outro zero da função e eles podem calcular a abscissa do vértice. Em caso de dificuldades, podem-se apresentar alguns gráficos de funções quadráticas e as respectivas leis de formação para que os estudantes identifiquem padrões e relações entre os coeficientes e as parábolas.

Para o capítulo 7: Relações métricas no triângulo retângulo

Questões	Objetivos
1	Aplicar relações métricas do triângulo retângulo.
2	Aplicar o teorema de Pitágoras em situação-problema.
3	Aplicar o teorema de Pitágoras em quadrados e triângulos equiláteros.
4	Resolver situação-problema aplicando razões trigonométricas do triângulo retângulo.
5	Determinar medida de abertura de ângulo consultando tabela de razões trigonométricas.

1. O geoplano é um material que pode ser feito com uma placa de madeira e pregos igualmente espaçados na horizontal e na vertical. Ao colocar elásticos neles, pode-se obter o contorno de polígonos. Repare no triângulo a seguir feito em um geoplano virtual.

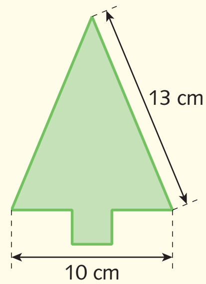


Considerando que a medida de distância entre cada prego consecutivo na vertical e na horizontal é 5 cm, a medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa desse triângulo é:

a) 2,4 cm.
b) 12 cm.
c) 20 cm.
d) 25 cm.

2. Inês está distribuindo o seguinte adesivo para ajudar em uma campanha de preservação ambiental.

A imagem é formada por um triângulo isósceles e um retângulo cujo comprimento da altura mede 3 cm. A altura desse adesivo mede:



a) 9 cm.
b) 12 cm.
c) 13 cm.
d) 15 cm.

3. Considere um quadrado e um triângulo equilátero cujos lados medem x de comprimento. Analise se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

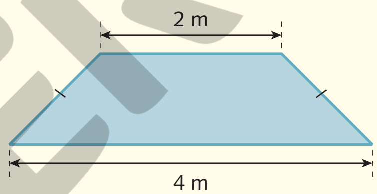
a) O comprimento da diagonal desse quadrado mede x^2.

b) O comprimento da altura desse triângulo mede $\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

c) Ao traçar as diagonais desse quadrado, obtêm-se quatro triângulos retângulos cujos catetos medem $\frac{x}{4}$ de comprimento.

d) A diagonal desse quadrado é maior do que a altura desse triângulo.

4. Irene vai construir um percurso para skatistas, formado por duas rampas idênticas e uma parte horizontal, conforme esquema a seguir.



Considerando que a medida de abertura do ângulo de subida em relação ao chão é 28°, quantos metros aproximadamente terá percorrido um skatista que passar em linha reta sobre esse percurso? (Considere as aproximações: sen 28° = 0,469, cos 28° = 0,883 e tg 28° = 0,532.)

a) 3,1 m
b) 4,2 m
c) 6,2 m
d) 6,6 m

5. Daniel desenhou um triângulo retângulo cujo comprimento da hipotenusa mede 15 cm e identificou a medida de abertura de um ângulo agudo como x. Sabendo que o cateto adjacente a esse ângulo mede 9,24 cm de comprimento e consultando a tabela a seguir, determine as medidas de abertura dos ângulos internos desse triângulo.

x	sen *x*	cos *x*	tg *x*
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072
48°	0,743	0,669	1,111
49°	0,755	0,656	1,150
50°	0,766	0,643	1,192
51°	0,777	0,629	1,235
52°	0,788	0,616	1,280
53°	0,799	0,602	1,327
54°	0,809	0,588	1,376

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Respostas

1. alternativa b

2. alternativa d

3. **a)** Falsa

b) Verdadeira

c) Falsa

d) Verdadeira

4. alternativa b

5. 90°, 52° e 38°.

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA13**. Essa questão traz uma oportunidade de discutir a utilização do geoplano no estudo da Geometria. Os estudantes precisam compreender que a figura é um triângulo retângulo, cujos catetos medem 15 cm e 20 cm de comprimento. Ao aplicar o teorema de Pitágoras, eles devem descobrir a medida de comprimento da hipotenusa (25 cm). Ao relacionar essas medidas com a medida de comprimento h da altura relativa à hipotenusa, chegam na seguinte equação: $15\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} = h \cdot 25\text{ cm}$. Ao optar pelo **item a**, os estudantes não consideraram que a medida de distância entre cada prego consecutivo na vertical e na horizontal é 5 cm. Ao optar pelo **item c**, os estudantes indicaram a medida de comprimento de um cateto. Ao optar pelo **item d**, os estudantes indicaram a medida de comprimento da hipotenusa. Em caso de dificuldades, podem-se apresentar exemplos de triângulos retângulos e suas medidas de comprimento para que os estudantes recordem as relações entre elas.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**. Nessa questão, os estudantes precisam identificar que o triângulo isósceles pode ser dividido ao meio pela altura, formando um triângulo retângulo cujo comprimento da hipotenusa mede 13 cm e o comprimento de um cateto mede 5 cm. Após calcular a medida de comprimento do outro cateto desse triângulo, basta adicionar essa medida à medida de comprimento da altura do retângulo para obter a medida da altura do adesivo. Ao optar pelo **item b**, os estudantes não adicionaram as medidas de comprimento das alturas do retângulo e do triângulo. Em caso de dificuldades, pode-se propor aos estudantes que dividam a figura em triângulos retângulos para analisarem melhor as medidas e destaque que a medida da altura do adesivo corresponde às medidas de comprimento das alturas do retângulo e do triângulo.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**. Para avaliar a validade de cada afirmação, os estudantes podem fazer esboços das figuras e indicar medidas de comprimento fictícias ou deduzir as medidas de comprimento da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero, por meio do teorema de Pitágoras. Para o **item d**, se considerar pertinente, podem-se apresentar valores aproximados para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, entretanto, espera-se que os estudantes consigam comparar as medidas de comprimento sem a necessidade de aproximação. Em caso de dificuldades, pode-se relembrar a definição de triângulo equilátero e diagonal do quadrado.

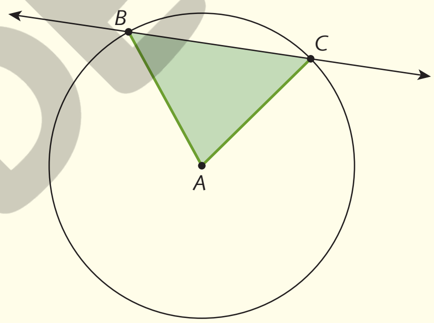
A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**. Nessa questão, os estudantes precisam perceber que o percurso tem formato de trapézio isósceles e, portanto, pode ser dividido em um retângulo e dois triângulos retângulos com um cateto que mede 1 m de comprimento e ângulo adjacente a ele que mede 28° de abertura. Utilizando a razão cosseno, podem determinar a medida de comprimento aproximada da hipotenusa (1,1 m), ou seja, a medida de comprimento de uma das partes inclinadas. Calculando a adição das medidas de comprimento dos lados não paralelos e da base menor do trapézio, determinam a medida de comprimento do percurso. Ao optar pelo **item a**, os estudantes não adicionaram a medida de comprimento de uma das partes inclinadas.

A **questão 5** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**. Para ajudar os estudantes nessa questão, pode-se propor a eles que façam um esboço da situação, a fim de perceberem que são dadas as medidas de comprimento da hipotenusa e do cateto adjacente a um ângulo. Com isso, os estudantes podem escrever a razão cosseno: $\cos x = \frac{9{,}24}{15} = 0{,}616$. Basta consultar a tabela trigonométrica para identificar que a abertura desse ângulo mede 52°. A partir disso, considerando que os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares, tem-se a medida de abertura do outro ângulo agudo.

Para o capítulo 8: Circunferência, arcos e ângulos

Questões	Objetivos
1	Utilizar a propriedade da reta secante a uma circunferência.
2	Analisar posição relativa entre circunferências.
3	Calcular a medida de comprimento de segmentos de reta tangentes a uma circunferência.
4	Relacionar medidas de comprimento de quadrado circunscrito a uma circunferência.
5	Reconhecer a relação entre as medidas de abertura de ângulos inscritos e centrais em circunferências.

1. Ricardo representou uma circunferência com 30 cm de medida de comprimento do diâmetro e uma reta secante que intersectou essa circunferência nos pontos B e C, conforme mostra a figura a seguir.



Sabendo que $BC = 18$ cm, o comprimento da altura do triângulo ABC mede:

a) 12 cm.

b) 18 cm.

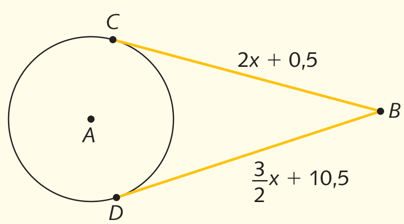
c) 24 cm.

d) 29 cm.

2. Lucimara desenhou duas circunferências secantes. Sabendo que o comprimento do diâmetro de uma circunferência mede 8 cm e o da outra mede 5 cm, indique quais números a seguir podem representar a medida da distância, em cm, entre os centros.

0 1 2 6 7 8 10 13 14

3. Na figura a seguir, $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$ são tangentes à circunferência e as medidas de comprimento indicadas estão em centímetro.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a medida de cada um desses segmentos?

a) 20 cm. **c)** 44,5 cm.
b) 40,5 cm. **d)** 81 cm.

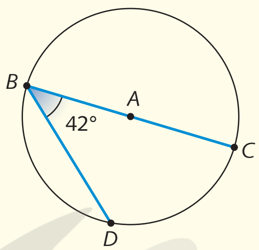
4. Vilma vai desenhar uma circunferência no quadro a seguir de modo que ela tangencie internamente os quatro lados.


RATTIYA LAMROD/SHUTTERSTOCK

Sabendo que esse quadro tem formato de um quadrado cujo comprimento da diagonal interna mede $50\sqrt{2}$ cm, qual deve ser a medida de comprimento do raio da circunferência de Vilma?

a) 25 cm. **c)** $50\sqrt{2}$ cm.
b) 50 cm. **d)** 100 cm.

5. Considere a seguinte circunferência e o ângulo inscrito $C\hat{B}D$.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) A abertura do ângulo $C\hat{A}D$ mede 84°.
b) $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ são ângulos centrais com mesma medida de abertura.
c) As medidas das aberturas dos ângulos internos do triângulo $C\hat{B}D$ são 42°, 48° e 90°.
d) As medidas das aberturas dos ângulos internos do triângulo $A\hat{B}D$ são 42°, 48° e 90°.

Respostas

1. alternativa a
2. 2 e 6
3. alternativa b
4. alternativa a
5. **a)** Verdadeira; **b)** Falsa; **c)** Verdadeira; **d)** Falsa

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA11**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam lembrar que uma reta secante a uma circunferência é perpendicular a uma reta que passa pelo centro da circunferência, percebendo que o triângulo *ABC* é isósceles. Considerando o comprimento do raio com medida de 15 cm, eles podem aplicar o teorema de Pitágoras e determinar a medida de comprimento da altura do triângulo. Ao optar pelo **item b**, os estudantes consideraram que a medida de comprimento da altura do triângulo é igual a *BC*. Em caso de dificuldades, pode-se propor que desenhem o triângulo retângulo à parte, indicando a medida de comprimento de cada lado.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA11**. Nessa questão, os estudantes precisam verificar quais valores podem servir para indicar a medida da distância entre os centros das circunferências secantes. Calculando a diferença e a soma das medidas de comprimento dos raios, eles conseguem perceber que a medida da distância d é tal que 1,5 cm $< d <$ 6,5 cm. Um equívoco que eles podem cometer é calcular a diferença e a soma das medidas de comprimento dos diâmetros. Em caso de dificuldades, pode-se propor que façam um esboço da situação.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA11**. Para os estudantes calcularem a medida de comprimento de cada segmento de reta, eles precisam determinar o valor de x. Isso pode ser feito igualando as expressões e resolvendo a equação $2x + 0{,}5 = \frac{3}{2}x + 10{,}5$, descobrindo que $x = 20$. Ao optar pelo **item a**, os estudantes indicaram o valor de x. Ao optar pelo **item d**, os estudantes calcularam a soma das medidas de comprimento de cada segmento de reta. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de segmentos de reta tangentes a uma circunferência.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA11**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam perceber que a medida de comprimento do diâmetro da circunferência é igual à medida de comprimento do lado do quadrado interno. Conhecendo a medida de comprimento da diagonal do quadrado, pode-se aplicar o teorema de Pitágoras para determinar a medida de comprimento do lado dele. Assim, o comprimento do raio mede metade disso. Ao optar pelo **item b**, os estudantes indicaram a medida de comprimento do diâmetro. Ao optar pelo **item c**, os estudantes consideraram que o comprimento do raio mede o mesmo que a diagonal do quadrado. Em caso de dificuldades, pode-se recordar o teorema de Pitágoras aplicado em quadrados.

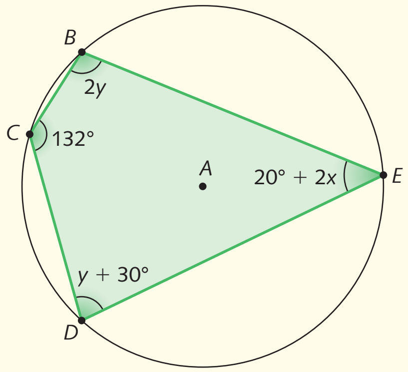
A **questão 5** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA11**. Para avaliar as afirmações, os estudantes precisam perceber que $C\hat{A}D$ é um ângulo central e a medida de sua abertura é o dobro da medida da abertura do ângulo inscrito $C\hat{B}D$. Para verificar se $B\hat{A}D$ e $C\hat{A}D$ têm mesma medida de abertura, é necessário identificar que são suplementares e que a abertura do ângulo $C\hat{A}D$ mede 84°, então a abertura do ângulo $B\hat{A}D$ mede 96°. Para os **itens c** e **d**, é necessário lembrar que a soma das medidas de abertura dos ângulos internos de um triângulo é 180° para identificar a medida de abertura de cada ângulo dos triângulos indicados. Em caso de dificuldades, pode-se propor que desenhem os triângulos que encontram na figura, a fim de indicar a medida de abertura de cada ângulo.

Para o capítulo 9: Polígonos regulares

Questões	Objetivos
1	Aplicar a propriedade dos ângulos de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência.
2	Analisar características de polígonos regulares.
3	Compreender a medida do ângulo central de um polígono regular.
4	Analisar triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

1. Observe o seguinte polígono inscrito em uma circunferência e as medidas de abertura dadas em grau.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Qual é a medida de abertura de x e y?

a) $x = 31°$ e $y = 20°$.
b) $x = 14°$ e $y = 50°$.
c) $x = 56°$ e $y = 30°$.
d) $x = 80°$ e $y = 90°$.

2. Após estudar polígonos regulares, quatro estudantes fizeram as seguintes afirmações.

Bianca: "O retângulo possui os quatro ângulos congruentes, portanto, ele é um polígono regular."

Breno: "Um losango que possui os quatro ângulos congruentes é um polígono regular."

Juliana: "O ângulo interno e o ângulo externo correspondente em um polígono regular são suplementares."

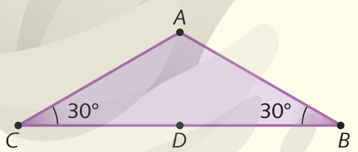
Rubens: "Podemos decompor qualquer polígono regular em triângulos equiláteros a partir do centro do polígono e dois vértices consecutivos."

Identifique os estudantes que fizeram afirmações corretas.

3. Mirela vai construir uma mesa cujo tampo tenha formato de polígono regular para ser utilizada em um evento. Em cada lado da mesa, será colocada uma cadeira para cada participante. Sabendo que a abertura do ângulo central do polígono que Mirela vai utilizar como rascunho mede 24°, quantas pessoas vão participar do evento?

a) 7 **b)** 12 **c)** 15 **d)** 24

4. Luís desenhou este triângulo isósceles e marcou o ponto médio D de $\overline{BC}$.



Depois, colocou a ponta fixa de um compasso em A e traçou uma circunferência cujo comprimento do raio mede AB. Finalmente, ele traçou a semirreta $\overrightarrow{DA}$ que intersectou a circunferência em E.

Com base nessas informações, indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) O triângulo *EBC* tem apenas dois lados de mesma medida de comprimento.
b) A abertura do ângulo central do triângulo *EBC* mede 60°.
c) $\overline{AD}$ é apótema do triângulo *EBC*.
d) $\overline{AE}$ tem a mesma medida de comprimento de $\overline{AB}$.

Respostas

1. alternativa b
2. Breno e Juliana
3. alternativa c
4. **a)** Falsa; **b)** Falsa; **c)** Verdadeira; **d)** Verdadeira

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA15**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam recordar que os ângulos opostos de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência são suplementares, ou seja, a soma das medidas de abertura dos ângulos opostos é igual a 180°. Assim, podem resolver as equações $2y + y + 30° = 180°$ e $132° + 20° + 2x = 180°$ para descobrir as medidas de abertura x e y. Ao optar pelo **item c**, os estudantes igualaram as medidas de abertura dos ângulos opostos. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de ângulos suplementares, além da propriedade que envolve essa questão.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA15**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam analisar se as afirmações apresentadas estão de acordo com a definição de polígono regular e seus elementos. Espera-se que eles recordem que, para um polígono ser regular, precisa ter os ângulos congruentes e os lados com mesma medida de comprimento. Pode acontecer equívoco ao avaliarem a afirmação de Rubens, confundindo triângulo equilátero com isósceles. Em caso de dificuldades, pode-se propor que desenhem dois polígonos regulares e o dividam conforme a afirmação de Rubens para verificar as medidas de abertura dos ângulos dos triângulos obtidos.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA15**. Para determinar a quantidade de pessoas que vão participar do evento, os estudantes precisam calcular a quantidade de lados do polígono regular que Mirela está utilizando como rascunho, dividindo 360° por 24°. Em caso de dificuldades, podem-se recordar a definição de ângulo central e sua relação com a quantidade de lados do polígono regular.

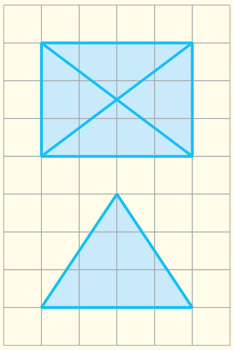
A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA15**. Para avaliar cada afirmação, os estudantes precisam visualizar geometricamente a construção de Luís; portanto, pode-se recomendar que façam o passo a passo dessa construção para perceberem que o triângulo obtido é equilátero e inscrito na circunferência. Em caso de dificuldades, podem-se retomar os elementos e as relações métricas do triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

Para o capítulo 10: Vistas ortogonais e volume

Questões	Objetivos
1	Identificar a projeção ortogonal de figuras.
2	Identificar um sólido geométrico a partir de suas vistas.
3	Calcular medida de volume de prisma de base hexagonal regular.
4	Calcular medida de capacidade de recipiente com formato de cilindro reto.

1. Regiane representou um triângulo em um pedaço de papel e o recortou. Utilizando uma lanterna, ela projetou a sombra do triângulo na parede. Com base nessas informações, indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.
   a) A projeção ortogonal desse triângulo pode ser um triângulo menor.
   b) A projeção ortogonal desse triângulo pode ser um quadrado.
   c) A projeção ortogonal desse triângulo pode ser um ponto.
   d) A projeção ortogonal desse triângulo pode ser um segmento de reta.

2. Benício representou duas vistas, em uma malha quadriculada, de um modelo de sólido geométrico.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

O modelo que Benício utilizou foi:
a) um paralelepípedo.
b) um prisma de base retangular.
c) uma pirâmide de base triangular.
d) uma pirâmide de base retangular.

3. Isabela faz vasos com formato de prismas para colocar plantas. Repare no vaso a seguir produzido por ela.

OLGA ALEKSIEIEVA/SHUTTERSTOCK

Considere que o interior desse vaso tem formato de prisma de base hexagonal regular cuja altura mede 12 cm e o comprimento do lado da base mede 4 cm. Qual é a medida de volume da parte interior desse vaso? (Considere a aproximação: $\sqrt{3} = 1,7$.)

a) 20,4 cm^3 **c)** 244,8 cm^3
b) 81,6 cm^3 **d)** 489,6 cm^3

4. Joana comprou uma lata de tinta, como as apresentadas a seguir.

PETER ZVONAR/ SHUTTERSTOCK

Considerando que a lata tem 15 cm de medida da altura, veio completamente cheia de tinta e o comprimento do diâmetro da base mede 14 cm, quantos litros de tinta, aproximadamente, Joana comprou? (Considere a aproximação: $\pi = 3,14$.)

a) 1,2 litros. **b)** 2,3 litros. **c)** 4,6 litros. **d)** 9,2 litros.

Respostas

1. **a)** Verdadeira; **b)** Falsa; **c)** Falsa; **d)** Verdadeira

2. alternativa d

3. alternativa d

4. alternativa b

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA17**. Para avaliar cada afirmação, os estudantes precisam imaginar como a projeção ortogonal do triângulo pode gerar o elemento de cada item. Espera-se que eles percebam que, dependendo de como o triângulo está posicionado ou inclinado, a projeção ortogonal dele na parede pode gerar determinada figura. Em caso de dificuldades, pode-se realizar a questão experimentalmente com a turma para conferir as respostas.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA17**. Os estudantes precisam imaginar o sólido geométrico de cada item e verificar se as vistas que Benício desenhou são correspondentes a ele. Em caso de dificuldades, podem-se apresentar outros modelos de sólidos geométricos e pedir aos estudantes que desenhem algumas vistas, a fim de observarem características importantes desses sólidos geométricos.

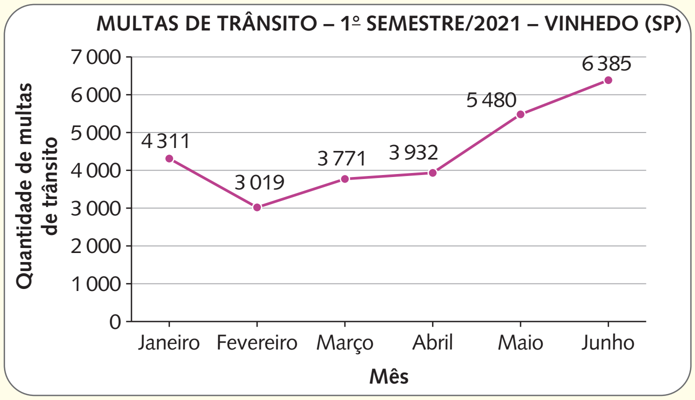
A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA19**. Para calcular a medida do volume do vaso, os estudantes precisam perceber que podem decompor a base do prisma em seis triângulos equiláteros e calcular a medida de área deles. Assim, descobrem que se trata de um prisma cuja área da base mede 40,8 cm^2 e a altura mede 12 cm. Ao optar pelo **item b**, os estudantes calcularam a medida do volume de um prisma de base triangular regular. Em caso de dificuldades, pode-se propor aos estudantes que façam um esboço da base do prisma e a decomponha em triângulos equiláteros.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA19**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam perceber que a lata tem formato de cilindro reto com medida de comprimento do diâmetro de 14 cm, ou seja, o comprimento do raio mede 7 cm. Assim, podem calcular a medida de área da base, utilizando 3,14 como aproximação para π. Além disso, a medida do volume é obtida em centímetro cúbico, portanto, se faz necessária a conversão para litro. Um equívoco que os estudantes podem cometer é utilizar a medida de comprimento do diâmetro no cálculo da medida da área da base. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de cilindro reto e pedir aos estudantes que façam um esboço da situação.

Para o capítulo 11: Construção de gráficos estatísticos

Questões	Objetivos
1	Analisar dados em gráfico de segmentos.
2	Analisar tabela de distribuição em classes e histograma.
3	Analisar a medida de abertura do ângulo central de cada setor de um gráfico de setores.
4	Avaliar o gráfico mais adequado para determinada situação.

1. Observe, no gráfico a seguir, a quantidade de multas de trânsito aplicadas em Vinhedo (SP) no 1º semestre de 2021.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: Prefeitura de Vinhedo. Transportes e Defesa Social. Disponível em: <https://www.vinhedo.sp.gov.br/portal/secretarias-paginas/58/multas-de-transito/>. Acesso em: 1º ago. 2021.

No semestre analisado, a média de multas aplicadas:

a) foi 6 385.
b) ficou abaixo de 3 000.
c) ficou entre 3 000 e 4 000.
d) ficou entre 4 000 e 5 000.

2. Em uma pesquisa sobre alimentação e hábitos saudáveis feita em 2023, foram levantados diversos dados sobre os entrevistados. A tabela a seguir mostra apenas informações referentes à medida de massa deles.

DISTRIBUIÇÃO DA MEDIDA DE MASSA DOS ENTREVISTADOS NA PESQUISA	
Medida de massa (em kg)	**Quantidade de pessoas (frequência)**
30 ⊢── 42	1
42 ⊢── 54	1
54 ⊢── 66	3
66 ⊢── 78	4
78 ⊢── 90	6
90 ⊢── 102	2
102 ⊢── 114	1

Dados obtidos pela pesquisa sobre alimentação e hábitos saudáveis em 2023.

Com base nesses dados, indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) A amplitude da classe é 14 kg.
b) A classe 78 ⊢── 90 apresenta a maior frequência.
c) Quanto maior for a amplitude da classe, mais detalhes serão mostrados no histograma.
d) Ao construir o histograma desses dados, não deve haver espaço entre cada retângulo.

3. Joelma vai construir um gráfico de setores para representar os dados de uma pesquisa sobre o lazer preferido dos estudantes do 9º ano que ela realizou na 1ª semana de 2024. Cada estudante escolheu apenas uma opção. Copie a tabela a seguir em seu caderno e a complete com a medida de abertura do ângulo central de cada setor do gráfico construído por Joelma.

LAZER PREFERIDO DOS ESTUDANTES DO 9º ANO		
Lazer preferido	**Quantidade de votos**	**Medida de abertura do ângulo central**
Assistir a filmes	9	
Ler	6	
Passear em parque	12	
Outros	3	

Dados obtidos por Joelma na 1ª semana de 2024.

4. Guilherme vai realizar uma pesquisa sobre práticas esportivas com os estudantes do 9º ano e representará o resultado em um gráfico. Ele vai entrevistar todos os estudantes das turmas A e B. Será feita a seguinte pergunta: "Você pratica algum esporte?". Os estudantes podem responder "sim" ou "não". Com base nessa situação, indique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) Guilherme deve usar um gráfico de segmentos.
b) Guilherme pode usar cores para cada turma ou cada resposta.
c) O gráfico mais adequado não pode ser feito em planilha eletrônica.
d) Guilherme pode usar um gráfico de barras.

Respostas

1. alternativa d

2. **a)** Falsa
b) Verdadeira
c) Falsa
d) Verdadeira

3.

LAZER PREFERIDO DOS ESTUDANTES DO 9º ANO		
Lazer preferido	**Quantidade de votos**	**Medida de abertura do ângulo central**
Assistir a filmes	9	108°
Ler	6	72°
Passear em parque	12	144°
Outros	3	36°

Dados obtidos por Joelma na 1ª semana de 2024.

4. **a)** Falsa; **b)** Verdadeira; **c)** Falsa; **d)** Verdadeira

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA22**. Essa questão traz um gráfico de segmentos que apresenta a quantidade de multas de trânsito, a cada mês, em Vinhedo (SP). Para estimar a média dessa quantidade, sem precisar realizar cálculo, os estudantes podem analisar cada item e verificar os valores do gráfico. Para o **item a**, percebe-se que 6 385 é o maior valor do gráfico. Para o **item b**, percebe-se que não há multas abaixo de 3 000. Para o **item c**, percebe-se que, entre 3 000 e 4 000, há três valores do gráfico, sendo dois deles próximos de 4 000; entre 4 000 e 5 000, há um valor; entre 5 000 e 6 000, há um valor; e acima de 6 000, também há um valor; portanto, a média não poderia ficar entre 3 000 e 4 000.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA22**. Essa questão apresenta uma tabela com classes e frequências. Os estudantes precisam perceber que essas informações podem ser transpostas para um histograma de modo que cada classe vai indicar a base do retângulo e cada frequência correspondente vai indicar a medida da altura. Assim, podem analisar a veracidade de cada afirmação.

Espera-se que eles lembrem que a amplitude da classe é calculada pela diferença entre os extremos da classe. No **item c**, é esperado que os estudantes percebam que, se as classes de um histograma têm amplitude muito grande, pode acontecer de ele abranger muitos dados, não mostrando detalhes. Em caso de dificuldades, pode-se propor aos estudantes que façam um esboço do histograma.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA22**. Os estudantes precisam perceber que foram 30 estudantes entrevistados. Com isso, podem calcular a porcentagem de cada resposta e, utilizando proporção, determinar a medida de abertura do ângulo central de cada setor correspondente. Em caso de dificuldades, pode-se recordar com eles a relação entre as medidas de abertura dos ângulos centrais de setores e o círculo. Para ampliar a questão, pode-se pedir a eles que façam o esboço do gráfico no caderno.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento das habilidades **EF09MA21** e **EF09MA22**. Ao interpretar a situação que Guilherme vai vivenciar, os estudantes precisam identificar como representar graficamente essa situação. Caso eles tenham dificuldades, pode-se propor que construam uma tabela fictícia com respostas possíveis das turmas A e B a analisem de que modo podem representar essas informações.

Para o capítulo 12: Probabilidade e estatística

Questões	Objetivos
1	Compreender o conceito de probabilidade e analisar eventos.
2	Reconhecer eventos dependentes e eventos independentes.
3	Calcular a probabilidade de eventos dependentes.
4	Calcular a probabilidade de eventos independentes.
5	Identificar pesquisa amostral e censitária.
6	Calcular medidas de tendência central.

1. Leia cada afirmação e indique quais são verdadeiras ou falsas.

a) A probabilidade de obter um número menor do que 4 no lançamento de um "dado honesto" de seis faces é igual à probabilidade de obter um número menor do que 4 no lançamento de um "dado honesto" de oito faces.

b) A probabilidade de um evento acontecer será igual a zero se o número de elementos do espaço amostral for zero.

c) Se a previsão do tempo informou que há 42% de chances de chuva, então há 58% de chances de não chover.

d) Uma urna está com dez bolas numeradas, cada uma de 1 até 10. Elas têm a mesma probabilidade de serem escolhidas se tiverem as mesmas dimensões e as mesmas medidas de massa.

2. Leia cada situação a seguir e indique se são eventos dependentes ou independentes.

a) Um sorteio com bolas da cor verde, lilás e preta em uma urna será feito assim: primeiro, será retirada uma bola e anotada a cor. Depois, ela será colocada novamente na urna. Finalmente, será retirada outra bola e anotada a cor. Deseja-se saber a probabilidade de ambas as bolas serem verdes.

b) Para verificar a qualidade na produção de peças metálicas em uma indústria, será retirada uma peça da amostra e realizadas as medições. Depois, sem reposição, será retirada outra peça e realizadas as medições. Pergunta-se a probabilidade de retirar duas peças e uma delas estar com algum defeito.

3. Uma loja distribuiu hoje a seus clientes um papel contendo uma vogal e dois algarismos diferentes. O dono da loja vai realizar um sorteio de uma peça de roupa. Em uma urna, ele colocou um papel para cada vogal e, em outra urna, colocou dez papéis com números de 0 até 9. Após cada retirada da urna, ele não vai repor o papel. A probabilidade de alguém ganhar a peça de roupa nesse sorteio é:

a) $\frac{1}{500}$ **b)** $\frac{1}{360}$ **c)** $\frac{1}{450}$ **d)** $\frac{1}{50}$

4. Laura está participando de um jogo de tabuleiro em que é necessário retirar uma carta colorida de um monte, colocá-la novamente e embaralhar para retirar outra carta desse mesmo monte. Sabendo que esse jogo é formado por 4 cartas amarelas, 6 cartas azuis e 5 cartas vermelhas, todas de mesmas dimensões, a probabilidade de Laura retirar uma carta vermelha e, depois, uma carta azul é:

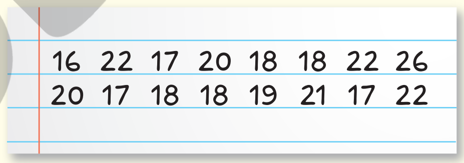
a) $\frac{11}{15}$ **b)** $\frac{2}{15}$ **c)** $\frac{2}{14}$ **d)** $\frac{1}{225}$

5. Analise a descrição de cada pesquisa a seguir e indique se é amostral ou censitária.

a) Luana vai visitar a casa dos estudantes da turma dela e entrevistar os moradores para saber informações referentes à idade, à ocupação profissional à e escolaridade.

b) A prefeitura da cidade onde Breno vive vai realizar uma festa temática. Para decidir o tema, metade da equipe responsável pela festa foi em seis bairros da cidade e perguntou aos moradores das casas de número par. O restante da equipe foi em outros sete bairros e perguntaram aos moradores das casas de número ímpar.

6. Rebeca fez uma pesquisa com os familiares dela para saber a idade em que eles começaram a trabalhar. Ela anotou os resultados em uma folha de papel.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Com base nos dados coletados por Rebeca, copie o texto no caderno e complete-o com as informações que faltam.

"Em minha pesquisa estatística, constatei que a moda do meu conjunto de dados é ▬, ou seja, a maior parte dos meus familiares começou a trabalhar com ▬ anos. A média de idade aproximada com que minha família começou a trabalhar foi aos ▬ anos. Para calcular a mediana, eu coloquei os dados em ordem crescente. Como o conjunto de dados tem quantidade par de elementos, ao centro ficaram as idades ▬ e ▬ anos, portanto, a mediana das idades é ▬ anos."

Respostas

1. **a)** Falsa
b) Falsa
c) Verdadeira
d) Verdadeira

2. **a)** Eventos independentes **b)** Eventos dependentes

3. alternativa c

4. alternativa b

5. **a)** Pesquisa censitária
b) Pesquisa amostral

6. 18; 18; 19,4; 18; 19; 18,5

Comentários

A **questão 1** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**. Para avaliar a veracidade de cada afirmação, os estudantes precisam saber o conceito de probabilidade e seu cálculo: a razão entre o número de elementos favoráveis ao evento e o número de elementos do espaço amostral. No **item a**, espera-se que eles percebam que a probabilidade no primeiro caso ("dado honesto" com 6 faces) será maior do que no segundo caso ("dado honesto" com 8 faces). No **item c**, devem lembrar que a soma das probabilidades de um evento e do seu complementar é 100%. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de probabilidade e seu cálculo por meio de exemplos.

A **questão 2** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**. Nessa questão, os estudantes precisam perceber se o que está sendo retirado da amostra será colocado novamente ou não. Com isso, podem avaliar qual situação trata de eventos dependentes e qual se refere a eventos independentes. Em caso de dificuldades, pode-se propor a eles que pensem em uma situação para cada tipo de evento, a fim de perceber as características deles.

A **questão 3** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**. Para calcular a probabilidade dessa questão, os estudantes precisam perceber que o sorteio dos números se trata de eventos dependentes, pois, após retirar o primeiro número, o dono da loja não colocará novamente o papel na urna. Além disso, o sorteio da vogal e o sorteio do primeiro número são eventos independentes, já que estão em urnas separadas. Considerando 5 vogais e 10 números, a probabilidade pode ser dada por $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{450}$. Ao optar pelo **item a**, os estudantes consideraram que o papel do primeiro número seria colocado novamente na urna. Ao optar pelo **item d**, os estudantes consideraram o sorteio de uma vogal e um número. Em caso de dificuldades, pode-se propor aos estudantes que apresentem alguns resultados possíveis de serem obtidos nesse sorteio e analisem o que acontece no processo de sorteio.

A **questão 4** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**. Para resolver essa questão, os estudantes precisam perceber que o sorteio das cartas se trata de eventos independentes, pois elas são colocadas novamente. Assim, a probabilidade de Carla retirar uma carta vermelha e, depois, uma carta azul pode ser dada por $\frac{5}{15} \cdot \frac{6}{15} = \frac{30}{225} = \frac{2}{15}$. Ao optar pelo **item c**, os estudantes consideraram que os eventos são dependentes. Em caso de dificuldades, pode-se recordar o conceito de eventos dependentes a partir de exemplos para que os estudantes analisem as características.

A **questão 5** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA23**. Essa questão leva os estudantes a analisarem as características de uma pesquisa amostral e de uma pesquisa censitária. Espera-se que eles percebam que a censitária abrange todos os elementos de uma população de interesse. Em caso de dificuldades, pode-se apresentar outros exemplos de pesquisas e pedir a eles que observem o público-alvo de cada uma delas, analisando se há algum elemento fora da população de interesse.

A **questão 6** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA23**. Com essa questão, os estudantes conseguem calcular medidas de tendência central e completar um relatório fictício, explicitando essas medidas. Em caso de dificuldades, pode-se recordar o conceito de moda, média e mediana de um conjunto de dados.

Sugestão de avaliação para a preparação para exames de larga escala

Questões	Objetivos
1	Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
2	Resolver problema que envolva porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais.
3	Calcular medida de comprimento aplicando o teorema de Tales em um feixe de retas paralelas cortado por duas retas transversais.
4	Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis.
5	Identificar a lei de formação de uma função em uma situação cotidiana.
6	Identificar a parábola que não corresponde a um gráfico de função quadrática.
7	Reconhecer relações métricas no triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras.
8	Estabelecer relação entre arcos e ângulos inscritos na circunferência.
9	Analisar relações métricas em hexágono circunscrito a uma circunferência
10	Reconhecer vistas ortogonais de um sólido geométrico.
11	Identificar elementos em um gráfico de setores.
12	Calcular a probabilidade de ocorrência de eventos dependentes.

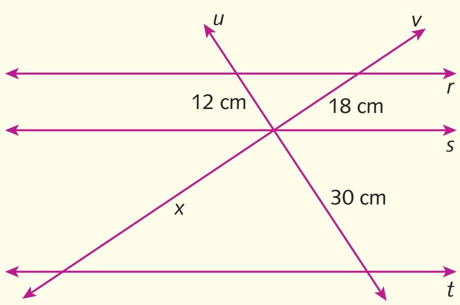
1. Se $a = 0{,}0000001$; $b = 10^{\frac{3}{2}}$; $c = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^7$, então o valor da expressão $\frac{a \cdot c}{b}$ é:

a) 10 **b)** 10^5 **c)** 10^{-5} **d)** $\frac{1}{10}$

2. Rodrigo foi a uma loja de eletrodomésticos para comprar uma máquina de lavar roupas. A máquina escolhida estava em promoção com 8% de desconto. Quando foi pagar, ele descobriu que, se pagasse à vista, receberia um desconto de 5% sobre o valor promocional. Sabendo que o preço sem desconto da máquina de lavar é R$ 998,00, podemos afirmar que pagando à vista:

a) Rodrigo terá um desconto de 13%.
b) Rodrigo deverá pagar R$ 868,26 pela máquina de lavar.
c) Rodrigo receberá um desconto maior que 13%.
d) Rodrigo pagará menos de R$ 900,00 pela máquina de lavar.

3. Na figura representada abaixo, temos: *r* // *s* // *t*



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

A medida de comprimento x é:

a) 20 cm. **b)** 24 cm. **c)** 36 cm. **d)** 45 cm.

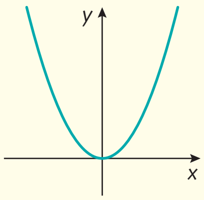
4. Assinale a alternativa que apresenta uma sentença verdadeira.

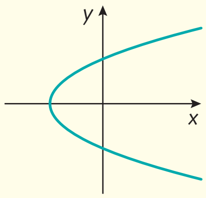
a) $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a - b)$
b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$
c) $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
d) $a^2 + b^2 = (a + b)^2$

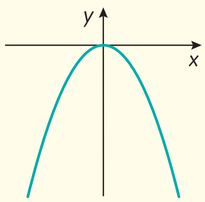
5. A empresa em que Roberta trabalha ofereceu aos funcionários uma opção de cartão-refeição que poderia ser adotada em vez do desconto do vale-refeição. Optando pelo cartão, Roberta teria que pagar uma mensalidade de R$ 40,00 e R$ 3,00 por refeição. Seja x a quantidade de refeições, qual alternativa traz uma representação algébrica da função f correspondente a essa opção de cartão-refeição?

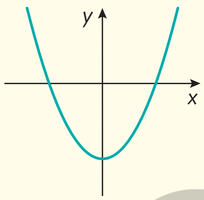
a) $f(x) = 40 + 3x$ **c)** $f(x) = 3 - 40x$
b) $f(x) = 3 + 40x$ **d)** $f(x) = 40 - 3x$

6. Assinale o gráfico que **não** representa uma função quadrática.

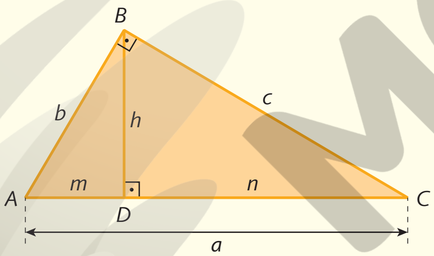
a)


c)


b)


d)


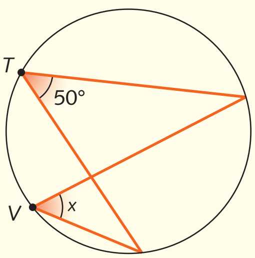
7. Observe a figura a seguir.



Considerando as relações métricas no triângulo retângulo, assinale a alternativa **incorreta**.

a) $a^2 = b^2 + c^2$ **c)** $b^2 = m \cdot n$
b) $b \cdot c = a \cdot h$ **d)** $c^2 = n \cdot a$

8. Observe a figura representada a seguir.



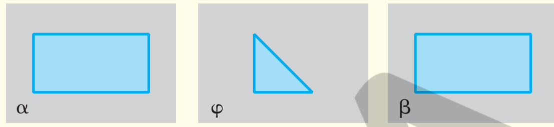
Agora, assinale a alternativa que apresenta a medida de abertura x do ângulo $\hat{V}$.

a) 25° **b)** 35° **c)** 40° **d)** 50°

9. Considere um hexágono regular cujo comprimento do lado mede a e está circunscrito a uma circunferência cujo comprimento do raio mede r. A medida de comprimento do raio dessa circunferência pode ser obtida por:

a) $r = a$ **b)** $r = a\sqrt{3}$ **c)** $r = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ **d)** $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

10. Observe algumas vistas ortogonais de um sólido geométrico.

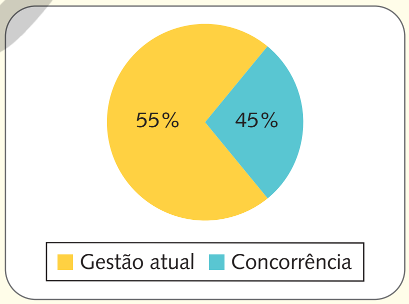


Vista ortogonal frontal | Vista ortogonal lateral esquerda | Vista ortogonal superior

Considerando essas vistas ortogonais, podemos afirmar que esse sólido geométrico é:

a) uma pirâmide de base triangular.
b) um prisma de base triangular.
c) uma pirâmide de base quadrada.
d) um prisma de base quadrada.

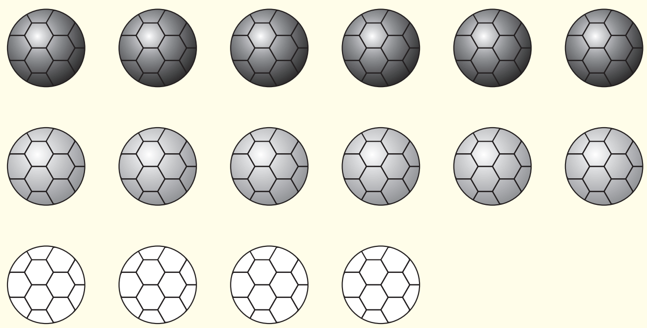
11. A associação de moradores de um bairro fez uma pesquisa entre os moradores para saber a intenção de votos para a próxima eleição dos dirigentes da entidade. O resultado foi divulgado no gráfico a seguir.



Qual alternativa indica algo que **não** está faltando para que o gráfico fique correto?

a) Proporção entre os setores
b) Título
c) Fonte
d) Eixos

12. Para propor uma questão de Matemática, Joana colocou estas bolas dentro de uma caixa.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Ela pediu a um estudante que retirasse duas bolas da caixa, uma de cada vez, sem devolver a primeira bola à caixa. Considerando essa situação, podemos afirmar que a probabilidade de o estudante ter retirado:

a) uma bola preta e, em seguida, uma bola branca é $\frac{5}{8}$.

b) duas bolas pretas é $\frac{3}{4}$.

c) uma bola branca e, em seguida, uma bola cinza é $\frac{1}{10}$.

d) uma bola preta e, em seguida, uma bola cinza é $\frac{1}{4}$

Respostas

1. alternativa c	**5.** alternativa a	**9.** alternativa d
2. alternativa d	**6.** alternativa c	**10.** alternativa b
3. alternativa d	**7.** alternativa c	**11.** alternativa d
4. alternativa c	**8.** alternativa d	**12.** alternativa c

Comentários da avaliação

Na **questão 1**, primeiro o estudante deve substituir os valores das incógnitas na expressão e, depois, fazer os cálculos com números reais, inclusive as potências com expoentes fracionários. Caso ocorra erro, verifique se os estudantes cometeram algum equívoco ao substituir os valores das incógnitas na expressão. Se julgar necessário, retome o estudo sobre propriedades da potenciação e cálculo de potências com expoentes fracionários e expoentes negativos.

Na **questão 2**, caso os estudantes tenham optado pelos **itens a** ou **b**, é possível que consideraram que bastava adicionar os descontos apresentados no enunciado. Nesse caso, saliente que, após o desconto de 8%, o valor da máquina de lavar roupas é alterado e o desconto de 5% deve ser calculado sobre o novo valor. Caso assinalem o **item c**, solicite que calculem o valor do desconto de 13% e o valor dos descontos sucessivos de 8% e 5%, considerando a alteração do valor inicial após o primeiro desconto. Espera-se que, ao calcularem esses descontos, percebam que o valor final dos descontos sucessivos é menor que o valor do desconto de 13%; portanto, esse item é incorreto. Se julgar necessário, retome o estudo sobre porcentagens e a aplicação de percentuais sucessivos.

Na **questão 3**, caso ocorra erro, verifique se os estudantes perceberam que devem usar o teorema de Tales para calcular a medida de comprimento *x*, pois temos um feixe de retas paralelas cortadas por retas transversais. Se julgar necessário, retome que as medidas de comprimento dos segmentos de reta determinados sobre a primeira transversal são proporcionais às medidas de comprimento dos segmentos de reta correspondentes determinados sobre a segunda transversal. Logo: $\frac{12}{30} = \frac{18}{x}$

Então, podemos concluir que $x = 45$ cm.

Na **questão 4**, os estudantes devem empregar seus conhecimentos sobre fatoração de expressões algébricas e sua relação com produtos notáveis para identificar a sentença verdadeira. Se eles tiverem dificuldades, solicite que substituam os valores de *a* e *b* por números naturais, como 1 e 2, e faça os cálculos para perceber se o resultado será igual ou diferente em cada membro da igualdade.

Na **questão 5**, releia o enunciado do problema com os estudantes e solicite que anotem as informações apresentadas. Observe se percebem que Roberta terá de pagar o valor fixo da mensalidade de R$ 40,00 e que, por refeição, serão acrescidos R$ 3,00 a esse valor. Se julgar oportuno, oriente-os a montar um quadro indicando o valor que Roberta pagará de acordo com a quantidade de refeições e verifique se identificam alguma regularidade. Caso seja necessário, retome o estudo da representação algébrica de uma função afim.

Na **questão 6**, solicite aos estudantes que analisem os gráficos apresentados e verifiquem se, em algum deles, há mais de um valor de *y* para cada *x*. Se julgar necessário, mostre-lhes que, no **item c**, quando *y* é diferente de zero, existem dois valores de *y* para cada *x*, sendo um negativo e um positivo; portanto, não é função.

Na **questão 7**, verifique se os estudantes percebem que o **item a** apresenta o teorema de Pitágoras: o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos. Caso seja necessário, leve-os a entender que o **item c** apresenta uma relação métrica incorreta, pois a correta seria: o quadrado da medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas de comprimento das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa ($h^2 = m \cdot n$). Se julgar necessário, represente um triângulo retângulo na lousa e retome o estudo das relações métricas.

Na **questão 8**, verifique se os estudantes perceberam que os ângulos $\hat{T}$ e $\hat{V}$ são ângulos inscritos, pois seus vértices são pontos da circunferência e seus lados são secantes à circunferência, e determinam o mesmo arco na circunferência, portanto, eles têm medidas de abertura iguais. Se julgar necessário, retome o estudo sobre relações entre arcos e ângulos inscritos na circunferência.

A **questão 9** auxilia no desenvolvimento da habilidade **EF09MA15**. Para resolver essa questão, sugere-se que os estudantes façam um esboço da situação e verifiquem que o hexágono regular circunscrito a uma circunferência pode ser dividido em seis triângulos equiláteros cuja medida de comprimento da altura é igual à medida de comprimento do raio *r* da circunferência. Como o comprimento da altura do triângulo equilátero mede $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ quando o comprimento do lado do triângulo mede *a*, então o comprimento do raio mede $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Na **questão 10**, para que os estudantes possam conferir sua resposta, se possível, acesse um *software* que permita a criação de projeções ortogonais a partir de sólidos geométricos ou disponibilize objetos parecidos com os sólidos geométricos mencionados nos itens. Se julgar necessário, acompanhe a análise de cada figura. Caso ocorra erro, retome com os estudantes o estudo sobre vistas ortogonais.

Na **questão 11**, converse com os estudantes sobre a importância dos elementos mencionados nas alternativas. Destaque que o título identifica o assunto do gráfico; a fonte identifica a origem dos dados apresentados no gráfico e contribui para lhe dar credibilidade; a proporção entre os setores é fundamental para que a leitura de um gráfico de setores não seja equivocada. Observe se eles percebem que a falha nesses elementos pode levar à interpretação enganosa dos dados.

Na **questão 12**, verifique se os estudantes percebem que a situação apresentada envolve eventos dependentes, pois a retirada da primeira bola da caixa, sem haver reposição, torna diferente o número de bolas na caixa para a segunda retirada. Observe se eles identificam que, inicialmente, a caixa tem 16 bolas e, depois da primeira retirada, terá 15 bolas. Analise cada afirmação com os estudantes e relembre que, para calcular a probabilidade de cada item, é preciso multiplicar a probabilidade de um evento pela probabilidade do outro. Se julgar necessário, retome o estudo sobre experimentos aleatórios, com eventos independentes e dependentes, e peça aos estudantes que calculem a probabilidade de ocorrência nos dois casos.

SUGESTÕES PARA PESQUISA OU CONSULTA PARA O PROFESSOR

Sugestões de livros

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Tradução de: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2018.

O livro aponta por que a Matemática é vista como vilã pelas pessoas. Por meio de pesquisas, mostra aos professores e pais como ajudar os estudantes a transformar as experiências negativas com a Matemática em mentalidades de crescimento. Aborda ainda a questão do erro como uma forma de crescimento e traz atividades práticas que podem ser aplicadas dentro e fora da sala de aula.

BOALER, J.; MUNSON, J.; WILLIAN, C. **Mentalidades matemáticas na sala de aula**: ensino fundamental. Porto Alegre: Penso, 2019.

Este livro traz atividades práticas e desafiadoras – alinhadas à BNCC – que permitem ao professor engajar seus estudantes a partir de uma nova concepção de Matemática, mais aberta e criativa e que promove o protagonismo dos estudantes.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica**. Tese de Doutorado. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: UFRGS, 2017.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores). Nesse trabalho encontram-se diferentes sugestões de atividades que podem ser realizadas em sala de aula sem o uso do computador.

NACARATO, A. M.; CUSTÓDIO, I. A. (org.). **O desenvolvimento do pensamento algébrico na educação básica [livro eletrônico]**: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2018.

A obra compartilha propostas de sala de aula relacionadas ao Pensamento Algébrico que vão da Educação Infantil ao Fundamental II. Traz tarefas elaboradas e colocadas em prática, bem como os resultados obtidos com esse trabalho nas diferentes turmas pelos integrantes do Grucomat (Grupo Colaborativo de Matemática). O *link* de acesso para a obra está disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ebook_desenv.pdf.

PONTE, J. P. *et al*. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

O livro mostra como práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos podem ser usadas na sala de aula e as vantagens e as dificuldades de se trabalhar nessa perspectiva.

TORRES, J. D. S. **Jogos de Matemática e de Raciocínio Lógico**. 2. ed. Petrópolis: Vozes, 2013.

O livro apresenta uma coletânea de jogos de matemática e raciocínio lógico, que podem ser propostos em qualquer momento do ano letivo. São propostos jogos com números, jogos com xadrez e dominó, sofismas e diferentes tipos de enigma.

Sugestões de *sites*

- Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM):

http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/
Acesso em: 5 jun. 2022.
Disponibiliza informações sobre eventos regionais, nacionais e internacionais na área de educação matemática.

- Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec):

http://www.edumatec.mat.ufrgs.br
Acesso em: 5 jun. 2022.
O *site* oferece *softwares*, atividades, artigos e *links* de interesse para o professor de Matemática.

- Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)

http://www.usp.br/line/lem1.html
Acesso em: 5 jun. 2022.
Site do Laboratório de Ensino de Matemática objetiva difundir o ensino de Matemática por meio do computador, trazendo *softwares* educacionais, apostilas e informações nessa área.

- Plataforma Laplace

https://www.bancolaplace.com.br/
Acesso em: 5 jun. 2022.
A plataforma traz questões com resoluções completas, jogos, resumos teóricos e videoaulas por assunto ou habilidade. O professor pode ainda gerar provas digitais e simulados dos principais vestibulares com correção automática.

- Plataforma Youcubed:

https://www.youcubed.org/pt-br/
Acesso em: 5 jun. 2022.
A plataforma foi desenvolvida pela Universidade de Stanford, pelas professoras Jo Boaler e Cathy Willians. Foi traduzido pelo Instituto Sidarta e Itaú Social. Traz conteúdos como atividades, jogos, aplicativos e videoaulas para ensinar Matemática de forma criativa. É baseado nas ideias do livro *Mentalidades matemáticas*, de Jo Boaler.

- Rede Mentalidades Matemáticas (Rede MM):

https://mentalidadesmatematicas.org.br/
Acesso em: 19 jul. 2022.
O *site* é uma criação do Instituto Sidarta em parceria com o Centro de Pesquisas Youcubed, da Universidade de Stanford, com o suporte do Itaú Social. Traz informações, recursos, cursos, artigos científicos e atividades variadas para a aplicação das ideias das mentalidades matemáticas, propagadas pela professora Jo Boaler.

- *Site* oficial da família e dos admiradores do matemático Malba Tahan:

https://malbatahan.com.br/
Acesso em: 19 jul. 2022.
O *site* traz teses, dissertações, artigos e relatos referentes a esse matemático que esteve à frente do seu tempo, propondo uma Matemática com significado. Possui desafios matemáticos.

- Nova escola:

https://novaescola.org.br/conteudo/12858/inclusao-voce-ja-ouviu-falar-em-tecnologias-assistivas
Acesso em: 8 ago. 2022.
Disponibiliza diversos recursos digitais gratuitos que poderão ajudá-lo na inclusão de estudantes com deficiência.

Sugestões de vídeos

- Coleção Matemática Multimídia, da Universidade de Campinas (Unicamp):

https://m3.ime.unicamp.br/
Acesso em: 5 jun. 2022.
O *site* traz diversos vídeos com conteúdos de Matemática voltados para o Ensino Médio. Alguns desses conteúdos podem ser trabalhados com estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental e são acompanhados de um "Guia do Professor". Além dos vídeos, no *site* é possível encontrar experimentos, *softwares* e áudios.

Resoluções e comentários das atividades

REVISÃO DOS CONTEÚDOS DE ANOS ANTERIORES

Para Capítulo 1 - Potenciação e radiciação com números reais

Páginas 10 e 11

1. a) Falsa, pois 7,3 é um número racional, que pode ser representado como $\frac{73}{10}$.
   b) Verdadeira, pois $\sqrt{12}$ é um número real.
   c) Falsa, pois $-\frac{3}{4}$ é um número racional.
   d) Verdadeira, pois $0,333... = \frac{1}{3}$, ou seja, é um número racional.

2. Como $\sqrt{16} = 4$ e $-\sqrt{81} = -9$, os números dos itens **a** e **e** são racionais. O número do item **b** é um decimal exato, o do item **d** e uma dízima periódica e o do item **g** é um número na forma de fração, portanto são também números racionais.
   Os números dos itens **c**, **f** e **h** não são racionais, porque a representação decimal destes números tem infinitas casas decimais e não é periódica (são números irracionais).

3. a) $11^7 \cdot 11^{12} = 11^{7+12} = 11^{19}$
   b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{15} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{10+15} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{25}$
   c) $31^{15} : 31^{14} = 31^{15-14} = 31^1$
   d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{20} : \left(\frac{3}{5}\right)^{12} = \left(\frac{3}{5}\right)^{20-12} = \left(\frac{3}{5}\right)^{8}$

4. a) Incorreta, pois $3^{10} = 3^{8+2} = 3^8 \cdot 3^2$.
   b) Incorreta, pois $5^9 : 5^3 = 5^{9-3} = 5^6$
   c) Correta, pois $7^5 \cdot 7^6 = 7^{5+6} = 7^{11}$.
   d) Correta, pois $100^{12} : 100^{11} = 100^{12-11} = 100^1 = 100$

5. a) $2\,116 = 2^2 \cdot 23^2$
   $\sqrt{2\,116} = 2 \cdot 23 = 46$
   b) $625 = 5^4$
   $\sqrt{625} = 5^2 = 25$
   c) $972 = 2^2 \cdot 3^5$
   972 não tem raiz exata
   d) $784 = 2^4 \cdot 7^2$
   $\sqrt{784} = 2^2 \cdot 7 = 28$

6. a) Entre 49 (7^2) e 64 (8^2).
   b) Entre 81 (9^2) e 100 (10^2).
   c) Entre 169 (13^2) e 196 (14^2).
   d) Entre 361 (19^2) e 400 (20^2).

7. Utilizando as respostas da atividade anterior:
   a) Calculamos os quadrados dos números entre 7 ($\sqrt{49} = 7$) e 8 ($\sqrt{64} = 8$), com uma casa decimal:
   $7,1^2 = 50,41$ (< 51) $7,2^2 = 51,84$ (> 51)
   Assim, 7,1 é a aproximação para $\sqrt{51}$.
   b) Calculamos os quadrados dos números entre 9 ($\sqrt{81} = 9$) e 10 ($\sqrt{100} = 10$), com uma casa decimal:
   $9,5^2 = 90,25$ (< 93) $9,7^2 = 94,09$ (> 93)
   $9,6^2 = 92,16$ (< 93)
   Assim, 9,6 é a aproximação para $\sqrt{93}$.
   c) Calculamos os quadrados dos números entre 13 ($\sqrt{169} = 13$) e 14 ($\sqrt{196} = 14$), com uma casa decimal:
   $13,5^2 = 182,25$ (< 190) $13,7^2 = 187,69$ (< 190)
   $13,6^2 = 184,96$ (< 190) $13,8^2 = 190,44$ (> 190)
   Assim, 13,8 é a aproximação para $\sqrt{190}$.
   d) Calculamos os quadrados dos números entre 19 ($\sqrt{361} = 19$) e 20 ($\sqrt{400} = 20$), com uma casa decimal:
   $19,5^2 = 380,25$ (< 388) $19,7^2 = 388,09$ (> 388)
   $19,6^2 = 384,16$ (< 388)
   Assim, 19,7 é a aproximação para $\sqrt{388}$.

Para Capítulo 2 - Matemática financeira

Página 11

8. a) $0,42 \cdot 50 = 21$
   b) $0,16 \cdot 160 = 25,6$
   c) $0,6 \cdot 32 = 19,2$
   d) $0,95 \cdot 8 = 7,6$
   e) $1,2 \cdot 68 = 81,6$

9. a) $0,15 \cdot 900 = 135$
   Então, o novo valor será R$ 1035,00, pois $900 + 135 = 1035$.
   b) $0,1 \cdot 900 = 90$
   Então, o novo valor será R$ 990,00, pois $900 + 90 = 990$.
   c) $0,2 \cdot 900 = 180$
   Então, o novo valor será R$ 720,00, pois $900 - 180 = 720$.
   d) $0,01 \cdot 900 = 9$
   Então, o novo valor será R$ 891,00, pois $900 - 9 = 891$.

Para Capítulo 3 - Segmentos proporcionais e semelhança

Página 11

10. Aplicando a propriedade fundamental das proporções, temos:
    a) $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$
    $5 \cdot 8 = 4 \cdot 10 \Rightarrow 40 = 40$ (sentença verdadeira)
    Nesse caso, formam uma proporção.
    b) $\frac{1}{3} = \frac{2}{4}$
    $1 \cdot 4 = 3 \cdot 2 \Rightarrow 4 = 6$ (sentença falsa)
    Nesse caso, não formam uma proporção.
    c) $\frac{18}{3} = \frac{6}{1}$
    $18 \cdot 1 = 3 \cdot 6 \Rightarrow 18 = 18$ (sentença verdadeira)
    Nesse caso, formam uma proporção.
    d) $\frac{7}{5} = \frac{10}{14}$
    $7 \cdot 14 = 5 \cdot 10 \Rightarrow 98 = 50$ (sentença falsa)
    Nesse caso, não formam uma proporção.
    Logo, os pares de razões dos itens **a** e **c** formam uma proporção.

Para Capítulo 4 - Fatoração e equações do 2º grau

Páginas 11 e 12

11. **a)** Substituindo x por -1 em $45 + 43x$, temos:

$45 + 43 \cdot (-1) = 45 - 43 = 2$

b) Substituindo x por -1 em $\frac{12x - 1}{10x}$, temos:

$\frac{12 \cdot (-1) - 1}{10 \cdot (-1)} = \frac{-12 - 1}{-10} = \frac{-13}{-10} = 1{,}3$

c) Substituindo x por -1 em $2x^2 - x$, temos:

$2 \cdot (-1)^2 - (-1) = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

12. **a)** $6a - 9b + 12b - a = 5a + 3b$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = \frac{6x}{12} + \frac{4x}{12} + \frac{2x}{12} = \frac{12x}{12} = x$

c) $2y - 9 + 8y + 9 = 10y$

13. **a)** $22 \cdot (9 + 3x - 2y) = 22 \cdot 9 + 22 \cdot 3x + 22 \cdot (-2y) =$

$= 198 + 66x - 44y$

b) $a \cdot b \cdot (-3b) = -3ab^2$

c) $\frac{b}{4} \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) = -\frac{ab}{12}$

14. **a)** Equação do 2º grau incompleta, pois $c = 0$.

b) Equação do 2º grau incompleta, pois $b = 0$.

c) Não é uma equação do 2º grau, pois o maior expoente da incógnita é 1.

d) Equação do 2º grau completa.

15. **a)** $5x^2 + 5x + 5 = 0$

b) $9x^2 - x = 0$

c) $9x^2 - 1 = 0$

16. **a)** Falsa, pois, se substituirmos x por 0 na equação $2x^2 - 5x = 0$, teremos:

$2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (sentença verdadeira)

Logo, 0 é raiz dessa equação.

b) Verdadeira, pois, se substituirmos x por 0 na equação $x^2 + \frac{x}{2} = 0$, teremos:

$0^2 + \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow 0 = 0$ (sentença verdadeira)

Logo, 0 é raiz dessa equação.

c) Falsa, pois, se substituirmos x por 1 na equação $x^2 - x + 5 = 0$, teremos:

$1^2 - 1 + 5 = 0 \Rightarrow 5 = 0$ (sentença falsa)

Logo, 1 não é raiz dessa equação.

d) Verdadeira, pois, se substituirmos x por 2 na equação $x^2 - 2x + 1 = 0$, teremos:

$2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (sentença falsa)

Logo, 2 não é raiz dessa equação.

17. Substituindo o número de cada item na equação $x^2 + 2x - 3 = 0$, teremos:

a) $(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 0 \Rightarrow 9 - 6 - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 0$ (sentença verdadeira)

Então, -3 é raiz da equação.

b) $0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = 0 \Rightarrow -3 = 0$ (sentença falsa)

Então, 0 não é raiz da equação.

c) $1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0 \Rightarrow 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = 0$ (sentença verdadeira)

Então, 1 é raiz da equação.

d) $2^2 + 2 \cdot 2 - 3 = 0 \Rightarrow 4 + 4 - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5 = 0$ (sentença falsa)

Então, 2 não é raiz da equação.

Para Capítulo 5 - Função afim

Páginas 12 e 13

18. Comparando os valores obtidos em cada quadro com as escalas dos eixos de cada gráfico, temos a seguinte correspondência: A-III; B-I; C-II.

Para Capítulo 6 - Função quadrática

Páginas 13 e 14

19. **a)** Como a medida da área corresponde ao quadrado da medida do comprimento do lado do quadrado, podemos escrever $y = a^2$, em que a é um número real maior que 0.

b) Se $a = 3{,}5$ cm, então:

$y = (3{,}5 \text{ cm})^2 = 12{,}25 \text{ cm}^2$

Nesse caso, a medida da área do quadrado será 12,25 cm².

c) Se $y = 64 \text{ cm}^2$, então:

$64 \text{ cm}^2 = a^2 \Rightarrow a = 8$ cm, pois $a > 0$.

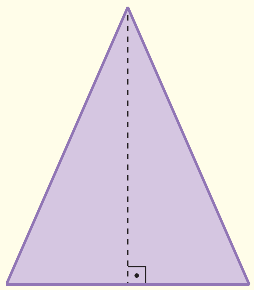
Nesse caso, a medida de comprimento do lado do quadrado será 8 cm.

Para Capítulo 7 - Relações métricas no triângulo retângulo

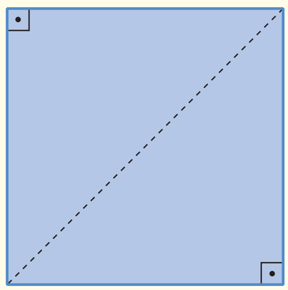
Página 14

20. Exemplo de resposta:

a)



b)



Para Capítulo 8 - Circunferência, arcos e ângulos

Página 14

21. **a)** Verdadeira, pois C é o centro da circunferência e os pontos A e B pertencem à circunferência.

b) Verdadeira.

c) Verdadeira.

d) Falsa, pois o segmento de reta $\overline{AC}$ é um raio da circunferência, com medida de comprimento igual a 4 cm.

Para Capítulo 9 - Polígonos regulares

Páginas 14 e 15

22. Para calcular a medida de abertura do ângulo interno (a_i) e a medida de abertura do ângulo externo (a_e) de um polígono regular utilizamos, respectivamente, as relações:

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$ e $a_e = \frac{360°}{n}$, em que n é o número de lados do polígono regular.

a) $a_i = \frac{(5-2) \cdot 180°}{5} = 3 \cdot 36° = 108°$

b) $a_i = \frac{(8-2) \cdot 180°}{8} = 6 \cdot 22{,}5° = 135°$

c) $a_e = \frac{360°}{10} = 36°$

d) $a_e = \frac{360°}{6} = 60°$

23. Como a medida da abertura do ângulo central de um polígono regular é dada por $a_c = \frac{360°}{n}$, em que n é o número de lados do polígono regular, então a medida da abertura do ângulo central de um triângulo equilátero é dada por:

$a_c = \frac{360°}{3} = 120°$

24. $G\hat{O}H$ é um dos ângulo centrais de um octógono regular. Então, a medida de sua abertura é dada por:

$\text{med}(G\hat{O}H) = \frac{360°}{8} = 45°$

25. Devemos descobrir o número de lados n do polígono regular, sabendo que a medida da abertura de um dos seus ângulos centrais é igual a 60°, ou seja, $60° = \frac{360°}{n}$. Assim:

$n = \frac{360°}{60°} = 6$

Assim, o polígono é um hexágono regular (polígono de 6 lados), o que corresponde ao item **d**.

Para Capítulo 10 – Vistas ortogonais e volumes

Página 15

26. Sabendo que $V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot h$, fazemos os cálculos para cada linha do quadro:

$120\ \text{cm}^3 = a \cdot 2\ \text{cm} \cdot 6\ \text{cm} \Rightarrow a = \frac{120\ \text{cm}^3}{12\ \text{cm}^2} = 10\ \text{cm}$

$0{,}3\ \text{cm}^3 = 0{,}5\ \text{cm} \cdot 0{,}2\ \text{cm} \cdot h \Rightarrow h = \frac{0{,}3\ \text{cm}^3}{0{,}1\ \text{cm}^2} = 3\ \text{cm}$

$30\ \text{cm} = 1\ \text{cm} \cdot b \cdot 5\ \text{cm} \Rightarrow b = \frac{30\ \text{cm}^3}{5\ \text{cm}^2} = 6\ \text{cm}$

$V_{\text{paralelepípedo}} = 2\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm} \cdot 2\ \text{cm} = 8\ \text{cm}^3$

Considerando as medidas de comprimento, altura e largura em centímetro e a medida de volume em centímetro cúbico, o quadro completo ficará:

Medida do comprimento	Medida da altura	Medida da largura	Medida do volume
10	2	6	120
0,5	3	0,2	0,3
1	5	6	30
2	2	2	8

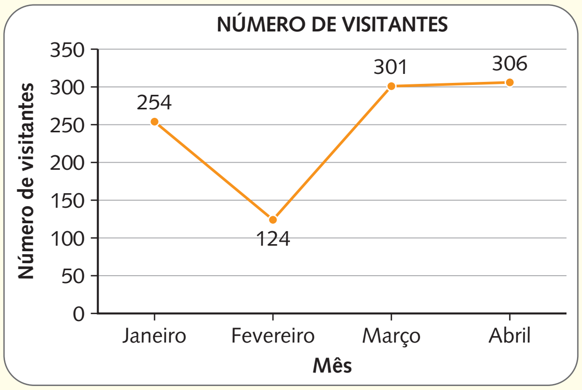
Para Capítulo 11 – Construção de gráficos estatísticos

Páginas 15 e 16

27. a) O 1º é um gráfico de setores e o 2º é um gráfico de barras.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes observem que os dois gráficos estão corretos e que o gráfico de setores, nesse caso, não informa a quantidade vendida de cada produto, apenas o percentual de venda de cada produto em relação ao total vendido pela loja em 2023. Então, dependendo do que se procura informar, um tipo específico de gráfico pode ser mais adequado.

28. Exemplo de resposta:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos por Camila em dezembro de 2023.

Para Capítulo 12 – Probabilidade e estatística

Página 16

29. a) Como são 4 dígitos e para cada dígito temos 10 escolhas (algarismos de 0 a 9), teremos 10 000 possibilidades, pois, pelo princípio multiplicativo, temos: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$.

b) Como a variação ocorrerá apenas nos dois últimos dígitos, teremos 100 possibilidades, pois $10 \cdot 10 = 100$.

c) Como há 5 algarismos ímpares (1, 3, 5, 7 e 9), serão 625 possibilidades, pois $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 25 = 625$.

30. a) $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ c) $\frac{15}{30} = \frac{1}{2}$

CAPÍTULO 1 – POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO COM NÚMEROS REAIS

Trocando ideias – página 18

A quantidade de triângulos com fundo preto triplica em relação à quantidade na figura anterior. Assim, essa quantidade em cada figura na forma de potência ficará:

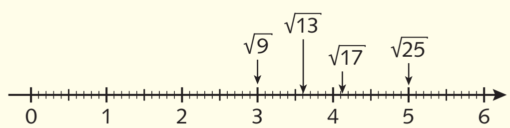
- $1 = 3^0$; $3 = 3^1$; $9 = 3^2$; $27 = 3^3$; $81 = 3^4$; $243 = 3^5$
- Resposta pessoal. Sugira aos estudantes que realizarem a pesquisa em diferentes *sites* que apresentem boas referências.

Representação geométrica de um número irracional – página 20

- $-2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$. Espera-se que os estudantes identifiquem que esses números são irracionais, pois não podem ser escritos como frações compostas por numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.

Atividades – página 21

1. Considerado $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{13} \simeq 3{,}6$; $\sqrt{17} \simeq 4{,}12$; e $\sqrt{25} = 5$, temos:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

2. a) Não é irracional, pois $\sqrt{1} = 1$.

b) É irracional.

c) É irracional.

d) Não é irracional, pois $\sqrt{4} = 2$.

e) É irracional.

3. a) Falsa, por exemplo, $\sqrt{81} = 9$, portanto, não é irracional.

b) Verdadeira, essa é a característica de qualquer número irracional.

c) Verdadeira, pois $\sqrt{120} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} = 2\sqrt{30}$ que é irracional.

Atividades - páginas 22 e 23

4. a) $0^7 = 0$

b) $-5^2 = -(5 \cdot 5) = -25$

c) $-(1{,}2)^2 = -(1{,}2 \cdot 1{,}2) = -1{,}44$

d) $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

e) $-(0{,}3)^0 = -1$

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$

g) $-\left(\frac{2}{5}\right)^3 = -\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$

h) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$

5. a) $7^{-1} = \left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 5^2 = 25$

c) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-1} = \left(\frac{9}{5}\right)^1 = \frac{9}{5}$

d) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-1} = \left(-\frac{8}{3}\right)^1 = -\frac{8}{3}$

e) $(-3)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$

f) $10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right) \cdot \left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{100}$

g) $(-1)^{-5} = \left(-\frac{1}{1}\right)^5 = -1$

h) $\left(\frac{1}{100}\right)^{-1} = 100^1 = 100$

6. a) $\frac{1}{10^4} = 10^{-4}$

b) $\frac{1}{5^7} = 5^{-7}$

c) $\frac{1}{2^3} = 2^{-3}$

d) $\frac{1}{7^5} = 7^{-5}$

7. a) $64 = 2^6$

b) $\frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} = 2^{-5}$

c) $256 = 2^8$

d) $\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

8. a) $(-3)^2 + (-3)^3 = 9 - 27 = -18$

b) $-(-2)^4 + (-2)^5 \cdot 4^{-3} = -16 - 32 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = -16 - 32 \cdot \frac{1}{64} =$

$= -16 - \frac{1}{2} = -\frac{32}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{33}{2}$

c) $(4^0 : 4^{-1}) : (4^{-1} : 4^{-2}) = \left(1 : \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{4} : \frac{1}{16}\right) = (1 \cdot 4) : \left(\frac{1}{4} \cdot 16\right) = 4 : 4 = 1$

d) $\dfrac{(-1)^5}{(-2)^{-2} + (0{,}1)^{-2}} = \dfrac{-1}{\left(\frac{1}{-2}\right)^2 + 10^2} = \dfrac{-1}{\frac{1}{4} + 100} = \dfrac{-1}{\frac{401}{4}} =$

$= -1 \cdot \frac{4}{401} = -\frac{4}{401}$

e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{9} - (-3)^2 = \frac{1}{9} - 9 = \frac{1}{9} - \frac{81}{9} = -\frac{80}{9}$

Veja que interessante - página 24

Realizando os cálculos conforme orientado, temos:

a) 8 b) 0,125 c) –0,125 d) 81 e) 81

Atividades - página 24

9. a) $3^5 \cdot 3^{-2} = 3^{5+(-2)} = 3^3$

b) $m^5 \cdot m^{-6} = m^{5+(-6)} = m^{-1}$, com $m \neq 0$.

c) $(0{,}1)^{-3} \cdot (0{,}1)^3 = 0{,}1^{-3+3} = 0{,}1^0$

10. a) $(5^2)^{-4} = 5^{2 \cdot (-4)} = 5^{-8}$

b) $(n^{-5})^4 = n^{-5 \cdot 4} = n^{-20}$, com $n \neq 0$.

c) $(5^2)^n = 5^{2n}$

d) $\frac{x^3}{x^{-2}} = x^{3-(-2)} = x^5$, com $x \neq 0$.

11. a) $(3 \cdot 7)^4 = 3^4 \cdot 7^4$

b) $(2^4 \cdot a^{-3})^{-1} = 2^{-4} \cdot a^3$, com $a \neq 0$.

c) $(a^{3x} : b^x)^{-4} = a^{-12x} : b^{-4x}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

12. $2^{3^2} = 2^9 = 512$

$(2^3)^2 = 2^6 = 64$

13. $(3^{-4})^5 = 3^{-20} = \frac{1}{3^{20}}$

14. a) $10^{-4} : (10^{-5})^2 = 10^{-4} : 10^{-10} = 10^{-4-(-10)} = 10^6$

b) $10^{-4} : (10^{-5} \cdot 10^3) = 10^{-4} : (10^{-5+3}) = 10^{-4} : 10^{-2} =$

$= 10^{-4-(-2)} = 10^{-2}$

15. a) $\dfrac{x^{10} \cdot (x^2)^4}{x^{23} : x^2} = \dfrac{x^{10} \cdot x^8}{x^{21}} = \dfrac{x^{18}}{x^{21}} = x^{-3}$, com $x \neq 0$.

b) $\dfrac{5^{3x-2} \cdot 5^{x-1}}{5^{x-5}} = 5^{3x-2+x-1-(x-5)} = 5^{3x+2}$

Veja que interessante - página 25

- $2^{10} = 1\,024$ e $10^3 = 1\,000$;
- $2^{20} = 1\,048\,576$ e $10^6 = 1\,000\,000$;
- $2^{30} = 1\,073\,741\,824$ e $10^9 = 1\,000\,000\,000$.

Espera-se que os estudantes identifiquem que os resultados desses números são bem próximos.

Lendo e aprendendo - página 28

1. a) Em novembro de 2021.

b) Segundo o IBGE, um em quatro brasileiros não estava conectado à internet em 2021. Escrevendo essa razão em forma de fração e de porcentagem, temos:

$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 25\%$

Portanto, 25% dos brasileiros não estavam conectados à internet em 2021.

2. Como a medida de velocidade da rede 5G pode chegar a 10 *gigabytes* por segundo, temos:

$10 \text{ GB} \simeq 10 \cdot 10^9 \text{ B} = 10^{10} \text{ B}$

Alternativa **a**.

3. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes consigam observar as diferentes opiniões expressas no texto, formulando argumentos em um pequeno texto que exponha suas opiniões sobre o assunto.

4. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes possam discutir um pouco sobre as vivências relacionadas ao tema *fake news*, de grande importância para o exercício da cidadania.

Atividades – páginas 29 e 30

16. **a)** $8,57 \cdot 10^5$ **c)** $2 \cdot 10^{-7}$ **e)** $1,08 \cdot 10^9$

b) $9,45 \cdot 10^{11}$ **d)** $1,3 \cdot 10^7$ **f)** $1,3 \cdot 10^{-10}$

17. Conhecemos a quantidade aproximada de hemácias e de leucócitos em 1 mm³ de sangue. Para determinar as quantidades em 5 L de sangue, fazemos a correspondência:

$5 \text{ L} = 5 \text{ dm}^3 = 5\,000\,000 \text{ mm}^3 = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^3$

Se em 1 mm³ de sangue, há aproximadamente $5 \cdot 10^6$ hemácias, em 5 L de sangue, temos a seguinte quantidade de hemácias:

$5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^6 = 25 \cdot 10^{12} = 2,5 \cdot 10^{13}$

Se em 1 mm³ de sangue, há aproximadamente $8 \cdot 10^3$ leucócitos, em 5 L de sangue, temos a seguinte quantidade de leucócitos:

$8 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^6 = 40 \cdot 10^9 = 4 \cdot 10^{10}$

Portanto, um adulto tem aproximadamente $2,5 \cdot 10^{13}$ hemácias e $4 \cdot 10^{10}$ leucócitos.

18. $18 \text{ g} = 18\,000 \text{ mg} = 1,8 \cdot 10^4 \text{ mg}$

Então:

$6,02 \cdot 10^{23} : (1,8 \cdot 10)^4 \simeq 3,34 \cdot 10^{19}$

Portanto, em 1 mg de água, há aproximadamente $3,34 \cdot 10^{19}$ moléculas.

19. Respostas pessoais. Exemplos de resposta:

1º número: $25\,100\,000\,000\,000 = 2,51 \cdot 10^{13}$

2º número: $0,0000501 = 5,01 \cdot 10^{-5}$

Atividades – página 31

20. **a)** Raiz quadrada de sete.

b) Raiz cúbica de treze.

c) Raiz quarta de dezessete.

d) Raiz sexta de quarenta e dois.

21. **a)** 7 **b)** 343 **c)** $\sqrt[3]{343}$ **d)** 3

22. Resposta pessoal. Exemplos de resposta:

Racionais: $\sqrt[3]{216}$ e $\sqrt[7]{1}$

Irracionais: $\sqrt[3]{9}$ e $\sqrt[6]{40}$

Atividades – página 32

23. **a)** $\sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$

b) $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4$

c) $\pm\sqrt{25} = \pm\sqrt{5^2} = \pm 5$

d) $-\sqrt{144} = -\sqrt{12^2} = -12$

e) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

f) $3\sqrt{16} = 3\sqrt{4^2} = 3 \cdot 4 = 12$

24. **a)** $-\sqrt{81} - \sqrt[3]{-27} = -9 - (-3) = -9 + 3 = -6$

b) $\sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{-1} + \sqrt{0,25} = 0 - 1 + 0,5 = -0,5$

25. **a)** $a = 100^2 = 10\,000$

b) $a = (-6)^3 = -216$

c) $a = 5^4 = 625$

26. **a)** $\sqrt{0} = 0$, então é número real.

b) Não é número real, pois nenhum número real elevado ao quadrado é igual a –1.

c) $\sqrt{1} = 1$, então é número real.

d) $\sqrt[3]{-1} = -1$, então é número real.

e) Não é número real, pois nenhum número real elevado à sexta potência é igual a –1.

f) Não é número real, pois nenhum número real elevado à décima sexta potência é igual a –1.

27. **a)** $2x = 6^2 \xrightarrow{x \geqslant 0} x = \dfrac{36}{2} \Rightarrow x = 18$

b) $x + 1 = 2^3 \Rightarrow x = 8 - 1 \Rightarrow x = 7$

c) $x + 2 = 5^2 \xrightarrow{x \geqslant -2} x = 25 - 2 \Rightarrow x = 23$

28. $\sqrt{64} + \sqrt{36} - \left(\sqrt{100}\right) = 8 + 6 - 10 = 4$

29. $x = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + 2}}} =$

$= \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}} = \sqrt{21 + \sqrt{13 + 3}} = \sqrt{21 + \sqrt{16}} =$

$= \sqrt{21 + 4} = \sqrt{25} = 5$

Logo, $x = 5$.

Atividades – páginas 34 e 35

30. **a)** $\sqrt{7^2} = 7$

b) $\sqrt[3]{11^3} = 11$

c) $\sqrt{x^2} = |x|$

d) $\sqrt[5]{6^5} = 6$

e) $\sqrt[3]{(a + b)^3} = a + b$

f) $\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3} = ab$

31. **a)** $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$

b) $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

c) $\sqrt[8]{256} = \sqrt[8]{2^8} = 2$

d) $\sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

e) $\sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11$

f) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{5^4} = 5$

32. **a)** $\sqrt{5 \cdot 17} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{17}$

b) $\sqrt[4]{5 \cdot 7 \cdot 11} = \sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[4]{7} \cdot \sqrt[4]{11}$

c) $\sqrt[5]{2 \cdot x^4} = \sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{x^4}$, com $x \geqslant 0$.

d) $\sqrt[3]{10 \cdot 20} = \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{20}$

e) $\sqrt[3]{3 \cdot 7} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{7}$

f) $\sqrt[3]{7 \cdot a^2 \cdot b} = \sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b}$, com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$.

33. **a)** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{11}}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{17}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, com $a \geqslant 0$ e $b > 0$.

e) $\dfrac{\sqrt[5]{2x}}{\sqrt[5]{5y^2}}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$

34. Simplificando os radicais, temos:

a) $\sqrt[4:2]{3^{2:2}} = \sqrt{3}$

b) $\sqrt[5:5]{7^{10:5}} = 7^2$

c) $\sqrt[8:2]{7^{6:2}} = \sqrt[4]{7^3}$

d) $\sqrt[12:3]{2^{3:3} \cdot a^{6:3}} = \sqrt[4]{2 \cdot a^2}$, com $a \geqslant 0$.

e) $\sqrt[15:5]{5^{10:5}} = \sqrt[3]{5^2}$

f) $\sqrt[6:2]{a^{2:2} \cdot b^{2:2}} = \sqrt[3]{a \cdot b}$, com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$.

35. **a)** $\sqrt[8]{64} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[8:2]{2^{6:2}} = \sqrt[4]{2^3}$

b) $\sqrt[10]{625} = \sqrt[10]{5^4} = \sqrt[10:2]{5^{4:2}} = \sqrt[5]{5^2}$

c) $\sqrt[20]{243} = \sqrt[20]{3^5} = \sqrt[20:5]{3^{5:5}} = \sqrt[4]{3}$

d) $\sqrt[14]{128} = \sqrt[14]{2^7} = \sqrt[14:7]{2^{7:7}} = \sqrt{2}$

36. a) $\sqrt[2 \cdot 2]{5} = \sqrt[4]{5}$
b) $\sqrt[5 \cdot 2]{13} = \sqrt[10]{13}$
c) $\sqrt[3 \cdot 2]{7} = \sqrt[6]{7}$
d) $\sqrt[5 \cdot 6]{11} = \sqrt[30]{11}$
e) $\sqrt[3 \cdot 2 \cdot 5]{4} = \sqrt[30]{4}$
f) $\sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2]{x} = \sqrt[16]{x}$, com $x \geqslant 0$.

37. a) $\sqrt[15]{2^{10}} = \sqrt[x]{2^2}$, em que x é um número natural maior ou igual a 2.
$\sqrt[15:5]{2^{10:5}} = \sqrt[x]{2^2}$
$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[x]{2^2}$
$x = 3$
b) $\sqrt[6]{13^9} = \sqrt{13^x}$, em que x é um número natural maior ou igual a 2.
$\sqrt[6:3]{13^{9:3}} = \sqrt{13^x}$
$\sqrt{13^3} = \sqrt{13^x}$
$x = 3$
c) $\sqrt[x]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[15]{7}$, em que x é um número natural maior ou igual a 2.
$\sqrt[x \cdot 3]{7} = \sqrt[15]{7}$
$x \cdot 3 = 15 \Rightarrow x = 15 : 3 \Rightarrow x = 5$
d) $\sqrt[9]{6^6} = \sqrt[3]{6^x}$, em que x é um número natural maior ou igual a 2.
$\sqrt[9:3]{6^{6:3}} = \sqrt[3]{6^x}$
$\sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{6^x}$
$x = 2$

38. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{3 \cdot 5} = \sqrt{15}$
b) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{11} = \sqrt[3]{7 \cdot 11} = \sqrt[3]{77}$
c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 7} = \sqrt{70}$
d) $\sqrt[12]{5} \cdot \sqrt[12]{10} = \sqrt[12]{5 \cdot 10} = \sqrt[12]{50}$
e) $\dfrac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{8}} = \dfrac{\sqrt{12 \cdot 15}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\dfrac{180}{8}} = \sqrt{\dfrac{45}{2}}$
f) $\dfrac{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{15}} = \dfrac{\sqrt[3]{9 \cdot 10}}{\sqrt[3]{12 \cdot 15}} = \sqrt[3]{\dfrac{90}{180}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$
g) $\dfrac{\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{10}}}{\sqrt[6]{120}} = \dfrac{\sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{10}}{\sqrt[6]{120}} = \dfrac{\sqrt[6]{40}}{\sqrt[6]{120}} = \sqrt[6]{\dfrac{40}{120}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{3}}$

39. Simplificando cada item, temos:
a) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\dfrac{20}{24}} = \sqrt{\dfrac{5}{6}}$
b) $\dfrac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{\dfrac{10}{18}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}$
c) $\dfrac{\sqrt[4]{30}}{\sqrt[4]{24}} = \sqrt[4]{\dfrac{30}{24}} = \sqrt[4]{\dfrac{5}{4}}$
d) $\dfrac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{20}} = \sqrt[5]{\dfrac{16}{20}} = \sqrt[5]{\dfrac{4}{5}}$

40. a) Verdadeira.
b) Falsa. Um contra-exemplo é $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$, em que $\sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \neq 5$.
c) Falsa. Um contra-exemplo é $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, em que $2 + 3 = 5 \neq \sqrt{13}$.
d) Verdadeira.
e) Verdadeira.
f) Falsa. Um contra-exemplo é $\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$, em que $\sqrt{3^2} - \sqrt{2^2} = 3 - 2 = 1 \neq \sqrt{5}$.

Atividades - página 36

41. Efetuando as operações, temos:
a) $\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = (1 - 5 + 2)\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$
b) $2\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{64} = 2\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{2^5 \cdot 2} = 2\sqrt[5]{2} + 2\sqrt[5]{2} = 4\sqrt[5]{2}$
c) $2\sqrt{16} + 3\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[4]{16} + \sqrt[6]{16} =$
$= 2 \cdot 4 + 3\sqrt[3]{2^3 \cdot 2} + 4 \cdot 2 + \sqrt[6]{2^4} =$
$= 8 + 3 \cdot 2\sqrt[3]{2} + 8 + \sqrt[6:2]{2^{4:2}} = 16 + 6\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$
d) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}) + (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = (3 + 6)\sqrt{2} + (7 - 2)\sqrt{3} =$
$= 9\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$
e) $\sqrt{32} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75} + 3\sqrt{72} =$
$= \sqrt{16 \cdot 2} - 2\sqrt{4 \cdot 3} - \sqrt{25 \cdot 3} + 3\sqrt{36 \cdot 2} =$
$= 4\sqrt{2} - 2 \cdot 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 3 \cdot 6\sqrt{2} =$
$= (4 + 18)\sqrt{2} + (-4 - 5)\sqrt{3} = 22\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$

42. Simplificando as expressões, temos:
a) $3\sqrt[3]{2} - 7\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2} = (3 - 7 - 6)\sqrt[3]{2} = -10\sqrt[3]{2}$
b) $\sqrt{12} - \sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[8]{81} =$
$= 2\sqrt{3} - \sqrt[4:2]{3^{2:2}} - \sqrt[6:3]{3^{3:3}} - \sqrt[8:4]{3^{4:4}} =$
$= 2\sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} = (2 - 3)\sqrt{3} = -\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{150} - 4\sqrt{54} + 6\sqrt{24} = 2\sqrt{25 \cdot 6} - 4\sqrt{9 \cdot 6} + 6\sqrt{4 \cdot 6} =$
$= 2 \cdot 5\sqrt{6} - 4 \cdot 3\sqrt{6} + 6 \cdot 2\sqrt{6} = (10 - 12 + 12)\sqrt{6} = 10\sqrt{6}$
d) $7\sqrt{32} - 5\sqrt{2} + \sqrt{8} = 7\sqrt{16 \cdot 2} - 5\sqrt{2} + \sqrt{4 \cdot 2} =$
$= 7 \cdot 4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (28 - 5 + 2)\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$

43. Para calcular a medida do perímetro das figuras, precisamos adicionar as medidas dos comprimentos dos lados. Assim, temos:
a) $\sqrt{45} + \sqrt{125} + \sqrt{80} = \sqrt{9 \cdot 5} + \sqrt{25 \cdot 5} + \sqrt{16 \cdot 5} =$
$= 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$
b) $2\sqrt{150} + 2\sqrt{54} = 2\sqrt{25 \cdot 6} + 2\sqrt{9 \cdot 6} =$
$= 2 \cdot 5\sqrt{6} + 2 \cdot 3\sqrt{6} = 16\sqrt{6}$

44. Começamos simplificando a expressão:
$y = \sqrt{200} + \sqrt{300} + \sqrt{800} + \sqrt{1\,200} =$
$= \sqrt{100 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 3} + \sqrt{400 \cdot 2} + \sqrt{400 \cdot 3} =$
$= 10\sqrt{2} + 10\sqrt{3} + 20\sqrt{2} + 20\sqrt{3} =$
$= (10 + 20)\sqrt{2} + (10 + 20)\sqrt{3} = 30\sqrt{2} + 30\sqrt{3} = 30(\sqrt{2} + \sqrt{3})$
Agora, podemos usar os valores aproximados de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{3}$:
$y = 30 \cdot (1{,}41 + 1{,}73) = 30 \cdot 3{,}14 = 94{,}20$

Atividades - página 37

45. a) $\sqrt{90} = 3\sqrt{10}$
b) $12\sqrt[5]{30}$
c) $\sqrt{1} = 1$
d) $\sqrt[3]{77}$
e) $6\sqrt[3]{6}$
f) 1

46. a) Medida do perímetro: $2 \cdot (3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}) = 2 \cdot 7\sqrt{3} = 14\sqrt{3}$
Medida da área: $3\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 12 \cdot 3 = 36$
b) Medida do perímetro: $4 \cdot (6 - \sqrt{7}) = 24 - 4\sqrt{7}$
Medida da área: $(6 - \sqrt{7}) \cdot (6 - \sqrt{7}) = 36 - 6\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 7 =$
$= 43 - 12\sqrt{7}$

47. a) $\sqrt[5]{2 \cdot 3 \cdot 50} = \sqrt[5]{300}$
b) $3.\sqrt[3]{8} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3}}{8} = 3 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3}}{8} = \dfrac{3}{4}\sqrt[3]{3}$

48. a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[3 \cdot 2]{3^2} \cdot \sqrt[2 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[6]{9 \cdot 8} = \sqrt[6]{72}$
b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{2^3} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[2 \cdot 2]{2^{3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{2 \cdot 2^6} = 2\sqrt[4]{2^3}$
c) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{2^2} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^2} = 2\sqrt[4]{2^3}$
d) $\sqrt[8]{5} \cdot \sqrt[6]{5} = \sqrt[8 \cdot 3]{5^3} \cdot \sqrt[6 \cdot 4]{5^4} = \sqrt[24]{5^3 \cdot 5^4} = \sqrt[24]{5^7}$

e) $\sqrt{10}\cdot\sqrt[5]{12}\cdot\sqrt[3]{30} = \sqrt{2\cdot5}\cdot\sqrt[5]{2^2\cdot3}\cdot\sqrt[3]{2\cdot3\cdot5} =$

$= \sqrt[2\cdot3\cdot5]{2^{15}\cdot5^{15}}\cdot\sqrt[2\cdot3\cdot5]{2^{2\cdot6}\cdot3^6}\cdot\sqrt[2\cdot3\cdot5]{2^{10}\cdot3^{10}\cdot5^{10}} =$

$= \sqrt[30]{2^{15+12+10}\cdot3^{6+10}\cdot5^{15+10}} = \sqrt[30]{2^{37}\cdot3^{16}\cdot5^{25}} =$

$= 2\sqrt[30]{2^7\cdot3^{16}\cdot5^{25}}$

f) $\sqrt[3]{0,04}\cdot\sqrt[6]{625} = \sqrt[3\cdot2]{0,04^2}\cdot\sqrt[6]{625} =$

$= \sqrt[6]{0,0016\cdot625} = \sqrt[6]{1} = 1$

49. a) $\sqrt7\cdot\sqrt7-\sqrt7 = 7-\sqrt7$

b) $\sqrt5\cdot\sqrt5+3\sqrt5-\sqrt5-3 = 5+2\sqrt5-3 = 2+2\sqrt5$

c) $\sqrt3-\sqrt3\cdot\sqrt3-2+2\sqrt3 = 3\sqrt3-3-2 = 3\sqrt3-5$

d) $\sqrt5\cdot\sqrt2+\sqrt5\cdot\sqrt3 = \sqrt{10}+\sqrt{15}$

e) $4\sqrt2-2\sqrt2\cdot\sqrt2+4-2\sqrt2 = 2\sqrt2-4+4 = 2\sqrt2$

f) $\sqrt2-\sqrt2\cdot\sqrt2 = \sqrt2-2$

Atividades – página 38

50. a) $\sqrt[3]{128:2} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac63} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt[5]{3^5:3^2} = \sqrt[5]{3^3}$

c) $\sqrt{\frac{10}{3}:\frac56} = \sqrt{\frac{10}{3}\cdot\frac65} = \sqrt{\frac{60}{15}} = \sqrt4 = 2$

d) $\frac84\cdot\sqrt{\frac{75}{3}} = 2\sqrt{25} = 2\cdot5 = 10$

51. a) $\sqrt[3\cdot2]{8^2}:\sqrt[2\cdot3]{2^3} = \sqrt[6]{64:8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac36} = 2^{\frac12} = \sqrt2$

b) $\sqrt[8]{2^4}:\sqrt[12]{2^6} = 2^{\frac48}:2^{\frac6{12}} = 2^{\frac12}:2^{\frac12} = 1$

c) $\sqrt[4]{6}:\sqrt[2\cdot2]{2^2} = \sqrt[4]{6:4} = \sqrt[4]{\frac64} = \sqrt[4]{\frac32}$

d) $\sqrt[3\cdot2]{10^2}:\sqrt[2\cdot3]{2^3} = \sqrt[6]{100:8} = \sqrt[6]{\frac{100}{8}} = \sqrt[6]{\frac{25}{2}}$

e) $\sqrt[5\cdot6]{7^6}:\sqrt[6\cdot5]{7^5} = \sqrt[30]{\frac{7^6}{7^5}} = \sqrt[30]{7}$

f) $\sqrt[4\cdot2]{8^2}:\sqrt[8]{8} = \sqrt[8]{8^2:8} = \sqrt[8]{8}$

Atividades – página 39

52. a) $(2\sqrt3)^3 = 2^3\cdot\sqrt{3^3} = 8\cdot3\sqrt3 = 24\sqrt3$

b) $(2\sqrt2)^7 = 2^7\cdot\sqrt{2^7} = 2^7\cdot2^3\sqrt2 = 1\,024\sqrt2$

c) $(\sqrt[3]{ab})^4 = \sqrt[3]{a^4b^4} = ab\sqrt[3]{ab}$, em que $a>0$ e $b>0$.

d) $(2\sqrt[7]{a^5b^2})^3 = 2^3\sqrt[7]{a^{15}b^6} = 8a^2\sqrt[7]{a\,b^6}$, em que $a>0$ e $b>0$.

e) $\left(\frac xy\cdot\sqrt{\frac yx}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}\cdot\frac yx = \frac xy$, em que $x>0$ e $y>0$.

f) $(\sqrt[5]{y^3})^2 = \sqrt[5]{y^6} = y\sqrt[5]{y}$, em que $y>0$.

53. a) $\sqrt[7]{\sqrt[4]{7}} = \sqrt[7\cdot4]{7} = \sqrt[28]{7}$

b) $\sqrt{\sqrt[4]{512}} = \sqrt[2\cdot4]{512} = \sqrt[8]{2^9} = 2\sqrt[8]{2}$

54. a) $(\sqrt2)^6+(2\sqrt3)^4+(-3\sqrt7)^2+\left(\sqrt{\frac12}\right)^{-2} =$

$= \sqrt{2^6}+2^4\sqrt{3^4}+9\cdot7+2 = 2^3+16\cdot3^2+63+2 = 217$

b) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$

55. $\frac{\sqrt2\cdot(\sqrt[5]{2})^2}{(\sqrt[10]{2})^4} = \frac{\sqrt2\cdot\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[10]{2^4}} = \frac{2^{\frac12}\cdot2^{\frac25}}{2^{\frac4{10}}} = \frac{2^{\frac12+\frac25}}{2^{\frac25}} =$

$= 2^{\frac12+\frac25-\frac25} = 2^{\frac12} = \sqrt2$

Logo, a alternativa **c** é a correta.

Atividades – página 41

56. a) $\frac{7\cdot\sqrt2}{\sqrt2\cdot\sqrt2} = \frac{7\sqrt2}{2}$

b) $\frac{6\cdot\sqrt2}{\sqrt2\cdot\sqrt2} = \frac{6\sqrt2}{2} = 3\sqrt2$

c) $\frac{1\cdot\sqrt[5]{8^4}}{7\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{8^4}} = \frac{\sqrt[5]{8^4}}{7\cdot8} = \frac{\sqrt[5]{2^{12}}}{56} = \frac{2^2\sqrt[2]{2^2}}{56} = \frac{\sqrt[5]{4}}{14}$

d) $\frac{1\cdot\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{7}$

57. a) $\frac{1\cdot(\sqrt3-1)}{(\sqrt3+1)\cdot(\sqrt3-1)} = \frac{\sqrt3-1}{3-1} = \frac{\sqrt3-1}{2}$

b) $\frac{3\cdot(5+\sqrt7)}{(5-\sqrt7)\cdot(5+\sqrt7)} = \frac{3\cdot(5+\sqrt7)}{18} = \frac{5+\sqrt7}{6}$

c) $\frac{4\sqrt3\cdot(\sqrt2-\sqrt3)}{(\sqrt2+\sqrt3)\cdot(\sqrt2-\sqrt3)} = \frac{4\sqrt6-4\cdot3}{2-3} = \frac{4\sqrt6-12}{-1} = 12-4\sqrt6$

d) $\frac{(\sqrt2-1)\cdot(2+\sqrt2)}{(2-\sqrt2)\cdot(2+\sqrt2)} = \frac{2\sqrt2+2-2-\sqrt2}{4-2} = \frac{\sqrt2}{2}$

58. $\frac1{\sqrt2}+\frac1{\sqrt{9\cdot2}}-\frac1{\sqrt{4\cdot2}} = \frac1{\sqrt2}+\frac1{3\sqrt2}-\frac1{2\sqrt2} =$

$= \frac{6+2-3}{6\sqrt2} = \frac5{6\sqrt2} = \frac{5\cdot\sqrt2}{6\sqrt2\cdot\sqrt2} = \frac{5\sqrt2}{6\cdot2} = \frac{5\sqrt2}{12}$

Logo, a alternativa **e** é a correta.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – páginas 42 a 44

1. a) $(-4)^0 = 1$

b) $(-4)^3 = (-4)\cdot(-4)\cdot(-4) = -64$

c) $\left(-\frac58\right)^{-2} = \left(-\frac85\right)^2 = \frac{64}{25}$

d) $-(0,2)^{-3} = -\left(\frac2{10}\right)^{-3} = -\left(\frac{10}{2}\right)^3 = -\frac{1\,000}{8} = -125$

2. a) $3^4\cdot3^2\cdot3^0 = 3^{4+2+0} = 3^6$

b) $(2^8:2^5)\cdot2^{-3} = 2^{8-5}\cdot\left(\frac12\right)^3 = 2^3\cdot\frac1{2^3} = 2^0$

c) $[(4^3)^2]:4^{-5} = 4^6:4^{-5} = 4^{6-(-5)} = 4^{11}$

d) $[(-4)^2\cdot2]^3 = [16\cdot2]^3 = [2^4\cdot2]^3 = 2^{15}$

3. a) $[(-4)^0-3^0+(-2)^0-1^0]^{10} =$

$= [1-1+1-1]^{10} = 0^{10} = 0$

b) $(2\cdot3)^2:\left(-\frac12\right)^{-2} = 6^2:(-2)^2 = 36:4 = 9$

c) $(3^0)^2\cdot(2^2)^0 = 1^2\cdot4^0 = 1$

d) $(0^5\cdot1^4)^{20}\cdot(2^3-3^2)+(4^1:5^0)^2 = 0+4^2 = 16$

4. a) $\sqrt[3]{27}+\sqrt[5]{-32}-\sqrt[10]{1} = \sqrt[3]{3^3}+\sqrt[5]{(-2)^5}-\sqrt[10]{1} = 3-2-1 = 0$

b) $\sqrt[3]{343}-\sqrt[10]{1\,024} = \sqrt[3]{7^3}-\sqrt[10]{2^{10}} = 7-2 = 5$

c) $\sqrt{25}-\sqrt[3]{1\,000}+\sqrt[5]{-1\,024} = \sqrt{5^2}-\sqrt[3]{10^3}+\sqrt[5]{-2^{10}} =$

$= 5-10-2^2 = -5-4 = -9$

d) $\sqrt{100} \cdot \sqrt[3]{-216} = \sqrt{10^2} \cdot \sqrt[3]{-(2^3 \cdot 3^3)} = 10 \cdot (-6) = -60$

e) $\dfrac{\sqrt[5]{-243}}{\sqrt[7]{-128}} = \dfrac{\sqrt[5]{(-3)^5}}{\sqrt[7]{(-2)^7}} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

5. a) $\sqrt[3]{-216} = \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3^3} = -2 \cdot 3 = -6$

b) $\sqrt[6]{\left(\dfrac{3}{8}\right)^6} = \dfrac{3}{8}$

c) $\sqrt{\sqrt{1\,296}} = \sqrt[2 \cdot 2]{2^4 \cdot 3^4} = 2 \cdot 3 = 6$

d) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{8 \cdot 6 \cdot 3} = \sqrt{144} = 12$

e) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt{2^4}}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[4]{2}}}{\sqrt{\sqrt[10]{32}}} = \dfrac{\sqrt[2 \cdot 5 \cdot 2]{2^4} \cdot \sqrt[5 \cdot 4]{2}}{\sqrt[2 \cdot 10]{32}} = \dfrac{\sqrt[20]{2^5}}{\sqrt[20]{2^5}} = 1$

f) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}}{\sqrt{\sqrt[4]{7^8}}} = \dfrac{\sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{2^8}}{\sqrt[2 \cdot 4]{7^8}} = \dfrac{2}{7}$

6. a) $(3 + 4 - 1)\sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

b) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^2} - 2\sqrt[3]{2^2} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{4} = (4 - 2)\sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3^2} + 2\sqrt{2 \cdot 3} - \sqrt{2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} =$

$= 3\sqrt{6} + 2\sqrt{6} - 2 \cdot 3\sqrt{2} = 5\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$

d) $\sqrt{4 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 13} + \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 13} =$

$= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{13} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{13} = 5\sqrt{2} - 5\sqrt{13} = 5(\sqrt{2} - \sqrt{13})$

7. a) $\sqrt{7 \cdot 5} = \sqrt{35}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{-8}{4}} = \sqrt[3]{-2}$

c) $\sqrt[5 \cdot 2]{5^2} \cdot \sqrt[2 \cdot 5]{3^5} = \sqrt[10]{25 \cdot 243} = \sqrt[10]{6\,075}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{3 \cdot 4}}{\sqrt[3]{6}} = \dfrac{\sqrt[4 \cdot 3]{12^3}}{\sqrt[3 \cdot 4]{6^4}} = \sqrt[12]{\dfrac{1\,728}{1\,296}} = \sqrt[12]{\dfrac{4}{3}}$

e) $2 \cdot 2\sqrt{2 \cdot 5} + 2\sqrt{2 \cdot 2} = 4\sqrt{10} + 4 = 4(\sqrt{10} + 1)$

f) $7 + 2\sqrt{7 \cdot 3} - \sqrt{3 \cdot 7} - 2 \cdot 3 = 1 + \sqrt{21}$

8. a) $\sqrt{3^6} = 3^3 = 27$

b) $\sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

c) $\sqrt[4]{b^4} = b$, em que $b > 0$.

d) $\sqrt[2 \cdot 3]{5} = \sqrt[6]{5}$

e) $\sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{a} = \sqrt[8]{a}$, em que $a > 0$.

f) $\sqrt[3 \cdot 2]{b^9} = \sqrt[6]{b^6 \cdot b^3} = b\sqrt[6:3]{b^{3:3}} = b\sqrt{b}$, em que $b > 0$.

9. a) $\dfrac{5 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

b) $\dfrac{1 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[5]{5^4}}{\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[5]{5^4}} = \dfrac{\sqrt[2 \cdot 5]{3^5} \cdot \sqrt[5 \cdot 2]{5^{4 \cdot 2}}}{5} = \dfrac{\sqrt[10]{3^5 \cdot 5^8}}{5}$

d) $\dfrac{3 \cdot (\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1) \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \dfrac{3(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 3(\sqrt{2} + 1)$

e) $\dfrac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{7})}{(\sqrt{3} + \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{7})} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{14}}{3 - 7} = -\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{14}}{4}$

f) $\dfrac{5\sqrt{3} \cdot (10 - \sqrt{5})}{(10 + \sqrt{5}) \cdot (10 - \sqrt{5})} = \dfrac{50\sqrt{3} - 5\sqrt{15}}{100 - 5} =$

$= \dfrac{5(10\sqrt{3} - \sqrt{15})}{95} = \dfrac{10\sqrt{3} - \sqrt{15}}{19}$

CAPÍTULO 2 – MATEMÁTICA FINANCEIRA

Trocando ideias – página 45

Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes apresentem ideias criativas sem se preocupar com certo ou errado, pois a intenção é apenas dar início ao assunto. Dependendo do interesse da turma, incentive a realização de pesquisas sobre *startups* brasileiras ou a busca de relatos de profissionais sobre as experiências com esse modelo de negócios.

Atividades – páginas 47 e 48

1. $PV = 700 + \dfrac{2{,}5}{100} \cdot 700 = 700 + 17{,}5 = 717{,}5$

O objeto deve ser vendido por R$ 717,50.

2. $PV = 272 + \dfrac{15}{100} \cdot 272 = 272 + 40{,}8 = 312{,}8$

O produto deve ser vendido por R$ 312,80.

3. $PV = 500 - \dfrac{15}{100} \cdot 500 = 500 - 75 = 425$

O aparelho de *Blue-Ray* foi vendido por R$ 425,00.

4. Seja PC o preço de custo, temos:

$1\,584 = PC - \dfrac{12}{100} \cdot PC$

$1\,584 = (1 - 0{,}12)PC$

$PC = \dfrac{1\,584}{0{,}88} = 1\,800$

O preço de custo da mercadoria era R$ 1 800,00.

5. $PV = 1\,113 - \dfrac{6}{100} \cdot 1\,113$

$PV = 1\,113 - 66{,}78 = 1\,046{,}22$

O preço de venda foi R$ 1 046,22.

6. Seja PC o preço de custo, temos:

$72\,788{,}8 = PC - \dfrac{3}{100} \cdot PC$

$72\,788{,}8 = (1 - 0{,}03)PC$

$PC = \dfrac{72\,788{,}8}{0{,}97} = 75\,040$

Se o preço de custo foi R$ 75 040,00 e o preço de venda foi R$ 72 788,80, então o prejuízo foi de R$ 2 251,20, pois R$ 75 040,00 – R$ 72 788,80 = R$ 2 251,20.

7. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes tenham curiosidade em ter noções de orçamento, verificando os tipos de gastos que vão compor seu orçamento e seus valores. É interessante pesquisar valores de referência para definir os gastos, como valores de compras em mercado, custos em combustíveis e/ou transporte público, entre outros. Se possível, peça aos estudantes que comparem os valores em diferentes épocas, por exemplo, checando a evolução do valor necessário para se comprar uma cesta básica, comentando sobre aspectos relacionados à inflação.

Atividades – páginas 52 e 53

8. Nesse caso, temos:

$C = \text{R\$ } 20\,000{,}00 \qquad M = ?$

$t = 8$ meses $\qquad j = ?$

$i = 0{,}8\%$ (taxa mensal)

Para chegar aos valores pedidos, fazemos:

$j = C \cdot i \cdot t \qquad M = C + j$

$j = 20\,000 \cdot 8 \cdot 0{,}008 \qquad M = 20\,000 + 1\,280 = 21\,280$

$j = 1\,280$

Logo, o juro foi R$ 1 280,00 e o montante R$ 21 280,00

9. Nesse caso, temos:

$C = \text{R\$ } 4\,000{,}00$

$t = 2$ anos e 6 meses ou 30 meses

$i = 1{,}5\%$ (taxa mensal)
$M = ?$
Para chegar ao montante, fazemos:
$j = C \cdot i \cdot t$ $\quad M = C + j$
$j = 4000 \cdot 30 \cdot 0{,}015$ $\quad M = 4000 + 1800 = 5800$
$j = 1800$
Logo, o montante é R\$ 5 800,00

10. Nesse caso, temos:
$C =$ R\$ 2 000,00 $\quad j =$ R\$ 800,00
$i = 2\%$ (taxa mensal) $\quad t = ?$
Para calcular o intervalo de tempo, fazemos:
$j = C \cdot i \cdot t$
$800 = 2\,000 \cdot t \cdot 0{,}02$
$\frac{800}{40} = t \Rightarrow t = 20$
Logo, o intervalo de tempo é de 20 meses (ou 1 ano e 8 meses).

11. Nesse caso, temos:
$C =$ R\$ 10 000,00 $\quad j =$ R\$ 300,00
$t = 3$ meses $\quad i = ?$
Para calcular a taxa, fazemos:
$j = C \cdot i \cdot t$
$300 = 10\,000 \cdot i \cdot 3$
$\frac{300}{30\,000} = i \Rightarrow i = 0{,}01 = 1\%$
Logo, a taxa cobrada foi de 1% a.m.

12. Nesse caso, temos:
$i = 12\%$ (taxa anual) ou 1% (taxa mensal)
$M =$ R\$ 1 296,00 $\quad C = ?$
$t = 8$ meses
Como sabemos que
$j = C \cdot i \cdot t$ e $M = C + j \Rightarrow j = M - C$
Portanto, podemos igualar essas expressões e teremos:
$C \cdot i \cdot t = M - C$
Agora, podemos substituir o que já conhecemos para chegar ao valor de C que está sendo pedido:
$C \cdot 0{,}01 \cdot 8 = 1296 - C$
$0{,}08C + C = 1296$
$C = \frac{1\,296}{1{,}08} = 1\,200$
Logo, o capital é R\$ 1 200,00.

13. Vamos considerar as duas situações:
Situação 1: $\quad$ Situação 2:
$C = x$ $\quad C = x$
$i = 0{,}5\%$ (taxa mensal) $\quad i = ?$
$t = 10$ meses $\quad t = 25$ meses
Como são aplicações equivalentes e sabemos que $j = C \cdot i \cdot t$, teremos:
$x \cdot 0{,}005 \cdot 10 = x \cdot i \cdot 25$
$0{,}005 \cdot 10 = 25i$
$\frac{0{,}05}{25} = i \Rightarrow i = 0{,}002 = 0{,}2\%$
A taxa será de 0,2% ao mês.

14. Temos as seguintes informações:
$C =$ R\$ 3 000,00 $\quad t = \frac{200}{360}$ ano $= \frac{5}{9}$ ano
$i = 12\%$ (taxa anual) $\quad M = ?$
Como $j = C \cdot i \cdot t$, então:
$j = 3\,000 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{5}{9} = 360 \cdot \frac{5}{9} = 200$
Com base nisso, temos:
$M = 3000 + 200 = 3200$
O valor do montante será R\$ 3 200,00.

15. Oriente os estudantes no uso das planilhas eletrônicas para a resolução das atividades indicadas. Para cada item, temos os seguintes cálculos:
a) $C =$ R\$ 12 000,00 $\quad t = 10$ meses
$i = 1{,}5\%$ (taxa mensal) $\quad j = ?$
Como $j = C \cdot i \cdot t$, então:
$j = 12\,000 \cdot 0{,}015 \cdot 10 = 1\,800$
Logo, o juro será R\$ 1 800,00.
b) $C =$ R\$ 15 000,00 $\quad t = 20$ meses
$i = 1{,}8\%$ (taxa mensal) $\quad j = ?$
Como $j = C \cdot i \cdot t$, então:
$j = 15\,000 \cdot 0{,}018 \cdot 20 = 5\,400$
Logo, ela pagará R\$ 5 400,00 de juro.

Atividades – página 56

16. No 1º mês, a aplicação rendeu 0,69% ($i = 0{,}0069$).
$j =$ R\$ 25 000,00 $\cdot 0{,}0069 \cdot 1 =$ R\$ 172,50
$M =$ R\$ 25 000,00 + R\$ 172,50 = R\$ 25 172,50.
Logo, ao final do 1º mês, o montante é de R\$ 25 172,50.
No 2º mês, temos:
$j \simeq$ R\$ 173,69; $M = 25\,346{,}19$
No 3º mês, temos:
$j \simeq$ R\$ 174,89; $M = 25\,521{,}08$
Portanto, o montante ao final dos três meses é de R\$ 25 521,08.

17. No 1º ano, o capital rendeu 20% ($i = 0{,}2$).
$j =$ R\$ 20 000,00 $\cdot 0{,}2 \cdot 1 =$ R\$ 4 000,00
$M =$ R\$ 20 000,00 + R\$ 4 000,00 = R\$ 24 000,00
Logo, ao final do 1º ano, o montante é de R\$ 24 000,00.
No 2º ano:
$j =$ R\$ 24 000,00 $\cdot 0{,}2 \cdot 1 =$ R\$ 4 800,00
$M =$ R\$ 24 000,00 + R\$ 4 800,00 = R\$ 28 800,00
Bruna obteve de juro um total de R\$ 8 800,00 ($4\,000 + 4\,800 = 8\,800$).

18. No 1º mês, a aplicação rendeu 1% ($i = 0{,}01$).
$j =$ R\$ 30 000,00 $\cdot 0{,}01 \cdot 1 =$ R\$ 300,00
$M =$ R\$ 30 000,00 + R\$ 300,00 = R\$ 30 300,00
Logo, ao final do 1º mês, o montante é de R\$ 30 300,00
No 2º mês, temos:
$j =$ R\$ 303,00; $M =$ R\$ 30 603,00
No 3º mês, temos:
$j =$ R\$ 306,03; $M =$ R\$ 30 909,03
O juro total dessa aplicação foi R\$ 909,03 ($300 + 303 + 306{,}03 = 909{,}03$).

19. **a)** Nesse caso, usando que $j = C \cdot i \cdot t$, teremos:
$j = 100\,000 \cdot 0{,}008 \cdot 4 = 3\,200$
O valor total do juro em regime de juro simples é de R\$ 3 200,00.
b) No 1º mês, a aplicação rendeu 0,8% ($i = 0{,}008$).
$j =$ R\$ 100 000,00 $\cdot 0{,}008 \cdot 1 =$ R\$ 800,00
$M =$ R\$ 100 000,00 + R\$ 800,00 = R\$ 100 800,00
No 2º mês, temos:
$j =$ R\$ 806,04; $M =$ R\$ 101 606,40
No 3º mês, temos:
$j \simeq$ R\$ 812,85; $M =$ R\$ 102 419,25
No 4º mês, temos:
$j \simeq$ R\$ 819,35; $M =$ R\$ 103 238,60
Portanto, o valor total do juro em regime de juro composto é de R\$ 3 238,60.

20. Fazendo a cada mês:
Janeiro
$j = 100\,000 \cdot 0{,}0099 = 990$
$M = 100\,000 + 990 = 100\,990$
Fevereiro
$j = 100\,990 \cdot 0{,}0091 \simeq 919{,}01$
$M = 100\,990 + 919{,}01 = 101\,909{,}01$
Março
$j = 101\,909{,}01 \cdot 0{,}0088 \simeq 896{,}8$
$M = 101\,909{,}01 + 896{,}8 = 102\,805{,}81$
Após 3 meses, o valor será de R$ 102 805,81.

21. O investimento inicial foi de x reais e será aplicado por 3 meses a uma taxa de juro composto de 3% a.m.

Como Felipe quer ter um montante de R$ 700,00, espera-se que os estudantes obtenham a seguinte equação:
$1{,}092727x = 700$
Resolvendo-a, temos:
$x = \frac{700}{1{,}092727} \simeq 640{,}60$
Felipe deve investir, no mínimo, R$ 640,60.

22. No 1º ano:
$j = \text{R\$ } 950{,}00 \cdot 0{,}105 \cdot 1 = \text{R\$ } 99{,}75$
$M = \text{R\$ } 950{,}00 + \text{R\$ } 99{,}75 = \text{R\$ } 1\,049{,}75$
No 2º ano:
$j \simeq \text{R\$ } 110{,}22$; $M = \text{R\$ } 1\,159{,}97$
No 3º ano:
$j \simeq \text{R\$ } 121{,}80$; $M = \text{R\$ } 1\,281{,}77$
Ela deverá pagar um total de R$ 1 281,77.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – páginas 57 e 58

1. Considerando que o lucro deve ser de 32%, podemos fazer:
Vestido florido: $PV = 97 + 97 \cdot 0{,}32 = 97 + 31{,}04 = 128{,}04$
Saia lisa preta: $PV = 74 + 74 \cdot 0{,}32 = 74 + 23{,}68 = 97{,}68$
Short listrado: $PV = 49 + 49 \cdot 0{,}32 = 49 + 15{,}68 = 64{,}68$
Blusa lisa azul: $PV = 36 + 36 \cdot 0{,}32 = 36 + 11{,}52 = 47{,}52$

2. $PV = 3\,278 - 3\,278 \cdot 0{,}62 = 3\,278 - 2\,032{,}36 = 1\,245{,}64$
Guilherme vendeu o celular por R$ 1 245,64.

3. Considerando 100 g de trufas:
$PV = 15 + 15 \cdot 0{,}4 = 15 + 6 = 21$
Considerando 250 g de trufas:
Como 250 g = $2{,}5 \cdot 100$ g, então o custo é $15 \cdot 2{,}5 = 37{,}5$. Logo, podemos calcular:
$PV = 37{,}5 + 37{,}5 \cdot 0{,}4 = 37{,}5 + 15 = 52{,}5$
Assim, ela deve vender a caixa de 100 g por R$ 21,00 e a de 250 g por R$ 52,50.

4. Considerando que 12 kg de laranja tem um custo de R$ 18,00, fazemos:
$PV = 18 + 18 \cdot 0{,}5 = 18 + 9 = 27$
Se 12 kg devem ser vendidos por R$ 27,00, para encontrar o preço de venda de 1 kg, fazemos $27 : 12 = 2{,}25$; logo, o preço de venda de 1 kg será R$ 2,25.

5. $PV = 220\,000 - 220\,000 \cdot 0{,}12 = 220\,000 - 26\,400 = 193\,600$
Ele pagará R$ 193 600,00 pelo lote.

6. Se indicarmos por x o percentual de lucro, podemos escrever:
$5\,000 = 4\,000 + 4\,000 \cdot x$
$\frac{1\,000}{4\,000} = x \Rightarrow x = \frac{1}{4} = 25\%$
O lucro foi de 25%.

7. Temos:
$C = \text{R\$ } 89\,200{,}00$
$t = 3$ meses
$i = 1{,}3\%$ (taxa mensal)
$M = ?$
Para chegar ao montante, fazemos:
$j = C \cdot i \cdot t$
$j = 89\,200 \cdot 0{,}013 \cdot 3$
$j = 3\,478{,}8$
$M = C + j$
$M = 89\,200 + 3\,478{,}8 = 92\,678{,}8$
Logo, o montante será de R$ 92 678,80.

8. Temos:
$C = \text{R\$ } 5\,600{,}00$
$t = 5$ meses
$i = 12\%$ (taxa mensal)
$j = ?$
Para chegar ao juro, fazemos:
$j = C \cdot i \cdot t$
$j = 5\,600 \cdot 0{,}12 \cdot 5$
$j = 3\,360$
Ele pagará R$ 3 360,00 de juro.

9. Temos:
$C = x$
$t = ?$
$i = 8\%$ (taxa mensal)
$M = 3x$ (triplicar o capital)
Pelos dados, podemos fazer as relações:
$M = C + j$
$3x = x + j$
$j = 2x$
$j = C \cdot i \cdot t$
$2x = x \cdot 0{,}08 \cdot t$
$2 = 0{,}08 \cdot t$
$t = \frac{2}{0{,}08} = 25$
Logo, serão necessários 25 meses.

10. No 1º mês, a aplicação rendeu 2,5% ($i = 0{,}025$).
$j = \text{R\$ } 80\,000{,}00 \cdot 0{,}025 \cdot 1 = \text{R\$ } 2\,000{,}00$
$M = \text{R\$ } 80\,000{,}00 + \text{R\$ } 2\,000{,}00 = \text{R\$ } 82\,000{,}00$
No 2º mês, temos:
$j = \text{R\$ } 2\,050{,}00$; $M = \text{R\$ } 84\,050{,}00$
No 3º mês, temos:
$j = \text{R\$ } 2\,101{,}25$; $M = \text{R\$ } 86\,151{,}25$

a) Juro de R$ 6 151,25 (basta fazer $2\,000 + 2\,050 + 2\,101{,}25$).

b) Sim, pois conseguiu R$ 6 151,25 e precisava de R$ 5 000,00.

11. Espera-se que os estudantes obtenham os seguintes valores de juro e montante:
1º mês: $j = \text{R\$ } 6\,000{,}00$; $M = \text{R\$ } 106\,000{,}00$
2º mês: $j = \text{R\$ } 6\,060{,}00$; $M = \text{R\$ } 112\,360{,}00$
3º mês: $j = \text{R\$ } 6\,741{,}60$; $M = \text{R\$ } 119\,101{,}60$
4º mês: $j \simeq \text{R\$ } 7\,146{,}10$; $M = \text{R\$ } 126\,247{,}70$
5º mês: $j \simeq \text{R\$ } 7\,574{,}86$; $M = \text{R\$ } 133\,822{,}56$
6º mês: $j \simeq \text{R\$ } 8\,029{,}35$; $M = \text{R\$ } 141\,851{,}91$
O valor total da dívida de Fernando é de R$ 141 851,91.

12. Espera-se que os estudantes obtenham os seguintes valores de juro e montante:

1º mês: j = R$ 17 500,00; M = R$ 267 500,00

2º mês: j = R$ 18 725,00; M = R$ 286 225,00

3º mês: j = R$ 20 035,75; M = R$ 306 260,75

4º mês: $j \simeq$ R$ 21 438,25; M = R$ 327 699,00

a) Juro de R$ 77 699,00 (basta fazer 17 500,00 + 18 725,00 + + 20 035,75 + 21 438,25).

b) O valor máximo do imóvel é R$ 327 699,00.

13. Espera-se que os estudantes obtenham os seguintes valores de juro e montante:

1º mês: j = R$ 800,00; M = R$ 10 800,00

2º mês: j = R$ 864,00; M = R$ 11 664,00

3º mês: j = R$ 933,12; M = R$ 12 597,12

4º mês: $j \simeq$ R$ 1 007,77; M = R$ 13 604,89

Paulo deverá deixar o dinheiro investido por 4 meses. Vale destacar que não é necessário fazer os cálculos referentes ao 4º mês, pois, ao final do 3º mês, ele já terá um valor muito próximo do esperado, então certamente no 4º mês atingirá o objetivo.

14. **a)** Espera-se que os estudantes obtenham a seguinte inequação:

$1{,}124864x \geqslant 1\,500$

Resolvendo-a, temos:

$x \geqslant \dfrac{1\,500}{1{,}124864}$

$x \geqslant 1\,333{,}50$

Portanto, Marcela deve investir no mínimo R$ 1 333,50.

b) Para determinar quantos meses a mais ela deve deixar o dinheiro aplicado para obter o montante de R$ 1 700,00, basta prosseguir com os cálculos:

Espera-se que os estudantes obtenham os seguintes valores de juro e montante:

1º mês: $j \simeq$ R$ 53,34; M = 1 386,84

2º mês: $j \simeq$ R$ 55,47; M = 1 442,31

3º mês: $j \simeq$ R$ 57,69; M = 1 500,00

4º mês: $j \simeq$ R$ 60,00; M = 1 560,00

5º mês: j = R$ 62,40; M = 1 622,40

6º mês: $j \simeq$ R$ 64,90; M = 1 687,30

7º mês: $j \simeq$ R$ 67,49; M = 1 754,79

A aplicação de Marcela atingirá o montante de R$ 1 700,00 no sétimo mês. Portanto, o valor deverá ser aplicado por mais 4 meses.

15. No 1º mês:

j = R$ 40 000,00 · 0, 015 · 1 = R$ 600,00

M = R$ 40 000,00 + R$ 600, 00 = R$ 40 600,00

No 2º mês:

j = R$ 40 600,00 · 0, 012 · 1 = R$ 487,20

M = R$ 40 600,00 + R$ 487,20 = R$ 41 087,20

a) O rendimento do primeiro mês foi de R$ 600,00; o do segundo, R$ 487,20.

b) O montante no final do período foi de R$ 41 087,20.

CAPÍTULO 3 – SEGMENTOS PROPORCIONAIS E SEMELHANÇA

Trocando ideias – página 59

- Exemplos de resposta: vacinação, distanciamento social, lavagem das mãos, cobrir nariz e boca com o antebraço ao tossir ou espirrar, manutenção de ambientes limpos e ventilados etc.
- Vejamos a relação entre as medidas de comprimento correspondentes:

$$\frac{9 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 0{,}75 \text{ e } \frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = 0{,}75$$

Ou seja, as medidas de comprimento do molde para máscara infantil correspondem a 75% das medidas de comprimento correspondentes do molde para máscara de adulto. Isso significa que a taxa de redução do molde da máscara infantil em relação ao molde da máscara de adulto foi de 25%.

Atividades – página 61

1. **a)** $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ **c)** $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

b) $\frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{10}{2} = 5$

2. **a)** $5 \cdot 5 = 6 \cdot 6$

$25 = 36$

A sentença é falsa, logo os pares de razões não formam uma proporção.

b) $(-10) \cdot 6 = 3 \cdot 20$

$-60 = 60$

A sentença é falsa, logo os pares de razões não formam uma proporção.

c) $12 \cdot 5 = 15 \cdot 4$

$60 = 60$

A sentença é verdadeira, logo os pares de razões formam uma proporção.

d) $\frac{1}{2} \cdot 30 = 5 \cdot 3$

$15 = 15$

A sentença é verdadeira, logo os pares de razões formam uma proporção.

Atividades – página 62

3. $\frac{x}{20 \text{ cm}} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5x = 40 \text{ cm} \Rightarrow x = \frac{40 \text{ cm}}{5} = 8 \text{ cm}$

Logo, $x = 8$ cm.

4. Observando a figura e utilizando as informações dadas, podemos afirmar que:

$\frac{y}{y+16} = \frac{3}{7}$

$3(y+16) = 7y \Rightarrow 3y + 48 = 7y \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y - 7y = -48 \Rightarrow y = \frac{-48}{-4} = 12$

Como $x = y + 16$, teremos $x = 12 + 16 = 28$.

Portanto, $x = 28$ cm e $y = 12$ cm.

5. Se indicarmos a medida de comprimento de $\overline{AB}$ por x, teremos que a medida de comprimento de $\overline{CD}$ será $(40 - x)$ e poderemos escrever a proporção:

$\frac{x}{40 - x} = \frac{3}{5}$
$3(40 - x) = 5x$
$120 - 3x = 5x$
$120 = 8x$
$\frac{120}{8} = x \Rightarrow x = 15$
Logo, $(40 - x) = 40 - 15 = 25$
Portanto, $AB = 15$ cm e $CD = 25$ cm.

6. A fotografia original é de 30 mm × 40 mm.
Ampliação de 100%:
$30 + 100\% \cdot 30 = 30 + 30 = 60$
$40 + 100\% \cdot 40 = 40 + 40 = 80$
Novas medidas: 60 mm × 80 mm.
Redução de 50%:
$30 - 50\% \cdot 30 = 30 - 15 = 15$
$40 - 50\% \cdot 40 = 40 - 20 = 20$
Novas medidas: 15 mm × 20 mm.

Tecnologias digitais em foco – página 67

a) Respostas pessoais.

b) Comparando as razões $\frac{AB}{BC}$ com $\frac{PQ}{QR}$ e $\frac{AC}{AB}$ com $\frac{PR}{PQ}$, verificamos que elas são iguais, o que nos leva a conjecturar que, em um feixe de retas paralelas cortado por duas retas transversais, os segmentos de reta determinados sobre a primeira transversal são proporcionais a seus correspondentes determinados sobre a segunda transversal.

c) A relação verificada continua válida, independentemente da configuração apresentada.

Atividades – página 67

7. a) $\frac{3}{x} = \frac{6}{12} \Rightarrow 6x = 36 \Rightarrow x = 6$

b) $\frac{2x + 2}{8} = \frac{4x - 12}{12} \Rightarrow 12(2x + 2) = 8(4x - 12) \Rightarrow$
$\Rightarrow 24x + 24 = 32x - 96 \Rightarrow$
$\Rightarrow 24x - 32x = -96 - 24 \Rightarrow -8x = -120 \Rightarrow x = 15$

c) $\frac{x}{8} = \frac{3}{6} \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4$

8. Uma possível resolução:
$\frac{x}{3,3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 6,6 \Rightarrow x = 2,2$
$\frac{y}{3,3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3y = 3,3 \Rightarrow y = 1,1$
$\frac{2}{1} = \frac{3,2}{z} \Rightarrow 2z = 3,2 \Rightarrow z = 1,6$

9. Uma possível resolução:
$\frac{x}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = 2$
$\frac{7}{1} = \frac{7}{y} \Rightarrow y = 1$

10. a) Nesse caso, temos que $x + y = 27 \Rightarrow y = 27 - x$. Assim, podemos escrever:
$\frac{x}{27 - x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5x = 4(27 - x) \Rightarrow 5x = 108 - 4x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{108}{9} \Rightarrow x = 12$
Voltando à relação $y = 27 - x$, teremos:
$y = 27 - 12 \Rightarrow y = 15$

b) $\frac{x}{8} = \frac{4}{4} \Rightarrow x = 8$
$\frac{4}{2} = \frac{8}{y} \Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4$

11. A partir do segmento de reta $\overline{AB}$ transposto no caderno, traçamos, com auxílio de uma régua, uma semirreta $\overrightarrow{AM}$ qualquer. Sobre a semirreta $\overrightarrow{AM}$, com auxílio de um compasso, marcamos quatro pontos (N, O, P e Q), de modo que NA = NO = OP = PQ.

Então, traçamos $\overleftrightarrow{QB}$ e, em seguida, uma paralela a $\overleftrightarrow{QB}$, passando por P, determinando um ponto C em $\overline{AB}$ de modo que $\frac{AQ}{AP} = \frac{4}{3}$, com $\overline{QB}$ // PC.

Por fim, pelo teorema de Tales, temos: $\frac{AP}{AQ} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$.

12. Considerando que 16 m + 28 m + 36 m = 80 m, teremos:
$\frac{a}{16} = \frac{100}{80} \Rightarrow 80a = 16 \cdot 100 \Rightarrow a = \frac{16 \cdot 100}{80} = 20$
$\frac{b}{28} = \frac{100}{80} \Rightarrow 80b = 28 \cdot 100 \Rightarrow b = \frac{28 \cdot 100}{80} = 35$
$\frac{c}{36} = \frac{100}{80} \Rightarrow 80c = 36 \cdot 100 \Rightarrow a = \frac{36 \cdot 100}{80} = 45$
Portanto, $a = 20$ m, $b = 35$ m e $c = 45$ m.

13. a) $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$

b) $\frac{OB}{OC} = \frac{OA'}{OB'}$

c) Aplicando a propriedade transitiva da igualdade nas relações obtidas nos itens anteriores, temos:
$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} = \frac{OB}{OC}$
Invertendo essas razões, temos:
$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB}$

Atividades – página 69

14. Indicando a medida AQ por x, temos:
$\frac{x}{5} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = 15 \Rightarrow x = 7,5$
Logo AQ $= 7,5$.

15. Um esboço dessa situação:
Pelo teorema de Tales, valem as relações:
$\frac{k}{4} = \frac{k + 4}{6} \Rightarrow 6x = 4(k + 4) \Rightarrow 6k = 4k + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2k = 16 \Rightarrow k = 8$
Como a medida de comprimento de $\overline{AB}$ é dada por $k + k + 4$, temos: $8 + 8 + 4 = 20$. Assim, $AB = 20$.

16. $\frac{2}{x} = \frac{2,8}{4,76} \Rightarrow 2,8x = 2 \cdot 4,76 \Rightarrow x = \frac{9,52}{2,8} = 3,4$

Atividades – página 73

17. a) Sim, pois os ângulos correspondentes têm a mesma medida de abertura (90°) e a razão de semelhança é $\frac{5}{2}$, pois $\frac{25}{10} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$.

b) Não, pois os ângulos correspondentes têm medidas das aberturas diferentes.

18. a) $\frac{x}{25} = \frac{12}{30} \Rightarrow 30x = 12 \cdot 25 \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 25}{30} = 10$
$\frac{y}{8} = \frac{30}{12} \Rightarrow 12y = 8 \cdot 30 \Rightarrow y = \frac{8 \cdot 30}{12} = 20$

b) $\frac{x}{18} = \frac{24}{36} \Rightarrow 36x = 24 \cdot 18 \Rightarrow x = \frac{24 \cdot 18}{36} = 12$
$\frac{y}{18} = \frac{36}{24} \Rightarrow 24y = 18 \cdot 36 \Rightarrow y = \frac{18 \cdot 36}{24} = 27$

19. Para que seja feita a construção do triângulo $AB'C'$ semelhante ao triângulo ABC, tal que $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$, seguimos os seguintes passos:

- Traçamos, com o auxílio de uma régua, uma semirreta que passe por qualquer um dos lados do triângulo ABC. Neste caso, vamos escolher o lado $\overline{AB}$ para traçar a semirreta $\overrightarrow{AB}$.
- Sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$, com auxílio do compasso, marcamos três pontos (N, O e P), de modo que: $NA = NO = OP$
- Traçamos uma reta $\overleftrightarrow{PC}$ e uma nova reta paralela a $\overleftrightarrow{PC}$ que passe pelo ponto O, determinando o ponto C' em $\overline{AC}$ de modo que $\frac{AO}{AP} = \frac{2}{3}$ com $\overline{PC}//\overline{OC}$. E, dessa forma, aplicando o teorema de Tales, temos: $\frac{AO}{AP} = \frac{AC'}{AC} = \frac{2}{3}$
- Para finalizar a construção, podemos traçar uma reta $\overleftrightarrow{B'C'}$, paralela à $\overleftrightarrow{BC}$. Segue do teorema de Tales que: $\frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3}$
  Assim, obtemos o triângulo $AB'C'$.

20. **a)** $\frac{x}{90} = \frac{60}{100} \Rightarrow x = \frac{90 \cdot 60}{100} \Rightarrow x = 54$

$\frac{y}{51} = \frac{100}{60} \Rightarrow y = \frac{51 \cdot 100}{60} \Rightarrow y = 85$

b) $x = 120°$, já que a medida da abertura de ângulos correspondentes em figuras semelhantes é a mesma.

$\frac{y}{30} = \frac{33}{55} \Rightarrow y = \frac{33 \cdot 30}{55} \Rightarrow y = 18$

Atividades - página 74

21. **a)** Observando a correspondência entre os ângulos, podemos dizer que os triângulos ABC e PRQ são semelhantes e poderemos fazer:

$\frac{x}{24} = \frac{10}{20}$

$x = \frac{10 \cdot 24}{20} \Rightarrow x = 12$

$\frac{y}{30} = \frac{10}{20} \Rightarrow y = \frac{10 \cdot 30}{20} \Rightarrow y = 15$

b) Os triângulos ABC e NOM são semelhantes, então:

$\frac{x}{15} = \frac{12}{18} \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 15}{18} \Rightarrow x = 10$

$\frac{y}{20} = \frac{18}{12} \Rightarrow y = \frac{20 \cdot 18}{12} \Rightarrow y = 30$

22. Os triângulos AHB e CHA são semelhantes, então:

$\frac{x}{11{,}1} = \frac{8{,}5}{13{,}1} \Rightarrow x = \frac{8{,}5 \cdot 11{,}1}{13{,}1} \Rightarrow x \simeq 7{,}2$

$\frac{y}{13{,}1} = \frac{8{,}5}{11{,}1} \Rightarrow y = \frac{8{,}5 \cdot 13{,}1}{11{,}1} \Rightarrow y \simeq 10$

23. Temos que:

$\frac{x}{3} = \frac{8}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \cdot 8}{2} \Rightarrow x = 12$

Logo, a medida da altura do poste é 12 m.

Um pouco de história - página 76

Espera-se que os estudantes percebam que, teorema fundamental da semelhança de triângulos, os triângulos ABH e GFH são semelhantes e, por isso, as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais. Assim, pode-se escrever:

$\frac{AB}{GF} = \frac{BH}{FH} = \frac{AH}{GH}$

Atividades - página 76

24. **a)** $\frac{8}{8+x} = \frac{16}{24} \Rightarrow 16(x+8) = 8 \cdot 24 \Rightarrow x + 8 = \frac{(8 \cdot 24)}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 8 = 12 \Rightarrow x = 4$

$\frac{y}{y+6} = \frac{16}{24} \Rightarrow 24y = 16y + 96 \Rightarrow 8y = 96 \Rightarrow y = 12$

b) $\frac{12}{12+y} = \frac{10}{30} \Rightarrow 10(12+y) = 30 \cdot 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12 + y = 36 \Rightarrow y = 24$

$\frac{x}{12+x} = \frac{10}{30} \Rightarrow 30x = 10(12+x) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 12 + x \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$

25. Sejam $BC = x$ e $DC = y$, temos:

$\frac{5}{y} = \frac{13}{13+12} \Rightarrow y = \frac{5 \cdot 25}{13} \Rightarrow y = \frac{125}{13}$

$\frac{x+16}{16} = \frac{12+13}{13} \Rightarrow x + 16 = \frac{16 \cdot 25}{13}$

$x = \frac{400}{13} - 16 \Rightarrow x = \frac{400}{13} - \frac{208}{13} \Rightarrow x = \frac{192}{13}$

Portanto, $BC = \frac{192}{13}$ m e $DC = \frac{125}{13}$ m.

Atividades - páginas 78 e 79

26. $\frac{AB}{MO} = \frac{AC}{MN} \Rightarrow \frac{18}{27} = \frac{28}{42}$ e $med(B\hat{A}C) = med(O\hat{M}N) = 40°$, então $\Delta ABC \sim \Delta MON$ pelo caso LAL.

$\frac{XY}{TS} = \frac{XZ}{TR} = \frac{YZ}{SR} \Rightarrow \frac{1{,}8}{3} = \frac{3}{5} = \frac{2{,}4}{4}$, então $\Delta XYZ \sim \Delta TSR$ pelo caso LLL.

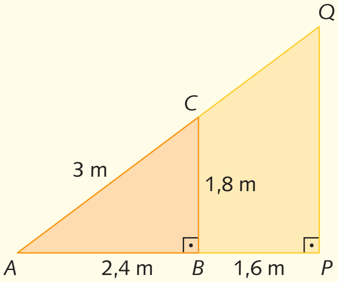
$med(E\hat{D}F) = med(G\hat{I}F) = 35°$ e $med(E\hat{F}D) = med(G\hat{H}I) = 60°$, então $\Delta DEF \sim \Delta IGH$ pelo caso AA.

27. Sim, são semelhantes pelo caso AA, já que ambos possuem ângulos retos correspondentes ($A\hat{D}G \cong G\hat{C}F$) e $D\hat{A}G \cong C\hat{G}F$, já que esses ângulos são correspondentes considerando as retas paralelas $\overleftrightarrow{GF}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ (lados do quadrado) e a transversal $\overleftrightarrow{AC}$. Assim, $\Delta ADG \sim \Delta GCF$.

28. **a)** LAL **b)** LAL ou LLL **c)** AA

29. Exemplo de resposta: $\Delta DBE \sim \Delta ABC$ (AA).

30. a)



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Aplicando o teorema de Tales no triângulo, temos:

$\frac{2{,}4 \text{ m}}{1{,}6 \text{ m}} = \frac{3 \text{ m}}{CQ} \Rightarrow CQ = \frac{3 \text{ m} \cdot 1{,}6 \text{ m}}{2{,}4 \text{ m}} \Rightarrow CQ = 2 \text{ m}$

Portanto, a medida do comprimento da escada é 5 m, pois 3 m + 2 m = 5 m.

b) Os ângulos correspondentes dos triângulos são congruentes, pois:

$A\hat{B}C \cong A\hat{P}Q$ (ângulos retos)

$B\hat{A}C \cong P\hat{A}Q$ (ângulo comum aos dois triângulos)

$B\hat{C}A = P\hat{Q}A$ (a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e a medida das aberturas dos outros dois ângulos internos correspondentes dos dois triângulos são iguais).

Os triângulos não têm lados correspondentes com a mesma medida de comprimento.

$AB = 2{,}4$ m, $BC = 1{,}8$ m, $CA = 3$ m, $AP = 4$ m, $PQ > 1{,}8$ m e $QA = 5$ m.

c) Sim, como os triângulos têm ângulos correspondentes congruentes, eles são semelhantes pelo caso AA.

31. Se indicarmos por x a medida da altura do prédio, em metros, podemos fazer:

$\frac{x}{1{,}6} = \frac{8}{0{,}4} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 1{,}6}{0{,}4} \Rightarrow x = 32$

A medida da altura do prédio é 32 metros.

32. Respostas pessoais.

33. **a)** $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{3}{4}$

Portanto, as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais.

b) $\text{med}(A\hat{B}C) = \text{med}(E\hat{D}F) = 45°$

Portanto, um dos ângulos de cada triângulo tem a mesma medida de comprimento.

c) Espera-se que os estudantes respondam que não, pois os ângulos que têm a mesma medida de abertura nos dois triângulos não estão compreendidos entre os lados que têm medidas de comprimento proporcionais.

Resolvendo em equipe – página 80

Interpretação e identificação dos dados

- Resposta pessoal.
- Sim, os triângulos ABC e FBE são semelhantes pelo caso AA, pois ambos têm um ângulo reto e compartilham o ângulo $\hat{B}$.
- Triângulos ABD e AFE também são semelhantes pelo caso AA, pois ambos têm um ângulo reto e compartilham o ângulo $\hat{A}$.

Plano de resolução e resolução

- Considerando que $\Delta FBE \sim \Delta ABC$, teremos:

$\frac{FB}{AB} = \frac{EB}{BC} = \frac{FE}{AC}$

Como $AC = 4$, então:

$\frac{FB}{AB} = \frac{EB}{BC} = \frac{FE}{4}$

Considerando que $\Delta AFE \sim \Delta ABD$, teremos:

$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{FE}{BD}$

Como $BD = 6$, então:

$\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{FE}{6}$

- Considerando as relações obtidas, temos:

$\frac{FB}{AB} = \frac{FE}{4} \Rightarrow \frac{AB - AF}{AB} = FE \Rightarrow FE = \frac{4(AB - AF)}{AB}$ (I)

$\frac{AF}{AB} = \frac{FE}{6} \Rightarrow FE = \frac{6AF}{AB}$ (II)

De II e II, temos:

$\frac{6AF}{AB} = \frac{4(AB - AF)}{AB} \Rightarrow 4AB = 10AF \Rightarrow AB = \frac{5}{2}AF$

- Sabendo que:

$\frac{FB}{AB} = \frac{FE}{4}$ e $\frac{AF}{AB} = \frac{FE}{6}$

Podemos fazer:

$\frac{FB}{AB} + \frac{AF}{AB} = \frac{FE}{4} + \frac{FE}{6}$

$\frac{FB + AF}{AB} = \frac{3FE + 2FE}{12}$

Como, pela figura, podemos afirmar que $FB + AF = AB$, teremos:

$\frac{AB}{AB} = \frac{5FE}{12} \Rightarrow 1 = \frac{5FE}{12} \Rightarrow FE = \frac{12}{5} \Rightarrow FE = 2{,}4$

Assim, obtemos 2,4 m para a medida de comprimento de $\overline{EF}$ e a alternativa **c** é a correta.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – páginas 81 e 82

1. **a)** $\frac{2}{3} = \frac{1{,}5}{x} \Rightarrow x = \frac{1{,}5 \cdot 3}{2} \Rightarrow x = 2{,}25$

b) $\frac{3{,}6}{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{3{,}6 \cdot 4}{3} \Rightarrow x = 4{,}8$

2. **a)** $\frac{10}{12} = \frac{45}{12 + x} \Rightarrow 12 + x = \frac{45 \cdot 12}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 54 - 12 \Rightarrow x = 42$

b) $\frac{5}{6} = \frac{13}{6 + x} \Rightarrow 6 + x = \frac{6 \cdot 13}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 15{,}6 - 6 \Rightarrow x = 9{,}6$

3. Indicando por x a medida do comprimento do muro do lote 6 com a Rua dos Sabiás e por y a medida do comprimento do portão do lote 5, temos:

a) $\frac{9{,}5}{x} = \frac{10}{12} \Rightarrow x = \frac{9{,}5 \cdot 12}{10} \Rightarrow x = 11{,}4$

Logo, esse muro deverá ter medida de comprimento igual a 11,4 m.

b) $\frac{y}{10} = \frac{13{,}3}{9{,}5} \Rightarrow y = \frac{13{,}3 \cdot 10}{9{,}5} \Rightarrow y = 14$

O portão deverá medir 14 m de comprimento.

4. $\frac{2}{5} \cdot 4 \text{ m} = \frac{8}{5} \text{ m} = 1{,}6 \text{ m}$

$\frac{2}{5} \cdot 3 \text{ m} = \frac{6}{5} \text{ m} = 1{,}2 \text{ m}$

Logo, as novas dimensões medem 1,6 m por 1,2 m.

5. $\frac{2{,}4}{1{,}6} = \frac{5{,}1}{x} \Rightarrow x = \frac{1{,}6 \cdot 5{,}1}{2{,}4} \Rightarrow x = 3{,}4$

$\frac{2{,}6}{y} = \frac{1{,}6}{2{,}4} \Rightarrow y = \frac{2{,}4 \cdot 2{,}6}{1{,}6} \Rightarrow y = 3{,}9$

Assim, $x = 3{,}4$ m e $y = 3{,}9$ m.

6. Teremos as relações:

$\frac{x}{1{,}5} = \frac{8}{0{,}6} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 1{,}5}{0{,}6} \Rightarrow x = 20$

Logo, a medida da altura do prédio é 20 m.

7. **a)** Caso AA, pois temos ângulos retos correspondentes e ângulos opostos pelo vértice.

$\frac{x}{6 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm}}{7{,}5 \text{ cm}} \Rightarrow x = \frac{6 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}}{7{,}5 \text{ cm}} \Rightarrow x = 4 \text{ cm}$

$\frac{y}{3 \text{ cm}} = \frac{7{,}5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \Rightarrow y = \frac{3 \text{ cm} \cdot 7{,}5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \Rightarrow y = 4{,}5 \text{ cm}$

b) Caso AA, pois temos os ângulos correspondentes com medida de abertura α e ângulos opostos pelo vértice.

$\frac{x}{6{,}6 \text{ cm}} = \frac{2{,}5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \Rightarrow x = \frac{6{,}6 \text{ cm} \cdot 2{,}5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \Rightarrow x = 3{,}3 \text{ cm}$

$\frac{y}{3{,}2 \text{ cm}} = \frac{5 \text{ cm}}{2{,}5 \text{ cm}} \Rightarrow y = \frac{3{,}2 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}}{2{,}5 \text{ cm}} \Rightarrow y = 6{,}4 \text{ cm}$

É hora de extrapolar - páginas 83 e 84

1. Resposta pessoal.
2. Resposta pessoal.
3. Respostas pessoais.
4. a) $0{,}15 \cdot 36\,000 = 5\,400$
   $36\,000 - 5\,400 = 30\,600$
   Pagará R$ 30 600,00.

   b) $(36\,000 : 2) : 24 = 18\,000 : 24 = 750$
   Cada parcela será de R$ 750,00.

   c) $48 \cdot 1\,050 = 50\,400$
   O total será de R$ 50 400,00.

   d) Diferença de R$ 14 400,00 (pois $50\,400 - 36\,000 = 14\,400$) chamada de juro.

   e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes estejam atentos aos altos valores de juro, considerando que na maior parte das vezes é mais interessante poupar para depois comprar.
5. a) $66\,700\,000 = 6{,}67 \cdot 10^7$
   $79\,100\,000 = 7{,}91 \cdot 10^7$
   $12\,400\,000 = 1{,}24 \cdot 10^7$
   $379{,}2 = 3{,}792 \cdot 10^2$

   b) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes tenham algumas ideais sobre como separar lixo orgânico e reciclável, consumir com consciência etc.
6. Respostas pessoais.
7. a) Algumas vantagens: redução do uso de materiais para a produção das embalagens; custos mais baixos para realizar o transporte; diminuição do uso de água e de produtos químicos na fabricação; facilidade de armazenamento nas casas; custo mais baixo para o consumidor.

   b) Nesse caso, teremos:
   $\frac{30}{h} = \frac{16}{10} \Rightarrow 16h = 300 \Rightarrow h = \frac{300}{16} \Rightarrow h = 18{,}75$
   Logo, a altura da embalagem da versão concentrada mede 18,75 cm.

13. a) Espera-se que os estudantes citem, principalmente, a preservação do meio ambiente para a sociedade atual e para as gerações futuras.

    b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes discutam estratégias para resolver a equação obtida no primeiro item.

CAPÍTULO 4 - FATORAÇÃO E EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Trocando ideias - página 86

- $x \cdot (x + 18) = 2\,944$
  $x^2 + 18x - 2\,944 = 0$
  É uma equação do 2º grau.
- Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes discutam estratégias para resolver a equação obtida no primeiro item.

Atividades - página 88

1. a) $a + a + a + a = 4a$

   b) $2x + 2y$

   c) $x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3$

   d) $b + b + h + h = 2b + 2h$
2. a) Como em um 1 ano há 12 meses, então em x anos há $12x$ meses.

   b) Basta dividir a quantidade y de dias por 365, ou seja, $\frac{y}{365}$.
3. a) $a \cdot a = a^2$ b) $b \cdot h$ c) $\frac{D \cdot d}{2}$
4. Em todos os itens, podemos fazer o produto entre as medidas do comprimento da largura e da altura; assim:

   a) $a \cdot a \cdot a$ ou a^3

   b) $c \cdot w \cdot h$

Atividades - páginas 89 e 90

5. Nas respostas escrevemos, nesta ordem: o coeficiente e a parte literal.

   a) $\frac{1}{5}$; a^3b^4
   b) -1; a^2bc^3
   c) $\frac{3}{2}$; x^3
   d) $-5\sqrt{3}$; mn^2
   e) $\frac{1}{5}$; $a^2b^3c^4$
   f) 1; xyz
   g) -1; xy
   h) $\frac{4\pi}{3}$; r^3
6. a) Sim.

   b) Não, pois não é composto apenas por multiplicações de números por letras.

   c) Não, pois o expoente da parte literal não é um número natural.

   d) Sim.

   e) Sim.

   f) Sim.

   g) Sim.

   h) Não, pois não é composto apenas por multiplicações de números por letras.

   i) Sim.

   j) Não, pois não é composto apenas por multiplicações de números por letras.

   k) Sim.

   l) Sim.

   Espera-se que os estudantes percebam que os monômios são expressões algébricas formadas apenas por multiplicações e que os expoentes da parte literal só podem ser números naturais.
7. a) ab b) $6y$ c) $8a^2$ d) a^3

Atividades - página 90

8. Alternativas **a**, **c**, **e**, **g**, pois os monômios desses itens possuem partes literais idênticas.
9. Exemplos de resposta:
   $a^5b^7c^9$
   $-a^5b^7c^9$
   $25a^5b^7c^9$
   $\frac{a^5b^7c^9}{10}$
10. Exemplo de resposta: $2ab$ e $\frac{1}{2}ab$

Atividades - páginas 91 e 92

11. a) Retângulo I: $3ab$; retângulo II: $7ab$.

    b) $3ab + 7ab = 10ab$

    c) Substituindo no monômio encontrado no item anterior, teremos:
    $10 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}75 = 6{,}375$
    Logo, a medida da área total é 6,375 cm².

12. a) $(5 + 15 - 12 + 2)xy = 10xy$

b) $\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right)xy = \left(-\frac{3}{9} + \frac{3}{9}\right)xy = 0$

c) $(9 - 18 - 10 + 2)x^4y^3 = -17x^4y^3$

13. Podemos calcular:

$5abc - (-3abc) = [5 - (-3)]abc = [5 + 3]abc = 8abc$

Devemos adicionar $8abc$.

14. Podemos, primeiro, simplificar a expressão:

$\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{8} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4}\right)x^2y = \left(\frac{96 - 27 + 32 - 18}{72}\right)x^2y = \left(\frac{83}{72}\right)x^2y$

Substituindo x por -1 e y por 2, temos:

$\left(\frac{83}{72}\right) \cdot (-1)^2 \cdot 2 = \frac{83}{36}$

Atividades - páginas 92 e 93

15. a) $x^{7+8} = x^{15}$

b) $(+3) \cdot (-8) \cdot (x^{1+1}) = -24x^2$

c) $(-2)(+7)(x^{2+1} \cdot y^{1+1}) = -14x^3y^2$

d) $(+4) \cdot (-2) \cdot (a^{1+1} \cdot b^{2+1} \cdot c) = -8a^2b^3c$

16. a) $2k \cdot 2k = 4k^2$

b) $3x \cdot 6y = 18xy$

17. a) $x^{2+4+13} = x^{19}$

b) $\frac{1}{10} \cdot \frac{10}{7} \cdot 14 \cdot ykxz = 2ykxz$

c) $(-0{,}4) \cdot (0{,}01) \cdot (-0{,}02)a^{2+2} \cdot b^{1+1+3} = 0{,}00008a^4b^5$

d) $(-3) \cdot 1 \cdot (-18)m^{1+1+1}n^{1+1}p^{1+1} = 54m^3n^2p^2$

18. Sabendo que $A \cdot B = C + D$, temos: $D = A \cdot B - C$.
Podemos começar calculando $A \cdot B$:
$2x^2y^3 \cdot (-4xy) = 2 \cdot (-4) \cdot x^{2+1}y^{3+1} = -8x^3y^4$
Agora, fazemos $A \cdot B - C$:
$-8x^3y^4 - (-14x^3y^4) = (-8 + 14)x^3y^4 = 6x^3y^4$
Portanto, $D = 6x^3y^4$.

19. Exemplos de resposta:
p^3 e $6q$
-6 e $-p^3q$
$2pq$ e $3p^2$

20. a) Parte verde: $x \cdot 5y = 5xy$

Parte rosa: $2x \cdot 5y = 10xy$

b) Parte branca: $x \cdot 5y = 5xy$

Total: $5xy + 10xy + 5xy = 20xy$

Atividades - página 93

21. a) $\frac{16x^7}{4x^3} = 4x^4$

b) $\frac{-60a^5b^3}{-15a^2b} = 4a^3b^2$

c) $\frac{-125a^5b^3c^7}{-25a^4b^3c^2} = 5ac^5$

d) $\frac{18x^5y^4}{-9x^5y^3} = -2y$

e) $\frac{-\frac{3}{5}xyz^2}{0{,}2yz} = -3xz$

f) $\frac{0{,}2x^2y^4}{0{,}25xy^2} = 0{,}8xy^2$

g) $\frac{b^2m^2}{-5bm} = -\frac{1}{5}bm$

h) $\frac{-250x^3}{50x^3} = -5$

i) $\frac{18x^4}{3x^2} = 6x^2$

j) $\frac{-10x^3}{-2x^2} = 5x$

22. a) Seja A o monômio procurado, sabemos que:

$\frac{\frac{2}{3}x^2y^3}{A} = -\frac{1}{5}xy$

Logo, temos:

$A = \frac{\frac{2}{3}x^2y^3}{-\frac{1}{5}xy} = \frac{2}{3} \cdot (-5)xy^2 = -\frac{10}{3}xy^2$

b) Seja A o monômio procurado, sabemos que:

$A \cdot 10ab^3 = 15a^2b^5$

Logo, temos:

$A = \frac{15a^2b^5}{10ab^3} = \frac{3}{2}ab^2$

c) Seja A o monômio procurado, sabemos que:

$A \cdot (-2xy) = \frac{3}{4}x^2y^3$

Logo, temos:

$A = \frac{\frac{3}{4}x^2y^3}{-2xy} = -\frac{3}{8}xy^2$

23. a) $\frac{-30a^4b^6}{-6ab^5} = 5a^3b$

b) $\frac{x^4y^4z^4}{x^2y^3z^4} = x^2y$

c) $\frac{6x^6}{-3x^4} = -2x^2$

Atividades - página 94

24. Representamos a situação por: $120x + 80y$.

25. Exemplo de resposta: $\frac{100(100 - x)}{3}$

Atividades - página 95

26. Observando o termo de maior grau nos polinômios, temos:

a) 3º grau. c) 3º grau. e) 7º grau. g) 5º grau.
b) 5º grau. d) 4º grau. f) 6º grau.

27. As respostas estão, respectivamente, em relação a x e a y:

a) 2º grau; 3º grau. d) 3º grau; 2º grau.
b) 5º grau; 4º grau. e) 2º grau; 4º grau.
c) 3º grau; 2º grau. f) 2º grau; 3º grau.

Atividades - páginas 96 e 97

28. a) $(-3x^2 + 6x^2) + (5x - 4x) + (-8 - 3) = 3x^2 + x - 11$

b) $(8ab + 3ab) + (-7bc - 5bc) + (3ac - ac) = 11ab - 12bc + 2ac$

c) $\left(-\frac{3x}{2} + \frac{x}{5} + 2x\right) + \left(-\frac{y}{3} - \frac{y}{4} + y\right) =$

$= \left(\frac{-15x + 2x + 20x}{10}\right) + \left(\frac{-4y - 3y + 12y}{12}\right) = \frac{7x}{10} + \frac{5y}{12}$

d) $\left(\frac{a}{2} + \frac{2a}{3}\right) + (b + 2b) + (-6 - 5) = \left(\frac{3a + 4a}{6}\right) + 3b - 11 =$

$= \frac{7a}{6} + 3b - 11$

29. Adicionando as medidas dos comprimentos dos lados da figura, temos:

$(2x + 1) + (x + 2) + (3x + 3) + \left(\frac{3x}{2} + 1\right) =$

$= \left(2x + x + 3x + \frac{3x}{2}\right) + (1 + 2 + 3 + 1) =$

$= \left(\frac{4x + 2x + 6x + 3x}{2}\right) + 7 = \frac{15x}{2} + 7$

30. $\frac{45}{100}x + \frac{60}{100}y - 2 = 0{,}45x + 0{,}6y - 2$

31. a) Escrevendo o oposto, temos: $-(-x^3 + 2x^2 - 4x + 5) =$
$= x^3 - 2x^2 + 4x - 5$

b) $(-x^3 + 2x^2 - 4x + 5) + (x^3 - 2x^2 + 4x - 5) = -x^3 + x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + 4x + 5 - 5 = 0$

32. a) $(6a^2 - 5a^2) + (-7ab - 8ab) + (8b^2 + 7b^2) = a^2 - 15ab + 15b^2$

b) $(5x^3 - 7x^3) + (-4x^2 - 8x^2) + (6x + 10x) + 8 =$
$= -2x^3 - 12x^2 + 16x + 8$

c) $(5m - 2m) + (-2mn + 8mn) + (7n + 10n) = 3m + 6mn + 17n$

d) $\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) + \left(\frac{xy}{2} + \frac{2xy}{5}\right) + \left(-\frac{y}{5} - \frac{3y}{2}\right) =$
$= \left(\frac{4x - 3x}{12}\right) + \left(\frac{5xy + 4xy}{10}\right) + \left(\frac{-2y - 15y}{10}\right) =$
$= \frac{1}{12}x + \frac{9}{10}xy - \frac{17}{10}y$

e) $(5x^2 - 8x^2) + (-4x + 6x) + (9 - 3) =$
$= -3x^2 + 2x + 6$

33. a) $(6x^2 - 3x - 8) - (5x^2 + 4x - 3) =$
$= (6x^2 - 5x^2) + (-3x - 4x) + (-8 + 3) =$
$= x^2 - 7x - 5$

b) $(5x^2 + 4x - 3) - (6x^2 - 3x - 8) =$
$= (5x^2 - 6x^2) + (4x + 3x) + (-3 + 8) =$
$= -x^2 + 7x + 5$

c) $(6x^2 - 3x - 8) + (5x^2 + 4x - 3) - (x^2 - 10x) =$
$= (6x^2 + 5x^2 - x^2) + (-3x + 4x + 10x) + (-8 - 3) =$
$= 10x^2 + 11x - 11$

d) $6x^2 - 3x - 8 - [(5x^2 + 4x - 3) + (x^2 - 10x)] =$
$= (6x^2 - 6x^2) + (-3x + 6x) + (-8 + 3) = 3x - 5$

34. Seja A o monômio procurado, sabemos que:
$6a^2 - 7ab + 8b^2 - 5a^2b^2 + A = 2ab - a^2 + 2b^2 + 3a^2b^2$
Logo,
$A = 2ab - a^2 + 2b^2 + 3a^2b^2 - (6a^2 - 7ab + 8b^2 - 5a^2b^2) =$
$= (2ab + 7ab) + (-a^2 - 6a^2) + (2b^2 - 8b^2) + (3a^2b^2 + 5a^2b^2) =$
$= -7a^2 - 6b^2 + 8a^2b^2 + 9ab$

Atividades - páginas 99 e 100

35. Aplicando a propriedade distributiva, temos as seguintes respostas:

a) $30x - 10$

b) $m^3 - m^2n$

c) $6 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)a^3 + 10 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)a^2b + \left(-\frac{3}{4}\right)ab^2 =$
$= -\frac{9a^3}{2} - \frac{15a^2b}{2} - \frac{3ab^2}{4}$

d) $\frac{a^2b^3}{6} - \frac{a^4b}{8}$

36. Podemos encontrar a medida da área por meio do produto das medidas da largura pelo comprimento, ou seja:
$2x \cdot (3x + 1) = 6x^2 + 2x$

37. Por meio da figura, concluímos que as medidas de comprimento dos lados são $(x + 2y)$ e $(4x - y)$. Assim, temos:
$(x + 2y) \cdot (4x - y) = 4x^2 - xy + 8xy - 2y^2 = 4x^2 + 7xy - 2y^2$

38. Aplicando a propriedade distributiva, temos:

a) $3x^2 - 9x + 2x - 6 = 3x^2 - 7x - 6$

b) $-3a^3 - 9a^2 - 2a^2 - 6a - 4a - 12 = -3a^3 - 11a^2 - 10a - 12$

c) $-12x^3 - 8x^2 - 6x + 30x^2 + 20x + 15 =$
$= -12x^3 + 22x^2 + 14x + 15$

d) $5x^3 - 15x^2 + 2x^2 - 6x - x + 3 = 5x^3 - 13x^2 - 7x + 3$

e) $a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$

39. a) $(x + 5) \cdot (x^2 + 2x + 1) = x^3 + 2x^2 + x + 5x^2 + 10x + 5 =$
$= x^3 + 7x^2 + 11x + 5$

b) $(x^2 + 2x + 1) \cdot (2x^2 - 4) = 2x^4 - 4x^2 + 4x^3 - 8x + 2x^2 - 4 =$
$= 2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x - 4$

c) Podemos usar algum dos resultados dos itens anteriores, por exemplo:
$(x^3 + 7x^2 + 11x + 5) \cdot (2x^2 - 4) =$
$= 2x^5 - 4x^3 + 14x^4 - 28x^2 + 22x^3 - 44x + 10x^2 - 20 =$
$= 2x^5 + 14x^4 + 18x^3 - 18x^2 - 44x - 20$

40. a) $(x - a) \cdot (x - a) \cdot (x - a) = (x^2 - ax - ax + a^2) \cdot (x - a) =$
$= (x^2 - 2ax + a^2) \cdot (x - a) = x^3 - ax^2 - 2ax^2 + 2a^2x + a^2x - a^3 =$
$= x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

b) $(x - 1) \cdot (2x - 3) \cdot (4x + 2) = (2x^2 - 3x - 2x + 3) \cdot (4x + 2) =$
$= (2x^2 - 5x + 3) \cdot (4x + 2) = 8x^3 + 4x^2 - 20x^2 - 10x + 12x + 6 =$
$= 8x^3 - 16x^2 + 2x + 6$

Atividades - páginas 100 e 101

41. a) $\frac{10x^6}{2x^3} + \frac{12x^5}{2x^3} = 5x^3 + 6x^2$

b) $\frac{30a^2}{30} + \frac{60ab}{30} + \frac{90b^2}{30} = a^2 + 2ab + 3b^2$

c) $\frac{-6ab}{3ab} + \frac{9a^2b}{3ab} + \frac{12ab^2}{3ab} = -2 + 3a + 4b$

d) $\frac{\frac{5}{6}x^2}{\left(-\frac{2}{3}x\right)} + \frac{\left(-\frac{3}{4}x\right)}{\left(-\frac{2}{3}x\right)} = \frac{5}{6}x \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{4}x + \frac{9}{8}$

e) $\frac{m^5}{(-m^2)} + \frac{m^3}{(-m^2)} = -m^3 - m$

f) $\frac{m^2n^3}{(-mn)} + \frac{mn^4}{(-mn)} + \frac{m^5n^2}{(-mn)} = -mn^2 - n^3 - m^4n$

42. Seja P o polinômio não conhecido, temos:
$5a^2b^3 \cdot P = 20a^2b^5 + 30a^3b^7$
Logo, podemos fazer:
$P = \frac{20a^2b^5 + 30a^3b^7}{5a^2b^3} = \frac{20a^2b^5}{5a^2b^3} + \frac{30a^3b^7}{5a^2b^3} = 4b^2 + 6ab^4$

43. A expressão pode ser calculada assim:
$\frac{b^2x^2 + 2bx}{bx} = \frac{b^2x^2}{bx} + \frac{2bx}{bx} = bx + 2$

44. a) $\frac{10x^2y^3 - 20x^3y^5 + 30x^4y^6}{10xy} =$
$= \frac{10x^2y^3}{10xy} - \frac{20x^3y^5}{10xy} + \frac{30x^4y^6}{10xy} =$
$= xy^2 - 2x^2y^4 + 3x^3y^5$

b) $\frac{10x^2y^3 - 20x^3y^5 + 30x^4y^6}{(-20xy^3)} =$
$= \frac{10x^2y^3}{(-20xy^3)} - \frac{20x^3y^5}{(-20xy^3)} + \frac{30x^4y^6}{(-20xy^3)} =$
$= -\frac{x}{2} + x^2y^2 - \frac{3x^3y^3}{2}$

c) $\dfrac{10x^2y^3 - 20x^3y^5 + 30x^4y^6}{5x^2y^2} =$

$= \dfrac{10x^2y^3}{5x^2y^2} - \dfrac{20x^3y^5}{5x^2y^2} + \dfrac{30x^4y^6}{5x^2y^2} =$

$= 2y - 4xy^3 + 6x^2y^4$

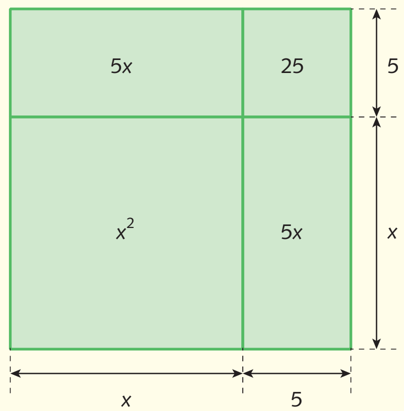
d) $\dfrac{10x^2y^3 - 20x^3y^5 + 30x^4y^6}{(-10x^2y)} =$

$= \dfrac{10x^2y^3}{(-10x^2y)} - \dfrac{20x^3y^5}{(-10x^2y)} + \dfrac{30x^4y^6}{(-10x^2y)} =$

$= -y^2 + 2xy^4 - 3x^2y^5$

Um pouco de história - página 102

Como $x^2 + 10x + 25 = (x + 5) \cdot (x + 5)$, uma representação geométrica seria:



Atividades - página 103

45. a) $x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 10 + 10^2 = 4x^2 + 40x + 100$

c) $(xy)^2 + 2 \cdot xy \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = x^2y^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}$

d) $x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

e) $(x^5)^2 + 2 \cdot x^5 \cdot 2x^3 + (2x^3)^2 = x^{10} + 4x^8 + 4x^6$

f) $6^2 + 2 \cdot 6 \cdot x + x^2 = 36 + 12x + x^2$

g) $(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot xy + (xy)^2 = 4x^2 + 4x^2y + x^2y^2$

h) $(x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 1 + 1^2 = x^4 + 2x^2 + 1$

i) $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$

j) $(x^3)^2 + 2 \cdot (x^3) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = x^6 + \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{9}$

46. a) $2x^2 - x + x - 3x^2 = -x^2$

b) $a^2 + 10a + 25 - (a^2 + 10a + 25) = 0$

c) $y^2 + 2y - 6y + 2y^2 = 3y^2 - 4y$

d) $4 + 4x + x^2 - (x^2 + 4x + 4) = 0$

47. a) $(2x^2 + 3)^2 = 4x^4 + 12x^2 + 9$

b) $(x^2 + 4)^2 = x^4 + 8x^2 + 16$

c) $(2x^2 + 3 + x^2 + 4)^2 = (3x^2 + 7)^2 =$

$= (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot 7 + 7^2 = 9x^4 + 42x^2 + 49$

48. a) $(10 + 2)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2^2 = 100 + 40 + 4 = 144$

b) $(60 + 1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3\,600 + 120 + 1 = 3\,721$

c) $(30 + 3)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 3 + 3^2 = 900 + 180 + 9 = 1\,089$

d) $(90 + 2)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 2 + 2^2 = 8\,100 + 360 + 4 = 8\,464$

49. Sabemos que:

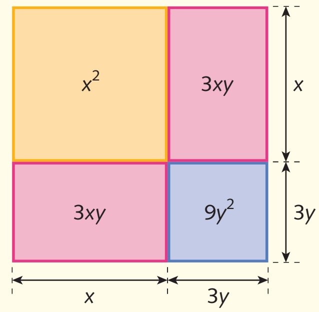
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Como $a^2 + b^2 = 34$ e $(a + b)^2 = 64$, então:

$34 + 2ab = 64 \Rightarrow 2ab = 30 \Rightarrow 6ab = 90$

50. $(x + 3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

Para justificar geometricamente, podemos construir a figura a seguir:



51. Sabemos que:

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Como $(x + y)^2 = 256$ e $x^2 + y^2 = 136$, então:

$136 + 2xy = 256 \Rightarrow 2xy = 120 \Rightarrow xy = 60$

52. a) Exemplo de resposta: $(a + 3)^2 = a^2 + 6ab + 9$

b) Exemplo de resposta: I : a^2; II: $3a$; III: 9; IV: $3a$

Atividades - página 105

53. a) $x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

b) $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{3}\right) \cdot 2 + 2^2 = \frac{x^2}{9} - \frac{4x}{3} + 4$

c) $(9x^2)^2 - 2 \cdot 9x^2 \cdot 2 + 2^2 = 81x^4 - 36x^2 + 4$

d) $(x^3)^2 - 2 \cdot x^3 \cdot y^3 + (y^3)^2 = x^6 - 2x^3y^3 + y^6$

e) $(x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + (y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

f) $(-x - y)^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

g) $(xy)^2 - 2 \cdot xy \cdot z + z^2 = x^2y^2 - 2xyz + z^2$

h) $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\frac{y}{3}\right) + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$

54. Exemplos de resposta:

a) $(20 - 3)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 3 + 3^2 = 400 - 120 + 9 = 289$

b) $(20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

c) $(20 - 6)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 6 + 6^2 = 400 - 240 + 36 = 196$

55. $(m - n)^2 = m^2 - 2mn + n^2$

56. Como:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = 16$

$a^2 + b^2 = 106$, então:

$106 - 2ab = 16 \Rightarrow -2ab = -90 \Rightarrow ab = 45 \Rightarrow \frac{ab}{3} = 15$

57. Como:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

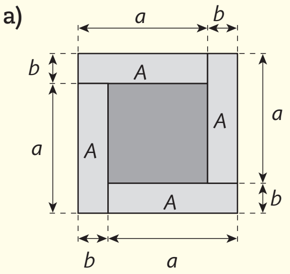
$a^2 + b^2 = 52$

$ab = 24$, então:

$(a - b)^2 = 52 - 2 \cdot 24 = 52 - 48 = 4$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

58. **a)**



b) $(a+b)^2 = 4A + (a-b)^2$

$(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$

$(a+b)^2 = 4ab + a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Atividades - página 107

59. **a)** $x^2 - 1^2 = x^2 - 1$
b) $(3x)^2 - y^2 = 9x^2 - y^2$
c) $x^2 - 5^2 = x^2 - 25$
d) $(2x)^2 - 5^2 = 4x^2 - 25$

60. $x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + 2(x^2 - 1) =$
$= 2x^2 + 2 + 2x^2 - 2 = 4x^2$

61. **a)** $x^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - \frac{1}{x^2}$
b) $x^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = x^2 - \frac{y^2}{9}$
c) $(x^2)^2 - 1^2 = x^4 - 1$
d) $(xy^2)^2 - (z^2)^2 = x^2y^4 - z^4$

62. **a)** $(60-3)\cdot(60+3) = 60^2 - 3^2 = 3600 - 9 = 3591$
b) $(50+2)\cdot(50-2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$
c) $(38+4)\cdot(38-4) = 38^2 - 4^2 = 1444 - 16 = 1428$

63. Podemos fazer:
$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$
Como $a + b = 13$ e $a^2 - b^2 = 39$, teremos:
$13\cdot(a-b) = 39 \Rightarrow a - b = \frac{39}{13} \Rightarrow$
$\Rightarrow a - b = 3 \Rightarrow b = a - 3$ (I)
Usando $a + b = 13$, teremos que $b = 13 - a$ (I)
Igualando (I) e (II), teremos:
$a - 3 = 13 - a \Rightarrow 2a = 16 \Rightarrow a = 8$

Atividades - página 108

64. Decompondo os números em fatores primos, temos:
a) $36 = 2^2 \cdot 3^2$
b) $450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
c) $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
d) $500 = 2^2 \cdot 5^3$

65. Colocando os fatores comuns em evidência, teremos:
a) $a(x+y)$
b) $4(4x^2 + 5y^2)$
c) $5(x + 3y - 2z)$
d) $5x^2y(-x + 4y)$

66. **a)** $x(ax^2 + bx - c)$
b) $2ax^2(6a^2 + 3ax - 4x^2)$
c) $\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2} - b\right)$

67. **a)** $x^2(x^3 + x^2 - 2)$
b) $3x(2 + y + 4yz)$
c) $6xy(x - 3y^2)$
d) $3x^4(5x^3 - y)$

Atividades - página 110

68. **a)** $x(y+1) - 2(y+1) = (y+1)(x-2)$
b) $6(x+y) + a(x+y) = (x+y)(6+a)$
c) $2(x-1) + y(x-1) = (x-1)(2+y)$
d) $2(a+b) + x(a+b) = (a+b)(2+x)$

69. **a)** $7(x+y) + b(x+y) = (x+y)(7+b)$
b) $a(x-y) - b(x-y) = (x-y)(a-b)$
c) $3x(2x+5) - 2y(2x+5) = (2x+5)(3x-2y)$
d) $2a(x-y) - 3b(x-y) = (x-y)(2a-3b)$

70. **a)** $(x-1)(3 + a + a^2)$
b) $x(a+b) + y(a+b) + z(a+b) = (x+y+z)(a+b)$
c) $(x+y)[(x+y)-2]$
d) $a(x-1) + \frac{m}{3}(x-1) = (x-1)\left(a + \frac{m}{3}\right)$

71. **a)** $a(x-y) + (x-y) = (x-y)(a+1)$
b) $ab(x^2+y^2) + c(x^2+y^2) = (x^2+y^2)(ab+c)$
c) $x^3(x+9) - 6(x+9) = (x+9)(x^3-6)$
d) $a(x-2y) + 5b(x-2y) + 11c(x-2y) = (x-2y)(a+5b+11c)$

Atividades - página 111

72. Fatorando as expressões, temos:
a) $(x+7)(x-7)$
b) $(3a+2b)(3a-2b)$
c) $(1+x)(1-x)$
d) $(2x+5y)(2x-5y)$
e) $(2x+5)(2x-5)$
f) $(xy+1)(xy-1)$
g) $\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)$
h) $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\left(x-\frac{1}{x^2}\right)$

73. **a)** $(x+y+1)(x+y-1)$
b) $(1+3a)(1-3a)$
c) $(2x+y)(2x-y)$
d) $(x+y+1)(x-y-1)$

74. **a)** $(80+1)(80-1) = 80^2 - 1^2 = 6400 - 1 = 6399$
b) $(40+2)(40-2) = 40^2 - 2^2 = 1600 - 4 = 1596$
c) $(100+1)(100-1) = 100^2 - 1^2 = 10000 - 1 = 9999$

75. **a)** $(a^3 - 4a) + (a^2 - 4) = a(a^2-4) + (a^2-4) =$
$= (a^2-4)(a+1) = (a+2)(a-2)(a+1)$
b) $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 = a^2(b^2-1) - (b+1)(b-1) =$
$= a^2((b+1)(b-1)) - (b+1)(b-1) = (b+1)(b-1)(a^2-1) =$
$= (b+1)(b-1)(a+1)(a-1)$

76. **a)** $(500+400)(500-400) = 900\cdot 100 = 90000$
b) $(1000+900)(1000-900) = 1900\cdot 100 = 190000$

77. Vamos considerar um número inteiro n e seu consecutivo $n+1$.
Soma desses números: $n + n + 1 = 2n + 1$
Diferença dos quadrados desses números:
$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
Logo, a soma de dois números inteiros e consecutivos é igual à diferença dos seus quadrados.

Atividades - página 112

78. Fatorando, temos:
a) $x^2 + 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = (x+3)^2$
b) $x^2 - 2\cdot x\cdot 8 + 8^2 = (x-8)^2$
c) $(3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2 = (3x+5y)^2$

d) $x^2 - 2 \cdot x \cdot a + a^2 = (x - a)^2$

e) $(3m)^2 - 2 \cdot 3m \cdot 1 + 1^2 = (3m - 1)^2$

f) $\left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}a \cdot 5b + (5b)^2 = \left(\frac{1}{2}a - 5b\right)^2$

79. Alternativas **a**, **c**, **d**:

80. **a)** $(x - 3)^2$

b) $(1 - 3x)^2$

c) $(x - 5)^2$

d) $x(x^2 - 2x + 1) = x(x - 1)^2$

e) $x^2(x^2 + 2x + 1) = x^2(x + 1)^2$

f) $\frac{1}{5}(x^2 - 4x + 4) = \frac{1}{5}(x - 2)^2$

81. **a)** $(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c) \cdot (a + b - c)$

b) $(a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + b^2 + 2ab)$
$(a^2 + b^2 - 2ab) =$
$= (a + b)^2 \cdot (a - b)^2$

c) $(a^2 + b^2 - 1)^2$

82. **a)** $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

b) $(x + 2)^2 - x^2 = x^2 + 4x + 4 - x^2 =$
$= 4x + 4$

c) Se $4x + 4 = 42$, então:

$4x = 38$

$x = 9{,}5$

Logo, inicialmente a medida do lado do jardim era de 9,5 m.

Atividades - página 114

83. **a)** $x^2 = 81$

$x = \sqrt{81} = 9$

ou

$x = -\sqrt{81} = -9$

$S = \{-9, 9\}$

b) $x^2 = 3$

$x = \sqrt{3}$

ou

$x = -\sqrt{3}$

$S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

c) $x^2 = -24$

$x = \sqrt{-24}$ (não existe raiz real)

ou

$x = -\sqrt{-24}$ (não existe raiz real)

$S = \varnothing$

d) $16x^2 = 25$

$x^2 = \frac{25}{16}$

$x = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$

ou

$x = -\sqrt{\frac{25}{16}} = -\frac{5}{4}$

$S = \left\{-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right\}$

e) $x^2 = 0$

$x = 0$

$S = \{0\}$

f) $x(x - 5) = 0$

$x = 0$

ou

$x - 5 = 0$

$x = 5$

$S = \{0, 5\}$

g) $-2x(x + 5) = 0$

$-2x = 0$

$x = 0$

ou

$x + 5 = 0$

$x = -5$

$S = \{-5, 0\}$

h) $x\left(\frac{3x}{4} - 5\right) = 0$

$x = 0$

ou

$\frac{3x}{4} - 5 = 0$

$\frac{3x}{4} = 5$

$x = 5 \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$

$S = \left\{0, \frac{20}{3}\right\}$

i) $6x^2 - 5x = 0$

$x(6x - 5) = 0$

$x = 0$

ou

$6x - 5 = 0$

$6x = 5$

$x = \frac{5}{6}$

$S = \left\{0, \frac{5}{6}\right\}$

j) $x^2 + 4x + 4 - 4 = 0$

$x^2 + 4x = 0$

$x(x + 4) = 0$

$x = 0$

ou

$x + 4 = 0$

$x = -4$

$S = \{-4, 0\}$

84. **a)** $4x^2 - 12x + 9 + 12x = 9$

$4x^2 = 0$

$x^2 = 0$

$x = 0$

$S = \{0\}$

b) $x^2 + 2x - 4x = 0$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x = 0$

ou

$x - 2 = 0$

$x = 2$

$S = \{0, 2\}$

c) $3(x^2 - 4x + 4) - 12 = 0$

$3x^2 - 12x + 12 - 12 = 0$

$3x^2 - 12x = 0$

$3x(x - 4) = 0$

$3x = 0$

$x = 0$

ou

$x - 4 = 0$

$x = 4$

$S = \{0, 4\}$

d) $2x^2 - \frac{3}{4} - x^2 - \frac{1}{4} = 0$

$x^2 - \frac{4}{4} = 0$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \sqrt{1} = 1$

ou

$x = -\sqrt{1} = -1$, porém, não pertence ao conjunto dos números naturais; assim:

$S = \{1\}$

85. **a)** $7m^2 + 3 - 8m^2 - 3 = 0$

$-m^2 = 0$

$m = 0$

$S = \{0\}$

b) $\left(\frac{x}{7}\right)^2 - (11)^2 = 0$

$\frac{x^2}{49} - 121 = 0$

$\frac{x^2}{49} = 121$

$x^2 = 49 \cdot 121$

$x^2 = 7^2 \cdot 11^2$

$x = \sqrt{7^2 \cdot 11^2}$

$x = 7 \cdot 11 = 77$

ou

$x = -\sqrt{7^2 \cdot 11^2}$

$x = -7 \cdot 11 = -77$

$S = \{-77, 77\}$

86. **a)** Como as duas figuras têm a mesma medida de área, então podemos escrever a relação:

$5 \cdot 1{,}6x = x \cdot x$

Logo, basta resolver a equação, lembrando que, nesse caso, $x > 0$, pois representa uma medida.

$8x - x^2 = 0$

$x(8 - x) = 0$

$x = 0$

ou

$8 - x = 0$

$x = 8$

Nesse caso, a medida de comprimento do lado do quadrado é 8 unidades de medida de comprimento.

b) Quadrado: $8 + 8 + 8 + 8 = 4 \cdot 8 = 32$, ou seja, 32 unidades de medida de comprimento.

Retângulo: $(5 + 5) + (1{,}6 \cdot 8 + 1{,}6 \cdot 8) = 10 + 25{,}6 = 35{,}6$, ou seja, 36 unidades de medida de comprimento.

c) Como as duas figuras têm a mesma medida de área, basta calcular para uma delas.

Quadrado: $8 \cdot 8 = 64$, ou seja, 64 unidades de medida de área.

87. **a)** $x^2 = 144$

$x = \sqrt{144}$

$x = 12$

ou

$x = -\sqrt{144}$

$x = -12$

b) $x^2 = 169$

$x = \sqrt{169}$

$x = 13$

ou

$x = -\sqrt{169}$

$x = -13$

c) $2x^2 = 3x$

$2x^2 - 3x = 0$

$x(2x - 3) = 0$

$x = 0$

ou

$2x - 3 = 0$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

Atividades - página 118

88. **a)** $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_1 = \frac{-5 + 1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

$x_2 = \frac{-5 - 1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$

$S = \{-3, -2\}$

b) $x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} =$

$= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{12}$

$x_1 = \frac{1 - 7}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{1 + 7}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

$S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

c) $x = \frac{-(-2\sqrt{5}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} =$

$= \frac{2\sqrt{5} \pm \sqrt{20 - 16}}{2} = \frac{2\sqrt{5} \pm \sqrt{4}}{2}$

$x_1 = \frac{2\sqrt{5} - 2}{2} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{2} = \sqrt{5} - 1$

$x_2 = \frac{2\sqrt{5} + 2}{2} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{2} = \sqrt{5} + 1$

$S = \{\sqrt{5} - 1, \sqrt{5} + 1\}$

d) $x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 49}}{2 \cdot 1} =$

$= \frac{14 \pm \sqrt{196 - 196}}{2} = \frac{14 \pm 0}{2}$

$x_1 = x_2 = \frac{14}{2} = 7$

$S = \{7\}$

89. A equação que representa essa situação é:

$x + x^2 = 42$

$x^2 + x - 42 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 168}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{169}}{2}$

$x_1 = \frac{-1 - 13}{2} = -7$

$x_2 = \frac{-1 + 13}{2} = 6$

Esse número é –7 ou 6.

90. A equação que representa essa situação é:

$x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$, com $x \neq 0$

Desenvolvendo, teremos:

$\frac{2x^2}{2x} - \frac{2}{2x} = \frac{3x}{2x}$

Como $x \neq 0$, teremos:

$2x^2 - 2 - 3x = 0$

$2x^2 - 3x - 2 = 0$

$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4}$

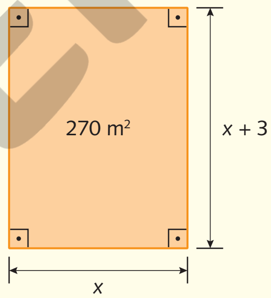
$x_1 = \frac{3 - 5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{3 + 5}{4} = 2$

Esse número é $-\frac{1}{2}$ ou 2.

91. Exemplo de resposta:

Sabendo que x é a medida, em m, do comprimento do retângulo representado a seguir, encontre o valor de x.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução:

A equação correspondente a essa situação é:

$x \cdot (x + 3) = 270$

Logo, podemos fazer:

$x^2 + 3x - 270 = 0$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-270)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 1080}}{2} =$

$= \frac{-3 \pm \sqrt{1089}}{2}$

$x_1 = \frac{-3 - 33}{2} = -\frac{36}{2} = -18$

$x_2 = \frac{-3 + 33}{2} = \frac{30}{2} = 15$

Como x é uma medida, não convém um valor negativo; logo, o valor será 15.

92. Resposta pessoal. Exemplo de elaboração:

"Pedro tem 2 anos a mais que Laura e o produto entre suas idades é igual a 120. Quantos anos tem cada um?"

Atividades - página 120

93. **a)** $\Delta = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16$

Sim, tem raízes reais.

b) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0$

Sim, tem raízes reais.

c) $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

Sim, tem raízes reais.

d) $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4 = 36 - 48 = -12$

Não tem raízes reais.

94. Para essa equação, temos:

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (p - 5) = 36 - 4p + 20 = 56 - 4p$

a) $\Delta = 0$, então:

$56 - 4p = 0$

$-4p = -56$

$p = \frac{56}{4} \Rightarrow p = 14$

b) $\Delta > 0$, então:

$56 - 4p > 0$

$-4p > -56$

$p < \frac{56}{4} \Rightarrow p < 14$

c) $\Delta < 0$, então:

$56 - 4p < 0$

$-4p < -56$

$p > \frac{56}{4} \Rightarrow p > 14$

95. $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2k = 25 - 24k$

Para que não tenha raízes reais, $\Delta < 0$; logo:

$25 - 24k < 0$

$-24k < -25$

$k > \frac{25}{24}$

96. a) $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 49 - 4a$

Para que tenha duas raízes reais diferentes, $\Delta > 0$; logo:

$49 - 4a > 0$

$-4a > -49$

$a < \frac{49}{4}$

b) $\Delta = (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = a^2 - 36$

Para que tenha duas raízes reais iguais, $\Delta = 0$; logo:

$a^2 - 36 = 0$

$a^2 = 36$

$a = \pm\sqrt{36}$

$a = -6$ ou $a = 6$

c) $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 9 - 4a$

Para que não tenha raízes reais, $\Delta < 0$; logo:

$9 - 4a < 0$

$-4a < -9$

$a > \frac{9}{4}$

Atividades - página 121

97. a) $x^2 - 64 = 0$

$x^2 = 64$

$x = \pm\sqrt{64}$

$x_1 = -8$ ou $x_2 = 8$

Logo, a forma fatorada será:

$(x + 8)(x - 8) = 0$

b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$

$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm 5}{4}$

$x_1 = \frac{7 - 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{7 + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3$

Logo, a forma fatorada será:

$2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 3) = 0$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$

$x_1 = x_2 = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Logo, a forma fatorada será:

$4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right) = 0$

ou

$4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$

d) $x^2 + 2mx - 3m^2 = 0$

$\Delta = (2m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3m^2) = 4m^2 + 12m^2 = 16m^2$

$x = \frac{-2m \pm \sqrt{16m^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2m \pm 4m}{2}$

$x_1 = \frac{-2m - 4m}{2} = -\frac{6m}{2} = -3m$

$x_2 = \frac{-2m + 4m}{2} = \frac{2m}{2} = m$

Logo, a forma fatorada será:

$(x + 3m)(x - m) = 0$

e) $3x^2 - 2xp + \frac{p^2}{3} = 0$

$\Delta = (-2p)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{p^2}{3} = 4p^2 - 4p^2 = 0$

$x_1 = x_2 = \frac{-(-2p) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 3} = \frac{2p}{6} = \frac{p}{3}$

Assim, a forma fatorada será:

$3\left(x - \frac{p}{3}\right)\left(x - \frac{p}{3}\right) = 0$

ou

$3\left(x - \frac{p}{3}\right)^2 = 0$

98. Utilizando o conhecimento sobre fatoração de equações do 2º grau, igualaremos cada trinômio a zero, localizaremos as raízes e, assim, fatoraremos o trinômio indicado.

a) $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{4}$

$x_1 = x_2 = \frac{4}{4} = 1$

A forma fatorada será: $2(x - 1)^2$

b) $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 1}}{2 \cdot 8} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{16}$

$x_1 = \frac{6 - 2}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$x_2 = \frac{6 + 2}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$

A forma fatorada será: $8\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c) $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{25}}{12}$

$x_1 = \dfrac{-1-5}{12} = -\dfrac{6}{12} = -\dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{-1+5}{12} = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

A forma fatorada será: $6\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$

d) $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{(+5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2} =$

$= \dfrac{-5 \pm \sqrt{121}}{2}$

$x_1 = \dfrac{-5-11}{2} = -\dfrac{16}{2} = -8$

$x_2 = \dfrac{-5+11}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

A forma fatorada será: $(x + 8)(x - 3)$

e) $x = \dfrac{-\left(-\frac{3}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-14)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} =$

$= \dfrac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 28}}{1} =$

$= \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{9 + 112}{4}} = \dfrac{3}{2} \pm \sqrt{\dfrac{121}{4}} = \dfrac{3}{2} \pm \dfrac{11}{2}$

$x_1 = \dfrac{3}{2} + \dfrac{11}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$

$x_2 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{11}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$

A forma fatorada será: $\frac{1}{2}(x - 7)(x + 4)$

99. Respostas pessoais. Alguns exemplos de respostas:

a) $x^2 - 14x + 49 = 0$

b) $(x + 3)(x - 8) = 0$

$x^2 - 5x - 24 = 0$

c) $2(x + 1)(x + 5) = 0$

$2x^2 + 12x + 10 = 0$

d) $x^2 + 1 = 0$

Atividades - página 123

100. Se x é o número procurado, teremos:

$\dfrac{x^2}{2} = 2x + 6$

Então:

$\dfrac{x^2}{2} - 2x - 6 = 0$

$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{1} = 2 \pm \sqrt{16}$

$x_1 = 2 - 4 = -2$

$x_2 = 2 + 4 = 6$

Como o número é inteiro e positivo, ele é igual a 6.

101. Sendo x o número a ser determinado, podemos escrever que:

$x^2 = 2x + 24$

$x^2 - 2x - 24 = 0$

$x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} =$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{100}}{2}$

$x_1 = \dfrac{2 - 10}{2} = -4$

$x_2 = \dfrac{2 + 10}{2} = 6$

Como é um número natural, ele é igual a 6.

102. Nesse caso, a equação será:

$2x^2 = 7x - 3$

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$x = \dfrac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \dfrac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$

$x_1 = \dfrac{7-5}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$x_2 = \dfrac{7+5}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$

Esse número pode ser $\frac{1}{2}$ ou 3.

103. Se chamarmos de x a idade de Camila, teremos:

$x^2 - \dfrac{x}{2} = 14$

$x^2 - \dfrac{x}{2} - 14 = 0$

$x = \dfrac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-14)}}{2 \cdot 1} =$

$= \dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 56}}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}}}{2}$

$x_1 = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{15}{2}}{2} = \dfrac{-14}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{7}{2}$

$x_2 = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{15}{2}}{2} = \dfrac{16}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = 4$

A raiz $\frac{-7}{2}$ não satisfaz a condição do problema, visto que não existe idade negativa. Logo, Camila tem 4 anos.

104. Sejam x e $x + 1$ os dois números inteiros positivos e consecutivos.

$x^2 + (x + 1)^2 = 25$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 25 = 0$

$2x^2 + 2x - 24 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 192}}{4} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{196}}{4}$

$x_1 = \dfrac{-2 - 14}{4} = \dfrac{-16}{4} = -4$ (não convém, pois deve ser positivo)

$x_2 = \dfrac{-2 + 14}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$

Logo, o primeiro número é 3 e o segundo, 4.

105. Se chamarmos de x o número que representa a medida do comprimento do lado desse quadrado, teremos:

$x^2 = 4x + 5$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} =$

$= \dfrac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{36}}{2}$

$x_1 = \dfrac{4 + 6}{2} = 5$

$x_2 = \dfrac{4 - 6}{2} = -1$ (não convém; deve ser positivo)

Logo, a medida do comprimento do lado do quadrado é igual a 5.

106. Sejam x, $x + 1$ e $x + 2$ os três números inteiros positivos e consecutivos.

$x^2 = (x + 2) - (x + 1)$

$x^2 = x + 2 - x - 1$

$x^2 = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$ (Não convém, pois é negativo.)

Logo, os números procurados são 1, 2 e 3.

107. A equação que representa a situação é:

$x(x + 10) - 5 \cdot 10 = 94$

$x^2 + 10x - 50 - 94 = 0$

$x^2 + 10x - 144 = 0$

$x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-144)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 + 576}}{2} =$

$= \dfrac{-10 \pm \sqrt{676}}{2}$

$x_1 = \dfrac{-10 + 26}{2} = 8$

$x_2 = \dfrac{-10 - 26}{2} = -18$ (não convém, pois é negativo)

Logo, $x = 8$ m.

Veja que interessante - página 123

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Substituindo x^2 pela incógnita auxiliar y, teremos:

$y^2 - 5y + 4 = 0$

$y = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$

$y_1 = \dfrac{5 - 3}{2} = 1$

$y_2 = \dfrac{5 + 3}{2} = 4$

Como $x^2 = y$, temos:

- Para $y = 1$, temos $x^2 = 1$, ou seja, $x = \pm 1$
- Para $y = 4$, temos $x^2 = 4$, ou seja, $x = \pm 2$

Logo, as raízes da equação $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ são $-2, -1, 1$ e 2.

b) $2x^4 - 16x^2 = 18$

Substituindo x^2 pela incógnita auxiliar y, teremos:

$2y^2 - 16y = 18$

$2y^2 - 16y - 18 = 0$

$y = \dfrac{-(-16) \pm \sqrt{(-16)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-18)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 + 144}}{4} =$

$= \dfrac{16 \pm \sqrt{400}}{4}$

$y_1 = \dfrac{16 - 20}{4} = -1$

$y_2 = \dfrac{16 + 20}{4} = 9$

Como $x^2 = y$, temos:

- Para $y = -1$, temos $x^2 = -1$, ou seja, não existe x real nessas condições.
- Para $y = 9$, temos $x^2 = 9$, ou seja, $x = \pm 3$

Logo, as raízes da equação $2x^4 - 16x^2 = 18$ são -3 e 3.

Resolvendo em equipe - página 124

Interpretação e identificação dos dados

- Poderemos representar, respectivamente, por $(x + 4)$ e por $(x - 4)$.

Plano e resolução

- $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 - 16x$
- $x^2 + 8x + 16 + x^2 - 8x + 16 - 16x$

$2x^2 - 16x + 32$

$2(x^2 - 8x + 16)$

$2(x - 4)^2$

Resolução

$2(x - 4)^2 = 2 \cdot (20\,112\,007 - 4)^2 = 2 \cdot (20\,112\,003)^2$

Logo, a alternativa correta é a **b**.

Revisão dos conteúdos deste capítulo - páginas 125 e 126

1. a) $9x^2 + 6x + 1$
b) $4m^2 - 20m + 25$
c) $36a^2b^2 - 1$
d) $25a^2b^2 - 70ab + 49$
e) $4x^2 - 25$

2. a) $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 = 5x^2 + 5y^2$

b) $2(m^2 - 4m + 4) - 3(m^2 - 1) = 2m^2 - 8m + 8 - 3m^2 + 3 =$
$= -m^2 - 8m + 11$

c) $a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 = 2ab$

d) $4a^2 - 12ab + 9a^2 + a^2 - 25b^2 = 5a^2 - 12ab - 16b^2$

3. Sabemos que:

$x^2 + y^2 = 56$ e $x \cdot y = 22$

Com essas informações, ao desenvolvermos o produto notável $(x + y)^2$, chegaremos ao valor numérico da expressão $x + y$.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy$

Substituindo pelos valores já conhecidos, teremos:

$(x + y)^2 = 56 + 2 \cdot 22$

$(x + y)^2 = 100$

$x + y = \sqrt{100} = 10$

4. a) $27^2 = (20 + 7)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 7 + 7^2 =$
$= 400 + 280 + 49 = 729$

b) $43^2 = (40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 3 + 3^2 =$
$= 1\,600 + 240 + 9 = 1\,849$

c) $104^2 = (100 + 4)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 4 + 4^2 =$
$= 10\,000 + 800 + 16 = 10\,816$

d) $297^2 = (300 - 3)^2 = 300^2 - 2 \cdot 300 \cdot 3 + 3^2 =$
$= 90\,000 - 1\,800 + 9 = 88\,209$

5. a) $(100 - 5) \cdot (100 + 5) = 100^2 - 5^2 = 10\,000 - 25 = 9\,975$

b) $(200 + 2) \cdot (200 - 2) = 200^2 - 2^2 = 40\,000 - 4 = 39\,996$

c) $(50 + 4) \cdot (50 - 4) = 50^2 - 4^2 = 2\,500 - 16 = 2\,484$

d) $(100 + 1) \cdot (1\,000 - 1) = 1\,000^2 - 1^2 =$
$= 1\,000\,000 - 1 = 999\,999$

6. a) Medida de área: $(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$

Medida de perímetro: $4 \cdot (x + 3) = 4x + 12$

b) Se $x = 2$ cm, teremos:

Medida de área: $2^2 + 6 \cdot 2 + 9 = 25$. Logo, a medida de área é 25 cm^2.

Medida de perímetro: $4 \cdot 2 + 12 = 20$. Logo, a medida de perímetro é 20 cm.

7. a) Fator comum

$7x^2 + 7y^2 = 7(x^2 + y^2)$

b) Diferença de quadrados

$x^2y^2 - 169z^2 = (xy)^2 - (13z)^2 = (xy + 13z)(xy - 13z)$

c) Agrupamento

$30 + 10x - 12a - 4ax = 10(3 + x) - 4a(3 + x) =$
$= (10 - 4a)(3 + x)$

d) Fator comum

$5x^2 - x^3 = x^2(5 - x)$

e) Trinômio quadrado perfeito

$16a^2 - 8a + 1 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 1 + 1^2 = (4a - 1)^2$

8. a) $(a + 3)^2 - 9 = a^2 + 6a + 9 - 9 = a^2 + 6a = a(a + 6)$

b) $yx^3 - xy^3 = xy(x^2 - y^2) = xy(x + y)(x - y)$

c) $y^3 - y^2 - 9y + 9 = y^2(y - 1) - 9(y - 1) = (y^2 - 9)(y - 1) =$

$= (y + 3)(y - 3)(y - 1)$

d) $12x^2 - 48y^2 = 12(x^2 - 4y^2) = 12(x + 2y)(x - 2y)$

e) $6x^2 - 12x + 6 = 6(x^2 - 2x + 1) = 6(x - 1)^2$

9. a) $2013^2 - 2010^2 = (2013 + 2010) \cdot (2013 - 2010) =$

$= 4023 \cdot 3 = 12069$

b) $475^2 - 474^2 = (475 + 474) \cdot (475 - 474) = 949 \cdot 1 = 949$

10. a) $4y^2 + 2 \cdot 2y \cdot 7 + 49 = 4y^2 + 28y + 49$

b) $m^2 - 2m + 1$

c) $9n^2 + 6n + 1$

11. a) $x^2 = 9$

$x = \sqrt{9}$ ou $x = -\sqrt{9}$

$x_1 = -3$

$x_2 = 3$

$S = \{-3, 3\}$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$

$x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{2} = \dfrac{-8 \pm \sqrt{4}}{2}$

$x_1 = \dfrac{-8 - 2}{2} = -5$

$x_2 = \dfrac{-8 + 2}{2} = -3$

$S = \{-5, -3\}$

c) $m^2 - \sqrt{2}\,m = 0$

$m(m - \sqrt{2}) = 0$

$m = 0$

ou

$m - \sqrt{2} = 0$

$m = \sqrt{2}$

$S = \{0, \sqrt{2}\}$

d) $x^2 + 10x + 25 = 0$

$x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 25}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} =$

$= \dfrac{-10 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_1 = x_2 = \dfrac{-10}{2} = -5$

$S = \{-5\}$

e) $x^2 - 6x - 7 = 0$

$x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} =$

$= \dfrac{6 \pm \sqrt{64}}{2}$

$x_1 = \dfrac{6 - 8}{2} = -1$

$x_2 = \dfrac{6 + 8}{2} = 7$

$S = \{-1, 7\}$

f) $16y^2 - 121 = 0$

$16y^2 = 121$

$y^2 = \dfrac{121}{16}$

$y = \pm\sqrt{\dfrac{121}{16}}$

$y_1 = -\dfrac{11}{4}$

$y_2 = \dfrac{11}{4}$

$S = \left\{-\dfrac{11}{4}, \dfrac{11}{4}\right\}$

g) $3x^2 + 2x + 8 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 96}}{6} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-92}}{6}$

Como não existe $\sqrt{-92}$, então não existem raízes reais para essa equação.

$S = \varnothing$

12. a) $x^2 + 8x + 16 + x^2 - 8x + 16 - 160 = 0$

$2x^2 - 128 = 0$

$x^2 = \dfrac{128}{2}$

$x = \pm\sqrt{64}$

$x_1 = -8$

$x_2 = 8$

$S = \{-8, 8\}$

b) $x^2 - 11x + 28 = 0$

$x = \dfrac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 28}}{2 \cdot 1} = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{2} =$

$= \dfrac{11 \pm \sqrt{9}}{2}$

$x_1 = \dfrac{11 - 3}{2} = 4$

$x_2 = \dfrac{11 + 3}{2} = 7$

$S = \{4, 7\}$

c) $4x^2 + 2x + 2 - 1 = 0$

$4x^2 + 2x + 1 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{8} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-12}}{8}$

Como o discriminante é menor que zero, então não existem raízes reais.

$S = \varnothing$

d) $x^2 + 7x - 35 + 5x = 0$

$x^2 + 12x - 35 = 0$

$x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-35)}}{2 \cdot 1} =$

$= \dfrac{-12 \pm \sqrt{144 + 140}}{2} = \dfrac{-12 \pm \sqrt{284}}{2}$

$x_1 = \dfrac{-12 - \sqrt{284}}{2} = \dfrac{-12 - 2\sqrt{71}}{2} = -6 - \sqrt{71}$

$x_2 = \dfrac{-12 + 2\sqrt{71}}{2} = -6 + \sqrt{71}$

$S = \{-6 - \sqrt{71}, -6 + \sqrt{71}\}$

13. A equação que representa essa situação é:

$x^2 - 3x = 10$

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$x = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} =$

$= \dfrac{3 \pm \sqrt{49}}{2}$

$x_1 = \dfrac{3 - 7}{2} = -2$

$x_2 = \dfrac{3 + 7}{2} = 5$

Nesse caso, o número é –2 ou 5.

14. A equação que representa essa situação é:

$x^2 = 4x$, sendo $x \neq 0$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x_1 = 0$ (Não convém, de acordo com o enunciado.)

$x_2 = 4$

Portanto, esse número é o 4.

15. De acordo com as informações apresentadas, teremos:

$(y - 30) \cdot (y - 40) = 1\,200$

$y^2 - 40y - 30y + 1\,200 = 1\,200$

$y^2 - 70y = 0$

$y(y - 70) = 0$

$y_1 = 0$ (não convém, pois é uma medida)

$y_2 = 70$

Logo, a medida do comprimento do lado do quadrado deve ser de 70 m.

16. Para que a equação tenha duas raízes reais e iguais, devemos ter $\Delta = 0$, ou seja:

$p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$

$p^2 - 16 = 0$

$p^2 = 16$

$p = \pm\sqrt{16}$

$p = -4$ ou $p = 4$

17. Para que a equação não apresente raízes reais e iguais, deveremos ter $\Delta < 0$, ou seja:

$(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m < 0$

$36 - 4m < 0$

$36 < 4m$

$\dfrac{36}{4} < m$

$9 < m$

$m > 9$

18. Para que a equação tenha duas raízes reais, deveremos ter $\Delta > 0$, ou seja:

$(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k > 0$

$16 - 4k > 0$

$-4k > -16$

$k < \dfrac{-16}{-4}$

$k < 4$

Capítulo 5 - Função afim

Trocando ideias - página 127

- Fusão do gelo: 0 °C; ebulição da água: 100 °C.
- Substituindo F por 109 na fórmula $F = 1{,}8C + 32$, teremos:

  $109 = 1{,}8C + 32$

  $109 - 32 = 1{,}8C$

  $C = \dfrac{77}{1{,}8} \simeq 42{,}8$

  Aproximadamente 42,8 °C.
- Resposta pessoal.

Atividades - página 129

1. **a)** Como são 600 embalagens por hora, em 10 horas serão 6 000 embalagens, pois $600 \cdot 10 = 6\,000$.

b) Como $4\,800 : 600 = 8$, serão necessárias 8 horas para produzir 4 800 embalagens.

c) Sim; porque cada hora corresponde a uma única quantidade produzida.

d) Se representarmos a quantidade de embalagens por y e o tempo em hora por t, teremos a seguinte lei: $y = 600 \cdot t$.

2. A lei será $A = a \cdot a$, ou seja, $A = a^2$.

A medida da área é a variável dependente e a medida do comprimento do lado é a variável independente.

Atividades - página 130

3. Considerando que $f(x) = 5x + 2$, teremos:

a) $f(0) = 5 \cdot 0 + 2 = 2$

b) $f(-1) = 5 \cdot (-1) + 2 = -3$

c) $f(-2) = 5 \cdot (-2) + 2 = -8$

d) $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = 5 \cdot \dfrac{3}{4} + 2 = \dfrac{15 + 8}{4} = \dfrac{23}{4}$

4. Considerando que $f(x) = 5x - 2$, teremos:

a) $5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

b) $5x - 2 = 3 \Rightarrow x = \dfrac{5}{5} \Rightarrow x = 1$

c) $5x - 2 = -10 \Rightarrow x = -\dfrac{8}{5}$

d) $5x - 2 = 13 \Rightarrow x = \dfrac{15}{5} \Rightarrow x = 3$

5. Sendo $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}$, podemos calcular o que se pede em cada item.

$f(0) = \dfrac{1}{2} \cdot 0 - \dfrac{3}{4} = -\dfrac{3}{4}$

$f(1) = \dfrac{1}{2} \cdot 1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{2 - 3}{4} = -\dfrac{1}{4}$

$f(2) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{4 - 3}{4} = \dfrac{1}{4}$

a) $\dfrac{f(0) - f(1)}{f(2)} = \dfrac{-\dfrac{3}{4} - \left(-\dfrac{1}{4}\right)}{\dfrac{1}{4}} = \left(-\dfrac{2}{4}\right) \cdot 4 = -2$

b) $\dfrac{f(2) \cdot f(1)}{f(0)} = \dfrac{\dfrac{1}{4} \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right)}{-\dfrac{3}{4}} = \left(-\dfrac{1}{16}\right) \cdot \left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{1}{12}$

6. **a)** $f(x) = 2x$

b) $f\left(-\dfrac{1}{5}\right) = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{2}{5}$

c) $2x = \dfrac{7}{2} \Rightarrow x = \dfrac{7}{4}$

Representação gráfica de uma função - páginas 132 e 133

Situação 1

A lei de formação é $q = 7t$, sendo $t \geqslant 0$.

Situação 2

A lei de formação é $y = \frac{1}{x}$, sendo $x \neq 0$.

Situação 3

A lei de formação é $p = 2n$, sendo n um número natural maior ou igual a 1.

Atividades - páginas 133 e 134

7. **a)** $y = 0{,}5x$, com $x \in \mathbb{N}$.

   b) Gráfico A. Espera-se que os estudantes percebam que o gráfico dessa função não é uma linha contínua, pois a quantidade de fotos só pode ser representada por números naturais.

8. Nesse caso, teremos:

   $x \cdot y = 3 \cdot 5 \Rightarrow y = \frac{15}{x}$, com $x \neq 0$

9. As grandezas densidade e medida da área são inversamente proporcionais; as grandezas densidade e população são diretamente proporcionais.

10. A função f representa grandezas inversamente proporcionais, então as alternativas **a** e **d** estão descartadas. Como $x > 0$, então não pode ser a alternativa **c**. Portanto, o gráfico correspondente a essa função é o da alternativa **b**.

Lendo e aprendendo - páginas 135 e 136

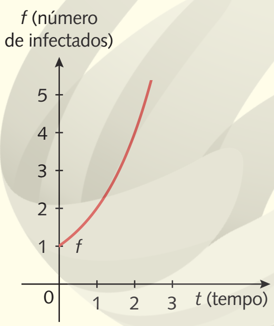
1. **a)** No dia 2 de dezembro de 2020.

   b) Coronavírus é uma família de vírus que causa infecções respiratórias.

   c) Covid-19.

   d) Exemplo de resposta: Com os modelos matemáticos, é possível saber a relação entre a medida do tempo e o número de infectados por essas doenças e, desta forma, é possível, por exemplo, planejar medidas de proteção e prever a quantidade de indivíduos que devem ser vacinados para erradicar a doença.

2. Gráfico da alternativa **a**, pois quanto maior for o valor de **t**, maior será o valor da função exponencial.

3. 

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

4. Respostas pessoais.

5. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes respondam que verificam se a publicação tem data, se a fonte é confiável, se leem toda a publicação e não apenas a manchete ou o título, pesquisam sobre o autor da publicação e as informações divulgadas em outras fontes.

Atividades - página 140

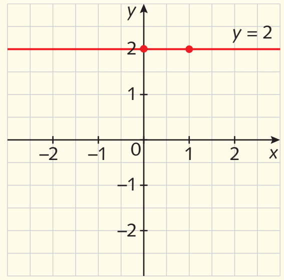
11. São leis de função afim as alternativas **a**, **b**, **c**, **e**.

    As alternativas **d** e **f** não representam uma função afim, pois têm a variável independente elevada ao quadrado.

12. Para a elaboração dos gráficos, procuraremos alguns pontos pertencentes a função e realizaremos a construção.

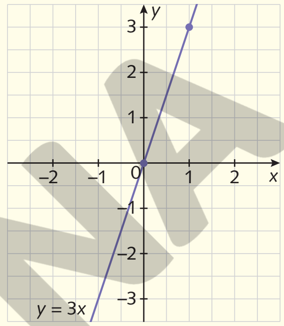
a)

x	$y = 2$	(x, y)
0	2	(0, 2)
1	2	(1, 2)



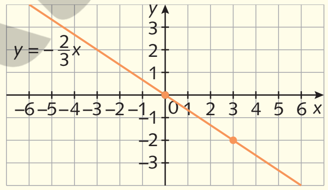
b)

x	$y = 3x$	(x, y)
0	$3 \cdot 0 = 0$	(0, 0)
1	$3 \cdot 1 = 3$	(1, 3)



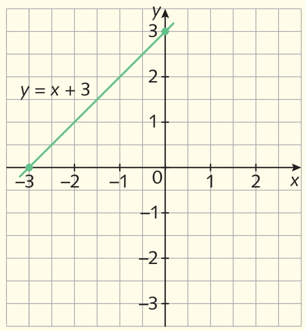
c)

x	$y = -\frac{2}{3}x$	(x, y)
0	$-\frac{2}{3} \cdot 0 = 0$	(0, 0)
3	$-\frac{2}{3} \cdot 3 = -2$	(3, –2)



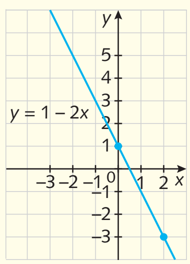
d)

x	$y = x + 3$	(x, y)
0	$0 + 3 = 3$	(0, 3)
–3	$-3 + 3 = 0$	(–3, 0)



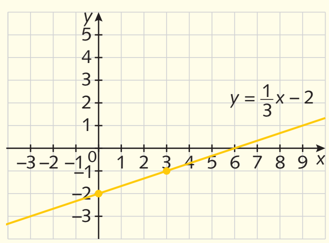
e)

x	$y = 1 - 2x$	(x, y)
0	$1 - 2 \cdot 0 = 1$	(0, 1)
2	$1 - 2 \cdot 2 = -3$	(2, –3)



f)

x	$y = \frac{1}{3}x - 2$	(x, y)
0	$\frac{1}{3} \cdot 0 - 2 = -2$	(0, –2)
3	$\frac{1}{3} \cdot 3 - 2 = -1$	(3, –1)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

13. **a)** $V = 60 \cdot t$, em que t é um número real positivo.

b) Se $t = 10$, então $V = 60 \cdot 10 = 600$. Portanto, terá 600 L de água após 10 minutos.

c) Se $V = 900$, então $900 = 60 \cdot t \Rightarrow t = 15$. Ou seja, são necessários 15 minutos para a piscina ficar com 900 L de água.

14. São verdadeiras:

a) Função afim é toda função cuja lei pode ser escrita na forma $y = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real.

d) O gráfico da função dada por $g(x) = 6$, para qualquer x real, é uma reta paralela ao eixo x.

15. Temos que:

x	$h(x) = x$	$(x, h(x))$
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)

x	$m(x) = -x$	$(x, (m(x))$
0	0	(0, 0)
1	-1	$(1, -1)$

x	$f(x) = -x + 3$	$(x, f(x))$
-2	$-(-2) + 3 = 5$	$(-2, 5)$
0	$0 + 3 = 3$	(0, 3)

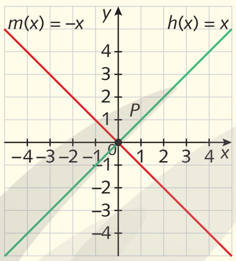
x	$g(x) = 2x - 3$	$(x, (g(x))$
1	$2 \cdot 1 - 3 = -1$	$(1, -1)$
0	$2 \cdot 0 - 3 = -3$	$(0, -3)$

x	$p(x) = \frac{x}{2} + 1$	$(x, p(x))$
-1	$\frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$	$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
4	$\frac{4}{2} + 1 = 3$	(4, 3)

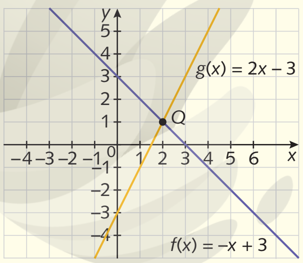
x	$q(x) = x - 1$	$(x, (q(x))$
-1	$-1 - 1 = -2$	$(-1, -2)$
4	$4 - 1 = 3$	(4, 3)

Assim, construindo as funções no mesmo plano, temos:

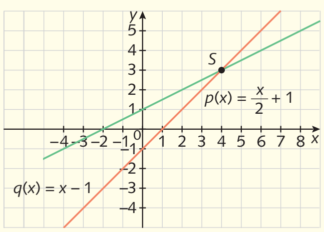
a) Ponto de encontro: (0, 0)



b) Ponto de encontro: Q(2, 1)



c) Ponto de encontro: $S(4, 3)$



Atividades - página 141

16. **a)** $-4x + 8 = 0 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{4} \Rightarrow x = 2$

Portanto, 2 é o zero da função.

b) $-3x - 21 = 0 \Rightarrow -21 = 3x \Rightarrow x = \frac{-21}{3} \Rightarrow x = -7$

Portanto, -7 é o zero da função.

c) $2 - 8x = 0 \Rightarrow 2 = 8x \Rightarrow x = \frac{2}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$

Portanto, $\frac{1}{4}$ é o zero da função.

d) $7 - x = 0 \Rightarrow x = 7$

Portanto, 7 é o zero da função.

e) $-4x - 64 = 0 \Rightarrow -64 = 4x \Rightarrow x = \frac{-64}{4} \Rightarrow x = -16$

Portanto, -16 é o zero da função.

f) $-6x + 18 = 0 \Rightarrow 18 = 6x \Rightarrow x = \frac{18}{6} \Rightarrow x = 3$

Portanto, 3 é o zero da função.

g) $3x - 9 = 0 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$

Portanto, 3 é o zero da função.

h) $4x - 20 = 0 \Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{4} \Rightarrow x = 5$

Portanto, 5 é o zero da função.

17. Se o zero da função f é igual a 4, teremos $f(4) = 0$, então:
$3 \cdot 4 + m - 2 = 0 \Rightarrow 12 + m - 2 = 0 \Rightarrow 10 + m = 0 \Rightarrow m = -10$

18. Considere uma função afim do tipo $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e $a \neq 0$. Segundo as informações do enunciado, temos que:

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$

$f(-1) = 2 \Rightarrow -a + b = 2$

Assim, temos o seguinte sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 2 \end{cases}$$

Adicionando as duas equações, temos:

$2b = 2$

$b = 1$

Se $a + b = 0$ e $b = 1$, então $a = -1$.

Portanto, temos que $f(x) = -x + 1$.

Tecnologias digitais em foco - páginas 144 e 145

Explore

a) Espera-se que os estudantes observem que cada ponto do gráfico de $y = x + 1$ tem ordenada igual a 1 unidade a mais que a ordenada do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = x$. Ou seja, o gráfico de $y = x + 1$ é uma reta paralela ao gráfico de $y = x$, pois houve uma translação vertical de 1 unidade para cima.

b) Espera-se que os estudantes observem que:

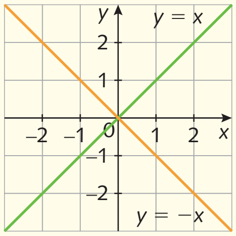
- o gráfico de $y = x - 1$ corresponde a uma translação na vertical de 1 unidade para baixo do gráfico de $y = x$;
- o gráfico de $y = x + 2$ corresponde a uma translação vertical de 2 unidades para cima do gráfico de $y = x$;
- o gráfico de $y = x + 3$ corresponde a uma translação vertical de 3 unidades para cima do gráfico $y = x$.

c) Os estudantes devem responder que a investigação anterior sugere que a reta que é gráfico de uma função afim do tipo $y = x + b$ corresponde a uma translação vertical de b unidades para cima (se $b > 0$) ou para baixo (se $b < 0$) do gráfico de $y = x$.

d) Espera-se que os estudantes observem que cada ponto do gráfico de $y = 2x$ tem ordenada igual ao dobro daquela do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = x$. Ou seja, o gráfico de $y = 2x$ é uma reta que tem inclinação igual ao dobro da inclinação de $y = x$.

e) Espera-se que os estudantes observem que cada ponto do gráfico de $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 3x$ tem ordenada igual à metade, à terça parte e ao triplo, respectivamente, daquela do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = x$.

f) Construindo o que se foi pedido, temos:

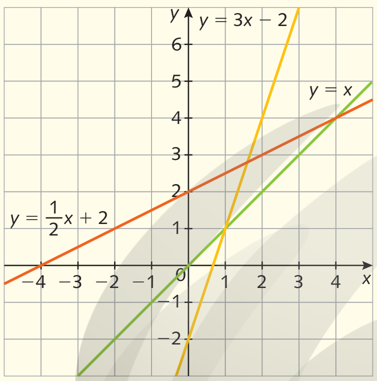


Espera-se que os estudantes consigam perceber que as funções indicadas têm como ponto de encontro a origem do plano, sendo diagonais de cada um dos quadrantes. Além disso, as funções podem ser classificadas como reflexões uma da outra em relação aos eixos.

Os estudantes podem construir os gráficos dos seguintes pares de funções afim:

- $y = 2x$ e $y = -2x$
- $y = 3x + 1$ e $y = -3x + 1$
- $y = \frac{1}{4}x - 5$ e $y = -\frac{1}{4}x - 5$

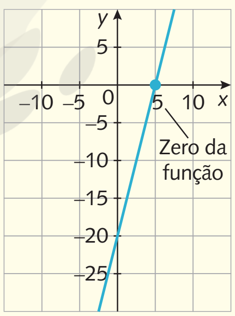
h) Espera-se que os estudantes obtenham os gráficos a seguir:



Atividades - página 146

19. a)

x	$f(x) = 4x - 20$	$(x, f(x))$
0	$4 \cdot 0 - 20 = -20$	$(0, -20)$
5	$4 \cdot 5 - 20 = 0$	$(5, 0)$

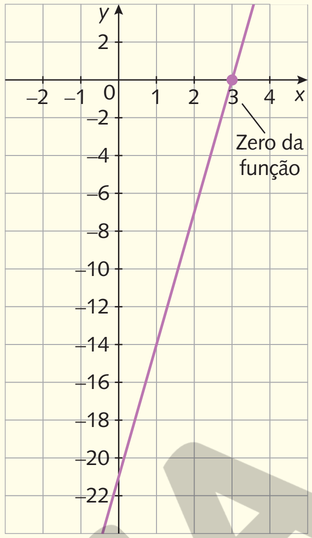


O gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $(5, 0)$. Portanto, 5 é o zero da função.

A função é crescente, pois $a = 4$ e $4 > 0$.

b)

x	$f(x) = 7x - 21$	$(x, f(x))$
0	$7 \cdot 0 - 21 = -21$	$(0, -21)$
3	$7 \cdot 2 - 21 = -7$	$(3, -7)$

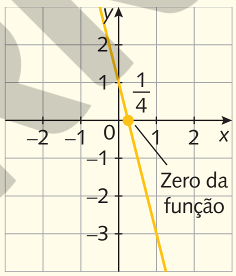


O gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $(3, 0)$. Portanto, 3 é o zero da função.

A função é crescente, pois $a = 7$ e $7 > 0$.

c)

x	$f(x) = -4x + 1$	$(x, f(x))$
0	$-4 \cdot 0 + 1 = 1$	$(0, 1)$
$\frac{1}{4}$	$-4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) + 1 = 0$	$\left(\frac{1}{4}, 0\right)$



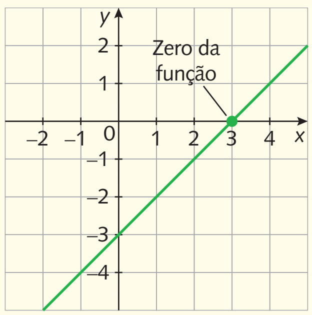
O gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.

Portanto, $\frac{1}{4}$ é o zero da função.

A função é decrescente, pois $a = -4$ e $-4 < 0$.

d)

x	$f(x) = x - 3$	$(x, f(x))$
0	$0 - 3 = -3$	$(0, -3)$
3	$3 - 3 = 0$	$(3, 0)$



O gráfico da função intercepta o eixo x no ponto $(3, 0)$. Portanto, 3 é o zero da função.

A função é crescente, pois $a = 1$ e $1 > 0$.

20. a) Zero da função: $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$

Como a função é crescente, teremos:

Para $x = 3$, a função é nula.

Para $x > 3$, a função é positiva.

Para $x < 3$, a função é negativa.

b) Zero da função: $-8 + x = 0 \Rightarrow x = 8$
Como a função é crescente, teremos:
Para $x = 8$, a função é nula.
Para $x > 8$, a função é positiva.
Para $x < 8$, a função é negativa.

c) Zero da função: $-x + 11 = 0 \Rightarrow x = 11$
Como a função é decrescente, teremos:
Para $x = 11$, a função é nula.
Para $x > 11$, a função é negativa.
Para $x < 11$, a função é positiva.

d) Zero da função: $-2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$
Como a função é decrescente, teremos:
Para $x = -2$, a função é nula.
Para $x > -2$, a função é negativa.
Para $x < -2$, a função é positiva.

21. Pelas informações apresentadas, para uma função afim do tipo $y = ax + b$, em que a e b são números reais e $a \neq 0$, temos que:
Para $x = 2$, $y = 0$, ou seja, 2 é o zero da função. Assim: $2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$
A função é crescente, logo $a > 0$.
Nessas condições, temos as seguintes funções afim:

$y = x - 2$ $\quad$ $y = 3x - 6$ $\quad$ $y = \frac{x}{2} - 1$

22. Para uma função afim crescente:
Para $x = -\frac{b}{a}$, a função é nula.
Para $x > -\frac{b}{a}$, a função é positiva.
Para $x < -\frac{b}{a}$, a função é negativa.
Para uma função afim decrescente:
Para $x = -\frac{b}{a}$, a função é nula.
Para $x < -\frac{b}{a}$, a função é positiva.
Para $x > -\frac{b}{a}$, a função é negativa.

Atividades – páginas 147 e 148

23. São inequações as sentenças dos itens **b**, **d**, **e**, **f**. A sentença do item **a** é uma igualdade e a sentença do item **c** é uma equação.

24. a) $2x + 5 < 8$
b) $x - \frac{x}{5} \leqslant 4$
c) $5x - \frac{x}{3} < 2$
d) $3x - \frac{x}{4} \geqslant 7$

25. A inequação é: $x - 5 < \frac{x}{2}$

26. São inequações do 1º grau com uma incógnita as sentenças dos itens **b**, **d**, **f**, **h**. A sentença do item **a** é uma inequação do 1º grau com duas incógnitas, a sentença do item **c** é uma inequação do 2º grau, a sentença do item **e** é uma inequação do 3º grau e a sentença do item **g** é uma inequação do 1º grau com duas incógnitas.

27. a) Como o prato da esquerda tem maior medida de massa do que o prato da direita, então a inequação que representa é $x > 5$.
b) $x + 100 > 5 + 100$ ou $x + 100 > 105$

Atividades – página 150

28. Sim, são inequações equivalentes, pois, subtraiu-se 10 de cada membro da inequação $x < 15$, obtemos uma inequação equivalente a ela (princípio aditivo das desigualdades).

29. a) $-7 \cdot 4 < 5x \cdot 4 \Rightarrow -28 < 20x$
b) $\frac{-28}{-1} > \frac{20x}{-1} \Rightarrow 28 > -20x$
c) $28 - 3 > -20x - 3 \Rightarrow 25 > -20x - 3$
d) $25 - (-2) > -20x - 3 - (-2) \Rightarrow 27 > -20x - 1$

30. Partindo da inequação $a < b$, buscamos em cada item verificar a validade da expressão dada.
a) $a + 7 < b + 7$ (sentença verdadeira, pelo princípio aditivo das desigualdades)
b) $\frac{a}{5} < \frac{b}{5}$ (sentença verdadeira, pelo princípio multiplicativo das desigualdades)
c) $3 \cdot a > 3 \cdot b$ (sentença falsa, pois $3a < 3b$ pelo princípio multiplicativo das desigualdades)
d) $a - 10 < b - 10$ (sentença verdadeira, pelo princípio aditivo das desigualdades)
e) $-2a < -2b$ (sentença falsa, pois $-2a > -2b$ pelo princípio multiplicativo das desigualdades)
f) $-a > -b$ (sentença verdadeira, pelo princípio multiplicativo das desigualdades)

31. $-10x < -12$
$-10x \cdot (-1) > -12 \cdot (-1)$
$10x > 12$

Atividades – página 151

32. a) $(x + 2) + (x + 3) + (x + 4) \leqslant 1$
$3x + 9 \leqslant 1$
$3x \leqslant -8$
$x \leqslant -\frac{8}{3}$
$S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant -\frac{8}{3}\right\}$

b) $4 - 2x > 3 - 3x$
$4 + x > 3$
$x > -1$
$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -1\}$

c) $x - 5 \leqslant 1 - x$
$2x - 5 \leqslant 1$
$2x \leqslant 6$
$x \leqslant 3$
$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 3\}$

d) $-2x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$
$-2x < \frac{6}{2}$
$x > -\frac{3}{2}$
$S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > -\frac{3}{2}\right\}$

33. Resolvendo a inequação:
$3\left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{2x}{3} < 8$
$3x + \frac{2x}{3} < \frac{40 + 3}{5}$
$\frac{9x + 2x}{3} < \frac{43}{5}$
$11x < \frac{129}{5}$
$x < \frac{129}{55}$
$x < 2{,}34$
Como x é um número natural, ele pode ser 0, 1 ou 2.

34. Resolvendo:

$\frac{x-10}{5} < 0$

$x - 10 < 0$

$x < 10$

Assim, o maior número inteiro que satisfaça a inequação é o 9.

35. Indicando por x o número inteiro procurado, temos duas inequações:

$$3x + 5 < 2 \text{ e } \frac{x}{3} + 4 > 3$$

Resolvendo a inequação $3x + 5 < 2$, temos:

$3x < -3$

$x < -1$

Resolvendo a inequação $\frac{x}{3} + 4 > 3$, temos:

$\frac{x}{3} > -1$

$x > -3$

Como x é um número inteiro, $x < -1$ e $x > -3$, temos que $x = -2$.

36. Medida do perímetro do retângulo (em cm):

$2y + 2y + y + y$ ou $6y$

Medida do perímetro do triângulo (em cm): $3 \cdot 16 = 48$

Relação entre essas medidas:

$6y > 48$

$\frac{6y}{6} > \frac{48}{6}$

$y > 8$

O menor valor inteiro nessas condições é 9.

Atividades - página 153

37. **a)** $3x + 4 > 2x + 2$

$3x - 2x > 2 - 4$

$x > -2$

b) $0{,}5x + 1 < x$

$0{,}5x - x < -1$

$-0{,}5x < -1$

$x > 2$

c) $20x + 5 \geqslant 15x - 5$

$20x - 15x \geqslant -5 - 5$

$5x \geqslant -10$

$x \geqslant -2$

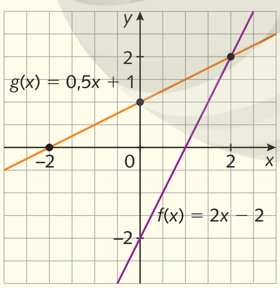
d) $7x + 7 \leqslant 2x + 2$

$7x - 2x \leqslant 2 - 7$

$5x \leqslant -5$

$x \leqslant -1$

38. **a)**



b) $2x - 2 > 0{,}5x + 1$

$2x - 0{,}5x > 1 + 2$

$1{,}5x > 3$

$x > \frac{3}{1{,}5}$

$x > 2$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

39. Pela comparação dos gráficos, temos que:

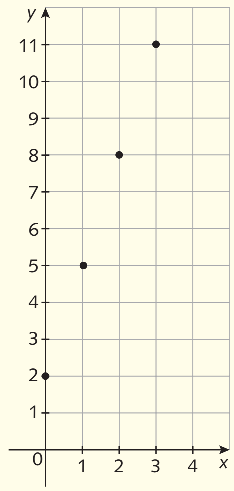
a) $x = -2$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$

40. Resposta pessoal.

41. Resposta pessoal. Independentemente da situação criada, os estudantes devem obter um gráfico, como este da referência:



Resolvendo em equipe - página 154

Interpretação e identificação dos dados

Primeiro item: Resposta pessoal.

Segundo item: $V(x) = 40 + 0{,}45x$, em que x é um número real positivo.

Terceiro item: 68 km + 68 km = 136 km

Quarto item: $V(136) = 40 + 0{,}45 \cdot 136 \Rightarrow V(136) = 101{,}20$

Logo, foram gastos R$ 101,20 na viagem de Aracaju até a Praia do Saco em um dia.

Plano de Resolução

Primeiro item: R$ 171, 80 – R$ 101, 20 = R$ 70, 60. Sobram, do total pago, R$ 70,60.

Segundo item: $70{,}60 = 40 + 0{,}45x$

$\frac{30{,}60}{0{,}45} = x$ $\qquad$ $68 = x$

Portanto, o valor calculado no item anterior corresponde a 68 km percorridos.

Terceiro item: 68 km : 2 = 34 km. Portanto, a medida da distância entre Aracaju e Pirambu é de 34 km.

Revisão dos conteúdos deste capítulo - páginas 155 e 156

1. **a)** $p = 5x$, em que x é um número real positivo.

b) Se $x = 7{,}2$ cm, então $p = 5 \cdot 7{,}2$ cm $= 36$ cm. Ou seja, a medida do perímetro é igual a 36 cm.

2. **a)** $y = x + 5$, em que x é um número real positivo.

b) Se $x = 3{,}6$, então $y = 3{,}6 + 5 = 8{,}6$. Assim, a medida do comprimento do retângulo será 8,6 m.

3. $S = 1\,200 + \frac{15}{100}x$ ou $S = 1\,200 + 0{,}15x$, em que x é um número natural.

4. **a)** $f(-2) = 2 \cdot (-2) + 9 = 5$

b) $f(5) = 2 \cdot 5 + 9 = 19$

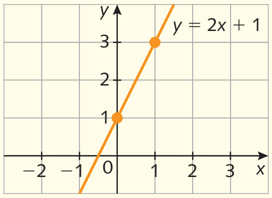
c) $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} + 9 = 12$

d) $f(-1) \cdot f(0) = [2 \cdot (-1) + 9] \cdot [2 \cdot 0 + 9] = 7 \cdot 9 = 63$

e) $\frac{f(-3) + f(2)}{f\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{[2 \cdot (-3) + 9] + [2 \cdot 2 + 9]}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 9} = \frac{3 + 13}{8} = 2$

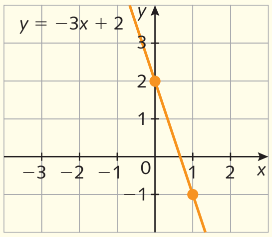
5. a)

x	$y = 2x + 1$	(x, y)
0	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	(0, 1)
1	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	(1, 3)



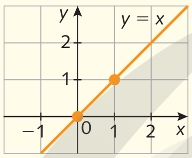
b)

x	$y = -3x + 2$	(x, y)
0	$-3 \cdot 0 + 2 = 2$	(0, 2)
1	$-3 \cdot 1 + 2 = -1$	(1, –1)



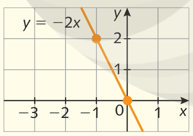
c)

x	$y = x$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)



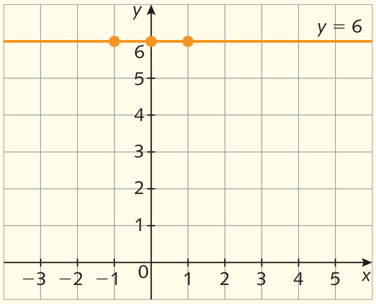
d)

x	$y = -2x$	(x, y)
–1	$-2 \cdot (-1) = 2$	(–1, 2)
0	$-2 \cdot 0 = 0$	(0, 0)



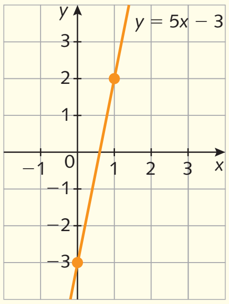
e)

x	$y = 6$	(x, y)
–1	6	(–1, 6)
0	6	(0, 6)
1	6	(1, 6)



f)

x	$y = 5x - 3$	(x, y)
0	$5 \cdot 0 - 3 = -3$	(0, –3)
1	$5 \cdot 1 - 3 = 2$	(1, 2)



6. a) Representa uma função linear, pois é uma reta que passa pela origem do plano cartesiano.

b) Representa uma função constante, pois é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

7. a) $y = 10{,}5x + 23$, em que x é um número natural maior ou igual a 1.

b) $y = 10{,}5 \cdot 120 + 23 \Rightarrow y = 1\,283$

Assim, o valor pago por Carlos por 120 capas é de R$ 1 283,00.

8. a) (0,–1)

b) (1,0)

c) Considerando uma função afim do tipo $y = ax + b$, em que a e b são números reais e $a \neq 0$. Como $y = -1$, quando $x = 0$. temos:

$-1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -1$

Como $y = 0$, quando $x = 1$, temos:

$0 = a \cdot 1 - 1 \Rightarrow a = 1$

Dessa forma, a lei de formação será $y = x - 1$, em que x é um número real.

d) $0 = x - 1$

$1 = x$

Portanto, 1 é o zero da função.

9. a) $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Portanto, –3 é o zero da função.

b) $-2x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4$

Portanto, 4 é o zero da função.

c) $-5x = 0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, 0 é o zero da função.

d) $2x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

Portanto, $\frac{-5}{2}$ é o zero da função.

10. a) $7 - 3(2x + 1) \leqslant -x - 11$

$7 - 6x - 3 \leqslant -x - 11$

$-6x + x \leqslant -11 - 4$

$-5x \leqslant -15$

$x \geqslant \frac{15}{5}$

$x \geqslant 3$

$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 3\}$

b) $3(x - 2) + 15 > 2(x + 1)$

$3x - 6 + 15 > 2x + 2$

$3x - 2x > 2 - 9$

$x > -7$

$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -7\}$

c) $5x - 3 \leqslant 3 \cdot (2x - 5)$

$5x - 3 \leqslant 6x - 15$

$5x - 6x \leqslant -15 + 3$

$x \geqslant 12$

$S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 12\}$

d) $7x - 1 > 12x + 7$

$7x - 12x > 7 + 1$

$-5x > 8$

$x < -\frac{8}{5}$

$S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x < -\frac{8}{5}\right\}$

Capítulo 6 - Função quadrática

Trocando ideias - página 157

a) $S = -t^2 + 10t$

Se $t = 2$, então:

$S = -2^2 + 10 \cdot 2 = -4 + 20 = 16$

Se $t = 4$, então:

$S = -4^2 + 10 \cdot 4 = -16 + 40 = 24$

Portanto, no instante $t = 2$ s, a posição era 16 m; no instante $t = 4$ s, a posição era 24 m.

b) Nesse caso, quando a pedra atinge o solo, teremos $S = 0$; então, temos a seguinte equação $-t^2 + 10t = 0$.

$t(-t + 10) = 0$

$t = 0$

ou

$-t + 10 = 0 \Rightarrow t = 10$

Portanto, a pedra atingirá o solo após 10 s.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades - página 158

1. Observando cada função, temos:

a) $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$

b) $a = -3$, $b = -6$ e $c = 9$

c) $a = 1$, $b = 0$ e $c = -18$

d) $a = -5$, $b = 13$ e $c = 0$

e) $a = 1$, $b = -10$ e $c = 25$

f) $a = 3$, $b = -4$ e $c = 75$

2. Sendo $f(x) = 2x^2 - 6$, teremos:

a) $f(5) = 2 \cdot 5^2 - 6 = 50 - 6 = 44$

b) $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 6 = -6$

c) $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 6 = 8 - 6 = 2$

d) $f(\sqrt{11}) = 2 \cdot (\sqrt{11})^2 - 6 = 22 - 6 = 16$

3. $f(x) = 0$ quando x é uma das raízes da equação associada; assim, resolvendo a equação:

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2$$

Portanto, $x = 2$ ou $x = 3$.

4. Podemos fazer:

$y = (5 + x) \cdot (3 + x)$

$y = 15 + 5x + 3x + x^2$

$y = x^2 + 8x + 15$, sendo x um número real maior que zero.

Atividades - páginas 160 e 161

5. Quando o coeficiente a é maior que zero, a parábola tem concavidade voltada para cima, quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo. Portanto, $f(x)$ pode estar relacionada com o Gráfico II e $g(x)$ com o Gráfico I.

6. São aquelas que têm o coeficiente a maior que zero, ou seja, as funções dos itens **b**, **c**, **d**, **i**. Vejamos os itens em que precisamos realizar cálculos para encontrar o coeficiente a.

h) $y = \left(\frac{x}{7} + 6\right)(-x + 2)$

$y = -\frac{x^2}{7} - 6x + \frac{2x}{7} + 12$, ou seja, a função do item **h** representa uma parábola com concavidade voltada para baixo, já que $a < 0$.

i) $y = \left(\frac{5}{9}x + 3\right)^2$

$y = \frac{25}{81}x^2 + \frac{10}{3}x + 9$, ou seja, o item **i** possui concavidade voltada para cima, pois $a > 0$.

7. Como $f(x) = (m - 7)x^2 - 3x - 2$, precisamos analisar o coeficiente a, que nesse caso é igual a $(m - 7)$. Para que o gráfico da função f tenha a concavidade voltada para baixo, $(m - 7)$ deve ser menor que zero. Portanto:

$(m - 7) < 0 \Rightarrow m < 7$

8. Para que o gráfico da função g tenha a concavidade voltada para baixo, $\left(\frac{p}{2} + 3\right)$ deve ser menor que zero. Portanto:

$\frac{p}{2} + 3 < 0 \Rightarrow \frac{p}{2} < -3 \Rightarrow p < -6$

9. **a)**

MEDIDA DA DISTÂNCIA PERCORRIDA (EM METRO)	MEDIDA DA ALTURA (EM METRO)
100	$-\frac{100^2}{900} + \frac{2 \cdot 100}{3} = \frac{500}{9}$
200	$-\frac{200^2}{900} + \frac{2 \cdot 200}{3} = \frac{800}{9}$
300	100
400	$-\frac{400^2}{900} + \frac{2 \cdot 400}{3} = \frac{800}{9}$
600	0

b) Com base no gráfico, a medida da altura máxima atingida pelo projétil é 100 metros (esse é o maior valor que y assume).

c) Quando $y = 100$, temos que $x = 300$; logo, foram percorridos 300 metros na horizontal.

d) Com base no gráfico, quando o projétil retorna ao solo (em $y = 0$), $x = 600$; então, ele percorre 600 metros.

Atividades - página 164

10. **a)** $6x^2 = 0$

$x = 0$

Zero da função: 0

b) $x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = -2$ ou $x = 2$

Zeros da função: -2 e 2.

c) $-x^2 + 1 = 0$

$-x^2 = -1$

$x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1}$

$x = -1$ ou $x = 1$

Zeros da função: -1 e 1.

d) $5x^2 + 10x = 0$

$5x(x + 2) = 0$

$5x = 0$ ou $x + 2 = 0$

$x = 0$ ou $x = -2$

Zeros da função: 0 e -2.

e) $-x^2 + 2x - 5 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)$

$\Delta = 4 - 20 = -16$

Essa equação não tem raízes reais. Portanto, a função não tem zeros reais.

f) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$x_1 = \frac{6}{6} = 1$$

$$x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Zeros da função: 1 e $\frac{2}{3}$.

g) $-9x^2 - 6x - 1 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot (-9) \cdot (-1)$

$\Delta = 36 - 36 = 0$

$$x_1 = x_2 = \frac{-(-6)}{2 \cdot (-9)} = -\frac{1}{3}$$

Zero da função: $-\frac{1}{3}$

h) $x^2 + 5x + 8 = 0$ $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$ $\Delta = 25 - 32 = -7$	Essa equação não tem raízes reais. Portanto, a função não tem zeros reais.
i) $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ $\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1)$ $\Delta = 4 - 12 = -8$	Essa equação não tem raízes reais. Portanto, a função não tem zeros reais.

11. Em cada caso, devemos encontrar os valores de x para os quais y é igual a zero.

a) $-3x^2 + 12x = 0$

$3x(-x + 4) = 0$

$3x = 0 \Rightarrow x = 0$

ou

$-x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Portanto, a parábola intercepta o eixo x nos pontos (0, 0) e (4, 0).

b) $x^2 - 4 = 0$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = -2$ ou $x = 2$

Portanto, a parábola intercepta o eixo x nos pontos (– 2, 0) e (2, 0).

c) $x^2 - 8x + 15 = 0$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15$

$\Delta = 64 - 60 = 4$

$x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \dfrac{8 \pm 2}{2}$

$x_1 = \dfrac{6}{2} = 3$

$x_2 = \dfrac{10}{2} = 5$

Portanto, a parábola corta o eixo x nos pontos (3, 0) e (5, 0).

12. Verificando as afirmações, temos.

a) Falsa, pois pode ter, no máximo, dois zeros reais e distintos.

b) Verdadeira, pois $\Delta = 0^2 - 4ac = -4ac$, ou seja, $\Delta < 0$ quando $4ac > 0$, o que significa que a função não tem zeros reais e a parábola não intercepta o eixo das abscissas.

c) Verdadeira, pois se $ax^2 + bx = 0$, então:

$x(ax + b) = 0$

$x = 0$ ou $x = -\dfrac{b}{a}$

d) Falsa, pois $p(0) = a \cdot 0 = 0$, logo tangencia o eixo das abscissas apenas no ponto (0, 0).

Assim, são verdadeiras as alternativas **b**, **c**.

13. Sendo $h(x) = -x^2 + 30x$, podemos encontrar o valor de x para o qual $h(x)$ é nula:

$-x^2 + 30x = 0$

$x(-x + 30) = 0$

$x = 0$ ou $x = 30$

Logo, ele atingirá o solo após percorrer 30 metros.

14. Verificando a representação gráfica, temos:

a) $a > 0$ (concavidade da parábola para cima) e $\Delta > 0$ (parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos).

b) $a < 0$ (concavidade da parábola para baixo) e $\Delta < 0$ (parábola não intercepta o eixo das abscissas).

c) $a > 0$ (concavidade da parábola para cima) e $\Delta = 0$ (parábola intercepta o eixo das abscissas em um ponto).

d) $a < 0$ (concavidade da parábola para baixo) e $\Delta = 0$ (parábola intercepta o eixo das abscissas em um ponto).

Atividades - página 166

15. Nesse caso, para que o vértice da parábola pertença ao eixo x, a função deve ter apenas um zero, ou seja, $\Delta = 0$. Logo, teremos:

$(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0 \Rightarrow k = \dfrac{64}{4} \Rightarrow k = 16$

16. **a)** $x_v = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

$y_v = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

Logo, $V(2, -1)$.

b) $x_v = \dfrac{-6}{2 \cdot (-1)} = 3$

$y_v = f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 - 9 = 0$

Logo, $V(3, 0)$.

c) $x_v = \dfrac{-2}{2 \cdot (-1)} = 1$

$y_v = f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = 1$

Logo, $V(1, 1)$.

d) $x_v = \dfrac{-2}{2 \cdot 1} = -1$

$y_v = f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 3 = 2$

Logo, $V(-1, 2)$.

e) $x_v = \dfrac{-(-1)}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2}$

$y_v = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} - 2 = \dfrac{1 - 2 - 8}{4} = -\dfrac{9}{4}$

Logo, $V\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{9}{4}\right)$.

f) $x_v = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 3} = \dfrac{2}{3}$

$y_v = f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \dfrac{2}{3} = 3 \cdot \dfrac{4}{9} - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{4}{3}$

Logo, $V\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$.

17. No gráfico, temos que:

$x_v = \dfrac{1}{3}$ e $y_v = \dfrac{5}{3}$

Logo, teremos:

$\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow a = \dfrac{-3b}{2}$ (I)

E como $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{5}{3}$, vale que:

$a \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + b \cdot \dfrac{1}{3} + 2 = \dfrac{5}{3}$

$\dfrac{a}{9} + \dfrac{b}{3} = \dfrac{5}{3} - 2$

Usando (I):

$\left(\dfrac{-3b}{2}\right) \cdot \dfrac{1}{9} + \dfrac{b}{3} = \dfrac{5 - 6}{3}$

$\dfrac{-b}{6} + \dfrac{b}{3} = -\dfrac{1}{3}$

$\dfrac{-b + 2b}{6} = -\dfrac{1}{3}$

$b = -\dfrac{6}{3} \Rightarrow b = -2$

Voltando a (I):

$a = \dfrac{(-3) \cdot (-2)}{2} \Rightarrow a = 3$

Logo, $a = 3$ e $b = -2$.

Atividades - página 167

18. **a)** $f(x) = -x^2$

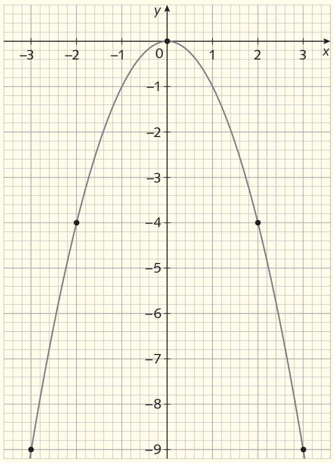
$x_v = \dfrac{-0}{2 \cdot (-1)} = 0$

$y_v = -0^2 = 0$

$V(0, 0)$

Concavidade voltada para baixo

x	y	(x, y)
–3	–9	(–3, –9)
–2	–4	(–2, –4)
0	0	(0, 0)
2	–4	(2, –4)
3	–9	(3, –9)



b) $g(x) = x^2 - 9$

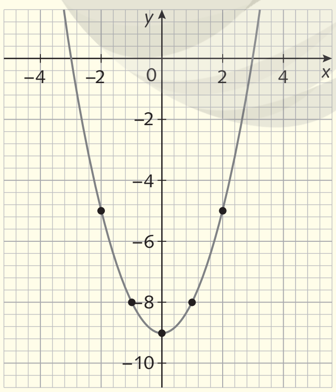
$x_v = \dfrac{-0}{2 \cdot 1} = 0$

$y_v = 0^2 - 9 = -9$

$V(0, -9)$

Concavidade voltada para cima

x	y	(x, y)
–2	–5	(–2, –5)
–1	–8	(–1, –8)
0	–9	(0, –9)
1	–8	(1, –8)
2	–5	(2, –5)



c) $h(x) = -x^2 + 4$

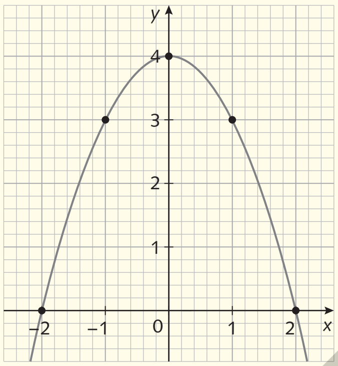
$x_v = \dfrac{-0}{2 \cdot (-1)} = 0$

$y_v = 0^2 + 4 = 4$

$V(0, 4)$

Concavidade voltada para baixo

x	y	(x, y)
–2	0	(–2, 0)
–1	3	(–1, 3)
0	4	(0, 4)
1	3	(1, 3)
2	0	(2, 0)



d) $s(x) = x^2 - 4x$

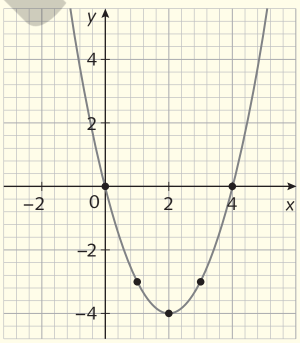
$x_v = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

$y_v = (2)^2 - 4 \cdot (2) = -4$

$V(2, -4)$

Concavidade voltada para cima.

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	–3	(1, –3)
2	–4	(2, –4)
3	–3	(3, –3)
4	0	(4, 0)



e) $t(x) = x^2 - 6x + 10$

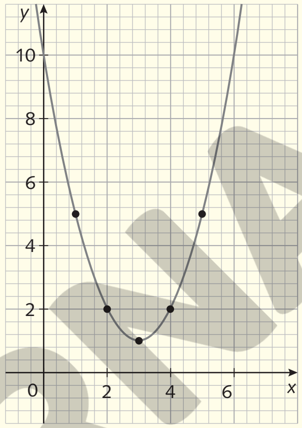
$x_v = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$y_v = 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 = 1$

$V(3, 1)$

Concavidade voltada para cima.

x	y	(x, y)
1	5	(1, 5)
2	2	(2, 2)
3	1	(3, 1)
4	2	(4, 2)
5	5	(5, 5)



f) $u(x) = -x^2 + 4x - 5$

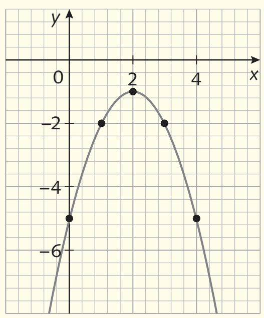
$x_v = \dfrac{-4}{2 \cdot (-1)} = 2$

$y_v = -2^2 + 4 \cdot 2 - 5 = -1$

$V(2,-1)$

Concavidade para baixo

x	y	(x, y)
0	–5	(0, –5)
1	–2	(1, –2)
2	–1	(2, –1)
3	–2	(3, –2)
4	–5	(4, –5)

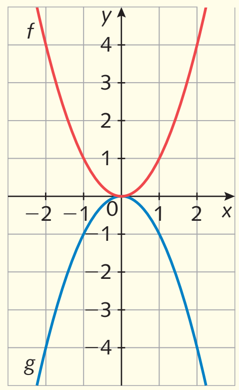


19.

x	$f(x)$	$g(x)$
–2	4	–4
–1	1	–1
0	0	0
1	1	–1
2	4	–4

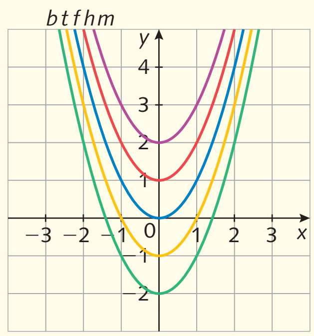
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



As funções são simétricas em relação ao eixo x.

20. Podemos representar as funções em um mesmo plano conforme indicado a seguir:



Espera–se que os estudantes observem que o valor de c faz com que o gráfico $f(x) = x^2$ seja deslocado verticalmente para cima (quando $c > 0$) ou para baixo (quando $c < 0$).

Atividades - páginas 168 e 169

21. **a)** $x_v = \dfrac{-5}{2 \cdot (-2)} = \dfrac{5}{4}$

b) $x_v = \dfrac{-11}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{11}{2}$

22. Podemos observar se a função terá valor máximo ou mínimo por meio do valor do coeficiente a.

a) $x_v = \dfrac{0}{2 \cdot 1} = 0$

$f(x_v) = f(0) = 0^2 - 64 = -64$

$a > 0$, assim, valor mínimo: -64

b) $x_v = \dfrac{-4}{2 \cdot (-4)} = \dfrac{1}{2}$

$f(x_v) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \dfrac{1}{2} - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$

$a < 0$, assim, valor máximo: 0

c) $x_v = \dfrac{-3}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{3}{2}$

$f(x_v) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \dfrac{3}{2} = -\dfrac{9}{4} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{-9 + 18}{4} = \dfrac{9}{4}$

$a < 0$, assim, valor máximo: $\dfrac{9}{4}$

d) $x_v = \dfrac{-(-1)}{2 \cdot 1} = \dfrac{1}{2}$

$f(x_v) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} - 6 = \dfrac{1 - 2 - 24}{4} = -\dfrac{25}{4}$

$a > 0$, assim, valor mínimo: $-\dfrac{25}{4}$

e) $x_v = \dfrac{-5}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{5}{2}$

$f(x_v) = f\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \dfrac{5}{2} - 7 = \dfrac{-25 + 50 - 28}{4} = -\dfrac{3}{4}$

$a < 0$, assim, valor máximo: $-\dfrac{3}{4}$

f) $x_v = \dfrac{-5}{2 \cdot 2} = -\dfrac{5}{4}$

$f(x_v) = f\left(-\dfrac{5}{4}\right) = 2 \cdot \left(-\dfrac{5}{4}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\dfrac{5}{4}\right) = \dfrac{25}{8} - \dfrac{25}{4} =$

$= \dfrac{25 - 50}{8} = -\dfrac{25}{8}$

$a > 0$, assim, valor mínimo: $-\dfrac{25}{8}$

23. Se $x_v = 2$, então:

$\dfrac{-(k + 1)}{2 \cdot (-4)} = 2$

Logo, teremos:

$-k - 1 = 2 \cdot (-8) \Rightarrow -k = -16 + 1 \Rightarrow k = 15$

24. $x_v = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 3} = \dfrac{1}{3}$

$f(x_v) = 3 \cdot \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{3} + p$

$f(x_v) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3} + p$

$f(x_v) = -\dfrac{1}{3} + p$

Como queremos que $f(x_v) = \dfrac{5}{3}$, teremos:

$-\dfrac{1}{3} + p = \dfrac{5}{3} \Rightarrow p = \dfrac{6}{3} \Rightarrow p = 2$

25. **a)** O alcance será dado pelo valor de x onde o projétil retorna ao solo, ou seja, uma raiz da função; assim, temos:

$100x - 2x^2 = 0 \Rightarrow x(100 - 2x) = 0$

Assim:

$x = 0$ (momento do lançamento) ou $100 - 2x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = 50$ (momento da queda).

Assim, o alcance do lançamento é de 50 m.

b) Se $y = 100x - 2x^2$, então:

$x_v = \dfrac{-100}{2 \cdot (-2)} = 25$

Quando $x = 25$, teremos:

$y = 100 \cdot 25 - 2 \cdot (25)^2 \Rightarrow y = 2500 - 1250 \Rightarrow y = 1250$

A medida da altura máxima será de 1 250 m.

26. **a)** Se $g(t) = t^2 - 4t + 3$, então para saber quais valores de t em que $g(t) = 0$, fazemos:

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$t = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$

$t_1 = \dfrac{4 - 2}{2} = 1$

$t_2 = \dfrac{4 + 2}{2} = 3$

A medida da temperatura é igual a 0° C em dois momentos: após 1 hora e 3 horas que a câmara é ligada.

b) Para encontramos a menor medida da temperatura, fazemos:

$t_v = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$

Então, calculamos $g(t_v)$:

$g(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

Portanto, a menor medida da temperatura é –1 °C.

27. Considerando a função $N(t) = 280 + 120t - 10t^2$, teremos:

a) $t_v = \dfrac{-120}{2 \cdot (-10)} = 6$

$N(6) = 280 + 120 \cdot 6 - 10 \cdot 6^2 = 280 + 720 - 360 = 640$

Como $N(t)$ corresponde a milhares de pessoas, a maior quantidade foi de 640 000 infectados.

b) Para que $N(t) = 0$, teremos:

$280 + 120t - 10t^2 = 0$

$$t = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4 \cdot (-10) \cdot 280}}{2 \cdot (-10)} =$$

$$= \frac{-120 \pm \sqrt{14\,400 + 11\,200}}{-20} =$$

$$= \frac{-120 \pm \sqrt{25\,600}}{-20} = \frac{-120 \pm 160}{-20}$$

$$t_1 = \frac{-120 - 160}{-20} = \frac{-280}{-20} = 14$$

$$t_2 = \frac{-120 + 160}{-20} = \frac{40}{-20} = -2$$

Como o número de semanas só pode ser positivo, a epidemia foi controlada depois de 14 semanas.

28. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes elaborem um problema que envolva uma função quadrática que represente um lançamento oblíquo de um objeto.

29. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes sigam as orientações para elaboração dos problemas a serem resolvidos nas diferentes duplas. Pode-se orientar os estudantes a utilizarem *softwares* de construção de gráficos para esquematizar funções afim e funções quadráticas que satisfaçam as necessidades pedidas para a elaboração do problema, gerando gráficos com diferentes visualizações de escala para utilização no enunciado.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – páginas 170 e 171

1. **a)** $f(-1) = (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 2 = 6$

b) $f(3) = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$

c) $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$

$f(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 2 = 12$

$f(0) + f(-2) = 2 + 12 = 14$

d) $f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$

$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 = 0$

$f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 2 = 2$

Logo, teremos:

$$\frac{f(1) + f(2)}{f(0)} = \frac{0 + 0}{2} = 0$$

2. Para que $f(x) = 3$, devemos ter:

$x^2 - 4x + 3 = 3$

$x^2 - 4x = 0$

$x(x - 4) = 0$

$x = 0$ ou $x = 4$

3. Com essas medidas das dimensões, teremos:

$A(x) = (x + 4)(x - 3)$

$A(x) = x^2 + x - 12$

Sendo x um número real tal que $x > 3$.

4. **a)** $y = \dfrac{(x - 1)(2x + 2)}{2}$

$y = \dfrac{2x^2 - 2}{2} \Rightarrow y = \dfrac{2(x^2 - 1)}{2}$

$y = x^2 - 1$, x é um número real tal que $x > 1$.

b) Para $x = 7$, teremos:

$y = 7^2 - 1 = 48$

Logo, a medida da área será de 48 m².

5. Para que tenha a concavidade voltada para cima, será necessário que:

$2p + 8 > 0 \Rightarrow p > -4$

6. Para que tenha a concavidade voltada para baixo, será necessário que:

$5 - 3q < 0 \Rightarrow -q < -\dfrac{5}{3} \Rightarrow q > \dfrac{5}{3}$

7. **a)** $x^2 - 8x + 7 = 0$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2}$$

$x_1 = \dfrac{8 - 6}{2} = 1$ e $x_2 = \dfrac{8 + 6}{2} = 7$

Os zeros da função são 1 e 7.

b) $x^2 - 36 = 0$

$x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36}$

$x_1 = -6$ e $x_2 = 6$

Os zeros da função são –6 e 6.

c) $x^2 - 3x = 0$

$x(x - 3) = 0$

$x_1 = 0$ e $x_2 = 3$

Os zeros da função são 0 e 3.

d) $-x^2 - 8x - 16 = 0$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{8}{-2} = -4$$

$x_1 = x_2 = -4$

O zero da função é –4.

8. **a)** $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$

Como $\Delta > 0$, a parábola corta o eixo x em dois pontos distintos.

b) $\Delta = 6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-16) = 36 - 64 = -28$

Como $\Delta < 0$, a parábola não corta o eixo x.

c) $\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$

Como $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo x em um único ponto.

d) $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4$

Como $\Delta > 0$, a parábola corta o eixo x em dois pontos distintos.

9. **a)** $x_v = \dfrac{-4}{2 \cdot 1} = -2$

$f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$

Coordenadas do vértice: $(-2, -3)$

b) $x_v = \dfrac{-0}{2 \cdot 1} = 0$

$f(0) = 0^2 - 25 = -25$

Coordenadas do vértice: $(0, -25)$

c) $x_v = \dfrac{-(-3)}{2 \cdot 1} = \dfrac{3}{2}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 2 = \frac{9 - 18 + 8}{4} = -\frac{1}{4}$$

Coordenadas do vértice: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$

d) $x_v = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot (-1)} = -2$

$f(-2) = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$

Coordenadas do vértice: $(-2, 0)$

10. Pelo gráfico, observamos alguns pontos que pertencem a essa função. Por exemplo, $(3, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, -3)$, $(1, -4)$.

De outra forma, podemos escrever que:

$f(3) = 0$ $\quad f(-1) = 0$ $\quad f(1) = -4$

Então, podemos utilizar essas informações para encontrar os coeficientes que são desconhecidos.

Se $f(3) = 0$, então:

$a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 3 = 0 \Rightarrow 9a + 3b - 3 = 0$ (I)

Se $f(-1) = 0$, então:

$a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 3 = 0 \Rightarrow a - b - 3 = 0$ (II)

Comparando (I) e (II), podemos escrever que:

$9a + 3b - 3 = a - b - 3$

$9a - a = -b - 3b \Rightarrow 8a = -4b \Rightarrow -2a = b$ (III)

Sabemos também que $f(1) = -4$, logo:

$a \cdot 1^2 + b \cdot 1 - 3 = -4$

$a + b = -1 \Rightarrow b = -1 - a$ (IV)

Igualando (III) e (IV), teremos:

$-2a = -1 - a \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$

Assim, podemos encontrar o valor de b:

$b = -2 \cdot 1 = -2$

Portanto, $y = x^2 - 2x - 3$.

11. Como $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e $x_v = \dfrac{7}{2}$, teremos que:

$\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{7}{2} \Rightarrow -2b = 14a \Rightarrow b = -7a$ (I)

Sabemos também que, para $x = \dfrac{7}{2}$, teremos $y = -\dfrac{1}{4}$, logo é válido que:

$-\dfrac{1}{4} = a \cdot \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 + b \cdot \dfrac{7}{2} + 12$

Usando (I), teremos:

$-\dfrac{1}{4} = a \cdot \left(\dfrac{7}{2}\right)^2 + (-7a) \cdot \dfrac{7}{2} + 12$

$-\dfrac{1}{4} - 12 = \dfrac{49a}{4} - \dfrac{49a}{2}$

$\dfrac{-1 - 48}{4} = \dfrac{49a - 98a}{4}$

$\dfrac{-49}{4} = \dfrac{-49a}{4} \Rightarrow a = 1$

Como $b = -7a$, então $b = -7$ e a função será $y = x^2 - 7x + 12$.

12. a) I. Zeros da função

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x = \dfrac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15}}{2 \cdot 1} = \dfrac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{8 \pm 2}{2}$

$x_1 = \dfrac{8 - 2}{2} = 3$ e $x_2 = \dfrac{8 + 2}{2} = 5$

II. Vértice

$x_v = \dfrac{-(-8)}{2 \cdot 1} = 4$

$y_v = 4^2 - 8 \cdot 4 + 15 = 16 - 32 + 15 = -1$

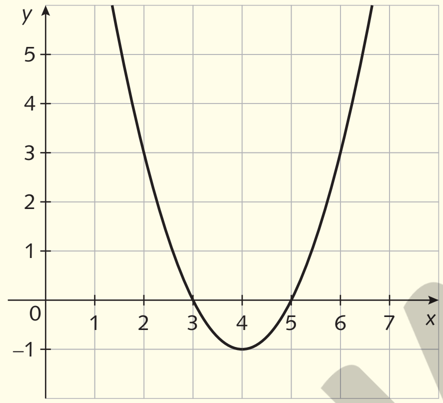
$V(4, -1)$

III. Ponto que corta o eixo das ordenadas

Se $x = 0$, $y = 0^2 - 8 \cdot 0 + 15 = 15$

Ponto $(0, 15)$

IV. Gráfico



b) I. Zeros da função

$-x^2 + 10x - 24 = 0$

$x = \dfrac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-24)}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-10 \pm \sqrt{4}}{-2} = \dfrac{-10 \pm 2}{-2}$

$x_1 = \dfrac{-10 - 2}{-2} = 6$ e $x_2 = \dfrac{-10 + 2}{-2} = 4$

II. Vértice

$x_v = \dfrac{-10}{2 \cdot (-1)} = 5$ e $y_v = -5^2 + 10 \cdot 5 - 24 = 1$

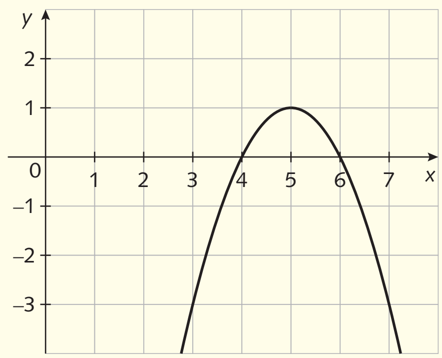
$V(5, 1)$

III. Ponto que corta o eixo das ordenadas

Se $x = 0$, $y = -0^2 + 10 \cdot 0 - 24 = -24$

Ponto $(0, -24)$

IV. Gráfico



c) I. Zeros da função

$x^2 - 2x = 0$

$x(x - 2) = 0$

$x_1 = 0$ e $x_2 = 2$

II. Vértice

$x_v = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$ e $y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

$V(1, -1)$

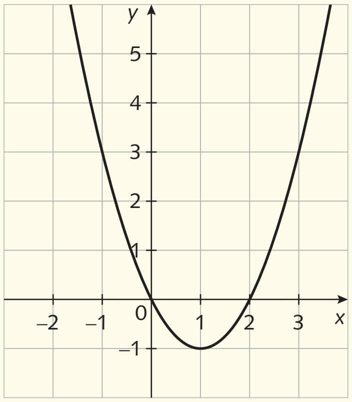
III. Ponto que corta eixo das ordenadas

Se $x = 0$, $y = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$

Ponto $(0, 0)$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

IV. Gráfico



d) I. Zeros da função

$-x^2 + 4 = 0$

$-x^2 = -4$

$x^2 = 4$

$x_1 = -\sqrt{4} = -2$

$x_2 = \sqrt{4} = 2$

II. Vértice

$x_v = \dfrac{-0}{2 \cdot (-1)} = 0$ e $y_v = -0^2 + 4 = 4$

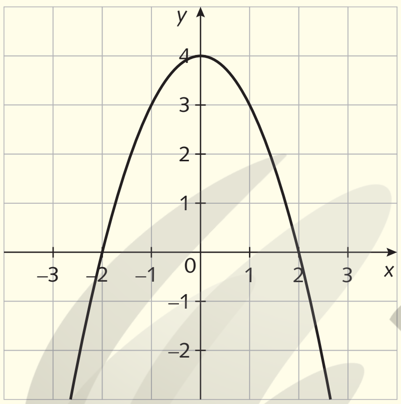
$V(0, 4)$

III. Ponto que corta eixo das ordenadas

Se $x = 0$, $y = -0^2 + 4 = 4$

Ponto (0, 4)

IV. Gráfico



13. a) $x_v = \dfrac{-(-6)}{2 \cdot (-1)} = -3$

$f(-3) = -(-3)^2 - 6 \cdot (-3) + 7 = 16$

$a < 0$, então f tem valor máximo 16.

b) $x_v = \dfrac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$

$f(0) = -0^2 + 121 = 121$

$a < 0$, então f tem valor máximo 121.

c) $x_v = \dfrac{-(-20)}{2 \cdot 1} = 10$

$f(10) = 10^2 - 20 \cdot 10 = -100$

$a > 0$, então f tem valor mínimo –100.

d) $x_v = \dfrac{-(-12)}{2 \cdot 1} = 6$

$f(6) = 6^2 - 12 \cdot 6 + 36 = 0$

$a > 0$, então f tem valor mínimo 0.

14. Como $f(x) = -3x^2 + (2k + 7)x + 2$ e $x_v = 4$, teremos:

$\dfrac{-(2k + 7)}{2 \cdot (-3)} = 4$

$2k + 7 = 4 \cdot 6 = 24$

$2k = 17 \Rightarrow k = 8{,}5$

15. a) Se $f(x) = -x^2 + 104x + 120$, teremos:

$x_v = \dfrac{-104}{2 \cdot (-1)} = 52$

Logo, para atingir a receita máxima, o número de passageiros deve ser igual a 52.

b) Calculamos $f(52)$:

$f(52) = -52^2 + 104 \cdot 52 + 120 = -2704 + 5408 + 120 = 2824$

A receita máxima é R$ 2 824,00.

É hora de extrapolar - páginas 172 e 173

1. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes, por meio dos questionamentos dos três itens, reflitam a respeito do papel da tecnologia nas suas vidas e nos seus contextos sociais.

2. a) Sim, são exemplos de tecnologia.

b) Resposta pessoal.

c) Respostas pessoais; dependem das respostas anteriores.

3. Espera-se que os estudantes apresentem as linhas do tempo construídas. Auxilie e oriente as apresentações, fazendo comentários sobre os inventos escolhidos.

4. Exemplo de resposta: a Matemática está presente nas medidas (medidas de tempo, de capacidade de armazenamento, de voltagem etc.), no formato dos aparelhos e também em seus *softwares*, uma vez que muitos deles são desenvolvidos por meio de algoritmos escritos em determinada linguagem de programação e que levam em consideração as ideias de função e de variável.

5. Respostas pessoais. Espera-se que os alunos respondam afirmativamente.

6. a) Como $h(x) = -x^2 + 3x$, então:

$-x^2 + 3x = 2$

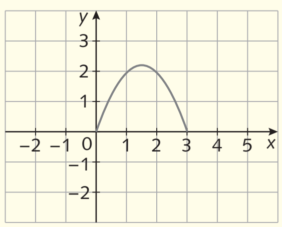
$-x^2 + 3x - 2 = 0$

$x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2}$

$x_1 = \dfrac{-3 + 1}{-2} = 1$ e $x_2 = \dfrac{-3 - 1}{-2} = 2$

A altura mede 2 metros em dois momentos: após 1 segundo do lançamento e após 2 segundos do lançamento.

b)



c) $x_v = \dfrac{-3}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$

$h(1{,}5) = -(1{,}5)^2 + 3 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$

Portanto, ele atingirá a medida de altura máxima de 2,25 metros após 1,5 segundo do lançamento.

7. Os estudantes devem escolher um invento tecnológico da atividade 2 e em grupos realizar uma pesquisa. Essa pesquisa deve conter: explicações sobre o funcionamento, período e autor do invento e a utilidade do invento.

8. Os estudantes deverão fazer o planejamento da construção de um modelo do invento, podendo utilizar materiais diversos, como sucata.

9. Os estudantes deverão realizar a construção do modelo do invento e elaborar um texto com as informações obtidas na pesquisa.

10. Os grupos devem fazer parceria de dois em dois a fim de apresentarem seu modelo de invento e as informações sobre ele e assistir à apresentação do grupo parceiro, analisando as informações e a qualidade do modelo.

11. Oriente os alunos a fazer as anotações de dúvidas, opiniões e sugestões dos grupos.

12. Os estudantes poderão fazer os ajustes pertinentes no modelo e nas informações e todos farão a apresentação para a turma.

13. Oriente os estudantes a organizarem uma exposição dos modelos e dos textos para a comunidade escolar.

14. **a)** Resposta pessoal. **b)** Respostas pessoais.

15. Oriente os alunos a construir um texto descrevendo o processo de pesquisa do invento tecnológico, planejamento e produção do modelo e análise e divulgação do modelo.

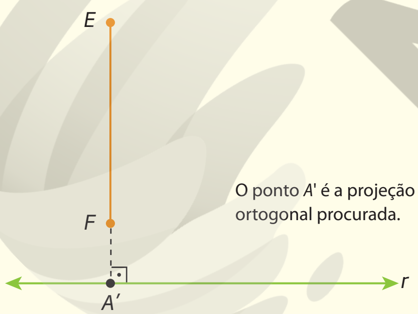
Capítulo 7 – Relações métricas no triângulo retângulo

Trocando ideias – página 175

- Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes verifiquem que os equipamentos de proteção individual (EPI) protegem metalúrgicos de acidentes diversos, que podem gerar danos a longo prazo para a saúde.
- Respostas possíveis: Triângulo escaleno (as medidas dos comprimentos dos lados são diferentes) ou triângulo retângulo (tem um ângulo interno cuja medida da abertura é igual a 90°).
- Espera-se que os estudantes identifiquem que $(3\text{ cm})^2 + (4\text{ cm})^2 = (5\text{ cm})^2$.

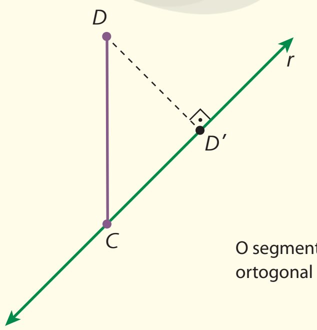
Atividades – páginas 176 e 177

1. **a)**



O ponto *A'* é a projeção ortogonal procurada.

b)



O segmento $\overline{CD'}$ é a projeção ortogonal procurada.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Observando as representações, temos como respostas:

a) $\overline{BD}$

b) Respectivamente $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$.

c) $\overline{CB}$

d) Respectivamente D e $\overline{BC}$.

Um pouco de história – página 183

a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes utilizem diferentes tipos de suporte para pesquisa, como livros e consultas à internet, para responder ao que se pede.

Tecnologias digitais em foco – página 184

a) A medida de área do quadrado maior é menor que a soma das medidas de área dos quadrados menores.

b) A medida de área do quadrado maior é maior que a soma das medidas de área dos quadrados menores.

c) A medida de área do quadrado maior é igual à soma das medidas de área dos quadrados menores, ou seja, vale o teorema de Pitágoras.

Atividades – página 185

3. Utilizando as relações métricas no triângulo retângulo, podemos calcular o que se pede em cada item:

a) $x^2 = 5 \cdot 15$

Como $x > 0$, temos: $x = \sqrt{3 \cdot 5^2} \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

b) Seja a a medida do comprimento da hipotenusa, teremos:

$a^2 = 30^2 + 40^2$

Como $a > 0$, temos: $a = \sqrt{2\,500} \Rightarrow a = 50$

$30 \cdot 40 = 50 \cdot x$

$x = \dfrac{30 \cdot 40}{50} \Rightarrow x = 24$

c) $x^2 = 18 \cdot 8$

Como $x > 0$, temos: $x = \sqrt{144} \Rightarrow x = 12$

d) $\left(\sqrt{38}\right)^2 = 6^2 + x^2$

$x^2 = 38 - 36$

Como $x > 0$, temos: $x = \sqrt{2}$

4. Podemos utilizar o teorema de Pitágoras para determinar os valores de x, y e z. Como correspondem a medidas de comprimento, todos são positivos.

$16^2 = 8^2 + x^2$

$x^2 = 256 - 64 = 192$

Como $x > 0$, então: $x = \sqrt{2^6 \cdot 3} \Rightarrow x = 8\sqrt{3}$

$y^2 = 12^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2$

$y^2 = 144 + 192 = 336$

Como $y > 0$, então: $y = \sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot 7} \Rightarrow y = 4\sqrt{21}$

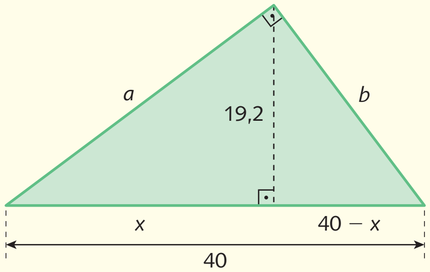
$\left(4\sqrt{21}\right)^2 = 4^2 + z^2$

$z^2 = 336 - 16 = 320$

Como $z > 0$, então: $z = \sqrt{2^6 \cdot 5} \Rightarrow z = 8\sqrt{5}$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

5. Sejam x e $(40 - x)$ as medidas de comprimento das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa, temos:



Então, podemos escrever a seguinte relação:

$19{,}2^2 = x \cdot (40 - x)$

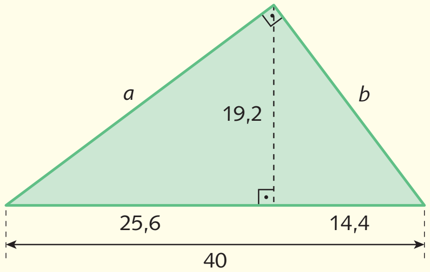
$x^2 - 40x + 368{,}64 = 0$

$x = \dfrac{40 \pm \sqrt{1600 - 1474{,}56}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{40 \pm 11{,}2}{2}$

$x_1 = \dfrac{40 + 11{,}2}{2} \Rightarrow x_1 = 25{,}6$

$x_2 = \dfrac{40 - 11{,}2}{2} \Rightarrow x_2 = 14{,}4$

Assim, se $x = 25{,}6$, temos:



Então, teremos as mesmas medidas no caso de $x = 14{,}4$. Logo, podemos encontrar os valores de a e de b, usando as relações:

$a^2 = 19{,}2^2 + 25{,}6^2$	$b^2 = 19{,}2^2 + 14{,}4^2$
$a^2 = 1024$	$b^2 = 576$
Como $a > 0$, temos:	Como $b > 0$, temos:
$a = 32$	$b = 24$

Portanto, as medidas de comprimento dos catetos são 32 m e 24 m.

6. Indicando por h a medida da altura do muro, temos:

$4^2 = h^2 + 2{,}4^2$

$h^2 = 16 - 5{,}76 = 10{,}24$

Como $h > 0$, então: $h = 3{,}2$

O muro mede 3,2 m de altura.

7. Indicando por x a medida de comprimento do lado do trapézio perpendicular às bases, temos:

$x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 25$

Como $x > 0$, então: $x = 5$

Para calcular a medida do perímetro, fazemos:

$5 + 4 + 13 + 16 = 38$

Assim, o perímetro mede 38 cm.

8. $(x + 14)^2 = x^2 + (x + 7)^2$

$x^2 + 28x + 196 = x^2 + x^2 + 14x + 49$

$x^2 - 14x - 147 = 0$

$x = \dfrac{14 \pm \sqrt{784}}{2}$

$x_1 = -7$ e $x_2 = 21$

Como $x > 0$, consideramos apenas $x = 21$.

Portanto, as medidas de comprimento x, $x + 7$ e $x + 14$ serão, respectivamente, 21 m, 28 m e 35 m.

9. Indicando por a e b as medidas de comprimento dos catetos, temos:

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow b = \dfrac{3a}{4}$

Então, podemos utilizar o teorema de Pitágoras:

$40^2 = a^2 + \left(\dfrac{3a}{4}\right)^2$

$1600 = \dfrac{16a^2 + 9a^2}{16}$

Como $a > 0$, temos: $a = \sqrt{\dfrac{1600 \cdot 16}{25}} \Rightarrow a = 32$

Assim, o comprimento de um cateto mede 32 cm e o do outro, 24 cm, pois $b = \dfrac{3}{4} \cdot 32 = 24$.

10. Nesse triângulo, valem as relações:

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow m = \dfrac{b^2}{a}$

$c^2 = a \cdot n \Rightarrow n = \dfrac{c^2}{a}$

Assim, como queremos saber o valor de $\dfrac{m}{n}$, fazemos:

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{\frac{b^2}{a}}{\frac{c^2}{a}} \Rightarrow \dfrac{m}{n} = \dfrac{b^2}{c^2}$

Como sabemos que $b = 2c$, teremos:

$\dfrac{m}{n} = \dfrac{(2c)^2}{c^2} \Rightarrow \dfrac{m}{n} = 4$

11. Indicando por h a medida do comprimento da hipotenusa e por a a medida do comprimento de cada cateto, temos:

$h^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

Como $h > 0$, então: $h = a\sqrt{2}$

Logo, a razão $\dfrac{h}{a}$ é: $\dfrac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

12. Com o teorema de Pitágoras, teremos:

$c^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 12$

Como $c > 0$, então: $c = \sqrt{16} \Rightarrow c = 4$

Considerando que, em um triângulo, a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos é igual a 180°, teremos:

$90° = 2 \cdot \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{B}) \Rightarrow \text{med}(\hat{B}) = 30°$

Como $\text{med}(\hat{A}) = 2 \cdot \text{med}(\hat{B})$, então $\text{med}(\hat{A}) = 2 \cdot 30° = 60°$

Assim, teremos $c = 4$ cm, $\text{med}(\hat{A}) = 60°$ e $\text{med}(\hat{B}) = 30°$.

Atividades - página 187

13. $d = 17\sqrt{2}$ cm

14. Se o quadrado tem 400 cm² de medida de área, então a medida do comprimento do seu lado é de 20 cm.

Logo, $d = 20\sqrt{2}$ cm.

15. Sendo d a medida do comprimento da diagonal de um quadrado e a a medida do comprimento de seu lado, como já sabemos que $d = 10$, fazemos:

$10 = a\sqrt{2}$

$a = \dfrac{10}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = \dfrac{10\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 5\sqrt{2}$

Assim, o comprimento do lado desse quadrado mede $5\sqrt{2}$ cm.

16. Se o perímetro mede $10\sqrt{2}$ cm, podemos afirmar que o comprimento do lado do quadrado mede $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ cm, então:

$d = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow d = \dfrac{10}{2} \Rightarrow d = 5$

Logo, o comprimento da diagonal mede 5 cm.

17. Indicando por d a medida do comprimento da diagonal do retângulo, temos:

$d^2 = x^2 + (3x)^2 = 10x^2$

Como $d > 0$ e $x > 0$, temos: $d = x\sqrt{10}$;

18. $h = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

Logo, o comprimento da altura desse triângulo mede $4\sqrt{3}$ cm.

19. Se o perímetro mede 12 cm, o comprimento de cada lado medirá 4 cm; encontramos a medida de comprimento da altura fazendo:

$h = \dfrac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$

Ou seja, o comprimento da altura desse triângulo mede $2\sqrt{3}$ cm.

20. Seja a a medida de comprimento do lado do triângulo equilátero, temos:

$4\sqrt{5} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$a = \dfrac{8\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = \dfrac{8\sqrt{15}}{3}$

Então, o perímetro desse triângulo, em cm, medirá:

$3 \cdot \dfrac{8\sqrt{15}}{3} = 8\sqrt{15}$

21. Exemplo de resposta:

Chamando A a medida da área do quadrado *EFGH*, podemos verificar que:

$A = a^2 - 4 \cdot \dfrac{b \cdot c}{2}$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$A = (b^2 + c^2) - 2bc$

$A = (b - c)^2$

22. Considerando $EG = x$ e $EC = y$, teremos:

$x^2 = 2{,}4^2 + 1{,}8^2 \Rightarrow x^2 = 9 \xRightarrow{x > 0} x = 3$

$y^2 = 3^2 + 1^2 \xRightarrow{y > 0} y = \sqrt{10}$

Portanto, $EG = 3$ m e $EC = \sqrt{10}$ m.

23. Resposta pessoal. Exemplo de resposta:

- Quantas diagonais podemos traçar na superfície do cubo e em seu interior?
  Resposta esperada: 12 diagonais na superfície e 4 diagonais internas.
- As medidas de comprimento das diagonais $\overline{AH}$ e $\overline{AD}$ são iguais? Calcule-as.
  Resposta esperada: Não são iguais; $AH = 2\sqrt{2}$ cm, e $AD = 2\sqrt{3}$ cm.

Atividades - página 192

24. a) $\text{sen } c = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{12}{13}$

$\cos b = \dfrac{AB}{CB} = \dfrac{12}{13}$

$\text{tg } b = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{12}$

b) $\text{sen } b = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\cos b = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg } c = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen } b = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos b = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{tg } b = \dfrac{\text{sen } b}{\cos b} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$

d) $\text{sen } x = \dfrac{YZ}{XZ} = \dfrac{8}{4\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos z = \dfrac{YZ}{XZ} = \dfrac{8}{4\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\text{tg } x = \dfrac{YZ}{XY} = \dfrac{8}{4} = 2$

e) $\text{sen } o = \dfrac{NP}{OP} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$

$\cos p = \dfrac{NP}{OP} = \dfrac{16}{20} = \dfrac{4}{5}$

$\text{tg } p = \dfrac{ON}{NP} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

f) $\text{sen } r = \dfrac{TS}{RT} = \dfrac{1{,}6}{2} = 0{,}8$

$\cos t = \dfrac{TS}{RT} = \dfrac{1{,}6}{2} = 0{,}8$

$\text{tg } t = \dfrac{RS}{ST} = \dfrac{1{,}2}{1{,}6} = 0{,}75$

25. Segundo as informações, devemos ter $\dfrac{h}{a} \leqslant 0{,}0833$.

a) $\dfrac{h}{2{,}5} \leqslant 0{,}0833 \Rightarrow h \leqslant 0{,}20825$

Assim, a altura máxima deve medir 0,20825 m.

b) $\dfrac{25}{a} \leqslant 0{,}0833 \Rightarrow \dfrac{25}{0{,}0833} \leqslant a$ ou

$a \geqslant 300{,}12 \text{ cm} = 3{,}0012 \text{ m}$

Assim, a medida mínima de afastamento deve ser 3,0012 m.

Atividades - página 195

26. a) $\text{tg } 45° = \dfrac{x}{20} \Rightarrow 1 = \dfrac{x}{20} \Rightarrow x = 20$

$\cos 45° = \dfrac{20}{y} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{20}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \dfrac{40}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = 20\sqrt{2}$

b) $\text{sen } 60° = \dfrac{x}{100} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x}{100} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{100\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 50\sqrt{3}$

$\cos 60° = \dfrac{y}{100} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{y}{100} \Rightarrow y = 50$

c) $\text{sen } 30° = \dfrac{2}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{x} \Rightarrow x = 4$

$\text{tg } 30° = \dfrac{2}{y} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2}{y} \Rightarrow y = \dfrac{6}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = 2\sqrt{3}$

27. $\text{sen } 60° = \dfrac{h}{80} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{80} \Rightarrow h = 40\sqrt{3}$

$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{m} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{40\sqrt{3}}{m} \Rightarrow m = \dfrac{3 \cdot 40\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow m = 120$

$\cos 60° = \dfrac{n}{80} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{n}{80} \Rightarrow n = 40$

$x = m + n \Rightarrow x = 160$

28. No quadrado $ABCD$, seja $CB = x$:

$\text{sen } 45° = \dfrac{x}{6\sqrt{2}} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{x}{6\sqrt{2}} \Rightarrow x = 6$

No triângulo ABC, seja $CH = y$:

$\text{sen } 60° = \dfrac{y}{5} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{y}{5} \Rightarrow y = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$

Logo, a medida do comprimento do lado do quadrado $ABCD$ mede 6 m e o comprimento da altura $\overline{CH}$ do triângulo ABC mede $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm.

29. Considerando CB = x, teremos no ΔBCD:

$\text{tg } 45° = \dfrac{h}{x} \Rightarrow 1 = \dfrac{h}{x} \Rightarrow h = x$

No ΔACD, teremos:

$\text{tg } 30° = \dfrac{h}{600 + x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{600 + h}$

$3h = 600\sqrt{3} + \sqrt{3}h \Rightarrow (3 - \sqrt{3})h = 600\sqrt{3}$

$h = \dfrac{600\sqrt{3}}{(3-\sqrt{3})} \cdot \dfrac{(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})} \Rightarrow h = \dfrac{600 \cdot 3\sqrt{3} + 600 \cdot 3}{9 - 3}$

$h = \dfrac{600}{6} \cdot (3 + 3\sqrt{3}) \Rightarrow h = 300\left(1 + \sqrt{3}\right)$

Logo, h mede $300(1 + \sqrt{3})$ m.

Atividades – página 198

30. Observando a tabela trigonométrica, temos:

a) 0,292 **c)** 0,488 **e)** 0,788 **g)** 0,970
b) 0,999 **d)** 0,682 **f)** 1,192 **h)** 28,636

31. Observando a tabela trigonométrica, temos:

a) $a = 7°$ **d)** $a = 56°$ **g)** $a = 39°$
b) $a = 70°$ **e)** $a = 10°$ **h)** $a = 60°$
c) $a = 35°$ **f)** $a = 81°$

32. a) $\text{sen } 25° = \dfrac{5}{x} \Rightarrow x = \dfrac{5}{0{,}423} \Rightarrow x \simeq 11{,}82$

$\text{tg } 25° = \dfrac{5}{y} \Rightarrow y = \dfrac{5}{0{,}466} \Rightarrow y \simeq 10{,}73$

b) $\text{sen } 40° = \dfrac{x}{2} \Rightarrow 0{,}643 = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 1{,}286$

$\cos 40° = \dfrac{y}{2} \Rightarrow 0{,}766 = \dfrac{y}{2} \Rightarrow y = 1{,}532$

Atividades – páginas 200 e 201

33. Se chamarmos de x a medida aproximada da altura do mastro, em m, teremos:

$\text{tg } 38° = \dfrac{x - 1{,}70}{80} \Rightarrow 0{,}781 = \dfrac{x - 1{,}70}{80} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 80 \cdot 0{,}781 + 1{,}70 \Rightarrow x = 64{,}18$

Logo, a medida aproximada do comprimento da altura do mastro é 64,18 m.

34. Indicando por x a medida da distância da torre a praia, temos:

$\text{tg } 45° = \dfrac{50}{x} \Rightarrow 1 = \dfrac{50}{x} \Rightarrow x = 50$

Portanto, a distância da torre à praia mede 50 metros.

35. Seguindo o esquema, teremos:

$\text{tg } 30° = \dfrac{5}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{5}{x} \Rightarrow x = \dfrac{5 \cdot 3}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 5\sqrt{3}$

Portanto, a distância deve medir $5\sqrt{3}$ m.

36. Se considerarmos que a altura, em km, mede x, teremos:

$\text{sen } 30° = \dfrac{x}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{8} \Rightarrow x = 4$

Portanto, o foguete estará a 4 km de medida de altura.

37. Seguindo o esquema, teremos:

$\text{tg } 60° = \dfrac{40\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \sqrt{3} = \dfrac{40\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = \dfrac{40\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 40$

Portanto, o comprimento da sombra projetada mede 40 m.

38. Observando a tabela trigonométrica, concluímos que a medida da inclinação máxima é 3°.

Atividades – páginas 204 e 205

39. a) $AB = 3 - (-1) \Rightarrow AB = 4$ unidades de medida de comprimento.

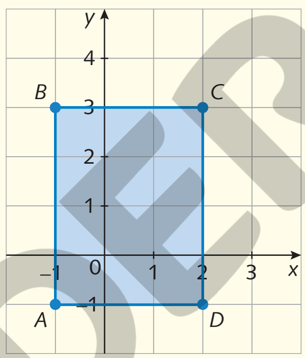
b) $AB = 0 - (-2) \Rightarrow AB = 2$ unidades de medida de comprimento.

c) $(AB)^2 = [2 - (-1)]^2 + [1 - (-2)]^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (AB)^2 = 9 + 9 = 18$

Como $AB > 0$, temos: $AB = 3\sqrt{2}$ unidades de medida de comprimento.

40. a)



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

b) $ABCD$ é um retângulo.

c) $AB = CD = 3 - (-1) = 4$

$BC = AD = 2 - (-1) = 3$

Medida de perímetro: $2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 14$ unidades de medida de comprimento.

41. $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

$(AB)^2 = (5 - 1)^2 + (5 - 1)^2 = 16 + 16$

Como $AB > 0$, temos: $AB = \sqrt{32} \Rightarrow AB = 4\sqrt{2}$ unidades de medida de comprimento.

42. a) $A(0,3)$; $B(2,4)$; $C(3,2)$; $D(1,1)$

b) Seja u a unidade de medida de comprimento, temos:

$(AB)^2 = (2-0)^2 + (4-3)^2 \xRightarrow{AB > 0} AB = \sqrt{5}\text{ u}$

$(BC)^2 = (3-2)^2 + (4-2)^2 \xRightarrow{BC > 0} BC = \sqrt{5}\text{u}$

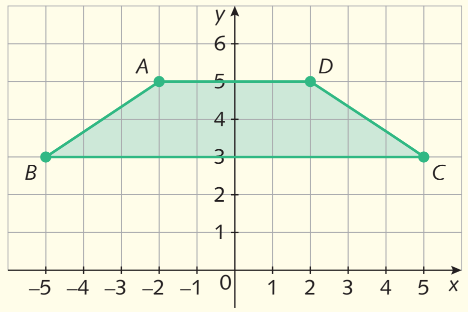
$(CD)^2 = (3-1)^2 + (2-1)^2 \xRightarrow{CD > 0} CD = \sqrt{5}\text{u}$

$(AD)^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 \xRightarrow{AD > 0} AD = \sqrt{5}\text{u}$

Medida de perímetro: $\sqrt{5}\text{u} + \sqrt{5}\text{u} + \sqrt{5}\text{u} + \sqrt{5}\text{u} = 4\sqrt{5}\text{u}$

Medida da área: $(\sqrt{5}\text{u})^2 = 5\text{ u}^2$, em que u^2 é a unidade de medida de área.

43. Exemplo de construção:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a) Exemplos de resposta: (5,5) ou (–1,5).

b) Exemplos de resposta: (5,9) ou (5,–3).

c) Exemplo de resposta: $A(-2{,}5)$ e $B\ (-5{,}3)$.

44. **a)** $(PO)^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4$

Como $PO > 0$, temos: $PO = \sqrt{29}$ unidades de medida de comprimento.

b) Observando as coordenadas, temos a medida de distância de 2 unidades de medida de comprimento.

c) Observando as coordenadas, temos a medida de distância de 5 unidades de medida de comprimento.

45. De acordo com as informações, temos os seguintes pontos: $C(1,-2)$, $D(4,-2)$, $E(-2,3)$, $F(-2,-1)$

As coordenadas do ponto médio de $\overline{CD}$ são (x, y). Logo, teremos:

Como $\overline{CD}$ // eixo x, então: $y = -2$

$4 - 1 = 2(x - 1)$
$3 = 2x - 2$
$x = 2{,}5$

Portanto, o ponto médio de $\overline{CD}$ é (2,5;–2).

As coordenadas do ponto médio de $\overline{EF}$ são (x, y). Logo, teremos:

Como $\overline{EF}$ // eixo y, então: $x = -2$

$3 - (-1) = 2[y - (-1)]$
$4 = 2y + 2$
$y = 1$

Portanto, o ponto médio de $\overline{EF}$ é (–2, 1).

46. **a)** Infinitos quadrados.

b) Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes verifiquem as possibilidades de construção do enunciado, apresentando restrições para satisfazer as condições dadas.

c) Espera-se que os estudantes percebam que existe mais de uma maneira de fazer alterações no enunciado para satisfazer as condições do item **b**.

Revisão dos conteúdos deste capítulo - páginas 206 e 207

1. Utilizando as relações métricas, temos:

a) $6^2 = 8 \cdot y \Rightarrow y = \frac{36}{8} \Rightarrow y = 4{,}5$; então, $y = 4{,}5$ cm

b) $y^2 = 9 \cdot (25 - 9) \Rightarrow y^2 = 144 \xrightarrow{y>0} y = 12$; então, $y = 12$ cm.

c) $12^2 = 9 \cdot x \Rightarrow x = 16$; então, $x = 16$ cm.

2. **a)** Como um dos catetos mede 7 cm, podemos determinar sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa:

$7^2 = m \cdot 25 \Rightarrow m = \frac{49}{25} = 1{,}96$

Assim, o comprimento de uma das projeções ortogonais mede 1,96 cm e o da outra, 25 cm – 1,96 cm = 23,04 cm.

b) $25^2 = x^2 + 7^2 \Rightarrow x^2 = 576$

Como $x > 0$, temos: $x = 24$ cm.

c) $h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 1{,}96 \cdot 23{,}04 = 45{,}1584$

Como $h > 0$, temos: $h = \pm\sqrt{45{,}1584}$; portanto, $h = 6{,}72$ cm.

3. **a)** $x^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{289} = 289$

Como $x > 0$, temos: $x = 17$.

b) $8^2 = y^2 + 4^2 \Rightarrow y^2 = 48$

Como $y > 0$, temos: $y = 4\sqrt{3}$, pois deve ser um valor positivo.

4. Indicando por x a medida da altura que a escada atinge, temos:
$(2{,}5)^2 = (1{,}5)^2 + x^2 \Rightarrow x = 4$

Como $x > 0$, temos: $x = 2$ m.

5. **a)** Indicando por d a medida do comprimento da diagonal do retângulo, temos:
$d^2 = 8^2 + 15^2 = 289$

Como $d > 0$, temos: $d = 17$ cm.

b) Indicando por d a medida do comprimento da diagonal do quadrado, temos:
$d = 20\sqrt{2}$ m

c) Indicando por h a medida do comprimento da altura do triângulo equilátero, temos:

$h = \frac{8\sqrt{3}}{2}$

Portanto, $h = 4\sqrt{3}$ cm.

6. **a)** $\cos 30° = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 4$

b) $\text{tg } 45° = \frac{x}{3{,}5} \Rightarrow 1 = \frac{x}{3{,}5} \Rightarrow x = 3{,}5$

c) $\text{sen } 60° = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

d) $\cos 60° = \frac{7}{x+3} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{7}{x+3} \Rightarrow x + 3 = 14 \Rightarrow x = 11$

7. Indicando por h a medida da altura da pipa em relação ao solo, temos:

$\text{sen } 45° = \frac{h}{8{,}5} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{8{,}5} \Rightarrow h = \frac{8{,}5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{8{,}5 \cdot 1{,}4}{2} \Rightarrow h = 5{,}95$, assim, a medida h procurada é 5,95 m

8. Indicando por d a medida da distância procurada:
$\text{sen } 30° = \frac{1\,300}{d} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1\,300}{d} \Rightarrow d = 2\,600$, ou seja, $d = 2\,600$ m

9. **a)** $A(3,5)$, $B(3,1)$, $C(12,1)$

b) $AB = 5 - 1 = 4$ u

$BC = 12 - 3 = 9$ u

$(AC)^2 = (4\text{ u})^2 + (9\text{ u})^2 = 97\text{ u}^2$

Como $AC > 0$, temos $AC = \sqrt{97}$u.

c) Como a abscissa x de D, ponto médio de $\overline{AC}$, é a mesma abscissa de P, e a abscissa de A é a mesma abscissa de B, temos:

$BC = 2BP$
$9 = 2(x - 3)$
$2x = 15$
$x = 7{,}5$

Capítulo 8 – Circunferência, arcos e ângulos

Trocando ideias – página 208

- Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes tragam como respostas para a discussão seus conhecimentos prévios a respeito da circunferência e seus componentes (arcos, cordas, diâmetros etc.).
- Espera-se que os estudantes utilizem diferentes meios de pesquisa para procurar e localizar obras de artes que possuam como elementos constituintes os aspectos geométricos citados. Pode-se indicar o uso de *sites* de pesquisa de imagens ou até mesmo propor visitas a museus virtuais que possuam obras como as indicadas. Deixamos como indicação o *tour* virtual da Pinacoteca do Estado de São Paulo, na exposição "OSGEMEOS: Segredos", onde as obras de artes possuem construções geométricas abordadas neste capítulo. Disponível em: https://pinacoteca.org.br/conteudos-digitais/tour-virtual/tour-virtual-exposicao-osgemeos-segredos/. Acesso em: 22 jul. 2022.

Atividades – página 211

1. **a)** Como o diâmetro tem medida de comprimento igual a 40 cm e o raio possui metade dessa medida, então o raio tem medida de comprimento 20 cm.

b) Encontramos as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

c) A corda $\overline{AB}$ passa pelo centro O da circunferência; assim, $\overline{AB}$ é diâmetro.

d) Exemplo de resposta: $\overline{OE}$.

2. Temos que $2r = D$; assim:

$$2r = 1{,}44\text{ m} \Rightarrow r = \frac{1{,}44\text{ m}}{2} = 0{,}72\text{ m}$$

Portanto, o raio tem medida de comprimento igual a 0,72 m.

3. **a)** Raio é o segmento de reta que une o centro a qualquer ponto da circunferência.

b) Em uma circunferência, podemos traçar infinitos diâmetros (ou raios). Todos eles são congruentes entre si.

c) Duas circunferências são congruentes quando os raios têm a mesma medida de comprimento.

d) A maior corda da circunferência é o diâmetro.

4. Verificando as indicações na figura, temos:

a) $OP = 2$ cm

b) $AP = 2OP = 4$ cm, que corresponde à medida de comprimento do diâmetro da circunferência.

c) Menor, pois $\overline{CM}$ não é diâmetro da circunferência; logo tem medida de comprimento menor que 4 cm.

5. Como $2r = D$, temos:

a) $D = 2 \cdot 4{,}5\text{ cm} \Rightarrow D = 9\ cm$

b) $2r = 17\text{ cm} \Rightarrow r = \frac{17}{2}\text{ cm} \Rightarrow r = 8{,}5\text{ cm}$

6. Verificando a figura, temos:

a) $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{OF}$, $\overline{OP}$

b) $\overline{EC}$, $\overline{ED}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BF}$

c) $\overline{AD}$, $\overline{BF}$

7. Como $\overline{OB}$ e $\overline{OA}$ são raios da circunferência, podemos afirmar que o triângulo AOB é isósceles e, portanto, os ângulos $O\hat{A}B$ e $O\hat{B}A$ são congruentes.

Além disso, em todo triângulo, sabemos que a soma das medidas de abertura de seus ângulos internos é igual a 180°.

Portanto, como $\text{med}(A\hat{O}B) = 110°$, teremos:

$$\text{med}(O\hat{A}B) = \text{med}(O\hat{B}A) = \frac{180° - 110°}{2} = \frac{70°}{2} = 35°$$

8. Podemos fazer:

$\overline{OC} \cong \overline{OD}$ (raio)

$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (raio)

$A\hat{O}C \cong B\hat{O}D$ (ângulo dado)

$\Delta AOC \cong \Delta BOD$ (caso LAL)

Logo, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

Lendo e aprendendo – página 212

1. Com base na leitura e interpretação do texto, temos:

a) Falsa

b) Falsa

c) Verdadeira

d) Verdadeira

2. Dadas as medidas de comprimento dos diâmetros da Terra e de Marte no texto, temos:

a) $\frac{12\,755{,}66\text{ km}}{2} = 6\,377{,}83\text{ km}$

b) $\frac{6\,791{,}43\text{ km}}{2} = 3\,395{,}715\text{ km}$

3. Resposta pessoal.

Atividades – página 213

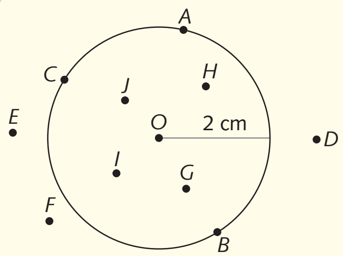
9. Observando a figura, temos:

a) C, E, G

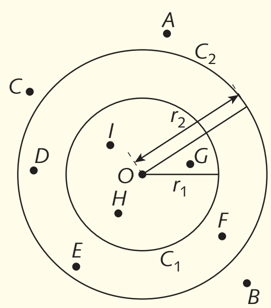
b) D, F, I, J

c) A, B, H, O

10. Um exemplo de figura:



11. Um exemplo de figura:



a) Sim, já que a própria circunferência C_1 é interna a C_2.

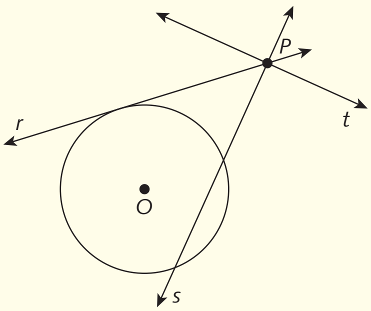
b) Não, pois a circunferência C_2 é externa à C_1.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades - página 216

12. Um exemplo de figura:

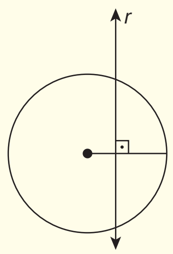


13. **a)** Externa, pois $d > r$.

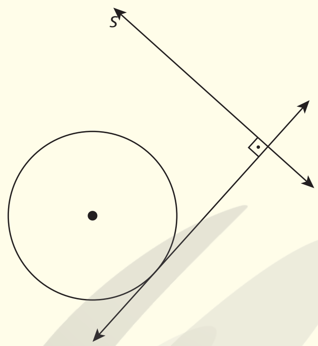
b) Secante, pois $d < r$.

c) Tangente, pois $d = r$

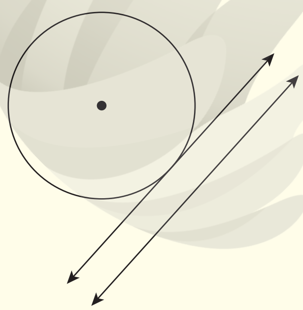
14. Não, por exemplo, a reta r a seguir:



15. Não, por exemplo, a reta s a seguir:



16. A medida da distância de uma das retas ao centro deve ser igual a 10 cm e a medida da distância da outra reta ao centro deve ser maior que 10 cm. Veja figura que justifica:



Atividades - página 218

17. Comparando a medida da distância d entre os centros das circunferências com as medidas dos comprimentos dos raios r_1 e r_2 em cada caso, temos:

a) $10 > 2 + 5$; portanto, C_1 e C_2 são externas.

b) $2 = 4 - 2$; portanto, C_1 e C_2 são tangentes interiores.

c) $10 = 7 + 3$; portanto, C_1 e C_2 são tangentes exteriores.

d) $4 < (10 - 3)$; portanto, C_1 e C_2 são internas.

e) $(5 - 5) < 8 < (5 + 5)$; portanto, C_1 e C_2 são secantes.

f) $(6 - 4) < 9 < (6 + 4)$; portanto, C_1 e C_2 são secantes.

18. **a)** $d = r_1 + r_2$ **c)** $d > r_1 + r_2$

b) $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$ **d)** $d = 0$

19. Nesse caso, devemos ter:
$d = r_1 - r_2 \Rightarrow d = 13 - 7 \Rightarrow d = 6$
Logo, d deve medir 6 cm.

20. **a)** Verdadeira.

b) Verdadeira.

c) Falsa, elas são secantes.

d) Verdadeira.

21. **a)** 2 cm e 2 cm, pois são medidas de comprimento dos raios.

b) 2 cm, pois esse triângulo é equilátero, ou seja, os três lados têm a mesma medida de comprimento que é a dos raios das circunferências (2 cm).

c) Como o triângulo O_1AO_2 é equilátero, então $\text{med}(O_1\hat{A}O_2) = 60°$.

d) É um losango, pois tem todos os lados com a mesma medida de comprimento.

Atividades - página 222

22. Em todos os itens, temos $PA = PB$, por serem segmentos de reta tangentes às circunferências, traçados sempre de um mesmo ponto.

a) $x = 20$

b) $\frac{2x}{3} - 1 = \frac{x}{4} + 12 \Rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{x}{4} = 12 + 1 \Rightarrow \frac{8x - 3x}{12} = 13 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{13 \cdot 12}{5} \Rightarrow x = 31{,}2$

c) $2x + 2 = 10 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$

d) $3x - 2 = 10 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

23. **a)** $x = 10 + 8 \Rightarrow x = 18$

b) $x = 5 + 3 \Rightarrow x = 8$

c) $x = 6 + 4 \Rightarrow x = 10$

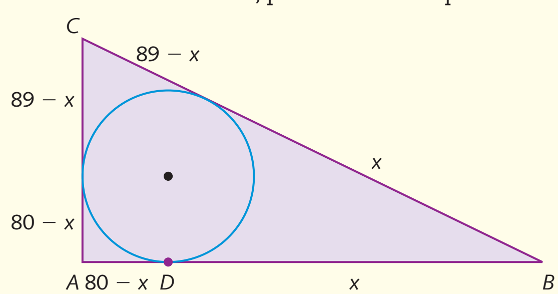
d) $7 = x + 4 \Rightarrow x = 3$

24. **a)** $x + 2x = 8 + 10 \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

b) $x + x + 8 = x + 2 + 8 \Rightarrow x = 2$

c) $8 + 10 = x + 12 \Rightarrow x = 18 - 12 \Rightarrow x = 6$

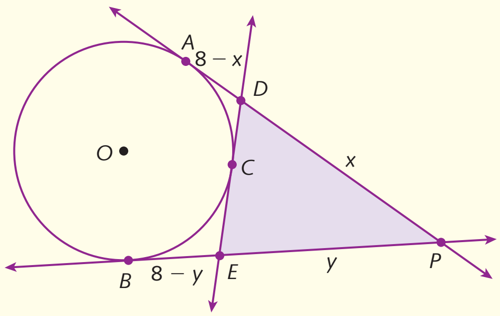
25. Considerando $BD = x$, podemos dizer que:



Como $AC = 39$, então:
$89 - x + 80 - x = 39 \Rightarrow -2x = -130 \Rightarrow x = 65$
Portanto, $BD = 65$ cm.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

26. Segundo as informações, indicando PD por x e PE por y, temos:



$PA = PB = 8$ $\quad$ $DA = DC = 8 - x$ $\quad$ $EB = EC = 8 - y$

Então, a medida do perímetro do triângulo PDE pode ser calculada desta forma:

$x + 8 - x + y + 8 - y$, ou seja, é igual a 16

Portanto, a medida do perímetro do triângulo PDE é 16 cm.

Atividades - página 225

27. **a)** 60°, 82° e 142°, pois são as mesmas medidas das aberturas dos ângulos centrais correspondentes.

b) 75°, 15° e 90°, pois são as mesmas medidas das aberturas dos ângulos centrais correspondentes.

28. $6x + 10° + 3x + 5° + 5x - 5° = 360° \Rightarrow 14x = 360° - 10° \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{350°}{14} \Rightarrow x = 25°$

$\text{med}(\widehat{AMB}) = 3x + 5° + 5x - 5° \Rightarrow \text{med}(\widehat{AMB}) = 8x \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{med}(\widehat{AMB}) = 8 \cdot 25° \Rightarrow \text{med}(\widehat{AMB}) = 200°$

29. **a)** $3x + x + 30° = 360° \Rightarrow 4x = 330° \Rightarrow x = 82°\,30'$

b) $x + 120° + x = 360° \Rightarrow 2x = 240° \Rightarrow x = 120°$

c) $2x + 80° + \dfrac{3x}{2} = 360° \Rightarrow \dfrac{4x + 3x}{2} = 280° \Rightarrow$

$\Rightarrow 7x = 560° \Rightarrow x = 80°$

30. **a)** $\alpha = 85°$, pois é a mesma medida do arco correspondente.

b) $\alpha = 180° - 150° \Rightarrow \alpha = 30°$

c) $\alpha = 180° - 70° \Rightarrow \alpha = 110°$

31. Como o triângulo ABC é equilátero, $\text{med}(B\hat{C}A) = 60°$; então, $\text{med}(\widehat{AB}) = 60°$.

32. $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$ (dado)

$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$ (raios)

Logo, $\Delta AOB \cong \Delta COD$, pelo caso LAL.

Assim, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Tecnologias digitais em foco - página 227

a) Espera-se que os estudantes percebam que a medida da abertura do ângulo inscrito à circunferência é igual à metade da medida da abertura do ângulo central correspondente.

b) Essa propriedade é válida independentemente da configuração apresentada.

Atividades - página 229

33. **a)** $\alpha = \dfrac{60°}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$

b) $\alpha = \dfrac{39°}{2} \Rightarrow \alpha = 19°30'$

c) $\alpha = 2 \cdot 80° \Rightarrow \alpha = 160°$

d) $\alpha + 50° = \dfrac{180°}{2} \Rightarrow \alpha = 40°$

34. $\text{med}(\widehat{AB}) = 2 \cdot 60° \Rightarrow \text{med}(\widehat{AB}) = 120°$

$\text{med}(\widehat{BC}) = 360° - (100° + 120°) \Rightarrow \text{med}(\widehat{BC}) = 140°$

$\text{med}(C\hat{A}B) = \dfrac{\text{med}(\widehat{BC})}{2} \Rightarrow \text{med}(C\hat{A}B) = \dfrac{140°}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{med}(C\hat{A}B) = 70°$

35. $\dfrac{6x + 30°}{2} = 4x \Rightarrow 6x + 30° = 8x \Rightarrow 30° = 2x \Rightarrow x = 15°$

Calculando a medida de abertura dos ângulos assinalados:

$4 \cdot 15° = 60°$ e $6 \cdot 15° + 30° = 120°$

36. Como $M\hat{P}N$ está inscrito em uma semicircunferência, podemos afirmar que $M\hat{P}N$ é reto. E como MNP é um triângulo, temos que a soma das medidas das aberturas de seus ângulos internos é igual a 180°:

$a + b + 90° = 180° \Rightarrow a = 90° - b$ (I)

Temos também a informação de que $a + 2b = 127°$, ou seja, $a = 127° - 2b$ (II)

Com (I) e (II), temos:

$90° - b = 127° - 2b \Rightarrow b = 37°$

E, assim,

$a = 90° - 37° \Rightarrow a = 53°$

37. $\text{med}(A\hat{B}C) = 180° - \left(57° + 55°\right) \Rightarrow \text{med}(A\hat{B}C) = 68°$

Logo, como $\overrightarrow{BE}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$, teremos:

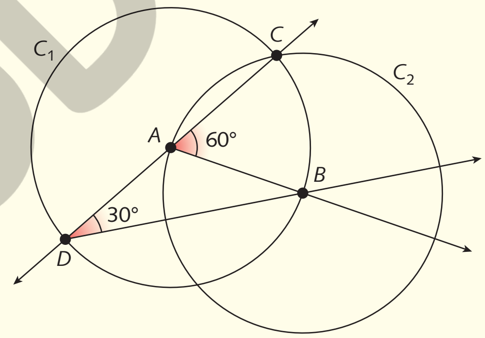
$\text{med}(A\hat{B}E) = \text{med}(E\hat{B}C) = \dfrac{68°}{2} = 34°$

$\text{med}(\widehat{EC}) = 2 \cdot 34° = 68°$

$\text{med}(\widehat{CB}) = 2 \cdot 55° = 110°$

$\text{med}(\widehat{ECB}) = 68° + 110° = 178°$

38. Exemplo de construção:



Sendo $\widehat{CB}$ o arco correspondente ao ângulo central $C\hat{A}B$ e o arco correspondente ao ângulo inscrito $C\hat{D}B$, podemos afirmar que a medida da abertura do ângulo inscrito $C\hat{D}B$ mede metade da medida da abertura do ângulo central $C\hat{A}B$.

Resolvendo em equipe - página 230

Interpretação e identificação dos dados

- Resposta pessoal.
- $r = 1$ cm
- Um triângulo equilátero, pois a medida do comprimento dos três lados é 2 cm.

Plano e resolução

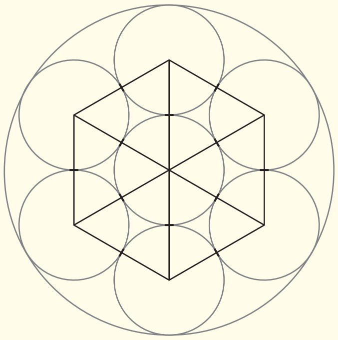
- Como se trata de um triângulo equilátero, a medida da abertura de cada ângulo interno é 60°, uma vez que $180° : 3 = 60°$.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução

a) Pela figura, sendo r a medida de comprimento do raio das circunferências pequenas e R a medida de comprimento do raio da circunferência grande, temos $R = 3r$; assim, $r = 1$ cm.

b) 6 circunferências, conforme a figura.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Revisão dos conteúdos deste capítulo - páginas 231 a 233

1. a) $\overline{EF}$, $\overline{EH}$, $\overline{EI}$, $\overline{EJ}$, conforme indicado na figura.

   b) $\overline{FG}$, $\overline{FI}$, $\overline{FJ}$, conforme indicado na figura.

   c) $\overline{FJ}$, conforme indicado na figura.

2. a) $d = r \Rightarrow$ tangente   c) $d < r \Rightarrow$ secante

   b) $d > r \Rightarrow$ exterior   d) $d = r \Rightarrow$ tangente

3. Se elas são tangentes interiores, vale que $d = r_1 - r_2$, em que $r_1 > r_2$; logo, devemos ter:
   $7 = 2x - 3 - (x + 1) \Rightarrow 7 = 2x - 3 - x - 1 \Rightarrow x = 11$
   Assim, podemos calcular:
   $r_1 = 2 \cdot 11 - 3 \Rightarrow r_1 = 19$
   $r_2 = 11 + 1 \Rightarrow r_2 = 12$
   Portanto, as medidas de comprimento dos raios das circunferências são 19 cm e 12 cm.

4. Se as circunferências são tangentes exteriores, vale $d = r_1 + r_2$; logo, devemos ter:
   $55 = 3x + 1 + 5x - 2 \Rightarrow 56 = 8x \Rightarrow x = 7$
   Assim, podemos calcular:
   $r_1 = 3 \cdot 7 + 1 \Rightarrow r_1 = 22$
   $r_2 = 5 \cdot 7 - 2 \Rightarrow r_2 = 33$
   Portanto, as medidas de comprimento dos raios das circunferências são 22 cm e 33 cm.

5. Como $(7 - 4) < 10 < (7 + 4)$, podemos afirmar que as circunferências são secantes.

6. a) $3x + 5 = 7x - 15 \Rightarrow -4x = -20 \Rightarrow x = 5$

   b) $\frac{3x}{2} - 5 = \frac{4x}{3} + 4 \Rightarrow \frac{3x}{2} - \frac{4x}{3} = 4 + 5 \Rightarrow$

   $\Rightarrow \frac{x}{6} = 9 \Rightarrow x = 54$

7. a) De acordo com a figura, podemos escrever: $x - 7 = 22 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 22 + 7 \Rightarrow x = 29$; então, $x = 29$ cm.

   b) De acordo com a figura, podemos escrever: $25 - x = 16 \Rightarrow$ $\Rightarrow 25 = x + 16 \Rightarrow x = 9$; então, $x = 9$ cm.

8. De acordo com a figura, podemos calcular a medida de perímetro: $1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 2{,}5 + 5 + 2{,}5 + 1{,}5 = 16$
   Portanto, o perímetro mede 16 cm.

9. a) $3x = 360 - 291 \Rightarrow x = \frac{69}{3} \Rightarrow x = 23$

   med (ângulo central) $= 3 \cdot 23° = 69°$

   b) Temos: $x^2 = 5x + 24°$; então precisamos resolver a equação:

   $x^2 - 5x - 24 = 0$

   $x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{2}$

   Utilizando apenas o valor positivo para x:

   $x = \frac{5 + 11}{2} \Rightarrow x = 8$

   Logo, teremos:

   $x = 8°$

   med (ângulo central) $= (8^2)° = 64°$

10. a) $y = 118°$ (medida da abertura do ângulo central cujo arco de circunferência correspondente mede 118°)

    $x = \frac{118°}{2} = 59°$ (medida da abertura do ângulo inscrito cujo arco correspondente mede 118°)

    b) $x = 38°$, pois há um outro ângulo inscrito de medida de abertura de 38°, cujo arco de circunferência correspondente é o mesmo.

11. Nesse caso, teremos:
    $5x + 8° = 2 \cdot 84° \Rightarrow 5x = 160° \Rightarrow x = 32°$

12. Temos:
    $5x = \frac{170°}{2} \Rightarrow 10x = 170° \Rightarrow x = 17°$

CAPÍTULO 9 - Polígonos regulares

Trocando ideias — página 234

- Sim, porque a medida da abertura de cada um dos ângulos internos de um quadrado é 90° e dos ângulos internos de um triângulo equilátero é 60° e esses números são divisores de 360.
- Não, porque a medida da abertura de cada um dos ângulos internos de um pentágono regular é 108° e 108 não é divisor de 360.

Atividades - página 237

1. Itens **b**, **d**, pois nos itens **a** e **c** nem todos os vértices dos polígonos pertencem à circunferência.

2. Itens **a**, **b**, pois nos itens **c** e **d** nem todos os lados dos polígonos são tangentes à circunferência.

3. a) Como ΔABC é retângulo em A e o ΔAOB é isósceles, temos:

   $x + 38° = 90° \Rightarrow x = 52°$

   b) Como ΔABC é retângulo em A, então pode-se aplicar o teorema de Pitágoras:

   $(4\sqrt{34})^2 = x^2 + 6^2$

   $x^2 = 544 - 36$

   Com $x > 0$, temos:

   $x = 2\sqrt{127}$.

4. Utilizando a propriedade relacionada aos ângulos opostos de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência, temos:

   a) $x + 140° = 180° \Rightarrow x = 40°$

   $y + 100° = 180° \Rightarrow y = 80°$

   b) $x + 110° = 180° \Rightarrow x = 70°$

   $y + 70° = 180° \Rightarrow y = 110°$

5. a) $AB = x + y$

   $BC = y + z$

   $CD = z + w$

   $DA = w + x$

b) $AB + CD = x + y + z + w$

c) $BC + DA = y + z + w + x$

d) As somas das medidas de comprimento dos lados opostos são iguais.

6. Podemos afirmar que:
$2p + p = p + 1 + p + 3 \Rightarrow p = 4$. Portanto, $p = 4$ cm.
Logo, podemos calcular o perímetro desta forma:
$(2 \cdot 4) + (4 + 1) + (4) + (4 + 3) = 24$; então, o perímetro do quadrilátero é igual a 24 cm.

Atividades - página 243

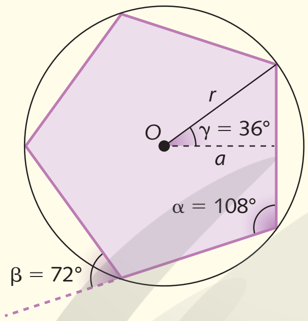
7. a) Verdadeira. Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.

b) Verdadeira. Denomina-se equiângulo um polígono que tem todos os ângulos congruentes.

c) Falsa. O retângulo não pode ser considerado um polígono regular, uma vez que não podemos afirmar que seus lados sejam congruentes.

d) Verdadeira. Denomina-se equilátero um polígono que tem todos os lados congruentes.

8. Exemplo de construção:



9. $n = 10$

$a_c = \dfrac{360°}{10} \Rightarrow a_c = 36°$

$a_i = \dfrac{8 \cdot 180°}{10} \Rightarrow a_i = 144°$

$a_e = \dfrac{360°}{10} \Rightarrow a_e = 36°$

10. a) $n = 3$

$a_c = \dfrac{360°}{3} \Rightarrow a_c = 120°$

$a_i = \dfrac{1 \cdot 180°}{3} \Rightarrow a_i = 60°$

$a_e = \dfrac{360°}{3} \Rightarrow a_e = 120°$

b) $n = 4$

$a_c = \dfrac{360°}{4} \Rightarrow a_c = 90°$

$a_i = \dfrac{2 \cdot 180°}{4} \Rightarrow a_i = 90°$

$a_e = \dfrac{360°}{4} \Rightarrow a_e = 90°$

c) $n = 6$

$a_c = \dfrac{360°}{6} \Rightarrow a_c = 60°$

$a_i = \dfrac{4 \cdot 180°}{6} \Rightarrow a_i = 120°$

$a_e = \dfrac{360°}{6} \Rightarrow a_e = 60°$

11. a) $\dfrac{360°}{n} = 36° \Rightarrow n = 10 \Rightarrow$ é um decágono

b) $\dfrac{360°}{n} = 40° \Rightarrow n = 9 \Rightarrow$ é um eneágono

c) $\dfrac{360°}{n} = 60° \Rightarrow n = 6 \Rightarrow$ é um hexágono

d) $\dfrac{360°}{n} = 90° \Rightarrow n = 4 \Rightarrow$ é um quadrado

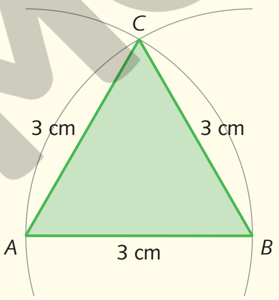
e) $\dfrac{360°}{n} = 120° \Rightarrow n = 3 \Rightarrow$ é um triângulo equilátero

12. Como
$a_e = \dfrac{360°}{n}$
Então:
$24° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 15°$
Esse polígono tem 15 lados.

13. Como
$a_i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$
Então:
$\dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n} = 135° \Rightarrow n = 8$
É um octógono; logo:
$a_e = \dfrac{360°}{8} \Rightarrow a_e = 45°$

14. Temos:
$(n-2) \cdot 180° = 1\,440° \Rightarrow n - 2 = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 10$
$a_e = \dfrac{360°}{10} \Rightarrow a_e = 36°$

15. Exemplo de construção:



O triângulo ABC equilátero com lado medindo 3 cm foi construído seguindo estes passos:

- segmento $\overline{AB}$ de medida de comprimento 3 cm foi traçado;
- com a ponta-seca do compasso em A, abertura de 3 cm, traçamos um arco;
- com a ponta-seca do compasso em B, abertura de 3 cm, traçamos um arco;
- na intersecção dos dois arcos está o vértice C do triângulo equilátero.

16. a) Um octógono regular, pois:
$45° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 8$

b) O ângulo externo.

c) Para construir o tetracoságono precisamos descobrir a medida de abertura dos seus ângulos externos. Assim:
$\dfrac{360°}{24} = 15°$
Assim, podemos construir a seguinte linha de comandos:

Atividades - páginas 246 e 247

17. Considerando a medida de comprimento do lado do quadrado q e a medida do comprimento do apótema p, temos:
$20^2 = q^2 + q^2 \Rightarrow$ Portanto, $q = 10\sqrt{2}$ cm
$p = \dfrac{10\sqrt{2}}{2}$ cm $\Rightarrow p = 5\sqrt{2}$ cm

18. Se a medida do perímetro do quadrado mede 20 cm, temos:
$q = \dfrac{40}{4}$ cm $\Rightarrow q = 10$ cm
E, então:
$10 = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \dfrac{10}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 5\sqrt{2}$
O comprimento do raio mede $5\sqrt{2}$ cm.

19. a) $12 = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \dfrac{12}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 6\sqrt{2}$
O comprimento do raio mede $6\sqrt{2}$ cm.

b) $q = \dfrac{12}{2}$ cm $\Rightarrow q = 6$ cm

20. Teremos:
$6\sqrt{2} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = 2$; assim, o comprimento do raio mede 6 cm.
Logo,
$q = \dfrac{6\sqrt{2}}{2}$ cm $\Rightarrow q = 3\sqrt{2}$ cm
Assim, o comprimento do apótema mede $3\sqrt{2}$ cm.

21. a) $q = 4\sqrt{2}$ cm
Medida do perímetro $= 4 \cdot 4\sqrt{2} \simeq$
$\simeq 16 \cdot 1{,}41 = 22{,}56$
O perímetro mede, aproximadamente, 22,56 cm.

b) Área $= (4\sqrt{2})^2 = 32$
A medida da área é igual a 32 cm^2.

22. $t = 8\sqrt{3}$ cm
$p = \dfrac{8}{2}$ cm $\Rightarrow p = 4$ cm

23. $20 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \dfrac{20}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$
$\Rightarrow r = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

$p = \frac{20\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

Portanto, o comprimento do raio mede $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm e o comprimento do apótema mede $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

24. $\frac{r}{2} = 6 \Rightarrow r = 12$

$t = 12\sqrt{3}$

Portanto, o comprimento do raio mede 12 cm e o do lado mede $12\sqrt{3}$ cm.

25. $t = 10\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow t = 30$

Perímetro $= 3 \cdot 30 = 90$

Logo, o perímetro mede 90 cm.

26. Temos

$h = r = 12$ cm

$p = \frac{12\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p = 6\sqrt{3}$

Assim, o comprimento do lado mede 12 cm e o do apótema mede $6\sqrt{3}$ cm.

27. Temos:

$5\sqrt{3} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 5 = \frac{r}{2} \Rightarrow r = 10$

$h = r = 10$

Medida do perímetro $= 6 \cdot 10 = 60$

Assim, o perímetro mede 60 cm.

28. Temos:

$h = r = 8$ cm

$p = \frac{8\sqrt{3}}{2}$ cm $\Rightarrow p = 4\sqrt{3}$ cm

29. A maior diagonal coincide com o diâmetro; logo, teremos:

$r = \frac{12\sqrt{3}}{2}\ cm \Rightarrow r = 6\sqrt{3}$ cm

$p = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$ cm $\Rightarrow p = 9$ cm

30. **a)** $AB = 10\sqrt{3}$ cm

b) $OM = \frac{10}{2}$ cm $\Rightarrow OM = 5$ cm

c) $med(A\hat{O}B) = a_c = \frac{360°}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow med(A\hat{O}B) = 120°$

d) $AM = (10 + 5)$ cm $\Rightarrow AM = 15$ cm

31. Temos:

$6\sqrt{3} = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{r}{2} = 6 \Rightarrow r = 12$

$h = r = 12$ cm

O comprimento do lado desse hexágono regular mede 12 cm.

32. A partir das informações, temos:

$8\sqrt{3} = r\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = 4\sqrt{6}$

$p = \frac{4\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow p = 2\sqrt{18} \Rightarrow$

$\Rightarrow p = 6\sqrt{2}$

Logo, o comprimento do apótema do hexágono regular mede $6\sqrt{2}$ cm.

33. Temos:

$\frac{h}{q} = \frac{r}{r\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

34. Teremos:

$\frac{r\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \Rightarrow \frac{r}{2} = 12 \Rightarrow r = 24$

a) $d = 2 \cdot 24 \Rightarrow d = 48$

O comprimento da diagonal do quadrado mede 48 m.

b) $p = \frac{24}{2} = 12$

A medida do comprimento do apótema mede 12 m.

Atividades - página 248

35. Temos um triângulo equilátero e $r = 2\sqrt{3}$ cm.

Inscrito:

$l = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow l = 6$

$a = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{3}$

Circunscrito:

$\frac{6}{L} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow L = 12$

O comprimento do lado desse triângulo equilátero medirá 12 cm.

36. Temos um quadrado e $r = 8$ cm.

Inscrito:

$l = 8\sqrt{2}$

$a = \frac{8\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

Circunscrito:

$\frac{8\sqrt{2}}{L} = \frac{4\sqrt{2}}{8} \Rightarrow L = 16$

O comprimento do lado desse quadrado medirá 16 cm.

37. Temos um hexágono regular e $r = 4\sqrt{3}$ cm.

Inscrito:

$l = 4\sqrt{3}$ cm

$a = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 6$

Circunscrito:

$\frac{4\sqrt{3}}{L} = \frac{6}{4\sqrt{3}} \Rightarrow L = 8$

O comprimento do lado desse hexágono regular medirá 8 cm.

38. Se a medida do perímetro do hexágono regular mede $24\sqrt{3}$ cm, o comprimento do seu lado medirá $4\sqrt{3}$ cm.

Em um hexágono regular inscrito, teremos $r = l = 4\sqrt{3}$ cm.

Assim, considerando esse raio, faremos os cálculos para o triângulo equilátero.

Inscrito:

$l = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow l = 12$

$a = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$

Circunscrito:

$\frac{12}{L} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow L = 24$

Assim, a medida do perímetro desse triângulo equilátero medirá 72 cm, pois $3 \cdot 24$ cm $= 72$ cm.

39. Espera-se que os estudantes consigam observar, por meio da construção, que a proporção apresentada na **página 247** é válida, variando o raio da circunferência que define os polígonos que estão inscritos e circunscritos a ela.

a) Espera-se que os estudantes identifiquem que a relação é válida.

b) Espera-se que os estudantes identifiquem que a relação continua válida.

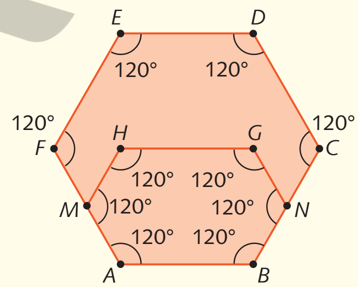
40. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos tomem a imagem como referência para elaborar questões sobre polígonos regulares circunscritos.

Resolvendo em equipe - página 249

Resposta da questão: alternativa **e**.

INTERPRETAÇÃO E IDENTIFICAÇÃO DOS DADOS

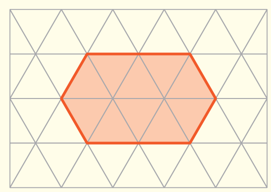
- Resposta pessoal.
- Todos os ângulos internos dos hexágonos são congruentes e suas aberturas medem 120°.



- Não, pois as medidas de comprimento dos lados correspondentes não são proporcionais.

PLANO E RESOLUÇÃO

- Sim. Nesse item é importante ressaltar que o hexágono menor pode ser decomposto em triângulos equiláteros em disposição diferente do hexágono maior. Um exemplo de decomposição é indicado a seguir:



- A medida de comprimento do lado do triângulo equilátero é metade da medida de comprimento do lado do hexágono maior.
- Utilizando como base os triângulos indicados na figura anterior, temos no total 10 triângulos para o hexágono pequeno e 24 para o hexágono maior.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

RESOLUÇÃO

Um exemplo de resolução é dado por observar a quantidade de triângulos que compõe o hexágono maior e o hexágono menor, utilizando-os como unidade de medida de área. Assim, denominando como A_m a medida da área do hexágono maior, e A_n a do menor, temos:

$$\frac{A_n}{A_m} = \frac{n^{\underline{o}} \text{ de triângulos em } ABNGHM}{n^{\underline{o}} \text{ de triângulos em } ABCDEF} =$$
$$= \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

Assim, temos como resposta a alternativa **e**.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – páginas 250 a 252

1. Usando a 1ª propriedade:

a) $x = y = 90°$

b) $x = y = z = 90°$

2. Usando a 2ª propriedade:

$2x - 35° + x + 5° = 180°$
$3x - 30° = 180°$
$3x = 210°$
$x = 70°$

3. Sabendo que $A_c = \frac{360°}{n}$, teremos:

a) $A_c = \frac{360°}{5} = 72°$

b) $A_c = \frac{360°}{8} = 45°$

c) $A_c = \frac{360°}{12} = 30°$

d) $A_c = \frac{360°}{24} = 15°$

4. a) $a_i = \frac{(15-2) \cdot 180°}{15} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_i = \frac{2\,340°}{15} \Rightarrow a_i = 156°$

b) $a_e = \frac{360°}{15} = 24°$

c) $a_c = \frac{360°}{15} = 24°$

5. Como $S_i = (n-2) \cdot 180°$, teremos:

$(n-2) \cdot 180° = 2\,880° \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 2 = 16 \Rightarrow n = 18$

Portanto, o polígono regular tem 18 lados.

6. Como:

$a_e = \frac{360°}{n}$

Teremos:

$\frac{360°}{n} = 18° \Rightarrow n = 20$

Ou seja, esse polígono regular tem 20 lados.

7. a) $40° = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = 9$

b) $a_i = \frac{(9-2) \cdot 180°}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_i = \frac{1\,260°}{9} \Rightarrow a_i = 140°$

c) $a_e = \frac{360°}{9} \Rightarrow a_e = 40°$

8. a) Como $a_i + a_e = 180°$, teremos:

$3x + 36° + x - 8° = 180° \Rightarrow x = 38°$

b) Como $a_e = \frac{360°}{n}$, teremos:

$38° - 8° = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = 12$

9. No pentágono regular, temos:

$a_i = \frac{(5-2) \cdot 180°}{5} \Rightarrow a_i = 108°$

Assim, teremos:

$3x + 12° = 108° \Rightarrow x = 32°$

10. No decágono regular, temos:

$a_i = \frac{(10-2) \cdot 180°}{10} \Rightarrow a_i = 144°$

Prolongando-se os lados do decágono regular, observando-se a simetria presente na figura e o paralelismo entre o lado do decágono e o segmento traçado, podemos concluir que o ângulo y tem a mesma medida de abertura do ângulo externo do decágono regular:

$a_e = \frac{360°}{10} \Rightarrow a_e = 36°$

Logo, $x = 144°$ e $y = 36°$

11. No hexágono regular inscrito, temos $h = r$, então:

Medida do perímetro $= 6 \cdot 2\sqrt{3} \simeq$
$\simeq 6 \cdot 2 \cdot 1{,}7 = 20{,}4$

O perímetro do hexágono regular mede aproximadamente 20,4 m.

12. a) $q = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ cm $\Rightarrow q = 16$ cm

b) $p = \frac{8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \text{ cm}}{2} \Rightarrow p = 8$ cm

13. Como $r = 15$ m, teremos:

$q = 15\sqrt{2} \Rightarrow q \simeq 15 \cdot 1{,}4 = 21$

Assim:

Medida do perímetro $= 4 \cdot 21 = 84$
Medida da área $= 21 \cdot 21 = 441$

O perímetro mede 84 m e a área mede 441 m².

14. a) $10 = r\sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{10\sqrt{3}}{3}$

b) $p = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

O comprimento do raio da circunferência mede $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm e o comprimento do apótema do triângulo mede $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm.

15. Sabemos que $p = 22$ cm; então, precisamos calcular as medidas de comprimento do lado desse quadrado (x) e do raio dessa circunferência (y):

$22 = \frac{y\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \left(\frac{44}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow y =$
$= 22\sqrt{2}$

$x = 22\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow x = 44$

O comprimento do lado do quadrado mede 44 cm e o raio da circunferência mede $22\sqrt{2}$ cm.

16. Temos um triângulo equilátero e $r = 4\sqrt{3}$ cm.

Inscrito:

$l = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow l = 12$

$a = \frac{4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}$

Circunscrito:

$\frac{12}{L} = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \Rightarrow L = 24$

O comprimento do lado desse triângulo mede 24 cm.

17. Temos um quadrado e $r = 16$ m.

Inscrito:

$l = 16\sqrt{2}$

$a = \frac{16\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 8\sqrt{2}$

Circunscrito:

$\frac{16\sqrt{2}}{L} = \frac{8\sqrt{2}}{16} \Rightarrow L = 32$

O comprimento do lado desse quadrado mede 32 m.

18. Temos um hexágono regular e $r = \sqrt{3}$ cm.

Inscrito:

$l = \sqrt{3}$ cm

$a = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Circunscrito:

$\frac{\sqrt{3}}{L} = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} \Rightarrow L = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} = 2$

O lado desse hexágono regular mede 2 cm.

É hora de extrapolar – páginas 253 e 254

1. a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes tragam como resposta ideias relacionadas à organização do trânsito, visando um melhor fluxo entre carros e pedestres nas vias.

b) Uma resposta possível:

São placas vermelhas que impõem uma ordem (obrigação) ao motorista.

Exemplos de placas: “Proibido virar à esquerda”, “Proibido estacionar”, “Largura máxima permitida”, “Circulação exclusiva de ônibus” e “Siga em frente ou à direita”.

c) Uma resposta possível:

São placas amarelas de alerta ao motorista sobre o que ele encontrará mais à frente.

Por exemplo: “Rua sem Saída”, “Semáforo à frente”, “Saliência ou lombada”, “Pista escorregadia” e “Pista sinuosa à direita.”

2. Uma resposta possível:
   a) Essas placas têm formatos diferentes das demais para que possamos visualizá-las tanto frontalmente quanto posteriormente, mesmo que estejam danificadas ou mal pintadas.
   b) A placa tem o formato de um octógono e seria preciso verificar se todos os lados têm mesma medida de comprimento e se todos os ângulos internos são congruentes, ou seja, se é equilátero e equiângulo.
   c) Podemos calcular a medida de comprimento da altura desse triângulo (h), em cm:

   $90^2 = 45^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{6075} \Rightarrow h \simeq 78$, ou seja, 78 cm ou 0,78 m.

   Logo, o comprimento da altura total da sinalização será de aproximadamente 2,78 m, que correspondem a 2 m mais 0,78 m.
3. a) É uma placa de advertência.
   b) Alertar a existência de uma escola nas proximidades, com a possibilidade de circulação de crianças e adolescentes.
4. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes desenvolvam ideias relacionadas a atitudes que podem ser prejudiciais no trânsito, refletindo sobre as possíveis atitudes para uma melhor convivência em sociedade no trânsito.
5. a) Alertar sobre o uso de celulares ao andar nas ruas.
   b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes reflitam sobre o uso do celular ao andar nas ruas e como evitar acidentes, verificando a efetividade do uso de uma placa para alertar.

   Etapa 3:

   Espera-se que os estudantes pesquisem no Código de Trânsito Brasileiro, disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9503compilado.htm. Acesso em: 22 jul. 2022.

   Etapas 4 e 5: Os estudantes conduzirão, com a ajuda do professor, as discussões, a construção das placas e a promoção da campanha pelo trânsito seguro na comunidade escolar.

CAPÍTULO 10 – Vistas ortogonais e volumes

Trocando ideias – página 256

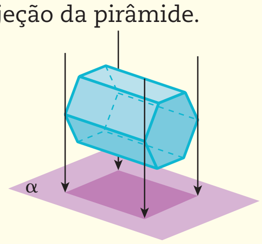
- Representando as projeções nos planos indicados, temos:

  Em α:  Em β:  Em γ: 

- Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes tragam como resposta o uso da modelagem para a produção de peças na Engenharia ou até mesmo no campo da Medicina para a criação de próteses para pessoas com deficiência.

Atividades – página 258

1. Ponto C, pois é a intersecção da reta perpendicular a α que contém P.
2. Um círculo.
3. Não, ao posicionar, por exemplo, a base paralela ao plano, obtém-se um quadrado como projeção da pirâmide.
4. Considerando que uma das faces laterais do prisma é paralelo a α, temos a seguinte representação da projeção:

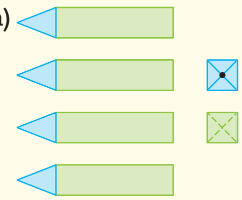


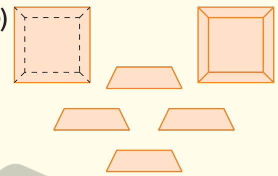
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

   a) Não, a projeção ortogonal depende da inclinação e do posicionamento do prisma.
   b) Um retângulo.

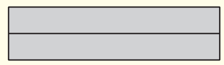
Atividades – página 260

5. Item **a**, pois representa um desnível que não existe em nenhuma vista.
6. Temos as seguintes representações.

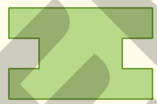
   a) 

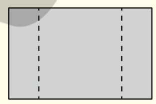
   b) 

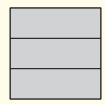
7. a) Vista ortogonal lateral, esquerda ou direita:

   b) Espera-se que os estudantes percebam que, como a lateral da peça não foi representada, há diferentes modos de desenhar uma possível vista lateral dessa peça; por exemplo, não há como saber se a lateral apresenta furos, rebaixos, dentes etc.

8. 
vista ortogonal frontal

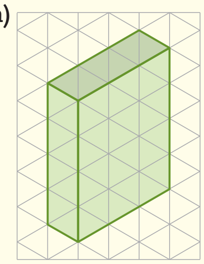

vista ortogonal superior

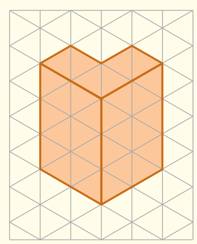

vista ortogonal lateral esquerda

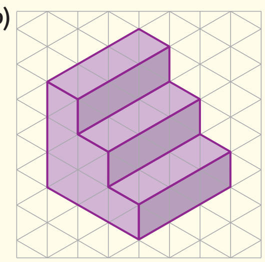
   a) As figuras que as representam são congruentes.
   b) Espera-se que os estudantes observem que obter as 6 vistas ortogonais permite a visualização completa da peça, como demonstrado no exemplo fornecido em *Observações*, na página 259, onde cada projeção é diferente.

Atividades – página 262

9. Construindo cada caso em malhas triangulares, temos:

   a) 

   c) 

   b) 

10. A partir das visões ortogonais, temos: I-D; II-C; II-A, IV-B.
11. Resposta pessoal.
12. Respostas pessoais.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Veja que interessante - página 263

Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes pesquisem diferentes obras que possam tratar a ideia de ponto de fuga. Em especial, o professor pode dedicar esse momento a visitas a museus virtuais utilizando uma sala de informática presente na escola ou pelo uso de celulares com conexão com a internet.

Atividades - página 268

13. Calculando a medida dos volumes:

a) $V = (6{,}5 \cdot 4 \cdot 5{,}3)\ \text{cm}^3 = 137{,}8\ \text{cm}^3$

b) $V = (10{,}25 \cdot 2 \cdot 2)\ \text{cm}^3 = 41\ \text{cm}^3$

c) $V = (9{,}75 \cdot 4 \cdot 2{,}8)\ \text{cm}^3 = 109{,}2\ \text{cm}^3$

14. Calculando a medida dos volumes:

a) $V = \left(\dfrac{4 \cdot 3 \cdot 12}{2}\right)\text{cm}^3 = 72\ \text{cm}^3$

b) $V = \left(\dfrac{6 \cdot 5{,}2 \cdot 8}{2}\right)\ \text{cm}^3 = 124{,}8\ \text{cm}^3$

15. **a)** $V = 32 \cdot 5\ \text{cm}^3 = 160\ \text{cm}^3$

b) $V = \dfrac{160\ \text{cm}^3}{8} = 20\ \text{cm}^3$

16. **a)** Uma possível resposta: o cilindro I tem menor medida de volume, já que tem raio da base e altura com menores medidas de comprimento em relação aos três, e o cilindro III tem a maior medida de volume, com as maiores medidas de raio da base e altura.

b) Considerando os cilindros da esquerda para a direita:

$V_{I} = (3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 3)\ \text{cm}^3 = 37{,}68\ \text{cm}^3$

$V_{II} = (3{,}14 \cdot 2^2 \cdot 5)\ \text{cm}^3 = 62{,}8\ \text{cm}^3$

$V_{III} = (3{,}14 \cdot 3^2 \cdot 5)\ \text{cm}^3 = 141{,}3\ \text{cm}^3$

17. Devemos calcular a medida da área da base desse prisma. O pentágono é formado por 5 triângulos com lado medindo 3 cm e altura medindo 2,1 cm. Ou seja:

$A_{\text{triângulo}} = \left(\dfrac{3 \cdot 2{,}1}{2}\ \text{cm}^2\right) \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = 3{,}15\ \text{cm}^2$

$A_{\text{pentagóno}} = 5 \cdot A_{\text{triângulo}} \Rightarrow 15{,}75\ \text{cm}^2$

Assim, poderemos calcular o volume desse prisma:

$V_{\text{prisma}} = (5 \cdot 15{,}75)\ \text{cm}^3 = 78{,}75\ \text{cm}^3$

18. **a)** Podemos calcular a medida do volume total desse recipiente:

$V = (36 \cdot 20 \cdot 20)\ \text{cm}^3 = 14\,400\ \text{cm}^3$

Como colocou-se água até $\frac{2}{3}$ da medida de sua altura, podemos calcular a medida do volume de água colocada fazendo:

$\frac{2}{3}$ de $14\,400\ \text{cm}^3 = \dfrac{2 \cdot 14\,400}{3}\text{cm}^3 = 9\,600\ \text{cm}^3$

b) Como o recipiente está com $\frac{2}{3}$ de sua capacidade, então ainda falta completar $\frac{1}{3}$ de sua capacidade:

$\frac{1}{3}$ de $14\,400\ \text{cm}^3 = \dfrac{14\,400}{3}\text{cm}^3 = 4\,800\ \text{cm}^3$

Logo, ainda podem ser colocados 4 800 mL de água.

19. **a)** Calculando a medida do volume de cada caixa:

$V_1 = 5\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} \cdot 20\ \text{cm} = 1\,000\ \text{cm}^3$

$V_2 = 10\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} \cdot 10\ \text{cm} = 1\,000\ \text{cm}^3$

Portanto, como as duas caixas têm medida de volume igual ou maior que 900 cm^3, Márcia pode utilizar ambas.

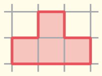
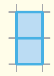
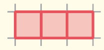
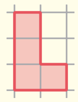
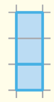
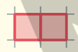
b) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: como os bombons ficam distribuídos na caixa, eles precisarão ser empilhados para ficar mais fácil de serem transportados sem serem danificados.

c) Resposta pessoal. Exemplo de informação que poderia ser acrescentada no enunciado: trocar 900 cm^3 por 1 050 cm^3.

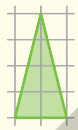
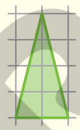
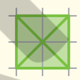
20. Resposta pessoal.

Revisão dos conteúdos deste capítulo - página 269

1.

Item	Vista ortogonal lateral esquerda	Vista ortogonal frontal	Vista ortogonal superior
a			
b			

2.

Vista ortogonal lateral esquerda	Vista ortogonal frontal	Vista ortogonal superior
		

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

3. A partir das vistas ortogonal superior e ortogonal frontal, podemos identificar cada um dos poliedros.

a) Prisma de base pentagonal.

b) Pirâmide de base hexagonal.

4. **a)** $V = 15\ \text{cm} \cdot 2{,}5\ \text{cm} \cdot 2{,}5\ \text{cm} = 93{,}75\ \text{cm}^3$

b) $V = 3{,}14 \cdot (4\ \text{cm})^2 \cdot 12\ \text{cm} = 602{,}88\ \text{cm}^3$

5. $V = (25\ \text{m} \cdot 10\ \text{m} \cdot 1{,}8\ \text{m}) = 450\ \text{m}^3$

Portanto, são necessários 450 m^3 de água para encher essa piscina.

6. **a)** $V = \dfrac{50\ \text{cm} \cdot 40\ \text{cm} \cdot 20\ \text{cm}}{2} = 20\,000\ \text{cm}^3$

b) Como $1\,000\ \text{cm}^3 = 1\ \text{L}$, então $20\,000\ \text{cm}^3 = 20\ \text{L}$

Portanto, cabem 20 L de água nesse aquário.

7. **a)** $V = 3 \cdot (1{,}2\ \text{m})^2 \cdot 1\ \text{m} = 4{,}32\ \text{m}^3$

b) Como $1\ \text{m}^3 = 1\,000\ \text{L}$, então $4{,}32\ \text{m}^3 = 4\,320\ \text{L}$.

Portano, cabem 4 320 L de água nessa caixa.

8. Como o hexágono é regular e a medida de comprimento do lado é 3 cm, podemos considerar que ele é formado por 6 triângulos equiláteros de lado medindo 3 cm; a medida da altura (*h*) coincide com o apótema desse hexágono e é dada por:

$h = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}$

Logo,

$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{3\ \text{cm} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}\ \text{cm}}{2}}{2} \Rightarrow A_{\text{triângulo}} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2$

$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\text{triângulo}} \Rightarrow A_{\text{hexágono}} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\text{cm}^2$

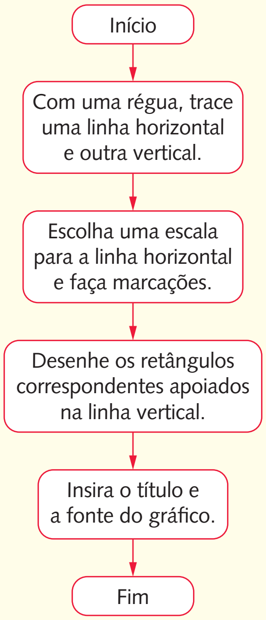
$V_{\text{prisma}} = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3 \cdot 8\ \text{cm}^3 \Rightarrow V_{\text{prisma}} = 108\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

Portanto, a medida de volume do prisma de base hexagonal é $108\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

CAPÍTULO 11 – Construção de gráficos estatísticos

Trocando ideias – página 270

- Fluxograma da esquerda: procedimento para a construção de gráficos de barras simples.
- Fluxograma da direita: procedimento para construção de gráficos de setores.
- Uma resposta possível:



Atividades – páginas 278 a 280

1. Espera-se que os estudantes respondam que um observador pode interpretar a arrecadação do 9º ano A como maior que a arrecadação do 9º ano B. Para corrigir isso, as barras devem ter a mesma medida de comprimento da base.

2. Espera-se que os estudantes não concordem com a afirmação de Ricardo. Observamos que as escalas utilizadas em cada gráfico são diferentes, então fazer uma comparação direta pode levar a equívocos como esse. A nota do 1º bimestre dos dois foi 6,0. E a nota do 4º bimestre de Rafael foi 9,0, enquanto a de Ricardo foi 8,0. Rafael foi quem teve maior evolução.

3. **a)** Observando ambos os gráficos, podemos perceber que suas amplitudes aparentes podem diferir devido à escala utilizada para representar os dados. Assim, verificando o gráfico com escala menor, temos uma diferença de aproximadamente R$ 14,00. É importante ressaltar que não podemos afirmar que a amplitude é aproximadamente R$ 15,00, já que o ponto máximo do gráfico tem ordenada menor do que R$ 1 245,00.

   b) Considerando a amplitude de aproximadamente R$ 14,00, temos:

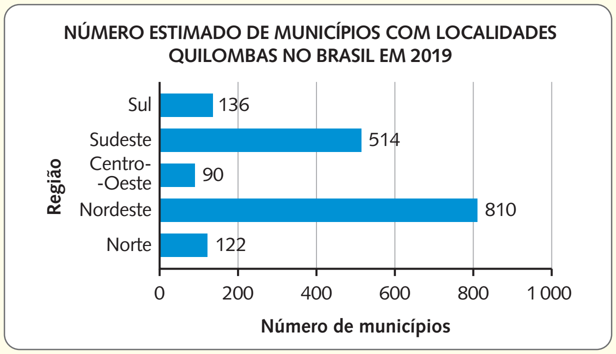
   $$1\,244 = 1\,230 \cdot P \Rightarrow P = \frac{1\,244}{1\,230} \simeq 1{,}011 = 101{,}1\%$$

   Assim, a porcentagem de aumento é de, aproximadamente, 1,1%.

   c) Espera-se que os estudantes percebam que a impressão é de que os gráficos representam situações diferentes.

   d) No gráfico da esquerda, a sensação é de que os gastos com o lanche da tarde aumentaram muito na última semana. No gráfico da direita, a sensação é de que os gastos foram praticamente constantes durante a semana.

4. **a)**



Dados obtidos em: BASE de Informações Geográficas e Estatísticas sobre os indígenas e quilombolas para enfrentamento à Covid-19. **Notas Técnicas**. Rio de Janeiro: IBGE, 2020. Volume especial

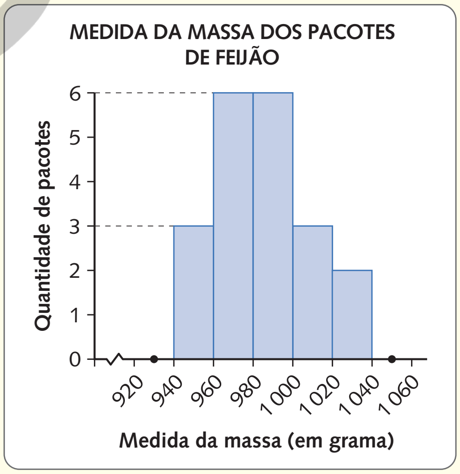
   b) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: As comunidades quilombolas resgatam a história afro-brasileira, valorizando a preservação de costumes, organizações, saberes e tradições desse segmento social.

5. Exemplo de resposta:

MEDIDA DA MASSA DOS PACOTES DE FEIJÃO

Medida da massa (em grama) (classe)	Quantidade de pacotes (frequência)
940 ⊢ 960	3
960 ⊢ 980	6
980 ⊢ 1 000	6
1 000 ⊢ 1 020	3
1 020 ⊢ 1 040	2

Dados obtidos pelo laboratório em janeiro de 2024.



Dados obtidos pelo laboratório em janeiro de 2024.

6. **a)** É um gráfico de segmentos.

   b) Foram produzidos 84 milhões de toneladas.

   c) Em 2023: 110 milhões de toneladas

   Em 2016: 75 milhões de toneladas

   Logo, teremos um aumento percentual de:

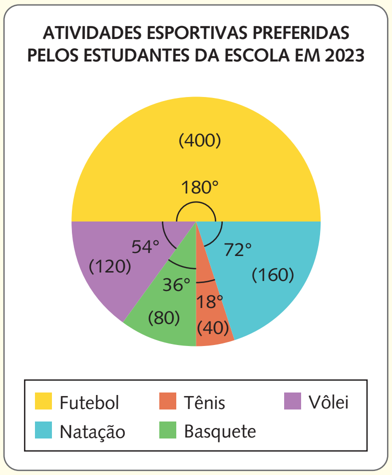
   $$\frac{110 - 75}{75} = \frac{35}{75} \simeq 0{,}4666$$

   Assim, a safra de 2023 foi, aproximadamente, 46,66% superior à safra de 2016.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

7. Exemplo de resposta:



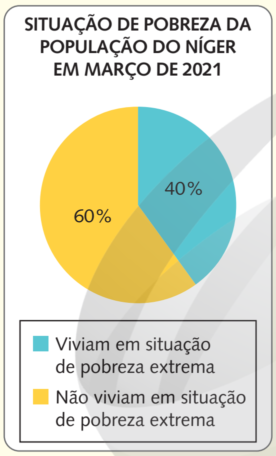
Dados obtidos pelos professores em 2023.

Lendo e aprendendo - página 282

1. **a)** O Níger fica no continente africano.
   b) É um índice que mede o desempenho dos países em relação à saúde, à educação e à renda.
   c) Condição geográfica (clima desértico e o fato de não ser banhado por nenhum mar), população vivendo em pobreza extrema e educação precária associada ao trabalho infantil.
   d) É uma escola de futebol para meninas nigerinas em que são aceitas apenas aquelas que estão matriculadas em escola.
   e) Porque muitas delas se casam antes de completar 18 anos de idade por falta de perspectivas de estudo e de emprego, ficando "presas" a tarefas domésticas.

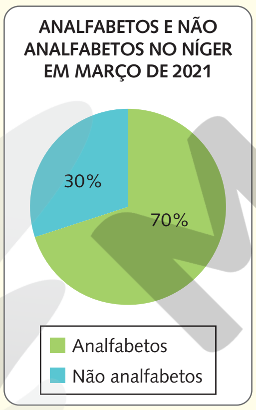
2. Exemplos de resposta:

a)



Fonte: Relatório de Desenvolvimento Humano da Organização das Nações Unidas (ONU).

b)



Fonte: Organização das Nações Unidas (ONU).

3. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes pesquisem informações a respeito do IDH de dois países e comparem suas situações, indicando possíveis razões para as diferenças entre os valores dos IDHs desses países.

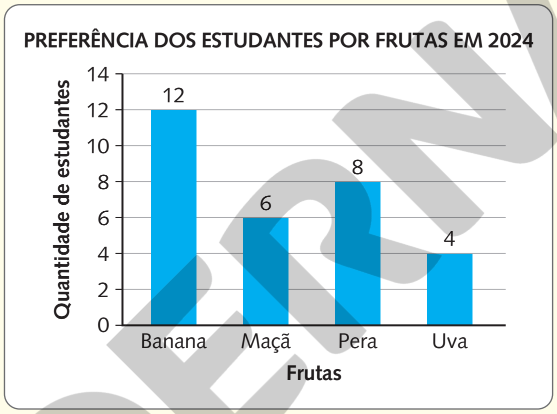
Construção de gráfico de barras em *software* de planilha eletrônica - página 284

- Sim, porque o número de cabeças de gado, em 2020, em Mato Grosso, superou 30 000 cabeças; em Rondônia, esse número ficou abaixo de 15 000 cabeças e 30 000 é o dobro de 15 000.
- Não, porque os gráficos de segmentos são utilizados para representar a variação de certo dado no decorrer do tempo, o que não ocorre com os dados da tabela presente na planilha.
- Oriente os estudantes a pesquisarem em diferentes meios de comunicação (como internet ou jornais) diferentes gráficos que possam levar a conclusões equivocadas. Eles devem observar o tipo de gráfico construído, a manchete associada e a escala utilizada, a fim de verificar se diferentes tipos de gráfico podem levar a diferentes conclusões.

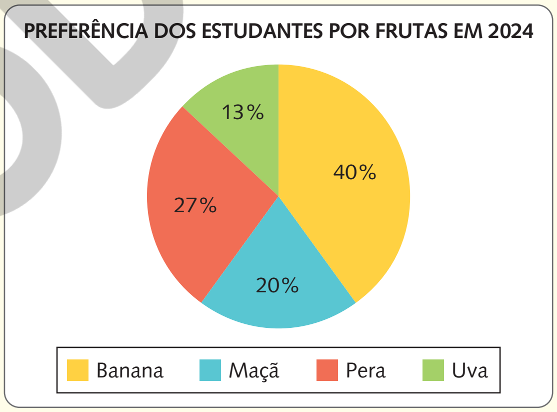
Atividades - página 285

8. Exemplos de resposta:

a)

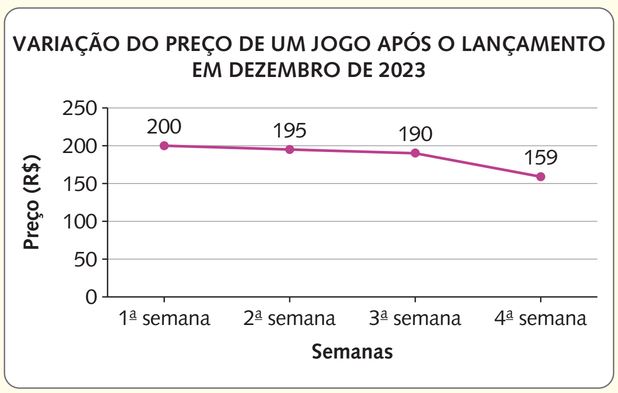


Dados obtidos pela professora em 2024.



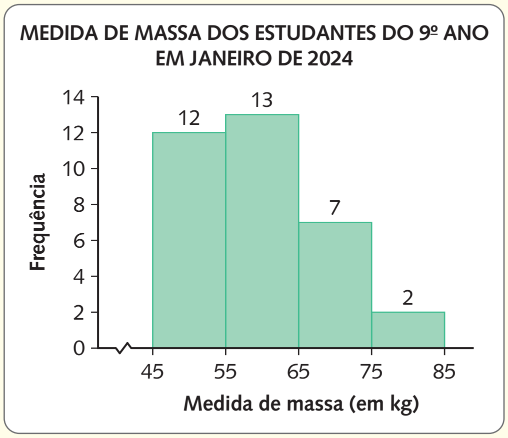
Dados obtidos pela professora em 2024.

b)



Dados obtidos por Luíza em dezembro de 2023.

c)



Dados obtidos pelo professor em janeiro de 2024.

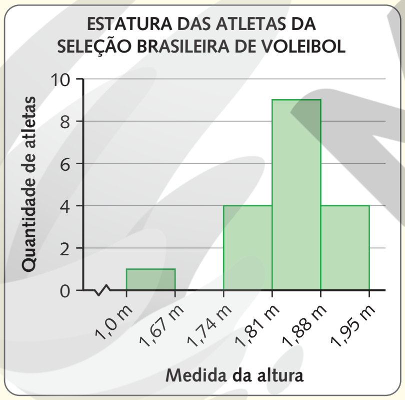
9. Resposta pessoal.

Revisão dos conteúdos deste capítulo – páginas 286 e 287

1. a)

MEDIDA DA ALTURA DAS ATLETAS BRASILEIRAS DE VOLEIBOL	
Medida da altura (em metro) (classe)	Quantidade de atletas
1,6 ⊢ 1,66	1
1,67 ⊢ 1,73	0
1,74 ⊢ 1,80	4
1,81 ⊢ 1,87	9
1,88 ⊢ 1,94	4

Dados obtidos em: https://cbv.com.br/ligadasnacoes/selecao-brasileira-feminina. Acesso em: 19 ago. 2022.



Dados obtidos em: https://cbv.com.br/ligadasnacoes/selecao-brasileira-feminina. Acesso em: 19 ago. 2022.

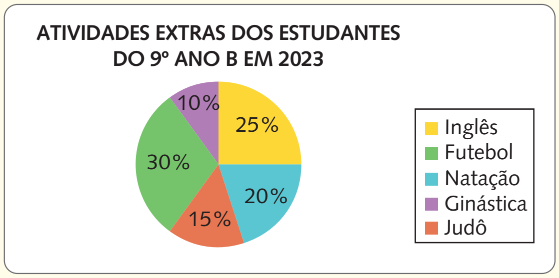
2. a) Como temos um total de 60 estudantes, as porcentagens correspondentes serão:

Inglês: $\frac{15}{60} = 25\%$ Futebol: $\frac{18}{60} = 30\%$

Natação: $\frac{12}{60} = 20\%$

Judô: $\frac{9}{60} = 15\%$ Ginástica: $\frac{6}{60} = 10\%$

b)



Dados obtidos pela professora do 9º ano B em 2023.

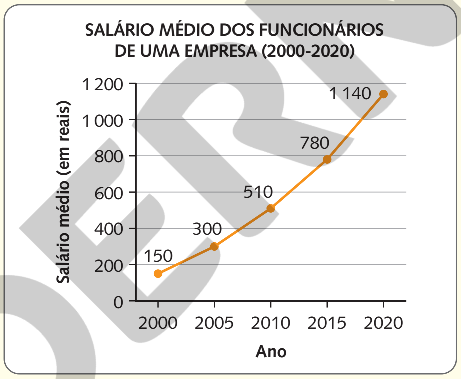
c) Exemplo de resposta: a atividade extra mais realizada pelos estudantes do 9º B é o futebol, enquanto a menos praticada é a ginástica. Os estudantes que praticam ginástica representam um terço dos que praticam futebol.

3. a) A região Nordeste.

b) As regiões Sudeste, Sul e Centro-Oeste.

c) Exemplo de resposta: gráfico de setores, porque possibilita comparar a taxa de analfabetismo entre as regiões e a taxa de analfabetismo de cada região com a taxa de analfabetismo nacional.

4. a)



Dados obtidos pelo departamento de Recursos Humanos da empresa entre 2000 e 2020.

b) Entre 2010 e 2015.

c) Respostas pessoais. Os estudantes podem verificar que, embora o valor bruto de aumento salarial seja maior a cada ano, a taxa de aumento do salário é menor; assim, caso a tendência se mantenha, o aumento de salário proporcional nos próximos anos será cada vez menor.

5. a) Considerando que o total vendido foi de 2 400 peças, teremos:

roupa feminina: $\frac{50}{100} \cdot 2\,400 = 1\,200$

roupa masculina: $\frac{10}{100} \cdot 2\,400 = 240$

roupa infantil: $\frac{15}{100} \cdot 2\,400 = 360$

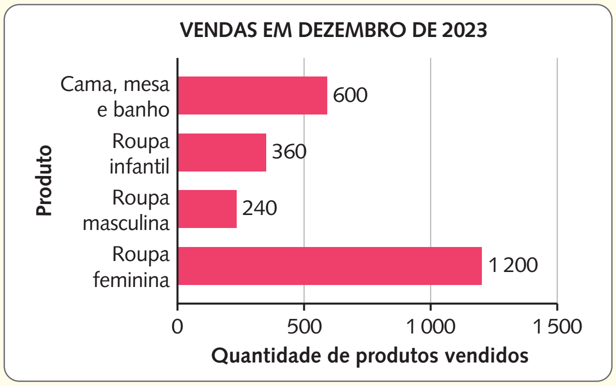
cama, mesa e banho: $\frac{25}{100} \cdot 2\,400 = 600$

Assim, construindo a tabela:

VENDAS EM DEZEMBRO DE 2023	
Tipo de produto	Quantidade de produtos vendidos
Roupa feminina	1 200
Roupa masculina	240
Roupa infantil	360
Cama, mesa e banho	600
Total	2 400

Dados obtidos pelo departamento de vendas da loja em dezembro de 2023.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

b) 

Dados obtidos pelo departamento de vendas da loja em dezembro de 2023.

c) Exemplo de resposta:

I. Os produtos mais vendidos foram as roupas femininas;

II. Os produtos menos vendidos foram as roupas masculinas;

III. As roupas femininas vendidas correspondem ao dobro dos itens de cama mesa e banho vendidas em dezembro de 2023.

6. Exemplo de resposta: espera-se que os estudantes percebam que a escala utilizada no gráfico não começa no zero, o que dá a falsa impressão de uma diferença de intenção de votos entre os candidatos maior do que é na realidade.

CAPÍTULO 12 – Probabilidade e estatística

Trocando ideias – página 288

- Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes percebam que, para entrevistar todos os idosos do país, seriam necessários muitos recursos e pessoal; assim, é realizada uma pesquisa por amostragem.
- Respostas pessoais. A proposta da questão abre espaço para discutir com os estudantes dificuldades e problemas que um indivíduo pode enfrentar ao envelhecer e como as situações podem ser amenizadas.

Atividades – página 291

1. Número de elementos do espaço amostral: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (6 elementos)
Número de elementos favoráveis ao evento: 1, 2, 3, 4 (4 elementos)
Logo, teremos:
$P(\text{número menor que } 5) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

2. Número de elementos do espaço amostral: 200 elementos
Número de elementos favoráveis ao evento: 6 elementos (quantidade de cartelas recebidas por Ana)
$P(\text{uma cartela da Ana ser sorteada}) = \frac{6}{200} = \frac{3}{100}$

3. a) Número de elementos do espaço amostral: 20 elementos
Número de elementos favoráveis ao evento: 4 elementos
$P(\text{cartão ser amarelo}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

b) Verde, pois há mais cartões dessa cor.

c) Sair um cartão vermelho, pois:
$P(\text{cartão ser vermelho}) = \frac{5}{20} = 25\%$

4. Respostas pessoais.

Atividades – página 295

5. a) Eventos independentes, pois a ocorrência de um evento não interfere na ocorrência do outro.

b) Eventos dependentes, pois a ocorrência do primeiro evento interfere na ocorrência do segundo evento.

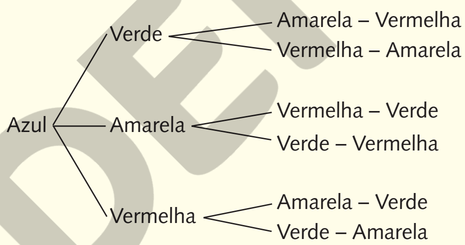
6. São eventos dependentes, já que a ficha não será devolvida. Então, fazemos:
$P(A)$: probabilidade de a primeira ficha ser o número 5.
$P(B)$: probabilidade de a segunda ficha ser o número 48.
$P(A) = \frac{1}{100}$
$P(B) = \frac{1}{99}$
Assim, a probabilidade P de a primeira ficha ser 5 e a segunda ser 48 será:
$P = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{1}{9\,900}$

7. a) $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b) $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Em ambos os casos os eventos são independentes, então não há diferença.

8. a) Suponha que o primeiro sorteado seja azul; vejamos os arranjos possíveis a partir deste sorteio:



Ou seja, são 6 possíveis arranjos se a equipe azul for a primeira sorteada. Assim, como são 4 equipes, as possibilidades de arranjo para a ordem de apresentação são $4 \cdot 6 = 24$, ou seja, 24 possibilidades.

Logo, $P = \frac{1}{24}$.

Portanto, a probabilidade de a ordem de apresentação ser: equipe amarela, equipe verde, equipe azul e equipe vermelha é $\frac{1}{24}$.

b) Vejamos a probabilidade de dois eventos:

$P(\text{sortear equipe azul}) = \frac{1}{4}$

$P(\text{sortear Rafaela}) = \frac{1}{15}$

Assim, a probabilidade P procurada será:

$P = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{60}$

Portanto, a probabilidade de ela ser a primeira sorteada é $\frac{1}{60}$.

9. Nesse caso, teremos:
$P = P(1^{a} \text{ peça ter defeito}) \cdot P(2^{a} \text{ peça ter defeito})$
Então:
$P = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$
Portanto, a probabilidade de essas peças estarem com defeito é $\frac{49}{198}$.

10. **a)** Vejamos a probabilidade de cada evento, lembrando que foram sorteados por grupo de estudo do instrumento:

$P(\text{mulher que pratica guitarra}) = \frac{14}{34} = \frac{7}{17}$

$P(\text{homem que pratica violão}) = \frac{15}{27} = \frac{5}{9}$

$P(\text{mulher que pratica bateria}) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

Assim, a probabilidade do evento solicitado será:

$P = \frac{7}{17} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{51}$

b) Vejamos a probabilidade de cada evento, lembrando que os estudantes não foram separados por instrumento de estudo:

$P(\text{mulher que pratica guitarra}) = \frac{14}{86} = \frac{7}{43}$

$P(\text{homem que pratica violão}) = \frac{15}{85} = \frac{3}{17}$

$P(\text{mulher que pratica bateria}) = \frac{15}{84} = \frac{5}{28}$

Assim, a probabilidade do evento solicitado será:

$P = \frac{7}{43} \cdot \frac{3}{17} \cdot \frac{5}{28} = \frac{15}{2\,924}$

11. Resposta pessoal.

Atividades - página 297

12. Resposta pessoal.

13. Resposta pessoal.

Atividades - página 299

14. **a)** Público: adulto.

b) Resposta pessoal.

c) Sim, devem ser considerados.

d) Resposta pessoal.

15. Resposta pessoal.

16. Resposta pessoal.

Atividades - página 301

17. **a)** Média salarial $= \frac{\text{R\$ } 3\,000{,}00 + \text{R\$ } 1\,700{,}00 + \text{R\$ } 3\,750{,}00 + \text{R\$ } 4\,000{,}00 + \text{R\$ } 2\,500{,}00}{5} = \frac{\text{R\$ } 14\,950{,}00}{5} = \text{R\$ } 2\,990{,}00$

Portanto, o salário médio é R$ 2 990,00.

b) Pode ser aplicada a moda.

c) Espera-se que os estudantes respondam que a média da medida do tempo de serviço é de 2,5 anos e que o funcionário com mais tempo de serviço trabalha há 4 anos na lanchonete e o que tem menos tempo trabalha há 1 ano e meio.

Média do tempo $= \frac{2 + 1{,}5 + 3 + 4 + 2}{5} = \frac{12{,}5}{5} = 2{,}5$

18. **a)** Resposta pessoal. Um critério possível seria estipular que as notas de [0; 2,5[correspondem a ruim; de [2,5; 5[correspondem a regular; de [5; 7,5[correspondem a bom e [7,5 a 10] correspondem a muito bom.

b) Resposta pessoal. Os dados podem ser organizados em uma tabela como a da referência.

AVALIAÇÃO DO NOVO PRODUTO PELOS CLIENTES

Notas	Conceito	Frequência
0 ⊢ 2,5	Ruim	5
2,5 ⊢ 5	Regular	13
5 ⊢ 7,5	Bom	22
7,5 ⊢⊣ 10	Muito bom	20

c) Para facilitar os cálculos, os estudantes podem organizar os valores em ordem crescente.

Moda: 5 (aparece 10 vezes)

Média $= \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 4 + 10 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 7 + 9 \cdot 8 + 6 \cdot 9 + 5 \cdot 10}{60} = \frac{358}{60} \simeq 5{,}97$

Mediana: 6

Espera-se que os estudantes concluam que o produto não agradou muito aos clientes.

19. Resposta pessoal.

20. Resposta pessoal. Para haver adesão da comunidade à pesquisa, os temas escolhidos devem ser sensíveis à comunidade e podem estar ligados à vida comunitária: instalação ou manutenção de equipamentos urbanos, horários de transporte público, abertura e fechamento de postos de saúde, fluxo na porta da escola etc.

Do mesmo modo, a escolha das perguntas para o questionário deve objetivar unicamente a informação desejada, devendo-se evitar a coleta de dados pessoais desnecessários à pesquisa.

Revisão dos conteúdos deste capítulo - páginas 302 e 303

1. a) $P(\text{ser vermelha}) = \frac{9}{25}$

   b) $P(\text{ser azul}) = \frac{16}{25}$

   c) $P(\text{ser azul, com uma azul a menos}) = \frac{15}{24} = \frac{3}{8}$

2. Número de elementos do espaço amostral: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (6 elementos)

   a) $P(\text{número par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

   b) $P(\text{número menor que 5}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

   c) $P(\text{número maior que 6}) = 0$

3. a) $P(\text{número múltiplo de 4}) = \frac{12}{50} = \frac{6}{25}$

   b) $P(\text{número divisor de 5}) = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$

   c) $P(\text{número maior que 30}) = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

4. O espaço amostral é: (cara, cara); (cara, coroa); (coroa, cara); (coroa, coroa).

   a) $P(\text{sair duas faces diferentes}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

   b) $P(\text{sair pelo menos uma cara}) = \frac{3}{4}$

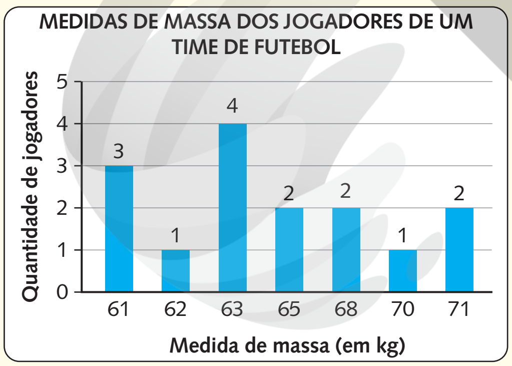
5. Pesquisa amostral, pois a censitária demandaria um gasto muito alto e seria muito trabalhosa para entrevistar todos os adolescentes brasileiros.

6. a)

Medida de massa (em kg)	Quantidade de jogadores
61	3
62	1
63	4
65	2
68	2
70	1
71	2

Dados obtidos por Jorge em 2023.

   b)



Dados obtidos por Jorge em 2023.

   c) Média $=$

   $= \frac{3 \cdot 61 + 62 + 4 \cdot 63 + 2 \cdot 65 + 2 \cdot 68 + 70 + 2 \cdot 71}{15} =$

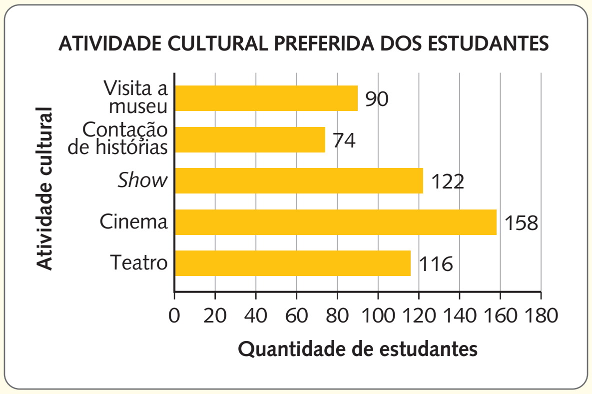
   $= \frac{975}{15} = 65$

   Moda: 63

   Mediana é 8º termo: 63

7. a) Cinema.

   b)



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pela direção da escola em janeiro de 2024.

   c) Exemplo de resposta:

   Com base nos dados apresentados podemos analisar que:

   - a atividade mais escolhida pelos estudantes foi cinema;
   - a atividade menos escolhida pelos estudantes foi contação de histórias;
   - a segunda atividade mais escolhida foi *shows*.

8. a) Média $= \frac{1\,320}{160} = 8{,}25$

   Logo, média $\simeq$ 8 anos.

   Moda: 8 anos

9. a) Média $= \frac{5\,200 + 3\,780 + 2 \cdot 2\,370 + 2 \cdot 1\,180}{8} =$

   $= \frac{18\,440}{8} = 2\,305$

   Mediana $= \frac{1\,180 + 2\,370}{2} = 1\,775$

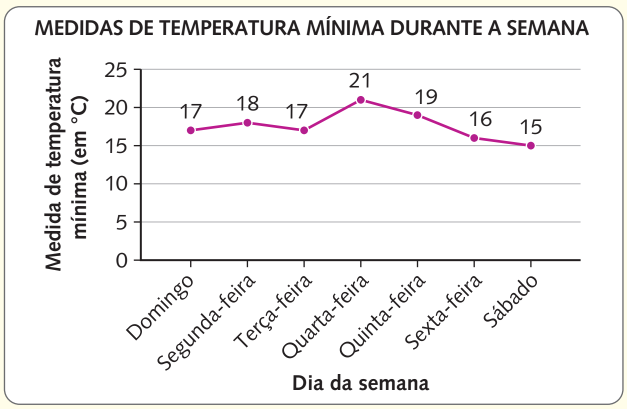
   Moda: 1 180

   b) Não alteraria a moda.

   Média $= \frac{18\,440 + 7\,480}{9} = 2\,880$

   Mediana $= 2\,370$

10. a) Uma possibilidade de resposta:



Dados obtidos por Fábio na primeira semana de 2024.

   b) Média $= \frac{18 + 17 + 21 + 19 + 16 + 15 + 17}{7} \simeq 17{,}6$

   Média $\simeq 17{,}6$ °C

   Mediana $= 17$ °C

   Moda $= 17$ °C

11. a) Pesquisa censitária, considerando que todos os estudantes, ou seja, toda a população fez a prova.

b) São 20 estudantes, pois $1 + 2 + 1 + 2 + 3 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = 20$.

$$\text{Média} = \frac{109{,}9}{20} = 5{,}495$$

c) Moda: 5,3

d) Exemplo de resposta: podemos afirmar que os estudantes não se saíram bem nesta avaliação, visto que ela valia 10 e a média foi menor que 6; a moda foi 5,3 e a maior nota foi 6,9.

É hora de extrapolar - páginas 304 a 306

1. a) Resposta pessoal.

b) Porcentagens aproximadas:

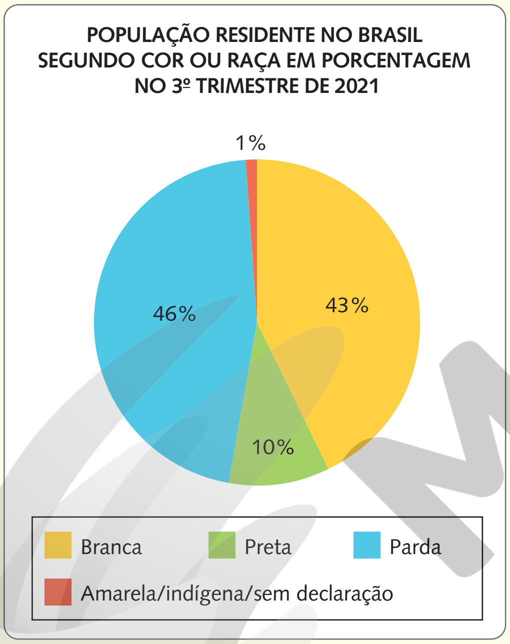
branca: $\frac{92\,029}{212\,808} \simeq 42{,}25\%$

preta: $\frac{20\,030}{212\,808} \simeq 9{,}41\%$

parda: $\frac{98\,425}{212\,808} \simeq 46{,}25\%$

amarela/indígena/sem declaração: $\frac{2\,324}{212\,808} \simeq 1{,}09\%$

c) Uma resposta possível:



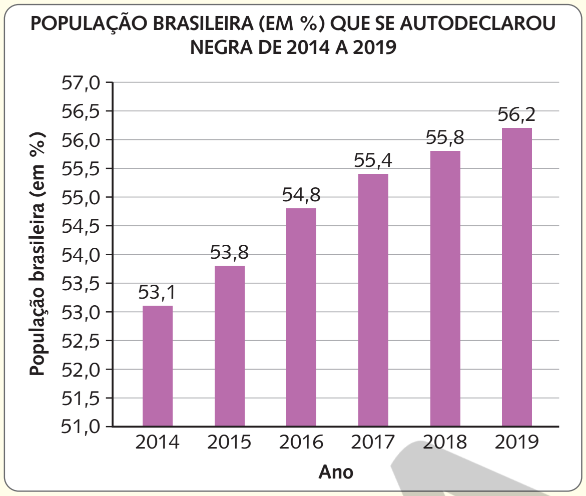
Dados obtidos em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6403. Acesso em: 19 ago. 2022

2. a) População brasileira (em %) que se autodeclarou negra de 2014 a 2019:

2014	2015	2016	2017	2018	2019
53,1	53,8	54,8	55,4	55,8	56,2

b) Resposta pessoal. Uma possibilidade: gráfico de barras verticais.

c) Resposta depende do gráfico escolhido anteriormente. Uma possibilidade:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6403. Acesso em: 17 jun. 2022

3. Resposta pessoal.

4. Itens **a)** e **b)**. Espera-se que os estudantes pesquisem as informações relacionadas a capoeira em fontes confiáveis. O professor pode indicar nesta atividade a consulta a professores de outros componentes curriculares, como História.

5. a) Pernambuco.

b) Espera-se que os estudantes identifiquem que bastaria multiplicar a medida da área da base pela medida da altura da alfaia. Lembrando que a base é um círculo e a medida de sua área é πr^2, em que r é a medida do raio desse círculo.

Comentários referentes às atividades 6 a 15.

Respostas e elaborações pessoais. Referem-se à produção de histórias em quadrinhos e gibis sobre as personalidades negras importantes para a história do Brasil. Pode-se orientar os estudantes a também incluir na produção da atividade conteúdos de Língua Portuguesa e História. Na atividade **9**, oriente os estudantes a pesquisarem ou retomarem o conteúdo caso já conheçam as características das histórias em quadrinhos, como o uso de sequências de desenhos para representar a passagem de tempo e ações. Pode ser útil para a produção da atividade introduzir o conceito de esboço sequencial, projetando as histórias e selecionando que elementos podem chamar a atenção do leitor, como as cores, o tipo de história produzida, a maneira que os quadros são dispostos na página, entre outros.

Teste seus conhecimentos

Atividades – páginas 307 a 310

1. Para determinar o valor dessa medida em quilômetro, como 1 km = 1 000 m, podemos fazer:

$62\,000\,000\,000 \text{ m} = (62\,000\,000\,000 : 1\,000) \text{ km} = 62\,000\,000 \text{ km}$

Representando esse número em notação científica, temos:

$62\,000\,000 = 6{,}2 \cdot 10^7$

Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

2. Calculando o valor da expressão $\frac{\sqrt{a} \cdot a^2}{a^{-2}}$, temos:

$$\frac{\sqrt{a} \cdot a^2}{a^{-2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^2}{a^{-2}} = \frac{a^{\frac{1}{2}+2}}{a^{-2}} = \frac{a^{\frac{5}{2}}}{a^{-2}} a^{\frac{5}{2}+2} = a^{\frac{9}{2}} = \sqrt{a^9}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

3. Para determinar o preço desse produto depois do aumento em fevereiro, primeiro vamos calcular o desconto dado em janeiro e, em seguida, o acréscimo em fevereiro.
Desconto de 5% aplicado em janeiro, em real:
$86{,}50 \cdot 0{,}95 = 82{,}175$
Acréscimo de 5% aplicado em fevereiro, em real:
$82{,}175 \cdot 1{,}05 \simeq 86{,}28$
Logo, o produto passou a custar R$ 86,28 após o acréscimo em fevereiro.
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

4. Vamos determinar os montantes que podem ser obtidos em cada uma das aplicações.
Opção A: 5% ao mês de juro simples durante dois anos.
Seja M_A o montante obtido na aplicação A.
$M_A = 1\,000 \cdot 0{,}05 \cdot 24 + 1\,000 = 2\,200$
Logo, na aplicação A, o montante obtido será R$ 2 200,00.
Opção B: 30% ao ano de juro composto durante um ano.
Seja M_B o montante obtido na aplicação B.
$M_B = 1\,000 \cdot 0{,}30 \cdot 1 + 1\,000 = 1\,300$
Logo, na aplicação B, o montante obtido será de R$ 1 300,00.
Opção C: 20% ao ano de juro composto durante dois anos.
Seja M_C o montante obtido na aplicação C.
Primeiro ano:
$M_C = 1\,000 \cdot 0{,}20 + 1\,000 = 1\,200$
Segundo ano:
$M_C = 1\,200 \cdot 0{,}20 + 1\,200 = 1\,440$
Logo, na aplicação C, o montante obtido será de R$ 1 440,00.
Organizando os montantes obtidos em ordem decrescente, temos:
$M_B < M_C < M_A$
Logo, a alternativa correta é a letra **a**.

5. O triângulo ABC e o triângulo ADE são semelhantes, assim, podemos fazer:
$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DE}$
$\frac{3}{2} = \frac{5}{DE}$
$3 \cdot DE = 10 \Rightarrow DE = \frac{10}{3}$
Logo, o segmento $\overline{DE}$ mede $\frac{10}{3}$ cm.
Portanto, a alternativa correta é a letra **d**.

6. O triângulo ABC e o triângulo BDE são semelhantes; assim, podemos escrever as relações a seguir.
$\frac{y}{8} = \frac{27}{9}$ e $\frac{x}{7} = \frac{27}{9}$
Assim, temos:
$\frac{y}{8} = \frac{27}{9}$
$9 \cdot y = 216 \Rightarrow y = 24$
$\frac{x}{7} = \frac{27}{9}$
$9 \cdot x = 189 \Rightarrow x = 21$
Logo, $x = 21$ e $y = 24$.
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

7. Desenvolvendo a expressão $(a-b)^2 + 2(a+b)^2 - (a-b)$, temos:
$(a-b)^2 + 2(a+b)^2 - (a-b) =$
$= a^2 - 2ab + b^2 + 2(a^2 - 2ab + b^2) - a + b =$
$= a^2 - 2ab + b^2 + 2a^2 + 4ab + 2b^2 - a + b =$
$= 3a^2 + 2ab + 3b^2 - a + b$
Portanto, a alternativa correta é a letra **d**.

8. Para determinar a medida de volume da caixa, vamos multiplicar a medida de comprimento, a medida da largura e a medida da largura da caixa montada.
Medida de comprimento da caixa: $20 - 2x$
Medida de largura da caixa: $20 - 2x$
Medida da altura da caixa: x
$V_{caixa} = (20-2x) \cdot (20-2x) \cdot x = (20-2x)^2 \cdot x$
Logo, a expressão algébrica que representa a medida de volume da caixa é $(20-2x)^2 \cdot x$.
Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

9. Seja V o valor da conta, em reais, x a quantidade de quilowatts-hora consumidos e 95,40 (em real) a tarifa fixa, podemos escrever a seguinte função:
$V = 95{,}40 + 0{,}38x$
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

10. Sabendo que as coordenadas $\left(1, \frac{10}{3}\right)$ pertencem ao gráfico da função $f(x) = 4x - \frac{k}{3}$, vamos substituir os valores de x e $f(x)$ para determinar o valor de k.
Para $x = 1$ e $f(x) = \frac{10}{3}$, temos:
$\frac{10}{3} = 4 \cdot 1 - \frac{k}{3}$
$10 = 12 - k \Rightarrow k = 2$
Logo, o valor de k é 2.
Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

11. Seja x a medida da distância percorrida e considerando um tempo fixo de 5 horas, $y = \frac{1}{5}x$ representa a função da velocidade média do carro.
Para verificar qual curva do gráfico corresponde a essa função, vamos determinar alguns pontos que pertencem ao gráfico. Observe o quadro a seguir.

x	$y = \frac{1}{5}x$
0	$\frac{1}{5} \cdot 0 = 0$
5	$\frac{1}{5} \cdot 5 = 1$
10	$\frac{1}{5} \cdot 10 = 2$

Logo, a curva do gráfico referente à função g representa a medida da velocidade média em função da medida da distância percorrida.
Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

12. Seja c a medida de comprimento do retângulo e h a medida de altura. Pelo enunciado, temos a seguinte relação:
$c + h = 12 \Rightarrow h = 12 - c$
Para calcular a medida da área de um retângulo, devemos multiplicar a medida de altura pela medida de comprimento.
$A = (12 - c) \cdot c$
$A = 12c - c^2 = -c^2 + 12c$
Portanto, a alternativa correta é a letra **a**.

13. Para verificar qual gráfico corresponde à função quadrática $f(x) = -x^2 + 4x$, vamos determinar alguns pontos que pertencem ao gráfico. Observe o quadro a seguir.

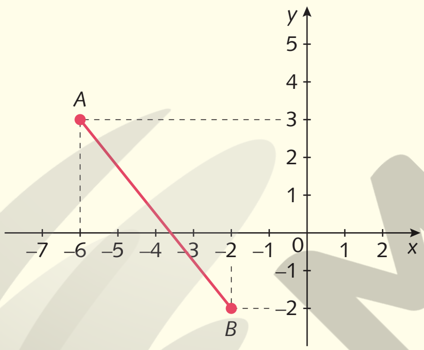
x	$f(x) = -x^2 + 4x$
-4	$-(-4)^2 + 4 \cdot (-4) = -16 - 16 = -32$
-2	$-(-2)^2 + 4 \cdot (-2) = -4 - 8 = -12$
0	$-0^2 + 4 \cdot 0 = 0$
2	$-(2)^2 + 4 \cdot (2) = -4 + 8 = 4$
4	$-(4)^2 + 4 \cdot (4) = -16 + 16 = 0$

Logo, de acordo com as alternativas, o gráfico do item **c** corresponde à função quadrática f.
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

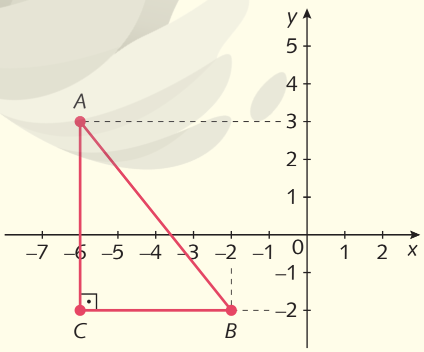
14. O valor de máximo de uma função é obtido para $x_v = \frac{-b}{2a}$.
Para a função $f(x) = -2x^2 - 18x + 20$, temos:
$a = -2; b = -18; c = 20$
$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-18)}{2 \cdot (-2)} = \frac{18}{-4} = -4{,}5$
Substituindo $x = -4{,}5$ na função $f(x) = -2x^2 - 18x + 20$.
$f(x_v) = -2(-4{,}5)^2 - 18(-4{,}5) + 20 = -40{,}5 + 81 + 20 = 60{,}5$
Logo, o valor máximo da função real $f(x) = -2x^2 - 18x + 20$ é 60,5.
Portanto, a alternativa correta é a letra **d**.

15. Como os triângulos têm a mesma tangente em relação a um ângulo agudo correspondente, temos:
$\frac{15}{x + 20} = \frac{10}{2x}$
$30x = 10x + 200$
$20x = 200 \Rightarrow x = 10$
Seja y a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo maior, aplicando o teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos:
$y^2 = (20 + 10)^2 + 15^2$
$y^2 = 30^2 + 15^2$
$y^2 = 900 + 225$
$y = \sqrt{1\,125}$
Portanto, a alternativa correta é a letra **a**.

16. Atribuindo os pontos $A(-6, 3)$ e $B(-2, -2)$ ao plano cartesiano, temos:

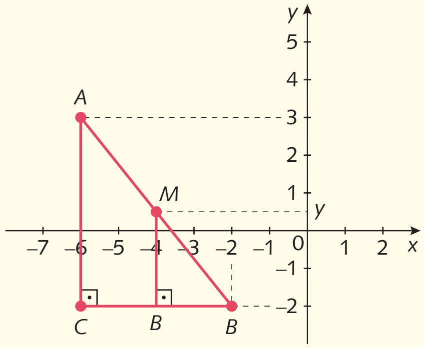


Podemos traçar segmentos perpendiculares aos eixos para formar um triângulo retângulo:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, vamos considerar M, o ponto médio de $\overline{AB}$, e o ponto D, pertencente a $\overline{AC}$, de modo que AMD também seja um triângulo retângulo.



Pelo caso AA, com o ângulo reto e o ângulo $\widehat{A}$ em comum, os triângulos BMD e BCA são semelhantes.
Logo, as medidas de comprimento de seus lados são proporcionais. Desse modo, podemos escrever:
$\frac{BA}{BM} = \frac{BC}{BD}$ (I)
Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, então:
$\frac{BA}{2} = BM \Rightarrow BA = 2BM$ (II)
Substituindo (II) em (I), obtemos:
$\frac{2BM}{BM} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow BC = 2BD$
Sabemos que: $BC = -6 - (-2)$ e $BD = x - (-2)$. Logo:
$-6 - (-2) = 2\,(x - (-2))$
$-4 = 2x + 4$
$x = -4$
Para determinar y, podemos escrever:
$\frac{BA}{BM} = \frac{AC}{MD} \Rightarrow \frac{2BM}{BM} = \frac{AC}{MD} \Rightarrow AC = 2MD$
Como $AC = 3 - (-2)$ e $MD = y - (-2)$, então:
$3 - (-2) = 2(y - (-2))$
$3 + 2 = 2(y + 2)$
$5 = 2y + 4$
$y = 0{,}5$
Assim, concluímos que as coordenadas do ponto médio M são $(-4; 0{,}5)$.
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

17. A medida da abertura de um ângulo inscrito é igual à metade da medida da abertura do ângulo central correspondente. De acordo com os dados do enunciado, podemos fazer a seguinte relação:
$3x - 115° = 2\left(\frac{2}{3}x - 20°\right)$
$3x - 115° = \frac{4}{3}x - 40°$
$9x - 345° = 4x - 120°$
$5x = 225° \Rightarrow x = 45°$
Para determinar a medida da abertura do ângulo central, vamos substituir $x = 45°$ na expressão $3x - 115°$:
$3 \cdot 45° - 115° = 135° - 115° = 20°$
Logo, a medida de abertura do ângulo central é 20°.
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

18. Seja l a medida do comprimento do lado de um triângulo inscrito em uma circunferência. Para determinar esse valor, podemos utilizar a seguinte relação:
$l = r\sqrt{3}$, em que r é a medida do raio da circunferência
$l = 2\text{ m}\,\sqrt{3}$
$l = 2 \cdot 1{,}7\text{ m} \Rightarrow l = 3{,}4\text{ m}$
A quantidade de fita necessária corresponde ao perímetro desse triângulo equilátero.
$3{,}4\text{ m} \cdot 3 = 10{,}2\text{ m}$
Logo, serão necessários 10,2 metros de fita para delimitar o espaço.
Portanto, a alternativa correta é a letra **d**.

19. Seja l a medida do comprimento do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência. Para determinar esse valor, podemos utilizar a seguinte relação:

$l = r\sqrt{2}$, em que r é a medida do raio da circunferência

$l = 20 \text{ cm } \sqrt{2} = 20\sqrt{2} \text{ cm}$

Para determinar a medida de área desse quadrado, podemos calcular o produto da medida de comprimento dos lados.

$20\sqrt{2} \text{ cm} \cdot 20\sqrt{2} \text{ cm} = 400 \cdot 2 \text{ cm}^2 = 800 \text{ cm}^2$

Logo, a medida de área desse quadrado é 800 cm².

Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

20. Seja a a medida do comprimento do apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência. Para determinar esse valor, podemos utilizar a seguinte relação:

$a = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, em que r é a medida do raio da circunferência

$$a = \frac{\frac{9\sqrt{2} \text{ cm}}{2}\sqrt{2}}{2}$$

$$a = \frac{9}{2} \text{ cm}$$

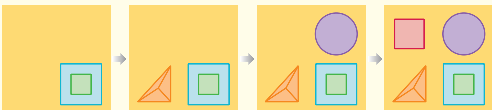
Logo, a medida do comprimento do apótema é $\frac{9}{2}$ cm.

Portanto, a alternativa correta é a letra **a**.

21. Um prisma reto de base hexagonal regular tem as faces laterais com formato retangular e suas bases com formato de hexágono regular. Analisando as alternativas, podemos concluir que a única figura que não pode ser a projeção ortogonal que Laís desenhou é um triângulo.

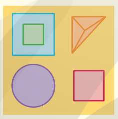
Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

22. Observando as peças sobre a mesa retangular, podemos reproduzir as vistas ortogonais de cada sólido para determinar qual esboço representa a fotografia.



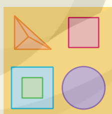
A figura da alternativa **b** corresponde à reprodução obtida. Vamos verificar as outras alternativas, posicionando o sólido composto de dois cubos nas posições indicadas nos esboços representados em cada uma delas para verificar se podem ser fotografias de outros ângulos de visão.

Alternativa **a**:



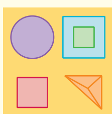
Obtemos uma representação diferente do que a mostrada na alternativa **a**.

Alternativa **c**:



Obtemos uma representação diferente do que a mostrada na alternativa **c**.

Alternativa **d**:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Obtemos uma representação diferente do que a mostrada na alternativa **d**.

Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

23. Para determinar qual recipiente Evandro pode utilizar, vamos calcular a medida de volume de cada um deles.

Cálculo da medida do volume do recipiente com formato de paralelepípedo:

$V_A = 2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow V_A = 40 \text{ cm}^3$

Cálculo da medida do volume do recipiente com formato de prisma de base triangular:

$$V_B = \frac{2 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}}{2} \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow V_B = 20 \text{ cm}^3$$

Cálculo da medida do volume do recipiente com formato de cilindro:

$V_C = 3{,}14 \cdot (2 \text{ cm})^2 \cdot 10 \text{ cm} \Rightarrow V_C = 125{,}6 \text{ cm}^3$

Como 1 cm³ = 1 mL, então, 35 cm³ = 35 mL.

Logo, Evandro pode utilizar os recipientes A ou C.

Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

24. Sabendo o total de entrevistados, com base no gráfico de setores é possível determinar o número de pessoas para cada preferência de votos. Obtendo esses dados, para fazer uma comparação visual e representar esses dados de maneira prática, o gráfico de barras é o mais adequado de acordo com as alternativas apresentadas.

Portanto, a alternativa correta é a letra **b**.

25. Analisando as alternativas, é possível observar que o histograma é o tipo de gráfico mais adequado para representar os dados coletados por Gabriela, pois é possível representar uma distribuição de frequências em classes de mesma amplitude, o que facilita a leitura dos dados.

Portanto, a alternativa correta é a letra **d**.

26. Se a probabilidade de retirar uma bola preta dessa urna é 0,6, a probabilidade de retirar uma bola branca é 1 – 0,6, ou seja, 0,4. Como há 10 bolas nessa urna, podemos concluir que há 6 bolas pretas e 4 bolas brancas.

A probabilidade de retirar uma bola branca e, em seguida, uma bola preta é dada por:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **a**.

27. Vamos calcular cada uma dessas medidas de tendência central para os dados anotados por Ismael.

Cálculo da média aritmética:

$$\frac{4+1+0+8+5+8}{6} = \frac{26}{6} \simeq 4{,}33$$

A moda corresponde ao valor de maior frequência.

Logo, nesse caso, 8 é a moda desse conjunto de dados.

Para determinar a mediana, vamos organizar os dados em ordem crescente:

0, 1, 4, 5, 8, 8

Como temos um número par de dados, vamos calcular a média aritmética dos valores centrais.

$$\frac{4+5}{2} = 4{,}5$$

Logo, a média, a mediana e a moda desse conjunto de dados podem ser relacionadas por:

média < mediana < moda

Portanto, a alternativa correta é a letra **c**.

CONHEÇA COMO SÃO FEITAS AS ORIENTAÇÕES NA REPRODUÇÃO COMENTADA DAS PÁGINAS DO *LIVRO DO ESTUDANTE*

A seguir, detalhamos como são feitas as orientações específicas, página a página, nesta parte do *Manual do Professor* que tem formato em U (formato que se assemelha à letra U).

BNCC

Identificação de todas as competências gerais, competências específicas e habilidades desenvolvidas nos tópicos ou seções.

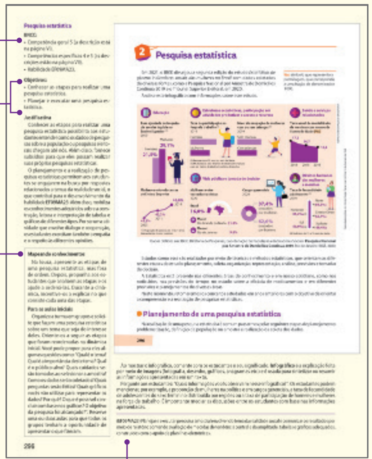
Objetivos e justificativas

Objetivos desenvolvidos no tópico e justificativa da pertinência desses objetivos.

Mapeando conhecimentos

Sugestões de dinâmicas que permitem diagnosticar os conhecimentos prévios dos estudantes e de como conduzir as aulas iniciais com base nesses diagnósticos.

Reprodução das habilidades da BNCC



Temas contemporâneos transversais

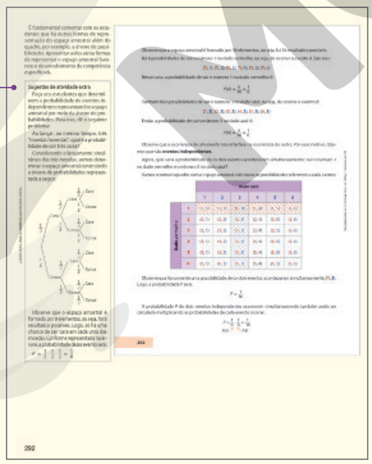
Identificação dos temas contemporâneos transversais (TCTs) trabalhados no tópico ou na seção.

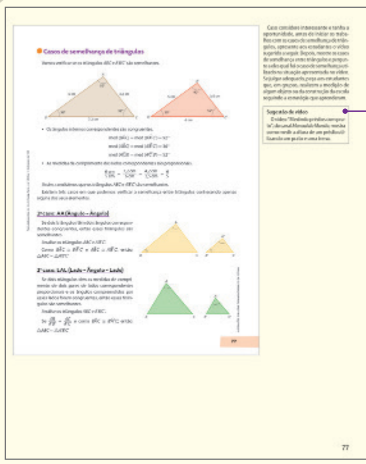
Comentários

Orientações específicas referentes ao conteúdo do *Livro do Estudante*.

Sugestão de atividade extra

Propostas de atividades que complementam e/ou ampliam a proposta das atividades presentes no *Livro do Estudante*.





Sugestão de vídeos

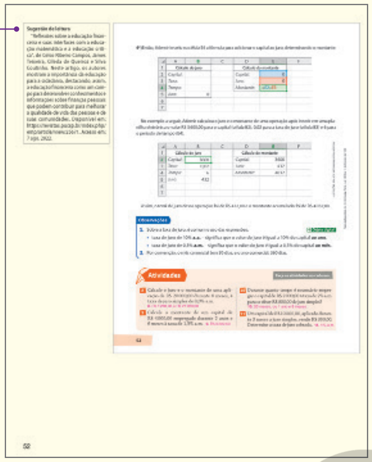
Sugestões de vídeos que complementam assuntos abordados nos capítulos.

Sugestão de trabalho interdisciplinar

Indicações de trabalho interdisciplinar com orientações de como a Matemática pode se articular com outras áreas do conhecimento.

Sugestão de leitura

Sugestões de livros ou artigos que contribuem para o conhecimento do professor.

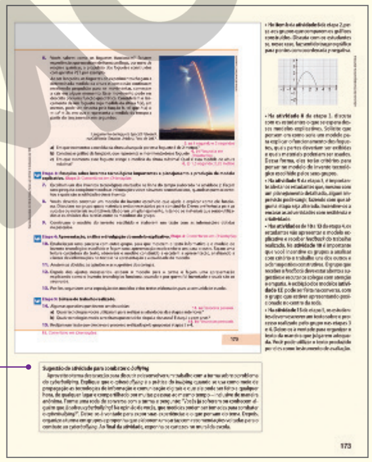


Sugestão proposta para a promoção da saúde mental dos estudantes

Propostas de atividades relacionadas aos contextos explorados nos capítulos e que podem promover a saúde mental dos estudantes.

Sugestão de atividade para combater o *bullying*

Propostas de atividades que visam combater os diversos tipos de violência, especialmente o *bullying*.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS COMENTADAS

AGUIAR, E. V. B. As novas tecnologias e o ensino-aprendizagem. **Vértices**, Campos dos Goytacazes, RJ, v. 10, n. 1/3, jan./dez., 2008.

O artigo propõe analisar o que é necessário mudar nas salas de aula com a utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs).

ALVES, Flora. ***Gamification*: como criar experiências de aprendizagem engajadoras**: um guia completo: do conceito à prática. São Paulo: DVS Editora, 2015.

Este livro oferece ao leitor a oportunidade para que conheça ou se aprofunde no tema e também funciona como um guia prático por meio do qual será incentivado a colocar em prática aquilo que aprendeu criando suas próprias propostas de aprendizagem gamificadas. Também são encontrados subsídios para identificar os tipos de *gamification* existentes e escolher o mais conveniente para cada caso.

BACICH, L.; MORAN, J. (org.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora**: uma abordagem teórico-prática. Porto Alegre: Penso, 2018.

Coletânea de artigos que apresenta reflexões teóricas e relatos de experiência de trabalho em sala de aula em torno da sala de aula invertida, do ensino personalizado, dos espaços de criação digital, da rotação por estações e do ensino híbrido. A obra é uma introdução às metodologias ativas aplicadas à inovação do ensino e aprendizagem, fundamentais ao trabalho em sala de aula na atualidade.

BACICH, L; TANZI NETO, A.; TREVISAN, F. M. **Ensino híbrido**: personalização e tecnologia na educação. Porto Alegre: Penso, 2015.

Este livro apresenta aos educadores possibilidades de integração das tecnologias digitais ao currículo escolar, de forma a alcançar uma série de benefícios no dia a dia da sala de aula, como maior engajamento dos estudantes no aprendizado e melhor aproveitamento do tempo do professor para momentos de personalização do ensino por meio de intervenções efetivas.

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas**: estimulando o potencial dos estudantes por meio da Matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

Os textos deste livro contribuem para a aplicação em sala de aula de uma Matemática mais significativa e conectada com o cotidiano dos estudantes, permitindo que ela seja acessível a todos.

BRASIL. **Lei 10.436, de 24 de abril de 2002**. Dispõe sobre a Língua Brasileira de Sinais – Libras e dá outras providências. Brasília, DF: Congresso Nacional, 2002.

Lei que institui a Língua Brasileira de Sinais (Libras) como meio legal de comunicação e expressão das pessoas com deficiência auditiva.

BRASIL. **Lei 13.146, de 6 de julho de 2015**. Institui a Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência (Estatuto da Pessoa com Deficiência). Brasília, DF: Congresso Nacional, 2015.

A Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência é um conjunto de normas destinadas a assegurar e promover, em igualdade de condições, o exercício dos direitos e liberdades fundamentais das pessoas com deficiência, visando à sua inclusão social e a cidadania.

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb)**. Brasília, DF: Inep, 2020. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb. Acesso em: 20 jul. 2022.

O *site* traz informações sobre o Saeb, permitindo conhecer as matrizes de referências e escalas, os resultados, os testes e os questionários, entre outros relativos a essas avaliações.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018.

A Base Nacional Comum Curricular é o atual documento norteador da educação brasileira. Para os professores que ensinam Matemática é recomendável a leitura de alguns pontos: a introdução do documento, na qual são apresentados os fundamentos pedagógicos, destacando as competências gerais da Educação Básica, os marcos legais e os fundamentos. A área da Matemática merece uma leitura atenta no que se refere às competências específicas para o Ensino Fundamental e às considerações sobres as cinco unidades temáticas (Número, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística), bem como os objetos de conhecimento e as habilidades envolvidas em cada uma delas.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas Contemporâneos Transversais**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 20 jul. 2022.

O documento faz uma retomada dos temas transversais desde 1997 até a atualidade, subsidiando sua colocação na prática da sala de aula.

CAVALCANTE, M. **Interdisciplinaridade**: um avanço na educação. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/249/interdisciplinaridade-um-avanco-na-educacao?gclid=CjwKCAjw3cSSBhBGEiwAVII0Z5uhBJ1J1zcM1f22DSxJBMRCG9WgUgTVtrW8K94zS6E368mOw9GAMxoClU4QAvD_BwE. Acesso em: 20 jul. 2022.

O artigo mostra como integrar diferentes áreas do conhecimento e permitir o trabalho interdisciplinar. Traz três exemplos de projetos interdisciplinares de três diferentes realidades.

COSTA, M. S.; ERICIEIRA, T. B. e ALLEVATO, N. S. G. **Reflexões acerca do currículo de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental à luz da interdisciplinaridade de acordo com a BNCC**. Disponível em: https://cdn.congresse.me/i6rpae4feavg1op3lyi7lstj7xzp. Acesso em: 20 jul. 2022.

O artigo reflete sobre o currículo de Matemática nos Anos Finais na perspectiva da interdisciplinaridade a partir de uma pesquisa bibliográfica de natureza qualitativa.

DAYRELL J. (org.). **Por uma pedagogia das juventudes**: experiências educativas do Observatório da Juventude da UFMG. Belo Horizonte: Mazza Edições, 2016.

Relato das experiências de educadores e pesquisadores do Observatório da Juventude da UFMG (OJ), um grupo de pesquisa, ensino e extensão universitária focado em construir um olhar sobre os processos educativos juvenis. O livro reafirma a utopia de que é possível construir processos educativos que sejam efetivamente dialógicos, fundados em encontros inter e entre gerações.

DISKIN, L; ROIZMAN, L. G. **Paz, como se faz?** semeando cultura de paz nas escolas. Brasília: Unesco, Associação Palas Athena, Fundação Vale, 2008.

Este livro, destinado a escolas, professores e lideranças da sociedade civil, tem o objetivo de disseminar as sementes da paz, ampliando e fortalecendo a construção de uma sociedade baseada na não violência.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

Este livro busca introduzir a história da Matemática aos estudantes de graduação dos cursos superiores dessa disciplina. Assim, além da narrativa histórica, há muitos expedientes pedagógicos visando assistir, motivar e envolver o estudante.

FUNDAÇÃO ITAÚ SOCIAL; INSTITUTO REÚNA. **Mapas de foco da BNCC Ensino Fundamental**: matemática. São Paulo: Instituto Reúna, [2020?].

Este documento apresenta uma seleção de habilidades focais para cada ano do Ensino Fundamental de acordo com a BNCC. O objetivo do documento é ajudar a orientar a flexibilização curricular e auxiliar a seleção dos conteúdos que podem ser priorizados diante de situações extremas, como a pandemia de coronavírus.

LEMOV, D. **Aula nota 10:** 49 técnicas para ser um professor campeão de audiência. São Paulo: Da Boa Prosa; Fundação Lemann, 2011.

As técnicas trazidas são resultados de pesquisas e observação em salas de aula, nas quais os professores faziam a diferença para os estudantes. O autor mapeou as técnicas capazes de modificar o aprendizado nas turmas.

MAINGAIN, A.; DUFOUR, B. **Abordagens didáticas da interdisciplinaridade**. Lisboa: Instituto Piaget, 2002.

O livro propõe uma reflexão a respeito das atividades interdisciplinares. Investiga também as condições favoráveis para a transferência de ferramentas de uma disciplina para outra (a transdisciplinaridade).

MORAN, J. **Metodologias ativas de bolso**: como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda. São Paulo: Editora do Brasil, 2019.

O livro analisa como os estudantes podem aprender de forma ativa, simplificada e profunda, além de tratar da urgência de implementar metodologias que viabilizem esse aprendizado. Nesse sentido, as metodologias ativas constituem opções pedagógicas para envolver os estudantes no aprendizado pela descoberta, pela investigação ou pela resolução de problemas por meio de uma visão de escola como comunidade de aprendizagem, na qual é importante a participação de todos: professores, gestores, estudantes, familiares e cidadãos.

MORAN, J. M. **A educação que desejamos**: novos desafios e como chegar lá. 5. ed. Campinas: Papirus, 2009.

O autor apresenta um paralelo entre a educação que temos e a que desejamos, mostrando as tendências para um novo modelo de ensino. A obra analisa principalmente as mudanças que as tecnologias trazem para a educação.

MORAN, J. M.; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas Tecnologias e mediação pedagógica**. 21 ed. Campinas: Papirus, 2013

O livro procura expandir os diálogos e as análises sobre investimentos e utilizações tecnológicas em educação com a perspectiva de construir novas propostas.

NACARATO, A.; SOUZA, D.; BETERELLI, K. **Entrecruzando vozes e olhares**: letramentos, avaliações externas e cotidiano escolar. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro é um convite à reflexão sobre o letramento matemático e as avaliações externas. É o resultado do trabalho de pesquisa do projeto Observatório da Educação (Obedeuc) em uma escola pública. Mostra o trabalho colaborativo entre docentes pesquisadores, mestrandos da universidade e docentes da escola básica na sua compreensão pela temática.

NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org). **Indagações, reflexões e práticas em leituras e escritas na educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2013.

O livro consiste em uma coletânea de textos que reúnem subsídios teóricos e práticos relativos às interfaces entre a educação matemática e as práticas em leituras e escritas, perpassando a Educação Básica e o ensino superior.

NOGUEIRA, N. R. **Pedagogia dos projetos**: uma jornada interdisciplinar rumo ao desenvolvimento das múltiplas inteligências. 7. ed. São Paulo: Érica, 2010.

Este livro pretende apresentar a dinâmica de trabalho com projetos, levando em consideração as questões de conteúdo, os problemas de aprendizagem, a interdisciplinaridade, entre outros assuntos, de modo a romper com a visão simplista com que os projetos têm sido encarados na escola.

PAVÃO, A. C. O.; PAVÃO, S. M. O. (org.) **Metodologias ativas na educação especial/inclusiva**. Santa Maria, RS: FACOS-UFSM, 2021.

Este livro apresenta experiências de práticas de ensino envolvendo metodologias ativas de aprendizagem, com o objetivo de auxiliar professores que atuam em Escolas Inclusivas e Sala de Recursos Multifuncionais.

SANTOS, V. O que são metodologias ativas e como elas favorecem o protagonismo dos alunos. **Nova Escola**, 8 set. 2021. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/20630/especial-metodologias-ativas-o-que-sao-as-metodologias-ativas-e-como-funcionam-na-pratica. Acesso em: 20 jul. 2022.

O artigo, além de definir o que são metodologias ativas, traz experiências práticas para colocá-las em ação na sala de aula e aponta as principais estratégias a elas referentes para colocar o estudante como protagonista do processo de ensino e aprendizagem.

TORNELLO, D. **Portfólio**: pra que te quero? São Carlos: Pedro & João Editores, 2022.

O livro traz reflexões relativas à avaliação que possibilita ao professor ressignificar sua relação com os instrumentos avaliativos e suas formas de registro.

UNESCO. **Violência escolar e *bullying***: relatório sobre a situação mundial. Brasília, DF: Unesco, 2019.

Relatório elaborado pela Unesco e pelo Instituto de Prevenção à Violência Escolar da Universidade de Mulheres Ewha, para o Simpósio Internacional sobre Violência Escolar e *Bullying*, realizado de 17 a 19 de janeiro de 2017, em Seul (República da Coreia). Seu objetivo é fornecer um panorama dos dados mais recentes disponíveis sobre a natureza, a abrangência e o impacto da violência escolar e do *bullying*, bem como sobre as iniciativas que abordam o problema.

WING, J. Pensamento computacional. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponivel em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711. Acesso em: 20 jul. 2022.

Este artigo foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico *Communications of the ACM*, em março de 2006. Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem ter para atuar na sociedade moderna.

ÊNIO SILVEIRA
Engenheiro mecânico pela Universidade Federal do Ceará.
Engenheiro eletricista pela Universidade de Fortaleza.
Diretor de escola particular.
Autor de obras didáticas de Matemática.

Desafios da Matemática com Ênio Silveira

9º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

1ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação editorial: Mara Regina Garcia Gay, Mateus Coqueiro Daniel de Souza
Edição de texto: Carlos Eduardo Marques, Daniel Vitor Casartelli Santos, Mateus Coqueiro Daniel de Souza, Paulo César Rodrigues dos Santos
Assistência editorial: Thaís Marinho Ramalho de Souza Garcia
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Bruno Tonel, Noctua Art, Vinícius Rossignol Felipe
Capa: Douglas Rodrigues José, Bruno Tonel, Daniela Cunha, Apis Design
Foto: *Tablet* e estetoscópio.
IAN HOOTON/Getty Images
Coordenação de arte: Wilson Gazzoni Agostinho
Edição de arte: Natália Demuri Manoel
Editoração eletrônica: Teclas Editorial
Coordenação de revisão: Elaine C. del Nero
Revisão: Beatriz Simões, Denise de Almeida, Desirée Aguiar, ReCriar Editorial, Renato da Rocha, Salete Brentan
Coordenação de pesquisa iconográfica: Flávia Aline de Morais
Pesquisa iconográfica: Pâmela Nogueira
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Silveira, Ênio
Desafios da matemática com Ênio Silveira : 9º ano. -- 1. ed. -- São Paulo : Moderna, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-16-13558-4

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

22-114743 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

A imagem da capa mostra um *tablet* e um estetoscópio. Dados estatísticos e gráficos estão presentes no cotidiano de diferentes profissões. No caso dos médicos, para receitar medicamentos ou recomendar tratamentos, é preciso analisar dados e gráficos de exames realizados pelos pacientes.

Apresentação

Caro estudante,

Ideias, por mais brilhantes e elaboradas que sejam, só adquirem significado quando encontram aplicação no dia a dia.

A Matemática jamais deve ser vista como problema, mas, sim, como solução. Ela nos conduz por caminhos aparentemente tortuosos ou inacessíveis, abrindo atalhos, encurtando distâncias e superando obstáculos cotidianos ou científicos.

Com as situações apresentadas neste livro, você adquirirá conhecimentos que ajudarão no desenvolvimento da sua formação escolar, pessoal e profissional. Em cada página estudada, atividade resolvida ou desafio superado, você perceberá que a Matemática é uma ferramenta poderosa que pode ajudá-lo a resolver muitos problemas.

O autor

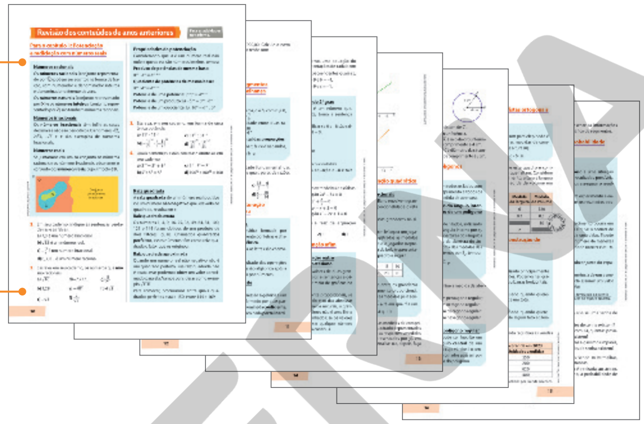
Conheça seu livro

Cada volume está dividido em quatro Unidades, que são formadas por dois ou mais capítulos, organizadas de acordo com esta estrutura:

Revisão dos conteúdos de anos anteriores
Nestas páginas, você vai recordar e praticar o que estudou em anos anteriores.

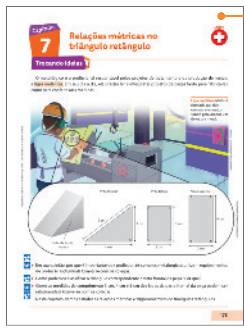
Resumo dos principais conceitos e procedimentos estudados em anos anteriores.

Atividades para aplicar o que recordou.



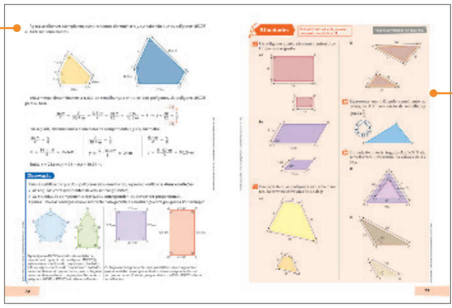
Abertura de Unidade
Apresenta o título dos capítulos que integram a Unidade e propõe questões que serão retomadas na seção *É hora de extrapolar*, presente no final da Unidade.

Trocando ideias
Incentiva o diálogo sobre alguns assuntos estudados no capítulo e também sobre temas importantes do cotidiano.

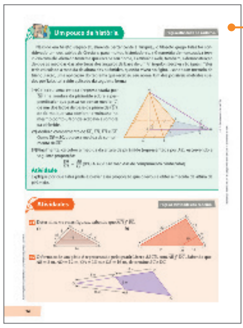


Apresentação do conteúdo
Os conteúdos são apresentados com linguagem clara e direta.

Atividades
Com diferentes níveis de dificuldade, algumas atividades estimulam a discussão, a reflexão e a resolução em grupo, o trabalho com cálculo mental e o uso da calculadora e de outras tecnologias digitais.

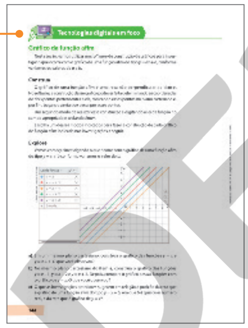


Lendo e aprendendo
Seção que desenvolve a compreensão de textos envolvendo diferentes temas.



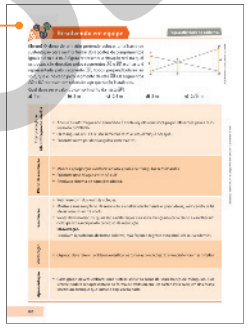
Um pouco de história
Boxe que aborda a história da Matemática para contextualizar alguns assuntos.

Tecnologias digitais em foco
Seção que trabalha conteúdos de Matemática por meio de tecnologias digitais, como *softwares* de geometria dinâmica, planilhas eletrônicas etc.



Veja que interessante
Boxe que complementa e enriquece o conteúdo estudado.

Resolvendo em equipe
Proposta de trabalho em grupo que explora a resolução de problemas.

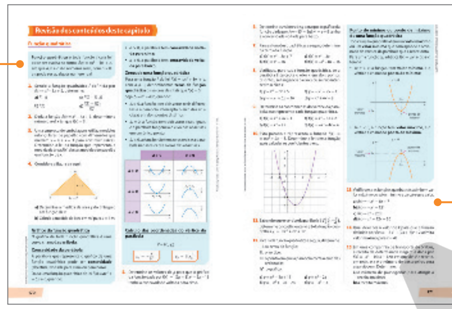


Revisão dos conteúdos deste capítulo

Nestas páginas, você vai recordar e aplicar o que estudou no capítulo.

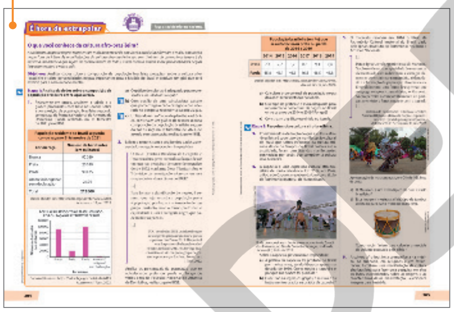
Atividades para aplicar o que foi revisado.

Resumo dos principais conceitos e procedimentos estudados no capítulo.



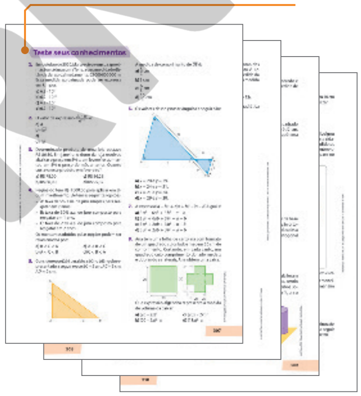
É hora de extrapolar

Trabalho em grupo proposto como fechamento da Unidade. Explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a comunidade escolar. Nesta seção, são retomados também os questionamentos feitos na abertura de Unidade.

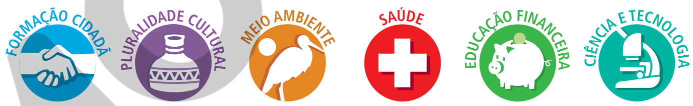


Teste seus conhecimentos

Nesta seção, você vai verificar seus conhecimentos sobre o que estudou durante o ano por meio de questões de múltipla escolha.



Ícones que indicam o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais



Ícones utilizados nas atividades

Dupla | Grupo | Cálculo mental | Calculadora e *softwares* | Elaboração de problemas | Pensamento computacional | Oral

Sugestão de leitura

Sugestões de leitura de livros.

Conheça mais

Sugestões de *sites* e visitas a museus.

Sumário

Sumário

Revisão dos conteúdos de anos anteriores

Números racionais

Nesta revisão, descrevemos o conjunto dos números racionais, em que estão os números naturais e os números inteiros, e o conjunto dos números irracionais para, depois, definir o conjunto dos números reais pela união desses conjuntos.

• Na **atividade 1**, os estudantes devem identificar se os números dados são racionais, irracionais ou reais. Caso tenham dificuldades, retome a definição desses conjuntos numéricos com base nas palavras da turma.

• Na **atividade 2**, destaque aos estudantes que devem identificar os números que **não** são racionais. Além disso, dê especial atenção aos **itens a** e **e**, pois alguns estudantes podem considerar erroneamente que toda raiz quadrada é um número irracional. Se isso ocorrer, relembre com a turma que existem raízes quadradas exatas e que elas são números racionais.

Propriedades da potenciação

As principais propriedades da potenciação são revisadas neste momento. Caso considere necessário, apresente exemplos numéricos para cada uma das propriedades.

• Na **atividade 3**, os estudantes devem observar que é solicitada uma resposta em uma única potência. Assim, é preciso apenas aplicar as propriedades do produto ou do quociente de potências de mesma base para obter a potência que responde cada item.

• Ao resolver a **atividade 4**, os estudantes deverão observar se as propriedades estão sendo utilizadas adequadamente. Vale destacar o **item a**, em que se faz, de forma incorreta, uma soma das potências; nesse caso, é importante que os estudantes observem a diferença entre a propriedade e o que foi feito aqui.

Raiz quadrada

Ao revisar raiz quadrada, definimos raiz quadrada exata, números quadrados perfeitos e raiz quadrada aproximada, inclusive usando quadrados perfeitos para realizar aproximações. Se achar necessário, apresente algumas raízes para que a turma calcule o valor exato ou aproximado.

Revisão dos conteúdos de anos anteriores

Faça as atividades no caderno.

Para o capítulo 1: Potenciação e radiciação com números reais

Números racionais

Os **números racionais** (conjunto representado por $\mathbb{Q}$) podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero.

Os **números naturais** (conjunto representado por $\mathbb{N}$) e os **números inteiros** (conjunto representado por $\mathbb{Z}$) são também números racionais.

Números irracionais

Os **números irracionais** têm infinitas casas decimais e não são periódicos. Os números $\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$ e π são exemplos de números irracionais.

Números reais

Se juntarmos em um só conjunto os números racionais e os números irracionais, obteremos o conjunto dos **números reais**, cujo símbolo é $\mathbb{R}$.

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

1. Em seu caderno, indique as sentenças verdadeiras e as falsas.

a) 7,3 é um número irracional. **1. a)** Falsa

b) $\sqrt{12}$ é um número real. **1. b)** Verdadeira

c) $-\frac{3}{4}$ é um número irracional. **1. c)** Falsa

d) 0,333... é um número racional. **1. d)** Verdadeira

2. Escreva, em seu caderno, os números que **não** são racionais. **2.** itens **c**, **f**, **h**

a) $\sqrt{16}$ **d)** $-7{,}777...$ **g)** $\frac{8}{21}$

b) 1,29 **e)** $-\sqrt{81}$ **h)** $4\sqrt{2}$

c) $-\sqrt{3}$ **f)** $\frac{2}{\sqrt{2}}$

Propriedades da potenciação

Considerando que a é um número real não nulo e que m e n são números inteiros, temos:

Produto de potências de mesma base:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Quociente de potências de mesma base:

$a^m : a^n = a^{m-n}$

Potência de uma potência: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Potência de um produto: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Potência de um quociente: $(a : b)^m = a^m : b^m$

3. Escreva, em seu caderno, em forma de uma única potência:

a) $11^7 \cdot 11^{12}$ **3. a)** 11^{19} **c)** $31^{15} : 31^{14}$ **3. c)** 31^1

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{15}$ **3. b)** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{25}$ **d)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{20} : \left(\frac{3}{5}\right)^{12}$ **3. d)** $\left(\frac{3}{5}\right)^{8}$

4. Quais sentenças estão corretas? Anote-as em seu caderno. **4.** itens **c**, **d**

a) $3^{10} = 3^8 + 3^2$ **c)** $7^5 \cdot 7^6 = 7^{11}$

b) $5^9 : 5^3 = 5^3$ **d)** $100^{12} : 100^{11} = 100$

Raiz quadrada

A **raiz quadrada** de um número real positivo x é um número **não negativo** que, elevado ao quadrado, resulta em x.

Raiz quadrada exata

Os números 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 e 144 foram obtidos de um produto de dois fatores iguais. Chamados **quadrados perfeitos**, esses números têm como raiz quadrada o fator que os originou.

Raiz quadrada aproximada

Quando um número real não negativo não é um quadrado perfeito, sua raiz quadrada não é exata, mas podemos obter um valor aproximado para ela. Vamos considerar como exemplo $\sqrt{150}$.

Para começar, procuramos entre quais quadrados perfeitos está o 150: entre 144 e 169.

Como $\sqrt{144} = 12$ e $\sqrt{169} = 13$, $\sqrt{150}$ está entre 12 e 13.

Calculamos os quadrados de alguns números situados entre 12 e 13, com uma casa decimal:

$12{,}1^2 = 146{,}41$

$12{,}2^2 = \mathbf{148{,}84}$ (<150) $12{,}3^2 = 151{,}29$ (>150)

Assim, 12,2 corresponde a uma aproximação de $\sqrt{150}$ com uma casa decimal.

5. Decomponha estes números em fatores primos e, se possível, determine a raiz quadrada exata de cada um deles.

a) 2 116 **5. a)** 46
b) 625 **5. b)** 25
c) 972 **5. c)** não tem raiz exata
d) 784 **5. d)** 28

6. Escreva entre quais quadrados perfeitos estão os seguintes números.

a) 51 **6. a)** 49 e 64
b) 93 **6. b)** 81 e 100
c) 190 **6. c)** 169 e 196
d) 388 **6. d)** 361 e 400

7. Agora, calcule a raiz aproximada dos números da atividade anterior com uma casa decimal.

a) 51 **7. a)** 7,1
b) 93 **7. b)** 9,6
c) 190 **7. c)** 13,8
d) 388 **7. d)** 19,7

Para o capítulo 2: Matemática financeira

Porcentagem

Uma **porcentagem** indica a parte de um todo que contém 100 partes iguais. Por exemplo, 27% representa 27 partes de 100 ao todo.

Uma porcentagem pode ser escrita na forma de fração ou na forma decimal:

$$27\% = \frac{27}{100} = 0{,}27$$

Para calcular o valor referente à porcentagem de um total, multiplicamos a porcentagem (ou sua fração equivalente) pelo valor total.

8. Em seu caderno, calcule:

a) 42% de 50; **8. a)** 21
b) 16% de 160; **8. b)** 25,6
c) 60% de 32; **8. c)** 19,2
d) 95% de 8; **8. d)** 7,6
e) 120% de 68. **8. e)** 81,6

9. Um produto custa R$ 900,00. Calcule o novo valor caso esse produto tenha um:

a) aumento de 15%; **9. a)** R$ 1 035,00
b) aumento de 10%; **9. b)** R$ 990,00
c) desconto de 20%; **9. c)** R$ 720,00
d) desconto de 1%. **9. d)** R$ 891,00

Para o capítulo 3: Segmentos proporcionais e semelhança

Razão e proporção

A **razão** entre dois números, a e b, com $b \neq 0$, nessa ordem, é dada por $\frac{a}{b}$.

Proporção é uma igualdade entre duas razões. Por exemplo, $\frac{15}{2} = \frac{30}{4}$.

Propriedade fundamental das proporções

Em toda proporção, dados a, b, c e d não nulos, com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos $a \cdot d = b \cdot c$.

10. Aplicando a propriedade fundamental das proporções, identifique quais pares de razões são proporções. **10.** itens **a**, **c**

a) $\frac{5}{4} = \frac{10}{8}$
b) $\frac{1}{3} = \frac{2}{4}$
c) $\frac{18}{3} = \frac{6}{1}$
d) $\frac{7}{5} = \frac{10}{14}$

Para o capítulo 4: Fatoração e equações do 2º grau

Expressões algébricas

Uma expressão matemática formada por números e letras ou somente por letras é chamada de **expressão algébrica**.

Em expressões algébricas, as letras são chamadas de **variáveis**.

Valor numérico é o resultado das operações efetuadas em uma expressão algébrica após a substituição das variáveis por números.

Adição e multiplicação de termos algébricos

Cada parcela de uma expressão algébrica é um **termo algébrico**, que é formado por duas partes: a parte numérica, denominada **coeficiente**, e a parte com letras, denominada **parte literal**.

11

Expressões algébricas

Ao revisar este tema, primeiro retomamos o conceito de expressão algébrica e, em seguida, tratamos das ideias de valor numérico e adição e subtração de termos algébricos. Se possível, apresente exemplos de expressões algébricas para que os estudantes calculem o valor numérico ou efetuem adições e multiplicações de termos algébricos.

• Para resolver a **atividade 5**, os estudantes devem fazer a decomposição de cada número em fatores primos e, assim, verificar se o número é ou não um quadrado perfeito para determinar sua raiz exata. Se necessário, escolha um número menor (por exemplo, 16) e faça a decomposição dele apenas para exemplificar.

• Na **atividade 6**, sugira aos estudantes que façam uma lista de alguns quadrados perfeitos em ordem crescente para que fique mais fácil identificar entre quais se encontra o número de cada item. Em continuidade, na **atividade 7**, os estudantes devem calcular a raiz quadrada aproximada de cada número com uma casa decimal. Se necessário, destaque a eles que precisam fazer tentativas para encontrar esse valor.

Porcentagem

Ao rever porcentagem, é apresentada sua definição e a relação entre essa forma de representação e as formas fracionária e decimal.

• Aproveite a **atividade 8** para instigar os estudantes a estimarem resultados antes dos cálculos. Por exemplo, ao estimar 95% de 8, espera-se que eles notem que o resultado será um número bem próximo a 8, uma vez que 95% é bem próximo de 100%. Nesse sentido, desenvolve-se um senso numérico importante para atividades fora da escola, assim como auxilia na correção de eventuais erros de cálculo.

• Na **atividade 9**, é interessante que os estudantes avaliem o resultado obtido em cada item. Por exemplo, nos **itens a** e **b**, os resultados serão maiores que 900, enquanto, nos **itens c** e **d**, os resultados serão menores que 900. Se tiverem dúvidas, leve-os a perceber que devem calcular a porcentagem de 900 e adicionar o valor obtido a 900 se for aumento ou subtrair o valor obtido de 900 se for desconto.

Razão e proporção

Neste momento, retomamos as definições de razão e proporção e a propriedade fundamental da proporção. Se achar conveniente, forneça algumas proporções como exemplo para que a turma possa recordar a propriedade fundamental das proporções.

• Na **atividade 10**, os estudantes devem usar a propriedade fundamental das proporções para identificar os itens em que há proporções. Se achar conveniente, com base nos **itens b** e **d**, leve-os a concluir que, para obter uma proporção, não basta igualar duas razões quaisquer.

• Na **atividade 11**, os estudantes devem substituir x por –1 em cada expressão algébrica para calcular seu valor numérico. Acompanhe as resoluções para observar se estão fazendo a substituição e as operações adequadamente. Caso seja necessário, relembre a ordem em que devem ser efetuadas as operações.

• As **atividades 12** e **13** trabalham, respectivamente, adições e multiplicações de termos algébricos. Se os estudantes tiverem dificuldades, na lousa, destaque com a turma os coeficientes e as partes literais de cada item. No **item a** da **atividade 13**, se for preciso, relembre a propriedade distributiva.

Equação do 2º grau com uma incógnita

Ao trabalhar esta retomada, busca-se focar o conceito de equação e, depois, de equação do 2º grau completa e incompleta.

• Na **atividade 14**, os estudantes precisam identificar equações de 2º grau e se são completas ou incompletas. É interessante pedir aos estudantes que justifiquem o motivo do **item c** não ser uma equação de 2º grau; espera-se que expliquem que é uma equação de 1º grau, uma vez que o maior grau da incógnita é 1.

• Após a resolução da **atividade 15**, peça aos estudantes que comparem os resultados obtidos e questione-os se a atividade permite respostas diferentes. Espera-se que observem que, em cada item, há apenas uma equação como resposta, mas o modo de representar pode ser diferente. Por exemplo, no **item c**, podemos escrever $9x^2 - 1 = 0$ ou $-1 + 9x^2 = 0$; apesar de ser mais usual a primeira, ambas estão corretas e são equivalentes.

Raiz de uma equação do 2º grau

Neste momento, o foco da revisão é a ideia de raiz de uma equação, ou seja, o número que torna a sentença verdadeira quando é colocado no lugar da incógnita.

• Para resolver as **atividades 16** e **17**, os estudantes podem fazer as substituições em cada item para identificar quando é ou não verdadeira a sentença encontrada. Ao terminar a **atividade 17**, é interessante retomar com eles que, no caso de equação do 2º grau, é possível encontrar duas raízes distintas.

Representação da relação entre grandezas no plano cartesiano

Nesta revisão, como o assunto do capítulo é função afim, o foco é a representação gráfica da relação entre duas grandezas diretamente proporcionais. Se possível, apresente outros exemplos, inclusive de situações em que o valor da grandeza do eixo das abscissas possa ser qualquer número real.

Para adicionar termos algébricos que têm a mesma parte literal, devemos adicionar os coeficientes e conservar a parte literal.

Para multiplicar dois termos algébricos, devemos:

- multiplicar os coeficientes numéricos entre si;
- multiplicar as partes literais entre si.

11. Determine o valor numérico de cada expressão algébrica considerando $x = -1$.

a) $45 + 43x$ **11. a)** 2

b) $\frac{12x - 1}{10x}$ **11. b)** 1,3

c) $2x^2 - x$ **11. c)** 3

12. Calcule as adições algébricas.

a) $6a - 9b + 12b - a$ **12. a)** $5a + 3b$

b) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6}$ **12. b)** x

c) $2y - 9 + 8y + 9$ **12. c)** $10y$

13. Determine os produtos algébricos.

13. a) $198 + 66x - 44y$

a) $22 \cdot (9 + 3x - 2y)$

b) $a \cdot b \cdot (-3b)$ **13. b)** $-3ab^2$

c) $\frac{b}{4} \cdot \left(-\frac{a}{3}\right)$ **13. c)** $-\frac{ab}{12}$

Equação do 2º grau com uma incógnita

Equação é uma sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta pelo menos um valor desconhecido representado por uma letra denominada **incógnita**.

Uma equação do 2º grau na incógnita x pode ser reduzida a uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$; chamamos a, b e c de **coeficientes** da equação do 2º grau.

Uma equação do 2º grau com uma incógnita, na forma $ax^2 + bx + c = 0$, é considerada **completa** quando tem todos os coeficientes (a, b, c) diferentes de zero; quando b ou c ou os dois coeficientes são iguais a zero, dizemos que a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, na incógnita x, é **incompleta**.

14. Entre os itens abaixo, quais são equações do 2º grau? Nos casos afirmativos, escreva se a equação é completa ou incompleta.

a) $5x^2 + x = 0$ **14. a)** incompleta

b) $-5x^2 + 25 = 0$ **14. b)** incompleta

14. c) não é equação do 2º grau

c) $2x + 13 = 0$

d) $\frac{x^2}{2} + x + 1 = 0$ **14. d)** completa

15. Escreva, em seu caderno, uma equação do 2º grau seguindo as orientações de cada item:

a) completa com todos os coeficientes iguais a 5; **15. a)** $5x^2 + 5x + 5 = 0$

b) incompleta com $a = 9$ e $b = -1$; **15. b)** $9x^2 - x = 0$

c) incompleta com $a = 9$ e $c = -1$. **15. c)** $9x^2 - 1 = 0$

Raiz de uma equação do 2º grau

Raiz de uma equação é um número que, ao substituir a incógnita, torna a sentença verdadeira.

Por exemplo, vamos verificar se 0 e –8 são raízes da equação $2x^2 - 128 = 0$.

Para $x = 0$:

$2 \cdot 0^2 - 128 = 0$

$-128 = 0 \longrightarrow$ sentença falsa

Para $x = -8$:

$2 \cdot 64 - 128 = 0 \longrightarrow$ sentença verdadeira

Logo, 0 não é raiz dessa equação e –8 é raiz dessa equação.

16. Identifique as sentenças verdadeiras e as falsas.

a) 0 não é raiz da equação $2x^2 - 5x = 0$ **16. a)** Falsa

b) 0 é raiz da equação $x^2 + \frac{x}{2} = 0$ **16. b)** Verdadeira

c) 1 é raiz da equação $x^2 - x + 5 = 0$ **16. c)** Falsa

d) 2 não é raiz da equação $x^2 - 2x + 1 = 0$

16. d) Verdadeira

17. Qual dos números é raiz da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$? **17.** itens **a**, **c**

a) –3 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 2

Para o capítulo 5: Função afim

Representação da relação entre grandezas no plano cartesiano

É possível relacionar os valores de duas grandezas por meio de quadros e sentenças algébricas, mas também por meio de gráficos no plano cartesiano.

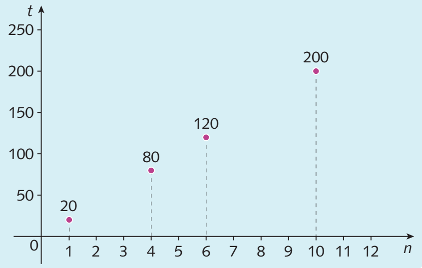
Para grandezas diretamente proporcionais, se os valores da grandeza do eixo das abscissas podem ser somente números naturais, o gráfico da relação entre os valores não é uma linha contínua, mas pontos alinhados; se os valores dessa grandeza podem ser qualquer número real, o gráfico é uma linha contínua.

Confira essa situação.

Para relacionar o número de ingressos e o valor total a pagar por esses ingressos, foi feito este quadro.

Número de ingressos (n)	1	4	6	10
Total a pagar em R$ (t)	20	80	120	200

Como as grandezas são diretamente proporcionais e o número de ingressos só pode ser um número natural, os valores das grandezas são representados como pontos alinhados no plano cartesiano.



18. A-III; B-I; C-II

18. Considerando que os valores das grandezas são quaisquer números reais positivos ou nulos, relacione cada quadro com o respectivo gráfico.

A)

x	0	5	10	15
y	0	15	30	45

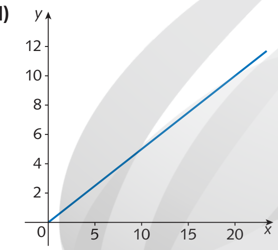
B)

x	5	10	15	20
y	2,5	5	7,5	10

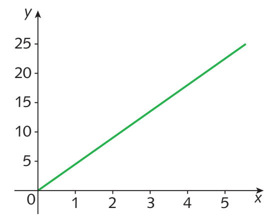
C)

x	2	3	4	5
y	9	13,5	18	22,5

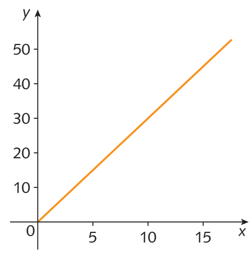
I)



II)



III)



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Para o capítulo 6: Função quadrática

Grandezas não proporcionais

Muitas situações no cotidiano envolvem grandezas que não têm proporcionalidade direta nem inversa entre elas.

Confira um exemplo dessas grandezas na situação a seguir.

Em um lançamento de 10 m feito por um jogador de futebol, foram registradas as medidas da distância entre a bola e o jogador (representada por d) e da altura da bola (representada por h), em metro, no quadro a seguir.

d (m)	0	2	5	10
h (m)	0	1,6	2,5	0

Nessa situação, a relação entre as grandezas não é direta nem inversamente proporcional, mas é possível relacionar as medidas pela sentença algébrica $h = -\frac{d^2}{10} + d$, em que d é um número real tal que $0 \leqslant d \leqslant 10$.

19. Este quadro apresenta as medidas de comprimento do lado de um quadrado (representadas por a), em centímetro, e as respectivas medidas de área da figura (representadas por y), em centímetro quadrado. Analise-o e, depois, faça o que se pede.

• Para responder à **atividade 18**, os estudantes precisam comparar os valores das grandezas de cada quadro com cada gráfico para encontrar as correspondências. Caso algumas respostas não estejam adequadas, proponha a eles que analisem se todos os pontos do quadro estão adequadamente representados no gráfico escolhido.

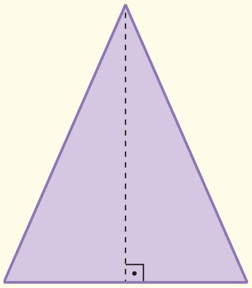
Grandezas não proporcionais

• Na **atividade 19**, caso os estudantes apresentem dificuldades, relembre com eles como é feito o cálculo da medida de área de um quadrado com base em sua medida de comprimento do lado. Assim, espera-se que consigam escrever uma sentença algébrica relacionando essas medidas (**item a**), calcular a medida de área de um quadrado a partir da medida de comprimento do lado dado (**item b**) e calcular a medida de comprimento do lado de um quadrado a partir da medida de área dada (**item c**).

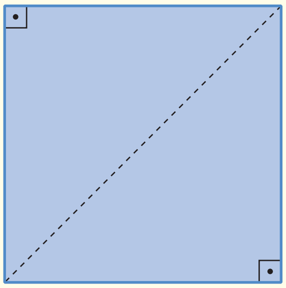
Triângulo retângulo

- Exemplo de resposta da **atividade 20**:

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Circunferência

Esta revisão define circunferência e alguns de seus elementos: centro, raio e diâmetro.

- Para resolver a **atividade 21**, os estudantes devem analisar afirmações envolvendo elementos de uma circunferência. Ao final, peça que expliquem por que a afirmação do **item d** é falsa; espera-se que identifiquem que $\overline{AC}$ é raio da circunferência com 4 cm de medida de comprimento.

Medidas das aberturas do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular

Neste momento, é feita uma revisão acerca dos polígonos regulares, principalmente em relação ao que se conhece sobre as medidas das aberturas de seus ângulos internos e externos.

- Na **atividade 22**, os estudantes devem calcular as medidas das aberturas de ângulos internos ou externos de alguns polígonos regulares. Caso eles não associem adequadamente o nome do polígono ao seu número de lados, relembre com a turma.

Ângulo central de um polígono regular

Dando continuidade à revisão de polígonos regulares, o foco agora será o ângulo central desse polígono. Para reforçar essa ideia, é fundamental que os estudantes analisem o exemplo dado (pentágono regular) para entender o que é ângulo central e como é calculada sua medida de abertura.

a **(cm)**	1	2	3	4
y **(cm²)**	1	4	9	16

19. a) $y = a^2$, em que a é um número real maior que 0.

a) Relacione essas medidas por meio de uma sentença algébrica.

19. b) 12,25 cm²

b) Calcule a medida de área do quadrado cujo comprimento do lado mede 3,5 cm.

c) Calcule a medida de comprimento do lado do quadrado cuja área mede 64 cm².

19. c) 8 cm

Para o capítulo 7: Relações métricas no triângulo retângulo

Triângulo retângulo

Um triângulo retângulo é um polígono de três lados que tem um ângulo interno reto, ou seja, com medida de abertura de 90°.

20. No caderno, represente a figura indicada em cada item e, depois, decomponha-a em triângulos retângulos.

20. Exemplo de resposta em *Orientações*.

a) Um triângulo isósceles.

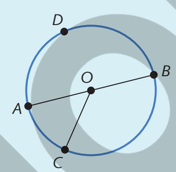
b) Um quadrado.

Para o capítulo 8: Circunferência, arcos e ângulos

Circunferência

Circunferência é a figura formada por todos os pontos de um plano que estão à mesma medida da distância de um ponto fixo desse plano. O ponto fixo é chamado **centro** da circunferência.

Nesta circunferência representada, o ponto *O* é o centro da circunferência.



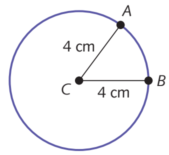
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

A, *B*, *C* e *D* são alguns pontos da circunferência.

O **raio** é um segmento de reta que une o centro *O* a um ponto qualquer da circunferência, como $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$.

O **diâmetro** é um segmento de reta que tem duas extremidades na circunferência e que passa pelo centro da circunferência, como $\overline{AB}$.

21. Analise esta circunferência de centro *C* e, no caderno, indique quais afirmações são verdadeiras.



21. a) Verdadeira
21. b) Verdadeira

a) Os pontos *A* e *B* equidistam de *C*.

b) *C* é o centro dessa circunferência.

c) O segmento de reta $\overline{BC}$ é raio da circunferência e sua medida de comprimento é 4 cm.

d) O segmento de reta $\overline{AC}$ é diâmetro da circunferência e sua medida de comprimento é 8 cm.

21. c) Verdadeira **21. d)** Falsa

Para o capítulo 9: Polígonos regulares

Um **polígono regular** tem todos os lados com a mesma medida de comprimento e todos os ângulos com a mesma medida de abertura.

Medidas das aberturas do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular

Em um polígono regular de *n* lados, indicando a medida da abertura do ângulo interno por a_i, a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos por S_i, a medida da abertura do ângulo externo por a_e e a soma das medidas das aberturas dos ângulos externos por S_e, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \text{ ou } a_i = (n-2) \cdot \frac{180°}{n} \text{ e}$$

$$a_e = \frac{S_e}{n} \text{ ou } a_e = \frac{360°}{n}$$

22. Em seu caderno, determine a medida da abertura do: **22. a)** 108° **22. b)** 135° **22. c)** 36° **22. d)** 60°

a) ângulo interno de um pentágono regular;

b) ângulo interno de um octógono regular;

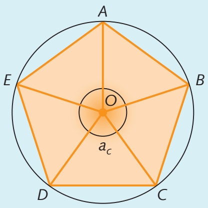
c) ângulo externo de um decágono regular;

d) ângulo externo de um hexágono regular.

Ângulo central de um polígono regular

Todo polígono regular pode ser inscrito em uma circunferência. **Ângulo central** de um polígono regular é aquele cujo vértice é o centro da circunferência e cujos lados passam por dois vértices consecutivos do polígono.

Neste pentágono regular *ABCDE*, a_c é um dos ângulos centrais.

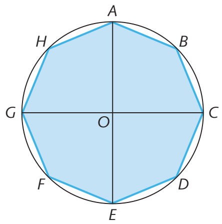


Sendo *O* o centro de um polígono regular, a soma das medidas das aberturas de todos os ângulos centrais é 360° (uma volta completa). Em um polígono de *n* lados, a medida da abertura do ângulo central, indicada por a_c, é:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

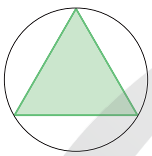
23. Calcule, em seu caderno, a medida da abertura do ângulo central de um triângulo equilátero. **23.** 120°

24. Em seu caderno, escreva a medida da abertura do ângulo $G\hat{O}H$ do polígono regular inscrito na circunferência de centro *O* a seguir. **24.** 45°

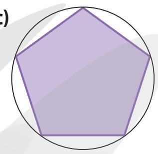


25. Qual destes polígonos é um polígono regular que tem a medida da abertura do ângulo central igual a 60°? **25.** item **d**

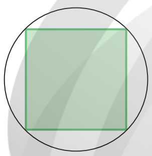
a)



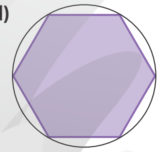
c)



b)



d)



Para o capítulo 10: Vistas ortogonais e volume

Medida de volume

A medida de volume de um paralelepípedo é obtida multiplicando-se as medidas de comprimento (*a*), largura (*b*) e altura (*h*).

$$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot h$$

26. Resposta em *Orientações*.

26. Em seu caderno, copie este quadro e complete com as medidas que faltam. Considere as medidas de comprimento, altura e largura em centímetro e a medida de volume em centímetro cúbico.

Medida do comprimento	Medida da altura	Medida da largura	Medida do volume
	2	6	120
0,5		0,2	0,3
1	5		30
2	2	2	

Para o capítulo 11: Construção de gráficos estatísticos

Gráficos estatísticos

Gráfico de barras

Esse tipo de gráfico é utilizado principalmente para comparar informações. Podemos ter gráficos de barras verticais ou barras horizontais.

Gráfico de setores

Esse tipo de gráfico é usado quando queremos representar partes de um total.

Gráfico de segmentos

Esse tipo de gráfico é usado quando queremos analisar a variação de algum fato ao longo do tempo.

27. Na tabela a seguir, Brenda registrou as vendas de sua loja em 2023.

Vendas da loja de Brenda em 2023	
Produto	**Unidades vendidas**
A	150
B	200
C	620
D	400

Dados obtidos por Brenda em 2023.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

15

- Nas **atividades 23** e **24**, os estudantes devem calcular as medidas das aberturas dos ângulos centrais de um triângulo equilátero e de um octógono regular, respectivamente. Caso seja necessário, na **atividade 24**, mostre a eles que o ângulo $G\hat{O}H$ é um ângulo central do polígono regular *ABCDEFGH*.
- Ao trabalhar a **atividade 25**, ressalte que a medida da abertura do ângulo central já é dada e que o que se pede é o polígono regular que tenha essa medida. Permita que os estudantes utilizem estratégias pessoais e, ao final, oriente-os a compartilhá-las com a turma. Se necessário, mostre que uma opção é calcular a medida da abertura do ângulo central de cada item para conferir qual é igual a 60°.

Medida de volume

O tema desta revisão é a medida do volume de um paralelepípedo. Para complementar a teoria, é possível ilustrar alguns paralelepípedos com as medidas de suas dimensões para que os estudantes calculem a medida do volume.

- Para resolver a **atividade 26**, é preciso conhecer a relação entre as medidas apresentadas no quadro para calcular a medida faltante. Acompanhe os estudantes durante a resolução e deixe que expliquem suas estratégias aos colegas. Faça interferências, com novos questionamentos, caso estejam em dúvida de como encontrar algumas medidas.
- Resposta da **atividade 26**:

Medida do comprimento	Medida da altura	Medida da largura	Medida do volume
10	2	6	120
0,5	3	0,2	0,3
1	5	6	30
2	2	2	8

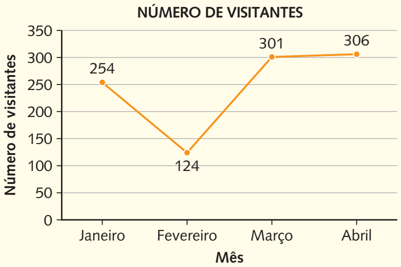
Gráficos estatísticos

Neste momento, é feita uma breve revisão de três tipos de gráficos estatísticos: de barras, setores e segmentos. Se possível, complemente a teoria apresentando ocorrências desses gráficos em situações reais.

• Na **atividade 27**, os estudantes devem estabelecer uma relação entre os dados de uma tabela e dois gráficos. No **item b**, permita que eles comentem com colegas sobre o gráfico que consideram mais adequado e faça as interferências que julgar relevantes.

• Na **atividade 28**, os estudantes devem transpor as informações de um gráfico de barras horizontais para um gráfico de segmentos. Se possível, peça a eles que troquem suas respostas a fim de verificar se a correspondência feita pelo colega está correta. Em caso de equívocos, questione-os sobre a escala escolhida.

• Exemplo de reta da **atividade 28**:



Dados obtidos por Camila em dezembro de 2023.

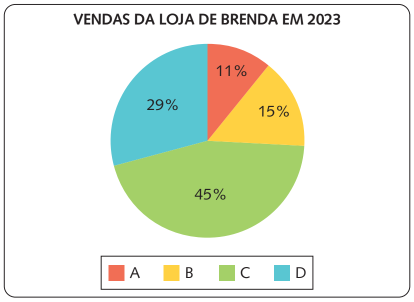
Possibilidades

Nesta retomada, define-se o princípio multiplicativo, importante para o estudo de possibilidades. O tema probabilidade também é foco desta revisão tanto no que diz respeito à ideia quanto ao cálculo.

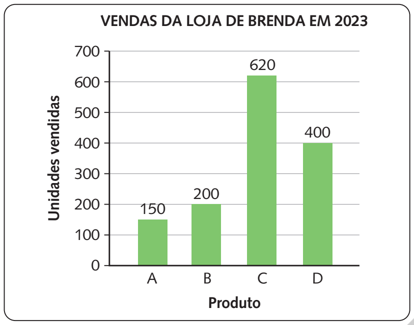
• Na **atividade 29**, os estudantes devem calcular o número de possibilidades em relação a uma senha. Confira as estratégias utilizadas por eles, verificando se utilizaram o princípio multiplicativo ou algum método pessoal. Se possível, incentive-os a compartilhar com a turma as estratégias usadas.

• Na **atividade 30**, os estudantes devem calcular probabilidades a partir de uma situação de sorteio de bolas coloridas. Se considerar necessário, amplie a situação para um número diferente de bolas ou peça que eles elaborem outras situações e troquem-nas com um colega para que cada um calcule as probabilidades na situação do outro.

Esses dados foram representados em dois gráficos diferentes:



Dados obtidos por Brenda em 2023.



Dados obtidos por Brenda em 2023.

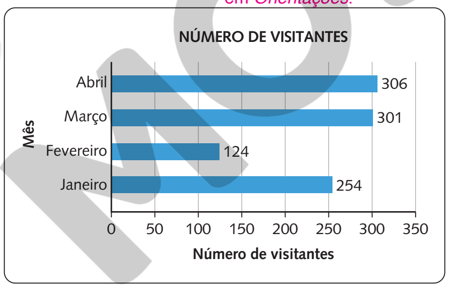
27. a) de setores e de barras

Em seu caderno, responda

a) Qual é o tipo de cada gráfico?

b) Qual desses gráficos é mais adequado a essa situação? **27. b)** Resposta pessoal.

28. Em dezembro de 2023, Camila organizou as informações sobre uma exposição de arte e fez um gráfico para representar o número de visitantes por mês. **28.** Exemplo de resposta em *Orientações*.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos por Camila em dezembro de 2023.

Em seu caderno, represente as informações desse gráfico em um gráfico de segmentos.

Para o capítulo 12: Probabilidade e estatística

Possibilidades

Um **experimento aleatório** é uma situação em que conhecemos os resultados possíveis, mas em que não podemos assegurar o resultado final.

O **espaço amostral** de um experimento aleatório é composto de todos os resultados possíveis no experimento.

Princípio multiplicativo

Considere que um acontecimento ocorra em duas etapas sucessivas, *A* e *B*. Se *A* ocorrer de *m* maneiras e se, para cada uma delas, *B* pode ocorrer de *n* maneiras, o número de maneiras em que o acontecimento pode ocorrer é $m \cdot n$.

Probabilidade

Um **evento** é qualquer subconjunto do espaço amostral.

A **probabilidade** *P* da ocorrência de um evento é uma medida que pode assumir um valor de 0 a 1 e é dada pela razão:

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{número de casos favoráveis do evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

29. Para abrir um cadeado, usa-se uma senha de 4 dígitos. **29. a)** 10 000 possibilidades

a) Quantas possibilidades de senha existem?

b) Se a senha começar com 34, quantas possibilidades de senha existem? **29. b)** 100 possibilidades

c) Se a senha tiver apenas algarismos ímpares, quantas possibilidades de senha existem? **29. c)** 625 possibilidades

30. Uma urna tem 30 bolas, sendo 10 vermelhas, 5 roxas e as restantes, brancas.

Uma bola dessa urna é retirada ao acaso. Calcule, em seu caderno, a probabilidade de essa bola ser:

a) vermelha; **30. a)** $\frac{1}{3}$

b) roxa; **30. b)** $\frac{1}{6}$

c) branca. **30. c)** $\frac{1}{2}$

16

Abertura da Unidade

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 7 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Motivar a turma a estudar os conteúdos da Unidade 1.
- Incentivar os estudantes a refletir sobre consumo consciente.
- Incentivar os estudantes a refletir sobre como a Matemática pode contribuir para que consumam de maneira consciente.

Tema contemporâneo transversal:

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Proponha aos estudantes que observem a imagem e comentem o que, na opinião deles, ela está retratando. Depois, pergunte o que é consumo consciente. Após alguns deles se manifestarem, explique que o consumo consciente é aquele que leva em consideração os impactos ambientais, sociais e financeiros. Depois, convide-os a falar sobre seus hábitos de consumo e se consideram que consomem de maneira consciente. Por fim, convide-os a refletir sobre a questão de como a Matemática pode nos ajudar a praticar o consumo consciente. Espera-se que eles reconheçam que a Matemática está presente no planejamento das compras, na comparação de preços, na avaliação dos aspectos físicos dos produtos, na gestão das finanças etc. Enfatize com a turma que esses assuntos serão retomados na seção *É hora de extrapolar* proposta ao final desta Unidade.

As questões propostas conduzem os estudantes a discutir uma questão de urgência social com base em princípios sustentáveis e promovem, também, o diálogo e a interação entre os pares, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **9** e das competências específicas **7** e **8** da BNCC.

No capítulo **1**, o assunto a ser estudado será potenciação e radiciação no conjunto dos números reais. No capítulo **2**, o foco será a Matemática financeira, com o estudo de juros simples e compostos. Por fim, o capítulo **3** abordará os conceitos de razão, proporção, semelhança e suas aplicações.

Na seção *É hora de extrapolar*, os estudantes vão refletir sobre critérios para realizar uma compra; pesquisar dicas para economizar e consumir de forma consciente e produzir guias de bolso para ser distribuídos para a comunidade escolar.

CAPÍTULO 1 – POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO COM NÚMEROS REAIS

Trocando ideias

BNCC:

• Competências gerais 2, 4 e 9 (as descrições estão na página VI).

• Competências específicas 2, 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

• Levantar os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre potência de um número real com expoente inteiro.

• Introduzir a ideia de fractal.

Inicie a aula apresentando o conceito de fractal para a turma e pergunte se os estudantes conseguem perceber a presença da autossimilaridade no fractal da primeira imagem. Depois, se possível, mostre outros exemplos de fractais para que eles possam analisar e discutir sobre o que mais chamou a atenção em cada um deles. Momentos como esse exercitam a curiosidade intelectual dos estudantes, despertam diferentes sentimentos e fazem com que tenham de escutar os colegas com atenção e empatia, o que contribui para o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **9** da BNCC.

Em seguida, convide-os a observar o modo como é construído o triângulo de Sierpinski e peça a alguns estudantes que descrevam tal construção. Esse é um momento em que devem levantar hipóteses e por isso a competência específica **2** tem o seu desenvolvimento favorecido. A atividade envolve ainda reconhecimento de padrão (Álgebra) e conceitos de Geometria, o que contribui para o desenvolvimento da competência específica **3**. A competência específica **8** também tem o seu desenvolvimento favorecido porque os estudantes interagem com os colegas de forma cooperativa.

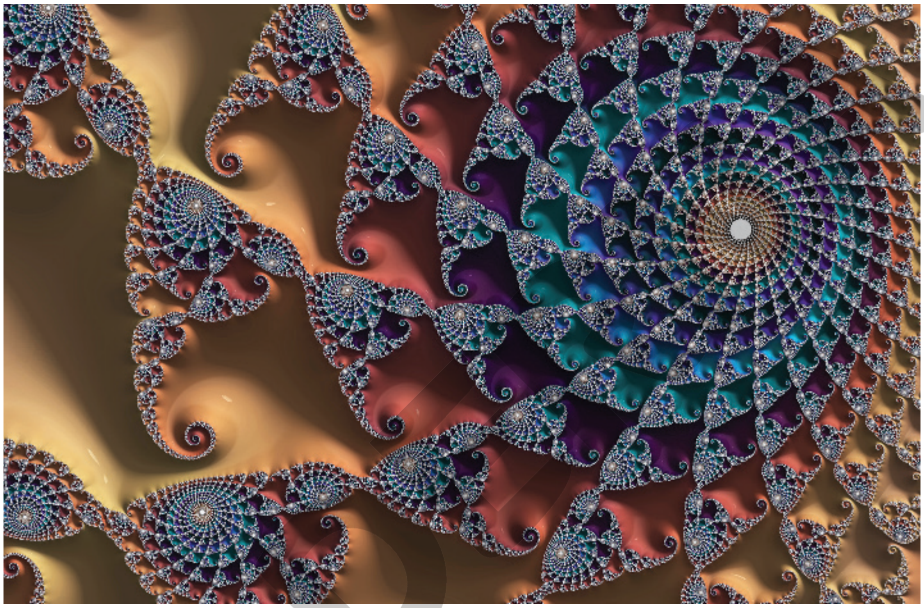
Explique que a construção é feita por meio de um processo iterativo que tem como ponto de partida um triângulo equilátero. Na primeira iteração, determinam-se os pontos médios de cada lado e unem-se esses pontos, gerando quatro novos triângulos equiláteros menores. Depois, remove-se o triângulo do meio. Na segunda iteração, esses passos são repetidos para cada um dos triângulos restantes. Depois, enfatize que esse processo pode ser repetido indefinidamente, dando origem ao triângulo de Sierpinski.

Capítulo 1

Potenciação e radiciação com números reais

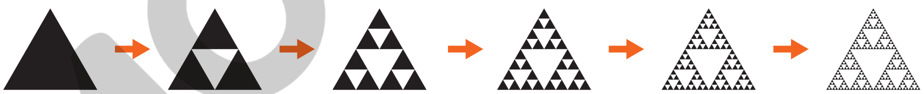
Trocando ideias

Os fractais são figuras com autossimilaridade, ou seja, eles contêm, dentro de si, cópias menores deles mesmos; essas cópias, por sua vez, contêm cópias ainda menores e, assim, sucessivamente. Os fractais podem ser encontrados na natureza ou ser produzidos por equações matemáticas e programas de computador.


JIMACK/SHUTTERSTOCK

Exemplo de fractal.

O triângulo de Sierpinski é um exemplo de fractal. Confira como ele pode ser construído.


FLAMETRIC/SHUTTERSTOCK

- Qual é o número de triângulos com fundo preto presentes em cada uma das figuras acima? Como essas quantidades podem ser representadas na forma de potência?
- Reúna-se com um colega e pesquisem em livros ou na internet outros exemplos de fractais. Depois, compartilhem com a turma o que encontraram. **Trocando ideias:** primeiro item: $1 = 3^0$, $3 = 3^1$, $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $81 = 3^4$ e $243 = 3^5$; segundo item: Resposta pessoal.

Neste capítulo, vamos estudar a potenciação e a radiciação com números reais.

Aproveite e peça que respondam às questões do primeiro item. Caso tenham dificuldades, oriente-os a organizar as quantidades de triângulos pretos de cada figura em um quadro. Você pode aproveitar o momento e verificar o que já sabem sobre potências com expoente inteiro.

A pesquisa do segundo item pode ser feita em sala de aula ou em casa. Caso julgue necessário, reúna as imagens trazidas pelos estudantes e peça que montem um painel para expor em algum local da sala ou da escola.

1 Números reais

O **conjunto dos números reais** é composto do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais.

Um número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b diferente de zero, e sua representação decimal pode ser um decimal exato ou uma dízima periódica. Um número irracional tem uma representação decimal infinita e não periódica.

Sugestão de leitura

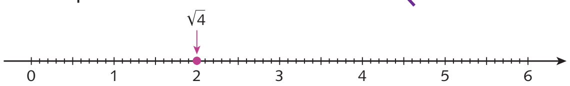
GUELLI, Oscar. **A invenção dos números**. São Paulo: Ática, 1996. (Coleção Contando a história da Matemática).
O livro traz como surgiu a ideia de número, como os povos antigos contavam, como surgiram os números irracionais e muitas outras curiosidades sobre números.

Localização de um número real na reta numérica

Acompanhe esta situação.

A professora de Jean solicitou que a turma localizasse os pontos que representam os números $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ e $\sqrt{5}$ em uma reta numérica.

Jean traçou a reta numérica e, admitindo que $\sqrt{4}$ é igual a 2, já fez essa indicação como aparece abaixo.



Para localizar os pontos correspondentes aos números $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$, percebeu que não poderia fazer isso com exatidão. Então, como somente um quadrado perfeito tem raiz quadrada exata ($\sqrt{1} = 1, \sqrt{4} = 2, \sqrt{9} = 3$ etc.), Jean resolveu encontrar aproximações para $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ partindo dos quadrados perfeitos e, depois, fazendo aproximações melhores.

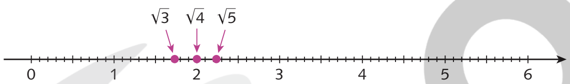
Analise como ele fez as aproximações.

Para $\sqrt{3}$:
- Como $1^2 = 1$ e $2^2 = 4$, $\sqrt{3}$ está entre $\sqrt{1}$ e $\sqrt{4}$. Ou seja: $1 < \sqrt{3} < 2$
- Como $1{,}7^2 = 2{,}89$ e $1{,}8^2 = 3{,}24$, $\sqrt{3}$ está entre $\sqrt{2{,}89}$ e $\sqrt{3{,}24}$. Ou seja: $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$
- Como $1{,}73^2 = 2{,}9929$ e $1{,}74^2 = 3{,}0276$, $\sqrt{3}$ está entre $\sqrt{2{,}9929}$ e $\sqrt{3{,}0276}$. Ou seja: $1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$

Para $\sqrt{5}$:
- Como $2^2 = 4$ e $3^2 = 9$, $\sqrt{5}$ está entre $\sqrt{4}$ e $\sqrt{9}$. Ou seja: $2 < \sqrt{5} < 3$
- Como $2{,}2^2 = 4{,}84$ e $2{,}3^2 = 5{,}29$, $\sqrt{5}$ está entre $\sqrt{4{,}84}$ e $\sqrt{5{,}29}$. Ou seja: $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$
- Como $2{,}23^2 = 4{,}9729$ e $2{,}24^2 = 5{,}0176$, $\sqrt{5}$ está entre $\sqrt{4{,}9729}$ e $\sqrt{5{,}0176}$. Ou seja: $2{,}23 < \sqrt{5} < 2{,}24$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Com isso, ele fez a representação na reta numérica da seguinte forma:



Observações

1. Ao fazer uma aproximação por tentativa e erro, pode ser necessário tentar alguns valores que sejam descartados. Por exemplo, para encontrar uma aproximação com uma casa decimal para $\sqrt{3}$, é necessário calcular: $1{,}1^2 = 1{,}21$; $1{,}2^2 = 1{,}44$; $1{,}3^2 = 1{,}69$; $1{,}4^2 = 1{,}96$; $1{,}5^2 = 2{,}25$; $1{,}6^2 = 2{,}56$; $1{,}7^2 = 2{,}89$; $1{,}8^2 = 3{,}24$. Como $1{,}7^2$ é o maior valor menor que 3 e $1{,}8^2$ é o menor valor maior que 3, a aproximação mais exata para $\sqrt{3}$ com uma casa decimal está nesse intervalo.
2. Na situação de Jean, foram feitas aproximações de até duas casas decimais, mas poderiam ser feitas aproximações para um número maior ainda de casas decimais, uma vez que os números são irracionais, ou seja, têm uma representação decimal infinita e não periódica.

19

de um mesmo quadrado de maneira que ambos sejam múltiplos inteiros dessa unidade. Tal constatação, no decorrer da história, acabou provocando a introdução dos números irracionais e a ampliação do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais.

Reforce que o resultado que aparece no visor de uma calculadora quando calculamos $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$, por exemplo, é uma aproximação. É fundamental oferecer aos estudantes esse esclarecimento para que eles não confundam, por exemplo, o número $\sqrt{2}$, ou qualquer outro irracional, com uma de suas aproximações racionais: 1,414 ou 1,414214.

Números reais

BNCC:

Habilidades EF09MA01 e EF09MA02 (as descrições estão na página VIII).

Objetivos:

- Compreender que o conjunto dos números reais é formado pelos números racionais e pelos números irracionais.
- Localizar números reais em uma reta numérica.

Justificativa

Compreender a ideia de conjunto dos números reais consolida os conhecimentos adquiridos anteriormente pela turma sobre os demais conjuntos numéricos e permite a eles entender como estes conjuntos se relacionam. Além disso, com os números reais é possível efetuarmos qualquer adição, subtração, multiplicação e divisão com números reais (exceto a divisão por zero), bem como extrairmos a raiz quadrada de qualquer número positivo e encontrarmos números reais.

A localização de números reais na reta numérica, por sua vez, leva os estudantes a perceber que é possível estabelecer uma correspondência entre cada número real e cada ponto da reta numérica, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA02**.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes: "O que é um número racional? E um número irracional? Um número pode ser racional e irracional ao mesmo tempo? Por quê? Vocês já ouviram falar em conjunto dos números reais? Como podemos representar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica? E o $\sqrt{5}$?". Deixe que levantem hipóteses e troquem ideias.

Para as aulas iniciais

Na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* são retomados os conceitos de número racional, irracional e real. Peça aos estudantes que façam a leitura coletiva dessa revisão e façam as **atividades 1** e **2**. Depois, corrija as atividades na lousa. Você pode ampliar a proposta dessas atividades e mostrar como representar os números de alguns itens na reta numérica.

Abra uma discussão com os estudantes para observar que as frações não são suficientes para medir todas as grandezas. Já na Antiguidade grega ficou comprovado que um quadrado de lado unitário, por exemplo, possui suas diagonais incomensuráveis, ou seja, não existe um segmento que possa servir de unidade de medida de comprimento comum ao lado e à diagonal

A representação geométrica da $\sqrt{2}$ contribui para o desenvolvimento da habilidade de **EF09MA01**. Alerte a turma a ter cuidado com o manuseio do compasso para evitar acidentes.

Espera-se que os estudantes identifiquem que $-2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$ são números irracionais, pois não podem ser escritos por uma fração em que o numerador é número inteiro e o denominador é número inteiro diferente de zero. Se achar necessário, explique a eles que o produto de um número racional por um número irracional é sempre um número irracional. Essa propriedade embora seja verdadeira não será demonstrada nesta coleção.

Comente com os estudantes que o método de demonstração utilizado neste tópico para mostrar a irracionalidade da $\sqrt{2}$ é uma **demonstração por absurdo** (também denominada como demonstração por contradição ou **demonstração da redução ao absurdo**). Nesse método de demonstração, para provar que uma afirmação é verdadeira, mostramos, ao declarar a falsidade de uma afirmação, que ela vai produzir um absurdo.

Sugestão de leitura

O texto *Demonstrações por absurdo*, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, explora o método de demonstração por absurdo. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/curso2016-3.pdf. Acesso em: 7 ago. 2022.

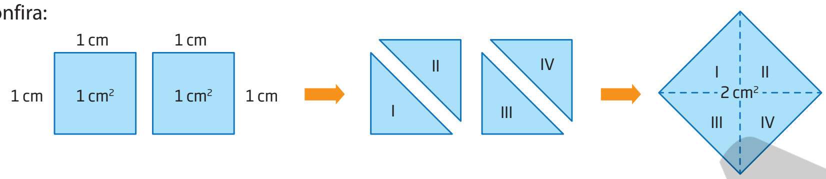
Representação geométrica de um número irracional

É possível representar, geometricamente, alguns números irracionais na reta numérica. Acompanhe a representação geométrica de $\sqrt{2}$.

Considerando dois quadrados cujos lados medem 1 cm de comprimento, temos que a medida de área de cada um deles é 1 cm².

Recortando os dois quadrados por uma das diagonais, obtemos quatro triângulos. Com esses triângulos, podemos montar um novo quadrado com 2 cm² de medida de área.

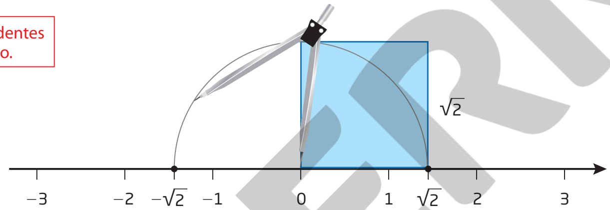
Confira:



Um quadrado cujo comprimento do lado mede a tem medida de área a^2. Assim, um quadrado cuja área mede 2 cm² tem a medida de comprimento do lado que elevada ao quadrado tem como resultado 2 cm², ou seja, $\sqrt{2}$ cm.

Agora, podemos transportar, com o auxílio de um compasso, a medida de comprimento do lado do quadrado para a reta numérica e determinar os pontos $\sqrt{2}$ e seu simétrico, $-\sqrt{2}$.

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso.



▸ Se posicionar a ponta-seca sobre esses pontos determinados e mantiver a mesma abertura do compasso, que outros números você vai localizar na reta numérica? Esses números são irracionais?

Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ **item:** $-2\sqrt{2}$ e $2\sqrt{2}$. Comentários em *Orientações*.

Vamos supor que $\sqrt{2}$ seja um número racional. Assim, podemos representá-lo da seguinte maneira: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, sendo p e q números inteiros, com q diferente de zero, e sendo $\frac{p}{q}$ uma fração irredutível.

Elevando ao quadrado os dois lados da igualdade, temos:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

- Como q é inteiro, então q^2 também é inteiro e $2q^2$ é um número par, pois, multiplicando 2 por um número inteiro, obtemos um número par. Assim, p^2 é par.
- p também é par, pois um número par multiplicado por um número par resulta em um número par (quando multiplicamos um número ímpar por um número ímpar, obtemos um número ímpar).

Se p é par, podemos escrevê-lo como $2k$, sendo k um número inteiro, diferente de zero.

Assim, temos:

$$2q^2 = (\underbrace{2k}_{p\,=\,2k})^2 \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

$2k^2$ é um número par, então q^2 é par e, consequentemente, q é par.

Mas, se p e q são números pares, então $\frac{p}{q}$ não é irredutível, o que contraria a suposição inicial. Assim, chegamos a um absurdo, ou seja, $\sqrt{2}$ não pode ser chamado de racional. Logo, $\sqrt{2}$ é irracional.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 Localize os números a seguir em uma reta numérica. Se necessário, utilize aproximações.

$\sqrt{9}$ $\sqrt{13}$ $\sqrt{17}$ $\sqrt{25}$

2 Verifique quais números são irracionais e quais não são.

a) $\sqrt{1}$ **b)** $\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** $\sqrt{4}$ **e)** $\sqrt{5}$

2. a) Não é irracional, pois $\sqrt{1} = 1$. **2. b)** irracional. **2. c)** irracional. **2. d)** Não é irracional, pois $\sqrt{4} = 2$. **2. e)** irracional.

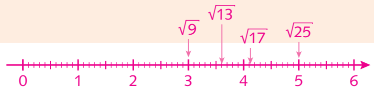
3 Identifique quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas.

a) Todo número em forma de raiz é irracional. **3. a)** falsa

b) A representação decimal de um número irracional é infinita e não periódica. **3. b)** verdadeira

c) $\sqrt{120}$ é um número irracional. **3. c)** verdadeira

1.



ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

2 Potência de um número real com expoente inteiro

Vamos determinar o valor da potência de um número real a quando o expoente inteiro for maior que 1, igual a 1, nulo ou negativo. Analise os casos a seguir.

- **Expoente maior que 1**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}, \text{ com } n \text{ inteiro tal que } n > 1$$

Confira alguns exemplos.

a) $2^4 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4 \text{ fatores}} = 16$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}_{2 \text{ fatores}} = \frac{1}{4}$

c) $3^5 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{5 \text{ fatores}} = 243$

d) $(-0{,}5)^3 = \underbrace{(-0{,}5) \cdot (-0{,}5) \cdot (-0{,}5)}_{3 \text{ fatores}} = -0{,}125$

- **Expoente 1**

$$a^1 = a$$

Confira alguns exemplos.

a) $7^1 = 7$

b) $\left(-\frac{3}{5}\right)^1 = -\frac{3}{5}$

c) $(1{,}3756)^1 = 1{,}3756$

d) $(-0{,}01)^1 = -0{,}01$

Potência de um número real com expoente inteiro

BNCC:

- Competências gerais 2, 4, 5, 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 3, 4 e 8 (as descrições estão na página VII).
- Habilidade EF09MA18.

Objetivos:

- Calcular potências com número real na base e expoente inteiro.
- Compreender as propriedades das potências com expoentes inteiros.
- Reconhecer números escritos em notação científica.

Justificativa

Calcular potências com número real na base e expoente inteiro amplia os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes no que diz respeito à potenciação com base racional e expoente natural, inteiro ou fracionário. A compreensão das propriedades permite simplificar cálculos e auxilia no desenvolvimento de estratégias de cálculo mental. Por fim, reconhecer números escritos em notação científica é importante, pois esse tipo de representação está presente em diferentes textos científicos para representar números excessivamente grandes ou extremamente pequenos.

Mapeando conhecimentos

Escreva na lousa algumas potências com número real na base e expoente inteiro e peça aos estudantes que calculem o valor delas utilizando a estratégia que acharem mais conveniente. Por exemplo:

a) 7^0 **b)** 8^3 **c)** $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ **d)** $(0{,}1)^5$ **e)** $(\sqrt{6})^2$ **f)** $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ **g)** $(\sqrt{3})^{-2}$

Após calcularem, peça que comparem os resultados e expliquem como fizeram.

Após essa atividade, organize a turma em grupos e distribua um texto científico que apresente números representados em notação científica para que os grupos possam fazer a leitura compartilhada e discutir o tema. Em seguida, peça aos grupos que escrevam os números presentes com todos os algarismos.

Para as aulas iniciais

Proponha aos estudantes que recordem as propriedades da potenciação da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* e façam as **atividades 3** e **4**. Depois, corrija as atividades na lousa.

Você pode retomar as atividades da dinâmica inicial e tirar as dúvidas remanescentes da turma. Escolha algumas potências para calcular com eles. Mostre também como expressar com todos os algarismos alguns números em notação científica.

(EF09MA18) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.

É importante que os estudantes compreendam o significado do sinal de uma potência quando a base for negativa e o expoente for par ou ímpar. Se eles simplesmente decorarem uma regra para aplicar em uma atividade sem que percebam o seu significado, eles podem se confundir e fazer o uso de forma equivocada. Para isso, resolva com os estudantes a potência $(-2)^2$, depois $(-2)^3$ e continue aumentando o expoente de 1 em 1, enfatizando o sinal da potência em cada resultado. Dessa forma, leve-os a perceber que, quando a base é negativa, o expoente par leva a um resultado positivo e o expoente ímpar leva a um resultado negativo.

Se considerar necessário, escreva alguns exemplos de potências com expoente negativo e resolva com os estudantes, esclarecendo todas as dúvidas.

- **Expoente zero, com base não nula**

$$a^0 = 1, \text{ com } a \neq 0$$

Confira alguns exemplos.

a) $5^0 = 1$

b) $\left(-\frac{8}{9}\right)^0 = 1$

c) $(101{,}54)^0 = 1$

d) $(-0{,}0001)^0 = 1$

- **Expoente inteiro negativo, com base não nula**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n, \text{ com } a \neq 0 \text{ e } -n \text{ inteiro negativo}$$

Confira alguns exemplos.

a) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

b) $(-7)^{-2} = \left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$

c) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1} = -\frac{4}{3}$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8}$

Observações

1. Quando a base é negativa, o sinal da potência é:

- positivo, se o expoente é par. Por exemplo:

$$(-0{,}1)^2 = (-0{,}1) \cdot (-0{,}1) = 0{,}01$$

- negativo, se o expoente é ímpar. Por exemplo:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

2. Convenciona-se que -2^4 representa $-(2^4) = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$, ao passo que $\underbrace{(-2)^4}_{-2 \text{ é a base}}$ é igual a $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$.

Logo: $-2^4 \neq (-2)^4$

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

Faça as atividades no caderno.

4 Calcule as potências a seguir.

a) 0^7 **4. a)** 0

b) -5^2 **4. b)** -25

c) $-(1{,}2)^2$ **4. c)** $-1{,}44$

d) $(-5)^2$ **4. d)** 25

e) $-(0{,}3)^0$ **4. e)** -1

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ **4. f)** $-\frac{8}{27}$

g) $-\left(\frac{2}{5}\right)^3$ **4. g)** $-\frac{8}{125}$

h) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2$ **4. h)** $\frac{25}{9}$

5 Calcule as potências de expoente negativo.

a) 7^{-1} **5. a)** $\frac{1}{7}$

b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ **5. b)** 25

c) $\left(\frac{5}{9}\right)^{-1}$ **5. c)** $\frac{9}{5}$

d) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-1}$ **5. d)** $-\frac{8}{3}$

e) $(-3)^{-3}$ **5. e)** $-\frac{1}{27}$

f) 10^{-2} **5. f)** $\frac{1}{100}$

g) $(-1)^{-5}$ **5. g)** -1

h) $\left(\frac{1}{100}\right)^{-1}$ **5. h)** 100

6 No caderno, escreva cada item na forma de potência com expoente inteiro negativo.

a) $\dfrac{1}{10^4}$ b) $\dfrac{1}{5^7}$ c) $\dfrac{1}{2^3}$ d) $\dfrac{1}{7^5}$

6. a) 10^{-4} 6. b) 5^{-7} 6. c) 2^{-3} 6. d) 7^{-5}

7 No caderno, escreva os números a seguir como potência de base 2.

a) 64 7. a) 2^6

b) $\dfrac{1}{32}$ 7. b) 2^{-5}

c) 256 7. c) 2^8

d) $\dfrac{1}{64}$ 7. d) 2^{-6}

8 Calcule o valor das expressões abaixo.

a) $(-3)^2 + (-3)^3$ 8. a) -18

b) $-(-2)^4 + (-2)^5 \cdot 4^{-3}$ 8. b) $-\dfrac{33}{2}$

c) $(4^0 : 4^{-1}) : (4^{-1} : 4^{-2})$ 8. c) 1

d) $\dfrac{(-1)^5}{(-2)^{-2} + (0{,}1)^{-2}}$ 8. d) $-\dfrac{4}{401}$

e) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ 8. e) $-\dfrac{80}{9}$

Propriedades das potências com expoentes inteiros

Vamos estudar as propriedades do cálculo com potências de expoente inteiro e base real não nula.

- **Produto de potências de mesma base**

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Analise alguns exemplos.

a) $2^2 \cdot 2^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^5$ ou
$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3+(-2)} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}$

c) $5^{m-1} \cdot 5^{2+m} = 5^{m-1+2+m} = 5^{2m+1}$

- **Quociente de potências de mesma base**

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Observe alguns exemplos.

a) $2^3 : 2^2 = \dfrac{(2 \cdot 2 \cdot 2)}{(2 \cdot 2)} = 2$ ou $2^3 : 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

b) $\dfrac{(0{,}3)^5}{(0{,}3)^2} = (0{,}3)^{5-2} = (0{,}3)^3$

c) $5^{-2} : 5^{-4} = 5^{-2-(-4)} = 5^{-2+4} = 5^2$

d) $3^{2m-1} : 3^{1-m} = 3^{2m-1-(1-m)} = 3^{2m-1-1+m} = 3^{3m-2}$

- **Potência de potência**

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Analise alguns exemplos.

a) $(2^2)^3 = (2 \cdot 2)^3 = (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2^6$
ou $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6$

b) $(10^5)^{-2} = 10^{5 \cdot (-2)} = 10^{-10}$

c) $(2^x)^{x-1} = 2^{x \cdot (x-1)} = 2^{x^2 - x}$

- **Potência de um produto ou de um quociente**

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$
$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

Analise alguns exemplos.

a) $(3 \cdot 5)^{-2} = 3^{-2} \cdot 5^{-2}$

b) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-2} = \dfrac{3^{-2}}{5^{-2}}$

Observação

Atenção para as desigualdades abaixo, com bases reais não nulas e expoentes inteiros.

- $a^m + a^n \neq a^{m+n}$
- $a^m - a^n \neq a^{m-n}$
- $(a^m)^n \neq a^{m^n}$, com a, m e $n \neq 1$
- $(a + b)^n \neq a^n + b^n$, com $a \neq -b$; a, b e $n \neq 1$
- $(a - b)^n \neq a^n - b^n$, com $a \neq b$

Propriedades das potências com expoentes inteiros

É preciso que os estudantes compreendam o significado das propriedades de potências para aplicá-las de forma que elas façam sentido. É importante que se faça uma comparação entre uma resolução com e sem a aplicação das propriedades para que eles percebam que sua utilização pode facilitar cálculos.

Este boxe *Veja que interessante* apresenta aos estudantes uma calculadora científica. Pode-se chamar a atenção deles para o fato de esse tipo de calculadora oferecer a possibilidade de efetuar cálculos que uma calculadora simples não efetua, como o de potências de base real e expoente inteiro, por exemplo. Muitas das funções desse tipo de calculadora poderão ser mais exploradas no Ensino Médio, mas ainda assim é importante que os estudantes conheçam esse tipo de equipamento e que tenham a oportunidade de utilizá-lo para realizar cálculos compatíveis com os conceitos estudados até o momento.

Verifique a conveniência de lembrar aos estudantes que calculadoras diferentes, por vezes, requerem procedimentos diferentes para os cálculos.

Sugestão de atividade extra

Peça aos estudantes que utilizem uma calculadora científica para calcular as seguintes potências:

- 23^{12}
- 52^2
- 12^4
- 126^2

Ao final, peça a eles que avaliem a utilização da calculadora nessas atividades, comparando com a resolução feita sem a utilização da calculadora.

Respostas:

- 21914624432020321
- 2704
- 20736
- 15876

Veja que interessante

Faça as atividades no caderno.

Calculadora científica

A calculadora científica possibilita a resolução de cálculos básicos, fracionários, de porcentagem, científicos e estatísticos. Nos *smartphones*, como o da imagem, você pode usar uma calculadora científica escolhendo um aplicativo de calculadora que inclua essa funcionalidade.

Confira agora alguns exemplos de cálculos que utilizam as teclas $\boxed{x^y}$ e $\boxed{x^2}$.

a) $2^3 \longrightarrow \boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$

b) $2^{-3} \longrightarrow \boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$

c) $(-2)^{-3} \longrightarrow \boxed{2}\ \boxed{+/-}\ \boxed{x^y}\ \boxed{3}\ \boxed{+/-}\ \boxed{=}$

d) $9^2 \longrightarrow \boxed{9}\ \boxed{x^2}$

e) $(-9)^2 \longrightarrow \boxed{9}\ \boxed{+/-}\ \boxed{x^2}$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Veja que interessante:
a) 8
b) 0,125
c) –0,125
d) 81
e) 81

OWE ANDERSSON/ALAMY/GLOW IMAGES

Atividade

Analise as sequências de teclas de cada exemplo anterior e identifique os resultados que aparecem no visor de uma calculadora científica. Em seguida, se possível, utilize uma calculadora científica para conferir os resultados.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9 Aplique as propriedades e expresse os resultados na forma de uma única potência.

a) $3^5 \cdot 3^{-2}$ **9. a)** 3^3

b) $m^5 \cdot m^{-6}$, com $m \neq 0$ **9. b)** m^{-1}

c) $(0{,}1)^{-3} \cdot (0{,}1)^3$ **9. c)** $(0{,}1)^0$

10 Transforme as expressões em uma única potência.

a) $(5^2)^{-4}$ **10. a)** 5^{-8}

b) $(n^{-5})^4$, com $n \neq 0$ **10. b)** n^{-20}

c) $(5^2)^n$ **10. c)** 5^{2n}

d) $\dfrac{x^3}{x^{-2}}$, com $x \neq 0$ **10. d)** x^5

11 Aplique as propriedades das potências de um produto ou de um quociente.

a) $(3 \cdot 7)^4$ **11. a)** $3^4 \cdot 7^4$

b) $(2^4 \cdot a^{-3})^{-1}$, com $a \neq 0$ **11. b)** $2^{-4} \cdot a^3$

c) $(a^{3x} : b^x)^{-4}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ **11. c)** $a^{-12x} : b^{-4x}$

12 Determine o valor das potências 2^{3^2} e $(2^3)^2$. **12.** 512 e 64

13 Escreva, na forma fracionária, a expressão $(3^{-4})^5$. **13.** $\frac{1}{3^{20}}$

14 Sendo $a = 10^{-4}$, $b = 10^{-5}$ e $c = 10^3$, determine:

a) $a : b^2$ **14. a)** 10^6

b) $a : (b \cdot c)$ **14. b)** 10^{-2}

15 Simplifique cada expressão a seguir.

a) $\dfrac{x^{10} \cdot (x^2)^4}{x^{23} : x^2}$, com $x \neq 0$ **15. a)** x^{-3}

b) $\dfrac{5^{3x-2} \cdot 5^{x-1}}{5^{x-5}}$ **15. b)** 5^{3x+2}

Veja que interessante

Faça as atividades no caderno.

Os prefixos mais conhecidos

Confira estas afirmações.

- A medida do comprimento do armário é 80 **centí**metros.
- Quero comprar 5 **quilo**gramas de carne.
- A usina termoelétrica produzia 17 **mega**watts de energia.

As partes destacadas das palavras – centi, quilo e mega – são denominadas **prefixos**. Cada prefixo corresponde a uma potência de base 10.

Neste quadro estão os prefixos mais conhecidos.

Nome do prefixo	Símbolo do prefixo	Potência de base 10 correspondente ao prefixo	Significado do prefixo na forma decimal
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000 (trilhão)
giga	G	10^{9}	1 000 000 000 (bilhão)
mega	M	10^{6}	1 000 000 (milhão)
quilo	k	10^{3}	1 000 (mil)
hecto	h	10^{2}	100 (cem)
deca	da	10^{1}	10 (dez)
deci	d	10^{-1}	0,1 (décimo)
centi	c	10^{-2}	0,01 (centésimo)
mili	m	10^{-3}	0,001 (milésimo)
micro	µ	10^{-6}	0,000001 (milionésimo)
nano	n	10^{-9}	0,000000001 (bilionésimo)
pico	p	10^{-12}	0,000000000001 (trilionésimo)

Quando falamos sobre medida de armazenamento de dados, geralmente usamos o termo *byte* com as devidas variações de prefixo. No entanto, o *bit* é a menor unidade de medida de informação que pode ser armazenada ou transmitida; um conjunto de 8 *bits* corresponde a 1 *byte* (1 B), que é a unidade-padrão de medida de armazenamento de dados.

Como a quantidade de informação armazenada utiliza o sistema binário (base 2), os fatores de multiplicação para a obtenção das unidades de medida são potências de 2. Analise alguns exemplos:

a) 1 *quilobyte* (kB) é igual a 2^{10} B ou 1 024 B;

b) 1 *megabyte* (MB) é igual a 2^{20} B ou 1 048 576 B;

c) 1 *gigabyte* (GB) é igual a 2^{30} B ou 1 073 741 824 B.

Podemos utilizar potências de base 10 para expressar valores aproximados para os múltiplos do *byte*. Assim:

a) 1 *quilobyte* (kB) é aproximadamente igual a 1 000 B ou 10^{3} B;

b) 1 *megabyte* (MB) é aproximadamente igual a 1 000 000 B ou 10^{6} B;

c) 1 *gigabyte* (GB) é aproximadamente igual a 1 000 000 000 B ou 10^{9} B.

Atividade

Compare os resultados de 2^{10} e 10^{3}; 2^{20} e 10^{6}; e 2^{30} e 10^{9}. Verifique quão próximos estão.

Veja que interessante: Resposta em *Orientações*.

Este boxe *Veja que interessante* explora o significado dos prefixos mais conhecidos. É importante que os estudantes percebam que cada um desses prefixos está associado a uma potência de base 10. Converse com eles a respeito do uso de palavras que utilizam esses mesmos prefixos no dia a dia.

Medidas que usam os prefixos **tera**, **giga** e **mega** são usadas para expressar medidas muito grandes e as que usam **micro**, **nano** e **pico** são usadas para expressar medidas muito pequenas.

Na **atividade do boxe**, os números a serem comparados são:

$2^{10} = 1024$ e $10^{3} = 1000$

$2^{20} = 1048576$ e $10^{6} = 1000000$

$2^{30} = 1073741824$ e $10^{9} = 1000000000$

Espera-se que os estudantes identifiquem que os resultados desses números são bem próximos.

Lendo e aprendendo

BNCC:

- Competências gerais 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 3 e 8 (as descrições estão na página VII).
- Habilidades EF09MA04 e EF09MA18.

Objetivos:

- Desenvolver a competência leitora.
- Reconhecer números escritos em notação científica.
- Reconhecer o *byte* como unidade de medida de armazenamento.
- Refletir sobre o enfrentamento do problema das *fake news*.

Temas contemporâneos transversais:

CIÊNCIA E TECNOLOGIA · FORMAÇÃO CIDADÃ · SAÚDE

Para fazer a leitura do texto da seção, os estudantes podem se organizar em duplas ou pequenos grupos. Depois, peça a alguns deles que relatem as principais ideias do texto aos colegas e proponha um debate a respeito do assunto. É importante que eles expressem suas opiniões e apresentem argumentos para validá-las, o que favorece o desenvolvimento das competências gerais **7** e **9** da BNCC.

É importante enfatizar para a turma que a matéria foi publicada em novembro de 2021 e que, portanto, o 5G já pode estar implementado de maneira sólida em várias regiões do país. Caso julgue oportuno, converse com os estudantes sobre a situação atual da internet na região onde vivem e realize uma pesquisa para saber quais deles têm acesso ao 5G. Os dados coletados podem ser representados em tabela ou gráfico de barras simples, o que favorece o desenvolvimento das competências específicas **3** e **8** da BNCC.

CIÊNCIA E TECNOLOGIA · FORMAÇÃO CIDADÃ · SAÚDE

Lendo e aprendendo

5G no Brasil

Governo anuncia chegada da tecnologia para o ano que vem. Veja perguntas e respostas sobre a nova geração de internet móvel

O governo brasileiro anunciou para o ano que vem a chegada ao país do 5G. A nova geração de internet móvel, que já é utilizada em algumas partes do mundo, promete revolucionar diversos setores. Algumas pessoas, no entanto, criticam o fato de tanto dinheiro ser investido na nova tecnologia enquanto parte dos brasileiros não tem nenhum tipo de acesso à rede.

Há outras críticas? Quais os desafios para a implementação? O que vai mudar na prática? Quais são as vantagens tecnológicas? Verifique as respostas a essas e outras dúvidas:

O 4G vai acabar?

Não. Todas as outras gerações de internet vão continuar funcionando.

O que é o 5G?

É a nova tecnologia de rede de internet móvel, mais potente e veloz, com menor tempo de resposta dos comandos. É uma evolução do 4G. A letra "G" significa geração, ou seja, mostra a evolução dessas tecnologias.

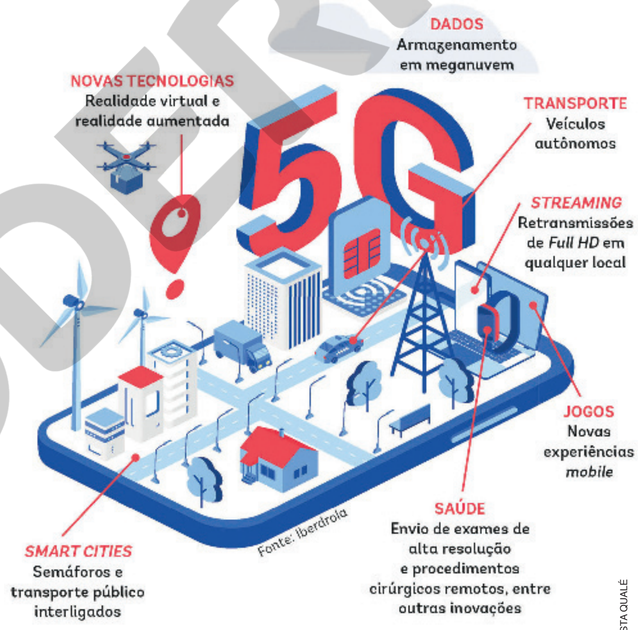
O que vai mudar na prática?

O engenheiro e mestre em tecnologia Eduardo Tude explica que a velocidade maior e a latência menor vão permitir uma série de aplicações não suportadas pelo 4G. "Abre um leque grande de possibilidades", diz.

Ele cita como exemplo a internet das coisas, não só com os celulares conectados, mas geladeiras, máquinas de lavar, televisores e uma infinidade de aparelhos eletrônicos. Cidades e casas inteligentes também poderão ser uma realidade. Testes com automóveis totalmente autônomos, inclusive, já estão avançados em várias partes do mundo. Outro setor que deve se beneficiar é o da saúde, com telemedicina e diagnósticos muito mais avançados, além de cirurgias feitas remotamente.

Ah, e claro, a vida de quem joga no celular também deve mudar bastante para melhor, por causa da velocidade do 5G.

latência: tempo que demora para a transferência de informações dentro da rede. Por isso, quanto menor for essa medida, mais rápido vai chegar o pacote de dados de um ponto a outro.



REVISTA QUALÉ

26

(**EF09MA04**) Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.

(**EF09MA18**) Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.

[...]

A polêmica da desigualdade

A principal delas diz respeito à desigualdade de acesso à internet no país. Apesar de crescente, pesquisa do IBGE mostrou que um em cada quatro brasileiros ainda não está conectado. De um lado, alguns acham que a proposta do governo para o 5G vai piorar esse cenário. Do outro, dizem que o modelo proposto para a implementação da nova tecnologia vai ajudar a diminuir essa diferença de conectividade. Verifique dois argumentos:

Contrário à proposta do governo

Para Flávia Lefèvre, o início da discussão sobre o 5G não levou em conta a desigualdade de acesso da maneira adequada. Segundo ela, poucas pessoas vão ser beneficiadas, principalmente as de alta renda. "Do ponto de vista do equipamento, também há um risco da exclusão de um grande número de pessoas com condições de adquirir novos aparelhos. Depois, temos uma realidade com relação ao acesso de internet móvel muito desigual, o que deve aumentar ainda mais", ressalta.

Favorável

O engenheiro Eduardo Tude argumenta que a implementação da nova geração da internet deve, necessariamente, caminhar com a instalação do 4G em lugares que ainda não contam com essa tecnologia. Ele lembra que o governo exige que as empresas que forem instalar o 5G ampliem o alcance de redes como um todo, principalmente para a parcela menos atingida hoje. "Ou seja, vai beneficiar todo mundo", acredita.

Qualquer celular terá acesso?

Não. Será preciso ter um aparelho compatível com a tecnologia 5G. Essa, inclusive, é outra crítica ao modelo, pois hoje o aparelho mais barato à venda que suporta a nova geração de internet custa por volta de R$ 3 mil. Para Tude, no entanto, a tendência é que os preços diminuam com o tempo.

[...]

Como funciona?

Por meio de antenas que transmitem ondas (ou frequências) de rádio, assim como as outras redes móveis. A ideia é que as da nova rede sejam acopladas às já existentes. Claro, novas antenas também devem ser instaladas para alcançar distâncias maiores.

Qual é a diferença em relação ao 4G?

A velocidade da rede 5G pode chegar a 10 *gigabytes* por segundo, que pode ser até 100 vezes mais rápida do que a 4G. Isso significa, por exemplo, que um filme de alta definição poderá ser baixado em uma fração de segundos, o que leva cerca de uma hora com as redes 4G atuais.

Já a latência da tecnologia 5G deve ser entre 1 e 2 milissegundos. No caso do 4G, esse intervalo é de 35 a 52 milissegundos. Outra diferença é que, com o 5G, será possível conectar mais dispositivos simultaneamente. Além disso, espera-se que a nova geração de internet seja mais sustentável, com uma redução de cerca de 90% do consumo de energia.

milissegundo: milésima parte do segundo.

É *fake*!

Pouco depois do início da pandemia, uma mensagem circulou nas redes sociais dizendo que as ondas de transmissão do 5G poderiam "carregar" o vírus da Covid-19, aumentando assim a transmissão da doença. Porém, não há uma evidência científica sobre isso. A Organização Mundial da Saúde (OMS), inclusive, já negou que os vírus possam viajar em ondas de rádio e redes móveis.

O texto traz uma polêmica sobre a desigualdade de acesso à internet no país. É importante que eles tenham ciência de que essa desigualdade já existia antes da implementação do 5G e que a polêmica está relacionada à piora ou melhora desse cenário com a chegada desta nova tecnologia. Este pode ser o momento oportuno para antecipar a realização da **atividade 3**. Em um primeiro momento, solicite aos estudantes que escrevam os textos individualmente, depois separe a turma em dois grupos: um que concorda com a visão de Flávia Lefèvre e outro que concorda com a visão de Eduardo Tude. Em seguida, peça a alguns estudantes que leiam os textos que produziram e promova um debate entre os grupos.

Dinâmicas como essa demandam que os estudantes escutem os colegas com atenção e empatia e respeitem o modo de pensar deles. Além disso, eles exercitam o diálogo. Dessa forma, a competência geral **9** e a competência específica **8** da BNCC têm o seu desenvolvimento favorecido.

• Na **atividade 1**, os estudantes vão responder a algumas questões sobre o texto. Após responderem, você pode propor outras questões, como: “O que é o 5G? Outras gerações de internet vão continuar existindo, após a implementação do 5G? Qual é a medida de velocidade que a rede 5G pode chegar? As ondas de frequência do 5G fazem mal à saúde? Quais foram os benefícios trazidos por cada geração de internet?”. Você também pode propor aos estudantes que elaborem suas próprias questões para que outro colega as responda.

• Antes de realizarem a **atividade 2**, recorde com os estudantes que o *bit* é a menor unidade de medida de informação que pode ser armazenada ou transmitida e que um conjunto de 8 *bits* corresponde a 1 *byte* (1 B), que é a unidade-padrão de medida de armazenamento de dados. Comente também que assim como outras unidades de medida de outras grandezas, o *byte* também tem múltiplos. Como a quantidade de informação armazenada utiliza o sistema binário (base 2), os fatores de multiplicação para a obtenção das unidades de medida são potências de 2. Observe alguns exemplos:

• 1 *quilobyte* (kB) é igual a 2^{10} B ou 1 024 B;

• 1 *megabyte* (MB) é igual a 2^{20} B ou 1 048 576 B;

• 1 *gigabyte* (GB) é igual a 2^{30} B ou 1 073 741 824 B.

Enfatize com eles que, no entanto, podemos utilizar potências de base 10 para expressar valores aproximados para os múltiplos do *byte*. Assim:

• 1 *quilobyte* (kB) é aproximadamente igual a 1 000 *bytes* ou 10^3 *bytes*;

• 1 *megabyte* (MB) é aproximadamente igual a 1 000 000 *bytes* ou 10^6 *bytes*;

• 1 *gigabyte* (GB) é aproximadamente igual a 1 000 000 000 *bytes* ou 10^9 *bytes*.

Para realizar a atividade, primeiro eles devem identificar no texto que a medida de velocidade da rede 5G pode chegar a 10 *gigabytes* por segundo. Como 10 GB $\simeq 10 \cdot 10^9$ B $= 1 \cdot 10^{10}$ B, então a medida de velocidade da rede 5G pode chegar a aproximadamente $1 \cdot 10^{10}$ B por segundo (alternativa **a**).

• A **atividade 4** envolve o tema das *fake news*. Promova uma roda de conversa com a turma e deixe os estudantes à vontade para contar as experiências que tiveram com publicações falsas divulgadas na mídia. Em seguida, aborde como checar se uma publicação é verdadeira ou não. Comente com eles que, para verificar se uma publicação é confiável, é necessário:

• identificar se a publicação possui data e fonte confiável;

• ler toda a publicação, e não apenas a manchete ou o título;

• pesquisar sobre o autor da publicação;

• pesquisar sobre a publicação em outras fontes.

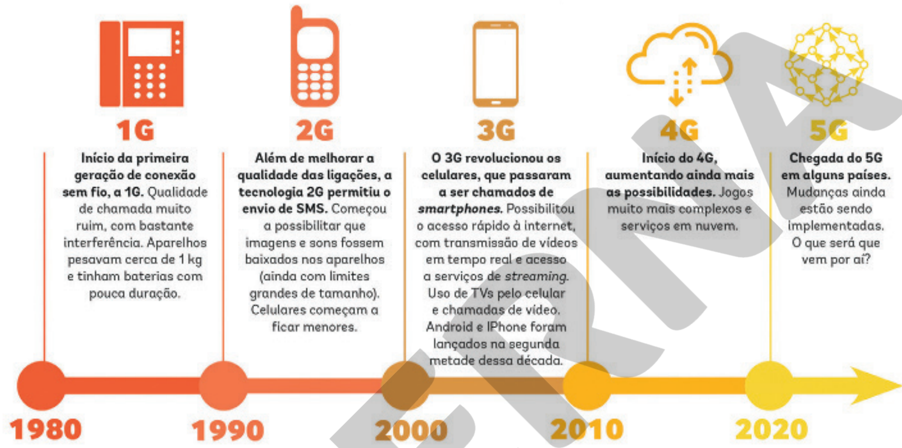
Lendo e aprendendo

Há risco para a saúde?

Algumas pessoas alertaram sobre a possibilidade de as ondas de frequência fazerem mal à saúde. De acordo com a OMS, a classificação de toda radiação de radiofrequência (da qual os sinais de celular fazem parte) é de “possivelmente cancerígenas”. Na prática, isso quer dizer que não há evidências concretas sobre o assunto. Para se ter uma ideia, comer legumes em conserva ou usar talco em pó, por exemplo, são classificados com o mesmo nível de risco. Já a ingestão de bebidas alcoólicas e o consumo de carne processada são classificados com riscos maiores.

A evolução da tecnologia

Fazer uma videochamada, mandar mensagem de texto, ouvir música, trabalhar... Hoje, podemos realizar inúmeras tarefas com nossos celulares. Mas nem sempre foi assim. Observe como tudo começou.



REVISTA QUALÉ

CABRAL, M. C. 5G no Brasil. **Qualé**, São Paulo, edição 38, p. 6-9, 1º a 15 de novembro de 2021.

Atividades

1. Responda às questões no caderno.

a) Em que mês e ano a matéria anterior foi publicada? **1. a)** Em novembro de 2021.

b) De acordo com o IBGE, qual era a porcentagem de brasileiros, em 2021, que não estava conectada à internet? **1. b)** 25%

2. Qual é, aproximadamente, a medida de velocidade a que a rede 5G pode chegar?

Dica: B é o símbolo utilizado para representar a unidade de medida *byte*. **2.** alternativa **a**

a) 10^{10} B por segundo
b) 10^9 B por segundo
c) 10^6 B por segundo
d) 10^{11} B por segundo

3. Em relação à polêmica que diz respeito à desigualdade de acesso à internet no país, você concorda com a opinião de Flávia Lefèvre ou com a de Eduardo Tude? Escreva um pequeno texto para justificar sua resposta.
3. Respostas pessoais.

4. Vivemos em um mundo em que há muitas informações circulando. São tantas fontes e pessoas produzindo e compartilhando informação que fica difícil realmente saber o que é e o que não é verdade. Por isso se fala muito em *fake news*: publicações com informações comprovadamente falsas que costumam viralizar nas redes sociais. O texto apresenta um exemplo de *fake news* relacionado à chegada do 5G. Alguma vez você desconfiou de uma publicação divulgada na TV ou na internet? Você checou essa publicação? Como você fez para saber se era verdadeira ou falsa? Converse com os colegas sobre o assunto.
4. Respostas pessoais.

Notação científica

Números muito grandes ou muito próximos de zero podem ser escritos por meio de uma multiplicação da forma $\boldsymbol{x \cdot 10^{b}}$, em que:

- x pertence ao intervalo $1 < x < 10$;
- b é um número inteiro.

Chamamos essa representação de **notação científica**. Confira alguns exemplos.

- $5\,760 = 5{,}76 \cdot 10^{3}$ — 3 casas — expoente 3
- $36\,480 = 3{,}648 \cdot 10^{4}$ — 4 casas — expoente 4
- $520\,000 = 5{,}2 \cdot 10^{5}$ — 5 casas — expoente 5
- $0{,}00075 = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ — 4 casas — expoente −4
- $0{,}000008 = 8 \cdot 10^{-6}$ — 6 casas — expoente −6
- $0{,}000000457 = 4{,}57 \cdot 10^{-7}$ — 7 casas — expoente −7

Analise, agora, alguns valores que usualmente representamos com notação científica.

a) Medida da distância aproximada da Terra ao Sol: $150\,000\,000$ km $= 1{,}5 \cdot 10^{8}$ km;

b) Medida da velocidade da luz: $300\,000$ km/s $= 3 \cdot 10^{5}$ km/s

c) Medida aproximada de 1 ano-luz: $9\,460\,000\,000\,000$ km $= 9{,}46 \cdot 10^{12}$ km;

d) Medida de comprimento do diâmetro da molécula da água: 280 pm $= 0{,}000000000280$ m $= 2{,}8 \cdot 10^{-10}$ m;

e) Medida de comprimento do diâmetro de um elétron: $0{,}000000000000000001$ m $= 1 \cdot 10^{-18}$ m;

f) Femtossegundo: $0{,}000000000000001$ s $= 1 \cdot 10^{-15}$ s.

femtossegundo: unidade de medida de tempo que corresponde a 10^{-15} segundos.

MERYDOLLA/SHUTTERSTOCK

Representação artística da Terra no espaço.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

16 No caderno, escreva os números em notação científica.

a) 85 700 **16. a)** $8{,}57 \cdot 10^{5}$

b) 945 000 000 000 **16. b)** $9{,}45 \cdot 10^{11}$

c) 0,0000002 **16. c)** $2 \cdot 10^{-7}$

d) 13 000 000 **16. d)** $1{,}3 \cdot 10^{7}$

e) 1 080 000 000 **16. e)** $1{,}08 \cdot 10^{9}$

f) 0,00000000013 **16. f)** $1{,}3 \cdot 10^{-10}$

17 Uma pessoa adulta tem cerca de 5 litros de sangue. Em uma pessoa saudável, 1 mm^{3} de sangue possui, aproximadamente:

- 5 milhões de glóbulos vermelhos ou hemácias;
- 8 mil glóbulos brancos ou leucócitos.

Escreva, em notação científica, quantas hemácias e quantos leucócitos possui, aproximadamente, um adulto.

17. glóbulos vermelhos: $2{,}5 \cdot 10^{13}$
glóbulos brancos: $4 \cdot 10^{10}$

Notação científica

É importante que os estudantes compreendam o conceito de notação científica e percebam a conveniência de expressar números muito grandes ou muito pequenos utilizando um produto em que um dos fatores é uma potência de base 10.

Sugestão de trabalho interdisciplinar

Após explorar o texto e os exemplos com os estudantes, você pode organizá-los em duplas ou trios e distribuir para eles textos relacionados à Astronomia ou à Química em que estejam presentes números representados em notação científica. Em seguida, peça que façam a leitura compartilhada, um resumo do que entenderam e, por fim, uma breve apresentação do que acharam mais importante para o restante da turma. A atividade pode ser realizada em parceria com os professores de Ciências e Língua Portuguesa. Atividades como essa favorecem o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **5**, **7** e **9**, uma vez que esse tipo de atividade exercita a curiosidade intelectual dos estudantes, mobiliza conhecimentos das linguagens matemática e científica, incentiva a argumentação com base em dados e informações confiáveis e, também, a empatia e o diálogo. Além disso, favorece também o desenvolvimento das competências específicas **2**, **3**, **4** e **8** da BNCC, pois desenvolve a capacidade de produzir argumentos convincentes, relaciona diferentes áreas do conhecimento, envolve a observação de aspectos quantitativos e a interação dos estudantes com seus pares.

Sugestão de atividade extra

Se julgar conveniente, solicite aos estudantes que realizem uma pesquisa sobre como se desenvolveram historicamente o conceito de notação científica, as razões para esse desenvolvimento e suas principais aplicações. É possível também avançar para um trabalho interdisciplinar com Geografia e Ciências, explorando as medidas muito grandes ou muito pequenas. Essa atividade pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA18**.

- Para a **atividade 17**, se julgar necessário, relembre aos estudantes que 1 dm^{3} = 1 L.

Raiz enésima de um número real

BNCC:

Habilidade EF09MA03.

Objetivos:

- Compreender como se calcula a raiz enésima de um número real.
- Compreender a noção de radical e suas propriedades.

Justificativa

Calcular a raiz enésima de um número real amplia o estudo da radiciação para outros índices e permite relacionar esse cálculo a potências com expoentes fracionários, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA03**. A compreensão da noção de radical e suas propriedades oferece aos estudantes a oportunidade de construir procedimentos próprios para efetuar cálculos que envolvem números reais na forma de raiz a ampliar o repertório de estratégias de resolução de problemas em que esses números estejam presentes.

Mapeando conhecimentos

Questione os estudantes: "O que é determinar a raiz quadrada de um número real? E a raiz cúbica? E a raiz enésima? Podemos calcular a raiz enésima de índice ímpar de qualquer número real? E a raiz enésima de índice par? Qual é a relação entre a raiz enésima e a potência de expoente fracionário?". Deixe-os à vontade para conjecturar e expor suas ideias.

Para as aulas iniciais

Relembre o cálculo da raiz quadrada exata e aproximada por meio do texto presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, explore com a turma as **atividades** de **5** a **7**. Após essa retomada, você pode explorar as questões propostas na dinâmica inicial. Incentive os estudantes a escrever com vocabulário próprio uma definição para raiz enésima e depois os ajude a perceber, por meio de exemplos, que as raízes de índice par de um número real negativo não são números reais.

Ao iniciar a abordagem de raiz enésima de um número real, discuta as especificidades a serem consideradas ao se trabalhar com raízes de números reais com índices diferentes de 2, como a raiz cúbica, a raiz quarta etc. Os conhecimentos já construídos a respeito de potências de um número real também precisarão ser mobilizados pelos estudantes; nesse momento, relacione ao conteúdo que está sendo introduzido.

18 O físico italiano Avogadro (1776-1856) mostrou que, em 18 g de água, há cerca de $6{,}02 \cdot 10^{23}$ moléculas. No caderno, escreva em notação científica o número aproximado de moléculas contidas em 1 miligrama de água. **18.** $3{,}34 \cdot 10^{19}$ moléculas

19 Junte-se a um colega e escreva dois números conforme as indicações abaixo para que ele os reescreva em notação científica. **19.** Respostas pessoais.

- O primeiro número deve ser da ordem do trilhão. Seu colega deverá arredondá-lo de forma que, em notação científica, fique com duas casas decimais.
- O segundo número deve estar entre 0 e 1 e ter mais de cinco casas decimais após a vírgula. Seu colega deverá arredondá-lo de forma que, em notação científica, fique com duas casas decimais.

3 Raiz enésima de um número real

Podemos escrever a raiz quadrada de um número real positivo como potência de expoente fracionário.

$$\boxed{\sqrt[2]{a^m} = a^{\frac{m}{2}}, \text{ em que } m \text{ é inteiro}}$$

Confira alguns exemplos abaixo.

a) $\sqrt{64} = \sqrt[2]{64^1} = 64^{\frac{1}{2}}$

b) $\sqrt{77} = \sqrt[2]{77^1} = 77^{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{7^3} = \sqrt[2]{7^3} = 7^{\frac{3}{2}}$

d) $16^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{16^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{16}}$

A raiz enésima de um número real a, sendo n um número natural e $n \geqslant 2$, pode ser representada assim:

$$\underbrace{\overset{\text{índice}}{\sqrt[n]{}}}\ \underset{\text{radicando}}{a}$$

Analise os dois exemplos abaixo.

a) $\sqrt[3]{64} = 4$

- $\sqrt[3]{64}$ é o radical.
- 3 é o índice do radical.
- 64 é o radicando.
- 4 é a raiz.
- Lemos: "raiz cúbica de sessenta e quatro".

b) $\sqrt[5]{-243} = -3$

- $\sqrt[5]{-243}$ é o radical.
- 5 é o índice do radical.
- -243 é o radicando.
- -3 é a raiz.
- Lemos: "raiz quinta de menos duzentos e quarenta e três".

Sugestão de leitura

RAMOS, Luzia Faraco. **Uma raiz diferente**. São Paulo: Ática, 2001. (Coleção A descoberta da Matemática).

O livro une as questões das raízes familiares do jovem personagem à raiz diferente citada no título: raiz quadrada e raiz cúbica. Há também desafios e atividades para prender a atenção do leitor.

Observações

1. Podemos omitir o índice 2 da raiz quadrada. Assim:

- $\sqrt[2]{16} = \sqrt{16}$
- $\sqrt[2]{25} = \sqrt{25}$
- $\sqrt[2]{\frac{49}{169}} = \sqrt{\frac{49}{169}}$

2. Sendo n um número natural, com $n \geqslant 2$, temos: $\sqrt[n]{0} = 0$

3. O termo *radical* é também nome do símbolo $\sqrt{}$.

30

A escrita de um radical como uma potência de expoente fracionário pode contribuir para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA03**, além de facilitar algumas operações.

(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

20 Como se leem os radicais abaixo?

a) $\sqrt{7}$ **20. a)** raiz quadrada de sete **b)** $\sqrt[3]{13}$ **20. b)** raiz cúbica de treze **c)** $\sqrt[4]{17}$ **20. c)** raiz quarta de dezessete **d)** $\sqrt[6]{42}$ **20. d)** raiz sexta de quarenta e dois

21 Na expressão $\sqrt[3]{343} = 7$, identifique:

a) a raiz; **21. a)** 7

b) o radicando; **21. b)** 343

c) o radical; **21. c)** $\sqrt[3]{343}$

d) o índice do radical. **21. d)** 3

22 Escreva quatro radicais (dois racionais e dois irracionais). Em seguida, peça a um colega que identifique quais são racionais e quais são irracionais. **22.** Resposta pessoal.

Determinação da raiz enésima de um número real

Na determinação da raiz enésima de um número real a, ou seja, $\sqrt[n]{a}$, podem ocorrer os casos a seguir.

- **1º caso: $a \geqslant 0$ e n um número natural maior ou igual a 2.**

Analise os exemplos a seguir.

a) $\sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow 4^2 = 16$

b) $\sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

c) $\sqrt[3]{125} = 5 \Leftrightarrow 5^3 = 125$

d) $\sqrt[5]{32} = 2 \Leftrightarrow 2^5 = 32$

Sendo a um número real, $a \geqslant 0$ e n um número natural maior ou igual a 2, temos que $\sqrt[n]{a}$ corresponde ao número real **não negativo** b, tal que $b^n = a$. Assim:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- **2º caso: $a < 0$ e n um número natural ímpar maior que 2.**

Analise os exemplos a seguir.

a) $\sqrt[3]{-1\,000} = -10$

b) $\sqrt[5]{-1\,024} = -4$

c) $\sqrt[3]{-27} = -3$

Sendo a um número real, $a < 0$ e n um número natural ímpar maior que 2, temos que $\sqrt[n]{a}$ corresponde ao número real **negativo** b, tal que $b^n = a$. Assim:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

- **3º caso: $a < 0$ e n um número natural par diferente de zero.**

Como determinar $\sqrt{-4}$ no conjunto dos números reais?

$\sqrt{-4}$ não é um número real, pois nenhum número real elevado ao quadrado é igual a -4.

Sendo a um número real, $a < 0$ e n um número natural par diferente de zero, temos que $\sqrt[n]{a}$ **não representa um número real**.

Determinação da raiz enésima de um número real

Comente com os estudantes que uma maneira de encontrar as raízes descritas no 1º e 2º caso é decompor o radicando em fatores primos.

Propriedades dos radicais

Se julgar conveniente, mostre algebricamente para os estudantes a 2ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} =$$
$$= a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} =$$
$$= \sqrt[n]{a^1} \cdot \sqrt[n]{b^1} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

23 Determine o valor de:

a) $\sqrt{100}$ 23. a) 10
b) $\sqrt[4]{256}$ 23. b) 4
c) $\pm\sqrt{25}$ 23. c) ±5
d) $-\sqrt{144}$ 23. d) –12
e) $\sqrt[3]{-8}$ 23. e) –2
f) $3\sqrt{16}$ 23. f) 12

24 Determine o valor das expressões abaixo.

a) $-\sqrt{81} - \sqrt[3]{-27}$ 24. a) –6
b) $\sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{-1} + \sqrt{0,25}$ 24. b) –0,5

25 Em cada caso, determine o valor de a.

a) $\sqrt{a} = 100$ 25. a) 10 000
b) $\sqrt[3]{a} = -6$ 25. b) –216
c) $\sqrt[4]{a} = 5$ 25. c) 625

26 Identifique os radicais que representam números reais. 26. alternativas **a**, **c**, **d**

a) $\sqrt{0}$
b) $\sqrt{-1}$
c) $\sqrt{1}$
d) $\sqrt[3]{-1}$
e) $\sqrt[6]{-1}$
f) $\sqrt[16]{-1}$

27 Em cada caso, determine o valor de x.

a) $\sqrt{2x} = 6$, para $x \geqslant 0$ 27. a) 18
b) $\sqrt[3]{x+1} = 2$, para $x \geqslant -1$ 27. b) 7
c) $\sqrt{x+2} = 5$, para $x \geqslant -2$ 27. c) 23

28 Sendo $a = 64$ e $b = 36$, determine:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} - \left(\sqrt{a+b}\right)$$ 28. 4

29 Determine o valor de x.

$$x = \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$$ 29. 5

Propriedades dos radicais

As propriedades dos radicais podem ser usadas na simplificação dos cálculos.

1ª propriedade

Analise as igualdades:

$\boxed{\sqrt[3]{64} = 4}$ (I) $\qquad$ $\boxed{64 = 4^3}$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

$$\sqrt[3]{4^3} = 4$$

Dados a um número real e n um número natural, temos:
- se n é ímpar e maior que 2, $\sqrt[n]{a^n} = a$;
- se n é par, não nulo, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Confira mais alguns exemplos.

a) $\sqrt{13^2} = |13| = 13$ **b)** $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$ **c)** $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$ **d)** $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

2ª propriedade

Analise as igualdades:

$\boxed{\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6}$ (I) $\qquad$ $\boxed{\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6}$ (II)

Igualando (I) a (II), temos:

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$$

Dados a e b números reais não negativos e n um número natural maior ou igual a 2, temos:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Confira mais alguns exemplos.

a) $\sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{7}$

b) $\sqrt[4]{2 \cdot 3 \cdot 7} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{7}$

c) $\sqrt[3]{5 \cdot 17} = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{17}$

d) $\sqrt[5]{2^3 \cdot x \cdot y^3} = \sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[5]{y^3}$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$

3ª propriedade

Analise as igualdades:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{I} \qquad\qquad \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3} \quad \text{II}$$

Igualando I a II, temos:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

Dados a e b números reais não negativos, com b diferente de 0, e n um número natural maior ou igual a 2, temos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Confira mais alguns exemplos.

a) $\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{a^5}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^5}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{a^5}}{b}$, com $a \geqslant 0$ e $b > 0$

c) $\sqrt[3]{\frac{5}{17}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{17}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{a^3}{7b}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{7b}}$, com $a \geqslant 0$ e $b > 0$

4ª propriedade

Analise a igualdade:

$$\sqrt[3]{5^3} = 5 \quad \text{I}$$

Multiplicando o índice do radical e o expoente do radicando por 2, obtemos:

$$\sqrt[3 \cdot 2]{5^{3 \cdot 2}} = \sqrt[6]{5^6} = 5 \quad \text{II}$$

Igualando I a II, temos:

$$\sqrt[3]{5^3} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^{3 \cdot 2}}$$

Continue mostrando as propriedades dos radicais.

- 3ª propriedade:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a^1}}{\sqrt[n]{b^1}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

- 4ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m \cdot p}{n \cdot p}} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m : p}{n : p}} = \sqrt[n : p]{a^{m : p}}$$

Mostre também a 5ª propriedade:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} =$$
$$= a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} =$$
$$= \sqrt[n \cdot m]{a^1} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

• Antes de os estudantes iniciarem as atividades propostas, peça a eles que identifiquem qual propriedade dos radicais deverá ser utilizada na resolução de cada atividade. Eles deverão observar que, nas **atividades 30** e **31**, eles podem utilizar a 1ª propriedade.

De modo inverso, podemos observar que:

$$\sqrt[6]{5^6} = \sqrt[6:2]{5^{6:2}} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

Dados a um número real não negativo, n um número natural maior ou igual a 2 e m e p números naturais diferentes de zero, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Dados a um número real não negativo, n um número natural maior ou igual a 2 e m e p números naturais diferentes de zero, sendo p divisor comum a m e n, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

Confira mais alguns exemplos.

a) $\sqrt[5]{2^3} = \sqrt[5 \cdot 2]{2^{3 \cdot 2}} = \sqrt[10]{2^6}$

b) $\sqrt{3^{25}} = \sqrt[2 \cdot 2]{3^{25 \cdot 2}} = \sqrt[4]{3^{50}}$

c) $\sqrt[8]{x^6} = \sqrt[8:2]{x^{6:2}} = \sqrt[4]{x^3}$, com $x \geqslant 0$

d) $\sqrt[10]{b^{15}} = \sqrt[10:5]{b^{15:5}} = \sqrt{b^3}$, com $b \geqslant 0$

5ª propriedade

Analise as igualdades:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{8} = 2 \quad \text{(I)}$$

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2 \quad \text{(II)}$$

Igualando (I) a (II), temos:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64}$$

Dados a um número real não negativo e m e n números naturais maiores ou iguais a 2, temos:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Confira mais alguns exemplos.

a) $\sqrt{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[2 \cdot 3]{3} = \sqrt[6]{3}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[3 \cdot 5]{7} = \sqrt[15]{7}$

c) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$

d) $\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{5}}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[24]{5}$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

30 Determine o valor dos radicais.

a) $\sqrt{7^2}$ **30. a)** 7

b) $\sqrt[3]{11^3}$ **30. b)** 11

c) $\sqrt{x^2}$ **30. c)** $|x|$

d) $\sqrt[5]{6^5}$ **30. d)** 6

e) $\sqrt[3]{(a+b)^3}$ **30. e)** $a + b$

f) $\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3}$ **30. f)** ab

31 Decomponha o radicando em fatores primos e determine o valor dos radicais.

a) $\sqrt{25}$ **31. a)** $\sqrt{5^2} = 5$

b) $\sqrt[4]{81}$ **31. b)** $\sqrt[4]{3^4} = 3$

c) $\sqrt[8]{256}$ **31. c)** $\sqrt[8]{2^8} = 2$

d) $\sqrt[3]{343}$ **31. d)** $\sqrt[3]{7^3} = 7$

e) $\sqrt{121}$ **31. e)** $\sqrt{11^2} = 11$

f) $\sqrt[4]{625}$ **31. f)** $\sqrt[4]{5^4} = 5$

32 Transforme os radicais em um produto de dois ou mais radicais.

a) $\sqrt{5\cdot 17}$ **32. a)** $\sqrt{5}\cdot\sqrt{17}$

b) $\sqrt[4]{5\cdot 7\cdot 11}$ **32. b)** $\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{7}\cdot\sqrt[4]{11}$

c) $\sqrt[5]{2\cdot x^4}$, com $x \geqslant 0$ **32. c)** $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{x^4}$

d) $\sqrt[3]{10\cdot 20}$ **32. d)** $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{20}$

e) $\sqrt[3]{3\cdot 7}$ **32. e)** $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{7}$

f) $\sqrt[3]{7\cdot a^2\cdot b}$, com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$
32. f) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b}$

33 Transforme em um quociente de radicais.

a) $\sqrt{\frac{5}{7}}$ **33. a)** $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

b) $\sqrt[3]{\frac{7}{11}}$ **33. b)** $\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{11}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{10}{17}}$ **33. c)** $\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{17}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$, com $a \geqslant 0$ e $b > 0$ **33. d)** $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

e) $\sqrt[5]{\frac{2x}{5y^3}}$, com $x \geqslant 0$ e $y > 0$ **33. e)** $\frac{\sqrt[5]{2x}}{\sqrt[5]{5y^3}}$

f) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ **33. f)** $\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}$

34 Simplifique os radicais, dividindo o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número.

a) $\sqrt[4]{3^2}$ **34. a)** $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[5]{7^{10}}$ **34. b)** 7^2

c) $\sqrt[8]{7^6}$ **34. c)** $\sqrt[4]{7^3}$

d) $\sqrt[12]{2^3\cdot a^6}$, com $a \geqslant 0$ **34. d)** $\sqrt[4]{2\cdot a^2}$

e) $\sqrt[15]{5^{10}}$ **34. e)** $\sqrt[3]{5^2}$

f) $\sqrt[6]{a^2b^2}$, com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$ **34. f)** $\sqrt[3]{ab}$

35 Decomponha os radicandos em fatores primos e, em seguida, simplifique os radicais.

a) $\sqrt[8]{64}$ **35. a)** $\sqrt[4]{2^3}$

b) $\sqrt[10]{625}$ **35. b)** $\sqrt[5]{5^2}$

c) $\sqrt[20]{243}$ **35. c)** $\sqrt[4]{3}$

d) $\sqrt[14]{128}$ **35. d)** $\sqrt{2}$

36 Transforme em uma única raiz.

a) $\sqrt{\sqrt{5}}$ **36. a)** $\sqrt[4]{5}$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[2]{13}}$ **36. b)** $\sqrt[10]{13}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ **36. c)** $\sqrt[6]{7}$

d) $\sqrt[5]{\sqrt[6]{11}}$ **36. d)** $\sqrt[30]{11}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{4}}}$ **36. e)** $\sqrt[30]{4}$

f) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}$, com $x \geqslant 0$ **36. f)** $\sqrt[16]{x}$

37 Determine o valor do número natural x maior ou igual a 2 nas expressões abaixo.

a) $\sqrt[15]{2^{10}} = \sqrt[x]{2^2}$ **37. a)** 3

b) $\sqrt[6]{13^9} = \sqrt{13^x}$ **37. b)** 3

c) $\sqrt[x]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[15]{7}$ **37. c)** 5

d) $\sqrt[9]{6^6} = \sqrt[3]{6^x}$ **37. d)** 2

38 Transforme em um único radical.

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$ **38. a)** $\sqrt{15}$

b) $\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{11}$ **38. b)** $\sqrt[3]{77}$

c) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$ **38. c)** $\sqrt{70}$

d) $\sqrt[12]{5}\cdot\sqrt[12]{10}$ **38. d)** $\sqrt[12]{50}$

e) $\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{15}}{\sqrt{8}}$ **38. e)** $\sqrt{\frac{45}{2}}$

f) $\frac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{15}}$ **38. f)** $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

g) $\frac{\sqrt[6]{4}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{10}}}{\sqrt[6]{120}}$ **38. g)** $\sqrt[6]{\frac{1}{3}}$

39 Transforme em um único radical, escrevendo o radicando na forma mais simples possível.

a) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{24}}$ **39. a)** $\sqrt{\frac{5}{6}}$

b) $\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{18}}$ **39. b)** $\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$

c) $\frac{\sqrt[4]{30}}{\sqrt[4]{24}}$ **39. c)** $\sqrt[4]{\frac{5}{4}}$

d) $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{20}}$ **39. d)** $\sqrt[5]{\frac{4}{5}}$

40 Identifique as sentenças verdadeiras.
40. alternativas **a**, **d**, **e**

a) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$, com $a \geqslant 0$ e $b > 0$

b) $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$, com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$

c) $\sqrt{a^2+b^2} = a + b$, com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$

d) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a$, com $a \geqslant 0$

e) $\sqrt{a^2\cdot b^2} = a\cdot b$, com $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$

f) $\sqrt{x^2-y^2} = \sqrt{x^2} - \sqrt{y^2} = x - y$, com $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$

• Se achar conveniente, continue a identificação prévia de qual propriedade deverá ser utilizada na resolução das **atividades** de **32** a **36**. Espera-se que os estudantes observem que, na **atividade 32**, podem utilizar a 2ª propriedade; na **atividade 33**, a 3ª propriedade; nas **atividades 34** e **35**, a 4ª propriedade; na **atividade 36**, a 5ª propriedade.

Operações com radicais

Objetivo:

Efetuar operações com radicais.

Justificativa

Efetuar operações com radicais amplia o repertório de estratégias de cálculo dos estudantes e possibilita simplificar expressões numéricas.

Mapeando conhecimentos

Proponha aos estudantes que efetuem as seguintes operações envolvendo radicais:

- $\sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16}$
- $7\sqrt{13} - 4\sqrt{13}$
- $2\sqrt[3]{81} + 5\sqrt[3]{3}$

Observe se os estudantes extraem todas as raízes no primeiro cálculo, colocam em evidência o radical comum no segundo cálculo e se reduzem o radical $\sqrt[3]{81}$ a $3\sqrt[3]{3}$ no terceiro cálculo para depois proceder como abaixo:

$$2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} = 6\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{3} =$$
$$= (6 + 5)\sqrt[3]{3} = 11\sqrt[3]{3}$$

Procure mapear também os conhecimentos deles sobre a multiplicação, a divisão e a potenciação de radicais. Proponha que façam os cálculos em duplas se achar necessário.

Para as aulas iniciais

Revisite os cálculos da dinâmica inicial e faça-os na lousa com a participação da turma.

Adição e subtração de radicais

Ao trabalhar com a adição e a subtração envolvendo radicais, enfatize que a realização dessas operações só é possível quando os radicais envolvidos forem semelhantes.

É comum os estudantes inferirem equivocadamente que $\sqrt[n]{a+b} = \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$ ou que $\sqrt[n]{a-b} = \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}$, sendo *a* e *b* números reais não negativos e *n* um número maior ou igual a 2.

Para evitar esse tipo de confusão, explore contraexemplos de adição e de subtração, mostrando que essa propriedade não existe.

- $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
  $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$
  $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{9} + \sqrt{16}$
- $\sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$
  $\sqrt{25} - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2$
  $\sqrt{25-9} \neq \sqrt{25} - \sqrt{9}$

Incentive os estudantes a encontrar outros contraexemplos que revelem a não validade dessas identidades.

4 Operações com radicais

Adição e subtração de radicais

Na adição e na subtração com radicais, três casos podem ser considerados.

- **1º caso:** Todos os radicais têm o mesmo índice e o mesmo radicando, ou seja, são semelhantes.
  Efetuamos as adições e as subtrações dos fatores externos e mantemos o mesmo radical. Por exemplo:

$$3\sqrt{3} - \sqrt{3} - 5\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(3 - 1 - 5 + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$$

- **2º caso:** Todos os radicais podem ser reescritos como radicais semelhantes. Por exemplo:
  $\sqrt{180} + \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{5} = 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

- **3º caso:** Apenas alguns radicais são semelhantes.
  Efetuamos as adições e as subtrações dos radicais semelhantes e repetimos os radicais não semelhantes. Por exemplo:
  $\sqrt{5} - 3\sqrt{5} + \sqrt{10} + 3\sqrt{2} - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - 4\sqrt{5}) + \sqrt{10} + 3\sqrt{2} = -6\sqrt{5} + \sqrt{10} + 3\sqrt{2}$

Observação

Preste muita atenção às desigualdades abaixo.

- $\sqrt{3} + \sqrt{2} \neq \sqrt{5}$
- $2 + \sqrt{5} \neq 2\sqrt{5}$
- $\sqrt{25 + 24} \neq 5 + \sqrt{24}$

Neste caso, devemos primeiro efetuar a adição expressa no radicando para depois extrair a raiz. Assim: $\sqrt{25 + 24} = \sqrt{49} = 7$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

41 Efetue as operações a seguir.

a) $\sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7}$ **41. a)** $-2\sqrt{7}$

b) $2\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{64}$ **41. b)** $4\sqrt[5]{2}$

c) $2\sqrt{16} + 3\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[4]{16} + \sqrt[6]{16}$ **41. c)** $\sqrt[3]{4} + 6\sqrt[3]{2} + 16$

d) $(3\sqrt{2} + 7\sqrt{3}) + (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ **41. d)** $9\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$

e) $\sqrt{32} - 2\sqrt{12} - \sqrt{75} + 3\sqrt{72}$ **41. e)** $22\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$

42 Simplifique as expressões abaixo.

a) $3\sqrt[3]{2} - 7\sqrt[3]{2} - 6\sqrt[3]{2}$ **42. a)** $-10\sqrt[3]{2}$

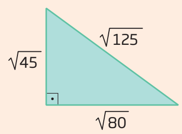
b) $\sqrt{12} - \sqrt[4]{9} - \sqrt[6]{27} - \sqrt[8]{81}$ **42. b)** $-\sqrt{3}$

c) $2\sqrt{150} - 4\sqrt{54} + 6\sqrt{24}$ **42. c)** $10\sqrt{6}$

d) $7\sqrt{32} - 5\sqrt{2} + \sqrt{8}$ **42. d)** $25\sqrt{2}$

43 Determine a medida do perímetro das figuras.

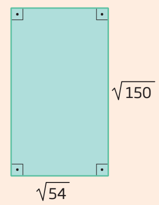
a)



43. a) $12\sqrt{5}$

43. b) $16\sqrt{6}$

b)



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

44 Considerando, com aproximação de centésimos, $\sqrt{2} = 1{,}41$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$, determine o valor aproximado do número real *y* na forma decimal, sendo: **44.** 94,20

$y = \sqrt{200} + \sqrt{300} + \sqrt{800} + \sqrt{1\,200}$

Multiplicação de radicais

No estudo da 2ª propriedade dos radicais, vimos que:

$$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$$

Logo, podemos escrever:

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9}$$

De forma análoga, podemos ter:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{2 \cdot 7} = \sqrt[3]{14}$

b) $\sqrt[5]{6} \cdot \sqrt[5]{11} = \sqrt[5]{6 \cdot 11} = \sqrt[5]{66}$

c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{5 \cdot 6} = \sqrt{30}$

d) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{10 \cdot 12} = \sqrt[3]{120}$

e) $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{7} \cdot 3\sqrt{10} = (2 \cdot 3)\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 10} = 6\sqrt{350}$

Se os radicais tiverem índices diferentes, devemos reduzi-los ao mesmo índice e, depois, efetuar a operação. Acompanhe o exemplo a seguir.

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{200}$$

Em alguns casos, podemos simplificar uma expressão que envolva radicais utilizando a propriedade distributiva. Seguem alguns exemplos:

a) $\sqrt{3} \cdot (\sqrt{2} + 5) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot 5 = \sqrt{3 \cdot 2} + \sqrt{3} \cdot 5 = \sqrt{6} + 5\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{7} - \sqrt{5}) = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5 \cdot 7} - \sqrt{5 \cdot 5} = \sqrt{35} - \sqrt{25} = \sqrt{35} - 5$

c) $(2 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5}) = 2 \cdot 3 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - (\sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 5 = \sqrt{5} + 1$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

45 Calcule mentalmente os produtos.

a) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{6}$ **45. a)** $3\sqrt{10}$

b) $3\sqrt[5]{6} \cdot 4\sqrt[5]{5}$ **45. b)** $12\sqrt[5]{30}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ **45. c)** 1

d) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt[3]{11}$ **45. d)** $\sqrt[3]{77}$

e) $3\sqrt[3]{2} \cdot 2\sqrt[3]{3}$ **45. e)** $6\sqrt[3]{6}$

f) $\sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10}$ **45. f)** 1

46 Determine a medida do perímetro e a medida da área de cada figura.

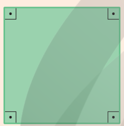
a)

$3\sqrt{3}$

$4\sqrt{3}$

46. a) medida do perímetro: $14\sqrt{3}$; medida da área: 36

b)



$6 - \sqrt{7}$

$6 - \sqrt{7}$

46. b) medida do perímetro: $24 - 4\sqrt{7}$; medida de área: $(43 - 12\sqrt{7})$

47 Efetue as multiplicações a seguir.

a) $\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{50}$ **47. a)** $\sqrt[5]{300}$

b) $3\sqrt[3]{8} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{8}$ **47. b)** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{3}$

48 Determine os produtos a seguir.

a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2}$ **48. a)** $\sqrt[6]{72}$

b) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt{8}$ **48. b)** $2\sqrt[4]{8}$

c) $\sqrt[4]{2^3} \cdot \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt{2}$ **48. c)** $2\sqrt[4]{2^3}$

d) $\sqrt[8]{5} \cdot \sqrt[6]{5}$ **48. d)** $\sqrt[24]{5^7}$

e) $\sqrt{10} \cdot \sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[3]{30}$ **48. e)** $2\sqrt[30]{2^7 \cdot 3^{16} \cdot 5^{25}}$

f) $\sqrt[3]{0,04} \cdot \sqrt[6]{625}$ **48. f)** 1

49 Aplicando a propriedade distributiva, determine os produtos abaixo.

a) $\sqrt{7} \cdot (\sqrt{7} - 1)$ **49. a)** $7 - \sqrt{7}$

b) $(\sqrt{5} - 1) \cdot (\sqrt{5} + 3)$ **49. b)** $2 + 2\sqrt{5}$

c) $(\sqrt{3} - 2) \cdot (1 - \sqrt{3})$ **49. c)** $3\sqrt{3} - 5$

d) $\sqrt{5} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})$ **49. d)** $\sqrt{10} + \sqrt{15}$

e) $(2\sqrt{2} + 2) \cdot (2 - \sqrt{2})$ **49. e)** $2\sqrt{2}$

f) $\sqrt{2} \cdot (1 - \sqrt{2})$ **49. f)** $\sqrt{2} - 2$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Multiplicação de radicais

Acrescente o seguinte exemplo quando citar a multiplicação usando a propriedade distributiva:

$$(2 + \sqrt{5}) \cdot (2 - \sqrt{5}) =$$

$$= 4 - 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 5 = -1$$

Comente que nessa multiplicação o radical desapareceu e que esse resultado será utilizado quando quisermos obter um número racional no denominador de uma fração.

Divisão de radicais

Comente com os estudantes que, para reduzir dois ou mais radicais a um mesmo índice, o novo índice deverá ser um múltiplo comum dos índices atuais; em seguida, basta utilizar a 4ª propriedade dos radicais, vista no tópico *Propriedades dos radicais*.

Divisão de radicais

No estudo da 3ª propriedade dos radicais, vimos que:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

Logo, podemos escrever:

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}}$$

De forma análoga, podemos ter:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{17}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\dfrac{17}{4}}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[5]{\dfrac{3}{8}}$

c) $\sqrt{8} : \sqrt{2} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

d) $\sqrt[3]{30} : \sqrt[3]{18} = \dfrac{\sqrt[3]{30}}{\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{\dfrac{30}{18}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{3}}$

Se os radicais tiverem índices diferentes, devemos reduzi-los ao mesmo índice e, depois, efetuar a operação. Acompanhe o exemplo:

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{5^3}$$

$$\sqrt{5} : \sqrt[3]{4} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{4^2}} = \sqrt[6]{\frac{5^3}{4^2}} = \sqrt[6]{\frac{125}{16}}$$

$$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{4^2}$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

50 Determine os quocientes abaixo.

a) $\sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2}$ **50. a)** 4

b) $\sqrt[5]{3^5} : \sqrt[5]{3^2}$ **50. b)** $\sqrt[5]{3^3}$

c) $\sqrt{\dfrac{10}{3}} : \sqrt{\dfrac{5}{6}}$ **50. c)** 2

d) $8\sqrt{75} : 4\sqrt{3}$ **50. d)** 10

51 Efetue as divisões abaixo.

a) $\sqrt[3]{8} : \sqrt{2}$ **51. a)** $\sqrt{2}$

b) $\sqrt[8]{16} : \sqrt[12]{64}$ **51. b)** 1

c) $\sqrt[4]{6} : \sqrt{2}$ **51. c)** $\sqrt[4]{\dfrac{3}{2}}$

d) $\sqrt[3]{10} : \sqrt{2}$ **51. d)** $\sqrt[6]{\dfrac{25}{2}}$

e) $\sqrt[5]{7} : \sqrt[6]{7}$ **51. e)** $\sqrt[30]{7}$

f) $\sqrt[4]{8} : \sqrt[8]{8}$ **51. f)** $\sqrt[8]{8}$

Potenciação e radiciação de radicais

Potenciação de radicais

Analise os exemplos de potências a seguir:

a) $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2} = \sqrt{2^3}$, então: $(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2^3}$

b) $(\sqrt[3]{5})^4 = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \sqrt[3]{5^4}$, então: $(\sqrt[3]{5})^4 = \sqrt[3]{5^4}$

Para efetuar a potenciação com um radical em que o radicando é um número real positivo, elevamos o radicando ao expoente dado.

> Dados a um número real positivo, m um número natural maior ou igual a 2 e n um número inteiro, temos:
> $$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

Confira mais alguns exemplos.

a) $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{5 \cdot 5^2} = 5\sqrt{5}$

b) $\left(\sqrt[4]{7}\right)^8 = \sqrt[4]{7^8} = \sqrt[4]{7^4} \cdot \sqrt[4]{7^4} = 7 \cdot 7 = 7^2 = 49$

c) $\left(\sqrt[3]{ab^2}\right)^4 = \sqrt[3]{(ab^2)^4} = \sqrt[3]{a^4 \cdot b^8} = \sqrt[3]{a \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot b^3} = a \cdot b \cdot b \cdot \sqrt[3]{ab^2} = ab^2 \cdot \sqrt[3]{ab^2}$, com a e b números reais positivos

Radiciação de radicais

Analise as igualdades:

a) $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2]{4} = 2$

b) $\sqrt[6]{64} = 2$

Como as duas expressões, $\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}}$ e $\sqrt[6]{64}$, são iguais a 2, então:

$$\sqrt[2]{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

> Dados a um número real maior ou igual a zero e m e n números naturais maiores ou iguais a 2, temos:
> $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Confira mais alguns exemplos.

a) $\sqrt[5]{\sqrt{7}} = \sqrt[5 \cdot 2]{7} = \sqrt[10]{7}$

b) $\sqrt[3]{\sqrt{\dfrac{125}{64}}} = \sqrt[3 \cdot 2]{\dfrac{5^3}{2^6}} = \dfrac{\sqrt[6]{5^3}}{\sqrt[6]{2^6}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

52 Efetue as potenciações dos radicais abaixo.

a) $\left(2\sqrt{3}\right)^3$ **52. a)** $24\sqrt{3}$

b) $\left(2\sqrt{2}\right)^7$ **52. b)** $1\,024\sqrt{2}$

c) $\left(\sqrt[3]{ab}\right)^4$, em que $a > 0$ e $b > 0$ **52. c)** $ab\sqrt[3]{ab}$

d) $\left(2\sqrt[7]{a^5b^2}\right)^3$, em que $a > 0$ e $b > 0$ **52. d)** $8a^2\sqrt[7]{ab^6}$

e) $\left(\dfrac{x}{y} \cdot \sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)^2$, em que $x > 0$ e $y > 0$ **52. e)** $\dfrac{x}{y}$

f) $\left(\sqrt[5]{y^3}\right)^2$, em que $y > 0$ **52. f)** $y\sqrt[5]{y}$

53 Escreva cada expressão como uma única raiz.

a) $\sqrt[7]{\sqrt[4]{7}}$ **53. a)** $\sqrt[28]{7}$

b) $\sqrt{\sqrt[4]{512}}$ **53. b)** $2\sqrt[8]{2}$

54 Calcule o valor de cada uma das expressões abaixo.

a) $\left(\sqrt{2}\right)^6 + \left(2\sqrt{3}\right)^4 + \left(-3\sqrt{7}\right)^2 + \left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^{-2}$ **54. a)** 217

b) $\left(\sqrt[3]{\sqrt{64}}\right)^2$ **54. b)** 4

55 Identifique a alternativa correta.

A expressão $\dfrac{\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^2}{\left(\sqrt[10]{2}\right)^4}$ é igual a: **55.** alternativa **c**

a) $\sqrt[10]{2^3}$

b) $\sqrt[5]{2}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt[10]{2^4}$

e) $\sqrt[5]{2^3}$

Potenciação e radiciação de radicais

Se julgar conveniente, mostre que $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$:

$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{1}{m} \cdot n} =$
$= a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

E, mostre que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$:

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{a^{\frac{1}{n}}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} =$
$= a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Racionalização de denominadores

Comente com os estudantes que, como o intuito da racionalização é fazer transformar o denominador em um número racional, é preciso que a potência do radicando seja múltiplo do índice; assim, se no denominador temos, por exemplo, $\sqrt[5]{7^2}$, para eliminar esse radical precisamos de um radicando cuja potência seja múltipla de 5; para isso, podemos multiplicar a raiz por $\sqrt[5]{7^3}$, pois $\sqrt[5]{7^2} \cdot \sqrt[5]{7^3} = \sqrt[5]{7^2 \cdot 7^3} = \sqrt[5]{7^5}$, "transformando" o expoente 2 em 5, que é múltiplo de 5. É importante lembrar aos estudantes que, para não alterar o valor da fração, o radical que escolhemos para racionalizar o denominador deverá ser multiplicado também pelo numerador.

Racionalização de denominadores

Considere o número fracionário $\frac{5}{\sqrt{3}}$, cujo denominador é o número irracional $\sqrt{3}$.

Vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{3}$, obtendo uma fração equivalente:

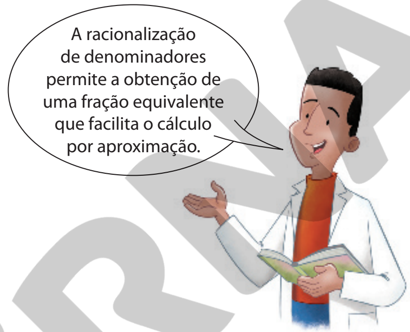
$$\frac{5 \cdot \boxed{\sqrt{3}}}{\sqrt{3} \cdot \boxed{\sqrt{3}}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Note que $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$. Assim, ao multiplicarmos $\frac{5}{\sqrt{3}}$ por essa expressão, não alteramos seu valor.

O número fracionário obtido, $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, tem denominador racional.

A esse procedimento damos o nome de **racionalização**.

Para racionalizar o denominador de um número fracionário, devemos multiplicar o numerador e o denominador por um radical ou uma expressão com radical chamada **fator racionalizante**, a fim de obter uma fração equivalente com denominador racional.



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

A seguir, vamos estudar os principais casos de racionalização.

- **1º caso:** O denominador é um radical de índice 2.

Analise os exemplos a seguir

a) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

Multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$, obtendo uma fração equivalente:

$$\frac{5 \cdot \boxed{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} \cdot \boxed{\sqrt{2}}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Como $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, ao multiplicarmos $\frac{5}{\sqrt{2}}$ por essa expressão, não alteramos seu valor.

b) $\sqrt{\frac{4}{17}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{17}}$

Vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{17}$.

$$\frac{2 \cdot \sqrt{17}}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{17^2}} = \frac{2\sqrt{17}}{17}$$

c) $\frac{3}{5\sqrt{7}}$

Vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{7}$.

$$\frac{3 \cdot \sqrt{7}}{5\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{5\sqrt{7^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{5 \cdot 7} = \frac{3\sqrt{7}}{35}$$

d) $\sqrt{\frac{5}{11}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{11}}$

Vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{11}$.

$$\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{11}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{11^2}} = \frac{\sqrt{55}}{11}$$

O produto que apresentamos no 3º caso de racionalização é conhecido como produto da soma pela diferença. Como, nesta obra, optamos por desenvolver o conteúdo referente aos *Produtos notáveis* somente no capítulo **4**, comente que esse tipo de produto será estudado mais adiante, mas que usaremos esse resultado como um artifício.

- **2º caso:** O denominador é um radical de índice diferente de 2.

  Analise os exemplos a seguir.

  a) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{7}}$

  Multiplicamos o numerador e o denominador da fração por $\sqrt[3]{7^2}$:

$$\frac{3\cdot\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{7^2}}=\frac{3\sqrt[3]{7^2}}{\sqrt[3]{7^3}}=\frac{3\sqrt[3]{7^2}}{7}$$

  b) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{2^3}}=\dfrac{2\cdot\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\cdot\sqrt[5]{2^2}}=\dfrac{2\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}=\dfrac{2\sqrt[5]{2^2}}{2}=\sqrt[5]{2^2}$

- **3º caso:** O denominador é uma adição ou uma subtração de dois termos, em que pelo menos um deles é uma raiz quadrada não exata (irracional).

  Confira o seguinte produto:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2-ab+ab-b^2 = a^2-b^2$$

Utilizaremos esse resultado para racionalizar denominadores que se enquadram nesse caso. Analise os exemplos a seguir.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

Como o denominador é uma adição de dois números irracionais $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$, multiplicamos o numerador e o denominador dessa fração por $(\sqrt{2}-\sqrt{3})$. Assim:

$$\frac{5\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{5(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=5\cdot\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-1}=-5(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

b) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{7}+\sqrt{5})}=\dfrac{\sqrt{2\cdot7}+\sqrt{2\cdot5}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{7-5}=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{10}}{2}$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

56 Racionalize o denominador dos seguintes números.

a) $\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ **56. a)** $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ **56. b)** $3\sqrt{2}$ c) $\dfrac{1}{7\sqrt[5]{8}}$ **56. c)** $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{14}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{7}}$ **56. d)** $\dfrac{\sqrt[3]{49}}{7}$

57 Racionalize os denominadores dos seguintes números.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ **57. a)** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ b) $\dfrac{3}{5-\sqrt{7}}$ **57. b)** $\dfrac{5+\sqrt{7}}{6}$ c) $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ **57. c)** $12-4\sqrt{6}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}$ **57. d)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

58 No caderno, identifique a alternativa que corresponde ao valor da expressão: **58.** alternativa **e**

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{8}}$$

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\sqrt{12}$ c) $-\dfrac{10}{\sqrt{288}}$ d) $-\dfrac{5\sqrt{2}}{12}$ e) $\dfrac{5\sqrt{2}}{12}$

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Potência de um número real com expoente inteiro

• A **atividade 1** envolve o cálculo de potências. Oriente os estudantes a fazer todas as passagens dos cálculos. Caso eles tenham dificuldades para realizar os **itens c** e **d**, verifique se perceberam que o expoente é um número inteiro negativo. Depois, você pode sugerir que se reúnam com um colega para que troquem ideias e comparem os procedimentos empregados.

• Na **atividade 2**, os estudantes devem aplicar as propriedades das potências com expoentes inteiros, expressando os resultados em forma de única potência. Incentive-os a realizar os cálculos passo a passo e a indicar qual propriedade estão empregando em cada passagem.

• Após os estudantes calcularem o valor das expressões numéricas da **atividade 3**, peça para que comparem as respostas e compartilhem como fizeram os cálculos. Esses momentos de troca ampliam o repertório de cálculo do estudantes e favorecem o desenvolvimento da competência geral **9** da BNCC.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Potência de um número real com expoente inteiro

Considere a um número real.

- **Expoente maior que 1**

  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ fatores}}$, com n número inteiro tal que $n > 1$

- **Expoente 1**

  $a^1 = a$

- **Expoente zero, com base não nula**

  $a^0 = 1$, com $a \neq 0$

- **Expoente inteiro negativo, com base não nula**

  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, com $a \neq 0$ e $-n$ número inteiro negativo

Propriedades das potências com expoentes inteiros

Considere que a e b são números reais não nulos e que m e n são números inteiros.

- **Produto de potências de mesma base**

  $$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- **Quociente de potências de mesma base**

  $$a^n : a^m = a^{n-m}$$

- **Potência de potência**

  $$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- **Potência de um produto ou de um quociente**

  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad$ $(a : b)^n = a^n : b^n$

1. Efetue as potências de números reais com expoentes inteiros.

a) $(-4)^0$ **1. a)** 1

b) $(-4)^3$ **1. b)** –64

c) $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-2}$ **1. c)** $\frac{64}{25}$

d) $-(0,2)^{-3}$ **1. d)** –125

2. Aplique as propriedades de potências e expresse os resultados na forma de única potência.

a) $3^4 \cdot 3^2 \cdot 3^0$ **2. a)** 3^6

b) $(2^8 : 2^5) \cdot 2^{-3}$ **2. b)** 2^0

c) $[(4^3)^2] : 4^{-5}$ **2. c)** 4^{11}

d) $[(-4)^2 \cdot 2]^3$ **2. d)** 2^{15}

3. Determine o valor das expressões numéricas.

a) $[(-4)^0 - 3^0 + (-2)^0 - 1^0]^{10}$ **3. a)** 0

b) $(2 \cdot 3)^2 : \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **3. b)** 9

c) $(3^0)^2 \cdot (2^2)^0$ **3. c)** 1

d) $(0^5 \cdot 1^4)^{20} \cdot (2^3 - 3^2) + (4^1 : 5^0)^2$ **3. d)** 16

Raiz enésima de um número real

Podemos escrever a raiz quadrada de um número real positivo como potência de expoente fracionário.

$$\sqrt[2]{a^m} = a^{\frac{m}{2}}, \text{ em que } m \text{ é inteiro}$$

Determinação da raiz enésima de um número real

Na determinação da raiz enésima de um número real a, ou seja, $\sqrt[n]{a}$, podem ocorrer os casos a seguir.

1º caso: $a \geqslant 0$ e n um número natural maior ou igual a 2. Por exemplo:

$$\sqrt{25} = 5 \Leftrightarrow 5^2 = 25$$

$$\sqrt[3]{64} = 4 \Leftrightarrow 4^3 = 64$$

2º caso: $a < 0$ e n um número natural ímpar maior que 2. Por exemplo:

$$\sqrt[3]{-1\,000} = -10$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1$$

3º caso: $a < 0$ e n um número natural par diferente de zero.

Sendo a um número real, $a < 0$ e n um número natural par diferente de zero, temos que $\sqrt[n]{a}$ não representa um número real.

4. Determine o valor das expressões numéricas.

a) $\sqrt[3]{27} + \sqrt[5]{-32} - \sqrt[10]{1}$ **4. a)** 0

b) $\sqrt[3]{343} - \sqrt[10]{1\,024}$ **4. b)** 5

c) $\sqrt{25} - \sqrt[3]{1\,000} + \sqrt[5]{-1\,024}$ **4. c)** –9

d) $\sqrt{100} \cdot \sqrt[3]{-216}$ **4. d)** –60

e) $\frac{\sqrt[5]{-243}}{\sqrt[7]{-128}}$ **4. e)** 1,5 ou $\frac{3}{2}$

Propriedades dos radicais

1ª propriedade

Dados a um número real e n um número natural, temos:

- se n é ímpar e maior que 2, $\sqrt[n]{a^n} = a$;
- se n é par, não nulo, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$.

Raiz enésima de um número real

• Na determinação do valor das expressões numéricas da **atividade 4**, os estudantes vão calcular raízes enésimas. Acompanhe-os durante a atividade e verifique se apresentam dificuldades com os radicandos negativos. Se achar necessário, escolha algumas expressões para resolver com eles na lousa.

2ª propriedade

Dados a e b números reais não negativos e n um número natural maior ou igual a 2, temos:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

3ª propriedade

Dados a e b números reais não negativos, com $b \neq 0$, e n um número natural maior ou igual a 2, temos:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

4ª propriedade

Dados a um número real não negativo, n um número natural maior ou igual a 2 e m e p números naturais diferentes de zero, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Dados a um número real não negativo, n um número natural maior ou igual a 2 e m e p números naturais diferentes de zero, sendo p divisor comum a m e n, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n : p]{a^{m : p}}$$

5ª propriedade

Dados a um número real não negativo e m e n números naturais maiores ou iguais a 2, temos:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

5. Aplique as propriedades e determine os valores dos radicais.

a) $\sqrt[3]{-216}$ **5. a)** -6

b) $\sqrt[6]{\left(\frac{3}{8}\right)^6}$ **5. b)** $\frac{3}{8}$

c) $\sqrt{\sqrt{1\,296}}$ **5. c)** 6

d) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{3}$ **5. d)** 12

e) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt{2^4}} \cdot \sqrt[5]{\sqrt[4]{2}}}}{\sqrt{\sqrt[10]{32}}}$ **5. e)** 1

f) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}}{\sqrt{\sqrt[4]{7^8}}}$ **5. f)** $\frac{2}{7}$

Operações com radicais

Adição e subtração de radicais

1º caso: Todos os radicais têm o mesmo índice e o mesmo radicando, ou seja, são semelhantes. Efetuamos as adições e as subtrações dos fatores externos e mantemos o mesmo radical. Por exemplo:

$$\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = (1 + 5 - 2)\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

2º caso: Todos os radicais podem ser reescritos como radicais semelhantes. Por exemplo:

$$\sqrt{7} - \sqrt{175} + \sqrt{28} = \sqrt{7} - \sqrt{5^2 \cdot 7} + \sqrt{2^2 \cdot 7} =$$
$$= \sqrt{7} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = (1 - 5 + 2)\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$$

3º caso: Apenas alguns radicais são semelhantes. Efetuamos as adições e as subtrações dos radicais semelhantes e repetimos os radicais não semelhantes. Por exemplo:

$$\sqrt{50} + 2\sqrt{6} - \sqrt{8} = \sqrt{5^2 \cdot 2} + 2\sqrt{6} - \sqrt{2^2 \cdot 2} =$$
$$= 5\sqrt{2} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} = (5 - 2)\sqrt{2} + 2\sqrt{6} =$$
$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$$

6. Efetue as adições e as subtrações a seguir.

a) $3\sqrt{7} + 4\sqrt{7} - \sqrt{7}$ **6. a)** $6\sqrt{7}$

b) $\sqrt[3]{256} - 2\sqrt[3]{4}$ **6. b)** $2\sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt{54} + 2\sqrt{6} - \sqrt{72}$ **6. c)** $5\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$

d) $\sqrt{8} - \sqrt{52} + \sqrt{18} - \sqrt{117}$ **6. d)** $5\left(\sqrt{2} - \sqrt{13}\right)$

Multiplicação de radicais

- Se os radicais têm mesmo índice, basta usar a 2ª propriedade dos radicais. Por exemplo:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{3 \cdot 4} = \sqrt[3]{12}$$

- Se os radicais tiverem índices diferentes, devemos reduzi-los ao mesmo índice e, depois, efetuar a multiplicação. Por exemplo:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{5} = \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{5^3} = \sqrt[6]{3^2 \cdot 5^3} = \sqrt[3]{1\,125}$$

- Em alguns casos, usamos a propriedade distributiva. Por exemplo:

a) $\sqrt{3}\left(\sqrt{5} + \sqrt{7}\right) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{7} =$

$= \sqrt{3 \cdot 5} + \sqrt{3 \cdot 7} = \sqrt{15} + \sqrt{21}$

b) $\left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) =$

$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} =$

$= \sqrt{10} + \sqrt{4} - \sqrt{15} - \sqrt{6} =$

$= 2 + \sqrt{10} - \sqrt{15} - \sqrt{6}$

Propriedades dos radicais

- Na **atividade 5**, os estudantes vão aplicar as propriedades dos radicais. Oriente-os a realizar os cálculos passo a passo e a indicar as propriedades que estão aplicando em cada passagem. Após realizarem os cálculos, faça a correção coletiva da atividade na lousa.

Operações com radicais

- Na **atividade 6**, os estudantes vão adicionar e subtrair radicais. Comente que a adição ou a subtração de radicais pode ser efetuada usando valores aproximados ou pode ser feita da maneira mais simples possível, conforme os exemplos que estudaram. Ajude-os a identificar os radicais semelhantes ou os radicais que podem ser reescritos como radicais semelhantes caso apresentem dificuldades.

43

Multiplicação de radicais

- Na **atividade 7,** os estudantes vão multiplicar e dividir radicais. Observe como eles procedem. Após realizarem os cálculos, escolha alguns itens para fazer a correção coletiva na lousa.

Potenciação e radiciação de radicais

- A proposta da **atividade 8** é que os estudantes apliquem as definições de potenciação e radiciação de radicais. Nos **itens a**, **b** e **c**, você pode propor a eles que também façam o cálculo aplicando a multiplicação de fatores iguais.

Racionalização de denominadores

- A **atividade 9** explora a racionalização de denominadores. Para realizar esta atividade, os estudantes mobilizam o que estudaram sobre as propriedades dos radicais e a propriedade distributiva. Procure identificar as possíveis dificuldades e dúvidas e ajude-os a superá-las.

Divisão de radicais

- Se os radicais têm mesmo índice, basta usar a 3ª propriedade dos radicais. Por exemplo:

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

- Se os radicais tiverem índices diferentes, devemos reduzi-los ao mesmo índice e, depois, efetuar a divisão. Por exemplo:

$$\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[6]{6^2}}{\sqrt[6]{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{6^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{36}{8}} = \sqrt[6]{\frac{9}{2}}$$

7. Efetue as multiplicações e as divisões com radicais.

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$ **7. a)** $\sqrt{35}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{4}}$ **7. b)** $\sqrt[3]{-2}$

c) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt{3}$ **7. c)** $\sqrt[10]{6075}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[3]{6}} \cdot \sqrt[4]{4}$ **7. d)** $\sqrt[12]{\dfrac{4}{3}}$

e) $2\sqrt{2} \cdot \left(2\sqrt{5} + \sqrt{2}\right)$ **7. e)** $4\left(\sqrt{10} + 1\right)$

f) $\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{7} + 2\sqrt{3}\right)$ **7. f)** $1 + \sqrt{21}$

Potenciação e radiciação de radicais

Potenciação de radicais

Dados a um número real positivo, m um número natural maior ou igual a 2 e n um número inteiro, temos:

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

Radiciação de radicais

Dados a um número real maior ou igual a zero e m e n números naturais maiores ou iguais a 2, temos:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

8. Efetue e simplifique quando possível as potenciações e as radiciações a seguir. Considere que a e b são números reais positivos.

a) $\left(\sqrt{3}\right)^6$ **8. a)** 27

b) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$ **8. b)** $\sqrt[3]{25}$

c) $\left(\sqrt[4]{b^2}\right)^2$ **8. c)** b

d) $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$ **8. d)** $\sqrt[6]{5}$

e) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}$ **8. e)** $\sqrt[8]{a}$

f) $\sqrt{\sqrt[3]{b^9}}$ **8. f)** $b\sqrt{b}$

Racionalização de denominadores

Quando temos uma fração com denominador irracional, multiplicamos o numerador e o denominador por um radical ou uma expressão com radical, a fim de obter uma fração equivalente com denominador racional.

1º caso: O denominador é um radical de índice 2. Por exemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

2º caso: O denominador é um radical de índice diferente de 2. Por exemplo:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{5}$$

3º caso: O denominador é uma adição ou uma subtração de dois termos, em que pelo menos um deles é uma raiz quadrada não exata (irracional). Por exemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{5} + 3} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{5} - 3\right)}{\left(\sqrt{5} + 3\right) \cdot \left(\sqrt{5} - 3\right)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(\sqrt{5} - 3\right)}{\sqrt{5^2} - 3^2} = \frac{2 \cdot \left(\sqrt{5} - 3\right)}{5 - 9} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(\sqrt{5} - 3\right)}{-4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

9. Racionalize os denominadores de cada uma das expressões a seguir.

a) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ **9. a)** $\sqrt{5}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2^2}}$ **9. b)** $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{5}}$ **9. c)** $\dfrac{\sqrt[10]{3^5 \cdot 5^8}}{5}$

d) $\dfrac{3}{\sqrt{2} - 1}$ **9. d)** $3\left(\sqrt{2} + 1\right)$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$ **9. e)** $-\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{14}}{4}$

f) $\dfrac{5\sqrt{3}}{10 + \sqrt{5}}$ **9. f)** $\dfrac{10\sqrt{3} - \sqrt{15}}{19}$

Capítulo 2

Matemática financeira

Trocando ideias

De acordo com o Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas (Sebrae), uma *startup* é um grupo de pessoas à procura de um modelo de negócios repetível e escalável, trabalhando em condições de extrema incerteza.

modelo de negócios: é como o trabalho é transformado em dinheiro.
repetível: ser capaz de entregar o mesmo produto novamente em escala potencialmente ilimitada, sem muitas customizações ou adaptações para cada cliente.
escalável: significa crescer cada vez mais em receita, mas com custos crescendo bem mais lentamente.
incerteza: corresponde ao cenário no qual não há como afirmar se uma ideia ou projeto irá realmente dar certo.

RAWPIXEL/SHUTTERSTOCK

Imagem que remete à criação de uma *startup* por um grupo de pessoas.

Imagine que você vai abrir uma *startup*. Qual seria o modelo de negócio dela? Por quê? Que cuidados você tomaria para obter lucro? Converse com os colegas. **Trocando ideias:** Respostas pessoais.

Neste capítulo, vamos resolver problemas envolvendo cálculos de lucro, prejuízo, desconto e acréscimo. Em seguida, vamos estudar juro simples e juro composto em diversas situações do dia a dia.

CAPÍTULO 2 – MATEMÁTICA FINANCEIRA

Trocando ideias

BNCC:

• Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
• Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

• Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre as ideias de lucro e prejuízo.
• Introduzir o conceito de *startup*.

Tema contemporâneo transversal:

Forme uma roda de conversa com os estudantes e pergunte se eles já ouviram falar no termo "*startup*" e se sabem o que significa. Após dar um tempo para que alguns estudantes se manifestem, discuta com eles a definição do Sebrae. Comente com os estudantes que a maior parte das *startups* são empresas de internet porque a *web* torna a expansão do negócio mais fácil, rápida e barata, além da venda ser repetível. Pergunte a eles se conhecem alguma *startup* e, em caso afirmativo, o que sabem sobre ela: modelo de negócio, resultados etc. Momentos como esse contribuem para o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8** da BNCC, pois incentivam os estudantes a dialogar e exercitar a empatia.

As questões propostas têm por objetivo despertar nos estudantes o espírito empreendedor. Se achar conveniente, você pode pedir que façam um planejamento da *startup* por escrito em seus cadernos. Oriente-os a pensar em um modelo de negócios, parceiros, de onde tirariam investimento e como pretendem lucrar. Depois, reserve uma aula para que todos possam compartilhar suas ideias. Aproveite o momento para abordar as noções de lucro e prejuízo com eles.

Operações comerciais

BNCC:

Habilidade EF09MA05.

Objetivo:

Entender as ideias de lucro e prejuízo.

Tema contemporâneo transversal:

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Justificativa

As ideias de lucro e prejuízo estão presentes nas operações comerciais e, consequentemente, no cotidiano dos estudantes. O entendimento dessas ideias contribui não apenas para que os estudantes calculem o preço de venda de produtos, como também para que reflitam sobre atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros no dia a dia.

Mapeando conhecimentos

Selecione alguns panfletos ou recortes de revistas ou jornais em que haja anúncios ou situações relacionados a valores monetários, mais especificamente a lucro e a prejuízo. É importante que as situações possam ser compreendidas pelos estudantes. Depois, organize a turma em grupos e entregue um panfleto ou recorte para que cada grupo analise e discuta. Incentive-os a falar sobre o teor das informações e também sobre os dados presentes. Durante as discussões, proponha as seguintes questões: "O que é lucro? Como calcular o lucro de uma venda? O que é prejuízo? Como calcular o prejuízo de algo que comprei e desvalorizou após um tempo?".

Para as aulas iniciais

Organize novamente a turma em grupos (os mesmos da dinâmica inicial) e peça que um grupo por vez exponha seu panfleto ou recorte e explique, para os demais grupos, as principais conclusões obtidas. A proposta é que as ideias de lucro e prejuízo amadureçam aos poucos conforme os grupos apresentem suas conclusões. Ao final, você pode solicitar aos grupos que elaborem problemas que envolvam as ideias de lucro ou prejuízo e, depois, troquem entre eles, para que um resolva o problema elaborado pelo outro. Reserve um tempo para discutir e resolver coletivamente alguns desses problemas.

1 Operações comerciais

As operações comerciais podem gerar **lucro** ou **prejuízo** sobre o preço de custo ou sobre o preço de venda do produto.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Pedro comprou um relógio por R$ 370,00 e quer vendê-lo em sua loja obtendo lucro de 25% sobre o preço de compra. Por quanto Pedro deve vender esse relógio para obter o lucro desejado?

O preço de venda (PV) do relógio deve ser igual ao preço de compra mais o lucro desejado na venda do relógio. Ou seja:

$$PV = 370 + \boxed{\frac{25}{100} \cdot 370}$$

25% sobre o preço de compra

$PV = 370 + 92{,}50$

$PV = 462{,}50$

Portanto, Pedro deve vender o relógio por R$ 462,50.

Situação 2

Jurandir comprou um carro elétrico por R$ 63 000,00 e 14 meses depois teve que vendê-lo por um valor 10% menor, em função da taxa de depreciação do veículo. Qual foi o valor que Jurandir obteve com a venda desse veículo?

O preço de venda (PV) desse carro elétrico deve ser igual ao preço de compra menos a taxa de depreciação (prejuízo obtido na venda). Ou seja:

$$PV = 63\,000 - \boxed{\frac{10}{100} \cdot 63\,000}$$

10% sobre o preço de compra

$PV = 63\,000 - 6\,300$

$PV = 56\,700$

Portanto, Jurandir vendeu o carro por R$ 56 700,00.

Situação 3

Um *notebook* foi vendido com um desconto de 20%. Se esse *notebook* custava R$ 3 000,00, qual foi o preço de venda com o desconto?

O preço de venda (PV) desse *notebook* deve ser igual ao preço do produto menos o valor correspondente ao desconto. Ou seja:

$$PV = 3\,000 - \boxed{\frac{20}{100} \cdot 3\,000}$$

20% sobre o preço de custo

$PV = 3\,000 - 600$

$PV = 2\,400$

Portanto, o preço de venda do *notebook* foi R$ 2 400,00.

Ao iniciar o estudo deste tópico, proponha aos estudantes que pesquisem a respeito do significado dos termos *lucro* e *prejuízo*.

Explique aos estudantes o conceito de "depreciação", usado na situação **2**. Depreciação está relacionada à perda de valor de um bem decorrente de seu uso, do desgaste natural ou de sua obsolescência.

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Situação 4

Rita faz enfeites de cerâmica para vender. Quando algum fica com defeito, ela vende por R$ 40,00 (20% mais barato que aqueles em perfeito estado). Qual é o valor dos enfeites em perfeito estado?

O preço de venda (*PV*) menos o desconto de 20% sobre esse valor é equivalente a R$ 40,00. Ou seja:

$$PV - \left(\frac{20}{100} \cdot PV\right) = 40$$

$$\frac{80}{100} \cdot PV = 40$$

Multiplicando os dois membros da igualdade acima por **100**, temos:

$$\frac{80}{100} \cdot PV \cdot \mathbf{100} = 40 \cdot \mathbf{100}$$

$$80 \cdot PV = 4000$$

Multiplicando os dois membros da igualdade acima por $\frac{1}{80}$, temos:

$$80 \cdot PV \cdot \frac{1}{80} = 4000 \cdot \frac{1}{80}$$

$$PV = \frac{4000}{80}$$

$$PV = 50$$

Portanto, o preço do enfeite em perfeito estado é R$ 50,00.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 Determine por quanto deve ser vendido um objeto comprado por R$ 700,00 para que se obtenha um lucro equivalente a 2,5% do preço de custo. **1.** R$ 717,50

2 Um produto cujo custo foi R$ 272,00 deve ser vendido com lucro de 15%. Qual deve ser o preço de venda? **2.** R$ 312,80

3 Um aparelho de *Blue-Ray* estava à venda por R$ 500,00 e foi vendido com desconto de 15%. Por quanto ele foi vendido? **3.** R$ 425,00

blu-ray: tipo de DVD com grande capacidade para armazenamento de áudios e vídeos de alta definição. Seu nome se origina da cor azul do raio *laser* utilizado para ler o disco.

TONY CORDOZA/GETTY IMAGES

4 Certa mercadoria sofreu avarias e foi vendida por R$ 1584,00, com prejuízo de 12% sobre o seu preço de custo. Qual era o preço de custo dessa mercadoria? **4.** R$ 1800,00

5 Valdênio vendeu um ar-condicionado usado com desconto de 6% sobre o preço de compra. Admitindo que ele tenha comprado o produto por R$ 1113,00, qual foi o preço de venda? **5.** R$ 1046,22

MAXX-STUDIO/SHUTTERSTOCK

6 Calcule o prejuízo de um comerciante que vendeu suas mercadorias por R$ 72788,80, perdendo nessa transação uma quantia equivalente a 3% do preço de custo. **6.** R$ 2251,20

- Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes concluam que, para determinar o valor pelo qual deve ser vendido o objeto, é preciso calcular:

  R$ 700,00 + 0,025 · R$ 700, 00

  Alguns estudantes podem concluir erroneamente que o valor da venda do objeto é R$ 2450, 00. Caso isso ocorra, é porque não escreveram a porcentagem 2,5% na forma de fração ou na forma decimal, ao realizar o cálculo. Antes de discutir o erro, incentive-os a refletir sobre a razoabilidade desse valor.
- A **atividade 3** envolve a ideia de desconto. Para determinar o valor de venda do aparelho de *Blue-Ray*, os estudantes devem realizar o seguinte cálculo:

  R$ 500, 00 – 0,15 · R$ 500, 00

  Caso alguns estudantes concluam que o valor de venda é superior a R$ 500, 00, incentive-os a perceber que tal valor não satisfaz as condições da situação-problema.
- Na **atividade 5**, incentive os estudantes a escreverem uma sentença que traduza o problema antes de calcular qualquer resultado. Espera-se que eles façam o seguinte cálculo:

  R$ 1113,00 – $\frac{6}{100}$ · R$ 1113,00

• Comente com os estudantes que a **atividade 7** apresenta um recurso muito útil para a organização e o controle das finanças pessoais ou familiares. Se achar conveniente, sugira a eles que apresentem ou compartilhem esse modelo de controle com os familiares.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA

7 **Orçamento** é a distinção e o cálculo das receitas e das despesas.

Para compor um orçamento familiar é importante conhecer com exatidão a receita disponível e controlar as despesas. O controle poderá ser realizado mensalmente, por exemplo.

O quadro abaixo é uma sugestão para o controle mensal de gastos de uma família.

Controle de gastos		Mês/ano:
Receitas	Salários Outros	MODELO
	Total de receitas (A)	
Controle de gastos		**Mês/ano:**
Gastos fixos (valores são iguais em todos os meses)	Aluguel/Prestação/Condomínio Prestação/Seguro do carro/IPVA IPTU Plano de saúde Educação: Escola/Cursos Clube/Academia Plano de aposentadoria/Seguro de vida Internet/TV a cabo Outros	MODELO
Gastos variáveis (valores variam mês a mês)	Alimentação Água/Energia/Gás Telefone fixo/Celular Transporte/Combustível Manutenção de casa/Manutenção de carro Outros	MODELO
Gastos arbitrários (nem sempre são feitos)	Cinema/Teatro Restaurante Roupas Jornais/Revistas Viagens Outros	MODELO
	Total de despesas (B)	MODELO
Saldo total	**A - B**	

Reúna-se com um colega e, com a ajuda do professor, conversem sobre as informações apresentadas no quadro. Em seguida, vocês deverão definir as características de uma família qualquer: perfil, idade de cada membro, local onde reside, de quantas pessoas, com quanto cada um contribui com a receita etc. Copiem e preencham o quadro no caderno com os valores que considerarem adequados. Depois do preenchimento, apresentem o quadro aos demais colegas. Conversem sobre os valores indicados, se estão de acordo com os valores praticados e se os gastos correspondem aos gastos da maioria das famílias brasileiras.

8. Comentários em *Orientações*.

48

2 Juro simples

Quando se aplica ou se pede emprestado um valor em dinheiro (**capital**), geralmente se recorre a uma instituição financeira. Para emprestar a um cliente determinada quantia, que só será paga no futuro, essa instituição cobra um valor adicional. Esse valor adicional é denominado **juro**. Do mesmo modo, se o cliente aplicar uma determinada quantia, após um período receberá um valor adicional, referente ao juro da aplicação.

Dizemos que:

> **Juro** é a remuneração que se recebe no caso de uma aplicação ou a quantia que deve ser paga no caso de um empréstimo.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Mariana solicitou um empréstimo de R$ 5 000,00 a um banco. Ela terá de pagar essa quantia ao término de 8 meses, com taxa de **juro simples** de 4% ao mês. Que quantia de juro Mariana deverá pagar ao banco ao término dessa operação?

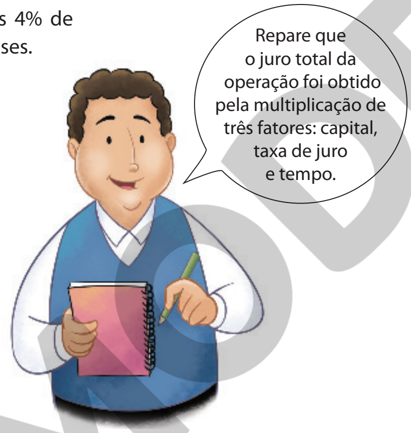
A quantia solicitada por Mariana, a ser paga no prazo de 8 meses, é chamada de **capital** (***C***).

$$C = \text{R\$ } 5\,000{,}00$$

A **taxa de juro** (***i***) é a taxa percentual que representa o valor do juro em relação ao capital, a ser pago ao término de 8 meses.

$$i = 4\% \text{ (taxa mensal)}$$

Para obter o **juro** (***j***) dessa operação, calculamos 4% de R$ 5 000,00 durante o intervalo de **tempo** (***t***) de 8 meses.



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

- juro mensal

  4% de R$ 5 000,00

  $$\frac{4}{100} \cdot \text{R\$ } 5\,000{,}00 = \underbrace{0{,}04}_{i} \cdot \underbrace{\text{R\$ } 5\,000{,}00}_{C}$$

  $j = \text{R\$ } 200{,}00$

- juro em 8 meses

  $$\underbrace{8}_{t} \cdot \text{R\$ } 200{,}00 = \text{R\$ } 1\,600{,}00$$

  $j = \text{R\$ } 1\,600{,}00$

Portanto, Mariana deverá pagar R$ 1 600,00 de juro ao banco ao término da operação.

Quando o valor do juro a ser realizado em uma operação financeira ao final de cada período é calculado apenas sobre o capital inicial, mantendo-se constante durante todo o tempo da transação, dizemos que essa transação foi realizada com **juro simples**.

Comente com os estudantes sobre a importância de estarem atentos ao juro cobrado em diferentes transações comerciais, como em um parcelamento da compra de um item. Por esse motivo, é importante que comparem os juros oferecidos pelas modalidades de crédito para evitar endividamentos.

Aproveite a primeira situação e pergunte aos estudantes: No total, quanto Mariana pagará ao banco? (Resposta: R$ 6 600,00).

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Juro simples

BNCC:

Habilidade EF09MA05.

Objetivo:

Compreender a ideia de juro simples.

Justificativa

Compreender a ideia de juro simples, possibilita aos estudantes entender a diferença entre comprar à vista e a prazo, situações de empréstimo, aplicações financeiras, entre outras. Além disso, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**, pois nesse contexto os estudantes resolvem e elaboram problemas envolvendo porcentagens.

Mapeando conhecimentos

Organize a turma em grupos e distribua panfletos ou recortes de jornais em que haja anúncios envolvendo juros, para que eles possam calcular e examinar cada um deles. Caso não consiga providenciar panfletos e/ou recortes, você pode trabalhar com situações fictícias, expondo-as na lousa. Incentive o uso de calculadoras para que possam conferir os valores divulgados e tirar outras conclusões que podem ser importantes para quem deseja adquirir aquele bem ou serviço publicado ali. Durante a atividade, observe como lidam com o conceito de juro. Para encaminhar as investigações que serão feitas por eles, você pode propor as seguintes questões: "Qual é a diferença de preço entre o valor à vista e o valor pago em parcelas? Qual seria o valor da parcela caso não houvesse juro? Qual é a porcentagem de juro?".

Para as aulas iniciais

Proponha aos estudantes que revisem o conceito de porcentagem presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* e façam as **atividades 8** e **9**. Após concluírem as atividades, peça que comparem as respostas com um colega. Verifique se tiveram alguma dificuldade e, em caso positivo, busque saná-la.

Retome algumas situações da dinâmica inicial e explore-as com a turma.

Ao trabalhar com juro simples, é importante que os estudantes, com base na análise de regularidades presentes em situações-problema, possam chegar às expressões para o cálculo do juro e do montante.

Sugestão de atividade extra

Proponha a seguinte atividade aos estudantes: Marcelo aplicou R$ 500,00 por dois anos a uma taxa de juro simples de 2% a.m.

Monte um quadro explicitando o valor correspondente ao juro obtido mês a mês, ao longo desses dois anos, por meio dessa aplicação.

Qual foi o valor correspondente ao juro total obtido por Marcelo por meio desse investimento? (Resposta: R$ 240,00).

Construa um quadro explicitando, mês a mês, o valor do montante obtido por meio dessa aplicação financeira no período de dois anos.

Ainda considerando esse problema, expresse, em função de n, o juro e o montante obtidos após terem se passado n meses a partir do início da aplicação. (Resposta: $j = 10n$ e $M = 10n + 500$).

Situação 2

Luana comprou uma televisão por R$ 2000,00; como ela não tinha o valor para pagar à vista, resolveu parcelar em 1 ano com uma taxa de juro simples de 1% ao mês.


97/GETTY IMAGES

Nessa situação, temos que:

$C =$ R$ 2000,00

$i = 1\%$ (taxa mensal)
$t = 12$ meses

Observe que a taxa de juros (i) e o intervalo de tempo (t) devem estar na mesma unidade (mês).

Então:

Total de juro: $\underbrace{\text{R\$ } 2000{,}00}_{\text{capital}} \cdot \overbrace{\underbrace{0{,}01}_{\text{taxa}}}^{1\% \text{ de R\$ } 2000{,}00} \cdot \underbrace{12}_{\text{tempo}} = \text{R\$ } 240{,}00$

Total a pagar: $\underbrace{\text{R\$ } 2000{,}00}_{\text{capital}} + \underbrace{\text{R\$ } 240{,}00}_{\text{juro}} = \text{R\$ } 2240{,}00$

Ao final do período, Luana terá pago R$ 240,00 de juro e, ao todo, R$ 2240,00.

Assim, um capital ***C***, aplicado a uma taxa mensal ***i***, durante um intervalo de tempo ***t***, gera um total de juro simples ***j***, que pode ser assim expresso:

$$\boxed{j = C \cdot i \cdot t}$$

O total a ser pago ao final da operação é denominado **montante** (***M***) e corresponde ao capital mais o total de juro. Ou seja:

$$\boxed{M = C + j}$$

50

Situação 3

Ademir usou uma planilha eletrônica para realizar o cálculo automático do juro total e do montante durante um período. Para isso, bastou que ele inserisse o valor do capital, a taxa de juro e o período de tempo da operação nos campos determinados. Observe abaixo como a planilha foi criada.

1º) Na célula B5, Ademir escreveu a fórmula para calcular o juro, multiplicando os valores contidos nas células referentes ao capital, à taxa de juro e ao tempo.

	A	B	C	D	E	F
1	**Cálculo do juro**			**Cálculo do montante**		
2	*Capital*:			*Capital*:	0	
3	*Taxa*:			*Juro*:	0	
4	*Tempo*:			*Montante*:	0	
5	*Juro*:	=B2*B3*B4				
6						
7						
8						
9						

2º) Na célula E2, Ademir escreveu um comando para copiar o valor do capital, já inserido na célula B2.

	A	B	C	D	E	F
1	**Cálculo do juro**			**Cálculo do montante**		
2	*Capital*:			*Capital*:	=B2	
3	*Taxa*:			*Juro*:	0	
4	*Tempo*:			*Montante*:	0	
5	*Juro*:	0				
6						
7						
8						
9						

3º) Para a célula E3, Ademir fez o mesmo para copiar o valor do juro, calculado na célula B5.

	A	B	C	D	E	F
1	**Cálculo do juro**			**Cálculo do montante**		
2	*Capital*:			*Capital*:	0	
3	*Taxa*:			*Juro*:	=B5	
4	*Tempo*:			*Montante*:	0	
5	*Juro*:	0				
6						
7						
8						
9						

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão de atividade extra

Se possível, organize os estudantes em duplas e peça que reproduzam a situação 3 apresentada em uma planilha eletrônica. Após a construção da planilha, forneça outros valores para o capital e para a taxa de juro, de modo que, ao atribuí-los na planilha, eles possam verificar a atualização dos valores correspondentes ao juro e ao montante.

Sugestão de leitura

"Reflexões sobre a educação financeira e suas interfaces com a educação matemática e a educação crítica", de Celso Ribeiro Campos, James Teixeira, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho. Neste artigo, os autores mostram a importância da educação para a cidadania, destacando, assim, a educação financeira como um campo para desenvolver conhecimentos e informações sobre finanças pessoais que podem contribuir para melhorar a qualidade de vida das pessoas e de suas comunidades. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/25671. Acesso em: 7 ago. 2022.

4º) Então, Ademir inseriu na célula E4 a fórmula para adicionar o capital ao juro, determinando o montante.

	A	B	C	D	E	F
1	**Cálculo do juro**			**Cálculo do montante**		
2	*Capital*:			*Capital*:	0	
3	*Taxa*:			*Juro*:	0	
4	*Tempo*:			*Montante*:	=E2+E3	
5	*Juro*:	0				
6						
7						

No exemplo a seguir, Ademir calculou o juro e o montante de uma operação após inserir em uma planilha eletrônica o valor R$ 3 600,00 para o capital (célula B2), 0,02 para a taxa de juro (célula B3) e 6 para o período de tempo (B4).

	A	B	C	D	E	F
1	**Cálculo do juro**			**Cálculo do montante**		
2	*Capital*:	3600		*Capital*:	3600	
3	*Taxa*:	0,02		*Juro*:	432	
4	*Tempo*:	6		*Montante*:	4032	
5	*Juro*:	432				
6						
7						

Assim, o total de juro dessa operação foi de R$ 432,00 e o montante acumulado foi de R$ 4 032,00.

Observações

1. Sobre a taxa de juro, é comum o uso das expressões:
   - taxa de juro de 10% **a.a.** – significa que o valor do juro é igual a 10% do capital **ao ano**.
   - taxa de juro de 0,5% **a.m.** – significa que o valor do juro é igual a 0,5% do capital **ao mês**.
2. Por convenção, o mês comercial tem 30 dias, e o ano comercial, 360 dias.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

8 Calcule o juro e o montante de uma aplicação de R$ 20 000,00 durante 8 meses, à taxa de juro simples de 0,8% a.m.
8. R$ 1 280,00 e R$ 21 280,00

9 Calcule o montante de um capital de R$ 4 000,00 empregado durante 2 anos e 6 meses à taxa de 1,5% a.m. **9.** R$ 5 800,00

10 Durante quanto tempo é necessário empregar o capital de R$ 2 000,00 à taxa de 2% a.m. para se obter R$ 800,00 de juro simples?
10. 20 meses, ou 1 ano e 8 meses

11 Um capital de R$ 10 000,00, aplicado durante 3 meses a juro simples, rende R$ 300,00. Determine a taxa de juro cobrada. **11.** 1% a.m.

52

12 Qual é o capital que, investido hoje a juro simples de 12% a.a., totalizará R$ 1 296,00 no fim de 8 meses? **12.** R$ 1 200,00

13 Aplicar um capital à taxa de juro simples de 0,5% a.m., durante 10 meses, é equivalente a investir o mesmo capital, por 25 meses, a que taxa? **13.** 0,2%

14 O capital de R$ 3 000,00, aplicado à taxa de 12% a.a. (juro simples), produzirá, no final de 200 dias, um montante de que valor? (Considere que o ano tem 360 dias.) **14.** R$ 3 200,00

15 Utilize uma planilha eletrônica e resolva os problemas de cada item.

a) Uma agência de investimentos promete taxas de juro simples de 1,5% ao mês se o investidor deixar seu capital aplicado durante 10 meses. Qual deve ser o juro de um capital de R$ 12 000,00? **15. a)** R$ 1 800,00

b) Maria Eduarda fez um empréstimo de R$ 15 000,00 que pretende pagar em 20 meses. Ela conseguiu uma taxa de juro simples de 1,8% ao mês. Qual será o total de juro que Maria Eduarda terá que pagar? **15. b)** R$ 5 400,00

3 Juro composto

Calcula-se o **juro composto** sempre sobre o resultado da operação anterior, o que chamamos de "juro sobre juro". Desse modo, o juro obtido ao final de cada período é incorporado ao capital inicial, dando origem ao montante.

Essa é a modalidade mais empregada pelas instituições financeiras.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

GEORGE TUTUMI/ ARQUIVO DA EDITORA

Acácia fez um depósito inicial de R$ 30 000,00 em uma aplicação. Vamos calcular o montante e o juro ao final dos 3 primeiros meses, sabendo que os rendimentos mensais da aplicação foram de 0,6%, 1% e 0,7%, nessa ordem.

- No 1º mês, a aplicação rendeu 0,6% ($i = 0{,}006$).

$$j = C \cdot i \cdot t = \text{R\$ } 30\,000{,}00 \cdot 0{,}006 \cdot \underbrace{1}_{1 \text{ mês}} = \text{R\$ } 180{,}00$$

$$M = \text{R\$ } 30\,000{,}00 + \text{R\$ } 180{,}00 = \text{R\$ } 30\,180{,}00$$

Logo, no final do 1º mês, Acácia passou a ter um montante de R$ 30 180,00.

- No 2º mês, a aplicação rendeu 1% ($i = 0{,}01$).

$$j = \underbrace{\text{R\$ } 30\,180{,}00}_{\text{montante do 1º mês}} \cdot 0{,}01 \cdot \underbrace{1}_{1 \text{ mês}} = \text{R\$ } 301{,}80$$

$$M = \text{R\$ } 30\,180{,}00 + \text{R\$ } 301{,}80 = \text{R\$ } 30\,481{,}80$$

Então, no final do 2º mês, Acácia passou a ter um montante de R$ 30 481,80.

- No 3º mês, a aplicação rendeu 0,7% ($i = 0{,}007$).

$$j = \underbrace{\text{R\$ } 30\,481{,}80}_{\text{montante do 2º mês}} \cdot 0{,}007 \cdot \underbrace{1}_{1 \text{ mês}} \simeq \text{R\$ } 213{,}37$$

$$M \simeq \text{R\$ } 30\,481{,}80 + \text{R\$ } 213{,}37 = \text{R\$ } 30\,695{,}17$$

53

(EF09MA05) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Juro composto

BNCC:

Habilidade EF09MA05.

Objetivo:

Compreender a ideia de juro composto.

Justificativa

Compreender a ideia de juro composto amplia os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre o conceito de juro simples e possibilita a eles lidar com diferentes situações cotidianas envolvendo sistema monetário, uma vez que, essa modalidade de juro é a mais praticada nas compras em prestações, em investimentos ou em empréstimos de dinheiro no banco. Além disso, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**, pois envolve, entre outras coisas, a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação de taxas percentuais.

Mapeando conhecimentos

Peça aos estudantes que imaginem uma situação em que uma pessoa, aplicou R$ 100 000, 00 em um banco a 10% ao ano e pergunte: "Quanto essa pessoa vai receber após 4 anos?". Você pode reuni-los em duplas ou trios para que possam trocar ideias. Observe as estratégias empregadas por eles.

Para as aulas iniciais

Retome o problema proposto na dinâmica inicial e verifique qual dupla ou trio conseguiu resolvê-lo e peça que expliquem como fizeram. Após esse momento de socialização, oriente-os a resolver o problema, completando um quadro como o da referência abaixo. Ajude-os a preencher as duas primeiras linhas do quadro e deixe que completem as demais com o auxílio de uma calculadora.

	Montante no início de cada ano (em real)	Juro a 10% a.a.	Montante ao fim de cada ano (em real)
1º ano	100 000	R$ 100 000,00 · 0,1 · · 1 = R$ 10 000,00	110 000
2º ano	110 000	R$ 110 000,00 · 0,1 · · 1 = R$ 11 000,00	121 000
3º ano	121 000	R$ 121 000,00 · 0,1 · · 1 = R$ 12 100,00	133 100
4º ano	133 100	R$ 133 100, 00 · 0,1 · · 1 = R$ 13 310,00	146 410

Espera-se que, após completarem o quadro, eles concluam que, após 4 anos, a pessoa vai receber R$ 146 410, 00.

É interessante conversar com os estudantes sobre a importância de se compreender o conceito de juro composto, pois essa é a base do atual Sistema Financeiro, já que é utilizado pelas instituições bancárias e financeiras na cobrança e no recebimento de juro nas opções de empréstimos, pagamentos, aplicações, financiamentos, entre outros serviços do ramo.

Se considerar adequado, aproveite esse momento para conscientizá-los sobre os riscos que uma pessoa corre ao gastar mais do que recebe e também sobre a compra de produtos que podem não ser necessários.

Na situação **3** é explorado o trabalho com planilhas eletrônicas para o cálculo de juro composto. Se tiver oportunidade, leve os estudantes a uma sala de informática para que possam reproduzir o procedimento de Letícia.

Assim:

$$\underbrace{\text{R\$ }30\,695{,}17}_{\text{montante final}} - \underbrace{\text{R\$ }30\,000{,}00}_{\text{capital inicial}} = \underbrace{\text{R\$ }695{,}17}_{\text{juro composto}}$$

Portanto, ao final de 3 meses, Acácia recebeu R$ 695,17 de juro e passou a ter um montante de aproximadamente R$ 30 695,17.

Situação 2

Um investidor fez uma aplicação de R$ 80 000,00, com juro composto, a uma taxa de 20% a.a. Qual foi o montante disponível após 4 anos? Qual foi o total do juro da aplicação?

Acompanhe os cálculos no quadro a seguir.

	Aplicação inicial (em reais)	Montante anterior (em reais)	Juro a 20% a.a. (em reais)	Montante (em reais)
1º ano	80 000	—	80 000 · 0,20 · 1 = 16 000	80 000 + 16 000 = 96 000
2º ano	—	96 000	96 000 · 0,20 · 1 = 19 200	96 000 + 19 200 = 115 200
3º ano	—	115 200	115 200 · 0,20 · 1 = 23 040	115 200 + 23 040 = 138 240
4º ano	—	138 240	138 240 · 0,20 · 1 = 27 648	138 240 + 27 648 = 165 888

O montante após 4 anos foi R$ 165 888,00, e o juro da aplicação corresponde a R$ 85 888,00 (R$ 165 888,00 – R$ 80 000,00 = R$ 85 888, 00).

Situação 3

Letícia usou uma planilha eletrônica para calcular o montante, após 6 meses, de uma aplicação que rende juro composto à taxa de 4,5% a.m. a partir de um capital inicial de R$ 320,00. Acompanhe a seguir os procedimentos de Letícia.

1º) Ela organizou os dados que tinha e, depois, inseriu a fórmula para calcular o juro referente ao 1º mês.

	A	B	C
1	*Capital inicial*:	R$ 320,00	
2	*Taxa de juros*:	0,045	a.m.
3			
4		**Cálculo do juro**	**Cálculo do montante**
5	1º mês	=B1*B2	
6	2º mês		
7	3º mês		
8	4º mês		
9	5º mês		
10	6º mês		
11			

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

2º) Em seguida, inseriu a fórmula, na célula C5, para calcular o montante no 1º mês.

	A	B	C
1	*Capital inicial*:	R$ 320,00	
2	*Taxa de juros*:	0,045	a.m.
3			
4		**Cálculo do juro**	**Cálculo do montante**
5	1º mês	R$ 14,40	=B1+B5
6	2º mês		
7	3º mês		
8	4º mês		
9	5º mês		
10	6º mês		
11			

3º) Então, Letícia inseriu as fórmulas para o cálculo do juro e do montante referentes ao 2º mês, considerando que no regime de juro composto o juro é aplicado ao montante do mês anterior e que o juro calculado é adicionado a esse montante.

	A	B	C
1	*Capital inicial*:	R$ 320,00	
2	*Taxa de juros*:	0,045	a.m.
3			
4		**Cálculo do juro**	**Cálculo do montante**
5	1º mês	R$ 14,40	R$ 334,40
6	2º mês	=C5*B2	
7	3º mês		
8	4º mês		
9	5º mês		
10	6º mês		
11			

	A	B	C
1	*Capital inicial*:	R$ 320,00	
2	*Taxa de juros*:	0,045	a.m.
3			
4		**Cálculo do juro**	**Cálculo do montante**
5	1º mês	R$ 14,40	R$ 334,40
6	2º mês	R$ 15,048	=C5+B6
7	3º mês		
8	4º mês		
9	5º mês		
10	6º mês		
11			

4º) Após inserir as fórmulas para os demais meses, ela obteve os valores a seguir.

	A	B	C
1	*Capital inicial*:	R$ 320,00	
2	*Taxa de juros*:	0,045	a.m.
3			
4		**Cálculo do juro**	**Cálculo do montante**
5	1º mês	R$ 14,40	R$ 334,40
6	2º mês	R$ 15,048	R$ 349,448
7	3º mês	R$ 15,725	R$ 365,173
8	4º mês	R$ 16,433	R$ 381,606
9	5º mês	R$ 17,172	R$ 398,778
10	6º mês	R$ 17,945	R$ 416,723
11			

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão de atividade extra

Peça aos estudantes que realizem a seguinte atividade: Um capital de R$ 1000,00 foi aplicado à taxa de juro composto de 5% a.m.

a) Qual será o montante disponível para o investidor sacar depois de um mês de aplicação? Quanto de juro o capital terá rendido nesse período? (Respostas: R$ 1050,00; R$ 50,00).

b) Qual será o montante disponível para o investidor sacar depois de dois meses de aplicação? Quanto de juro o capital terá rendido nesse período? (Respostas: R$ 1102,50; R$ 102,50).

c) Qual será o montante disponível para o investidor sacar depois de três meses de aplicação? Quanto de juro o capital terá rendido nesse período? (Respostas: Aproximadamente R$ 1157,63; R$ 157,63).

Se julgar conveniente, proponha aos estudantes que, utilizando as resoluções dos itens anteriores, obtenham uma sentença algébrica que lhes permita determinar o montante disponível para o investidor sacar após n meses de aplicação, sendo n um número inteiro qualquer maior do que 1. (Resposta: $M = 1000 \cdot (1{,}05)^n$). A partir do início deste trabalho, é possível generalizar e enunciar que um capital C, aplicado a uma taxa de juro composto i, durante um intervalo de tempo t, é expresso por: $M = C(1 + i)^t$.

55

No *site* do Banco Central do Brasil pode-se encontrar a calculadora do cidadão, que permite calcular taxas de juro, montante e valor de prestações, conforme variáveis definidas. Disponível em: https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/jsp/index.jsp. Acesso em: 7 ago. 2022.

- Você pode ampliar a proposta das **atividades 21** e **22** e sugerir variações de valores e de medida de tempo para que possam construir novas planilhas.

5º) Após os cálculos, Letícia arredondou todos os valores para duas casas decimais.

	A	B	C
1	*Capital inicial*:	R$ 320,00	
2	*Taxa de juros*:	0,045	a.m.
3			
4		**Cálculo do juro**	**Cálculo do montante**
5	1º mês	R$ 14,40	R$ 334,40
6	2º mês	R$ 15,05	R$ 349,45
7	3º mês	R$ 15,72	R$ 365,17
8	4º mês	R$ 16,43	R$ 381,61
9	5º mês	R$ 17,17	R$ 398,78
10	6º mês	R$ 17,95	R$ 416,72
11			

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Então, após 6 meses, Letícia terá um montante de R$ 416,72, e o rendimento da aplicação (juro) será de R$ 96,72.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

16 Uma aplicação de R$ 25 000,00 à taxa de juro composto de 0,69% a.m. gera, após 3 meses, que montante? Utilize uma planilha eletrônica para fazer os cálculos. **16.** R$ 25 521,08

17 Bruna depositou R$ 20 000,00 em um banco, a juro composto de 20% a.a., capitalizado anualmente, isto é, juntado ao capital após cada ano de depósito. Ao final de 2 anos, quanto Bruna obteve de juro? **17.** R$ 8 800,00


GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

18 Um capital de R$ 30 000,00 foi aplicado à taxa mensal de juro composto de 1% a.m. Determine o valor do juro dessa aplicação após 3 meses. **18.** R$ 909,03

19 Um investidor aplicou R$ 100 000,00 a uma taxa de 0,8% a.m. durante 4 meses. Responda: **19. a)** R$ 3 200,00

a) Qual foi o valor total do juro dessa aplicação em regime de juro simples?

b) Qual foi o valor total do juro dessa aplicação em regime de juro composto? **19. b)** R$ 3 238,61

20 Com o auxílio de uma calculadora, determine o valor, após 3 meses, de uma aplicação de R$ 100 000,00 submetida aos índices do quadro a seguir. **20.** R$ 102 805,81

Mês	Janeiro	Fevereiro	Março
Taxa (%)	0,99	0,91	0,88

21 Felipe deseja obter um montante igual ou maior que R$ 700,00, após manter seu investimento inicial aplicado durante 3 meses à taxa de juro composto de 3% a.m. Qual deve ser o menor valor a ser investido por Felipe? **21.** R$ 640,60

22 Cristina solicitou um empréstimo a uma instituição financeira no valor de R$ 950,00. Ela estabeleceu que pagaria a dívida após 36 meses, no regime de juro composto à taxa de 10,5% a.a. Qual quantia deverá ser paga por Cristina após o período combinado? Utilize uma planilha eletrônica para fazer os cálculos. **22.** R$ 1 281,77

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Operações comerciais

O preço de venda (*PV*) pode ser determinado de maneiras diferentes, de acordo com cada situação:

- adicionando o preço de custo de um produto com o lucro;
- adicionando o preço de compra de um produto com o lucro;
- subtraindo do preço de compra a taxa de depreciação do produto (prejuízo obtido na venda);
- subtraindo do preço do produto o valor correspondente ao desconto do produto.

1. Camila tem uma loja de roupas femininas. Ela compra as roupas de uma confecção e as revende na sua loja, com lucro de 32% sobre o preço de compra. Copie o quadro no caderno e complete-o para determinar o preço de venda de cada peça. **1.** Resposta em *Orientações*.

Peça	Preço de compra	Preço de venda
Vestido florido	R$ 97,00	
Saia lisa preta	R$ 74,00	
Short listrado	R$ 49,00	
Blusa lisa azul	R$ 36,00	

2. Guilherme comprou um celular por R$ 3 278,00, utilizou-o por 2 anos e resolveu trocá-lo. Ele vendeu seu antigo celular com uma taxa de depreciação de 62% sobre o valor de compra. Por qual valor Guilherme vendeu seu celular? **2.** R$ 1 245,64

3. Bruna faz trufas artesanais, e o custo para produzir 100 g de trufas é R$ 15,00. Bruna calcula o lucro dos bombons com uma taxa de 40% sobre o preço de custo. Qual deve ser o valor de venda das caixas de trufas de 100 g e 250 g? **3.** R$ 21,00 e R$ 52,50

4. Roberto revende laranjas na feira. Ele compra um saco de 12 kg por R$ 18,00 e o revende com lucro de 50% sobre o preço de custo. Qual é o preço de venda de 1 kg de laranja? **4.** R$ 2,25

5. No dia do lançamento do condomínio "Morar bem", os lotes comprados terão um desconto de 12% sobre o valor de venda. Se Mateus, que está interessado em um dos terrenos, fechar negócio, quanto pagará por um lote de R$ 220 000,00? **5.** R$ 193 600,00

6. Um revendedor de eletrônicos vendeu *notebooks* comprados a R$ 4 000,00 por R$ 5 000,00. De quantos por cento foi seu lucro sobre o preço de compra? **6.** 25%

Juro simples

Juro é a remuneração que se recebe no caso de uma aplicação ou a quantia que deve ser paga no caso de um empréstimo.

$$j = C \cdot i \cdot t$$

$j \rightarrow$ *juro*
$i \rightarrow$ *taxa mensal*
$t \rightarrow$ *tempo em meses*
$C \rightarrow$ *capital*

$$M = C + j$$

$M \rightarrow$ *montante*

7. Fabricio fez uma aplicação a juro simples de um capital de R$ 89 200,00, à taxa de 1,3% a.m., durante 3 meses. Qual será o montante ao final desse período? **7.** R$ 92 678,80

8. Samuel fez um empréstimo de R$ 5 600,00, à taxa de juro simples de 12% a.m., durante 5 meses. Qual será o valor de juro que Samuel pagará nesse empréstimo? **8.** R$ 3 360,00

9. Qual é o tempo pelo qual Antônio Carlos deve aplicar seu capital no investimento "AAC" do banco "Investir Bem" à taxa de juro simples de 8% a.m. para que ele triplique de valor? **9.** 25 meses

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Operações comerciais

- Resposta da **atividade 1**:

Peça	Preço de compra	Preço de venda
Vestido florido	R$ 97,00	R$ 128,04
Saia lisa preta	R$ 74,00	R$ 97,68
Short listrado	R$ 49,00	R$ 64,68
Blusa lisa azul	R$ 36,00	R$ 47,52

- Na **atividade 2**, verifique se todos os estudantes sabem o que é depreciação. Caso seja necessário, explique que a depreciação é a perda de valor de um bem decorrente de seu uso, do desgaste natural ou de sua obsolescência.
- Na **atividade 3**, para calcular o valor de venda das caixas de trufas de 250 g, os estudantes podem utilizar a ideia de proporcionalidade da multiplicação e concluir que o preço de custo dessa caixa é de R$ 37,50. Logo, para obter o valor de venda, eles devem calcular: R$ 37,50 + 0,4 · R$37,50. Outra possibilidade é multiplicar o preço de venda das caixas de trufas de 100 g por 2,5. Discuta essas diferentes possibilidades de resolução com a turma para que possam ampliar o seu repertório de resolução de problemas.
- Na **atividade 4**, é possível que alguns estudantes concluam que R$ 27,00 seja a resposta para o problema. Caso isso ocorra, significa que desconsideraram que o enunciado pedia para determinar o preço de venda de 1 kg de laranja, em vez do preço de venda de um saco de 12 kg.
- Na **atividade 5**, espera-se que os estudantes percebam que devem calcular R$ 220 000, 00 – 0,12 · R$ 220 000, 00 para resolver o problema. Caso alguns estudantes obtenham valores superiores a R$ 220 000,00, incentive-os a concluir que o valor encontrado não satisfaz as condições do enunciado.

Juro simples

- Nas **atividades 7**, **8** e **9**, em que os estudantes terão de utilizar as expressões revisadas, ressalte que as taxas devem estar na representação decimal ou fracionária. Discuta cada uma das atividades coletivamente, após concluírem.

Juro composto

• Nas **atividades** de **10** a **13**, oriente os estudantes a organizar os dados das situações-problema e os cálculos em um quadro.

• Na **atividade 14**, espera-se que os estudantes percebam que, diferentemente das atividades anteriores, nesta não foi fornecido o valor do montante inicial. Caso tenham dificuldades, oriente-os a indicar esse montante por uma letra e proceder como nas demais atividades. Com isso, eles vão obter uma expressão algébrica, e depois, vão resolver uma inequação do 1º grau.

Juro composto

O **juro composto** é calculado sempre sobre o resultado da operação anterior (juro sobre juro).
Para uma aplicação de R$ 100,00 à taxa de juro composto de 2% ao mês durante 3 meses, teremos:

Mês	Montante anterior (em reais)	Juro do período (em reais)	Montante (em reais)
1º	–	$100 \cdot 0{,}02 \cdot 1 = 2$	$100 + 2 = 102$
2º	102	$102 \cdot 0{,}02 \cdot 1 = 2{,}04$	$102 + 2{,}04 = 104{,}04$
3º	104,04	$104{,}04 \cdot 0{,}02 \cdot 1 = 2{,}08$	$104{,}04 + 2{,}08 = 106{,}12$

Logo, o montante será R$ 106,12, dos quais R$ 6,12 são juros da aplicação correspondente.

10. Karina fez um depósito de R$ 80 000,00 em uma aplicação a juro composto no banco. A taxa da aplicação é de 2,5% ao mês. Ela pretende deixar esse valor investido durante 3 meses e, com os juros, fazer uma viagem. A viagem de Karina tem orçamento de R$ 5 000,00. Responda.

a) Qual será o juro dessa aplicação ao final do período de 3 meses? **10. a)** R$ 6 151,25

b) Karina conseguirá fazer a viagem com folga? **10. b)** Sim, pois sobrarão R$ 1 151,25.

11. Fernando está montando uma loja de acessórios para carros e precisou fazer um empréstimo de R$ 100 000,00. A operação financeira será a juro composto com taxa de 6% ao mês. Fernando se organizou para pagar o empréstimo em 6 meses, quando já terá obtido retorno da loja. Calcule o valor total da dívida que Fernando terá que pagar nessa operação. Se julgar necessário, crie uma planilha eletrônica. **11.** R$ 141 851,91

12. Uma agência de investimento oferece aplicação de juro composto com taxa de 7% ao mês. Pedro fez uma dessas aplicações, depositando R$ 250 000,00. Deixou aplicado durante 4 meses, quando precisou fazer o resgate para a compra de uma casa. Responda.

a) Qual é o valor do juro no período da aplicação? **12. a)** R$ 77 699,00

b) Pedro comprará um imóvel utilizando apenas o montante da aplicação. Qual é o valor máximo do imóvel? **12. b)** R$ 327 699,00

13. Paulo tem um capital de R$ 10 000,00 e pretende investir esse valor para ter um rendimento de R$ 2 600,00. Ele optou por uma aplicação em regime de juro composto com taxa de 8% ao mês. Quanto tempo Paulo deverá deixar esse capital investido para conseguir o juro de que precisa? **13.** 4 meses

14. Marcela pretende ter um valor maior ou igual a R$ 1 500,00, após manter seu capital inicial aplicado a juro composto durante 3 meses, à taxa de 4% ao mês. Responda.

a) Qual deve ser o menor valor a ser investido por Marcela? **14. a)** R$ 1 333,50

b) Por mais quanto tempo, no mínimo, ela deve deixar o dinheiro aplicado para obter um montante superior a R$ 1 700? **14. b)** Mais 4 meses.

15. Um investidor depositou um capital de R$ 40 000,00 num fundo de investimento de juro composto durante 2 meses. No primeiro mês, teve rendimento de 1,5%. No segundo mês, o rendimento foi de 1,2%. Calcule.

a) O valor do rendimento de cada mês. **15. a)** R$ 600,00 e R$ 487,20

b) O montante ao final do período. **15. b)** R$ 41 087,20

Capítulo 3

Segmentos proporcionais e semelhança

FORMAÇÃO CIDADÃ

SAÚDE

Trocando ideias

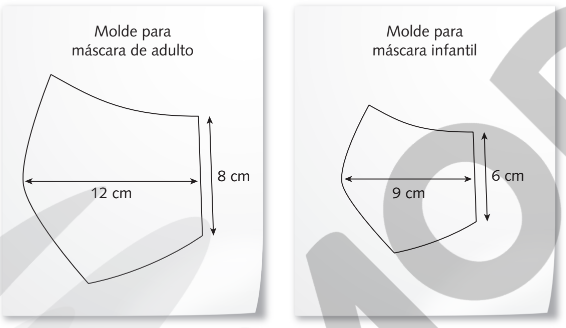
Durante a pandemia de coronavírus, o uso de máscaras de proteção era obrigatório, pois contribuía para que as pessoas pudessem se proteger e evitar a disseminação do SARS-CoV-2, vírus que causa a covid-19.

ROMAN SAMBORSKYI/SHUTTERSTOCK

Trocando ideias: primeiro item: Exemplos de resposta: vacinação, distanciamento social, lavagem das mãos, cobrir nariz e boca com o antebraço ao tossir ou espirrar, manutenção de ambientes limpos e ventilados etc; segundo item: 25%

- Além do uso de máscaras, que outras medidas de proteção foram adotadas para que as pessoas pudessem se proteger e evitar a disseminação do vírus da covid-19?

Analise os moldes de máscaras de proteção abaixo.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

As figuras correspondentes a esses moldes são **semelhantes** porque as medidas das aberturas dos ângulos correspondentes são iguais, e as medidas de comprimento de quaisquer segmentos correspondentes são proporcionais.

- Qual é a taxa de redução do molde da máscara infantil em relação ao molde da máscara de adulto?

Neste capítulo vamos estudar o teorema de Tales e a semelhança entre figuras.

Proponha aos estudantes que comparem os moldes e descrevam o que observam. Espera-se que eles percebam que os moldes têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes, ou, em outras palavras, que o molde para máscara infantil é uma redução do molde para máscara de adulto ou que o molde para máscara de adulto é uma ampliação do molde para máscara infantil. Depois, introduza o conceito de semelhança e peça que respondam à última questão. Caso tenham dificuldade, oriente-os a calcular a razão entre as medidas de comprimento correspondentes que estão explícitas. Eles devem perceber que esta razão é 0,75, o que indica que o molde para máscara infantil corresponde a 75% do tamanho do molde para máscara de adulto, ou seja, a taxa de redução foi de 25%.

CAPÍTULO 3 – SEGMENTOS PROPORCIONAIS E SEMELHANÇA

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 6, 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Introduzir o conceito de semelhança de figuras.
- Conscientizar os estudantes sobre a importância das medidas de proteção que foram adotadas para evitar a disseminação do vírus da covid-19.

Temas contemporâneos transversais:

FORMAÇÃO CIDADÃ

SAÚDE

Comece a exploração desta seção *Trocando ideias* comentando com a turma que a covid-19, doença causada pelo coronavírus SARS-Cov-2, é transmitida principalmente por meio do contato com pequenas gotículas que contêm o vírus e são expelidas por pessoas infectadas. Diga que essas gotículas entram em contato com as nossas vias aéreas fazendo com que o novo coronavírus se multiplique em nosso corpo. Portanto, o uso de máscaras é necessário como medida de proteção individual e coletiva. Nesse âmbito o seu uso é importante não só para a saúde como também é um ato de cidadania.

Convide os estudantes a responder à questão do primeiro item. Dê um tempo para que levantem todas as medidas de proteção que recordarem e registre-as na lousa. Essa dinâmica permite a eles valorizarem a diversidade de saberes e a fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania. Além disso, ela possibilita a argumentação com base em fatos e promove o diálogo, criando o cenário favorável para que as competências gerais **6**, **7** e **9** da BNCC sejam desenvolvidas. A competência específica **8** também tem o seu desenvolvimento favorecido, uma vez que há interação e discussão de uma questão comum.

Razão e proporção nos segmentos de reta

Objetivo:

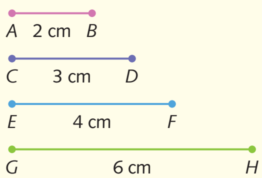
Compreender o conceito de segmentos de reta proporcionais.

Justificativa

Compreender o conceito de segmentos de reta proporcionais é importante, dentre outras coisas, para entender e aplicar o teorema de Tales, que será estudado mais adiante neste mesmo capítulo.

Mapeando conhecimentos

Reproduza os segmentos de reta abaixo na lousa:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Depois, peça aos estudantes que determinem as razões $\frac{AB}{CD}$ e $\frac{EF}{GH}$ e verifique se percebem que as medidas desses segmentos de reta formam uma proporção, ou seja, que $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} = \frac{2}{3}$. Você pode ampliar essa proposta e solicitar que representem segmentos de reta proporcionais no caderno e compartilhem com os colegas.

Para as aulas iniciais

Na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* são retomados os conceitos de razão e proporção. Faça a leitura coletiva desta revisão com a turma e explore com eles a **atividade 10**.

Você pode também explorar os segmentos de reta proporcionais feitos pelos estudantes na dinâmica inicial. Reproduza os segmentos de reta feitos por alguns deles na lousa e peça aos demais estudantes da turma que verifiquem se as medidas formam uma proporção.

Enfatize aos estudantes que, para o cálculo da razão, eles devem seguir a ordem em que os dados foram fornecidos. Assim:

- a razão entre os números 2 e 3 é $\frac{2}{3}$;
- a razão entre os números 3 e 2 é $\frac{3}{2}$.

1 Razão e proporção nos segmentos de reta

Modelismo é a arte de construir automóveis, aviões, trens, motos, navios etc. em miniatura.

Os modelos são semelhantes aos objetos reais, mas foram reduzidos obedecendo a uma razão.

Verifique as miniaturas a seguir.

Miniatura do B-17 *Flying Fortress* (Fortaleza Voadora), um avião bombardeiro quadrimotor construído pela Boeing durante a Segunda Guerra Mundial.

JAMIE & JUDY WILD/DANITADELIMONT/KEYSTONE BRASIL

Miniatura do carro da primeira, e até hoje única, equipe de Fórmula 1 brasileira.

@MINIMODELSCAR

O exemplo de uma **razão** utilizada pelos profissionais de modelismo é 1 : 12, que corresponde à razão entre as medidas das dimensões do modelo construído e do objeto real. Essa razão indica que, se um comprimento do modelo mede *a*, então, no objeto real, o comprimento correspondente mede 12*a*.

> A **razão** entre dois números *a* e *b*, com $b \neq 0$, nessa ordem, é dada por *a* : *b* ou $\frac{a}{b}$.
> Lemos: "*a* está para *b*".

Se duas razões são iguais, temos uma proporção.

> **Proporção** é uma igualdade entre duas razões.

Confira um exemplo.

As razões $\frac{18}{10}$ e $\frac{27}{15}$ formam uma proporção:

$$\frac{18}{10} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{9}{5} \quad \text{e} \quad \frac{27}{15} \underset{:3}{\overset{:3}{=}} \frac{9}{5}\text{, então: } \frac{18}{10} = \frac{27}{15}$$

Podemos ler a proporção acima da seguinte forma:

"Dezoito está para dez assim como vinte e sete está para quinze".

Na proporção $\frac{18}{10} = \frac{27}{15}$, os números 18 e 15 são denominados **extremos** e os números 10 e 27 são denominados **meios**.

Note que:

$$\underbrace{18 \cdot 15}_{\text{extremos}} = \underbrace{10 \cdot 27}_{\text{meios}} = 270$$

Essa propriedade é conhecida como **propriedade fundamental das proporções**.

> Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produtos dos meios, ou seja, dados a, b, c e d não nulos, com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos $a \cdot d = b \cdot c$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 Determine, no caderno, a razão entre os números abaixo na ordem em que aparecem.

a) 8 e 10 **1. a)** $\frac{4}{5}$

b) -2 e 3 **1. b)** $-\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$ **1. c)** $\frac{2}{3}$

d) 10 e 2 **1. d)** 5

2 Aplicando a propriedade fundamental das proporções, verifique quais dos pares de razões abaixo formam uma proporção. **2.** alternativas **c**, **d**

a) $\frac{5}{6}$ e $\frac{6}{5}$

b) $-\frac{10}{3}$ e $\frac{20}{6}$

c) $\frac{12}{15}$ e $\frac{4}{5}$

d) $\frac{\frac{1}{2}}{5}$ e $\frac{3}{30}$

Razão entre segmentos de reta

Seja r a reta que passa pelos pontos distintos A e B.

Os pontos A e B e todos os demais entre eles formam um **segmento de reta** que é indicado por $\overline{AB}$. A medida de comprimento de um segmento de reta $\overline{AB}$ é indicada por AB ou med $(\overline{AB})$.

A razão entre dois segmentos de reta corresponde à razão entre suas medidas de comprimento, considerando a mesma unidade de medida de comprimento.

Considere, por exemplo, os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Como $AB = 30$ mm e $CD = 5$ cm $= 50$ mm, temos a razão entre os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{30\text{ mm}}{50\text{ mm}} = \frac{30}{50} \overset{:10}{=} \frac{3}{5}$$

Logo, a razão entre esses segmentos de reta é $\frac{3}{5}$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Razão entre segmentos de reta

Comente que, no exemplo, também se pode calcular a razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, usando a unidade de medida centímetro. Assim:

$\frac{AB}{CD} = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{3}{5}$.

Ao medir o comprimento de um segmento de reta $\overline{AB}$, comparamos quantas vezes uma unidade de medida de comprimento (1 mm, 1 cm, 1 m, etc.) cabe nessa medida.

Por exemplo, se usarmos 1 cm como unidade de medida, o comprimento desse segmento de reta mede a razão $\frac{AB}{1}$ cm.

Segmentos de reta proporcionais

Se os estudantes estiverem com dificuldade na resolução das atividades, pergunte se a propriedade fundamental das proporções pode ser aplicada.

- A proporção obtida na **atividade 5** é $\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$. Substituindo as medidas de comprimento temos: $\frac{AB}{CD} = \frac{3\text{ cm}}{5\text{ cm}}$. Assim, aplicando a propriedade fundamental das proporções, obtemos $(5\text{ cm}) \cdot AB = (3\text{ cm}) \cdot CD$ (I). Como $AB + CD = 40$ cm (II), podemos isolar AB em II e substituir em I:

$(5\text{ cm}) \cdot (40\text{ cm} - CD) = (3\text{ cm}) \cdot CD$ (III).

Ao resolver III, obtemos $CD = 25$ cm e, substituindo em I, temos $AB = 15$ cm.

Teorema de Tales

BNCC:

- Competência geral 1 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 1 e 2 (as descrições estão na página VII).
- Habilidades EF09MA10 e EF09MA14.

Objetivo:

Compreender o teorema de Tales.

Justificativa

Compreender o teorema de Tales é importante devido às diferentes aplicações na Geometria como, por exemplo, para dividir um segmento de reta em partes iguais e para demonstrar o teorema da bissetriz de um ângulo interno em um triângulo. Além disso, podemos aplicá-lo na resolução de diversos problemas.

- Antes de iniciar o conteúdo sobre o teorema de Tales, aproveite para retomar a ideia da Matemática como criação humana. Mencione que Tales foi um matemático grego. Nas próximas páginas, eles verão um pouco do trabalho que foi atribuído a ele. Explique que Tales é anterior a Euclides, mas este último recebe grande crédito por ter organizado os conhecimentos de Geometria na obra *Os elementos*. Esse tipo de conversa contribui para o desenvolvimento da competência geral **1** e da competência específica **1**.

Mapeando conhecimentos

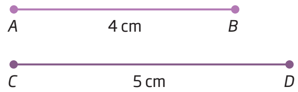
Peça aos estudantes que, individualmente, representem três retas paralelas cortadas por duas transversais quaisquer e que meçam os segmentos de retas determinados por estas retas com o auxílio de uma régua. Depois, proponha que verifiquem se as medidas dos comprimentos dos segmentos de reta determinados sobre a primeira transversal são proporcionais às medidas de comprimento dos segmentos correspondentes determinados sobre a segunda transversal.

Para as aulas iniciais

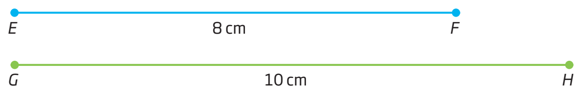
Peça aos estudantes que compartilhem as conclusões a que chegaram na dinâmica inicial com toda a turma. Espera-se que eles percebam que um feixe de paralelas determina em duas transversais segmentos proporcionais.

Segmentos de reta proporcionais

Vamos considerar os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ e suas medidas de comprimento:



razão: $\frac{AB}{CD} = \frac{4\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{4}{5}$



razão: $\frac{EF}{GH} = \frac{8\text{ cm}}{10\text{ cm}} = \frac{4}{5}$

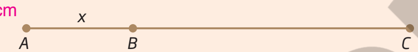
Como as razões obtidas são iguais, os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ formam, nessa ordem, uma proporção:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

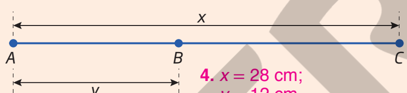
Atividades

Faça as atividades no caderno.

3 Determine a medida de comprimento x do segmento de reta $\overline{AB}$, sabendo que $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{5}$ e $BC = 20$ cm. **3.** $x = 8$ cm



4 Dada a figura, determine as medidas de comprimento x e y, sabendo que $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{7}$ e $BC = 16$ cm.



4. $x = 28$ cm; $y = 12$ cm

5 Os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ formam, nessa ordem, uma proporção. Considerando que $EF = 3$ cm, $GH = 5$ cm e $AB + CD = 40$ cm, determine AB e CD. **5.** $AB = 15$ cm; $CD = 25$ cm

6 A fotografia tem dimensões de 30 mm × 40 mm.

Queremos, com base nessa fotografia, reproduzir duas outras: uma com ampliação de 100% e outra com redução de 50%. Quais serão as medidas das dimensões das novas fotografias?

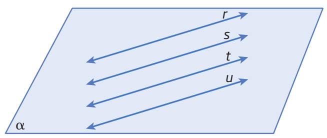
6. ampliação: 60 mm × 80 mm; redução: 15 mm × 20 mm

Os beija-flores são aves de pequeno porte, que têm, em média, 6 a 12 centímetros de medida de comprimento e 2 a 6 gramas de medida de massa.

ROSALIE KREULEN/SHUTTERSTOCK

2 Teorema de Tales

Um **feixe de retas paralelas** é formado por duas ou mais retas de um mesmo plano que, consideradas duas a duas, são sempre paralelas.



notação: $r // s // t // u$

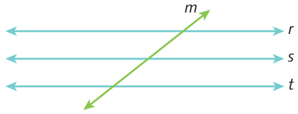
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

(EF09MA10) Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.

(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Uma reta que intercepta duas ou mais retas de um feixe de retas paralelas recebe o nome de **transversal**.

Na figura a seguir, a reta m é transversal ao feixe de retas paralelas formado pelas retas r, s e t.



Tecnologias digitais em foco

Teorema de Tales

Nesta seção, utilizamos o GeoGebra ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor indicar para construirmos um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais. Vamos verificar se os segmentos de reta determinados sobre uma transversal são proporcionais aos segmentos de reta determinados sobre a outra transversal.

Construa

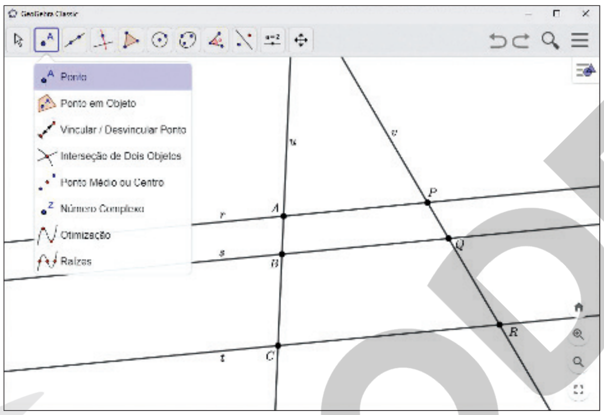
Siga os passos a seguir para construir as retas paralelas e as retas transversais.

1º) Construa uma reta r.

2º) Construa as retas s e t, paralelas à reta r.

3º) Construa duas retas, u e v, transversais ao feixe de retas paralelas construído nos passos anteriores.

4º) Marque os pontos A, B e C nas intersecções das retas r, s e t com a reta transversal u e os pontos P, Q e R nas intersecções das retas r, s e t com a reta transversal v.



Explore

a) Meça o comprimento dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ e $\overline{PR}$ e, usando uma calculadora, determine as razões $\frac{AB}{BC}$, $\frac{PQ}{QR}$, $\frac{AC}{AB}$ e $\frac{PR}{PQ}$.

b) Comparando as razões $\frac{AB}{BC}$ com $\frac{PQ}{QR}$ e $\frac{AC}{AB}$ com $\frac{PR}{PQ}$, o que é possível verificar?

c) Movimente os pontos móveis, modificando a configuração inicial, e calcule novamente as razões. A relação que você percebeu continua sendo válida para diferentes configurações?

Explore: a) Respostas pessoais.
b) Comparando as razões $\frac{AB}{BC}$ com $\frac{PQ}{QR}$ e $\frac{AC}{AB}$ com $\frac{PR}{PQ}$, verificamos que elas são iguais, o que leva a conjecturar que, em um feixe de retas paralelas cortado por duas retas transversais, os segmentos de reta determinados sobre a primeira transversal são proporcionais a seus correspondentes determinados sobre a segunda transversal.
c) A relação verificada continua válida, independentemente da configuração apresentada.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

- Competências gerais 2 e 5 (as descrições estão na página VI).
- Competência específica 2 (a descrição está na página VII).
- Habilidade EF09MA14.

Objetivo:

Verificar experimentalmente o teorema de Tales.

Teorema de Tales

Nesta seção, os estudantes vão utilizar o GeoGebra ou um *software* de geometria dinâmica qualquer para construir um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais e verificar, experimentalmente, que as medidas dos comprimentos dos segmentos determinados sobre a primeira transversal são proporcionais às medidas dos comprimentos dos segmentos correspondentes determinados sobre a segunda transversal (teorema de Tales).

Oriente-os a realizar todos os passos do *Construa*. Ao final, peça que comparem a construção feita com a dos demais colegas.

O encaminhamento do *Explore* tem por objetivo levar os estudantes a verificar experimentalmente a validade do teorema de Tales. Deixe-os livres para trocar ideias e conjecturar sobre o assunto.

A proposta desta seção possibilita aos estudantes assumirem o papel de protagonistas do seu processo de aprendizagem na medida em que utilizam uma tecnologia digital para investigar e produzir conhecimento. Eles também argumentam e tem o raciocínio lógico estimulado. Por essas razões, as competências gerais **2** e **5** e a competência específica **2** têm o seu desenvolvimento favorecido.

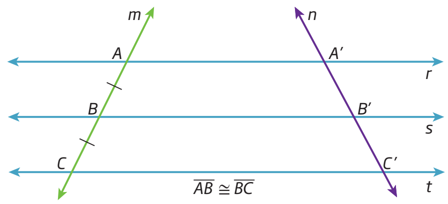
(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Sugestão de leitura

Caso haja interesse em conhecer um pouco mais sobre os trabalhos de Tales de Mileto e a organização do conhecimento de Geometria por Euclides, sugerimos a leitura do artigo "Euclides, Geometria e fundamentos", de Geraldo Ávila, a partir da página 199.

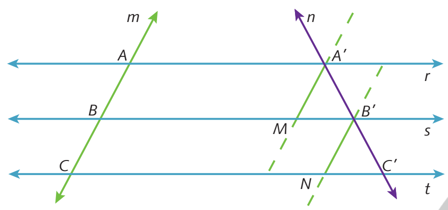
Agora, considere as retas paralelas *r*, *s* e *t* e as retas transversais *m* e *n*, no mesmo plano.

Sobre a reta *m*, temos os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, congruentes entre si, e sobre a reta *n*, temos os segmentos de reta $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$, conforme indicado a seguir.



Vamos mostrar que, se $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, então $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$.

Por A' e B', traçamos retas paralelas à reta transversal *m*, determinando os segmentos de reta $\overline{A'M}$ e $\overline{B'N}$. Confira:



Como $\overline{A'M} // \overline{AB}$ e $\overline{AA'} // \overline{BM}$, *AA'MB* é um paralelogramo.

Como $\overline{B'N} // \overline{BC}$ e $\overline{BB'} // \overline{CN}$, *BB'NC* também é um paralelogramo.

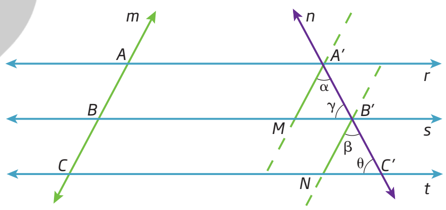
Os lados opostos de um paralelogramo têm a mesma medida de comprimento, então:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'M} \text{ e } \overline{BC} \cong \overline{B'N}$$

Como $\overline{AB} \cong \overline{A'M}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'N}$ e $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, temos: $\overline{A'M} \cong \overline{B'N}$.

E, considerando os triângulos *A'B'M* e *B'C'N*, temos:

- $\overline{A'M} \cong \overline{B'N}$
- $\alpha = \beta \longrightarrow$ medidas de abertura dos ângulos correspondentes
- $\gamma = \theta \longrightarrow$ medidas de abertura dos ângulos correspondentes



Logo, $\triangle A'B'M \cong \triangle B'C'N$ pelo caso LAA_o (lado – ângulo – ângulo oposto).

Portanto, $\overline{A'B'} \cong \overline{B'C'}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

Se um feixe de retas paralelas determinar segmentos de reta congruentes sobre uma transversal, esse feixe determinará segmentos de reta congruentes sobre qualquer outra transversal.

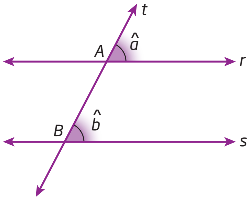
Observações

Vamos relembrar as relações entre os ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

1. Ângulos correspondentes são congruentes.

Sendo $r /\!/ s$ e t uma transversal, temos: $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos congruentes, e indicamos $\hat{a} \cong \hat{b}$.

É possível demonstrar essa relação e, também, que para duas retas r e s cortadas por uma terceira reta t, se $\hat{a} \cong \hat{b}$, então $r /\!/ s$, mas não faremos essas demonstrações aqui.



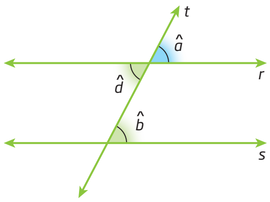
2. Ângulos alternos são congruentes.

Sendo $r /\!/ s$ e t uma transversal, temos:

- $\hat{a} \cong \hat{b}$, pois são ângulos correspondentes;
- $\hat{d} \cong \hat{a}$, pois são ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.).

Logo, $\hat{b} \cong \hat{d}$ (ângulos alternos internos).

De maneira análoga, podemos verificar a congruência dos outros pares de ângulos alternos internos e dos pares de ângulos alternos externos.



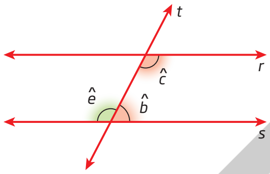
3. Ângulos colaterais são suplementares.

Sendo $r /\!/ s$ e t uma transversal, temos:

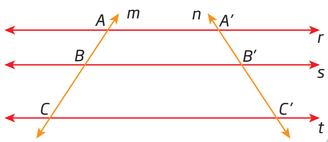
- $\hat{c} \cong \hat{e}$, pois são ângulos alternos internos;
- $\hat{e}$ e $\hat{b}$ são ângulos adjacentes suplementares.

Logo, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ são suplementares (ângulos colaterais internos).

De maneira análoga, podemos verificar que os outros pares de ângulos colaterais internos e os pares de ângulos colaterais externos também são suplementares.

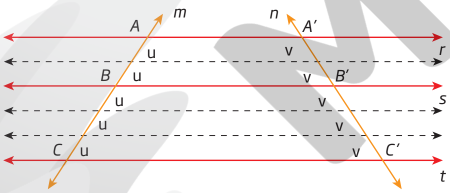


Agora, analise a figura a seguir em que $r /\!/ s /\!/ t$, m e n são retas transversais e $AB \neq BC$.



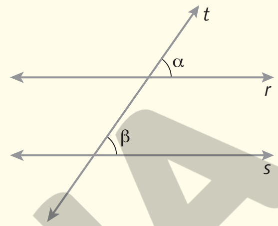
Vamos verificar a relação entre os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$.

Vamos supor que possamos dividir $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ em segmentos de reta de medida de comprimento 2u e 3u, respectivamente; a partir das retas r, s e t, traçamos retas auxiliares que dividem os segmentos de reta e, assim, temos $AB = 2u$ e $BC = 3u$.

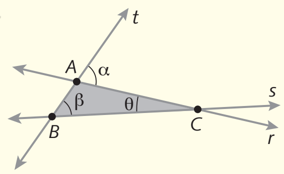


A demonstração foi particularizada para facilitar o entendimento dos estudantes. Avalie a conveniência de afirmar aos estudantes que os matemáticos demonstraram que o teorema é válido para medidas dos segmentos expressas por quaisquer números reais positivos.

Verifique se os estudantes se recordam que dadas duas retas paralelas cortadas por uma transversal, os ângulos correspondentes são congruentes. Depois, questione-os se a recíproca desta afirmação é verdadeira. Dê um tempo para que levantem hipóteses. Depois, se julgar pertinente e perceber que os estudantes têm maturidade, demonstre que, dadas as retas r e s, cortadas por uma transversal t, se os ângulos de medidas α e β forem congruentes, então as retas são paralelas.



Vamos utilizar a demonstração por absurdo. Suponha que α e β são medidas de abertura de ângulos congruentes, mas, por absurdo, r e s não são retas paralelas. Então, na realidade, r e s se cruzam em algum ponto. Vamos indicar o ponto de intersecção de t com r por A, de t com s por B e de r com s por C.



Temos um triângulo ABC, em que $\hat{A}$ mede $180° - \alpha$, $\hat{B}$ mede β e $\hat{C}$ mede θ. A soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, portanto, $\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C})$ é igual a 180°. Assim, $(180° - \alpha) + \beta + \theta = 180°$, mas $\alpha = \beta$ (por hipótese), portanto $(180° - \alpha) + \alpha + \theta = 180°$, o que resulta em $\theta = 0°$. Isso é um absurdo, pois se ABC é um triângulo, $\hat{C}$ deve ter medida diferente de 0°. O que nos permite concluir que, se as medidas das aberturas dos ângulos são iguais ($\alpha = \beta$), então as retas r e s são, necessariamente, paralelas.

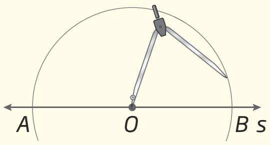
Verifique se os estudantes conseguem deduzir as demonstrações das aberturas dos ângulos alternos e colaterais. Peça a eles que não consultem o livro e tentem argumentar de forma convincente para mostrar a igualdade entre as medidas das aberturas desses ângulos.

Incentive os estudantes a deduzir as demonstrações e, dessa forma, contribuir para o desenvolvimento da competência específica **2**, além de favorecer o desenvolvimento da habilidade **EF09MA10**.

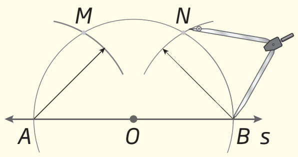
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

No estudo da divisão de segmentos de reta em partes proporcionais, será necessário retomar a construção de retas paralelas. Acompanhe a seguir a construção de uma reta paralela a uma reta *s*.

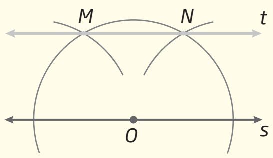
Centramos o compasso em *O* e traçamos um arco que intercepta *s* em *A* e *B*.



Com centros em *A* e *B* e a mesma medida de comprimento de raio, determinamos *M* e *N*.



Traçamos *t* // *s*, passando por *M* e *N*.



Alerte os estudantes sobre os riscos relacionados ao uso do compasso e oriente-os a tomar cuidado quanto ao uso deste instrumento.

Como o feixe de retas paralelas determina segmentos de reta congruentes sobre a transversal *m*, então também determinará segmentos de reta congruentes sobre a transversal *n*, assim: $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$ são divididos em segmentos de reta de medida de comprimento *v*, sendo $A'B' = 2v$ e $B'C' = 3v$.

Então:

- estabelecendo a razão $\frac{AB}{BC}$, temos: $\frac{AB}{BC} = \frac{2u}{3u} = \frac{2}{3}$ (I)
- estabelecendo a razão $\frac{A'B'}{B'C'}$, temos: $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2v}{3v} = \frac{2}{3}$ (II)

Comparando (I) e (II), temos: $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$

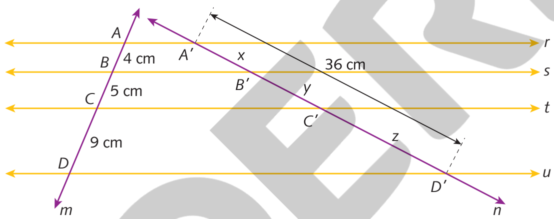
Logo, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são proporcionais a $\overline{A'B'}$ e $\overline{B'C'}$.

Segundo o **teorema de Tales**:

> Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais quaisquer, *m* e *n*, os segmentos de reta determinados sobre *m* são proporcionais aos segmentos de reta correspondentes determinados sobre *n*.

Agora, confira este exemplo.

Um feixe de retas paralelas (*r*, *s*, *t* e *u*) determina sobre as transversais *m* e *n* os pontos *A*, *B*, *C* e *D* e os pontos *A'*, *B'*, *C'* e *D'*. Sabendo que $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm, $CD = 9$ cm e $A'D' = 36$ cm, vamos determinar *A'B'*, *B'C'* e *C'D'* em centímetro.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

$$AD = AB + BC + CD \Rightarrow AD = 4\text{ cm} + 5\text{ cm} + 9\text{ cm} \Rightarrow AD = 18\text{ cm}$$

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{A'B'}{A'D'} \Rightarrow \frac{4\text{ cm}}{18\text{ cm}} = \frac{x}{36\text{ cm}} \Rightarrow x = \frac{4\text{ cm} \cdot 36\text{ cm}}{18\text{ cm}} \Rightarrow x = 8\text{ cm}$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{B'C'}{A'D'} \Rightarrow \frac{5\text{ cm}}{18\text{ cm}} = \frac{y}{36\text{ cm}} \Rightarrow y = \frac{5\text{ cm} \cdot 36\text{ cm}}{18\text{ cm}} \Rightarrow y = 10\text{ cm}$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{C'D'}{A'D'} \Rightarrow \frac{9\text{ cm}}{18\text{ cm}} = \frac{z}{36\text{ cm}} \Rightarrow z = \frac{9\text{ cm} \cdot 36\text{ cm}}{18\text{ cm}} \Rightarrow z = 18\text{ cm}$$

Portanto, $A'B' = 8$ cm, $B'C' = 10$ cm e $C'D' = 18$ cm.

Observação

Se não forem indicadas as unidades das medidas de comprimento de uma figura, consideramos todas as medidas dessa figura na mesma unidade.

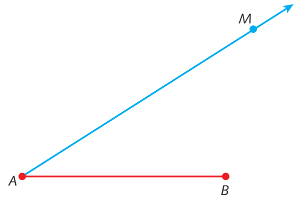
Ao final da construção, converse com os estudantes que essa mesma ideia permite a divisão de um segmento de reta em *n* partes iguais. Se nessa construção, em particular, traçássemos uma reta paralela a $\overline{EB}$, passando por *C*, e marcássemos o ponto *O*, intersecção de $\overline{AB}$ com essa paralela, obteríamos $\overline{AO} \cong \overline{ON} \cong \overline{NB}$, dividindo o segmento $\overline{AB}$ em três partes com a mesma medida de comprimento.

Divisão de um segmento de reta em partes proporcionais

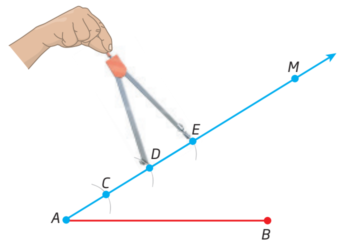
Uma das aplicações do teorema de Tales é a divisão de um segmento de reta em partes proporcionais.

Acompanhe o exemplo: dado o segmento de reta $\overline{AB}$, vamos determinar um ponto *N* em $\overline{AB}$, tal que $\frac{AN}{AB} = \frac{2}{3}$.

1º) Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, traçamos, com o auxílio de uma régua, uma semirreta $\overrightarrow{AM}$ qualquer.



2º) Sobre a semirreta $\overrightarrow{AM}$, marcamos três pontos (*C*, *D* e *E*) de modo que $AC = CD = DE$.



3º) Traçamos $\overleftrightarrow{EB}$.

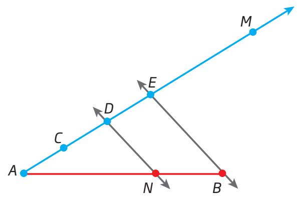
A seguir, traçamos uma paralela a $\overleftrightarrow{EB}$, passando por *D*, que corta $\overline{AB}$ em *N*.

Confira que: $\frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$ e $\overline{ND} \parallel \overline{BE}$

Assim, pelo teorema de Tales:

$$\frac{AD}{AE} = \frac{AN}{AB} = \frac{2}{3}$$

Dividimos, então, $\overline{AB}$ em partes proporcionais.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ ARQUIVO DA EDITORA

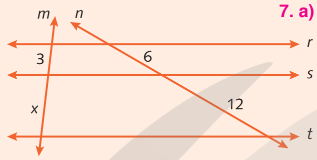
Atividades

As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

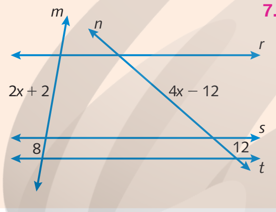
Faça as atividades no caderno.

7 Sendo $r /\!/ s /\!/ t$, determine o valor de x.

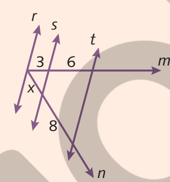
a) **7. a)** $x = 6$



b) **7. b)** $x = 15$

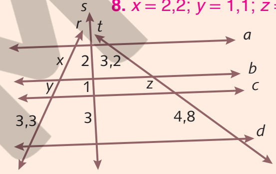


c) **7. c)** $x = 4$



8 Sendo $a /\!/ b /\!/ c /\!/ d$, determine x, y e z.

8. $x = 2{,}2$; $y = 1{,}1$; $z = 1{,}6$



• A **atividade 10** favorece o desenvolvimento de parte da habilidade **EF09MA14**. Se os estudantes tiverem dificuldade, ajude-os a escrever as proporções para obter as medidas corretas.

• Na **atividade 11**, podemos iniciar traçando, com auxílio de uma régua, uma semirreta $\overrightarrow{AM}$ qualquer. Sobre a semirreta $\overrightarrow{AM}$, com auxílio do compasso, marcamos quatro pontos (N, O, P e Q), de modo que $NA = NO = OP = PQ$.

Então, traçamos $\overleftrightarrow{QB}$ e, em seguida, uma paralela a $\overleftrightarrow{QB}$, passando por P, determinando o ponto C em $\overline{AB}$ de modo que $\frac{AQ}{AP} = \frac{3}{4}$, com $\overline{QB} \,//\, \overline{PC}$.

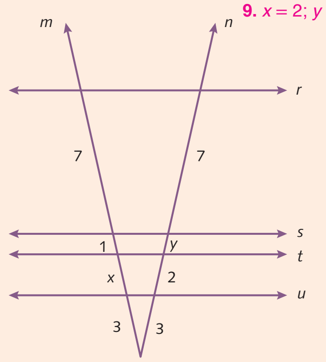
Por fim, pelo teorema de Tales, temos: $\frac{AP}{AQ} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$.

As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso na atividade **11**.

9 Considere $r//s//t//u$. Calcule x e y.

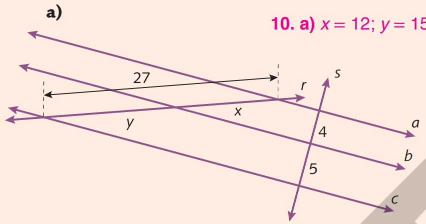
9. $x = 2$; $y = 1$



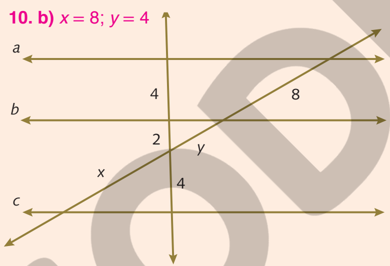
10 Sendo $a//b//c$, determine x e y.

a)

10. a) $x = 12$; $y = 15$



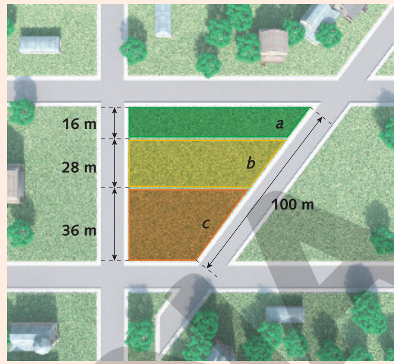
b) **10. b)** $x = 8$; $y = 4$



11 Utilizando régua e compasso, reproduza, no caderno, o segmento de reta $\overline{AB}$ abaixo. Em seguida, localize o ponto C nesse segmento de reta tal que $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$.

11. Resposta em *Orientações*.

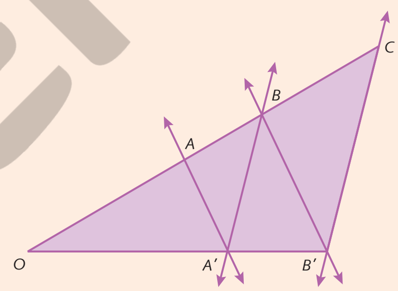
12 A figura apresenta três terrenos que ocupam uma quadra. Determine as medidas de comprimento a, b e c, em metro, sabendo que cada terreno tem um par de lados paralelos.



Representação esquemática, fora de escala.

12. $a = 20$ m; $b = 35$ m; $c = 45$ m

13 Considere que na figura:
- as retas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ são paralelas entre si;
- as retas $\overleftrightarrow{BA'}$ e $\overleftrightarrow{CB'}$ são paralelas entre si;



a) Aplicando o teorema de Tales para os triângulos OAA' e OBB', escreva as relações entre as medidas dos comprimentos dos lados. **13. a)** $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$

b) Aplicando o teorema de Tales para os triângulos OBA' e OCB', escreva as relações entre as medidas dos comprimentos dos lados. **13. b)** $\frac{OB}{OC} = \frac{OA'}{OB'}$

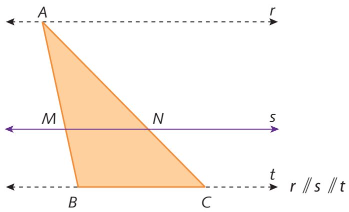
c) Prove que $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB}$.

13. c) Aplicando a propriedade transitiva da igualdade nos resultados dos itens **a** e **b**, temos: $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{OC}$
Invertendo essas razões, temos: $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB}$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Teorema de Tales nos triângulos

Analise o triângulo *ABC*, a reta *s*, paralela a *t* (reta suporte de $\overline{BC}$) que corta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, nos pontos *M* e *N*, e a reta *r*, paralela a *s* pelo ponto *A*.



As retas *r*, *s* e *t* formam um feixe de paralelas.

Então, aplicando o teorema de Tales, temos:

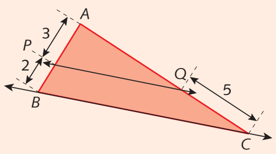
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

Toda reta paralela a um lado de um triângulo determina, sobre os outros dois lados, segmentos de reta proporcionais.

Atividades

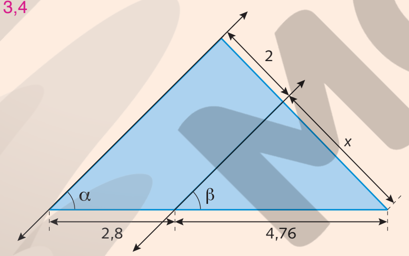
Faça as atividades no caderno.

14 Na figura, $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Determine *AQ*. **14.** $AQ = 7{,}5$



15 Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo *ABC* determina os pontos *D* em $\overline{AB}$ e *E* em $\overline{AC}$. Sabendo que $AD = k$, $DB = k + 4$, $AE = 4$ e $EC = 6$, determine a medida de comprimento do lado $\overline{AB}$ do triângulo.
15. $AB = 20$

16 Determine o valor de *x*, sabendo que as medidas α e β das aberturas dos ângulos correspondentes são iguais. **16.** $x = 3{,}4$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

- A **atividade 14** envolve a aplicação do teorema de Tales nos triângulos. Este é o momento oportuno para verificar se os estudantes compreenderam a propriedade. Espera-se que para determinar *AQ*, eles escrevam a seguinte proporção:

$$\frac{3}{2} = \frac{AQ}{5}$$

- Caso tenham dificuldades para compreender o enunciado da **atividade 15**, oriente-os a fazer um esboço da situação.
- Na **atividade 16**, espera-se que os estudantes concluam que como $\alpha = \beta$, então as retas representadas na figura são paralelas. Com base nisso, eles podem aplicar o teorema de Tales no triângulo e determinar *x*.

Semelhança

Objetivo:

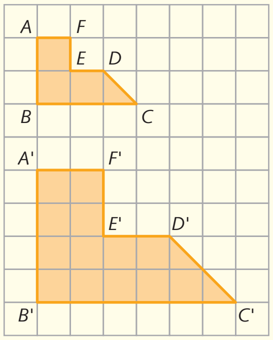
Compreender o conceito de semelhança entre figuras.

Justificativa

Compreender o conceito de semelhança de figuras amplia os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre congruência de figuras e mobiliza o que estudaram sobre segmentos de reta proporcionais. Além disso, este conceito é importante para demonstrar o teorema de Pitágoras, que será estudado mais adiante.

Mapeando conhecimentos

Organize os estudantes em duplas e distribua para eles uma folha de papel quadriculado com as seguintes figuras representadas nela:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Em seguida, proponha as seguintes atividades:

1. Analise as medidas de abertura dos pares de ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{A'}$, $\hat{B}$ e $\hat{B'}$, $\hat{C}$ e $\hat{C'}$, $\hat{D}$ e $\hat{D'}$, $\hat{E}$ e $\hat{E'}$ e $\hat{F}$ e $\hat{F'}$. O que você concluiu sobre elas, em cada par de ângulos correspondentes?
2. Observe agora os pares de lado $\overline{A'B'}$ e $\overline{AB}$, $\overline{B'C'}$ e $\overline{BC}$, $\overline{C'D'}$ e $\overline{CD}$, $\overline{D'E'}$ e $\overline{DE}$, $\overline{E'F'}$ e $\overline{EF}$ e $\overline{F'A'}$ e $\overline{FA}$. Qual relação você encontrou entre as medidas de comprimento, em cada par de lados correspondentes?

Incentive a participação da turma.

Para as aulas iniciais

Retome a atividade da dinâmica inicial e discuta com a turma o modo como chegaram às respostas e faça as intervenções necessárias. Depois, pergunte aos estudantes o que são polígonos semelhantes e incentive-os a explicar utilizando vocabulário próprio. Aproveite a oportunidade para explorar polígonos que não são semelhantes. Incentive-os a justificar o porquê desses polígonos não serem semelhantes.

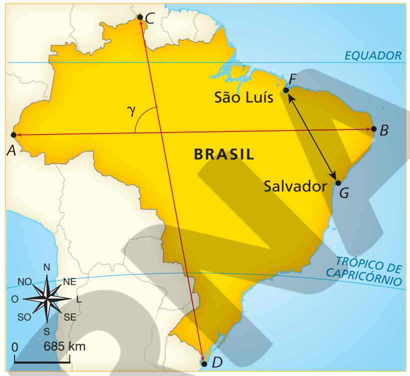
3 Semelhança

Figuras semelhantes

Confira os mapas que trazem as localizações dos pontos extremos do Brasil (norte – C, sul – D, leste – B, oeste – A) e das cidades de São Luís (MA) e Salvador (BA).

mapa I

mapa II



mapa III

MAPAS: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborados com base em: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 91.

As três imagens representam o mapa do Brasil; entretanto, note que os mapas têm a mesma forma, mas tamanhos diferentes.

De acordo com os pontos apresentados, podemos identificar:

- *AB*: medida da distância do ponto extremo oeste ao ponto extremo leste do Brasil;
- *CD*: medida da distância do ponto extremo norte ao ponto extremo sul do Brasil;
- *FG*: medida da distância entre os pontos que representam as cidades de São Luís e Salvador;
- α, β e γ: medidas das aberturas dos ângulos formados pelos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, no mapa I, no mapa II e no mapa III.

Com o auxílio de uma régua e de um transferidor, podemos obter, em cada mapa, as medidas de comprimento dos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{FG}$ e as medidas α, β e γ das aberturas dos ângulos, obtendo os dados a seguir.

Mapa	*AB*	*FG*	Medida da abertura do ângulo
I	4,2 cm	1,2 cm	α = 80°
II	4,9 cm	1,4 cm	β = 80°
III	6,3 cm	1,8 cm	γ = 80°

Oriente os estudantes a conferir as medidas do quadro utilizando régua e transferidor, alertando-os quanto a possíveis imprecisões dos instrumentos de medida.

Confira que, nesse exemplo, as figuras apresentam estas características:

- os **ângulos** correspondentes têm medidas das aberturas iguais;
- as medidas de comprimento dos segmentos de reta correspondentes são proporcionais.

$$\frac{4,2\text{ cm}}{1,2\text{ cm}} = 3,5; \ \frac{4,9\text{ cm}}{1,4\text{ cm}} = 3,5; \ \frac{6,3\text{ cm}}{1,8\text{ cm}} = 3,5; \text{ logo: } \frac{AB}{FG} = 3,5$$

Dizemos que duas figuras são **semelhantes** quando as medidas das aberturas dos ângulos correspondentes são iguais e as medidas de comprimento dos segmentos de reta correspondentes são proporcionais.

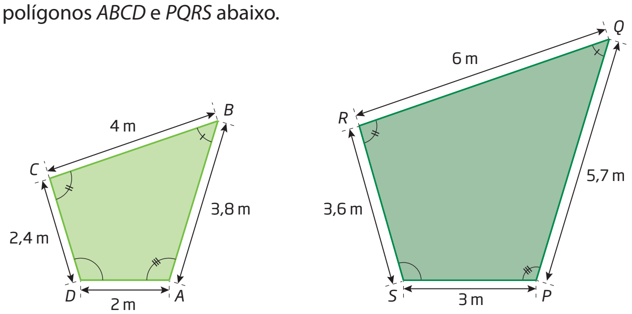
Logo, podemos dizer que os mapas são semelhantes.

Sugestão de leitura

IMENES, L. M.; JAKUBOVIC, J. (Jakubo); LELLIS, M. **Semelhança**. São Paulo: Atual, 2005. (Coleção Pra que serve Matemática?).
Esse livro apresenta usos de semelhança no cotidiano. Além disso, traz curiosidades, jogos e charadas sobre o assunto.

Polígonos semelhantes

Considere os polígonos *ABCD* e *PQRS* abaixo.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Comparando os polígonos, podemos identificar que:

- os ângulos correspondentes são congruentes;

$$\hat{A} \cong \hat{P}; \ \hat{B} \cong \hat{Q}; \ \hat{C} \cong \hat{R}; \ \hat{D} \cong \hat{S}$$

- as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} \text{ ou } \frac{3,8\text{ m}}{5,7\text{ m}} = \frac{4\text{ m}}{6\text{ m}} = \frac{2,4\text{ m}}{3,6\text{ m}} = \frac{2\text{ m}}{3\text{ m}} = \frac{2}{3}$$

Podemos dizer que os polígonos *ABCD* e *PQRS* são **semelhantes** e indicar:

$ABCD \sim PQRS$

Lemos: "o polígono *ABCD* é semelhante ao polígono *PQRS*".

Quando dois polígonos têm os ângulos correspondentes congruentes e as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais, eles são denominados **polígonos semelhantes**.

A razão entre as medidas de comprimento dos lados correspondentes em polígonos semelhantes é denominada **razão de semelhança** ou **coeficiente de proporcionalidade**. Então, no exemplo da semelhança entre os polígonos *ABCD* e *PQRS*, temos:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CD}{RS} = \frac{DA}{SP} = k$$

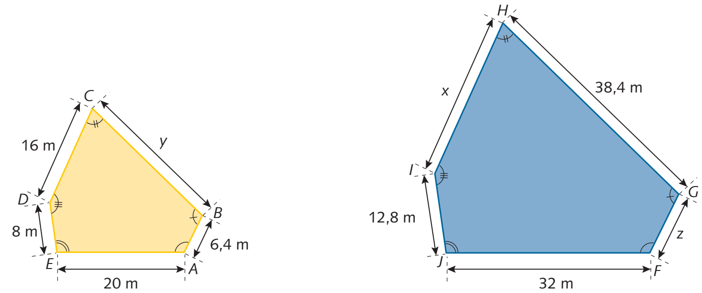
razão de semelhança

A razão de semelhança (k) nesse caso é $\frac{2}{3}$.

Explique aos estudantes que duas figuras semelhantes podem ter o mesmo tamanho ou tamanhos diferentes. Quando têm as mesmas medidas dos lados correspondentes, podemos dizer que são também congruentes; se forem medidas diferentes, são apenas semelhantes. O caso particular em que as figuras são congruentes nos dá razão de semelhança (ou coeficiente de proporcionalidade) igual a 1. Para figuras apenas semelhantes, a comparação promovida pela razão de semelhança pode ser dada e analisada a partir de dois sentidos: da figura maior para a menor ou da menor para a maior. Se a razão de semelhança for um número entre 0 e 1, significa que a primeira figura tem medidas de comprimento correspondentes menores do que a segunda; decorre que o caso contrário nos dá um número maior que 1.

Represente alguns polígonos na lousa e indique a medida do comprimento dos seus lados e as medidas das aberturas dos seus ângulos. Em seguida, peça aos estudantes que indiquem quais são semelhantes.

Agora, analise um exemplo em que precisamos determinar *x*, *y* e *z*, sabendo que os polígonos *ABCDE* e *FGHIJ* são semelhantes.



Inicialmente, determinamos a razão de semelhança *k* entre os dois polígonos, do polígono *ABCDE* para o *FGHIJ*.

$$\frac{16\text{ m}}{x} = \frac{y}{38{,}4\text{ m}} = \frac{6{,}4\text{ m}}{z} = \frac{20\text{ m}}{32\text{ m}} = \frac{8\text{ m}}{12{,}8\text{ m}} = k \Rightarrow k = \frac{20}{32} \overset{:4}{=} \frac{5}{8}$$

Em seguida, determinamos as medidas de comprimento *x*, *y* e *z*, em metro.

$$\frac{16\text{ m}}{x} = \frac{5}{8} \qquad x = \frac{16\text{ m} \cdot 8}{5} = 25{,}6\text{ m}$$

$$\frac{y}{38{,}4\text{ m}} = \frac{5}{8} \qquad y = \frac{5 \cdot 38{,}4\text{ m}}{8} = 24\text{ m}$$

$$\frac{6{,}4\text{ m}}{z} = \frac{5}{8} \qquad z = \frac{8 \cdot 6{,}4\text{ m}}{5} = 10{,}24\text{ m}$$

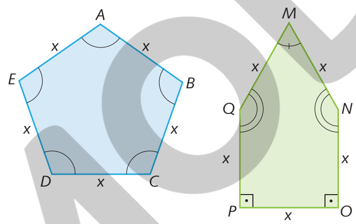
Então, $x = 25{,}6$ m, $y = 24$ m e $z = 10{,}24$ m.

Observação

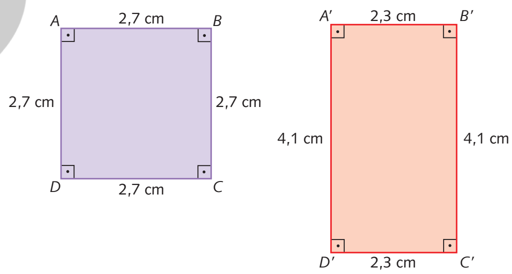
Para se certificar de que dois polígonos são semelhantes, é preciso verificar as **duas condições**:

- os ângulos correspondentes devem ser congruentes;
- as medidas de comprimento dos lados correspondentes devem ser proporcionais.

Apenas uma das condições não é suficiente para garantir a semelhança entre polígonos. Por exemplo:



O pentágono *ABCDE* tem lados de medidas de comprimento iguais às do pentágono *MNOPQ* (a razão entre as medidas de comprimento dos lados é 1), ou seja, as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais, mas os ângulos correspondentes não são congruentes. Portanto, os polígonos *ABCDE* e *MNOPQ* não são semelhantes.



Os ângulos correspondentes dos quadriláteros são congruentes, mas as medidas de comprimento dos lados correspondentes não são proporcionais. Portanto, os quadriláteros *ABCD* e *A'B'C'D'* não são semelhantes.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

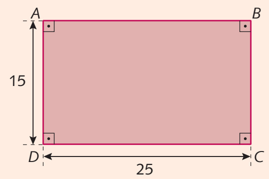
Atividades

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso na atividade **19**.

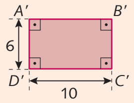
Faça as atividades no caderno.

17 Os polígonos abaixo são semelhantes? Justifique sua resposta.

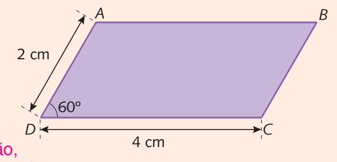
a)



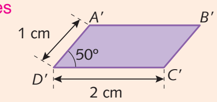
17. a) Sim, pois os ângulos correspondentes têm a mesma medida da abertura (90º) e a razão de semelhança é $\frac{5}{2}$.



b)



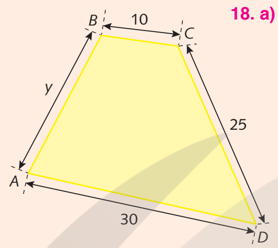
17. b) Não, pois os ângulos correspondentes têm medidas das aberturas diferentes.

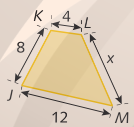


18 Em cada item, os polígonos são semelhantes. Determine os valores de x e de y.

a)

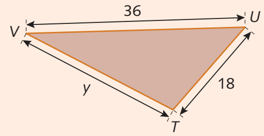
18. a) $x = 10$; $y = 20$

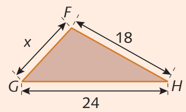




b)

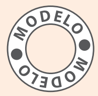
18. b) $x = 12$; $y = 27$

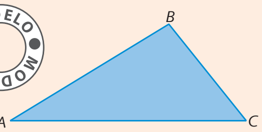




19 Represente um triângulo semelhante ao triângulo ABC com razão de semelhança igual a $\frac{2}{3}$.

19. Resposta em *Orientações*.

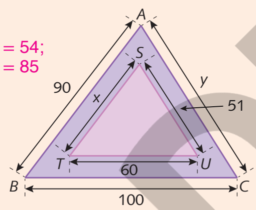




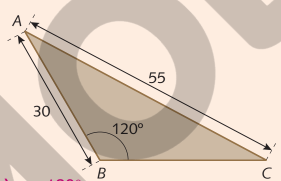
20 Em cada item, os triângulos ABC e STU são semelhantes. Determine os valores de x e de y.

a)

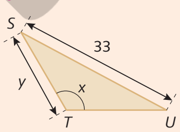
20. a) $x = 54$; $y = 85$



b)



20. b) $x = 120°$; $y = 18$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 19**, lembre os estudantes da construção de segmento proporcional.

Para que seja feita a construção do triângulo $AB'C'$ semelhante ao triângulo ABC, tal que $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{2}{3}$, seguimos os seguintes passos:

- Traçamos, com o auxílio de uma régua, uma semirreta que passe por qualquer um dos lados do triângulo ABC. Neste caso, vamos escolher o lado $\overline{AB}$ para traçar a semirreta $\overrightarrow{AB}$.
- Sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$, com auxílio do compasso, marcamos três pontos (N, O e P), de modo que: $NA = NO = OP$.
- Traçamos uma reta $\overleftrightarrow{PC}$ e uma nova reta paralela a $\overleftrightarrow{PC}$ que passe pelo ponto O, determinando o ponto C' em $\overline{AC}$, de modo que $\frac{AO}{AP} = \frac{2}{3}$, com $\overline{PC} // \overline{OC}$. E, dessa forma, aplicando o teorema de Tales, temos: $\frac{AO}{AP} = \frac{AC'}{AC} = \frac{2}{3}$.
- Para finalizar a construção, podemos traçar uma reta $\overleftrightarrow{B'C'}$, paralela à $\overleftrightarrow{BC}$. Segue do teorema de Tales que $\frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3}$. Assim, obtemos o triângulo $AB'C'$.

Triângulos semelhantes

BNCC:

Habilidade EF09MA12.

Objetivos:

- Compreender o teorema fundamental da semelhança.
- Reconhecer triângulos semelhantes segundo cada um dos casos de semelhança.

Justificativa

O teorema fundamental da semelhança é imporante na resolução de diversos problemas envolvendo triângulos e, por esta razão, é importante compreendê-lo.

Reconhecer triângulos semelhantes, segundo cada um dos casos de semelhança, permite aos estudantes reconhecer que não é necessário conhecer a medida do comprimento de todos os lados nem a medida da abertura de todos os ângulos internos de dois triângulos para verificar se eles são semelhantes. Além disso, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA12**.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes: "Para verificar se dois triângulos são semelhantes é preciso conhecer a medida do comprimento de todos os lados e a medida da abertura de todos os ângulos internos dos dois triângulos?". Incentive os estudantes a fazerem investigações e compartilharem as conclusões.

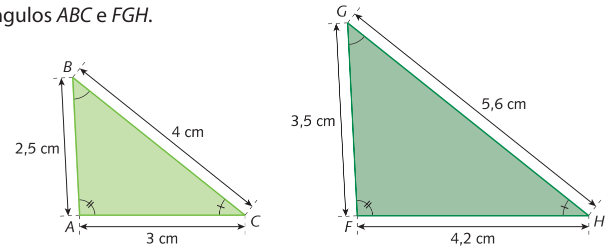
Para as aulas iniciais

Verifique as conclusões a que os estudantes chegaram. Se possível, explore alguns exemplos concretos com a turma.

Assim como as outras figuras planas, os triângulos semelhantes devem ter lados correspondentes proporcionais e ângulos correspondentes congruentes.

4 Triângulos semelhantes

Observe os triângulos *ABC* e *FGH*.



- Os ângulos correspondentes são congruentes: $\hat{A} \cong \hat{F}, \hat{B} \cong \hat{G}, \hat{C} \cong \hat{H}$.
- A razão entre as medidas de comprimento dos lados correspondentes é $\frac{5}{7}$, pois:

$$\frac{3\text{ cm}}{4{,}2\text{ cm}} = \frac{2{,}5\text{ cm}}{3{,}5\text{ cm}} = \frac{4\text{ cm}}{5{,}6\text{ cm}} = \frac{5}{7}$$

Podemos concluir que os triângulos *ABC* e *FGH* são semelhantes. Indicamos: $\triangle ABC \sim \triangle FGH$

Dois triângulos são **semelhantes** quando os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais.

Atividades

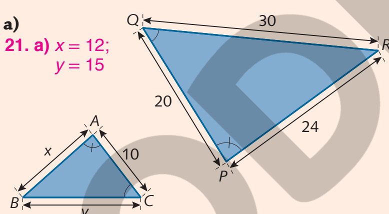
As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

Faça as atividades no caderno.

21 Os triângulos de cada item são semelhantes. Determine os valores de x e de y em cada caso.

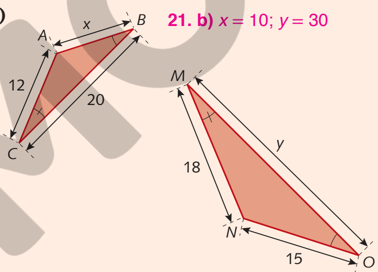
a)

21. a) $x = 12$; $y = 15$



b)

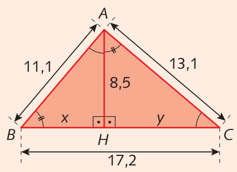
21. b) $x = 10$; $y = 30$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

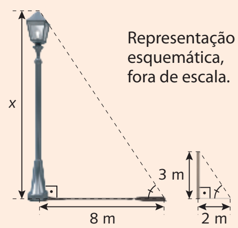
22 Calcule os valores aproximados de x e de y na figura, sabendo que *AHB* e *CHA* são triângulos semelhantes.

22. $x \simeq 7{,}2$; $y \simeq 10$



23 Calcule a medida da altura x de um poste, em metro, sabendo que o comprimento de sua sombra sobre o solo mede 8 m no momento em que o comprimento da sombra de uma vara vertical de 3 m mede 2 m.

23. 12 m



Representação esquemática, fora de escala.

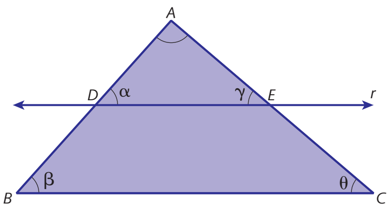
(**EF09MA12**) Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.

Teorema fundamental da semelhança

Faça a leitura coletiva do texto com a turma. Se achar pertinente, desenvolva com eles a demonstração do teorema fundamental da semelhança. É importante que fique claro para a turma quais são as hipóteses e a tese.

Teorema fundamental da semelhança

Considere um $\triangle ABC$ e uma reta r, paralela a $\overline{BC}$, que corta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos D e E, respectivamente, conforme a figura a seguir.



Vamos provar que os triângulos DAE e BAC são semelhantes.

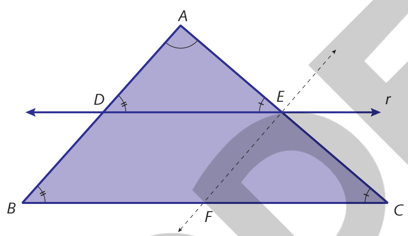
- Os ângulos internos correspondentes são congruentes, pois:
  - o ângulo $B\hat{A}C$ é comum aos dois triângulos;
  - os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}E$ são correspondentes; logo, $\alpha = \beta$;
  - os ângulos $A\hat{C}B$ e $A\hat{E}D$ são correspondentes; logo, $\gamma = \theta$.
- As medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais.

Se, pelo ponto E, traçarmos $\overleftrightarrow{EF}$ paralela a $\overline{AB}$, temos:

1 $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}$ → aplicação do teorema de Tales nos triângulos DAE e BAC

2 $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$ → aplicação do teorema de Tales nos triângulos CEF e CAB

3 $\overline{DE} \cong \overline{BF}$ → lados opostos do paralelogramo $DEFB$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Substituindo BF por DE de 3 em 2, temos: $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$ 4

Comparando 1 e 4, temos: $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

Portanto, os triângulos DAE e BAC têm as medidas de comprimento dos lados correspondentes proporcionais. Assim, concluímos que os triângulos DAE e BAC são semelhantes.

Segundo o **teorema fundamental da semelhança:**

> Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intercepta os outros dois lados em pontos distintos determina, com esses lados, um triângulo semelhante ao primeiro.

Ao responder a questão proposta no boxe *Um pouco de história*, espera-se que os estudantes percebam que, pelo teorema fundamental da semelhança de triângulos, os triângulos ABH e GFH são semelhantes e, por isso, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{AB}{GF} = \frac{BH}{FH} = \frac{AH}{GH}$$

Isso justifica por que Tales pôde escrever a proporção que o levou a obter a medida da altura da pirâmide.

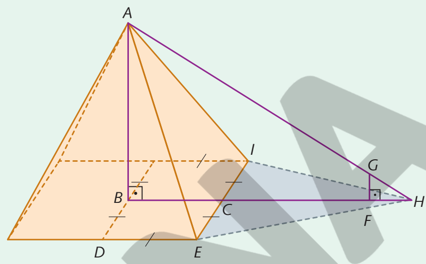
- Na **atividade 24**, os estudantes vão aplicar o teorema fundamental da semelhança para determinar x e y nas figuras. Ajude-os a determinar as proporções caso tenham dificuldades. Reserve um momento para discutir os dois itens coletivamente.
- Na **atividade 25**, pergunte aos estudantes qual seria a medida do comprimento de $\overline{BC}$ caso $AD = 6$ m. Espera-se que os estudantes percebam que a medida do comprimento de $\overline{BC}$ seria igual à metade da encontrada anteriormente, ou seja, $\frac{96}{13}$ m.

Um pouco de história

Faça a atividade no caderno.

Nascido em Mileto (região atualmente pertencente à Turquia), o filósofo grego Tales foi considerado um dos sábios da Grécia e, para muitos historiadores, a Geometria demonstrativa teve início com ele. Além do teorema que recebe seu nome, é atribuída a ele, também, a demonstração de que as medidas das aberturas dos ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais. Tales teria calculado a medida da altura das pirâmides, quando viveu no Egito, usando um método de triangulação, uma aplicação do teorema que recebeu seu nome. Um dos possíveis métodos usados por Tales teria sido aplicado da seguinte forma:

1º) Colocou uma estaca (representada por $\overline{GF}$) na sombra da pirâmide sobre a perpendicular que passa no ponto médio (C) de um dos lados da base da pirâmide ($\overline{EI}$), de forma que sua sombra terminasse no mesmo ponto (H) onde acabava a sombra da pirâmide.



2º) Mediu o comprimento de $\overline{DE}$, $\overline{CH}$, $\overline{FH}$ e $\overline{GF}$. Como $DE = BC$, obteve a medida de comprimento de $\overline{BH}$.

3º) Finalmente, calculou a medida da altura da pirâmide (representada por AB), escrevendo a seguinte proporção:

$$\frac{BH}{FH} = \frac{AB}{GF} \text{ (}BH, FH \text{ e } GF \text{ são medidas de comprimento conhecidas)}$$

Atividade

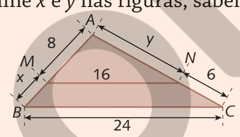
Explique por que Tales pôde escrever essa proporção que o levou a obter a medida da altura da pirâmide. **Um pouco de história**: Resposta em *Orientações*.

Atividades

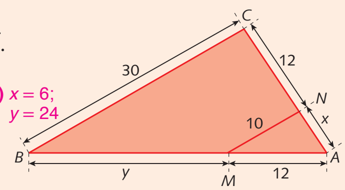
Faça as atividades no caderno.

24 Determine x e y nas figuras, sabendo que $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

a) **24. a)** $x = 4$; $y = 12$

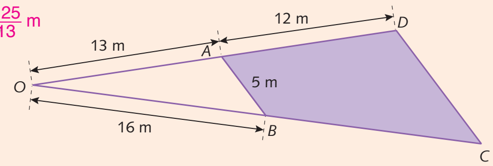


b) **24. b)** $x = 6$; $y = 24$



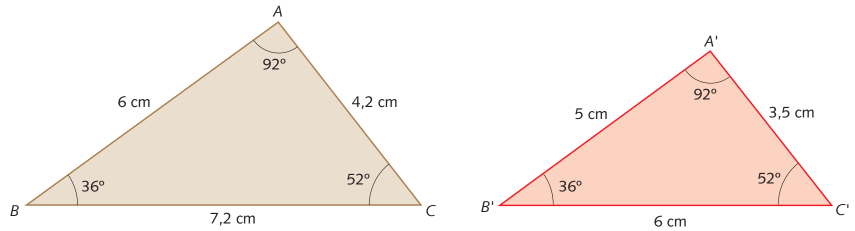
25 O formato de um pátio é representado pelo quadrilátero $ABCD$, com $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$. Sabendo que $AB = 5$ m, $AD = 12$ m, $OA = 13$ m e $OB = 16$ m, determine BC e DC.

25. $BC = \frac{192}{13}$ m; $DC = \frac{125}{13}$ m



Casos de semelhança de triângulos

Vamos verificar se os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes.



- Os ângulos internos correspondentes são congruentes.

$$\text{med}\,(B\hat{A}C) = \text{med}\,(B'\widehat{A'}C') = 92°$$

$$\text{med}\,(A\hat{B}C) = \text{med}\,(A'\widehat{B'}C') = 36°$$

$$\text{med}\,(A\hat{C}B) = \text{med}\,(A'\widehat{C'}B') = 52°$$

- As medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais.

$$\frac{6\text{ cm}}{5\text{ cm}} = \frac{7{,}2\text{ cm}}{6\text{ cm}} = \frac{4{,}2\text{ cm}}{3{,}5\text{ cm}} = \frac{6}{5}$$

Assim, concluímos que os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes.

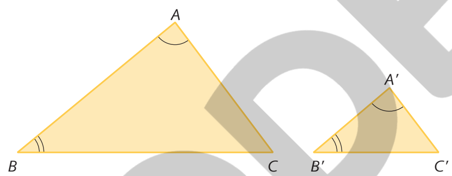
Existem três casos em que podemos verificar a semelhança entre triângulos conhecendo apenas alguns dos seus elementos.

1º caso: AA (Ângulo – Ângulo)

Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Analise os triângulos *ABC* e *A'B'C'*.

Como $B\hat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$ e $A\hat{B}C \cong A'\widehat{B'}C'$, então: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

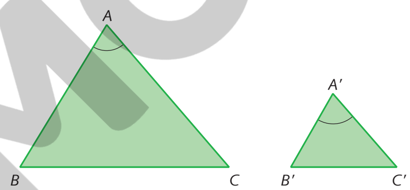


2º caso: LAL (Lado – Ângulo – Lado)

Se dois triângulos têm as medidas de comprimento de dois pares de lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados forem congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

Analise os triângulos *ABC* e *A'B'C'*.

Se $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ e como $B\hat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$, então: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Caso considere interessante e tenha a oportunidade, antes de iniciar os trabalhos com os casos de semelhança de triângulos, apresente aos estudantes o vídeo sugerido a seguir. Depois, mostre os casos de semelhança entre triângulos e pergunte a eles qual foi o caso de semelhança utilizado na situação apresentada no vídeo. Se julgar adequado, peça aos estudantes que, em grupos, realizem a medição de algum objeto ou da construção da escola seguindo a estratégia que aprenderam.

Sugestão de vídeo

O vídeo "Medindo prédios com prato", do canal *Manual do Mundo*, mostra como medir a altura de um prédio utilizando um prato e uma trena.

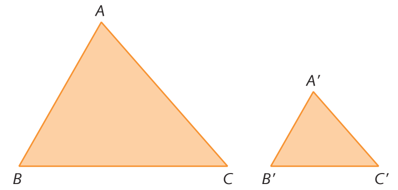
• A **atividade 27** incentiva a argumentação. Ajude-os a identificar os lados e ângulos correspondentes dos triângulos *ADG* e *GCF*. Como *GDEF* é um quadrado, temos: $\overleftrightarrow{GF} // \overleftrightarrow{AB}$ e $A\hat{D}G$ é um ângulo reto. Com base nisso, podemos concluir que $\text{med}(D\hat{A}G) = \text{med}(C\hat{G}F)$, pois são ângulos correspondentes; $\text{med}(G\hat{D}A) = \text{med}(F\hat{C}G)$, pois são ângulos retos. Portanto, pelo caso AA, $\triangle ADG \sim \triangle GCF$.

3º caso: LLL (Lado – Lado – Lado)

Se dois triângulos têm os três pares de lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais, esses triângulos são semelhantes.

Analise os triângulos *ABC* e *A'B'C'*.

Como $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$, então: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$



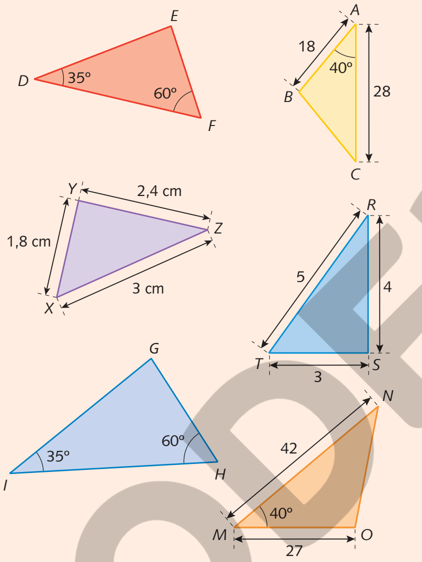
As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

Atividades

26. $\triangle ABC \sim \triangle MON$ (LAL); $\triangle XYZ \sim \triangle TSR$ (LLL); $\triangle DEF \sim \triangle IGH$ (AA)

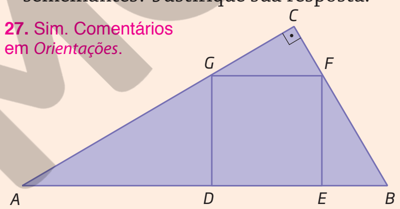
Faça as atividades no caderno.

26 Identifique os pares de triângulos semelhantes, especificando o caso.



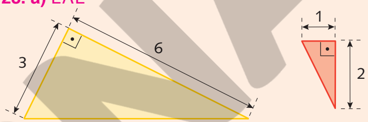
27 Sabendo que *GDEF* é um quadrado, responda: os triângulos *ADG* e *GCF* são semelhantes? Justifique sua resposta.

27. Sim. Comentários em *Orientações*.

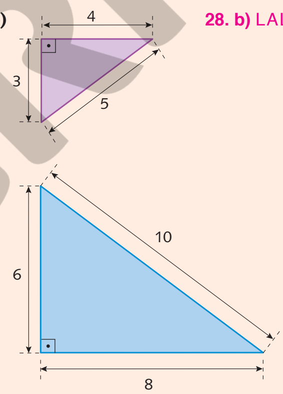


28 Identifique o caso de semelhança nos pares de triângulos semelhantes.

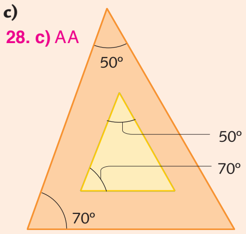
a) **28. a)** LAL



b) **28. b)** LAL ou LLL

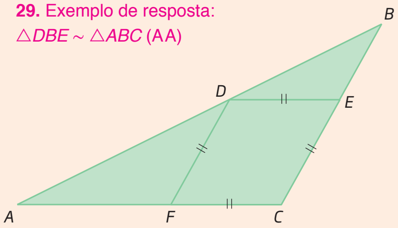


c) **28. c)** AA

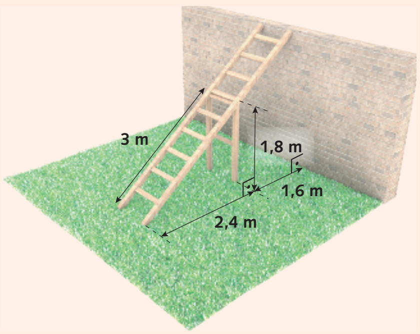


29 Na figura, identifique dois triângulos semelhantes e o caso de semelhança correspondente, sabendo que o quadrilátero *DECF* é um losango.

29. Exemplo de resposta: $\triangle DBE \sim \triangle ABC$ (AA)



30 Considere a figura a seguir.



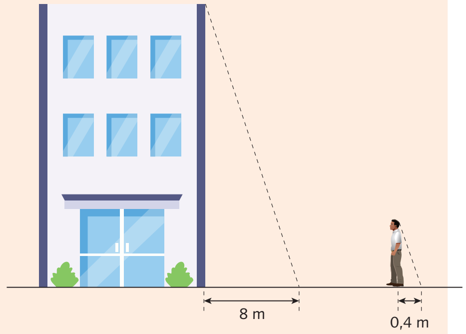
Representação esquemática, fora de escala.

a) Calcule a medida do comprimento da escada. 30. a) 5 m

b) Os ângulos correspondentes são congruentes e os triângulos tem um lado com a mesma medida de comprimento? 30. b) Resposta em *Orientações*.

c) Com base no item anterior, os triângulos são semelhantes? 30. c) Resposta em *Orientações*.

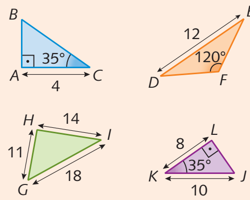
31 Ronaldo notou que, em determinada hora do dia, o comprimento de sua sombra media 0,40 m, enquanto o comprimento da sombra do prédio onde morava media 8 m. Sabendo que Ronaldo mede 1,60 m de altura, determine a medida da altura do prédio. 31. 32 m



Representação esquemática, fora de escala.

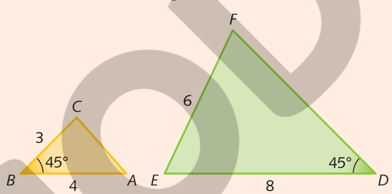
32. Respostas pessoais.

32 Analise os triângulos a seguir.



- No caderno, elabore um problema que possa ser resolvido a partir dos triângulos.
- Troque de caderno com um colega e resolva o problema elaborado por ele.
- Analise a resposta do colega e dê um retorno a ele, dizendo o que respondeu corretamente e em que pontos ele se equivocou.

33 Analise estes triângulos.



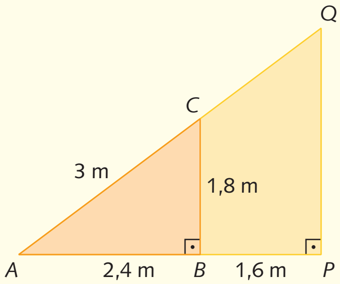
a) As medidas de comprimento dos lados correspondentes dos triângulos são proporcionais? 33. a) sim

b) Um dos ângulos de cada triângulo tem a mesma medida de abertura? 33. b) sim

c) Com base no item anterior, os triângulos são semelhantes?

33. c) Resposta em *Orientações*.

- Na **atividade 30**, oriente os estudantes a fazer um esboço da situação como o representado a seguir:



Para realizar o **item a**, espera-se que apliquem o teorema de Tales:

$$\frac{2{,}4 \text{ m}}{1{,}6 \text{ m}} = \frac{3 \text{ m}}{CQ}$$

Assim, $CQ = 2$ m

A medida do comprimento da escada é 5 m, pois 3 m + 2 m = 5 m.

- Resposta do **item b** da **atividade 30**:

Com base no esboço feito, os estudantes podem concluir mais facilmente que os ângulos correspondentes dos triângulos são congruentes, pois:

$A\hat{B}C \cong A\hat{P}Q$ (ângulos retos)

$B\hat{A}C \cong P\hat{A}Q$ (ângulo comum aos dois triângulos)

$B\hat{C}A \cong P\hat{Q}A$ (pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180° e a medida das aberturas dos outros dois ângulos internos correspondentes dos dois triângulos são iguais).

Os triângulos não têm lados correspondentes com a mesma medida de comprimento.

$AB = 2{,}4$ m, $BC = 1{,}8$ m, $CA = 3$ m, $AP = 4$ m, $PQ > 1{,}8$ m e $QA = 5$ m.

- Resposta do **item c** da **atividade 30**:

Com base no item anterior, os triângulos são semelhantes pelo caso AA.

- Resposta do **item c** da **atividade 33**:

Espera-se que os estudantes respondam que os triângulos não são semelhantes, pois os ângulos que têm a mesma medida de abertura nos dois triângulos não estão compreendidos entre os lados que têm medidas de comprimento proporcionais.

Resolvendo em equipe

BNCC:

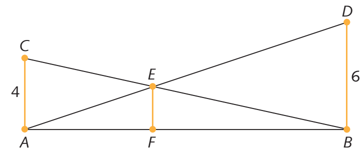
- Competências gerais 1, 2 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 1, 2 e 3 (as descrições estão na página VII).

A seção destaca as etapas selecionadas para encaminhar a resolução de problemas. Elas devem ser analisadas e discutidas com os estudantes. Além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **1**, **2** e **9** e das competências específicas **1**, **2** e **3**, a seção permite a transferência de estratégias de resolução para outros contextos e situações.

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(Enem) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ e a haste é representada pelo segmento $\overline{EF}$, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta $\overline{AB}$. Os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ representam cabos de aço que serão instalados.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual deve ser o valor do comprimento da haste $\overline{EF}$? **Resolvendo em equipe**: alternativa **c**

a) 1 m **b)** 2 m **c)** 2,4 m **d)** 3 m **e)** $2\sqrt{6}$ m

Interpretação e identificação dos dados:
primeiro item: resposta pessoal
segundo item: Sim, os triângulos *ABC* e *FBE* são semelhantes pelo caso AA, pois ambos têm um ângulo reto e compartilham o ângulo $\hat{B}$.
terceiro item: *ABD* e *AFE*

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema.
- Os triângulos *ABC* e *FBE* são semelhantes? Se sim, explique por quê.
- Encontre outro par de triângulos semelhantes.

Plano de resolução

- Monte as proporções relativas aos dois pares de triângulos semelhantes.
- Encontre uma relação entre *AB* e *AF*.
- Resolva o sistema de equações obtido.

Plano de resolução:
primeiro item: $\frac{FB}{AB} = \frac{EB}{BC} = \frac{FE}{AC}$; $\frac{AF}{AB} = \frac{AE}{AD} = \frac{FE}{BD}$
segundo item: $AB = \frac{5}{2}AF$
terceiro item: Resolvendo o sistema, obtemos 2,4 m para a medida de comprimento de $\overline{EF}$.

Resolução

- Reúna-se com dois ou três colegas.
- Mostre a eles seu plano de resolução e analise atentamente o plano deles, verificando se há ideias comuns entre vocês.
- Vocês deverão discutir quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolher um deles para a execução do processo de resolução.

Observação

Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual em seus cadernos.

Verificação

- O grupo deve reler o problema e verificar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Cada grupo deverá elaborar uma síntese sobre os casos de semelhança de triângulos. Essa síntese poderá ser apresentada na forma de texto ou em um cartaz. Para cada um dos casos, inserir um exemplo que ilustre a explicação dada.

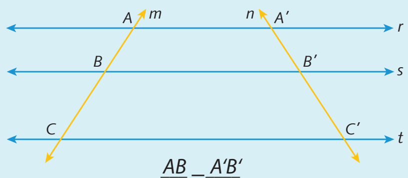
Revisão dos conteúdos deste capítulo

Teorema de Tales

Um **feixe de retas paralelas** é formado por duas ou mais retas de um mesmo plano que, consideradas duas a duas, são sempre paralelas.

Uma reta que intercepta duas ou mais retas de um feixe de retas paralelas recebe o nome de **transversal**.

Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas retas transversais quaisquer, *m* e *n*, os segmentos de reta determinados sobre *m* são proporcionais aos segmentos de reta correspondentes determinados sobre *n*.



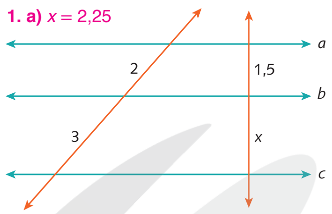
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Teorema de Tales nos triângulos

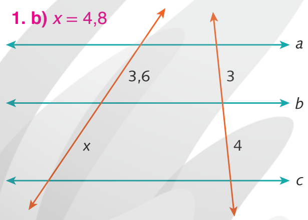
Toda reta paralela a um lado de um triângulo determina, sobre os outros dois lados, segmentos de reta proporcionais.

1. Determine os valores desconhecidos de x em cada caso, sabendo que $a \parallel b \parallel c$.

a) **1. a)** $x = 2{,}25$

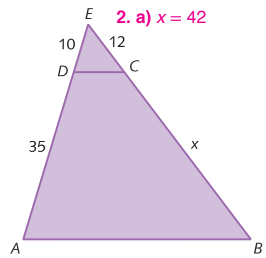


b) **1. b)** $x = 4{,}8$

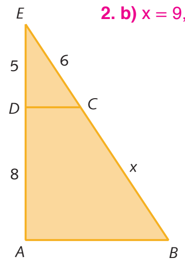


2. Determine o valor de x nos triângulos, sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

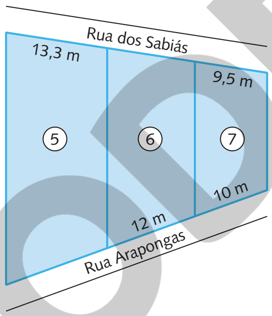
a) **2. a)** $x = 42$



b) **2. b)** x = 9,6



3. A figura abaixo representa três terrenos do bairro Recanto dos pássaros que se parecem com trapézios.



a) Marcelo é proprietário do lote 6 e pretende levantar um muro no fundo do terreno, na rua dos Sabiás. Qual deve ser a medida do comprimento desse muro? **3. a)** 11,4 m

b) O vizinho de Marcelo, no lote 5, pretende colocar um portão em toda a extensão da frente do terreno, na rua Arapongas. Qual deve ser a medida do comprimento do portão? **3. b)** 14 m

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Teorema de Tales

- A **atividade 1** envolve a aplicação direta do teorema de Tales. Este é o momento oportuno para verificar se compreenderam e conseguem aplicar o teorema. Se achar necessário, apresente mais exemplos para a turma.
- A **atividade 2** pode apresentar alguma dificuldade para os estudantes, uma vez que não está explícito o feixe de retas paralelas e as retas transversais. Oriente-os a reproduzir o triângulo de cada item no caderno e, depois, prolongar $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AE}$ e $\overline{BE}$.
- Na **atividade 3**, pergunte aos estudantes: "Qual informação fornecida no enunciado da atividade possibilita aplicar o teorema de Tales? Por quê?". Espera-se que eles respondam que o fato dos terrenos serem parecidos com trapézios possibilita a aplicação do teorema de Tales, pois qualquer trapézio tem apenas um par de lados paralelo. Se achar conveniente, peça que reproduzam a figura no caderno, prolonguem os lados dos terrenos de modo a visualizar as retas e indiquem na figura onde será levantado o muro (**item a**) e onde o vizinho de Marcelo colocará o portão (**item b**).

Semelhança

• Na **atividade 5**, os estudantes devem perceber que os trapézios estão em posições diferentes. Isso é importante para que considerem as medidas dos lados correspondentes corretamente.

Triângulos semelhantes

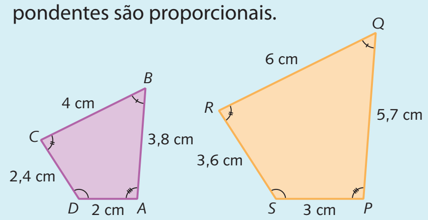
• Caso os estudantes tenham dificuldade para compreender a situação-problema da **atividade 6**, ajude-os a fazer um esboço dela.

• Na **atividade 7**, espera-se que os estudantes lembrem que ângulos opostos pelo vértice são congruentes. Para determinar as medidas de comprimento desconhecidas, verifique se identificam corretamente os lados correspondentes dos dois triângulos.

Semelhança

Figuras semelhantes
Duas figuras são semelhantes quando as medidas dos ângulos correspondentes são iguais e as medidas dos segmentos correspondentes são proporcionais.

Polígonos semelhantes
Dois polígonos são semelhantes quando têm os ângulos correspondentes congruentes e as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais.



$\hat{A} \cong \hat{P}; \hat{B} \cong \hat{Q}; \hat{C} \cong \hat{R}; \hat{D} \cong \hat{S}$

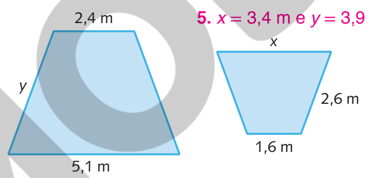
$$\frac{3{,}8 \text{ cm}}{5{,}7 \text{ cm}} = \frac{4 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{2{,}4 \text{ cm}}{3{,}6 \text{ cm}} = \frac{2 \text{ cm}}{3 \text{ cm}}$$

$ABCD \sim PQRS$

Lemos: "o polígono *ABCD* é semelhante ao polígono *PQRS*".

4. Uma fábrica de tapetes está diminuindo as medidas das peças. Sabendo que as dimensões dos tapetes mediam 4 m por 3 m e que agora medem $\frac{2}{5}$ disso, determine as medidas das dimensões dos tapetes atuais. **4.** 1,6 m por 1,2 m

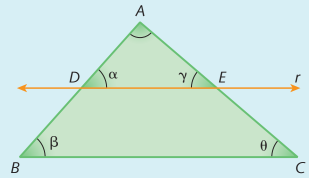
5. Considerando que o trapézio maior é uma ampliação do trapézio menor, determine as medidas de comprimento *x* e *y*. **5.** $x = 3{,}4$ m e $y = 3{,}9$ m



Triângulos semelhantes

Dois triângulos são semelhantes quando os ângulos correspondentes são congruentes e as medidas de comprimento dos lados correspondentes são proporcionais.

Teorema fundamental da semelhança
Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intercepta os outros dois lados em pontos distintos determinam, com esses lados, um triângulo semelhante ao primeiro.



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Casos de semelhança de triângulos

1) AA (Ângulo – Ângulo):
Se dois triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

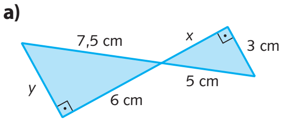
2) LAL (Lado – Ângulo – Lado):
Se dois triângulos têm as medidas de comprimento de dois pares de lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos por esses lados forem congruentes, então esses triângulos são semelhantes.

3) LLL (Lado – Lado – Lado):
Se dois triângulos têm os três pares de lados correspondentes com medidas de comprimento proporcionais, esses triângulos são semelhantes.

6. Para descobrir a medida da altura do prédio em que mora, José utilizou a seguinte estratégia: mediu o comprimento da sombra do prédio e da sombra de sua filha no mesmo instante, obtendo, respectivamente, 8 m e 60 cm. Como a filha de José mede 1,50 m de altura, qual é a medida da altura do prédio? **6.** 20 m

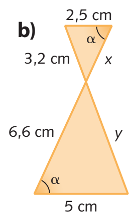
7. Nestes triângulos, identifique o caso de semelhança. Em seguida, calcule as medidas de comprimento desconhecidas, em centímetro.

a)



7. a) AA; $x = 4$ cm e $y = 4{,}5$ cm

b)



7. b) AA; $x = 3{,}3$ cm e $y = 6{,}4$ cm

É hora de extrapolar

EDUCAÇÃO FINANCEIRA · MEIO AMBIENTE

Faça as atividades no caderno.

Será que você consome de forma consciente?

O ato de consumir está presente na rotina de todos nós, que diariamente consumimos recursos, produtos ou serviços. Diante da ação corriqueira de consumir, será que as pessoas refletem sobre o quê, como e quando consumir? Qual é a importância dessa reflexão?

Objetivos: Refletir sobre critérios para realizar uma compra; analisar dados sobre consumo consciente; pesquisar dicas para economizar e consumir de forma consciente e produzir guias de bolso para ser distribuídos para a comunidade escolar.

Etapa 1: Pesquisa sobre preços e reflexão sobre critérios que podem ser usados no momento de consumir.

1. Junto à turma e ao professor, vocês deverão montar uma personagem, indicando as características: idade, sexo, profissão, estado civil, se tem filhos, o que gosta de fazer no tempo livre, o que gosta de assistir na televisão etc. **1.** Resposta pessoal.

2. Em grupos, considerem que a personagem da **atividade 1** peça ajuda para comprar e escolher uma televisão. Façam uma pesquisa, discutam as opções no grupo e decidam qual é a melhor escolha de compra para a personagem. **2.** Resposta pessoal.

3. Apresentem as características do produto escolhido pelo seu grupo para a turma. Tragam as seguintes informações: marca e modelo, preço e forma de pagamento. Expliquem quais foram os critérios utilizados para considerarem esse produto como a melhor escolha.

Após as apresentações, respondam: **3. a)** Respostas pessoais.

a) Todos os grupos escolheram exatamente o mesmo produto? Por que vocês acham que isso ocorreu?

b) Algum grupo apresentou um critério que não havia sido usado? Se sim, vocês consideram esse critério relevante? **3. b)** Respostas pessoais.

c) Ao comprar algum produto, vocês sempre realizam pesquisas para decidir qual é a melhor opção? **3. c)** Resposta pessoal.

4. Analisem o anúncio de uma loja de carros.

4. Comentários em *Orientações*.

Novo DUO por R$ 36 000,00	
Opções de pagamento:	**Opção 1:** Pague à vista e ganhe 15% de desconto. **Opção 2:** Dê 50% de entrada e pague o restante em 24 parcelas iguais sem juros. **Opção 3:** Pague em 48 parcelas de R$ 1 050,00.

ILUSTRAÇÕES: FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Se uma pessoa comprar esse carro à vista, quanto ela pagará? **4. a)** R$ 30 600,00

b) Qual será o valor das parcelas na opção 2? **4. b)** R$ 750,00

c) Quanto uma pessoa pagará no total se escolher a opção 3? **4. c)** R$ 50 400,00

d) Qual é a diferença entre o valor do carro no anúncio e o valor obtido no item **c**? Qual é o nome que se dá a essa diferença? **4. d)** R$ 14 400,00; juro

e) Se uma pessoa for adquirir esse carro, qual forma de pagamento vocês acham que ela escolherá? **4. e)** Resposta pessoal.

Etapa 2: Análise de dados sobre produção de lixo e pesquisa sobre consumo consciente.

5. Leiam o texto e respondam às questões.

> Segundo dados do *Panorama dos Resíduos Sólidos no Brasil 2020*, a geração saiu de 66 700 000 de toneladas em 2010 para 79 100 000 em 2019, uma diferença de 12 400 000 de toneladas. O mesmo estudo diz ainda que cada brasileiro produz, em média, 379,2 kg de lixo por ano, o que corresponde a mais de 1 kg por dia. As informações foram coletadas e publicadas pela Associação Brasileira das Empresas de Limpeza Pública e Resíduos Especiais (Abrelpe).

Dados obtidos em: https://www12.senado.leg.br/noticias/infomaterias/2021/06/aumento-da-producao-de-lixo-no-brasil-requer-acao-coordenada-entre-governos-e-cooperativas-de-catadores. Acesso em: 10 jul. 2022.

a) Escreva em notação científica as medidas de massa apresentadas no texto.
5. a) $66\,700\,000 = 6{,}67 \cdot 10^7$; $79\,100\,000 = 7{,}91 \cdot 10^7$; $12\,400\,000 = 1{,}24 \cdot 10^7$; $379{,}2 = 3{,}792 \cdot 10^2$

b) Vocês contribuem para diminuir a quantidade de lixo gerada e favorecem a reciclagem? Se sim, como?
5. b) Respostas pessoais.

• Na **atividade 4**, da etapa 1, os estudantes vão mobilizar o que aprenderam sobre porcentagem, juro e a ideia de desconto. No **item a**, espera-se que, os estudantes calculem R$ 36 000, 00 – 0,15 · R$ 36 000,00. No **item b**, verifique se os estudantes entendem o significado de “dar entrada” e, se for necessário, explique isso para a turma. Espera-se que eles concluam que nesta opção de pagamento, a pessoa paga R$ 18 000, 00 no ato e precisa dividir a outra metade do valor em 24 parcelas. Assim, o valor de cada parcela dividindo R$ 18 000, 00 por 24. No **item c**, os estudantes devem calcular 48 · R$ 1050, 00. Espera-se que eles percebam que a a diferença entre o valor obtido neste cálculo e o valor do carro no anúncio corresponde ao juro (**item d**). Converse com eles sobre por que essa opção de pagamento gera juros. Por fim, forme uma roda de conversa para discutir a questão proposta no **item e**.

É hora de extrapolar

BNCC:

• Competências gerais 2, 4, 7, 8, 9 e 10 (as descrições estão na página VI).

• Competências específicas 2, 4, 5, 6, 7 e 8 (as descrições estão na página VII).

Temas contemporâneos transversais:

MEIO AMBIENTE · EDUCAÇÃO FINANCEIRA

A seção propõe o fechamento da Unidade por meio de um trabalho colaborativo que explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um produto final (um guia de bolso), que será compartilhado com a comunidade escolar.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a seção é dividida em etapas que promovem:

• Entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado.

• Pesquisa coletiva.

• Elaboração, em grupo, do produto proposto.

• Apresentação e exposição do produto.

• Reflexão e síntese do trabalho.

As etapas de pesquisa e elaboração do produto podem ser realizadas extraclasse. Verifique o perfil dos estudantes e oriente-os com relação ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho.

A seção também favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **7**, **8**, **9** e **10** e das competências específicas de Matemática **2**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8**, procurando mobilizar conteúdos estudados nos capítulos que integram a unidade. Portanto, é recomendável trabalhar a seção depois de estudar os capítulos, mas, se preferir trabalhar as etapas da seção à medida que os capítulos forem estudados, atente para os conhecimentos prévios necessários.

Se achar conveniente, inicie uma discussão com a turma sobre o título da seção. É interessante verificar quais são as concepções dos estudantes sobre o que é consumir e o que é consumir de forma consciente, questionando sobre o que e como eles (jovens) consomem.

Na etapa **1**, caso não seja possível realizar a pesquisa em *sites*, peça aos estudantes que tragam folhetos de anúncios de lojas para que eles façam essa pesquisa.

• A pesquisa proposta na **atividade 6** da etapa 2 contribui para que os estudantes possam responder as questões propostas na abertura desta Unidade. Espera-se que eles concluam que consumo consciente é aquele que busca o equilíbrio entre a satisfação pessoal e a sustentabilidade global. Na sequência, forme uma roda de conversa com a turma e pergunte se eles consideram que consomem de forma consciente e por quê. Depois, apresente para eles algumas ações que estão alinhadas ao consumo consciente, como: economizar papel, comprar somente o necessário, evitar adquirir mercadorias que têm muitas embalagens, levar a própria sacola no momento das compras, evitar o desperdício de alimentos, economizar água ao realizar as tarefas diárias, gastar menos combustível com o carro etc. Oriente-os a realizar a pesquisa em mídias, livros, revistas ou *sites* da internet.

• No item **b** da **atividade 7**, se achar oportuno, retome o conceito de semelhança e as estratégias para encontrar medidas em figuras semelhantes. Atribua outras medidas às embalagens (exemplos: largura e altura da tampa) e peça aos estudantes que encontrem a medida correspondente.

• Na **atividade 8** da etapa 3, faça um levantamento para verificar qual tópico foi escolhido por cada grupo. Se houver repetições e algum tópico não for escolhido pelos grupos, converse com os estudantes para solicitar que troquem a temática, para que a pesquisa fique mais abrangente. Os temas 3, 4 e 6 favorecem o desenvolvimento da competência geral **8**.

• Na **atividade 9** da etapa 3, se for possível, disponibilize folhas de papel sulfite para que os estudantes possam fazer o planejamento, fazendo as dobras e anotando quais textos ficarão em cada parte da folha. Oriente-os a pensar em como será a capa do guia de bolso.

A **etapa 4** apresenta-se como uma boa oportunidade para os estudantes interagirem e trocarem conhecimentos, o que favorece o desenvolvimento das competências gerais **8** e **9**.

• No **item a** da **atividade 13**, espera-se que os estudantes citem, principalmente, a preservação do meio ambiente para a sociedade atual e para as gerações futuras.

6. A produção de lixo é um dos fatores que deve ser considerado quando se pratica um consumo consciente. Pesquisem o que é o consumo consciente e elenquem outros fatores que devem ser considerados e dicas para praticá-lo. **6.** Resposta em *Orientações.*

7. Nas prateleiras de supermercados, é possível encontrar diversos produtos de limpeza em versões concentradas. Essas versões apresentam vantagens para o fabricante, o consumidor e o meio ambiente.

a) Identifiquem pelo menos três vantagens das versões concentradas de produtos. Vocês podem pesquisar na internet se acharem necessário.

b) Uma fábrica fará uma versão concentrada de um amaciante. A imagem a seguir mostra as medidas das dimensões da embalagem original e da embalagem da versão concentrada.

7. a) Algumas vantagens: redução do uso de materiais para a produção das embalagens; custos mais baixos para realizar o transporte; diminuição do uso de água e de produtos químicos na fabricação; facilidade de armazenamento nas casas; custo mais baixo para o consumidor.

CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando que a imagem da embalagem da versão concentrada é semelhante à imagem da embalagem original, determine a medida *h* da altura da embalagem da versão concentrada. **7. b)** 18,75 cm

Etapa 3: Pesquisa sobre dicas para fazer boas compras e produção de guia de bolso sobre consumo.

8. É importante escolher cuidadosamente os produtos que consumimos e buscar formas de economizar. O Programa de Proteção e Defesa do Consumidor de São Paulo (Procon-SP) disponibiliza diversos materiais com orientações para que os consumidores realizem boas compras e conheçam seus direitos. Escolham um dos temas a seguir e façam uma lista com as principais dicas para realizar boas compras ou com os direitos do consumidor. Complementem a pesquisa com informações de outras fontes, caso necessário. **8.** Comentários em *Orientações.*

- **Tema 1**: Brinquedo.
- **Tema 2**: Material escolar.
- **Tema 3**: Lazer, esporte e cultura.
- **Tema 4**: Supermercado.
- **Tema 5**: Eletroeletrônicos e eletrodomésticos.
- **Tema 6**: Direitos do consumidor.

9. A partir das informações coletadas, elaborem um guia de bolso com as principais informações obtidas sobre consumo consciente e as principais dicas sobre o tema escolhido. Os textos não devem ser extensos e o guia deve ser feito em formato digital ou em uma folha de tamanho A4, que será dobrada em duas ou três partes. Não esqueçam de planejar como os textos serão disponibilizados, pensando nas dobras e na facilidade de leitura por quem for utilizar o guia. **9.** Comentários em *Orientações.*

Etapa 4: Análise e distribuição dos guias elaborados.

10. Apresentem o guia elaborado pelo grupo para que a turma o analise e faça comentários em relação à clareza das informações e à diagramação dos textos.

11. Anotem as dúvidas, as opiniões e as sugestões dos colegas.

Etapa 4: Comentários em *Orientações.*

12. Depois dos ajustes necessários, façam cópias do guia e o distribuam para a comunidade escolar.

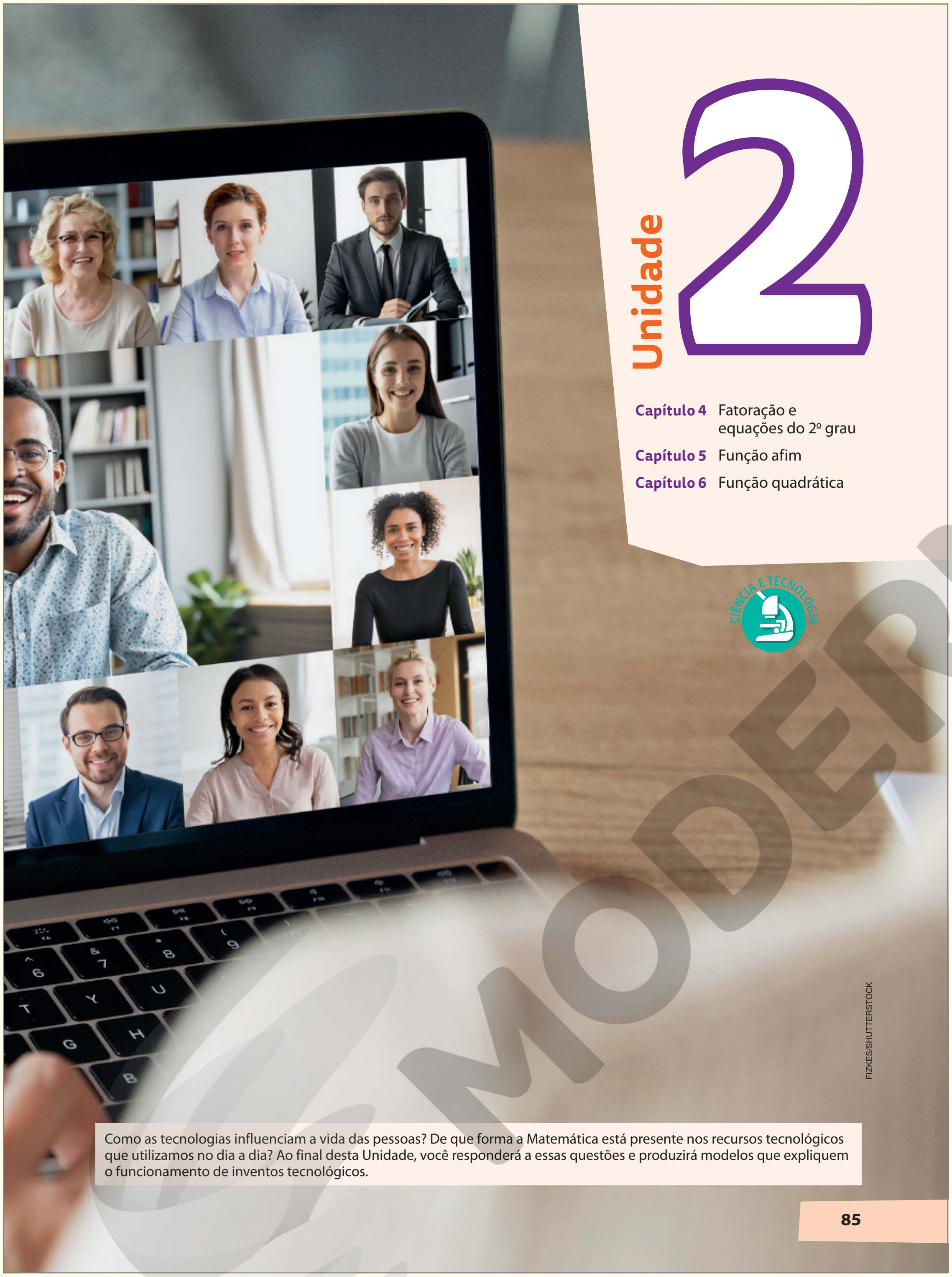
Etapa 5: Síntese do trabalho realizado.

13. Algumas questões devem ser discutidas. **13. a)** Comentários em *Orientações.*

a) Por que é importante que as pessoas consumam de maneira sustentável?

b) Vocês pretendem mudar algo na forma como consomem produtos, serviços ou recursos? Se sim, como? Se não, por quê? **13. b)** Respostas pessoais.

14. Redijam um texto que descreva o processo realizado pelo grupo nas etapas 3 e 4.



Unidade 2

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

FIZKES/SHUTTERSTOCK

Como as tecnologias influenciam a vida das pessoas? De que forma a Matemática está presente nos recursos tecnológicos que utilizamos no dia a dia? Ao final desta Unidade, você responderá a essas questões e produzirá modelos que expliquem o funcionamento de inventos tecnológicos.

85

Abertura da Unidade

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 1 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Motivar a turma a estudar os conteúdos da Unidade 2.
- Incentivar os estudantes a refletir sobre como as tecnologias influenciam a vida das pessoas.
- Incentivar os estudantes a refletir sobre como a Matemática pode nos ajudar a entender alguns inventos tecnológicos.

Tema contemporâneo transversal:

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Convide os estudantes a responder as seguintes questões: "Como eram feitas as reuniões há alguns anos? Vocês já tiveram aulas *on-line*? Já compraram produtos ou serviços pela internet? O que mudou na sociedade com a presença das tecnologias? Essas mudanças foram positivas ou negativas? Por quê?". À medida que respondem, eles vão perceber como as tecnologias influenciam a vida das pessoas.

Espera-se que eles reconheçam que a Matemática está presente nos recursos tecnológicos por meio, por exemplo, das medidas (medidas de tempo, de capacidade de armazenamento, voltagem etc.), do formato dos aparelhos e também em seus *softwares*, já que muitos deles são desenvolvidos por meio de algoritmos escritos em determinada linguagem de programação e que levam em consideração as ideias de função e variável (assuntos que serão estudados nos capítulos **5** e **6**).

O contexto e as questões possibilitam aos estudantes reconhecerem a Matemática como uma ciência humana, viva, que contribui para resolução de problemas científicos e tecnológicos, o que ajuda a desenvolver a competência específica **1** da BNCC. Além disso, o diálogo e a interação favorecem o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8**.

No capítulo **4**, serão estudadas as expressões algébricas e as equações do 2º grau. Nos capítulos **5** e **6** serão estudados os conceitos de função afim e função quadrática, respectivamente.

Na seção *É hora de extrapolar*, os estudantes vão refletir sobre a influência das tecnologias; analisar dados sobre tecnologia nas ciências; pesquisar o funcionamento de inventos tecnológicos e produzir modelos para explicar o funcionamento de tais tecnologias.

Sugestão de proposta para a promoção da saúde mental dos estudantes

O uso excessivo de redes sociais e jogos eletrônicos tem prejudicado a saúde mental dos jovens, tanto que a Organização Mundial da Saúde (OMS) incluiu o vício em jogos eletrônicos na classificação das doenças mentais. Algumas consequências desse uso excessivo são a solidão, a exposição ao *cyberbullying* e a redução da autoestima. Uma das maneiras de contornar o problema é por meio do diálogo e da conscientização. Promova uma roda de conversa com os estudantes para falar sobre os benefícios e malefícios do uso das tecnologias. Depois, montem coletivamente um mural com medidas que podem ser adotadas visando diminuir o uso das redes sociais e dos jogos eletrônicos, como definir horários e tempo limite de uso, praticar atividades físicas, sair com os amigos, fazer aula de algo de que goste etc.

CAPÍTULO 4 – FATORAÇÃO E EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 2, 4 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Verificar se os estudantes reconhecem equações do 2º grau.
- Verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a resolução de equações do 2º grau completas.
- Conscientizar os estudantes sobre a importância de se vacinar contra a influenza.

Tema contemporâneo transversal:

SAÚDE

Inicie o trabalho com este *Trocando ideias* perguntando aos estudantes se eles já se vacinaram ou conhecem alguém que se vacinou contra influenza. A competência geral **9** da BNCC tem o seu desenvolvimento favorecido em situações como essa. Após alguns deles contarem suas experiências, comente um pouco mais sobre a doença. Você pode dizer que segundo a Organização Mundial da Saúde, os casos de influenza podem variar de quadros leves a graves ou até levar ao óbito e que a transmissão ocorre principalmente de pessoa para pessoa, por meio de gotículas respiratórias produzidas por tosse, espirros ou fala de uma pessoa infectada para uma pessoa suscetível.

As questões propostas permitem verificar se os estudantes reconhecem equações do 2º grau e os conhecimentos prévios deles em relação à resolução de equações do 2º grau completas. No primeiro item, espera-se que os estudantes recordem o cálculo da medida da área de retângulos e procedam da seguinte maneira:

$x \cdot (x + 18) = 2944$

$x^2 + 18x = 2944$

$x^2 + 18x - \mathbf{2944} = 2944 - \mathbf{2944}$

$x^2 + 18x - 2944 = 0$

Após determinarem a equação, verifique se todos percebem que se trata de uma equação do 2º grau e convide-os a resolvê-la utilizando seus conhecimentos prévios ou estratégias pessoais.

Capítulo 4 Fatoração e equações do 2º grau

SAÚDE

Trocando ideias

A Influenza é uma infecção viral aguda, que afeta o sistema respiratório e é de alta transmissibilidade. A Campanha Nacional de Vacina contra a Influenza ocorrida em 2021 tinha por objetivo prevenir o surgimento de complicações decorrentes da doença, óbitos, internações e sobrecarga nos serviços de saúde.

2021 © ACERVO DO MINISTÉRIO DA SAÚDE

Reprodução do cartaz oficial da etapa 1 da Campanha Nacional de Vacina contra a Influenza em 2021.

- A medida da área do cartaz oficial da campanha é de 2944 cm² e o comprimento dos lados medem x e $x + 18$. Em seu caderno, escreva uma equação que possibilite determinar a medida do comprimento dos lados do cartaz oficial. O que você pode dizer sobre esta equação?
- Você sabe resolver a equação que obteve no item anterior? Se sim, explique aos colegas.

Neste capítulo, vamos estudar monômios, polinômios, fatoração e como resolver equações completas do 2º grau por fatoração e outros métodos.

Trocando ideias; primeiro item: exemplo de resposta: $x^2 + 18x - 2944 = 0$; é uma equação do 2º grau; segundo item: resposta pessoal.

A ideia é despertar o espírito de investigação e fazê-los interagir com seus pares de forma cooperativa, contribuindo para o desenvolvimento das competências específicas **2** e **8**. Após tentarem, comente que durante o capítulo eles vão estudar como resolver equações do 2º grau como essa que registraram. No momento oportuno, retome a situação deste *Trocando ideias* e peça aos estudantes que resolvam a equação e determinem as medidas dos comprimentos dos lados do cartaz oficial da campanha.

1 Expressões algébricas, monômios e polinômios

Neste capítulo, retomaremos brevemente a ideia de expressões algébricas, a partir das quais estudaremos monômios e polinômios.


EPSICONS/SHUTTERSTOCK

Expressões algébricas

Acompanhe a situação a seguir.

Uma fábrica produz embalagens de leite. Cada embalagem sem defeito gera um ganho de x reais, e cada uma das defeituosas, um prejuízo de y reais. Observe, na tabela, a produção da fábrica nos três primeiros meses de 2023.

Quantidade de embalagens produzidas nos três primeiros meses de 2023	Sem defeito	Com defeito
Janeiro	90 mil	2,5 mil
Fevereiro	68 mil	3,2 mil
Março	75 mil	1,8 mil

Dados obtidos pelo gerente comercial da fábrica nos três primeiros meses de 2023.

O gerente comercial concluiu que o lucro da fábrica, no 1º trimestre de 2023, poderia ser expresso da seguinte maneira:

$$(90\,000 + 68\,000 + 75\,000) \cdot x - (2\,500 + 3\,200 + 1\,800) \cdot y = 233\,000x - 7\,500y$$

A expressão $233\,000x - 7\,500y$ é um exemplo de **expressão algébrica** e representa o lucro da fábrica no 1º trimestre de 2023.

> **Expressões algébricas** são aquelas que indicam operações matemáticas que contêm números e letras ou somente letras.

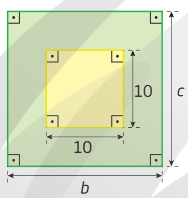
Se o ganho com cada embalagem sem defeito fosse de R$ 0,26 e o prejuízo com cada embalagem com defeito fosse de R$ 0,15, o lucro no 1º trimestre de 2023 da fábrica seria de R$ 59 455,00, pois:

$$233\,000 \cdot \text{R\$ } 0{,}26 - 7\,500 \cdot \text{R\$ } 0{,}15 = \text{R\$ } 59\,455{,}00$$

Nessa situação, empregamos letras (x e y) para representar os valores referentes ao ganho e ao prejuízo. Essas letras são denominadas **variáveis** da expressão.

Acompanhe outra situação.

Vamos determinar a expressão algébrica correspondente à medida da área da parte verde da figura abaixo.



$$A_{\text{amarela}} = 10 \cdot 10 = 10^2 = 100$$

$$A_{\text{total}} = b \cdot c$$

$$A_{\text{verde}} = (A_{\text{total}}) - (A_{\text{amarela}}) = bc - 100$$

GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a medida da área da parte verde será representada pela expressão algébrica $bc - 100$.

Expressões algébricas

Para que os estudantes compreendam como os valores, referentes ao ganho com as embalagens sem defeitos (x) e ao prejuízo com as defeituosas (y), podem modificar o lucro da fábrica, altere-os da situação inicial e faça outras perguntas, como:

- Se a fábrica conseguisse adquirir a matéria-prima por um preço mais baixo, de forma que o ganho com cada embalagem sem defeito fosse R$ 0,30 e o prejuízo por embalagem defeituosa fosse R$ 0,13, qual seria o lucro da fábrica? (Resposta: R$ 68 925,00.)
- Se, por um defeito na matéria-prima, a quantidade de embalagens defeituosas aumentasse em 20% (sem que houvesse diminuição das embalagens sem defeito), qual seria o lucro da fábrica no trimestre? (Resposta: R$ 59 230,00.)

Expressões algébricas, monômios e polinômios

BNCC:

Competência específica 6 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

- Produzir e interpretar diferentes expressões algébricas.
- Reconhecer monômios e polinômios.

Justificativa

As expressões algébricas podem ser utilizadas para representar sentenças, traduzir situações-problema ou fazer generalizações; por isso, é importante saber produzi-las e interpretá-las. Reconhecer monômios e polinômios, por sua vez, permite conhecer mais a fundo as expressões algébricas, desenvolvendo o pensamento algébrico dos estudantes.

Mapeando conhecimentos

Represente alguns polígonos na lousa, indicando as medidas de comprimento de seus lados por letras ou pela adição de letras com números. Em seguida, peça aos estudantes que escrevam as expressões algébricas correspondentes às medidas dos perímetros e das áreas desses polígonos. Proponha que comparem as expressões algébricas obtidas e verifique se percebem que algumas delas são formadas pela multiplicação de um número por uma ou mais letras (monômios) e que outras são formadas pela adição e/ou subtração de monômios (polinômios).

Para as aulas iniciais

Retome os polígonos da dinâmica inicial e tire as dúvidas remanescentes. Você pode ampliar a proposta e pedir que representem polígonos que tenham medida de perímetro ou medida de área representados por monômios ou polinômios previamente fornecidos por você.

Explore com a turma o conteúdo sobre expressões algébricas e adição e multiplicação de termos algébricos presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Em seguida, proponha aos estudantes que façam as **atividades 11**, **12** e **13**. Reserve um momento para fazer a correção coletiva e tirar as dúvidas.

Monômio

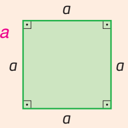
Comente com os estudantes que, como visto em anos anteriores, as medidas da área, do perímetro e do volume de figuras geométricas podem ser representada por expressões algébricas, possibilitando generalizações. Por exemplo, sabemos que a medida da área de um quadrado é dada pela expressão $A_{\text{quadrado}} = a^2$ e que a medida do perímetro é dada por $P_{\text{quadrado}} = 4a$, em que a é a medida do de comprimento lado do quadrado. Para encontrar a medida da área e a medida do perímetro de qualquer quadrado, basta conhecer a medida de comprimento do lado do quadrado e aplicá-la nas expressões.

Atividades

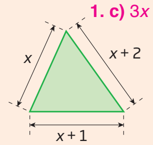
Faça as atividades no caderno.

1 Determine uma expressão algébrica que representa a medida do perímetro de cada figura.

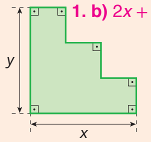
a) 1. a) $4a$



c) 1. c) $3x + 3$



b) 1. b) $2x + 2y$



d) 1. d) $2b + 2h$

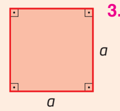
2 Responda, com uma expressão algébrica, às perguntas a seguir.

a) Quantos meses há em x anos? 2. a) $12x$

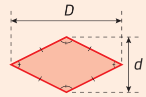
b) Quantos anos há em y dias? (Considere o ano não bissexto.) 2. b) $\frac{y}{365}$

3 Qual é a expressão algébrica que representa a medida da área de cada figura?

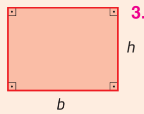
a) 3. a) a^2



c) 3. c) $\frac{D \cdot d}{2}$

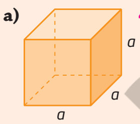


b) 3. b) $b \cdot h$

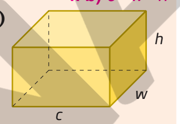


4 Qual é a expressão algébrica que representa a medida do volume de cada paralelepípedo representado a seguir?

a) 4. a) a^3



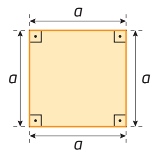
b) 4. b) $c \cdot w \cdot h$



Monômio

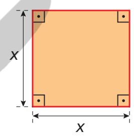
Analise as expressões algébricas utilizadas em cada situação a seguir.

- A medida do perímetro de um quadrado cujo comprimento de cada lado mede a.



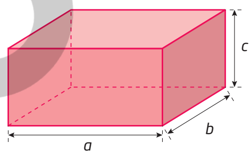
$4 \cdot a$ ou $4a$

- A medida da área de um quadrado cujo comprimento de cada lado mede x.



$x \cdot x$ ou x^2

- A medida do volume de um paralelepípedo retângulo cujos comprimento, largura e altura medem, respectivamente, a, b e c.



abc

As expressões $4a$, x^2 e abc são exemplos de **monômio**.

Um **monômio** é um número ou uma expressão algébrica formada pela multiplicação de um número por uma ou mais letras. Essas letras devem sempre ser expressas na forma de potência com expoentes naturais.

Observe, abaixo, alguns exemplos de monômios.

a) 16 **b)** x **c)** a^3b^2 **d)** $\frac{1}{2}x^3y^2$ **e)** $-5n^2$

Em geral, podemos identificar duas partes nos monômios: o **coeficiente** e a **parte literal**.

- **coeficiente**: corresponde à parte numérica;
- **parte literal**: corresponde às variáveis, incluindo seus expoentes.

Observe os exemplos a seguir.

a) $-13x^2y^2$ — coeficiente -13; parte literal: x^2y^2

b) $-a^3b^5$ — coeficiente: -1; parte literal: a^3b^5

c) $\frac{1}{2}x^4y^3$ — coeficiente: $\frac{1}{2}$; parte literal: x^4y^3

d) $2{,}5m^2n$ — coeficiente: 2,5; parte literal: m^2n

Observações

1. O monômio que tem coeficiente zero representa o número real zero e é chamado de **monômio nulo**. Analise os exemplos:

a) $0x$ ou 0 **b)** $0a^2b^3$ ou 0 **c)** $0m^5n^4$ ou 0

2. Todo número real é um monômio sem a parte literal. Observe os exemplos:

a) 12 **b)** -5 **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $-0{,}6$

3. Quando um monômio é formado apenas por uma variável ou por uma multiplicação de variáveis, o coeficiente é igual a 1. Por exemplo:

a) y ou $1y$ **b)** x^3yz^2 ou $1x^3yz^2$ **c)** xy ou $1xy$ **d)** x^4z^3 ou $1x^4z^3$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

5 Escreva no caderno o coeficiente e a parte literal dos monômios.

a) $\frac{1}{5}a^3b^4$ **5. a)** $\frac{1}{5}$; a^3b^4

b) $-a^2bc^3$ **5. b)** -1; a^2bc^3

c) $\frac{3}{2}x^3$ **5. c)** $\frac{3}{2}$; x^3

d) $-5\sqrt{3}mn^2$ **5. d)** $-5\sqrt{3}$; mn^2

e) $\frac{a^2 \cdot b^3 \cdot c^4}{5}$ **5. e)** $\frac{1}{5}$; $a^2 \cdot b^3 \cdot c^4$

f) xyz **5. f)** 1; xyz

g) $-xy$ **5. g)** -1; xy

h) $\frac{4\pi r^3}{3}$ **5. h)** $\frac{4\pi}{3}$; r^3

6 Identifique, entre as expressões algébricas abaixo, as que são monômios. **6.** alternativas a, d, e, f, g, i, k, l

a) -8

b) $a + 2b$

c) $\frac{5}{b}$

d) $16abc$

e) x^5

f) $\frac{2a}{3}$

g) $-ay$

h) $-a + a^2$

i) x^2y

j) $\frac{x+y}{2}$

k) 1 000

l) $-0{,}06b$

Converse com o professor e os colegas sobre o porquê de as outras expressões não serem classificadas como monômios.
6. item: Comentários em *Orientações*.

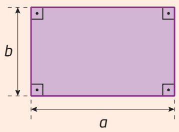
Comente com os estudantes que os números reais que não estão acompanhados da parte literal também são considerados monômios, pois a parte literal poderá ser elevada a zero e, dessa forma, equivaleria a 1. Por exemplo: $16w^0 = 16 \cdot 1 = 16$.

- Na **atividade 6**, caso os estudantes mostrem dificuldade, relembre-os de que os monômios são expressões algébricas formadas apenas por multiplicações e que os expoentes da parte literal só podem ser números naturais.
- Se possível, incentive-os a justificar os itens que não são monômios:
- **itens b**, **h** e **j** : não é composto apenas por multiplicações de números por letras;
- **item c**: o expoente da parte literal não é um número natural.

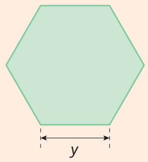
• Na **atividade 8**, solicite aos estudantes que justifiquem por que os **itens b**, **d**, **f** e **h** não representam monômios semelhantes. Espera-se que eles respondam que, em todos esses itens, as partes literais são diferentes. Por exemplo, no **item b**, falta o *y* no segundo monômio; no **item f**, os expoentes de *m* e de *n* são diferentes; e, no **item h**, $\frac{1}{x^2}$ não é um monômio.

7 Represente com um monômio o que se pede em cada item.

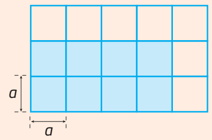
a) a medida da área do retângulo; **7. a)** *ab*



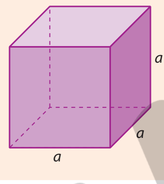
b) a medida do perímetro do hexágono regular; **7. b)** 6*y*



c) a medida da área da parte pintada de azul da figura; **7. c)** $8a^2$



d) a medida do volume do cubo. **7. d)** a^3



Monômios semelhantes

Monômios que apresentam a mesma parte literal são chamados **monômios semelhantes**.

Assim, são exemplos de monômios semelhantes:

a) $5a^3b^2$ e $-\frac{1}{2}a^3b^2$ **b)** 12, $\sqrt{3}$ e $-\frac{3}{4}$ **c)** $\sqrt{2}\,a^5b^2$ e $-\frac{3}{7}a^5b^2$ **d)** $3m^2n$ e $-\frac{4}{9}m^2n$

Observação

Observe atentamente os monômios abaixo.

a) $2x^4, \frac{3}{4}x^5$ e $-7x^6$ **b)** $20a^2b^5$ e $-\frac{1}{3}a^3b^5$

Em ambos os casos, a parte literal parece a mesma, mas perceba que os expoentes são diferentes. Tanto em um caso quanto no outro, os monômios não são semelhantes.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

8 Identifique as alternativas que apresentam monômios semelhantes. **8.** alternativas a, c, e, g

a) $6x^2$ e $-5x^2$ **c)** -8, 10 e -15 **e)** $\frac{30x^2}{41}$ e $-2x^2$ **g)** $\frac{x}{5}$ e $6x$

b) $15xy$ e $30x$ **d)** $5b^2$ e $-7a$ **f)** $8m^2n$ e $6mn^2$ **h)** x^2 e $\frac{1}{x^2}$

9 Escreva, no caderno, um monômio semelhante a: **9.** Exemplo de resposta: $5a^5b^7c^9$

$$-\frac{2}{3}a^5b^7c^9$$

10. Exemplo de resposta: $2ab$ e $\frac{1}{2}ab$

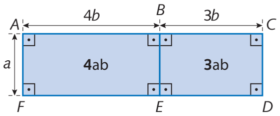
10 Escreva, no caderno, dois monômios semelhantes cujos coeficientes sejam números inversos.

Apresente aos estudantes algumas expressões para serem simplificadas que contenham termos semelhantes com suas partes em ordem diferente; por exemplo, $2xyz^3 + z^3yx - z^2yx$; após a redução de termos semelhantes, temos: $3xyz^3 - z^2yx$. Alerte-os sobre a necessidade de conferir cuidadosamente o expoente de cada variável, evitando possíveis equívocos.

Adição e subtração de monômios

Uma expressão algébrica em que todos os monômios são semelhantes pode ser simplificada adicionando ou subtraindo os coeficientes. Analise os dois exemplos a seguir.

a) Qual é a expressão algébrica que representa a medida da área do retângulo *ACDF*?



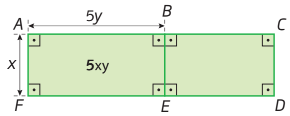
As expressões algébricas que representam as medidas das áreas dos retângulos *ABEF* e *BCDE* são, respectivamente, $4ab$ e $3ab$.

A medida da área do retângulo *ACDF* é obtida adicionando as medidas das áreas dos retângulos *ABEF* e *BCDE*, ou seja, $4ab + 3ab$. Acompanhe como podemos fazer esse cálculo:

$$4ab + 3ab = (4 + 3)ab = 7ab$$

Portanto, a medida da área do retângulo *ACDF* é representada pelo monômio $7ab$.

b) Sabendo que a medida da área do retângulo *ACDF* é representada pelo monômio $9xy$, qual é a expressão algébrica que representa a medida da área do retângulo *BCDE*?



A medida da área do retângulo *BCDE* é obtida subtraindo da medida da área de *ACDF* a medida da área do retângulo *ABEF*, ou seja, calculando $9xy - 5xy$. Acompanhe como podemos fazer esse cálculo.

$$9xy - 5xy = (9 - 5)xy = 4xy$$

Portanto, a medida da área do retângulo *BCDE* é representada pelo monômio $4xy$.

Se uma expressão tem monômios semelhantes e não semelhantes, efetuamos a adição ou a subtração dos semelhantes e conservamos os demais. Nesse caso, dizemos que foi efetuada uma **redução de termos semelhantes**. Acompanhe os exemplos:

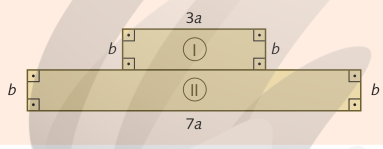
a) $6a^3 + 5xy + 5x + 2a^3 - 2xy + a^3 = 6a^3 + 2a^3 + a^3 + 5xy - 2xy + 5x = 9a^3 + 3xy + 5x$

b) $6a^2b + 3m^2 - 3a^2b + a^2b - 10m^2 = 6a^2b - 3a^2b + a^2b + 3m^2 - 10m^2 = 4a^2b - 7m^2$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

11 Observe a figura e responda às questões.



11. a) $3ab$; $7ab$

a) Que monômio representa a medida da área do retângulo I? E do retângulo II?

b) Que monômio representa a medida da área total da figura? 11. b) $10ab$

c) Sendo $a = 0{,}85$ cm e $b = 0{,}75$ cm, qual é a medida da área total da figura?

11. c) 6,375 cm²

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

- Após concluírem a **atividade 12**, peça aos estudantes que compartilhem como fizeram para simplificar as expressões.
- A **atividade 13** envolve a ideia de operação inversa. Verifique qual foi a estratégia utilizada pelos estudantes. Uma possibilidade é o cálculo de $5abc + 3abc$ para determinar o monômio.
- Verifique se os estudantes percebem que convém simplificar a expressão algébrica da **atividade 14** antes de calcular o valor numérico dela para $x = -1$ e $y = 2$.
- Se achar conveniente, antes que realizem a **atividade 15**, recorde a propriedade do produto de potências de mesma base.
- Caso os estudantes tenham dificuldade para realizar a **atividade 16**, relembre que, para calcular a medida da área de retângulos, multiplicamos a medida do comprimento da base pela medida do comprimento da altura.
- É possível que alguns estudantes obtenham respostas erradas na **atividade 17** por confundirem os sinais dos produtos. Após concluírem esta atividade, oriente-os a comparar os monômios obtidos com os de um colega e verificar se cometeram algum erro.
- A **atividade 19** apresenta diversas possibilidades de resposta. Convide alguns estudantes para expô-las na lousa e valide-as com o restante da turma.

12 Simplifique as expressões:

a) $5xy + 15xy - 12xy + 2xy$ **12. a)** $10xy$

b) $\left(-\frac{1}{3}xy\right) + \left(+\frac{4}{9}xy\right) + \left(-\frac{1}{9}xy\right)$ **12. b)** 0

c) $9x^4y^3 - 18x^4y^3 - 10x^4y^3 + 2x^4y^3$ **12. c)** $-17x^4y^3$

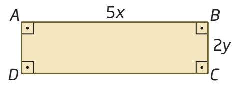
13 Que monômio devemos adicionar à expressão $-3abc$ para obter $5abc$? **13.** $8abc$

14 Dada a expressão algébrica $\frac{4}{3}x^2y - \frac{3}{8}x^2y + \frac{4}{9}x^2y - \frac{1}{4}x^2y$, determine o seu valor numérico para $x = -1$ e $y = 2$. **14.** $\frac{83}{36}$

Multiplicação de monômios

Inicialmente, vamos recordar que: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, sendo a um número real não nulo e m e n números inteiros. Agora, observe os exemplos a seguir.

a) Qual é a expressão algébrica que representa a medida da área do retângulo *ABCD*?

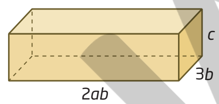


A medida da área do retângulo *ABCD* é dada pela multiplicação dos monômios $5x$ e $2y$:

$$5x \cdot 2y = (5 \cdot 2) \cdot (x \cdot y) = 10xy$$

Portanto, o monômio $10xy$ representa a medida da área desse retângulo.

b) Qual é a expressão algébrica que representa a medida do volume *V* do paralelepípedo reto-retângulo abaixo?



A medida do volume desse paralelepípedo reto-retângulo é determinada multiplicando-se os monômios $2ab$, $3b$ e c:

$$2ab \cdot 3b \cdot c = (2 \cdot 3 \cdot 1) \cdot (a \cdot b \cdot b \cdot c) = 6ab^2c$$

Portanto, o monômio $6ab^2c$ representa a medida do volume desse paralelepípedo.

A multiplicação de monômios é efetuada multiplicando-se os coeficientes e as partes literais entre si. Observe mais alguns exemplos:

a) $3x^2y \cdot 15xy = (3 \cdot 15) \cdot (x^2y \cdot xy) = 45x^3y^2$

b) $-3a^2b \cdot 7c^4 = (-3 \cdot 7) \cdot (a^2b \cdot c^4) = -21a^2bc^4$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

15 Determine os produtos.

a) $x^7 \cdot x^8$ **15. a)** x^{15}

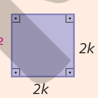
b) $(+3x) \cdot (-8x)$ **15. b)** $-24x^2$

c) $(-2x^2y) \cdot (+7xy)$ **15. c)** $-14x^3y^2$

d) $(+4ab^2) \cdot (-2abc)$ **15. d)** $-8a^2b^3c$

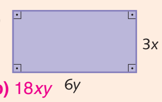
16 Qual é o monômio que representa a medida da área de cada figura?

a)



16. a) $4k^2$

b)



16. b) $18xy$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ ARQUIVO DA EDITORA

17 Efetue as multiplicações.

a) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^{13}$ **17. a)** x^{19}

b) $\left(\frac{1}{10}yk\right) \cdot \left(\frac{10}{7}x\right) \cdot (14z)$ **17.b)** $2ykxz$

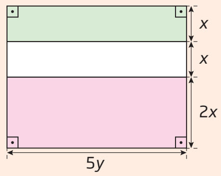
c) $(-0{,}4a^2b) \cdot (+0{,}01b) \cdot (-0{,}02a^2b^3)$ **17.c)** $0{,}00008a^4b^5$

d) $(-3mnp) \cdot (+mp) \cdot (-18mn)$ **17.d)** $54m^3n^2p^2$

18 Sabendo que $A \cdot B = C + D$, determine o monômio D, sendo $A = 2x^2y^3$, $B = -4xy$ e $C = -14x^3y^4$. **18.** $6x^3y^4$

19 Dê um exemplo de dois monômios tais que o seu produto seja $6p^3q$.
19. Exemplo de resposta: $2p^2$ e $3pq$

20 Observe a figura e responda às questões.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é o monômio que representa a medida da área da parte verde da figura? E a medida da área da parte rosa? **20. a)** $5xy$; $10xy$

b) Qual é o monômio que representa a medida da área total da figura? **20. b)** $20xy$

Divisão de monômios

Inicialmente, vamos recordar que:

$a^m : a^n = a^{m-n}$, sendo a um número real não nulo e m e n dois números inteiros.

Agora, acompanhe como podemos dividir monômios.

a) $(20x^5) : (4x^3) = \dfrac{20x^5}{4x^3} = 5x^{5-3} = 5x^2$

b) $\left(-\dfrac{1}{2}a^5b^2\right) : (3a^3b) = \dfrac{-\frac{1}{2}a^5b^2}{3a^3b} = \left(-\dfrac{1}{2} : 3\right) \cdot \left(\dfrac{a^5b^2}{a^3b}\right) = -\dfrac{1}{6}a^{5-3}b^{2-1} = -\dfrac{1}{6}a^2b$

c) $(-30x^4y^3z^2) : (-6xy^3z) = \dfrac{-30x^4y^3z^2}{-6xy^3z} = 5x^{4-1}y^{3-3}z^{2-1} = 5x^3z$

A divisão de monômios com divisor diferente de zero é efetuada dividindo coeficiente por coeficiente e parte literal por parte literal.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

21 Qual é o monômio que representa o resultado de cada divisão?

a) $(16x^7) : (4x^3)$ **21. a)** $4x^4$

b) $(-60a^5b^3) : (-15a^2b)$ **21. b)** $4a^3b^2$

c) $(-125a^5b^3c^7) : (-25a^4b^3c^2)$ **21. c)** $5ac^5$

d) $(18x^5y^4) : (-9x^5y^3)$ **21. d)** $-2y$

e) $\left(-\dfrac{3}{5}xyz^2\right) : (0{,}2yz)$ **21. e)** $-3xz$

f) $(0{,}2x^2y^4) : (0{,}25xy^2)$ **21. f)** $+0{,}8xy^2$

g) $(b^2m^2) : (-5bm)$ **21. g)** $-\dfrac{1}{5}bm$

h) $(-250x^3) : (50x^3)$ **21. h)** -5

i) $(18x^4) : (3x^2)$ **21. i)** $6x^2$

j) $(-10x^3) : (-2x^2)$ **21. j)** $5x$

22 Responda às questões.

a) Por qual monômio devemos dividir $\dfrac{2}{3}x^2y^3$ para obter $-\dfrac{1}{5}xy$? **22. a)** $-\dfrac{10}{3}xy^2$

b) Qual é o monômio que, multiplicado por $10ab^3$, tem como resultado $15a^2b^5$? **22. b)** $\dfrac{3ab^2}{2}$

c) Qual é o monômio que devemos multiplicar por $-2xy$ para obter $\dfrac{3}{4}x^2y^3$? **22. c)** $-\dfrac{3}{8}xy^2$

23 Efetue as divisões a seguir.

a) $(-30a^4b^6) : (-6ab^5)$ **23. a)** $5a^3b$

b) $(x^4y^4z^4) : (x^2y^3z^4)$ **23. b)** x^2y

c) $(6x^6) : (-3x^4)$ **23. c)** $-2x^2$

- Em complemento à **atividade 20**, solicite aos estudantes que encontrem a expressão que representa a medida do perímetro de cada retângulo e de toda a figura e peça que indiquem quais expressões são monômios. Espera-se que eles encontrem as seguintes expressões para as medidas dos perímetros:
  - retângulo verde: $2x + 10y$;
  - retângulo branco: $2x + 10y$;
  - retângulo rosa: $4x + 10y$;
  - figura toda: $8x + 10y$.

Espera-se também que concluam que nenhuma dessas expressões são monômios.

93

• Em complemento à **atividade 24**, pergunte aos estudantes o total de frutas que foram colocadas na embarcação, considerando que havia 6 caixas de cada fruta. (Resposta: 1 200 frutas.)

Polinômio

Acompanhe a situação.

Márcia faz salgados e doces, por encomenda, para vender. Os salgados são vendidos a R$ 0,45 a unidade, e os doces, a R$ 0,35 a unidade. Quanto Márcia cobrará por uma encomenda de x salgados e y doces?

DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

Podemos representar o total, em reais, arrecadado com a venda dos salgados pelo monômio $0{,}45x$ e o total, em reais, arrecadado com a venda dos doces pelo monômio $0{,}35y$. Assim, para representar o total, em reais, arrecadado pelas vendas de salgados e doces, devemos adicionar os monômios:

$$0{,}45x + 0{,}35y$$

Expressão algébrica que representa o total, em reais, arrecadado por Márcia com a venda de salgados e doces.

> Expressões algébricas formadas por um monômio ou pela adição e/ou subtração de monômios denominam-se **polinômios**.

Considere os exemplos a seguir.

a) $5x + 8$ é um polinômio de **dois** termos, também chamado de **binômio**.

b) $y^2 - 7y + 10$ é um polinômio de **três** termos, também chamado de **trinômio**.

c) $a^3 + 5a^2b + 6ab^2 + b^3$ é um polinômio de **quatro** termos.

Observações

1. Um polinômio cujos coeficientes são todos iguais a zero é denominado **polinômio nulo**. Por exemplo:
$$0x^3 + 0x^2 + 0x$$
2. Um monômio é um polinômio de **um** termo.
3. O termo do polimônio que não apresenta variáveis (letras) é chamado de **termo independente**. Nos exemplos anteriores, o termo independente do primeiro polinômio é 8 e o do segundo é 10. No exemplo do item c, não há termo independente.

Atividades

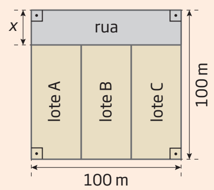
Faça as atividades no caderno.

25. Exemplo de resposta: $\frac{100(100 - x)}{3}$

24 Foram colocadas x caixas de laranjas e y caixas de maçãs em uma embarcação. Determine o polinômio que representa o total de frutas colocadas na embarcação, sabendo que cada caixa de laranjas contém 120 unidades e cada caixa de maçãs, 80 unidades. **24.** $120x + 80y$

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

25 Na figura abaixo, os lotes A, B e C têm medidas de áreas iguais. Determine um polinômio que expresse a medida da área de cada lote.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Grau de um polinômio

Considere o polinômio $x^4y - x^5y^3 + 3x^2yz$ e os termos que o compõe.

O grau de cada termo é dado pela soma dos expoentes da parte literal. Comprove:

x^4y	$-$	x^5y^3	$+$	$3x^2yz$
5º grau $(4 + 1 = 5)$		$\boxed{\text{8º grau } (5 + 3 = 8)}$		4º grau $(2 + 1 + 1 = 4)$

O **grau de um polinômio** é determinado pelo termo de maior grau.

Portanto, o polinômio $x^4y - x^5y^3 + 3x^2yz$ é do 8º grau, já que o termo de maior grau é x^5y^3.

Também é possível estabelecer o grau de um polinômio em relação a determinada variável. Nesse caso, o grau do polinômio corresponde ao maior expoente com que a variável figura em um dos termos não nulos do polinômio.

Observe alguns exemplos.

a) O polinômio $x^4 - 3x^2y^3 + 5x^3y$ é do 4º grau em relação a x e do 3º grau em relação a y.

b) O polinômio $a^6b^4 + 10bc$ é do 6º grau em relação a a, do 4º grau em relação a b e do 1º grau em relação a c.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

26 Determine o grau dos polinômios.

a) $5a^2 + b^3$ **26. a)** 3º grau

b) $4x^2 + 2x^2y^3 + 5y^4$ **26. b)** 5º grau

c) $5m^2 + 6mn + 4n^3$ **26. c)** 3º grau

d) $16ab^3 + 7a^2 + 5b^2$ **26. d)** 4º grau

e) $-7x^4y + x^2y - 2x^3y^4$ **26. e)** 7º grau

f) $x^4y^2 - 2xy^3$ **26. f)** 6º grau

g) $4a^2b^3 + 5a^5$ **26. g)** 5º grau

27 Determine o grau de cada polinômio em relação à variável x e à variável y, respectivamente.

a) $2x^2 + 5xy^3$ **27. a)** 2º grau; 3º grau

b) $x^5y - x^3y^4$ **27. b)** 5º grau; 4º grau

c) $2x^2y^2 - 5x^3y$ **27. c)** 3º grau; 2º grau

d) $ax^3 - bx^2 + 2abxy^2$ **27. d)** 3º grau; 2º grau

e) $3x^2y + 5xy^2 - y^4$ **27. e)** 2º grau; 4º grau

f) $x^2 + 2xy + y^3$ **27. f)** 2º grau; 3º grau

Adição de polinômios

Observe os polígonos *ABCD* e *MNO*.

LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que *ABCD* representa um retângulo e *MNO*, um triângulo isósceles, como podemos determinar a medida do perímetro de cada polígono?

Sugestão de atividade extra

Peça aos estudantes que, em duplas, escrevam cinco polinômios. Depois, devem pedir a outra dupla que identifique o grau de cada um dos polinômios.

Ao falar sobre polinômios opostos, relembre o significado de números opostos, representando-os na reta numérica.

Temos que as medidas dos comprimentos dos lados do retângulo *ABCD* são indicadas por $x^2 + 3$ e $5x^2 + 1$. Desse modo, podemos representar a medida do perímetro da seguinte maneira:

$$(x^2 + 3) + (5x^2 + 1) + (x^2 + 3) + (5x^2 + 1)$$

Agrupando os termos semelhantes e reduzindo-os, obtemos:

$$x^2 + 5x^2 + x^2 + 5x^2 + 3 + 1 + 3 + 1 = 12x^2 + 8$$

Assim, $12x^2 + 8$ representa a medida do perímetro do retângulo *ABCD*.

Agora, para determinar a medida do perímetro do triângulo isósceles *MNO*, cujas medidas dos comprimentos dos lados são indicadas por $12x + 10$, $12x + 10$ e $10x + 5$, fazemos:

$$(12x + 10) + (10x + 5) + (12x + 10)$$

Agrupamos os termos semelhantes.

$$12x + 10x + 12x + 10 + 10 + 5$$

Reduzimos os termos semelhantes.

$$34x + 25$$

Logo, $34x + 25$ representa a medida do perímetro do triângulo isósceles *MNO*.

Observação

Quando adicionamos um polinômio a outro e obtemos como resultado um polinômio nulo, dizemos que eles são **opostos**. Por exemplo, o polinômio $-x^2 + 5x - 4$ é oposto ao polinômio $x^2 - 5x + 4$, pois:

$$(-x^2 + 5x - 4) + (x^2 - 5x + 4) = -x^2 + x^2 + 5x - 5x - 4 + 4 = 0$$

Subtração de polinômios

Vamos determinar a diferença entre os polinômios $5x^3 - 4x + 8$ e $2x^3 + 6x^2 - 2$, ou seja:

$$(5x^3 - 4x + 8) - (2x^3 + 6x^2 - 2)$$

Na subtração de polinômios, podemos adicionar o primeiro polinômio ao oposto do segundo. Assim:

$$(5x^3 - 4x + 8) + \underbrace{(-2x^3 - 6x^2 + 2)}_{\text{oposto do polinômio } 2x^3 + 6x^2 - 2} = 5x^3 - 4x + 8 - 2x^3 - 6x^2 + 2$$

Agora, podemos agrupar os termos semelhantes e reduzi-los:

$$5x^3 - 2x^3 - 6x^2 - 4x + 8 + 2 = 3x^3 - 6x^2 - 4x + 10$$

Portanto, $3x^3 - 6x^2 - 4x + 10$ representa a diferença entre os polinômios $5x^3 - 4x + 8$ e $2x^3 + 6x^2 - 2$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

28 Efetue as operações reduzindo os termos semelhantes.

a) $(-3x^2 + 5x - 8) + (6x^2 - 4x - 3)$ **28. a)** $3x^2 + x - 11$

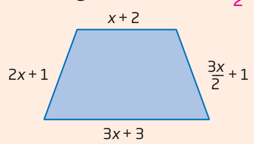
b) $(8ab - 7bc + 3ac) + (-5bc + 3ab - ac)$ **28. b)** $11ab - 12bc + 2ac$

c) $\left(-\frac{3x}{2} - \frac{y}{3}\right) + \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{4}\right) + (2x + y)$ **28. c)** $\frac{7x}{10} + \frac{5y}{12}$

d) $\left(\frac{a}{2} + b - 6\right) + \left(\frac{2a}{3} + 2b - 5\right)$ **28. d)** $\frac{7a}{6} + 3b - 11$

32. a) $a^2 - 15ab + 15b^2$
32. b) $-2x^3 - 12x^2 + 16x + 8$
32. c) $3m + 6mn + 17n$
32. d) $\frac{1}{12}x + \frac{9}{10}xy - \frac{17}{10}y$
32. e) $-3x^2 + 2x + 6$

29 Escreva no caderno, na forma reduzida, o polinômio que representa a medida do perímetro da figura abaixo. **29.** $\frac{15x}{2} + 7$



30 Em uma partida de tênis, Roberta deu x saques e acertou 45% deles. Luísa, sua adversária, deu y saques e acertou 60% menos 2. Nessas condições, determine o polinômio que representa a quantidade de saques que as duas acertaram juntas.
30. $0{,}45x + 0{,}6y - 2$

31 Dado o polinômio $-x^3 + 2x^2 - 4x + 5$, responda às questões.
31. a) $x^3 - 2x^2 + 4x - 5$

a) Qual é o oposto desse polinômio?

b) Qual é o resultado da adição desse polinômio com seu oposto? **31. b)** zero

32 Efetue as operações reduzindo os termos semelhantes.

a) $(6a^2 - 7ab + 8b^2) - (8ab + 5a^2 - 7b^2)$

b) $(5x^3 - 4x^2 + 6x + 8) - (7x^3 + 8x^2 - 10x)$

c) $(5m - 2mn + 7n) - (2m - 8mn - 10n)$

d) $\left(\frac{x}{3} + \frac{xy}{2} - \frac{y}{5}\right) - \left(\frac{3y}{2} - \frac{2xy}{5} + \frac{x}{4}\right)$

e) $(5x^2 - 4x + 9) - (8x^2 - 6x + 3)$

33 Sendo $A = 6x^2 - 3x - 8$, $B = 5x^2 + 4x - 3$ e $C = x^2 - 10x$, determine:

a) $A - B$ **33. a)** $x^2 - 7x - 5$

b) $B - A$ **33. b)** $-x^2 + 7x + 5$

c) $A + B - C$ **33. c)** $10x^2 + 11x - 11$

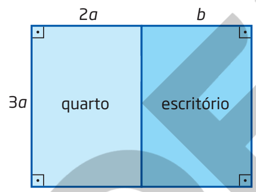
d) $A - (B + C)$ **33. d)** $3x - 5$

34 Determine o polinômio que, adicionado a $6a^2 - 7ab + 8b^2 - 5a^2b^2$, tem como resultado $2ab - a^2 + 2b^2 + 3a^2b^2$.
34. $-7a^2 - 6b^2 + 8a^2b^2 + 9ab$

Multiplicação de polinômios

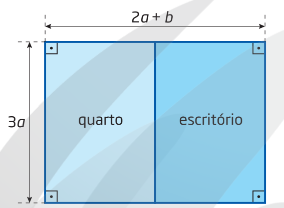
Acompanhe a situação.

Na casa de Pedro, o escritório fica ao lado do quarto, conforme o esquema. Que expressão algébrica representa a medida da área total desses dois cômodos?



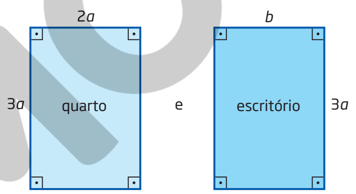
Podemos determinar essa expressão algébrica de dois modos:

1º) Multiplicando a medida do comprimento pela medida da largura dos dois ambientes juntos.



$\underbrace{3a}_{\text{medida da largura}} \cdot \underbrace{(2a + b)}_{\text{medida do comprimento}}$ I

2º) Adicionando a medida da área do quarto e do escritório.



$\underbrace{3a \cdot 2a}_{\text{medida da área do quarto}} + \underbrace{3a \cdot b}_{\text{medida da área do escritório}}$ II

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

• Na **atividade 33**, os **itens a** e **b** resultam em polinômios opostos. Antes de os estudantes resolverem esses itens, pergunte se percebem alguma relação entre eles. Caso não percebam que as adições são opostas, reescreva o **item b** como $-A + B$ e continue a indagar. Se ainda assim os estudantes não perceberem a relação, aguarde eles efetuarem o cálculo e, caso ainda não tenham percebido, aponte a relação, ressaltando que já é possível verificar que os polinômios resultantes são opostos, quando verificamos que $A - B$ é o oposto de $B - A$.

Desenvolva a situação da medida da área total do apartamento de Luís na lousa. Em um primeiro momento, você pode solicitar aos estudantes que tentem determinar a medida dessa área sozinhos. Observe como eles procedem. É possível que alguns deles multipliquem as medidas da largura e do comprimento do apartamento e que outros adicionem as medidas das áreas de cada um dos cômodos. Após conjecturarem e tirarem suas próprias conclusões, resolva a situação-problema na lousa.

De I e II, verificamos que $3a \cdot (2a + b) = 3a \cdot 2a + 3a \cdot b$. Observe que, ao aplicarmos a propriedade distributiva em $3a \cdot (2a + b)$, obtemos $3a \cdot 2a + 3a \cdot b$:

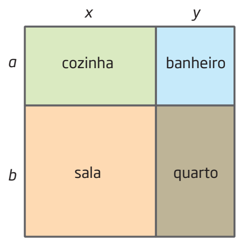
$$3a \cdot (2a + b) = 3a \cdot 2a + 3a \cdot b = 6a^2 + 3ab$$

Portanto, o polinômio $6a^2 + 3ab$ representa a medida da área total desses cômodos.

Na multiplicação de um monômio por um polinômio, usamos a propriedade distributiva, multiplicando o monômio por todos os termos do polinômio e adicionando, em seguida, os resultados.

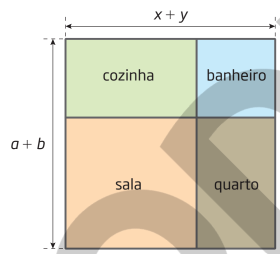
Acompanhe outra situação.

O esquema a seguir mostra as dimensões do apartamento de Luís. Considerando que todos os cômodos do apartamento são retangulares, que expressão algébrica pode representar a medida da área total do apartamento?



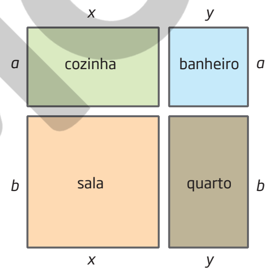
Podemos determinar a expressão algébrica da medida da área total de dois modos:

1º) Multiplicando as medidas da largura e do comprimento do apartamento.



$$\underbrace{(a + b)}_{\text{medida da largura}} \cdot \underbrace{(x + y)}_{\text{medida do comprimento}} \quad \text{I}$$

2º) Adicionando as medidas das áreas de cada um dos quatro cômodos.



$$\underbrace{ax}_{\text{medida da área da cozinha}} + \underbrace{ay}_{\text{medida da área do banheiro}} + \underbrace{bx}_{\text{medida da área da sala}} + \underbrace{by}_{\text{medida da área do quarto}} \quad \text{II}$$

De (I) e (II), verificamos que $(a + b) \cdot (x + y) = ax + ay + bx + by$. Observe que, aplicando a propriedade distributiva em $(a + b) \cdot (x + y)$, obtemos $ax + ay + bx + by$:

$$(a + b) \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y + b \cdot x + b \cdot y = ax + ay + bx + by$$

Portanto, o polinômio $ax + ay + bx + by$ representa a medida da área total do apartamento.

Na multiplicação de dois polinômios, utilizamos a propriedade distributiva, multiplicando cada termo de um polinômio por todos os termos do outro, e, em seguida, adicionamos os novos termos obtidos.

Considere alguns exemplos.

a) $5x \cdot (2x - 3) \;=\; 5x \cdot 2x + 5x \cdot (-3) = 10x^2 - 15x$

b) $-x^2 \cdot (x^3 - 2x^2 + 1) \;=\; (-x^2 \cdot x^3) - x^2 \cdot (-2x^2) - x^2 \cdot 1 \;= -x^5 + 2x^4 - x^2$

c) $(5x + 2) \cdot (3x - 1) \;=\; 5x \cdot 3x + 5x \cdot (-1) + 2 \cdot 3x + 2 \cdot (-1) =$
$\;=\; 15x^2 - 5x + 6x - 2 =$
$\;=\; 15x^2 + x - 2$

d) $(x^2 - 3) \cdot (x^2 - 2x + 1) \;=\; x^2 \cdot x^2 + x^2 \cdot (-2x) + x^2 \cdot 1 - 3 \cdot x^2 - 3 \cdot (-2x) - 3 \cdot 1 =$
$\;=\; x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x^2 + 6x - 3 =$
$\;=\; x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 6x - 3$

Atividades

35. c) $-\frac{9a^3}{2} - \frac{15a^2b}{2} - \frac{3ab^2}{4}$

Faça as atividades no caderno.

35 Efetue os produtos.

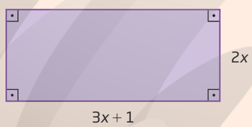
a) $5 \cdot (6x - 2)$ **35. a)** $30x - 10$

b) $m^2 \cdot (m - n)$ **35. b)** $m^3 - m^2n$

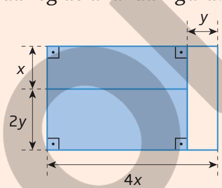
c) $(6a^2 + 10ab + b^2) \cdot \left(-\frac{3}{4}a\right)$

d) $\frac{a^2b}{2} \cdot \left(\frac{b^2}{3} - \frac{a^2}{4}\right)$ **35. d)** $\frac{a^2b^3}{6} - \frac{a^4b}{8}$

36 Determine o polinômio que representa a medida da área do retângulo abaixo. **36.** $6x^2 + 2x$



37 Qual é o polinômio que representa a medida da área da região azul da figura? **37.** $4x^2 + 7xy - 2y^2$



38 Efetue as operações reduzindo os termos semelhantes.

a) $(3x + 2) \cdot (x - 3)$ **38. a)** $3x^2 - 7x - 6$

b) $(3a^2 + 2a + 4) \cdot (-a - 3)$ **38. b)** $-3a^3 - 11a^2 - 10a - 12$

c) $(-2x + 5) \cdot (6x^2 + 4x + 3)$ **38. c)** $-12x^3 + 22x^2 + 14x + 15$

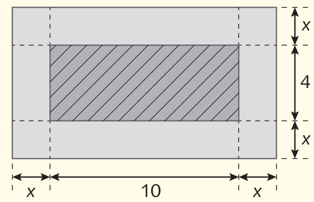
d) $(5x^2 + 2x - 1) \cdot (x - 3)$ **38. d)** $5x^3 - 13x^2 - 7x + 3$

e) $(a + b) \cdot (a - b)$ **38. e)** $a^2 - b^2$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão de atividade extra

Na figura abaixo, o retângulo hachurado representa um jardim e ao redor do jardim está a representação de uma calçada.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Determine:

a) a medida da área ocupada pelo jardim, sabendo que as medidas de comprimento dos lados são dadas em metro;

b) um polinômio que expressa a medida da área ocupada pela calçada.

Respostas:

a) 40 m²

b) $4x^2 + 28x$

• Na **atividade 40**, recorde como determinar a medida do volume de paralelepípedos reto-retângulos, se achar necessário.

• Antes de realizarem a **atividade 41**, recorde a propriedade do quociente de potências de mesma base.

• Para realizar a **atividade 42** da página seguinte, sugira aos estudantes que nomeiem os polinômios; por exemplo, A para o monômio $5a^2b^3$, B para o polinômio que queremos conhecer, e C para o polinômio $20a^2b^5 + 30a^3b^7$. Assim, teremos que $A \cdot B = C$, ou seja, $B = \frac{C}{A}$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

39 Sendo $A = x + 5$, $B = x^2 + 2x + 1$ e $C = 2x^2 - 4$, determine:

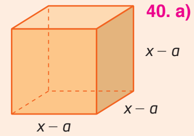
a) $A \cdot B$ **39. a)** $x^3 + 7x^2 + 11x + 5$

b) $B \cdot C$ **39. b)** $2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 8x - 4$

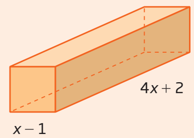
c) $A \cdot B \cdot C$ **39. c)** $2x^5 + 14x^4 + 18x^3 - 18x^2 - 44x - 20$

40 Determine o polinômio que representa a medida do volume de cada figura.

a) **40. a)** $x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$



b) **40. b)** $8x^3 - 16x^2 + 2x + 6$



Divisão de polinômio por monômio

Considere o retângulo $ABCD$ e as expressões algébricas que representam a medida do comprimento da altura e a medida de sua área.

LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Medida da área do retângulo $ABCD$: $12x^4 - 8x^3 + 6x^2$

Medida do comprimento da altura: $2x$

Qual é a expressão algébrica que representa a medida do comprimento da base desse retângulo?

Para determinar a expressão que representa a medida do comprimento da base do retângulo $ABCD$, temos que dividir o polinômio $12x^4 - 8x^3 + 6x^2$ (medida da área do retângulo) pelo monômio $2x$ (medida do comprimento da altura do retângulo).

$$(12x^4 - 8x^3 + 6x^2) : (2x) = \frac{12x^4}{2x} - \frac{8x^3}{2x} + \frac{6x^2}{2x} = 6x^{4-1} - 4x^{3-1} + 3x^{2-1} = 6x^3 - 4x^2 + 3x$$

Portanto, a medida do comprimento da base desse retângulo pode ser representada por $6x^3 - 4x^2 + 3x$.

O quociente de um polinômio por um monômio não nulo é obtido dividindo-se cada termo do polinômio pelo monômio e adicionando os novos termos obtidos.

Observe mais alguns exemplos de divisão de polinômios por monômios.

a) $(6x^5 + 2x^3) : x = \frac{6x^5}{x} + \frac{2x^3}{x} = 6x^{5-1} + 2x^{3-1} = 6x^4 + 2x^2$

b) $(24a^2b^3 - 18a^3b^4 - 6ab^5) : 3ab^3 = \frac{24a^2b^3}{3ab^3} - \frac{18a^3b^4}{3ab^3} - \frac{6ab^5}{3ab^3} =$

$= 8a^{2-1}b^{3-3} - 6a^{3-1}b^{4-3} - 2a^{1-1}b^{5-3} = 8a - 6a^2b - 2b^2$

c) $(4a^2b^3 - 2a^3b^4) : 6ab^2 = \frac{4a^2b^3}{6ab^2} - \frac{2a^3b^4}{6ab^2} = \frac{2}{3}a^{2-1}b^{3-2} - \frac{1}{3}a^{3-1}b^{4-2} = \frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}a^2b^2$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

41 Efetue as divisões.

a) $(10x^6 + 12x^5) : (2x^3)$ **41. a)** $5x^3 + 6x^2$

b) $(30a^2 + 60ab + 90b^2) : (30)$ **41. b)** $a^2 + 2ab + 3b^2$

c) $(-6ab + 9a^2b + 12ab^2) : (3ab)$ **41. c)** $-2 + 3a + 4b$

d) $\left(\frac{5}{6}x^2 - \frac{3}{4}x\right) : \left(-\frac{2}{3}x\right)$ **41. d)** $-\frac{5}{4}x + \frac{9}{8}$

e) $(m^5 + m^3) : (-m^2)$ **41. e)** $-m^3 - m$

f) $(m^2n^3 + mn^4 + m^5n^2) : (-mn)$ **41. f)** $-mn^2 - n^3 - m^4n$

42 O produto de um monômio por um polinômio é $20a^2b^5 + 30a^3b^7$. Sendo o monômio $5a^2b^3$, determine o polinômio. **42.** $4b^2 + 6ab^4$

43 A medida da área de um retângulo é representada por $b^2x^2 + 2bx$. Sendo bx a medida do comprimento da altura, determine a expressão algébrica que representa a medida do comprimento da base do retângulo. **43.** $bx + 2$

44 Determine o quociente de $10x^2y^3 - 20x^3y^5 + 30x^4y^6$ pelos monômios:

a) $10xy$ **b)** $-20xy^3$ **c)** $5x^2y^2$ **d)** $-10x^2y$

44. a) $xy^2 - 2x^2y^4 + 3x^3y^5$
44. b) $-\frac{x}{2} + x^2y^2 - \frac{3x^3y^3}{2}$
44. c) $2y - 4xy^3 + 6x^2y^4$
44. d) $-y^2 + 2xy^4 - 3x^2y^5$

2 Produtos notáveis

Quadrado da soma de dois termos

O quadrado da soma de dois termos, a e b, é indicado por $(a + b)^2$. Desenvolvendo esse produto, obtemos:

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2$$

Ou seja:

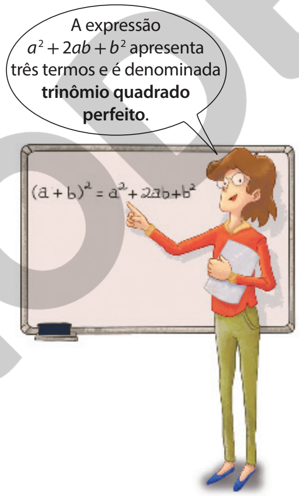
$$\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o produto dos dois termos mais o quadrado do segundo termo.

Observe alguns exemplos.

a) $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

b) $\left(\frac{a}{5} + 3b\right)^2 = \left(\frac{a}{5}\right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{5} \cdot 3b + (3b)^2 = \frac{a^2}{25} + \frac{6ab}{5} + 9b^2$

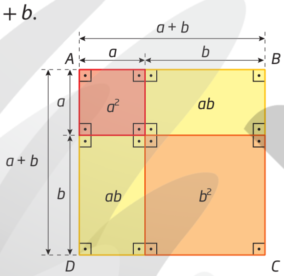


TIAGO SILVA/ARQUIVO DA EDITORA

Representação geométrica

Vamos representar geometricamente o quadrado da soma de dois termos, a e b, que indicamos por $(a + b)^2$, admitindo os números a e b positivos.

Considere o quadrado $ABCD$ cuja medida do comprimento do lado é representada por $a + b$.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Antes da abordagem algébrica de cada um dos casos de produtos notáveis e de fatoração, promova experimentos com base na manipulação de figuras geométricas construídas com cartolina, por exemplo, para que os estudantes possam percebê-los. Assim, poderá incentivá-los a observar, por meio dessas manipulações, os padrões presentes para, então, obter uma regra geral escrita em linguagem algébrica. Uma abordagem com essa orientação tem mais chances de contribuir para a compreensão por parte dos estudantes do que a simples apresentação das demonstrações geométricas, além de favorecer o desenvolvimento da competência geral **4**.

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Produtos notáveis

BNCC:

- Competência geral 4 (a descrição está na página VI).
- Habilidade EF09MA09.

Objetivo:

Compreender, geométrica e algebricamente, os principais casos de produtos notáveis.

Justificativa

Os produtos notáveis são utilizados na simplificação de cálculos e de expressões algébricas e, por isso, é importante estudá-los. A compreensão do ponto de vista algébrico e geométrico, por sua vez, permite entender os processos de fatoração de expressões algébricas, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

Mapeando conhecimentos

Escreva na lousa as seguintes expressões algébricas e peça aos estudantes que as desenvolvam algebricamente:

- $(x + 5)^2$
- $(y - 6)^2$
- $(z - 3) \cdot (z + 3)$

Observe como os estudantes procedem em cada caso. É possível que eles desenvolvam o quadrado de $x + 5$ e de $y - 6$ aplicando a definição de potência e, depois, a propriedade distributiva. O produto $(z - 3) \cdot (z + 3)$ eles podem desenvolver aplicando a propriedade distributiva. Caso alguns deles tenham conhecimentos anteriores sobre produtos notáveis, se valerão desse conhecimento para desenvolver as expressões. Se achar necessário, proponha que desenvolvam outros quadrados da soma, quadrados da diferença e produtos da soma pela diferença de dois termos.

Para as aulas iniciais

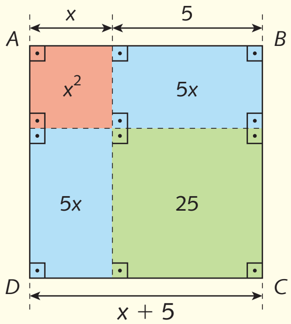
Peça que compartilhem como desenvolveram as expressões da dinâmica inicial. A ideia é que esses cálculos os façam suspeitar da validade das seguintes sentenças:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$

Você pode propor aos estudantes que, em cada caso, substituam a e b por números e verifiquem que as igualdades acima são verdadeiras. É importante enfatizar que eles apenas estão fazendo verificações e não uma demonstração matemática da validade dessas igualdades.

No boxe *Um pouco de história*, caso os estudantes tenham dificuldade de interpretar o texto do pergaminho, escreva, com a turma, parte a parte, na lousa, para que haja melhor compreensão.

Resposta da atividade do boxe *Um pouco de história:*



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Determinando a medida da área A do quadrado de duas maneiras, obtemos:

- $A = \underbrace{(a + b) \cdot (a + b)}_{\text{Multiplicando as medidas dos comprimentos dos lados do quadrado } ABCD\text{.}} = (a + b)^2$
- $A = \underbrace{a^2 + ab + ab + b^2}_{\text{Adicionando a medida das áreas das figuras em que o quadrado } ABCD \text{ é dividido.}} = a^2 + 2ab + b^2$

Portanto, as expressões $(a + b)^2$ e $a^2 + 2ab + b^2$ representam a mesma medida de área, ou seja:

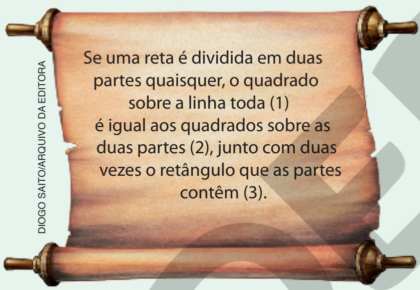
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Um pouco de história

Faça a atividade no caderno.

A Álgebra na Antiguidade

A Álgebra geométrica grega é apresentada de forma muito interessante na obra *Os elementos*, de Euclides. No livro II dessa obra, encontramos o conceito de produtos notáveis e, na proposição 4, o seguinte texto:



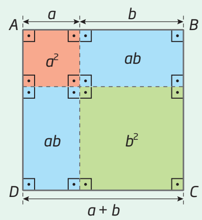
DIOGO SAITO/ARQUIVO DA EDITORA


XAVI/ARQUIVO DA EDITORA

Caricatura de Euclides, matemático grego, autor de *Os elementos*.

Nessa proposição, vemos como os problemas que envolviam Álgebra eram concebidos e apresentados na Antiguidade. O uso de figuras era extremamente importante para o melhor entendimento dos textos. Na figura a seguir estão representados os itens 1, 2 e 3 dessa proposição de Euclides, sendo:

(1) o quadrado $ABCD$;
(2) os quadrados de medida de áreas a^2 e b^2;
(3) os retângulos de medida de áreas ab.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade

Um pouco de história: Resposta em *Orientações*.

Represente geometricamente o quadrado cuja medida da área é representada por $x^2 + 10x + 25$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

45 Desenvolva algebricamente cada quadrado da soma de dois termos.

a) $(x+1)^2$ — **45. a)** $x^2 + 2x + 1$

b) $(2x+10)^2$ — **45. b)** $4x^2 + 40x + 100$

c) $\left(xy + \frac{1}{3}\right)^2$ — **45. c)** $x^2y^2 + \frac{2}{3}xy + \frac{1}{9}$

d) $(x+5)^2$ — **45. d)** $x^2 + 10x + 25$

e) $(x^5 + 2x^3)^2$ — **45. e)** $x^{10} + 4x^8 + 4x^6$

f) $(6+x)^2$ — **45. f)** $36 + 12x + x^2$

g) $(2x + xy)^2$ — **45. g)** $4x^2 + 4x^2y + x^2y^2$

h) $(x^2+1)^2$ — **45. h)** $x^4 + 2x^2 + 1$

i) $(x+2y)^2$ — **45. i)** $x^2 + 4xy + 4y^2$

j) $\left(x^3 + \frac{1}{3}\right)^2$ — **45. j)** $x^6 + \frac{2x^3}{3} + \frac{1}{9}$

46 Simplifique as expressões.

a) $x \cdot (2x-1) + x \cdot (1-3x)$ **46. a)** $-x^2$

b) $(a+5) \cdot (a+5) - (a+5)^2$ **46. b)** 0

c) $y \cdot (y+2) - 2y \cdot (3-y)$ **46. c)** $3y^2 - 4y$

d) $(2+x)^2 - (x+2)^2$ **46. d)** 0

47 Dados os polinômios $A = 2x^2 + 3$ e $B = x^2 + 4$, determine:

a) A^2 **47. a)** $4x^4 + 12x^2 + 9$

b) B^2 **47. b)** $x^4 + 8x^2 + 16$

c) $(A+B)^2$ **47. c)** $9x^4 + 42x^2 + 49$

48 Observe como Pedro utilizou a ideia de produtos notáveis para calcular o quadrado de 41:

$$41^2 = (40+1)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1\,600 + 80 + 1 = 1\,681$$

Agora, calcule mentalmente os quadrados e registre o raciocínio no caderno.

a) 12^2 **b)** 61^2 **c)** 33^2 **d)** 92^2

48. a) $(10+2)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2^2 = 144$

48. b) $(60+1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3\,721$

48. c) $(30+3)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 3 + 3^2 = 1\,089$

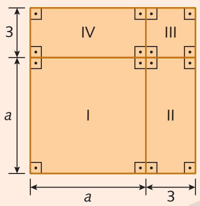
48. d) $(90+2)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 2 + 2^2 = 8\,464$

49 Sabendo que $a^2 + b^2 = 34$ e $(a+b)^2 = 64$, calcule o valor de $6ab$, sendo $a > 0$ e $b > 0$. **49.** 90

50 Desenvolva o produto $(x+3y)^2$ e justifique geometricamente. **50.** $(x+3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

51 Sendo $(x+y)^2 = 256$ e $x^2 + y^2 = 136$, determine xy. **51.** 60

52 Observe a figura abaixo e responda às questões.



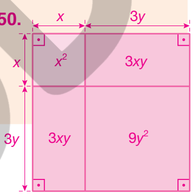
a) Qual é a expressão algébrica que representa a medida da área do quadrado maior?

b) Quais são as expressões algébricas que representam as áreas das figuras I, II, III e IV?

52. a) Exemplo de resposta: $a^2 + 6a + 9$

52. b) Exemplo de resposta: I: a^2; II: $3a$; III: 9; IV: $3a$

50.



Quadrado da diferença de dois termos

O quadrado da diferença de dois termos, a e b, é indicado por $(a-b)^2$. Desenvolvendo esse produto, obtemos:

$$(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - ab - ba + b^2$$

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

• Comente com os estudantes a estratégia utilizada para calcular as potências na **atividade 48**. Pergunte qual forma de cálculo eles consideram mais fácil, sem o uso da calculadora.

Quadrado da diferença de dois termos

Solicite aos estudantes que calculem a medida de área de um quadrado de lado com medida de comprimento $(a-b)$, obtendo o quadrado da diferença entre dois termos, e que o desenvolvam pela propriedade distributiva e pela propriedade comutativa da multiplicação, concluindo que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Chame a atenção dos estudantes para o fato de que $(x-y)^2$ é um caso particular de quadrado da soma de dois termos, uma vez que $(x-y)^2 = [x + (-y)]^2$.

Se achar necessário, apresente mais alguns exemplos de quadrado da diferença de dois termos para que os estudantes os calculem.

Ou seja:

> O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos duas vezes o produto dos dois termos mais o quadrado do segundo termo.

Observe dois exemplos.

a) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

b) $\left(\frac{a}{3} - 2b\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{3} \cdot 2b + (2b)^2 = \frac{a^2}{9} - \frac{4ab}{3} + 4b^2$

Representação geométrica

Considere o quadrado *ABCD*, cuja medida dos comprimentos dos lados é indicada por *a* (figura 1). Vamos diminuir a medida do comprimento do lado e determinar o quadrado *AB′C′D′*, cuja medida do comprimento dos lados mede $(a - b)$ (figura 2). Observe:

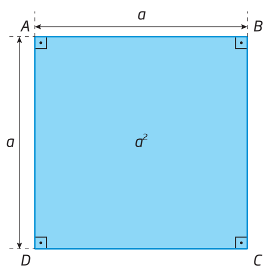


figura 1

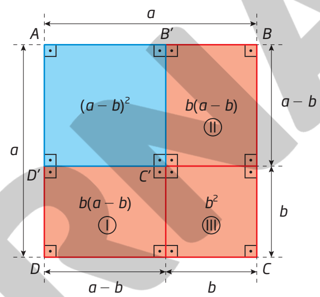


figura 2

Determinando a medida da área *A* do quadrado de duas maneiras, obtemos:

- $A = (a - b) \cdot (a - b) = (a - b)^2$

  Multiplicando as medidas dos comprimentos dos lados do quadrado *AB′C′D′*

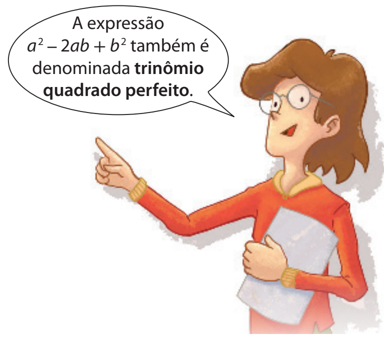
- $A = a^2 - b(a - b) - b(a - b) - b^2 = a^2 - 2ba + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

  medida da área do quadrado *ABCD*

  medida da área do retângulo I

  medida da área do retângulo II

  medida da área do quadrado III



Portanto, as expressões $(a - b)^2$ e $a^2 - 2ab + b^2$ representam a mesma medida de área, ou seja:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

53 Desenvolva algebricamente cada quadrado da diferença de dois termos.

a) $(x-3)^2$ 53. a) $x^2 - 6x + 9$

b) $\left(\frac{x}{3} - 2\right)^2$ 53. b) $\frac{x^2}{9} - \frac{4x}{3} + 4$

c) $(9x^2 - 2)^2$ 53. c) $81x^4 - 36x^2 + 4$

d) $(x^3 - y^3)^2$ 53. d) $x^6 - 2x^3y^3 + y^6$

e) $(x^2 - y^2)^2$ 53. e) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

f) $(-x-y)^2$ 53. f) $x^2 + 2xy + y^2$

g) $(xy - z)^2$ 53. g) $x^2y^2 - 2xyz + z^2$

h) $\left(\frac{x}{2} - \frac{y}{3}\right)^2$ 53. h) $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$

54 Ana utilizou a ideia de produtos notáveis para calcular o quadrado de 16, observe como ela registrou:

$$16^2 = (20-4)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 4 + 4^2 = 256$$

Agora, calcule mentalmente os quadrados e registre o raciocínio no caderno.

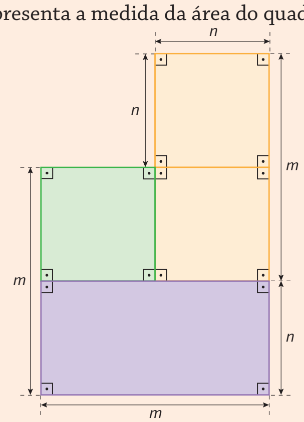
a) 17^2 **b)** 19^2 **c)** 14^2

55 Qual é o polinômio que representa a medida da área do quadrado verde? 55. $m^2 - 2mn + n^2$

54. a) Exemplo de resposta: $17^2 = (20-3)^2 = 400 - 2 \cdot 20 \cdot 3 + 9 = 289$

54. b) Exemplo de resposta: $19^2 = (20-1)^2 = 400 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1 = 361$

54. c) Exemplo de resposta: $14^2 = (20-6)^2 = 400 - 2 \cdot 20 \cdot 6 + 36 = 196$

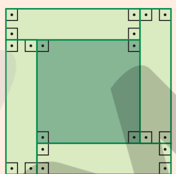


LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

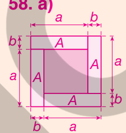
56 Sabendo que $(a-b)^2 = 16$ e $a^2 + b^2 = 106$, calcule o valor de $\frac{ab}{3}$, sendo $a > 0$ e $b > 0$. 56. 15

57 Sabendo que $a^2 + b^2 = 52$ e $ab = 24$, calcule o valor de $(a-b)^2$. 57. 4

58 A figura a seguir foi utilizada por um professor, em sala de aula, para mostrar a igualdade: $4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$ em que a e b são números positivos.



58. a)



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

a) Copie a figura no caderno e indique os segmentos cuja medida do comprimento é indicada por a e b.

b) Reúna-se com um colega e, juntos, mostrem que essa igualdade é verdadeira usando as medidas das áreas dos retângulos e dos quadrados. Depois, expliquem para o professor e os demais colegas da classe como vocês resolveram a atividade. 58. b) $(a+b)^2 = 4A + (a-b)^2$
$(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$

Sugestão de atividade extra

Após a realização da **atividade 54**, proponha este jogo entre os estudantes com o intuito de promover o cálculo mental.

Numere fichas de 0 a 20 e coloque-as sobre uma mesa com o número virado para baixo.

Selecione os estudantes, dois a dois, para que retirem uma ficha cada estudante e calculem mentalmente o quadrado daquele número o mais rápido possível.

O estudante que acertar primeiro, passa para a próxima etapa.

Repita esse processo até que todos tenham participado e tenha restado apenas um estudante.

- Se os estudantes sentirem dificuldade na **atividade 56**, peça que comecem resolvendo o produto notável $(a-b)^2$ e voltem a analisar os dados fornecidos e a pergunta do enunciado. Espera-se que percebam que essa estratégia também auxilia na resolução da **atividade 57**.

Produto da soma pela diferença de dois termos

Proponha aos estudantes que calculem a medida de área de um retângulo cujos lados têm medida de comprimento $(a + b)$ e $(a - b)$, obtendo o produto da soma pela diferença dos mesmos dois termos, e que o desenvolvam pela propriedade distributiva e pela propriedade comutativa da multiplicação, concluindo que $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Se achar necessário, apresente alguns exemplos de produto da soma pela diferença dos mesmos dois termos para que os estudantes os calculem.

Produto da soma pela diferença de dois termos

O produto da soma pela diferença de dois termos, a e b, é indicado por $(a + b) \cdot (a - b)$. Desenvolvendo esse produto, obtemos:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

Ou seja:

$$\boldsymbol{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Observe alguns exemplos.

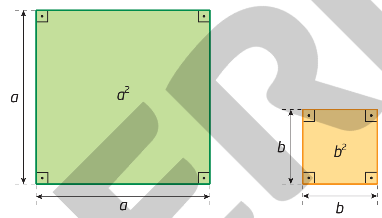
a) $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

b) $(bx + 5) \cdot (bx - 5) = (bx)^2 - (5)^2 = b^2x^2 - 25$

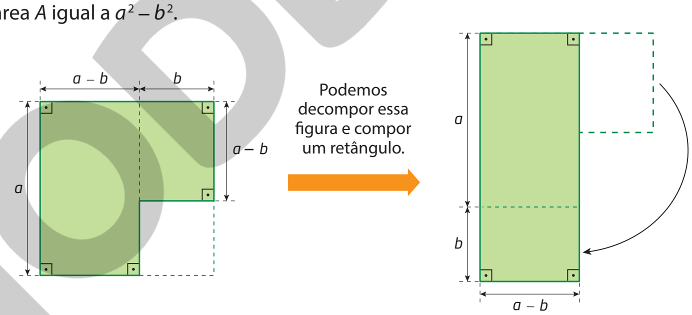
c) $\left(\dfrac{k^2}{3} + 1\right) \cdot \left(\dfrac{k^2}{3} - 1\right) = \left(\dfrac{k^2}{3}\right)^2 - (1)^2 = \dfrac{k^4}{9} - 1$

Representação geométrica

Considere os quadrados abaixo.



Retirando do quadrado verde uma superfície igual à do quadrado laranja, obtemos uma figura com medida de área A igual a $a^2 - b^2$.



No retângulo obtido, temos:

- medida do comprimento da base: $a - b$
- medida do comprimento da altura: $a + b$
- $A = (a - b) \cdot (a + b)$

Como as duas figuras têm a mesma medida de área, verificamos que: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

106

Atividades

59. a) $x^2 - 1$
59. b) $9x^2 - y^2$
59. c) $x^2 - 25$
59. d) $4x^2 - 25$

Faça as atividades no caderno.

59 Desenvolva algebricamente os produtos.

a) $(x+1)\cdot(x-1)$
c) $(x+5)\cdot(x-5)$
b) $(3x+y)\cdot(3x-y)$
d) $(2x+5)\cdot(2x-5)$

60 Simplifique a expressão algébrica abaixo.

$(x+1)^2+(x-1)^2+2(x+1)(x-1)$ **60.** $4x^2$

61 Determine os produtos.

a) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)$ **61. a)** $x^2-\frac{1}{x^2}$

b) $\left(x-\frac{y}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{y}{3}\right)$ **61. b)** $x^2-\frac{y^2}{9}$

c) $(x^2+1)\cdot(x^2-1)$ **61. c)** x^4-1

d) $(xy^2-z^2)\cdot(xy^2+z^2)$ **61. d)** $x^2y^4-z^4$

62 Observe como Roberta calculou o produto de 41 por 39:

$41\cdot 39=(40+1)\cdot(40-1)=40^2-1^2=1599$

Agora, calcule mentalmente os produtos e registre o raciocínio no caderno.

a) $57\cdot 63$ **62. a)** $(60-3)\cdot(60+3)=60^2-3^2=3591$

b) $52\cdot 48$ **62. b)** $(50+2)\cdot(50-2)=50^2-2^2=2496$

c) $42\cdot 34$ **62. c)** $(38+4)\cdot(38-4)=38^2-4^2=1428$

63 Sabendo que $a+b=13$ e $a^2-b^2=39$, reúna-se com um colega e, juntos, determinem o valor de a. Depois, escrevam um texto explicando como vocês chegaram a esse valor. Apresentem o texto para o professor e os demais colegas da turma. **63.** 8

3 Fatoração

Podemos escrever o número 100 como o produto de dois ou mais números.

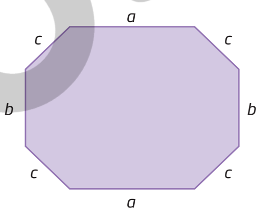
- $100 = 4\cdot 25$
- $100 = 10\cdot 10$
- $100 = 2\cdot 50$
- $100 = 2\cdot 2\cdot 25$
- $100 = 2\cdot 5\cdot 10$
- $100 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$

Nesses casos, escrevemos o número 100 na forma fatorada.

Fatorar um número é escrevê-lo como o produto de dois ou mais fatores.

Além de números, podemos fatorar polinômios, isto é, escrevê-los como o produto de dois ou mais polinômios. Acompanhe o exemplo.

As medidas dos comprimentos dos lados do polígono são indicadas por a, b e c.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

A medida de seu perímetro pode ser representada por:

$$a+a+b+b+c+c+c+c=2a+2b+4c$$

Podemos também escrever esse polinômio da seguinte forma:

$$2(a+b+2c)$$

O polinômio $2(a+b+2c)$ é uma forma fatorada de $2a+2b+4c$.

Agora, vamos estudar alguns processos utilizados para fatorar uma expressão algébrica.

Para iniciar o estudo deste tópico, relembre a decomposição em fatores primos, estudada no 6º ano, mostrando que $100 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 5$, ou seja, é uma decomposição em números primos ou, simplesmente, uma fatoração. Mostre que podemos escrever o número 100 com diferentes fatores, como mostrado nos exemplos do livro.

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

- Na **atividade 63**, os estudantes vão apresentar um texto explicando a forma de resolução escolhida pela dupla. Assim, uma possibilidade de resposta é:
  - Primeiro, escrevemos o produto da soma pela diferença de dois números e o seu desenvolvimento: $(a+b)(a-b) = (a^2-b^2)$
  - Depois, substituímos $a+b$ e a^2-b^2 pelos valores fornecidos no enunciado, obtendo, assim:
  $13(a-b)=39$ ou $a-b=3$
  - Com essa equação e a fornecida no enunciado $(a+b=13)$, montamos um sistema de equações, obtendo $a=8$.

Fatoração

BNCC:

Habilidade EF09MA09.

Objetivo:

Fatorar expressões algébricas.

Justificativa

Fatorar expressões algébricas amplia o que foi estudado sobre fatoração de números naturais e possibilita, dentre outras coisas, resolver diferentes equações do 2º grau com uma incógnita e resolver problemas. Além disso, favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes: "O que é fatorar um número? E fatorar uma expressão algébrica?". Ouça as respostas deles. É possível que alguns respondam, com vocabulário próprio, que fatorar é escrever como um produto de dois ou mais fatores. Depois, divida a lousa em duas partes: em uma delas escreva algumas expressões algébricas e na outra escreva a forma fatorada dessas expressões. Em seguida, convide os estudantes a identificar a forma fatorada de cada uma das expressões algébricas escritas na primeira parte da lousa. Deixe-os à vontade para conjecturar e conversar com os colegas.

Para as aulas iniciais

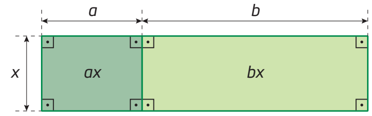
Retome as expressões da dinâmica inicial. Para verificar se uma fatoração está correta, basta efetuar a multiplicação e verificar se o resultado é igual à expressão inicial. Dê essa sugestão para que confiram se relacionaram corretamente as expressões.

Fatoração com um fator comum em evidência

Explique aos estudantes que, para fatorar colocando um fator comum em evidência, é preciso encontrar um fator que esteja presente em todos os termos. No primeiro exemplo, o termo a está em a^3, pois $a^3 = a \cdot a \cdot a$, e em $2a$, pois $2a = 2 \cdot a$; portanto, a é o fator comum do polinômio $a^3 + 2a$.

Fatoração com um fator comum em evidência

A figura abaixo é formada por dois retângulos.



A medida da área total da figura pode ser obtida se adicionarmos as medidas das áreas dos retângulos que a compõem:

$$ax + bx$$

Também podemos determinar a medida da área dessa figura calculando a medida da área do retângulo cuja medida do comprimento da base é indicada por $(a + b)$ e a medida do comprimento da altura é indicada por x:

$$x \cdot (a + b)$$

Assim:

$$\boxed{ax + bx = x(a + b)}$$

O polinômio $x(a + b)$ é uma forma fatorada do polinômio $ax + bx$. Nesse caso, colocamos o **fator comum** (x) **em evidência**, obtendo uma forma fatorada da expressão.

Observe alguns exemplos em que fatoramos alguns polinômios.

a) $a^3 + 2a = \underset{\text{fator comum}}{a} \cdot (\underset{a^3 : a}{a^2} + \underset{2a : a}{2})$

b) $km + 2kn + k^2 = \underset{\text{fator comum}}{k} \cdot (\underset{km : k}{m} + \underset{2kn : k}{2n} + \underset{k^2 : k}{k})$

c) $12a^4b^6 - 20a^5b^8 + 8a^3b^2 = \underset{\text{fator comum}}{4a^3b^2} \cdot (\underset{12a^4b^6 : 4a^3b^2}{3ab^4} - \underset{20a^5b^8 : 4a^3b^2}{5a^2b^6} + \underset{8a^3b^2 : 4a^3b^2}{2})$

d) $(a + b) + (a + b)x = \underset{\text{fator comum}}{(a + b)} - (\underset{(a + b) : (a + b)}{1} + \underset{(a + b)x : (a + b)}{x})$

Atividades

64. a) Exemplo de resposta: $2^2 \cdot 3^2$
64. b) Exemplo de resposta: $2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
64. c) Exemplo de resposta: $2^3 \cdot 3 \cdot 5$
64. d) Exemplo de resposta: $2^2 \cdot 5^3$

Faça as atividades no caderno.

64 Escreva os números na forma fatorada.

a) 36 **b)** 450 **c)** 120 **d)** 500

65 Colocando os fatores comuns em evidência, fatore:

a) $ax + ay$ **65. a)** $a(x + y)$

b) $16x^2 + 20y^2$ **65. b)** $4(4x^2 + 5y^2)$

c) $5x + 15y - 10z$ **65. c)** $5(x + 3y - 2z)$

d) $-5x^3y + 20x^2y^2$ **65. d)** $5x^2y(-x + 4y)$

66 Fatore as expressões.

a) $ax^3 + bx^2 - cx$ **66. a)** $x(ax^2 + bx - c)$

b) $12a^3x^2 + 6a^2x^3 - 8ax^4$ **66. b)** $2ax^2(6a^2 + 3ax - 4x^2)$

c) $\frac{ab}{8} + \frac{a^2b}{4} - \frac{ab^2}{2}$ **66. c)** $\frac{ab}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2} - b\right)$

67 Escreva os polinômios abaixo na forma de um produto: **67. a)** $x^2(x^3 + x^2 - 2)$ **67. c)** $6xy(x - 3y^2)$

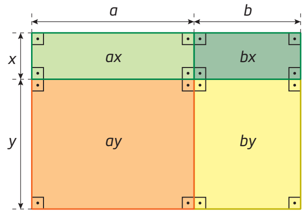
a) $x^5 + x^4 - 2x^2$ **c)** $6x^2y - 18xy^3$

b) $6x + 3xy + 12xyz$ **d)** $15x^7 - 3yx^4$

67. b) $3x(2 + y + 4yz)$ **67. d)** $3x^4(5x^3 - y)$

Fatoração por agrupamento

Considere a figura abaixo.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

A medida da área total da figura pode ser obtida adicionando a medida das áreas dos retângulos menores:

$$ax + bx + ay + by$$

Ou pode ser obtida pelo cálculo da medida da área do retângulo cuja medida do comprimento da base é indicada por $(a + b)$ e a medida do comprimento da altura é indicada por $(x + y)$:

$$(a + b) \cdot (x + y)$$

Assim:

$$\boxed{ax + bx + ay + by = (a + b) \cdot (x + y)}$$

Podemos escrever $ax + bx + ay + by$ na forma $(a + b) \cdot (x + y)$, usando a fatoração:

$(ax + bx) + (ay + by)$ → Agrupamos os termos com fatores comuns.

$x(a + b) + y(a + b)$ → Colocamos o fator comum de cada grupo em evidência.

$(a + b) \cdot (x + y)$ → Colocamos o polinômio comum $(a + b)$ em evidência.

Portanto, $(a + b) \cdot (x + y)$ é uma forma fatorada do polinômio $ax + bx + ay + by$.

Observe alguns exemplos.

a) $3a - 6y + ab - 2by = 3a + ab - 6y - 2by =$
$= a(3 + b) - 2y(3 + b) =$
$= (3 + b) \cdot (a - 2y)$

b) $x^4 + x^3 + x^2 + x = x^3(x + 1) + x(x + 1) =$
$= (x + 1) \cdot (x^3 + x)$

c) $ax^2 - abx + b^2 - bx = ax(x - b) + b(b - x) =$
$= ax(x - b) - b(x - b) =$
$= (x - b) \cdot (ax - b)$

d) $mx^3 - mx^2 + x^4 - x^3 = mx^2(x - 1) + x^3(x - 1) =$
$= (x - 1)(mx^2 + x^3) =$
$= (x - 1)x^2(m + x) =$
$= x^2(x - 1)(m + x)$

Fatoração por agrupamento

Mostre aos estudantes que é possível agrupar os termos com fatores comuns de modo diferente do apresentado. Por exemplo:

$(ax + ay) + (bx + by) =$
$= a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) =$
$= (x + y) \cdot (a + b)$

No terceiro exemplo, chame a atenção dos estudantes para o fato de os sinais terem sido trocados na parcela $+b(b - x)$, que é o mesmo que $-b(-b + x)$ ou $-b(x - b)$.

Fatoração da diferença de dois quadrados

Verificando o entendimento da representação geométrica da fatoração da diferença de dois quadrados, relembre o produto da soma pela diferença e mostre aos estudantes a relação entre eles.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

68 Fatore as expressões por agrupamento.

a) $xy + x - 2y - 2$ **68. a)** $(y + 1)(x - 2)$

b) $6x + 6y + ax + ay$ **68. b)** $(x + y)(6 + a)$

c) $2x - 2 + yx - y$ **68. c)** $(x - 1)(2 + y)$

d) $2a + 2b + ax + bx$ **68. d)** $(a + b)(2 + x)$

69 Fatore as expressões.

a) $7x + 7y + bx + by$ **69. a)** $(x + y)(7 + b)$

b) $ax - ay - bx + by$ **69. b)** $(x - y)(a - b)$

c) $6x^2 + 15x - 4xy - 10y$ **69. c)** $(2x + 5)(3x - 2y)$

d) $2ax - 2ay - 3bx + 3by$ **69. d)** $(x - y)(2a - 3b)$

70 Transforme as expressões em produtos.

a) $3(x - 1) + a(x - 1) + a^2(x - 1)$ **70. a)** $(x - 1)(3 + a + a^2)$

b) $ax + bx + ay + by + az + bz$ **70. b)** $(a + b)(x + y + z)$

c) $(x + y)^2 - 2(x + y)$ **70. c)** $(x + y)[(x + y) - 2]$

d) $ax - a + \frac{mx}{3} - \frac{m}{3}$ **70. d)** $(x - 1)\left(a + \frac{m}{3}\right)$

71 Agrupe os termos das expressões e fatore-as.

a) $ax - ay + x - y$ **71. a)** $(x - y)(a + 1)$

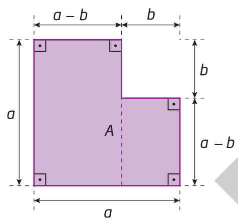
b) $abx^2 + aby^2 + cx^2 + cy^2$ **71. b)** $(ab + c)(x^2 + y^2)$

c) $x^4 + 9x^3 - 6x - 54$ **71. c)** $(x + 9)(x^3 - 6)$

d) $ax - 2ay + 5bx - 10by + 11cx - 22cy$ **71. d)** $(x - 2y)(a + 5b + 11c)$

Fatoração da diferença de dois quadrados

De um quadrado cuja medida do comprimento do lado é indicada por *a*, retirou-se um quadrado cuja medida do comprimento do lado é indicada por *b*, com $b < a$, obtendo a figura a seguir:



$A = a^2 - b^2$

medida da área do quadrado cuja medida do comprimento do lado é indicada por *b*

medida da área do quadrado cuja medida do comprimento do lado é indicada por *a*

figura 1

A medida da área da figura 1 é $a^2 - b^2$, que corresponde a uma diferença de dois quadrados.

Podemos decompor a figura 1 conforme indicado abaixo (figura 2) e, depois, compor um retângulo (figura 3).

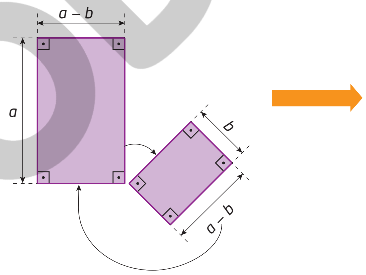


figura 2

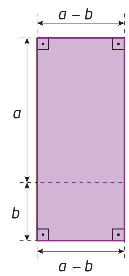


figura 3

A medida da área da figura 1, representada por $a^2 - b^2$, é igual à medida da área da figura 3, que pode ser representada por $(a + b) \cdot (a - b)$.

Assim, justificamos geometricamente a igualdade:

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

Portanto, $(a + b) \cdot (a - b)$ é uma forma fatorada do polinômio $a^2 - b^2$.

Observe alguns exemplos.

a) $\underbrace{a^2}_{(a)^2} - \underbrace{25}_{(5)^2} = (a + 5)(a - 5)$

b) $\underbrace{\frac{a^2}{4}}_{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - \underbrace{\frac{b^2}{16}}_{\left(\frac{b}{4}\right)^2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{4}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{4}\right)$

c) $\underbrace{9a^2b^2}_{(3ab)^2} - \underbrace{16x^4y^6}_{(4x^2y^3)^2} = (3ab + 4x^2y^3)(3ab - 4x^2y^3)$

d) $\underbrace{m^4}_{(m^2)^2} - \underbrace{1}_{(1)^2} = (m^2 + 1)(\underbrace{m^2}_{(m)^2} - \underbrace{1}_{(1)^2}) = (m^2 + 1)(m + 1)(m - 1)$

74. a) $(80 + 1) \cdot (80 - 1) = 80^2 - 1^2 = 6\,400 - 1 = 6\,399$
74. b) $(40 + 2) \cdot (40 - 2) = 40^2 - 2^2 = 1\,600 - 4 = 1\,596$
74. c) $(100 + 1) \cdot (100 - 1) = 100^2 - 1^2 = 10\,000 - 1 = 9\,999$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

72. f) $(xy + 1)(xy - 1)$
72. g) $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)$ **72. h)** $\left(x + \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{x^2}\right)$

72 Fatore as expressões. **72. a)** $(x + 7)(x - 7)$

a) $x^2 - 49$
b) $9a^2 - 4b^2$ **72. b)** $(3a + 2b)(3a - 2b)$
c) $1 - x^2$ **72. c)** $(1 + x)(1 - x)$
d) $4x^2 - 25y^2$ **72. d)** $(2x + 5y)(2x - 5y)$
e) $4x^2 - 25$ **72. e)** $(2x + 5)(2x - 5)$
f) $x^2y^2 - 1$
g) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{9}$
h) $x^2 - \frac{1}{x^4}$

73 Decomponha as expressões em produtos de fatores.

a) $(x + y)^2 - 1$ **73. a)** $(x + y + 1)(x + y - 1)$
b) $1 - 9a^2$ **73. b)** $(1 + 3a)(1 - 3a)$
c) $4x^2 - y^2$ **73. c)** $(2x + y)(2x - y)$
d) $x^2 - (y + 1)^2$ **73. d)** $(x + y + 1)(x - y - 1)$

74 Roberto registrou o cálculo do produto de 21 por 19:

$21 \cdot 19 = (20 + 1) \cdot (20 - 1) = 20^2 - 1^2 =$
$= 400 - 1 = 399$

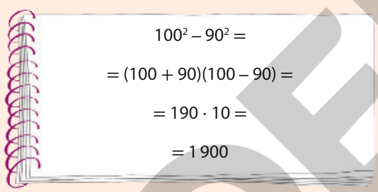
Agora, calcule mentalmente os produtos e registre o raciocínio no caderno.

a) $81 \cdot 79$ **b)** $42 \cdot 38$ **c)** $101 \cdot 99$

75 Agrupe convenientemente os termos e fatore as expressões.

a) $a^3 + a^2 - 4a - 4$ **75. a)** $(a + 2)(a - 2)(a + 1)$
b) $a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1$ **75. b)** $(a + 1)(a - 1)(b + 1)(b - 1)$

76 A seguir temos como Melissa calculou a diferença dos quadrados dos números 100 e 90:



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, calcule da mesma forma que Melissa:

a) $500^2 - 400^2$ **b)** $1\,000^2 - 900^2$

76. a) $(500 + 400)(500 - 400) = 900 \cdot 100 = 90\,000$
76. b) $(1\,000 + 900)(1\,000 - 900) = 1\,900 \cdot 100 = 190\,000$

77 Demonstre, no caderno, que a soma de dois números inteiros e consecutivos é igual à diferença dos seus quadrados.

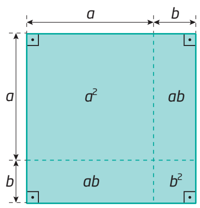
77. $n + n + 1 = 2n + 1$ e $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$
Exemplo: $4 + 5 = 9$ e $5^2 - 4^2 = 9$

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Observe o quadrado cuja medida do comprimento do lado é indicada por $a + b$.

A medida da área desse quadrado pode ser indicada por:

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
ou
$$(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$$



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

- Comente com os estudantes que, em alguns casos, a fatoração pode ser utilizada para simplificar cálculos numéricos, como as estratégias empregadas nas **atividades 74** e **76**.

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Relembre os estudantes de que nos tópicos *Quadrado da soma de dois termos* e *Quadrado da diferença de dois termos*, de forma genérica, nomeamos $a^2 + 2ab + b^2$ e $a^2 - 2ab + b^2$ como trinômios quadrados perfeitos. Assim, para esse caso de fatoração, também há uma relação com os produtos notáveis quadrado da soma e quadrado da diferença.

Essa associação dos casos de fatoração com os produtos notáveis, estudados anteriormente, é uma oportunidade de exercitar o raciocínio lógico-matemático de indução e de dedução.

Explique aos estudantes que, para fatorarmos um trinômio quadrado perfeito, devemos verificar se é possível extrair a raiz quadrada exata do primeiro e do último termo dele e, em caso afirmativo, devemos verificar se o termo do meio do trinômio corresponde ao dobro do produto entre as raízes quadradas do primeiro e do último termo. Se as condições anteriores estiverem satisfeitas, basta escrever um binômio composto das raízes quadradas do primeiro e do último termo do trinômio quadrado perfeito, e a operação entre os termos do binômio corresponderá ao sinal apresentado pelo termo do meio do trinômio.

Verificamos, então, que:

$$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$$

Portanto, a forma fatorada de $a^2 + 2ab + b^2$ é $(a + b)^2$.

Vimos em produtos notáveis que:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Então:

$$\boxed{a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2}$$

Portanto, a forma fatorada de $a^2 - 2ab + b^2$ é $(a - b)^2$.

Observe os exemplos.

a) $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x \cdot 3) + 3^2 = (2x + 3)^2$

b) $4m^2n^2 - 4mnc + c^2 = (2mn)^2 - 2 \cdot (2mn \cdot c) + c^2 = (2mn - c)^2$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

78 Fatore os polinômios.

a) $x^2 + 6x + 9$ **78. a)** $(x + 3)^2$

b) $x^2 - 16x + 64$ **78. b)** $(x - 8)^2$

c) $9x^2 + 30xy + 25y^2$ **78. c)** $(3x + 5y)^2$

d) $x^2 - 2ax + a^2$ **78. d)** $(x - a)^2$

e) $1 + 9m^2 - 6m$ **78. e)** $(3m - 1)^2$

f) $\frac{1}{4}a^2 - 5ab + 25b^2$ **78. f)** $\left(\frac{1}{2}a - 5b\right)^2$

79 Quais dos polinômios abaixo são trinômios quadrados perfeitos? **79.** alternativas a, c, d

a) $a^2 + 6ab + 9b^2$

b) $a^2 + b + \frac{1}{4}$

c) $16x^2 - 24xy + 9y^2$

d) $4x^2 - 4x + 1$

80 Escreva a forma fatorada dos polinômios.

a) $x^2 - 6x + 9$ **80. a)** $(x - 3)^2$

b) $1 - 6x + 9x^2$ **80. b)** $(1 - 3x)^2$

c) $x^2 - 10x + 25$ **80. c)** $(x - 5)^2$

d) $x^3 - 2x^2 + x$ **80. d)** $x(x - 1)^2$

e) $x^4 + 2x^3 + x^2$ **80. e)** $x^2(x + 1)^2$

f) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{5}$ **80. f)** $\frac{1}{5}(x - 2)^2$

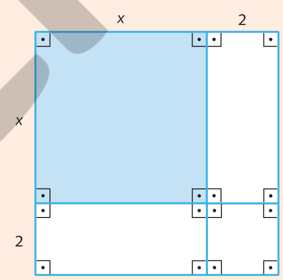
81 Escreva as expressões como um produto de polinômios.

a) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$ **81. a)** $(a + b + c)(a + b - c)$

b) $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$ **81. b)** $(a + b)^2 \cdot (a - b)^2$

c) $(a^2 + b^2)^2 - 2(a^2 + b^2) + 1$ **81. c)** $(a^2 + b^2 - 1)^2$

82 Considere um jardim com o formato de um quadrado de lado medindo *x* metros. Devem-se aumentar as dimensões em 2 metros, de acordo com a imagem.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a) Indique, na forma de um trinômio e na forma fatorada, a nova medida de área do jardim. **82. a)** $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

b) Escreva uma expressão algébrica simplificada que indique a diferença entre as medidas de área nova e área antiga. **82. b)** $4x + 4$

c) Se a diferença entre as medidas de área é de 42 m², qual era aqui inicialmente a medida do lado do jardim? **82. c)** 9,5 m

4 Resolução de equações do 2º grau

Resolver uma equação do 2º grau significa encontrar as raízes dessa equação que pertencem ao conjunto universo dela.

Toda equação do 2º grau pode ser escrita na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

- Quando todos os coeficientes (a, b e c) são diferentes de zero, dizemos que a equação é **completa**.
- Quando b ou c ou os dois coeficientes são iguais a zero, dizemos que a equação é **incompleta**.

Resolução de equações do 2º grau incompletas

Acompanhe a resolução de algumas equações de 2º grau incompletas.

a) Vamos resolver a equação $4x^2 - 36 = 0$, considerando $U = \mathbb{Q}$.

$4x^2 - 36 = 0$

$4x^2 - 36 + 36 = 0 + 36$ ← Adicionamos **36** a ambos os membros da equação.

$4x^2 = 36$

$4x^2 : 4 = 36 : 4$ ← Dividimos os dois membros por **4**.

$x^2 = 9$

$x = \sqrt{9} = 3$ ou $x = -\sqrt{9} = -3$

Como -3 e 3 são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \{-3, 3\}$.

b) Sendo $U = \mathbb{R}$, vamos resolver a equação $2x^2 + 10 = 0$.

$2x^2 + 10 - 10 = 0 - 10$ ← Subtraímos **10** de ambos os membros da equação.

$2x^2 = -10$

$2x^2 : 2 = -10 : 2$ ← Dividimos os dois membros por **2**.

$x^2 = -5$

Não existe número real que, elevado ao quadrado, seja igual a -5. Portanto, $S = \varnothing$.

c) Agora, vamos resolver a equação $-7x^2 = 0$, considerando $U = \mathbb{R}$.

$-7x^2 : -7 = 0 : -7$ ← Dividimos os dois membros por **-7**.

$x^2 = 0$

$x = -0 = 0$ ou $x = +0 = 0$

Como a equação tem duas raízes reais iguais a zero e 0 pertence ao conjunto universo, então $S = \{0\}$.

Sugestão de leitura

GUELLI, Oscar. História da equação do 2º grau. São Paulo: Ática, 1999. (Coleção Contando a história da Matemática).

O livro conta a história das equações do 2º grau desde seu primeiro registro e passa pela evolução das representações até chegar ao uso de símbolos. Além disso, o livro traz vários desafios intrigantes para resolver.

(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Resolução de equações do 2º grau

BNCC:

- Competência específica 1 (a descrição está na página VII).
- Habilidade EF09MA09.

Objetivos:

- Resolver equações do 2º grau completas com uma incógnita utilizando diferentes estratégias.
- Mobilizar os conhecimentos construídos para a resolução de problemas.

Justificativa

Em anos anteriores os estudantes tiveram contato com equações do 1º grau com uma incógnita, equações do 1º grau com duas incógnitas e com equações do 2º grau com um incógnita, porém com foco maior nas equações do tipo $ax^2 + c = 0$. A resolução de equações do 2º grau completas amplia os conhecimentos previamente adquiridos pelos estudantes sobre equações e amplia o repertório de estratégias de resolução de problemas, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09**.

Mapeando conhecimentos

Reproduza na lousa as **atividades 14**, **15**, **16** e **17** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* e peça aos estudantes que as realizem em duplas. Faça um levantamento das principais dificuldades enfrentadas.

Para as aulas iniciais

Faça a correção coletiva das atividades propostas na dinâmica inicial e explore com os estudantes as revisões trazidas na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores.*

Resolução de equações do 2º grau incompletas

Comente com os estudantes que a equação $4x^2 - 36 = 0$ é do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, sendo $a = 4$, $b = 0$ e $c = -36$. Como $b = 0$, essa equação de 2º grau é incompleta. Relembre que a, b e c são números reais chamados coeficientes.

Comente com os estudantes que, na equação $2x^2 - 32x = 0$, temos uma equação de 2º grau incompleta com o coeficiente $c = 0$. Em sua resolução, foi utilizado um dos casos de fatoração estudado neste capítulo: fator comum em evidência. Quando colocamos o fator comum em evidência, recaímos em um produto igual a zero. Esse é um bom momento para levar os estudantes a inferirem que, quando um produto é igual a zero, pelo menos um dos fatores é igual a zero.

- Enfatize aos estudantes que, ao resolver um problema que recai em uma equação do 2º grau, é preciso, depois de encontrar as raízes da equação, verificar se elas podem ser respostas do problema, como na **atividade 86**. Nessa atividade, as raízes são 0 e 8, mas 0 não pode ser resposta do problema, pois é a medida de comprimento do lado de um quadrado; assim, consideramos somente 8.

d) Sendo $U = \mathbb{R}$, vamos resolver $2x^2 - 32x = 0$.

Uma forma de resolver essa equação é colocar o fator comum $2x$ em evidência:

$2x(x - 16) = 0$

Como o produto dos fatores $2x$ e $(x - 16)$ é zero, então pelo menos um deles é zero. Assim:

- $2x = 0$ ⟶ $x = 0$

ou

- $(x - 16) = 0$ ⟶ $x - 16 = 0$ ⟶ $x = 16$

Como 0 e 16 são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \{0, 16\}$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

83 Resolva as equações considerando $U = \mathbb{R}$.

a) $x^2 - 81 = 0$ **83. a)** $S = \{-9, 9\}$

b) $x^2 - 3 = 0$ **83. b)** $S = \{-\sqrt{3}, x = \sqrt{3}\}$

c) $x^2 + 24 = 0$ **83. c)** $S = \varnothing$

d) $16x^2 - 25 = 0$ **83. d)** $S = \left\{-\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right\}$

e) $5x^2 = 0$ **83. e)** $S = \{0\}$

f) $x^2 - 5x = 0$ **83. f)** $S = \{0, 5\}$

g) $-2x^2 - 10x = 0$ **83. g)** $S = \{-5, 0\}$

h) $\frac{3x^2}{4} - 5x = 0$ **83. h)** $S = \left\{0, \frac{20}{3}\right\}$

i) $6x^2 = 5x$ **83. i)** $S = \left\{0, \frac{5}{6}\right\}$

j) $(x + 2)^2 = 4$ **83. j)** $S = \{-4, 0\}$

84 Considerando $U = \mathbb{N}$, resolva cada equação.

a) $(2x - 3)^2 + 12x = 9$ **84. a)** $S = \{0\}$

b) $x \cdot (x + 2) = 4x$ **84. b)** $S = \{0, 2\}$

c) $3 \cdot (x - 2)^2 = 12$ **84. c)** $S = \{0, 4\}$

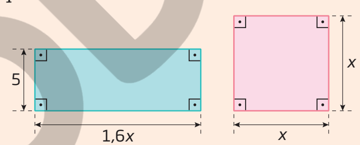
d) $2x^2 - \frac{3}{4} = x^2 + \frac{1}{4}$ **84. d)** $S = \{1\}$

85 Resolva as equações, considerando $U = \mathbb{Z}$.

a) $7m^2 + 3 = 8m^2 + 3$ **85. a)** $S = \{0\}$

b) $\left(\frac{x}{7} - 11\right) \cdot \left(\frac{x}{7} + 11\right) = 0$ **85. b)** $S = \{-77, 77\}$

86 O retângulo e o quadrado abaixo têm a mesma medida de área. Observe atentamente as figuras e responda às questões.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual é a medida do comprimento do lado do quadrado? **86. a)** 8

b) Qual é a medida do perímetro do quadrado? E o do retângulo? **86. b)** 32; 35,6

c) Qual é a medida da área do retângulo e do quadrado? **86. c)** 64

87 Determine os possíveis valores de x em cada caso.

a) O quadrado de x é igual a 144. **87. a)** $x = -12$ ou $x = 12$

b) O quadrado de x é igual a 169. **87. b)** $x = -13$ ou $x = 13$

c) O dobro do quadrado de x é igual ao triplo de x. **87. c)** $x = 0$ ou $x = \frac{3}{2}$

Resolução de equações do 2º grau completas

Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi, matemático árabe do século IX, em seu livro *Al-jabr Wa'l muqabalah*, apresentou regras para encontrar as raízes positivas de equações do 2º grau. Em suas soluções, ele usava apenas palavras, sem empregar símbolos.

Uma das equações apresentadas e resolvidas por Al-Khowarizmi foi: $x^2 + 10x = 39$.

Como podemos encontrar as raízes dessa equação? A seguir, vamos estudar a resolução de equações do 2º grau completas, como a estudada por Al-Khowarizmi.

SAIKO3P/SHUTTERSTOCK

Monumento de Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi em frente ao edifício da administração da Câmara Municipal da cidade de Urgench, no Uzbequistão. Foto de 2021.

Resolução por fatoração

Vamos usar o que já foi estudado sobre fatoração e produtos notáveis para resolver algumas equações do 2º grau completas. Acompanhe alguns exemplos.

a) Vamos resolver a equação $x^2 - 10x + 25 = 0$, considerando $U = \mathbb{Q}$.

Temos que $x^2 - 10x + 25$ é um trinômio quadrado perfeito.

Assim:

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = 0$$

$(x - 5)^2 = 0 \rightarrow$ $(x - 5)^2$ é a forma fatorada do trinômio.

Como $(x - 5)^2 = (x - 5) \cdot (x - 5)$, temos:

$(x - 5) \cdot (x - 5) = 0$

Os dois fatores da multiplicação são iguais e o produto dos fatores é zero, portanto:

$$(x - 5) = 0 \Rightarrow x = 5$$

Como a equação tem duas raízes reais iguais a 5 e 5 pertence ao conjunto universo, então $S = \{5\}$.

b) Vamos resolver a equação $16x^2 + 24x = -9$, considerando $U = \mathbb{Q}$.

Adicionando **9** a ambos os membros da equação, obtemos:

$$16x^2 + 24x + \mathbf{9} = -9 + \mathbf{9} \Rightarrow \underbrace{16x^2 + 24x + 9}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = 0$$

$$16x^2 + 24x + 9 = 0$$

$$(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 3 + 3^2 = 0$$

$(4x + 3)^2 = 0 \rightarrow$ $(4x + 3)^2$ é a forma fatorada do trinômio.

$(4x + 3) \cdot (4x + 3) = 0$

ILUSTRAÇÕES: DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução de equações do 2º grau completas

Os exemplos apresentados utilizam o caso de fatoração do trinômio quadrado perfeito. Ressalte que, ao utilizar fatoração nas resoluções de equações do 2º grau, vamos recair em um produto igual a zero e, como visto anteriormente, se o produto de dois fatores é zero, pelo menos um deles é zero.

115

Peça aos estudantes que observem atentamente o passo a passo da representação geométrica da resolução da equação $x^2 + 10x = 39$. A esse método de resolução chamamos de completar quadrado. Observe que, ao realizar as operações em cada termo, o objetivo é que, no primeiro membro da equação, esteja a expressão que representa a medida da área de um quadrado.

A resolução de equações de 2º grau pelo método de completar quadrados, bem como a justificativa do processo, favorece o desenvolvimento das práticas de argumentação.

Como $(4x + 3)^2 = (4x + 3) \cdot (4x + 3)$, temos:

$$(4x + 3) \cdot (4x + 3) = 0$$

Os dois fatores da multiplicação são iguais e o produto dos fatores é zero, portanto:

$$(4x + 3) = 0$$

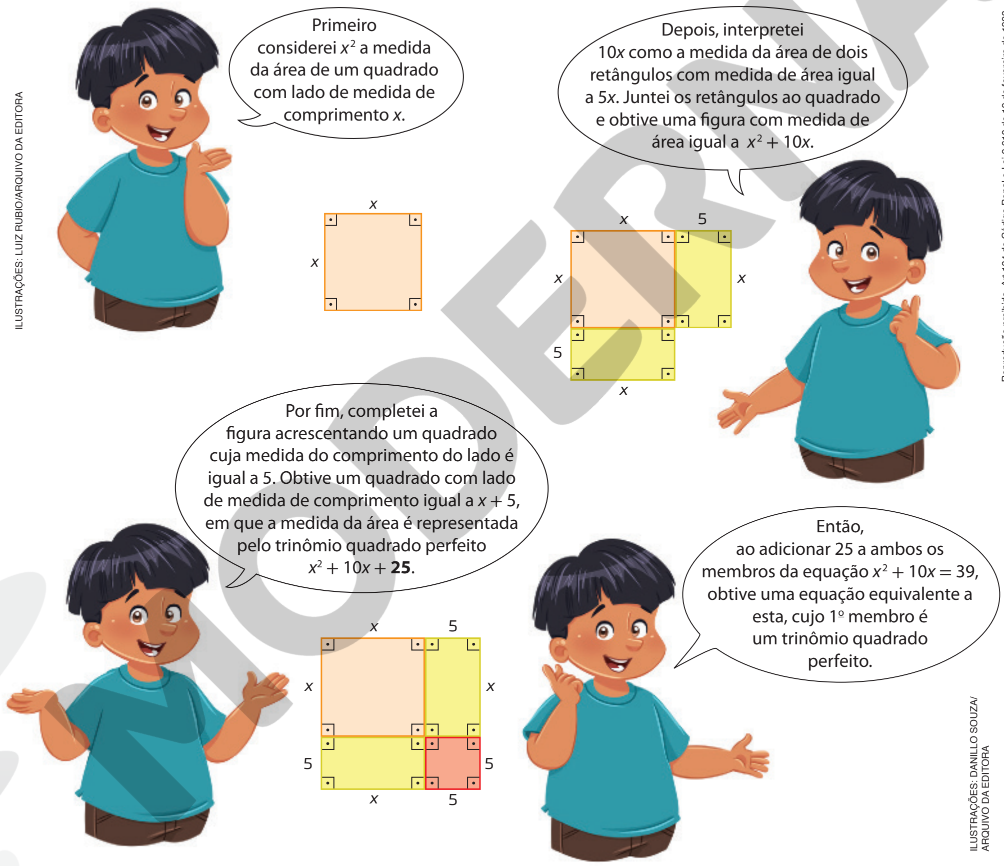
$$x = -\frac{3}{4}$$

Como a equação tem duas raízes reais iguais a $-\frac{3}{4}$ e $-\frac{3}{4}$ pertence ao conjunto universo, então $S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$.

c) Agora, vamos determinar a raiz positiva da equação $x^2 + 10x = 39$, apresentada por Al-Khowarizmi.

Observe que o 1º membro da equação $(x^2 + 10x)$ não é um trinômio quadrado perfeito. Para resolvê-la, devemos encontrar uma equação equivalente a ela, cujo 1º membro seja um trinômio quadrado perfeito.

Observe a explicação de Dênis sobre como ele determinou essa equação equivalente.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: DANILLO SOUZA/ ARQUIVO DA EDITORA

Agora, podemos resolver a equação inicial mais facilmente.

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

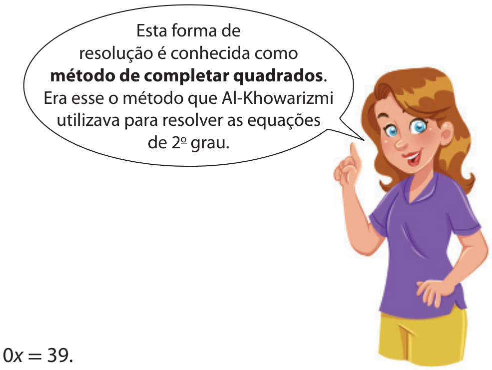
$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = 64$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$(x + 5) = \sqrt{64} = 8$$

$$x = 3$$

Portanto, 3 é a raiz positiva da equação $x^2 + 10x = 39$.



- Qual é a outra raiz da equação $x^2 + 10x = 39$? Por que essa raiz não poderia ser determinada pelo método de Al-Khowarizmi? **item:** –13; porque Al-Khowarizmi considerou que $x + 5$ é positivo porque é a medida do comprimento do lado de um quadrado.

Fórmula de resolução de uma equação do 2º grau

Considerando a equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são coeficientes reais com $a \neq 0$, vamos obter, por meio da generalização do método de completar quadrados, uma fórmula para calcular suas raízes. Acompanhe:

1º) Multiplicamos ambos os membros da equação por $\mathbf{4a}$:

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 0 \cdot 4a$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

2º) Subtraímos $\mathbf{4ac}$ de ambos os membros da equação:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac - 4ac = 0 - 4ac$$

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

balão de fala: espera-se que os alunos respondam que $b^2 + 4ac$ é resultado do quadrado de $2ax + b$; então, é positivo ou nulo.

3º) Adicionamos $\mathbf{b^2}$ a ambos os membros da equação:

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + b^2}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = -4ac + b^2$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

4º) Fatoramos o 1º membro:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

5º) Considerando $b^2 - 4ac \geqslant 0$, extraímos a raiz quadrada dos dois membros:

$$\left.\begin{array}{c} 2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac} \\ \text{ou} \\ 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac} \end{array}\right\} \; 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

ILUSTRAÇÕES: DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

6º) Isolamos x:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ressalte aos estudantes que, para construir a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, foi aplicada a mesma estratégia de completar quadrados usada para a resolução da equação $x^2 + 10x = 39$.

Na pergunta feita pela personagem ("Você sabe por que consideramos $b^2 - 4ac \geqslant 0$?"), espera-se que os estudantes respondam que, pelo fato de ser igual a $(2ax + b)^2$ na sentença, $b^2 - 4ac$ deve ser positivo ou nulo.

Comente com os estudantes que há uma discussão sobre o matemático Bhaskara ter ou não descoberto a fórmula resolutiva da equação do 2º grau.

Sugestão de atividade extra

Organize os estudantes em grupos e peça que façam uma pesquisa sobre o matemático Bhaskara, falando um pouco sobre suas contribuições para a Matemática, inclusive sobre a questão da descoberta da fórmula resolutiva da equação do 2º grau. Após a pesquisa, faça uma roda de conversa para discutir e compartilhar os resultados.

Assim, encontramos a **fórmula resolutiva de equações do 2º grau** $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais com $a \neq 0$.

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

A fórmula resolutiva de equações do 2º grau é conhecida como **fórmula de Bhaskara**, que permite determinar as raízes de uma equação quando conhecemos os seus coeficientes.

Assim, concluímos que as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vamos resolver, por exemplo, a equação $7x^2 + 13x - 2 = 0$ considerando $U = \mathbb{R}$.

Aplicando a fórmula resolutiva para $a = 7$, $b = 13$ e $c = -2$, temos:

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-2)}}{2 \cdot 7}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{169 + 56}}{14}$$

$$x = \frac{-13 \pm \sqrt{225}}{14}$$

$$x = \frac{-13 \pm 15}{14} \begin{cases} x_1 = \dfrac{-13 + 15}{14} = \dfrac{2}{14} = \dfrac{1}{7} \\ x_2 = \dfrac{-13 - 15}{14} = -\dfrac{28}{14} = -2 \end{cases}$$

Sugestão de leitura

ROSA, Ernesto. **As mil e uma equações**. São Paulo: Ática, 2008. (Coleção A descoberta da Matemática).

Kamal, Ahmed e Najla descobrem um plano para assassinar o emir e desvendam os segredos das equações do 2º grau nessa história divertida e interessante que se passa nos reinos muçulmanos do século IX. No final do livro, há também um minialmanaque com desafios e enigmas para resolver.

Como -2 e $\frac{1}{7}$ são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \left\{-2, \frac{1}{7}\right\}$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

88 Resolva as equações, considerando $U = \mathbb{R}$.

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$ **88. a)** $S = \{-3, -2\}$

b) $6x^2 - x - 2 = 0$ **88. b)** $S = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$

c) $x^2 - 2\sqrt{5}\,x + 4 = 0$ **88. c)** $S = \sqrt{5} - 1, \sqrt{5} + 1$

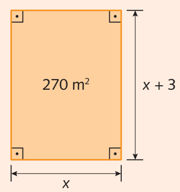
d) $x^2 - 14x + 49 = 0$ **88. d)** $S = \{7\}$

89 A soma de um número real com seu quadrado é 42. Determine esse número.

89. -7 ou 6

90 Subtraindo o inverso de um número real qualquer (diferente de zero) desse mesmo número, obtemos $\frac{3}{2}$. Determine esse número. **90.** $-\frac{1}{2}$ ou 2

91 Com base no retângulo a seguir, elabore um problema sobre medidas de área no qual seja necessário encontrar o valor da incógnita x. Troque de problema com um colega. Conversem a respeito da resolução e verifiquem se os procedimentos efetuados foram adequados para encontrar a resposta. Caso tenham dúvidas, conversem com o professor.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

92 Elabore um problema envolvendo a idade de duas pessoas. A equação que resolve o problema deve ser uma equação do 2º grau que pode ser resolvida por algum método de fatoração. Troque de problema com um colega. Em seguida, conversem a respeito da resolução e verifiquem se os procedimentos efetuados estavam corretos.

92. Resposta pessoal.

91. Resposta pessoal. As raízes da equação são $x_1 = -18$ e $x_2 = 15$. Os estudantes devem perceber que apenas a raiz positiva convém para a resposta.

Discriminante

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de **discriminante** da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$ e é representada pela letra grega Δ (delta).

Então, a fórmula de Bhaskara pode ser escrita assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Analisando essa fórmula, podemos verificar se uma equação tem ou não raízes reais e obter uma relação entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau.

- Quando $\Delta > \mathbf{0}$, $\sqrt{\Delta}$ é um número real e a equação possui duas raízes reais diferentes.

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- Quando $\Delta = \mathbf{0}$, $\sqrt{\Delta}$ é nulo e a equação tem duas raízes reais iguais.

$$\boxed{x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}}$$

- Quando $\Delta < \mathbf{0}$, $\sqrt{\Delta}$ não é um número real, pois qualquer número real elevado ao quadrado é igual a um número positivo ou nulo. Dizemos, então, que a equação não tem raízes reais.

Para, por exemplo, determinar os valores de m em que a equação $3x^2 + 6x + m = 0$ possui duas raízes reais, temos:

$$a = 3,\ b = 6 \text{ e } c = m$$

Para que a equação tenha duas raízes reais diferentes, temos que ter $\Delta > 0$. Portanto, como $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &> 0 \\ 6^2 - 4 \cdot 3 \cdot m &> 0 \\ 36 - 12m &> 0 \\ -12m &> -36 \\ 12m &< 36 \\ m &< 3 \end{aligned}$$

Multiplicamos ambos os membros por **– 1** e invertemos o sentido da desigualdade.

Assim, os valores de m devem ser menores que 3 para que a equação tenha duas raízes reais diferentes.

Observe que, se $m = 3$, a equação tem duas raízes reais iguais, e que, se $m > 3$, a equação não tem raízes reais.

Em outro exemplo, para determinar o valor de k para a equação $x^2 - 2x + k = 0$ sabendo que possui duas raízes reais e iguais. Nesse caso, sabemos que $\Delta = 0$.

$$\begin{gathered} a = 1,\ b = -2 \text{ e } c = k \\ (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0 \\ 4 - 4k = 0 \\ 4 = 4k \\ 1 = k \end{gathered}$$

Assim, k é igual a 1, para que a equação $x^2 - 2x + k = 0$ tenha duas raízes reais e iguais.

Discriminante

Enfatize aos estudantes que conhecer o sinal do discriminante permite saber se, na equação do 2º grau, há ou não raízes reais e se elas são iguais ou diferentes.

Forma fatorada de uma equação do 2º grau

Comente com os estudantes que conhecer a forma fatorada de uma equação de 2º grau ($a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$) permite saber quais são suas raízes sem realizar cálculos. Por outro lado, é possível encontrar a equação do 2º grau correspondente conhecendo suas raízes.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

93 Calcule o discriminante e indique se a equação tem raízes reais.

a) $x^2 - 10x + 21 = 0$ **93. a)** $\Delta = 16$; sim

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$ **93. b)** $\Delta = 0$; sim

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ **93. c)** $\Delta = 0$; sim

d) $3x^2 + 6x + 4 = 0$ **93. d)** $\Delta = -12$; não

94 Determine o valor de p na equação $x^2 - 6x + p - 5 = 0$, de incógnita x, de modo que suas raízes:

a) sejam reais e iguais; **94. a)** $p = 14$

b) sejam reais e diferentes; **94. b)** $p < 14$

c) não sejam reais. **94. c)** $p > 14$

95 Determine o valor de k para que a equação $3x^2 - 5x + 2k = 0$ não tenha raízes reais. **95.** $k > \frac{25}{24}$

96 Determine os valores de a em cada uma das equações a seguir, de modo que:

a) a equação $x^2 - 7x + a = 0$ tenha duas raízes reais diferentes; **96. a)** $a < \frac{49}{4}$

b) a equação $x^2 - ax + 9 = 0$ tenha duas raízes reais iguais; **96. b)** $a = -6$ ou $a = 6$

c) a equação $x^2 - 3x + a = 0$ não tenha raízes reais. **96. c)** $a > \frac{9}{4}$

Forma fatorada de uma equação do 2º grau

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ e suas raízes: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Adicionando e multiplicando as raízes da equação, obtemos:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - b + \sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \underbrace{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}_{\text{produto da soma pela diferença}} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$

Colocando a em evidência no 1º termo da equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos:

$$a\left(x^2 + \boxed{\frac{b}{a}}x + \boxed{\frac{c}{a}}\right) = 0$$

$$-(x_1 + x_2) = -\left(-\frac{b}{a}\right) = \frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Assim:

$$a\,[x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + (x_1 \cdot x_2)] = 0$$

$$a\,[\underbrace{x^2 - x_1 \cdot x}_{x \text{ é fator comum}} \underbrace{- x_2 \cdot x + x_1 \cdot x_2}_{x_2 \text{ é fator comum}}] = 0$$

$$a\,[x \cdot \underbrace{(x - x_1) - x_2 \cdot (x - x_1)}_{\text{fator comum}}] = 0$$

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

Portanto, a forma fatorada da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, cujas raízes são x_1 e x_2, é:

$$\boxed{a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0}$$

Observe alguns exemplos:

a) Vamos escrever, na forma fatorada, a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Temos que as raízes x_1 e x_2 da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ são 2 e 3, respectivamente.

Sendo $a = 1$, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, a forma fatorada de $x^2 - 5x + 6 = 0$ pode ser escrita como:

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

b) Vamos determinar uma equação do 2º grau cujas raízes sejam 3 e 4.

Usando a forma fatorada para $a = 1$, temos:

$$(x - 3)(x - 4) = 0$$

Agora, aplicamos a propriedade distributiva:

$$x^2 - 4x - 3x + 12 = 0$$
$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

Logo, a equação procurada é $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

97 Obtenha a forma fatorada das equações.

a) $x^2 - 64 = 0$ **97. a)** $(x + 8)(x - 8) = 0$

b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ **97. b)** $2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ **97. c)** $4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 0$

d) $x^2 + 2mx - 3m^2 = 0$ **97. d)** $(x - m)(x + 3m) = 0$

e) $3x^2 - 2xp + \frac{p^2}{3} = 0$ **97. e)** $3\left(x - \frac{p}{3}\right)^2 = 0$

98 Fatore os trinômios.

a) $2x^2 - 4x + 2$ **98. a)** $2(x - 1)^2$

b) $8x^2 - 6x + 1$ **98. b)** $8\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right)$

c) $6x^2 + x - 1$ **98. c)** $6\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $x^2 + 5x - 24$ **98. d)** $(x - 3)(x + 8)$

e) $\frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x - 14$ **98. e)** $\frac{1}{2}(x + 4)(x - 7)$

99 Determine uma equação do 2º grau que tenha: **99. a)** Exemplo de resposta: $x^2 - 14x + 49 = 0$

a) duas raízes reais iguais a 7;

b) -3 e 8 como raízes; **99. b)** Exemplo de resposta: $x^2 - 5x - 24 = 0$

c) -1 e -5 como raízes e o coeficiente de x^2 igual a 2; **99. c)** Exemplo de resposta: $2x^2 + 12x + 10 = 0$

d) nenhuma raiz real.

99. d) Exemplo de resposta: $x^2 + 1 = 0$

Resolução de problemas

Para resolver problemas que envolvam equações do 2º grau com uma incógnita, podemos:

I) encontrar a equação que representa matematicamente o problema;

II) determinar as raízes da equação;

III) interpretar o valor das raízes, verificando a compatibilidade com os dados do problema, levando em consideração o universo em questão.

Podemos representar as etapas acima em um fluxograma:

Início → Encontrar a equação que representa matematicamente o problema. → Determinar as raízes da equação. → Verificar se as raízes encontradas satisfazem as condições do problema. → Fim

Agora, acompanhe a resolução de alguns problemas utilizando uma equação do 2º grau.

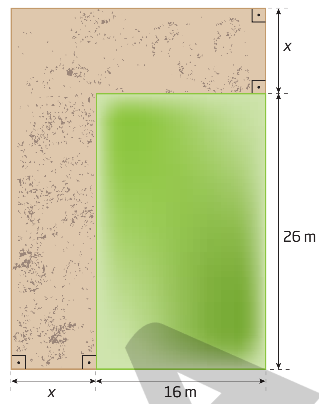
- Após concluírem a **atividade 97**, peça que expliquem como fizeram para fatorar cada uma das equações. Esse é o momento oportuno para incentivá-los a mobilizar o que estudaram sobre os casos de fatoração.
- A **atividade 99** apresenta diferentes respostas. Convide alguns estudantes a compartilhar as respostas a que chegaram e proponha aos demais colegas da turma que verifiquem se as respostas do colega atendem as exigências de cada item.

Resolução de problemas

Ao trabalhar com situações contextualizadas, chame a atenção dos estudantes para os valores que a incógnita pode assumir. Nos problemas apresentados no livro como exemplo, x só pode assumir valores positivos, pois corresponde a uma medida de comprimento.

Problema 1

Sebastião tem um terreno com as seguintes medidas: 26 m de comprimento e 16 m de largura. Ele deseja aumentar a medida da área desse terreno para 816 m², acrescentando faixas de mesma medida de comprimento de largura a um dos lados e ao fundo. Qual deve ser a medida do comprimento da largura dessas faixas?



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que a nova medida de área do terreno será 816 m², escrevemos a seguinte equação:

$$(x + 16)(x + 26) = 816, \text{ com } U = \mathbb{R}_+^*$$

Observação

Como x, da equação acima, corresponde à medida do comprimento da largura, temos que o conjunto universo da equação é $U = \mathbb{R}_+^*$.

Resolvemos a equação para determinar a medida x, em metro:

$(x + 16)(x + 26) = 816$

$x^2 + 26x + 16x + 416 = 816$

$x^2 + 42x - 400 = 0$

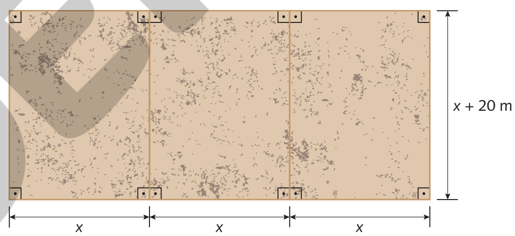
Resolvendo a equação, obtemos: $x_1 = -50$ e $x_2 = 8$.

Como -50 e 8 são raízes da equação, mas só 8 pertence ao conjunto universo, então $S = \{8\}$.

Logo, a medida do comprimento da largura das faixas é 8 m.

Problema 2

Uma empresa de loteamento vai cercar três terrenos próximos, retangulares e de mesmas dimensões. A medida do comprimento é 20 m maior que a medida da largura do terreno. Os três lotes têm, juntos, 8 775 m² de medida de área. Quais são as dimensões de cada lote?



A equação que representa essa situação é:

$$3(x)(x + 20) = 8\,775, \text{ com } U = \mathbb{R}_+^*$$

Resolvendo a equação para determinar a medida x em metro, temos:

$3(x^2 + 20x) = 8\,775$

$3x^2 + 60x = 8\,775$

$3x^2 + 60x - 8\,775 = 0$

É possível obter, a partir da equação, as raízes: $x_1 = 45$ ou $x_2 = -65$.

Como -65 e 45 são raízes da equação, mas só 45 pertence ao conjunto universo, então $S = \{45\}$.

Portanto, as dimensões de cada lote são 45 m e 65 m.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

100 A metade do quadrado de um número inteiro positivo é igual ao dobro desse número mais 6. Calcule-o. **100.** 6

101 O quadrado de um número natural é igual a seu dobro adicionado com 24. Determine esse número. **101.** 6

102 O dobro do quadrado de um número é igual ao produto desse número por 7, menos 3. Qual é o número? **102.** 3 ou $\frac{1}{2}$

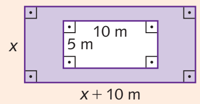
103 O quadrado da idade de Camila subtraído da metade dessa idade é igual a 14 anos. Calcule a idade de Camila. **103.** 4 anos

104 A soma dos quadrados de dois números inteiros positivos e consecutivos é 25. Calcule-os. **104.** 3 e 4

105 Determine a medida do comprimento do lado do quadrado em que o número que representa a medida da área excede o número que representa a medida do perímetro em 5. **105.** 5

106 Determine três números inteiros, positivos e consecutivos, tais que o quadrado do menor seja igual à diferença dos outros dois. **106.** 1, 2 e 3

107 A medida da área da parte roxa da figura é 94 m². Calcule a medida x em metro. **107.** $x = 8$ m



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Veja que interessante

Faça as atividades no caderno.

Equações biquadradas

Perto do ano 2000 a.C., os babilônios não só resolviam as equações do 2º grau, como também discutiam a resolução de algumas equações de 3º grau e de um tipo especial de equação de 4º grau: as **equações biquadradas**.

De modo geral, uma equação na incógnita x é chamada de biquadrada quando pode ser escrita na forma:

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ com } a \neq 0}$$

Um exemplo de equação biquadrada é $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$. Observe que podemos escrevê-la da seguinte forma: $(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0$

Substituindo x^2 por uma incógnita auxiliar y, obtemos a equação: $y^2 - 13y + 36 = 0$

Dessa forma, reduzimos a equação biquadrada $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ à equação do 2º grau $y^2 - 13y + 36 = 0$ de incógnita y. Resolvendo essa equação, obtemos: $y_1 = 4$ e $y_2 = 9$. Como $x^2 = y$, temos:

- Para $y = 4$, temos $x^2 = 4$, ou seja, $x = \pm 2$
- Para $y = 9$, temos $x^2 = 9$, ou seja, $x = \pm 3$

Logo, as raízes da equação $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ são $-3, -2, 2$ e 3.

Veja que interessante:
item: a) $-2, -1, 1$ e 2
item: b) -3 e 3

Atividade

Resolva, no caderno, as seguintes equações biquadradas:

a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

b) $2x^4 - 16x^2 = 18$

- A **atividade 100** pode ser resolvida de acordo com a descrição a seguir:
  - escrevendo uma equação para representar o problema em que x é o número inteiro positivo desconhecido, obtemos: $\frac{x^2}{2} = 2x + 6$;
  - desenvolvendo essa equação, obtemos esta equação equivalente: $x^2 - 4x - 12 = 0$;
  - resolvendo a equação, encontramos as raízes -2 e 6;
  - interpretando as raízes encontradas, verificamos que o número desejado é um inteiro positivo; dessa forma, descartamos a raiz -2.

A exploração do boxe *Veja que interessante* visa contribuir para o desenvolvimento da competência específica 1.

Resolvendo em equipe

BNCC:

- Competência geral 10 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 2 e 5 (as descrições estão na página VII).

A seção destaca as etapas selecionadas para encaminhar a resolução de problemas. Elas devem ser analisadas e discutidas com os estudantes. Além de favorecer o desenvolvimento da competência geral **10** e das competências específicas **2** e **5**, a seção permite desenvolver habilidades de inferência, quando os estudantes transferem estratégias de resolução para outros contextos e situações.

Acompanhe as discussões das equipes durante a etapa de resolução, intercedendo quando necessário.

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

1 (OBM) Qual é o valor da expressão $20\,112\,011^2 + 20\,112\,003^2 - 16 \times 20\,112\,007$?

Resolvendo em equipe: alternativa **b**

a) $2 \times 20\,112\,007^2$

b) $2 \times 20\,112\,003^2$

c) $2 \times 20\,112\,007$

d) $2 \times 20\,112\,003$

e) $2 \times 20\,112\,011^2$

Interpretação e identificação dos dados	• Analise as informações do enunciado e anote no caderno as que você julgar relevantes para a resolução do problema. • Se chamarmos o número 20 112 007 de x, como poderemos representar os números 20 112 011 e 20 112 003? **Interpretação e identificação dos dados**: primeiro item: resposta pessoal segundo item: $(x + 4)$ e $(x - 4)$, respectivamente.
Plano de resolução	**Plano de resolução**: primeiro item: $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 - 16x$ segundo item: $x^2 + 8x + 16 + x^2 - 8x + 16 - 16x = 2x^2 - 16x + 32 = 2 \cdot (x - 4)^2$ • Reescreva a expressão numérica dada, considerando 20 112 007 igual a x. • Desenvolva os produtos notáveis.
Resolução	• Junte-se a três colegas. • Mostre a eles seu plano de resolução e observe o deles. • Discutam as diferenças e as semelhanças entre os planos e escolham um para a execução do processo de resolução. **Observação** Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individual no caderno. **Resolução:** $2 \cdot (x - 4)^2 = 2 \cdot (20\,112\,007 - 4)^2 = 2 \cdot 20\,112\,003^2$
Verificação	• Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.
Apresentação	• Organizem a apresentação da resolução, explicitando cada etapa e justificando a escolha do número 20 112 007 como x. **Apresentação:** Espera-se que os estudantes percebam que a diferença entre 20 112 007 e 20 112 003 é 4, a mesma diferença observada entre 20 112 011 e 20 112 007.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Produtos notáveis

Quadrado da soma de dois termos

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Quadrado da diferença de dois termos

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

Produto da soma pela diferença de dois termos

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

1. Desenvolva os produtos notáveis.

a) $(3x + 1)^2$ **1. a)** $9x^2 + 6x + 1$

b) $(2m - 5)^2$ **1. b)** $4m^2 - 20m + 25$

c) $(6ab + 1) \cdot (6ab - 1)$ **1. c)** $36a^2b^2 - 1$

d) $(5ab - 7)^2$ **1. d)** $25a^2b^2 - 70ab + 49$

e) $(2x + 5) \cdot (2x - 5)$ **1. e)** $4x^2 - 25$

2. Desenvolva os produtos notáveis e reduza os termos semelhantes. **2. b)** $-m^2 - 8m + 11$

a) $(x + 2y)^2 + (2x - y)^2$ **2. a)** $5x^2 + 5y^2$

b) $2(m - 2)^2 - 3(m + 1) \cdot (m - 1)$

c) $(a + b)^2 - (a^2 + b^2)$ **2. c)** $2ab$

d) $(2a - 3b)^2 + (a - 5b)(a + 5b)$

2. d) $5a^2 - 12ab - 16b^2$

3. Sendo $x^2 + y^2 = 56$ e $x \cdot y = 22$, qual é o valor de $x + y$? **3.** 10

4. Utilize o quadrado da soma ou da diferença para calcular os quadrados abaixo.

a) 27^2 **4. a)** 729

b) 43^2 **4. b)** 1 849

c) 104^2 **4. c)** 10 816

d) 297^2 **4. d)** 88 209

5. Utilize o produto da soma e da diferença de dois termos para resolver os produtos abaixo.

a) $95 \cdot 105$ **5. a)** 9 975

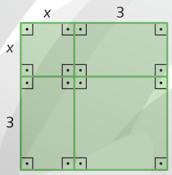
b) $202 \cdot 198$ **5. b)** 39 996

c) $54 \cdot 46$ **5. c)** 2 484

d) $1\,001 \cdot 999$ **5. d)** 999 999

6. Observe a figura e responda.

6. a) medida da área: $A = x^2 + 6x + 9$; medida do perímetro: $4x + 12$



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quais expressões algébricas representam as medidas de área e do perímetro da figura?

b) Se $x = 2$ cm, determine as medidas de área e de perímetro. **6. b)** medida da área: $A = 25$ cm²; medida do perímetro: 20 cm

Fatoração

Fatoração com um fator comum em evidência

$$ax + bx = x(a + b)$$

Fatoração por agrupamento

$$ax + bx + ay + by = (a + b) \cdot (x + y)$$

Fatoração por diferença de dois quadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Fatoração do quadrado perfeito

$$a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a - b)^2$$

7. Fatore as expressões e escreva o caso de fatoração utilizado.

a) $7x^2 + 7y^2$ **7. a)** $7(x^2 + y^2)$; fator comum

b) $x^2y^2 - 169z^2$

7. b) $(xy + 13z)(xy - 13z)$; diferença de quadrados

c) $30 + 10x - 12a - 4ax$

7. c) $(10 - 4a)(3 + x)$; agrupamento

d) $5x^2 - x^3$

7. d) $x^2(5 - x)$; fator comum

e) $16a^2 - 8a + 1$

7. e) $(4a - 1)^2$; trinômio quadrado perfeito

8. Fatore as expressões algébricas:

a) $(a + 3)^2 - 9$ **8. a)** $(a + c) \cdot a$

b) $yx^3 - xy^3$

c) $y^3 - y^2 - 9y + 9$

8. c) $(y + 3)(y - 3)(y - 1)$

d) $12x^2 - 48y^2$ **8. d)** $12(x + 2y)(x - 2y)$

e) $6x^2 - 12x + 6$

8. e) $6 \cdot (x - 1)^2$

8. b) $yx(x + y)(x - y)$

9. Encontre os resultados das expressões numéricas abaixo, utilizando o caso de fatoração diferença de quadrados.

a) $2013^2 - 2010^2$

9. a) 12 069

b) $475^2 - 474^2$

9. b) 949

10. Complete as expressões algébricas, sabendo que elas representam quadrados perfeitos.

a) $4y^2 + ■ + 49$ **10. a)** $28y$

b) $■ - 2m + 1$ **10. b)** m^2

c) $9n^2 + 6n + ■$ **10. c)** 1

125

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Produtos notáveis

- Na **atividade 1**, os estudantes vão desenvolver alguns produtos notáveis. Esse é o momento oportuno para verificar se apresentam alguma dificuldade.
- Se achar conveniente, convide alguns estudantes para que realizem os itens da **atividade 2** na lousa. Incentive os demais estudantes da turma a validar os cálculos do colega. Estudantes com dificuldades podem se beneficiar dessa dinâmica.
- Na **atividade 3**, espera-se que os estudantes percebam que $x^2 + y^2$ e $x \cdot y$ são termos que aparecem quando desenvolvemos o quadrado de $x + y$.
- As **atividades 4** e **5** exploram o uso dos produtos notáveis para a realização de cálculos mentais. Nos itens das duas atividades, os estudantes devem escrever convenientemente os números de modo a obter os produtos notáveis e a favorecer o cálculo mental. Ao final das atividades, é importante que eles tenham a oportunidade de compartilhar como fizeram.

Fatoração

- Aproveite as **atividades 7** e **8** para verificar se os estudantes se apropriaram dos casos de fatoração. Se achar necessário, explore mais exemplos com a turma.
- A **atividade 9** envolve a fatoração da diferença de quadrados para a realização de cálculos mentais. Após concluírem a atividade, você pode propor aos estudantes que calculem o valor das expressões numéricas sem fatorá-las. A intenção é que percebam, aos poucos, a importância de analisar os números e as operações entre eles para verificar se podem efetuar os cálculos mentalmente ou utilizar menos passagens.

Resolução de equações do 2º grau

- A **atividade 11** envolve a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita. Incentive os estudantes a resolver algumas equações empregando mais de uma estratégia.
- Na **atividade 12**, os estudantes também vão resolver equações do 2º grau com uma incógnita. No entanto, eles precisam antes escrevê-las na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais com $a \neq 0$. Após resolverem a atividade, proponha que determinem o conjunto solução de cada uma das equações considerando o conjunto dos números naturais como conjunto universo.
- Nas **atividades 13** e **14**, os estudantes precisam traduzir, por meio de uma equação do 2º grau com uma incógnita, enunciados em língua materna. No caso da **atividade 13**, espera-se que obtenham a equação $x^2 - 3x = 10$. Já no caso da **atividade 14**, a equação esperada é $x^2 = 4x$, com $x \neq 0$.
- Na **atividade 16**, espera-se que os estudantes se recordem de que, para uma equação do 2º grau com uma incógnita ter duas raízes reais e iguais, temos que $\Delta = 0$. Assim: $p^2 - 16 = 0$ e, portanto, $p = -4$ ou $p = 4$.
- Na **atividade 17**, espera-se que os estudantes se recordem de que para uma equação do 2º grau com uma incógnita não apresentar raízes reais, temos que $\Delta < 0$. Assim: $36 - 4m < 0$ e, portanto, $m > 9$.
- Na **atividade 18**, espera-se que os estudantes se recordem de que, para uma equação do 2º grau com uma incógnita apresentar duas raízes reais, temos que $\Delta > 0$. Assim: $16 - 4k > 0$ e, portanto, $k < 4$.

Resolução de equações do 2º grau

Resolução de equações do 2º grau incompletas

Observe como resolver algumas equações do 2º grau incompletas.

a) $x^2 - 4 = 0$, considerando $U = \mathbb{R}$.

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = 2$ ou $x = -2$

Como -2 e 2 são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \{-2, 2\}$.

b) $2x^2 + 3 = 0$, considerando $U = \mathbb{R}$.

$x \cdot (2x + 3) = 0$

$x = 0$ ou $2x + 3 = 0$

$2x = -3$

$x = -\frac{3}{2}$

Como $\frac{-3}{2}$ e 0 são raízes da equação e pertencem ao conjunto universo, então $S = \left\{\frac{-3}{2}, 0\right\}$.

Resolução de equações do 2º grau completas

A **fórmula resolutiva de equações do 2º grau** $ax^2 - bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais com $a \neq 0$, é dada por:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Discriminantes

A expressão $b^2 - 4ac$ é chamada de discriminante e representada pela letra grega Δ.

Analisando a fórmula resolutiva, podemos verificar se uma equação tem ou não raízes reais e obter uma relação entre os coeficientes e as raízes (x_1 e x_2) de uma equação do 2º grau.

- $\Delta > 0 \rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- $\Delta < 0 \rightarrow$ não existem raízes reais.

11. Resolva as equações considerando $U = \mathbb{R}$.

a) $x^2 - 9 = 0$ **11. a)** $S = \{-3, 3\}$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ **11. b)** $S = \{-5, -3\}$

c) $m^2 - \sqrt{2}\,m = 0$ **11. c)** $S = \{0, \sqrt{2}\}$

d) $x^2 + 10x + 25 = 0$ **11. d)** $S = \{-5\}$

e) $x^2 - 6x - 7 = 0$ **11. e)** $S = \{-1, 7\}$

f) $16y^2 - 121 = 0$ **11. f)** $S = \left\{\frac{-11}{4}, \frac{11}{4}\right\}$

g) $3x^2 + 2x + 8 = 0$ **11. g)** $S = \varnothing$

12. Resolva as equações considerando $U = \mathbb{R}$.

a) $(x + 4)^2 + (x - 4)^2 = 160$ **12. a)** $S = \{-8, 8\}$

b) $x^2 - 11x = -28$ **12. b)** $S = \{4, 7\}$

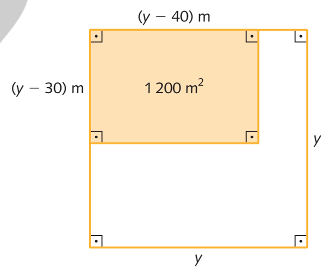
c) $4x^2 + 2x + 2 = 1$ **12. c)** $S = \varnothing$

d) $x^2 + 7x = 35 - 5x$ **12. d)** $S = \{-6 - \sqrt{71}, -6 + \sqrt{71}\}$

13. A diferença entre o quadrado de um número e o seu triplo é igual a 10. Qual é esse número? **13.** $x = 5$ ou $x = -2$

14. O quadrado de certo número diferente de zero é igual ao seu quádruplo. Que número é esse? **14.** $x = 4$

15. Uma empresa construirá um galpão em um terreno quadrado cuja medida, em metro, do comprimento do lado é indicada por y. Esse galpão será retangular com medidas de comprimento iguais a $(y - 30)$ m e $(y - 40)$ m. Sabe-se que a medida da área construída será de 1 200 m². Qual deve ser a medida y em metro? **15.** 70 m



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

16. Determine o valor de p na equação $x^2 + px + 4 = 0$, para que ela tenha duas raízes reais e iguais. **16.** $p = 4$ ou $p = -4$

17. Determine o valor de m na equação $x^2 - 6x + m = 0$, para que a equação não apresente raízes reais. **17.** $m > 9$

18. Quais valores k pode assumir na equação $x^2 - 4x + k = 0$, de forma que a equação apresente duas raízes reais? **18.** $k < 4$

Capítulo 5

Função afim

Trocando ideias

A escala de Fahrenheit (°F) é uma escala de medidas de temperatura em que 32 °F representam o ponto de fusão do gelo e 212 °F representam o ponto de ebulição da água pura sob pressão atmosférica padrão. Essa escala é muito usada em países de língua inglesa, principalmente nos Estados Unidos.

JASON REDMOND/REUTERS/ FOTOARENA

Termômetro registrando 109 °F em Seattle, Washington (EUA). Foto de 2021.

Podemos escrever a fórmula $F = 1{,}8C + 32$ para converter uma medida de temperatura C expressa em graus Celsius (°C) para uma medida de temperatura F expressa em graus Fahrenheit (°F).

Conheça mais

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a unidade-padrão de medida de temperatura é o kelvin (K).

No *site* do Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro), é possível conferir uma versão traduzida do SI.

- Quais são as medidas de temperatura de fusão do gelo e de ebulição da água em graus Celsius?
- Qual é a medida aproximada da temperatura registrada pelo termômetro da foto em graus Celsius?
- Em seu caderno, elabore um problema cuja resolução utilize a fórmula $F = 1{,}8C + 32$. Depois, troque de problema com um colega e resolva o problema proposto por ele.

Neste capítulo, vamos estudar a ideia de **função** e **função afim**.

Trocando ideias: primeiro item: 0 °C e 100 °C, respectivamente; segundo item: aproximadamente 42,8 °C; terceiro item: resposta pessoal.

Sugestão de atividade interdisciplinar

Proponha aos estudantes que pesquisem mais sobre a escala Kelvin e como ela se relaciona com a escala Celsius e a escala Fahrenheit. Depois, desafie os estudantes a criar uma escala arbitrária e relacioná-la com a escala Celsius e a escala Fahrenheit. Essas atividades podem ser realizadas em parceria com o(a) professor(a) de Ciências.

CAPÍTULO 5 – FUNÇÃO AFIM

Trocando ideias

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 3, 5 e 8 (as descrições estão na página VII).

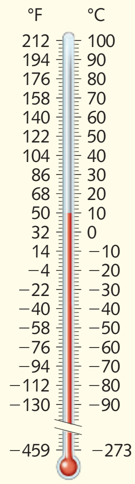
Objetivos:

- Verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a ideia de função.
- Introduzir a escala Fahrenheit (°F) de medida de temperatura.

A proposta desta seção é mobilizar conceitos e procedimentos das Unidades temáticas *Álgebra*, *Números* e *Grandezas e medidas* e relacionar conceitos de Matemática e Ciências, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **3** da BNCC. A competência geral **9** e as competências específicas **5** e **8** também têm o seu desenvolvimento favorecido, uma vez que os estudantes são colocados diante de uma situação modelada por uma função matemática e compartilham com os colegas suas respostas e problemas.

Se julgar conveniente, convide o(a) professor(a) de Ciências para falar da escala de Fahrenheit com a turma.

Proponha aos estudantes que respondam ao primeiro item. Alguns podem se valer dos conhecimentos anteriores que já têm do assunto e outros podem utilizar a fórmula $F = 1{,}8C + 32$. Valorize as duas estratégias e faça a correção coletiva. Depois, partindo das respostas dessa atividade, faça na lousa uma figura como essa:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Essa figura permite que os estudantes percebam a relação entre as medidas de temperatura nas duas escalas.

Em seguida, solicite que façam os demais itens. Antes que realizem os cálculos para responderem ao segundo item, oriente-os a observar a figura e a estimar a medida da temperatura em graus Celsius que vão obter. Os cálculos podem ser realizados com o auxílio de uma calculadora.

O último item envolve a elaboração de um problema. Alerte-os sobre a importância de o enunciado ser claro e de o contexto do problema ser verossímil.

Ideia de função

BNCC:

Habilidades EF09MA06, EF09MA07 e EF09MA08.

Objetivo:

Compreender a ideia de função.

Justificativa

Compreender a ideia de função permite aos estudantes verificar que as letras em sentenças algébricas podem assumir o papel de incógnitas ou variáveis e entender como grandezas se relacionam. Além disso, o conceito de função é uma ferramenta importante na resolução de diferentes problemas. Habilidades como **EF09MA06**, **EF09MA07** e **EF09MA08** podem ter o desenvolvimento favorecido por meio da compreensão do conceito de função.

Mapeando conhecimentos

Peça aos estudantes que imaginem uma máquina que produz 20 peças a cada minuto de funcionamento e, em seguida, observem o quadro abaixo que você pode reproduzir na lousa:

Produção da máquina				
Medida do tempo (em minuto)	1	2	3	4
Quantidade de peças	20	40	60	80

Depois, com base no quadro, proponha as seguintes questões aos estudantes: "Quantas peças serão produzidas em 5 minutos? E em 10 minutos? E em *x* minutos?" (Respostas: 100 peças; 200 peças; 20*x* peças.)

Para as aulas iniciais

Retome a situação da dinâmica inicial e verifique as dificuldades apresentadas pelos estudantes e procure saná-las. Depois, organize-os em duplas e peça que elaborem uma situação em que uma grandeza é dada em função da outra. Depois, reserve um momento para discutir as situações criadas pelas duplas.

1 Ideia de função

Acompanhe a situação a seguir.

A Feira dos Caxixis é uma das feiras de artesanato mais antigas do Brasil e acontece uma vez ao ano na cidade de Nazaré das Farinhas, no estado da Bahia. Os caxixis são miniaturas de objetos em cerâmica produzidas na região.

Um dos expositores dessa feira vende cada um de seus caxixis a R$ 10,00. Quanto uma pessoa gastaria se ela comprasse 2 peças? E se comprasse 3 peças? E se comprasse 5 peças?


MARCOS FREIRE

Feira de Caxixis, em Nazaré das Farinhas (BA). Foto de 2015.

Para responder a essas questões, podemos montar um quadro com a indicação de valor e de quantidade de peças.

Valor da compra de acordo com a quantidade de peças						
Quantidade de peças	1	2	3	4	5	6
Valor (em R$)	10,00	20,00	30,00	40,00	50,00	60,00

Observe que cada quantidade de caxixis determina um valor a ser pago pelo cliente.

Quando isso ocorre, podemos dizer que o valor que o cliente vai pagar é dado em **função** da quantidade de peças.

Quando relacionamos duas grandezas, dizemos que cada valor da primeira grandeza corresponde a um único valor da segunda grandeza e que a segunda grandeza é **função** da primeira.

Grandeza: Tudo aquilo que pode ser medido ou contado.

Lei de formação da função

Quando temos uma relação em que uma grandeza é função de outra, a correspondência entre cada valor de uma grandeza e cada valor da outra pode ser expressa por uma sentença chamada **lei de formação da função** ou **lei da função**.

Na situação anterior, se indicarmos por *y* o valor, em real, a ser pago pelo cliente e por *x* a quantidade de peças, a lei da função será:

$$y = 10 \cdot x, \text{ em que } x \text{ é um número natural.}$$

Variáveis

As grandezas envolvidas em uma relação em que uma é função da outra são chamadas de **variáveis** da situação apresentada. No caso da situação anterior, as variáveis são o valor, em real, e a quantidade de peças.

O valor a ser pago pelo cliente é a **variável dependente**, pois depende da quantidade de peças que ele deseja comprar.

A quantidade de peças é a **variável independente**, pois podemos escolher um valor para essa variável.

Após explorar a situação inicial, peça aos estudantes que deem outros exemplos de relação em que uma grandeza é função de outra, identificando a variável dependente e a variável independente.

Lei de formação da função

Comente com os estudantes que uma das maneiras de representar uma função é por meio de sua lei de formação. É importante enfatizar com a turma que as letras em uma função assumem o papel de variáveis e que eles devem estar atentos aos valores que essas letras podem assumir.

Chame a atenção para o fato de que o uso das letras *x* e *y* se dá por uma questão de hábito, e não por obrigatoriedade. Essas letras podem, perfeitamente, ser substituídas por outras, dependendo da conveniência.

Variáveis

Auxilie os estudantes a identificar as variáveis independentes e dependentes e mostre que esse é um aspecto importante. Sempre que possível, retome esses conceitos em diferentes contextos para que possam aos poucos ir se apropriando dessas ideias.

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Continua

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 Uma indústria produz embalagens biodegradáveis. Sua produção é de 600 unidades por hora.

a) Em 10 horas de trabalho, quantas embalagens biodegradáveis são produzidas? **1. a)** 6 000 embalagens

b) Para produzir 4 800 unidades de embalagens biodegradáveis, quantas horas são necessárias? **1. b)** 8 horas

c) Podemos afirmar que a quantidade de embalagens biodegradáveis produzidas é função da medida do tempo de produção? Por quê? **1. c)** Sim; porque cada hora corresponde a uma única quantidade de embalagens produzidas.

d) No caderno, escreva uma lei que relacione a quantidade de embalagens biodegradáveis com a medida do tempo, em hora. **1. d)** Exemplo de resposta: $y = 600t$, em que y indica a quantidade de embalagens produzidas e t, a medida do tempo (em hora).

2 A medida da área (A) de um quadrado é dada em função da medida de comprimento (a) do seu lado. No caderno, escreva a lei dessa função e identifique a variável dependente e a variável independente.

2. $A = a^2$; variável dependente: medida da área (A); variável independente: medida de comprimento do lado (a).

A notação $f(x)$

Analise a afirmação de Teresa.

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

A quantidade de litros (q) de combustível consumido é função da medida da distância (x) percorrida. A lei dessa função é $q = \frac{x}{12}$, em que x é um número real positivo.

A função também pode ser representada por f; quando f varia em função de uma variável x, é o mesmo que escrevermos $f(x)$. Assim, a função anterior poderia ser representada da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{x}{12} \left(\text{lemos: “}f \text{ de } x \text{ é igual a } \frac{x}{12}\text{”}\right)$$

Nessa notação, x representa a medida da distância percorrida, em quilômetro, e $f(x)$, a quantidade de litros de combustível consumido.

Valor de uma função

Na situação anterior, a quantidade de litros de combustível consumido de acordo com a medida da distância x percorrida, em quilômetro, foi representada por $f(x) = \frac{x}{12}$, em que x é um número real positivo.

Desse modo, para calcular a quantidade de litros de combustível consumido para o automóvel percorrer 108 km, basta substituir x por 108 na lei da função e efetuar a operação indicada:

$$f(108) = \frac{108}{12}$$

$$f(108) = 9$$

Isso significa que, quando x é igual a 108, o **valor da função** é 9.

Logo, o automóvel consumiu 9 litros de combustível para percorrer 108 km.

A notação $f(x)$

Ao introduzir a notação $f(x)$, verifique se os estudantes entenderam que ela substitui a variável dependente. É importante destacar que a função e a variável independente podem ser representadas por quaisquer letras.

Valor de uma função

Após explorar o cálculo de $f(108)$ com a turma, peça que calculem $f(96)$, $f(114)$ e $f(100{,}8)$. Sempre que possível, no cálculo de valores de uma função, proponha que a variável independente não assuma só valores inteiros, mas também fracionários e irracionais, para que o cálculo com esses números seja sempre revisitado.

Continuação

(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Representação gráfica de uma função

A mobilização, por parte dos estudantes, dos diferentes registros de um mesmo objeto matemático contribui para que se apropriem dele cada vez que se dão conta dos elementos que o caracterizam; por isso, é importante estudar a representação gráfica de uma função.

É importante salientar que nem todo gráfico representa uma função. Comente com a turma que, na prática, imaginamos o traçado de retas paralelas ao eixo *y* e verificamos se cada reta que intercepta o gráfico o faz em um único ponto. Em caso positivo, o gráfico representa uma função. Se possível, mostre um exemplo de gráfico que não represente uma função para eles.

Comente com os estudantes que o gráfico de uma função ajuda a analisar como uma grandeza depende da outra. Ao explorar esse conteúdo, incentive-os a identificar o eixo da variável dependente e o eixo da variável independente, a analisar os intervalos em que a função é negativa, nula ou positiva e também os intervalos em que ela é crescente ou decrescente. Também é útil que eles percebam que algumas representações gráficas são linhas contínuas e outras são apenas pontos alinhados ou não.

Sugestão de atividade extra

Desenhe uma reta numérica na lousa e marque nela apenas os valores inteiros, de forma que os espaços entre os valores fiquem relativamente grandes. Imprima e recorte valores variados (incluindo raízes, frações e números na forma decimal), a fim de que os estudantes os fixem com fita adesiva na lousa, localizando os pontos que representam esses números na reta numérica. Deixe os papéis com os valores sobre uma mesa e peça aos estudantes que, um a um, peguem um desses valores e coloquem no local que consideram o mais adequado. Ao final, verifique com a turma se todos os valores estão adequadamente posicionados.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

3 A lei de formação de uma função f é $f(x) = 5x + 2$. Calcule:

a) $f(0)$ **3. a)** 2

b) $f(-1)$ **3. b)** –3

c) $f(-2)$ **3. c)** –8

d) $f\left(\frac{3}{4}\right)$ **3. d)** $\frac{23}{4}$

4 Dada a lei de uma função $f(x) = 5x - 2$, determine o valor de x de modo que:

a) $f(x) = 0$ **4. a)** $\frac{2}{5}$

b) $f(x) = 3$ **4. b)** 1

c) $f(x) = -10$ **4. c)** $-\frac{8}{5}$

d) $f(x) = 13$ **4. d)** 3

5 A lei de uma função f é $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

Calcule:

a) $\dfrac{f(0) - f(1)}{f(2)}$ **5. a)** –2

b) $\dfrac{f(2) \cdot f(1)}{f(0)}$ **5. b)** $\frac{1}{12}$

6 Ana elaborou o quadro a seguir.

x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
f(x)	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

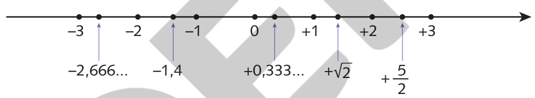
a) Qual é a lei de formação da função f que relaciona os valores da segunda e da primeira linha desse quadro? **6. a)** $f(x) = 2x$

b) Calcule o valor de $f(x)$ para $x = -\frac{1}{5}$. **6. b)** $-\frac{2}{5}$

c) Qual é o valor de x quando $f(x) = \frac{7}{2}$? **6. c)** $\frac{7}{4}$

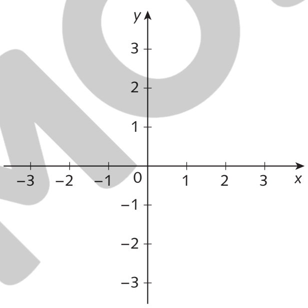
Representação gráfica de uma função

Cada número real tem um ponto correspondente na **reta real** e cada ponto da reta corresponde a um número real. Observe.



Podemos ampliar essa noção, representando um par de números reais por pontos de um plano. Para isso, construímos um **sistema de coordenadas cartesianas** ou **plano cartesiano**.

Esse sistema consiste em duas retas reais perpendiculares (**eixos**), cujo ponto de intersecção corresponde à **origem** do sistema.

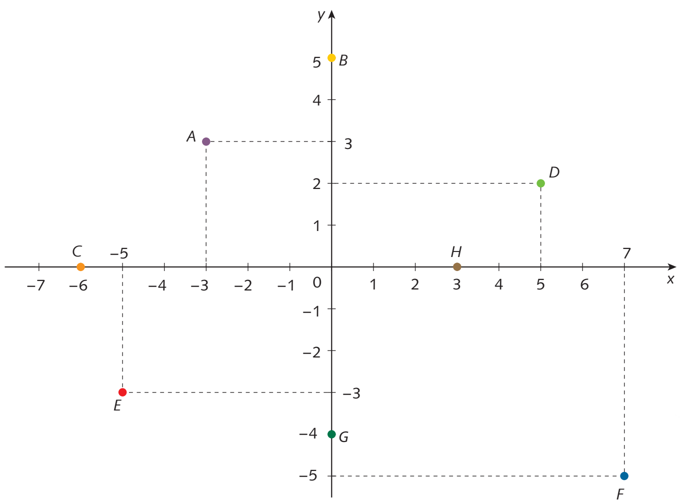


ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Temos que:

- o eixo *x* é chamado de **eixo das abscissas**;
- o eixo *y* é chamado de **eixo das ordenadas**;
- o ponto de coordenadas (0, 0) é a origem do plano cartesiano.

Observe como podemos representar os pontos $A(-3, 3)$; $B(0, 5)$; $C(-6, 0)$; $D(5, 2)$; $E(-5, -3)$; $F(7, -5)$; $G(0, -4)$; e $H(3, 0)$ no plano cartesiano.

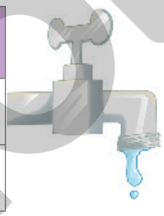


Toda situação que permite expressar uma grandeza em função da outra pode ser representada em um plano cartesiano na forma de um gráfico. Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

A quantidade (q) de água desperdiçada por uma torneira gotejando lentamente é função da medida de tempo (t). Analise alguns valores de q e t.

Quantidade de água desperdiçada por uma torneira gotejando lentamente				
t (em minuto)	0	1	1,5	3
q (em mililitro)	0	7	10,5	21

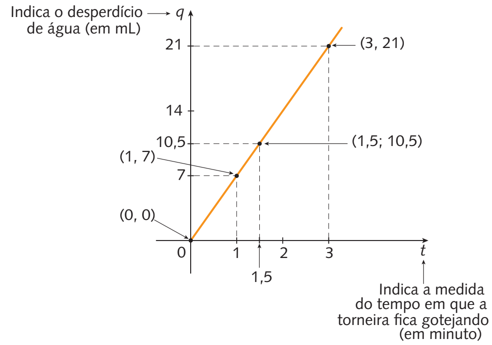


Cada par ordenado pode ser representado por um ponto em um plano cartesiano. Nesse exemplo, o primeiro número do par ordenado indica a medida de tempo (em minuto), e o segundo número, a quantidade de água desperdiçada pela torneira (em mililitro).

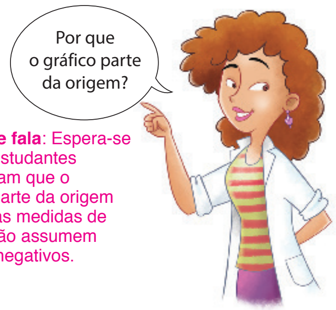
Para retomar o conceito de par ordenado no plano cartesiano, desenhe um plano cartesiano na lousa, indicando apenas os valores inteiros do eixo. Em seguida, indique um par ordenado para cada estudante e solicite a todos que façam a marcação do ponto correspondente no plano cartesiano na lousa.

Em cada uma das situações apresentadas, os estudantes devem determinar a lei da função que relaciona as variáveis envolvidas. Assim, na situação **1**, teremos uma função *f*, tal que $f(t) = 7t$, em que *t* é um número real maior ou igual a zero.

E na situação **2**, temos uma função *f*, tal que $f(t) = \frac{1}{x}$, em que *x* é um número real diferente de zero.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



Balão de fala: Espera-se que os estudantes respondam que o gráfico parte da origem porque as medidas de tempo não assumem valores negativos.

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Note que os pontos obtidos estão alinhados. Isso acontece porque a quantidade de água desperdiçada é diretamente proporcional à medida do tempo que a torneira fica gotejando. Além disso, como a medida de tempo pode assumir qualquer valor real positivo ou nulo, o gráfico dessa função será uma linha contínua que parte da origem, passa pelos pontos (1, 7), (1,5; 10,5) e (3, 21), e continua indefinidamente.

▸ Qual é a lei da função que o gráfico representa? **Primeiro item**: $q = 7t$, em que *t* é um número real maior ou igual a zero.

Situação 2

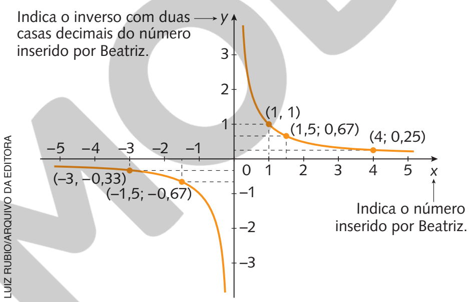
Em uma planilha eletrônica, Beatriz descobriu uma maneira de calcular o inverso, com duas casas decimais, de qualquer número real, diferente de zero, inserido nela. Observe alguns números que Beatriz inseriu na planilha e os números correspondentes calculados.

	A	B	C	D	E	E
1	**Resultados obtidos pela planilha de acordo com os números inseridos**					
2	Número inserido (*x*)	−3	−1,5	1	1,5	4
3	Resultado (*y*)	−0,33	−0,67	1	0,67	0,25

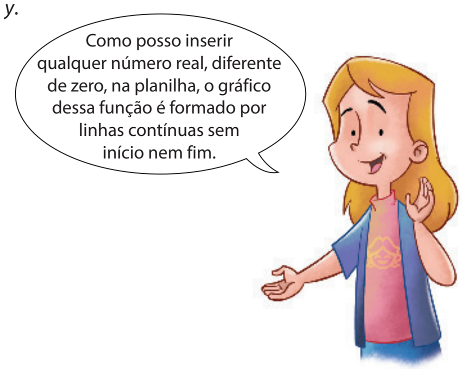
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Cada par de números (número inserido, resultado) forma um par ordenado (*x*, *y*), que pode ser representado por um ponto em um plano cartesiano.

Em seguida, Beatriz usou o mesmo programa em que fez a planilha e solicitou que fosse representado o gráfico da função que relaciona *x* e *y*.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

▸ Qual é a lei da função que o gráfico representa? **Segundo item**: $y = \frac{1}{x}$, em que *x* é um número real diferente de zero.

132

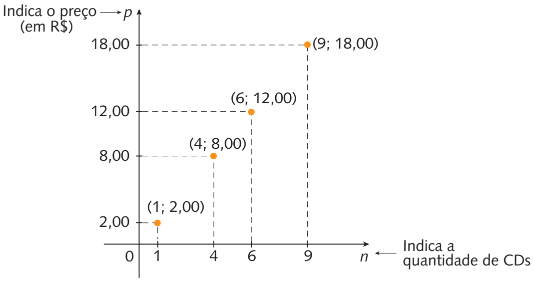
Situação 3

Uma loja vende CDs de acordo com o quadro a seguir.

Preço de acordo com a quantidade de CDs				
Quantidade de CDs (n)	1	4	6	9
Preço (em R$) ($p$)	2,00	8,00	12,00	18,00

Nesse exemplo, também podemos representar os pares ordenados (n, p) em um plano cartesiano.

Note que o preço é diretamente proporcional à quantidade de CDs. Além disso, a quantidade de CDs só pode ser um número natural. Assim, no eixo das abscissas representamos apenas números naturais.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

▸ Qual é a lei da função que o gráfico representa?
Item: $p = 2n$ em que n é um número natural maior ou igual a 1.

Atividades

7. b) Gráfico A. Espera-se que os estudantes percebam que o gráfico dessa função não é uma linha contínua, pois a quantidade de fotos só pode ser representada por números naturais.

Faça as atividades no caderno.

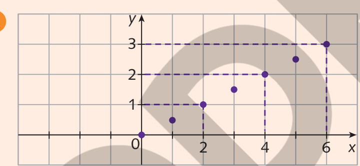
7 Uma loja de fotografias está fazendo uma promoção para a impressão de fotos.

GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

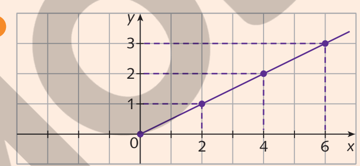
a) Qual é a lei da função que relaciona o preço (y) a pagar e a quantidade (x) de fotos impressas? **7. a)** $y = 0{,}5x$, com $x \in \mathbb{N}$

b) Qual dos gráficos a seguir corresponde à função encontrada no item **a**? Por quê?

A



B



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

8 Sejam x e y duas grandezas inversamente proporcionais. Sabe-se que, quando o valor de x é 3, o valor de y é 5. Determine a lei da função que relaciona o valor de y com o valor de x. **8.** $y = \frac{15}{x}$

Observando o gráfico apresentado para a situação **3**, peça aos estudantes que indiquem mais um par ordenado pertencente ao gráfico. Verifique com eles se o ponto está correto; para isso, devem usar a lei da função f, tal que $f(n) = 2n$, em que n é um número natural maior ou igual a 1.

Comente com os estudantes que, se a função traduz uma situação real, então os valores que a variável independente pode assumir devem ser coerentes com essa situação.

- Na **atividade 10**, se julgar interessante, peça aos estudantes que compartilhem com a turma quais estratégias utilizaram para determinar qual dos gráficos representa a função *f*.

Lendo e aprendendo

BNCC:

- Competências gerais 2 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 1, 5 e 8 (as descrições estão na página VII).
- Habilidade EF09MA06.

Objetivos:

- Desenvolver a competência leitora.
- Identificar e construir o gráfico de funções.
- Refletir sobre o isolamento social durante a pandemia de coronavírus.

Temas contemporâneos transversais:

Peça aos estudantes que leiam individualmente o texto da seção. Depois, organize uma roda de conversa com eles para falar sobre a pandemia do novo coronavírus que assolou o Brasil e o mundo nos últimos anos. É importante enfatizar com a turma que o texto é do final de 2020 e que o número de infectados e óbitos continuou subindo nos meses seguintes. Se possível, traga dados atualizados para enriquecer essa conversa inicial.

9 Em Geografia, denomina-se densidade demográfica a medida expressa pela razão entre a população de uma região e a medida da área correspondente.

$$\boxed{d = \frac{p}{a}}$$

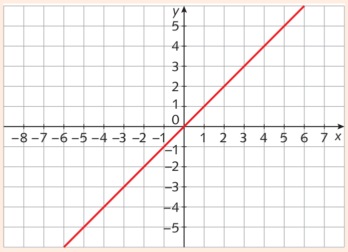
$d \longrightarrow$ densidade $\quad p \longrightarrow$ população $\quad a \longrightarrow$ medida da área

Densidade demográfica e medida da área são grandezas direta ou inversamente proporcionais? E as grandezas densidade demográfica e população?

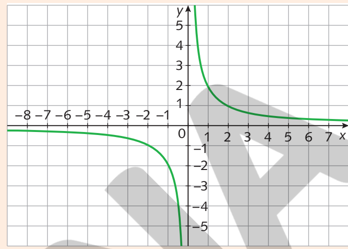
9. inversamente proporcionais; diretamente proporcionais

10 Qual dos gráficos seguintes pode representar a função *f* tal que $f(x) = \frac{2}{x}$, com $x > 0$.

a)

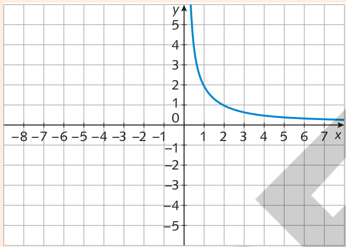


c)

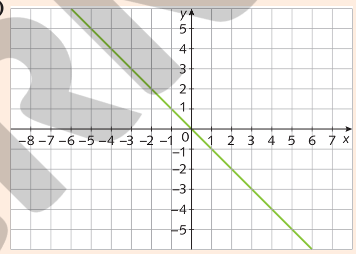


10. alternativa **b**

b)



d)



Lendo e aprendendo

Coronavírus e seu crescimento

Nos últimos meses, muito se tem ouvido falar a respeito do aumento do número de casos do novo coronavírus. E, em meio a tantas notícias sobre a pandemia, a expressão “crescimento exponencial” tornou-se bastante comum. Como todas as reportagens mostram, a expressão crescimento exponencial refere-se a um aumento acentuado no número de casos. [...]

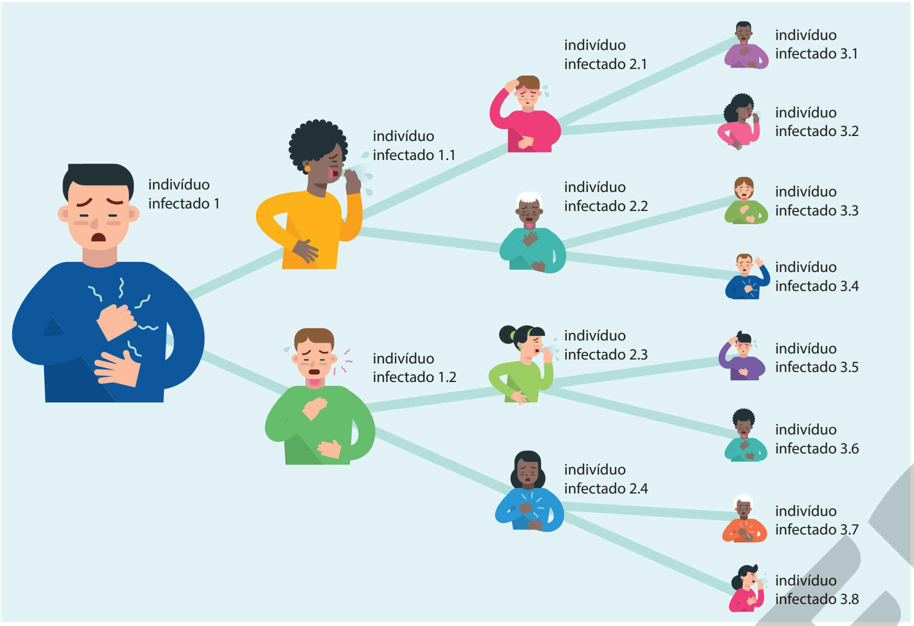
Coronavírus é uma família de vírus que causam infecções respiratórias. Em dezembro de 2019, a Organização Mundial da Saúde (OMS) foi alertada sobre vários casos de pessoas infectadas pelo novo coronavírus na China, causador da doença Covid-19. Com o fluxo internacional de pessoas, em pouco tempo o vírus se espalhou para o mundo e alcançou 189 países.

[...]

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Em epidemias de fácil contágio, como ocorre com o coronavírus, cada pessoa pode transmitir o vírus para diversas outras pessoas. Se toda a população for suscetível ao contágio e se cada infectado contagiar *m* novos casos em média, sendo *m* uma constante maior do que 1, o crescimento é exponencial.

Por exemplo, se cada indivíduo infectado transmite a doença para duas pessoas, $m = 2$, temos o seguinte esquema de propagação:



MÁRIO KANNO/ARQUIVO DA EDITORA

Em notação matemática, o esquema desse exemplo fica $f(t)=2^t$, em que *t* representa o tempo e $f(t)$, o número de infectados no instante *t* [...].

Para saber a relação entre o tempo e o número de infectados, os matemáticos propõem modelos matemáticos que têm o objetivo de retratar a situação real.

[...]

É por meio dos resultados obtidos com os modelos matemáticos que os pesquisadores podem prever a eficiência do isolamento social e de medidas de proteção e a porcentagem de indivíduos que devem ser vacinados para erradicar uma doença. Desse modo, a Matemática ajuda o governo a tomar decisões mais assertivas em relação ao combate ao novo coronavírus.

PEREIRA, A. C.; TEODORO, G. S.; FERREIRA, R. E.; FILHO, H. G. F. Coronavírus e seu crescimento. **Portal da Ciência**, Universidade Federal de Lavras, 2 de dezembro de 2020. Disponível em: https://ciencia.ufla.br/todas-opiniao/677-coronavirus-e-seu-crescimento. Acesso em: 7 jun. 2022.

Atividades

1. Responda às questões no caderno.

a) Quando o texto anterior foi publicado? **1. a)** 2 de dezembro de 2020.

b) O que é coronavírus? **1. b)** É uma família de vírus que causam infecções respiratórias.

c) Qual é o nome da doença causada pelo novo coronavírus? **1. c)** Covid-19

d) Como os modelos matemáticos podem ajudar a entender doenças epidemiológicas como a Covid-19?

1. d) Exemplo de resposta: Com os modelos matemáticos, é possível saber a relação entre a medida do tempo e o número de infectados por essas doenças e, dessa maneira, é possível, por exemplo, planejar medidas de proteção e prever a quantidade de indivíduos que devem ser vacinados para erradicar a doença.

Reproduza na lousa o esquema de propagação e explore com eles a função $f(t) = 2^t$, em que *t* representa a medida de tempo e $f(t)$, o número de infectados no instante *t*. Peça que considerem que *t* representa a medida de tempo em minutos e diga que, no instante $t = 0$, havia uma pessoa infectada. Depois, faça as seguintes perguntas: “Qual é o valor da função para $t = 1$? E para $t = 2$? E para $t = 5$? O que isso significa?”. Espera-se que os estudantes concluam que o valor da função para $t = 1$ é 2, que para $t = 2$ é 4 e que para $t = 5$ é 32 e que isso significa que com 1 minuto havia 2 pessoas infectadas, com 2 minutos havia 4 e, com 5 minutos, havia 32. Ajude-os a interpretar isso por meio do esquema de propagação. Essa exploração inicial poderá ajudá-los na realização das **atividades 2** e **3** que serão propostas na sequência.

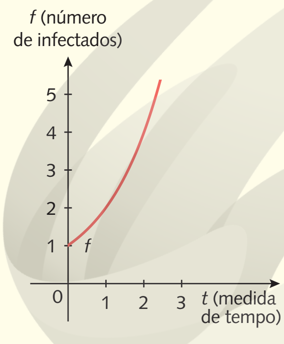
A natureza do texto da seção e as propostas sugeridas neste manual favorecem o desenvolvimento da competência geral **2** e da competência específica **1** da BNCC, pois desperta nos estudantes a curiosidade intelectual e ajuda-os a perceber como a Matemática contribui para solucionar problemas científicos. A competência específica **5** da BNCC também tem o seu desenvolvimento favorecido, uma vez que os estudantes verificam como ferramentas matemáticas podem ser utilizadas para modelar problemas cotidianos.

- Na **atividade 1**, os estudantes vão responder a algumas questões sobre o texto. Quando terminarem, faça a correção coletiva. Complemente a resposta do **item c**, explicando que Covid-19 é o nome oficial da doença, definido pela Organização Mundial da Saúde (OMS). O termo é uma abreviação: “co” vem de coronavírus; “vi”, de vírus; e o “d” no final vem de *disease*, doença em inglês. O número 19 se refere a 2019, ano em que a doença surgiu. Você pode ampliar a proposta desta atividade e solicitar aos estudantes que elaborem suas próprias questões para que outro colega as responda.

- Na **atividade 2**, os estudantes devem identificar o gráfico da função $f(t) = 2^t$, em que t é um número real. Eles podem utilizar diferentes estratégias. Uma delas é primeiro identificar em que ponto o gráfico da função intercepta o eixo das ordenadas. Para isso, basta calcular o valor da função para $t = 0$. Como $f(0) = 2^0 = 1$, então a função intercepta o eixo das ordenadas no ponto correspondente ao par ordenado (0, 1) e, portanto, os gráficos dos **itens c** e **d** estão descartados. Temos que $f(1) = 2^1 = 2$ e, pelo gráfico do **item b**, $f(1) < 2$; portanto, o gráfico do **item b** não é o correto. Logo, o gráfico da função $f(t) = 2^t$, em que t é um número real é o do **item a**.

Reserve um momento para que os estudantes compartilhem suas estratégias. Se achar conveniente, informe-lhes que os gráficos dos **itens b**, **c** e **d** correspondem, respectivamente, às funções $g(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t$, $h(t) = -2^t$ e $q(t) = -\left(\frac{1}{2}\right)^t$, com t pertencente aos números reais.

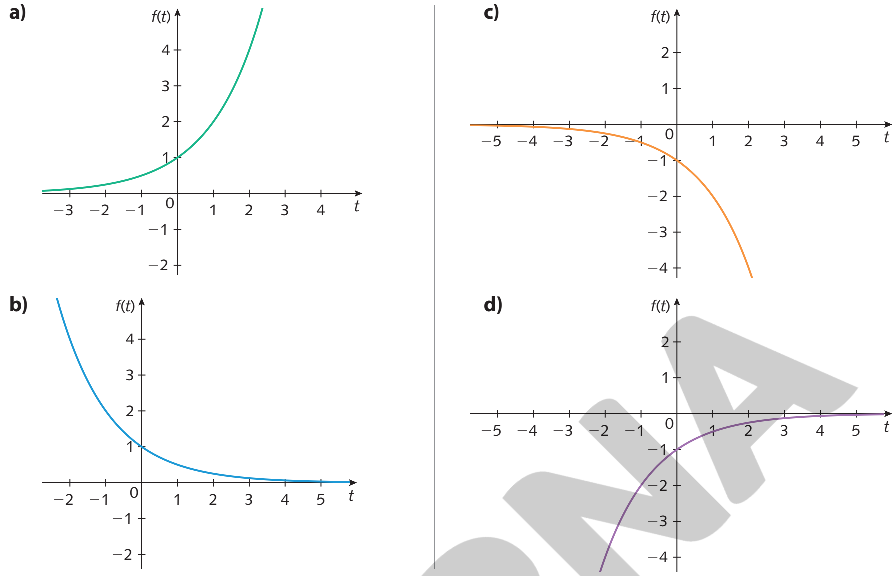
- Na **atividade 3**, os estudantes vão representar graficamente a função $f(t)=2^t$, em que t representa a medida de tempo e $f(t)$, o número de infectados no instante t. Eles devem primeiro reconhecer que o gráfico que vão fazer é diferente do gráfico identificado na **atividade 2**, porque, como t representa a medida de tempo, então t é um número real maior ou igual a zero. Assim, o gráfico que vão fazer corresponde ao "pedaço" do gráfico da alternativa **a** da **atividade 2** que parte do ponto correspondente ao par ordenado (0, 1) e continua indefinidamente. Observe:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Lendo e aprendendo

2. Qual destes gráficos é da função $f(t) = 2^t$, em que t é um número real? **2.** alternativa **a**.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

3. Em seu caderno, represente o gráfico da função descrita no texto. **3.** Resposta em *Orientações*.

4. Os cientistas sabiam que, se nada fosse feito, a quantidade de pessoas infectadas com o novo coronavírus continuaria aumentando para números gigantescos. Para frear a transmissão do vírus, foi adotada uma série de medidas, entre elas o isolamento social. Muitas pessoas utilizaram as redes sociais para fazer um apelo aos seus seguidores para não saírem de casa, enquanto outras fizeram o contrário e lembraram que nem todo mundo tinha o privilégio de se isolar. O que você pensa sobre o assunto? No caderno, escreva um pequeno texto com sua opinião. Depois, compartilhe seu texto e discuta o assunto com os colegas. **4.** Resposta pessoal.

5. No período da pandemia de Covid-19, foram publicadas diversas *fake news* sobre o assunto. Alguma vez você desconfiou de uma publicação divulgada na TV ou na internet? Você checou a fonte dessa publicação? Como você fez para saber se era verdadeira ou falsa?

Fake news: Publicações com informações comprovadamente falsas que costumam viralizar nas redes sociais.

2 Função afim

5. Respostas pessoais. Espera-se que os estudantes respondam que verificam se a publicação tem data, se a fonte é confiável; que leem toda a publicação e não apenas a manchete ou o título; que pesquisam sobre o autor da publicação e também sobre as informações divulgadas em outras fontes.

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Uma bomba retira água de uma cisterna e a lança em uma caixa-d'água com vazão de 20 L de água por minuto. O quadro a seguir mostra a relação da quantidade de litros de água despejada na caixa-d'água em função da medida do tempo.

- Antes de propor a **atividade 4**, convém explicar aos estudantes a distinção entre quarentena e isolamento social. Diga que quarentena é o período em que pessoas ou animais com alguma doença ou suspeita de doença são colocados em isolamento até que não haja mais risco de transmissão. A quarentena ocorre quando a pessoa teve contato direto com alguém doente; portanto, com grandes chances de ter contraído o vírus. Já o isolamento social é uma medida de prevenção, em que ficar em casa é uma recomendação, e não uma ordem. Comente que, no isolamento social, alguns serviços e lojas são fechados, e só funciona o que é considerado essencial, como supermercados, *pet shops*, farmácias, entre outros.

Depois, deixei-os à vontade para refletirem sobre a pergunta feita e para produzirem o texto. Quando terminarem, você pode promover um debate entre os estudantes que são a favor e os que são contra o isolamento social. Nesse tipo de situação, oriente-os a respeitar a opinião dos colegas e a escutá-los com atenção e empatia para que, dessa forma, a competência geral **9** e a competência específica **8** da BNCC tenham o seu desenvolvimento favorecido.

Medida do tempo (x)	Quantidade de litros (y)
1 min	20 L
2 min	40 L
3 min	60 L
4 min	80 L

A lei da função que relaciona a quantidade de litros de água despejada (y) com a medida do tempo (x), em minuto, de funcionamento da bomba pode ser representada por:

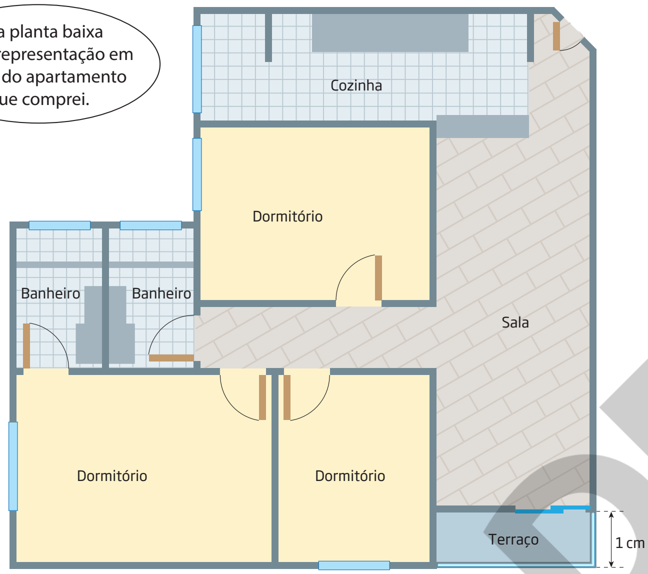
$y = 20x$, em que x é um número real positivo maior ou igual a zero.

Note que os valores de y são diretamente proporcionais aos valores de x.

Situação 2

Mônica comprou um apartamento, ainda em construção, na cidade de Caruaru, em Pernambuco. Confira a planta baixa desse apartamento.

CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA



Escala 1 : 100

LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Escala é a razão entre a medida do comprimento que está na representação gráfica e a medida correspondente do comprimento real, expressos em uma mesma unidade de medida.

A planta baixa foi feita com escala de 1 : 100 ou $\frac{1}{100}$ (lemos: "1 para 100"). Isso significa que cada centímetro medido na planta corresponde a 100 centímetros de comprimento no local real, ou seja, a 1 m na realidade.

Medida de comprimento na planta baixa (x)	Medida de comprimento real no apartamento (y)
1 cm	100 cm
2 cm	200 cm
3 cm	300 cm
4 cm	400 cm

Os valores de y são diretamente proporcionais aos valores de x. A lei da função que mostra a correspondência entre y e x é $y = 100x$, em que x é um número real maior ou igual a zero.

Após a apresentação da situação **1**, questione os estudantes: se o número de litros fosse 30 em vez de 20 para cada minuto, como seria a lei da função que relaciona a quantidade de litros (y) de água despejada com a medida de tempo (x) em minuto? Resposta: $y = 30x$.

Depois de explorar a situação **2**, proponha aos estudantes que meçam as dimensões dos cômodos que compõem suas casas e reproduzam a planta baixa da construção, definindo uma escala adequada.

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Função afim

BNCC:

Habilidades EF09MA06 e EF09MA08.

Objetivos:

- Compreender o conceito de função afim.
- Reconhecer, construir e analisar o gráfico de uma função afim.
- Compreender a ideia de zero de uma função afim e determiná-lo algebricamente e graficamente.

Justificativa

Diferentes situações reais podem ser modeladas por meio de funções afim; por isso, é importante compreender esse conceito, bem como reconhecer, construir e analisar o gráfico desse tipo de função. Relações de proporcionalidade direta entre grandezas podem ser traduzidas por um caso particular de função afim, a função linear, possibilitando a resolução de diversos problemas e favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA08**.

Mapeando conhecimentos

Reproduza a **atividade 18** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e peça aos estudantes que a realizem. Observe como procedem para associar os valores dos quadros aos gráficos e incentive-os a justificar suas respostas. Você pode propor as seguintes questões: "O que esses gráficos têm em comum? Por que todos eles partem da origem do plano cartesiano?". Após concluírem a atividade, desafie-os a determinar a lei da função que corresponde a cada um dos gráficos da atividade.

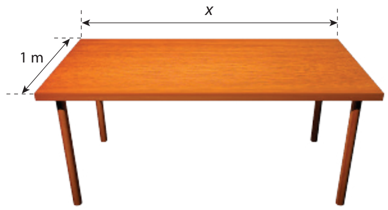
Para as aulas iniciais

Faça a correção coletiva da **atividade 18** e recorde como representar a relação entre os valores de grandezas no plano cartesiano. Você pode explorar com os estudantes o texto e o exemplo trazidos na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Em relação às leis das funções, espera-se que eles tenham concluído que as leis das funções correspondentes aos gráficos I, II e III são, respectivamente: $y = \frac{x}{2}$, $y = \frac{9}{2}x$ e $y = 3x$, com x sendo um número real maior ou igual a zero.

Pergunte aos estudantes se, nas leis associadas às situações **1**, **2** e **3**, x pode ser qualquer número real. Eles devem concluir que não, porque x representa uma medida nas três situações; portanto, o valor de x não pode ser negativo.

Situação 3

Uma marcenaria fabrica mesas com medida da largura fixa de 1 m e medida do comprimento variada.



TKEMOT/SHUTTERSTOCK

O quadro a seguir mostra a relação entre as medidas do comprimento e as medidas de perímetro das mesas fabricadas.

Medida do comprimento (x)	Medida do perímetro (y)
1 cm	4 cm
2 cm	6 cm
3 cm	8 cm
4 cm	10 cm
5 cm	12 cm

A medida do perímetro (y) dessa mesa é função da medida do comprimento (x) e pode ser expressa por: $y = 2x + 2$, em que x é um número real positivo.

As leis das funções que correspondem às situações 1, 2 e 3 são do tipo $y = ax + b$, em que a e b são números reais.

Função afim é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real.

Observe alguns exemplos.

a) $f(x) = 2x + 5$, em que $a = 2$ e $b = 5$

b) $f(x) = -7x$, em que $a = -7$ e $b = 0$ → Nos casos em que $a \neq 0$ e $b = 0$, chamamos a função afim de **função linear**, que pode ser representada por $f(x) = ax$.

c) $f(x) = -5$, em que $a = 0$ e $b = -5$ → Nos casos em que $a = 0$, chamamos a função afim de **função constante**.

d) $f(x) = \frac{x + 1}{3}$ → Essa lei também pode ser escrita assim: $f(x) = \frac{1x}{3} + \frac{1}{3}$, em que $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

Observação

As leis a seguir não representam funções afins, pois não podem ser escritas na forma $y = ax + b$, em que a e b são número reais.

- $y = 2x^2 + 1$
- $y = \frac{1}{x} - 3$

138

Gráfico da função afim

O gráfico que representa uma função afim é sempre uma reta não perpendicular ao eixo x. Analise alguns exemplos.

a) Vamos construir o gráfico da função f tal que $f(x) = 3x + 2$, em que x é qualquer número real.

Inicialmente escolhemos valores arbitrários para x e calculamos os valores de y correspondentes para obter alguns pares ordenados.

Para $x = -3$, temos: $f(-3) = 3 \cdot (-3) + 2 = -7$

Para $x = -2$, temos: $f(-2) = 3 \cdot (-2) + 2 = -4$

Para $x = -1$, temos: $f(-1) = 3 \cdot (-1) + 2 = -1$

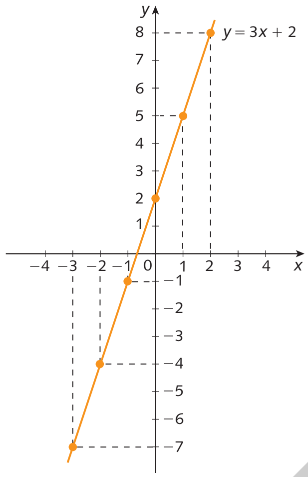
Para $x = 0$, temos: $f(0) = 3 \cdot 0 + 2 = 2$

Para $x = 1$, temos: $f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

Para $x = 2$, temos: $f(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

x	**f (x) = y**	**(x, y)**
–3	–7	(–3, –7)
–2	–4	(–2, –4)
–1	–1	(–1, –1)
0	2	(0, 2)
1	5	(1, 5)
2	8	(2, 8)

Representamos no plano cartesiano os pontos correspondentes aos pares ordenados encontrados e traçamos a reta que passa por esses pontos.



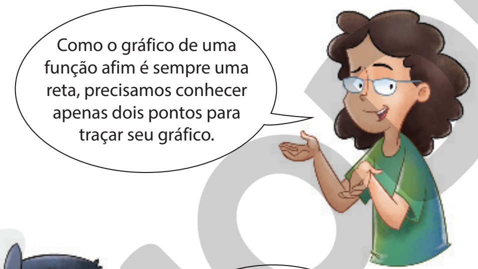
ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

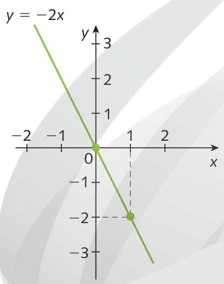
b) Vamos construir o gráfico da função g tal que $g(x) = -2x$, em que x é qualquer número real.

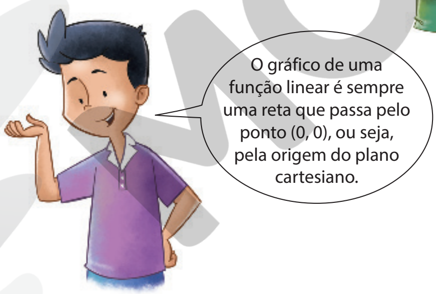
Para $x = 0$, $g(0) = -2 \cdot 0 = 0$

Para $x = 1$, $g(1) = -2 \cdot 1 = -2$

x	**g(x) = y**	**(x, y)**
0	0	(0, 0)
1	–2	(1, –2)







ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

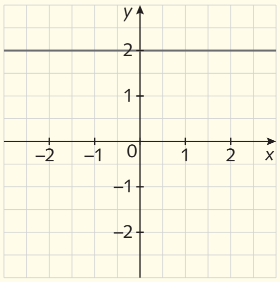
Gráfico da função afim

Pergunte aos estudantes: “Por que a função g de lei $g(x) = -2x$ é chamada de função linear?”. Espera-se que eles percebam que a função linear é um caso particular da função afim $f(x) = ax + b$, em que $b = 0$. Assim, a reta que representa a função g passará pela origem do plano cartesiano, o ponto (0, 0).

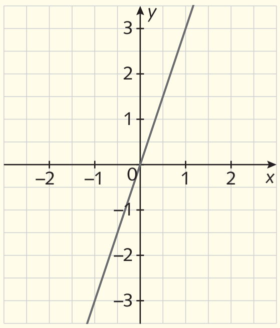
Pergunte aos estudantes: “Por que a função h de lei $h(x) = -3$ é chamada de função constante?”. Espera-se que percebam que ela é considerada constante porque, para qualquer valor de x, a função sempre resultará em -3 (já que, na lei da função, $a = 0$).

- Respostas da **atividade 12**:

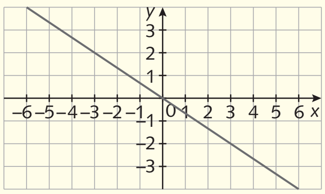
a)



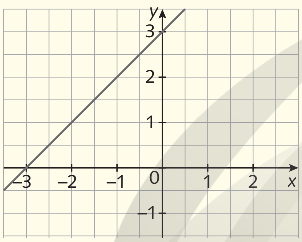
b)



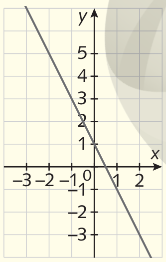
c)



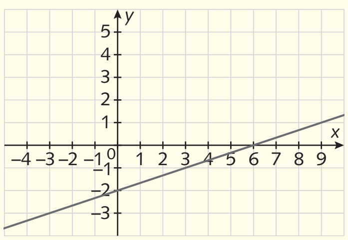
d)



e)



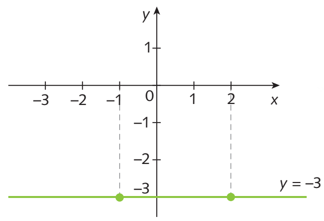
f)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

c) Vamos construir o gráfico de h, dada por $h(x) = -3$, em que x é qualquer número real.

x	$h(x) = y$	(x, y)
-1	-3	$(-1, -3)$
2	-3	$(2, -3)$



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

Faça as atividades no caderno.

11 Identifique as leis de funções afim.

a) $y = x - 5$

b) $y = 4 - 2x$

c) $y = 1$

d) $y = x^2 - 5x + 6$

e) $y = -4 - x$

f) $y = x^2$

11. alternativas **a**, **b**, **c**, **e**

12 Construa o gráfico das funções definidas pelas leis a seguir.

a) $y = 2$

b) $y = 3x$

c) $y = -\frac{2}{3}x$

d) $y = x + 3$

e) $y = 1 - 2x$

f) $y = \frac{1}{3}x - 2$

12. Respostas em *Orientações*.

13 O quadro a seguir relaciona a medida do tempo (t), em minuto, que uma válvula de saída de água fica aberta e a medida do volume (V), em litro, de água despejada na piscina.

t (em min)	V (em L)
1	60
2	120
3	180
4	240

De acordo com o quadro, responda às questões.

a) Qual é a lei da função que relaciona a medida do volume (V), em litro, de água despejada na piscina e a medida do tempo (t), em minuto, que a válvula fica aberta?

b) Qual é a quantidade de água contida no interior da piscina após 10 minutos? **13. b)** 600 L

c) Qual é a medida do tempo necessária para que a piscina fique com exatamente 900 L? **13. c)** 15 minutos

13. a) $V = 60 \cdot t$, em que t é um número real positivo.

14 Copie em seu caderno as afirmações verdadeiras. **14.** alternativas **a**, **d**

a) Função afim é toda função cuja lei pode ser escrita na forma $y = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real.

b) A função f tal que $f(x) = \frac{2}{x}$ é linear.

c) A função dada por $y = x\sqrt{2}$ não é afim.

d) O gráfico da função dada por $g(x) = 6$ para qualquer x real é uma reta paralela ao eixo x.

e) O gráfico da função afim dada pela lei $r(x) = -x + 2$ é uma reta que passa pela origem.

15 Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções h, m, f, g, p e q e determine as coordenadas cartesianas do ponto de encontro, entre:

a) $h(x) = x$ e $m(x) = -x$

b) $f(x) = -x + 3$ e $g(x) = 2x - 3$

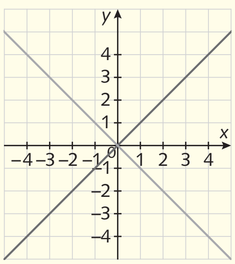
c) $p(x) = \frac{x}{2} + 1$ e $q(x) = x - 1$

15. Respostas em *Orientações*.

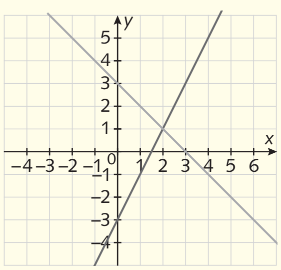
140

- Respostas da **atividade 15**:

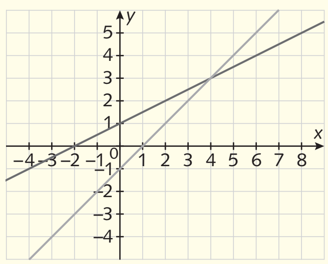
a) $P(0, 0)$



b) $P(2, 1)$



c) $P(4, 3)$



Zero de uma função afim

Em toda função f, cada valor de x em que $f(x) = 0$ é chamado de **zero da função**.

O zero de uma função afim dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, será um único número x, tal que $ax + b = 0$. Resolvendo essa equação, obtemos $x = -\frac{b}{a}$.

Vamos, por exemplo, determinar o zero da função dada por $y = 2x - 2$.

Quando $y = 0$, temos:

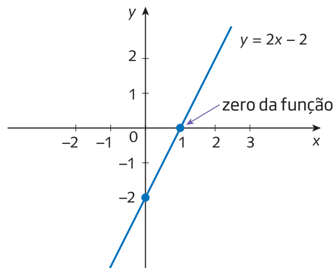
$$2x - 2 = 0$$
$$2x = 2$$
$$x = 1$$

Portanto, 1 é o zero dessa função.

Graficamente, o zero de uma função afim $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo x.

Observe o gráfico da função $y = 2x - 2$.

x	y	(x, y)
0	–2	(0, –2)
1	0	(1, 0)



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Como podemos observar no gráfico, a reta intercepta o eixo das abscissas no ponto (1, 0); dessa maneira, o valor 1 do eixo das abscissas é tido como zero da função.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

16 Determine o zero destas funções afim.

a) $y = -4x + 8$ **16. a)** $x = 2$

b) $y = -3x - 21$ **16. b)** $x = -7$

c) $y = 2 - 8x$ **16. c)** $x = \frac{1}{4}$

d) $y = 7 - x$ **16. d)** $x = 7$

e) $y = -4x - 64$ **16. e)** $x = -16$

f) $y = -6x + 18$ **16. f)** $x = 3$

g) $y = 3x - 9$ **16. g)** $x = 3$

h) $y = 4x - 20$ **16. h)** $x = 5$

17 Determine o valor de m para que o zero da função f tal que $f(x) = 3x + m - 2$ seja igual a 4. **17.** $m = -10$

18 Qual é a lei da função afim cujo zero é 1 e o seu gráfico passa pelo ponto (–1, 2)? **18.** $y = -x + 1$

Zero de uma função afim

Na abordagem deste tópico, pergunte aos estudantes: "Será que uma função afim apresenta sempre um zero ou existe alguma função afim que não apresenta zero?". Espera-se que eles respondam que nem sempre uma função afim tem zero, pois, quando f é função constante, cuja lei é $f(x) = b$, e $b \neq 0$, ela não apresenta zero.

- Caso os estudantes apresentem dúvida para realizar a **atividade 17**, relembre que determinar o zero da função significa determinar o valor de x para o qual $f(x) = 0$.

Variação de uma função afim

Explique aos estudantes que estudar a variação de uma função afim é o mesmo que analisar quando a função é crescente, decrescente ou constante. Assim, mais importante que memorizar a relação da variação com o sinal do coeficiente *a*, é entender que a função é crescente quando, ao aumentar o valor de *x*, o valor de *y* também aumenta e que a função é decrescente quando, ao aumentar o valor de *x*, o valor de *y* diminui.

Sempre que possível, proponha aos estudantes problemas para os quais eles tenham a necessidade de estudar a variação de uma função afim para que atribuam significado a esse conteúdo.

Taxa de variação de uma função afim

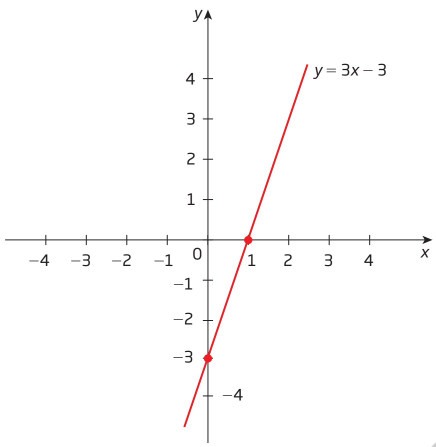
Comente com os estudantes que o conceito de taxa de variação pode ser aplicado a qualquer função e tem a ver com a relação entre a variação dos valores de *y* (ordenadas dos pontos que pertencem ao gráfico da função) e os respectivos valores de *x* (abscissas dos pontos que pertencem ao gráfico da função).

No caso das funções afim do tipo $f(x) = ax + b$, a taxa de variação é constante e igual ao coeficiente *a*, isto é, acréscimos iguais na variável *x* correspondem a acréscimos iguais na variável $f(x)$. Proponha aos estudantes que façam algumas verificações em casos particulares.

Variação de uma função afim

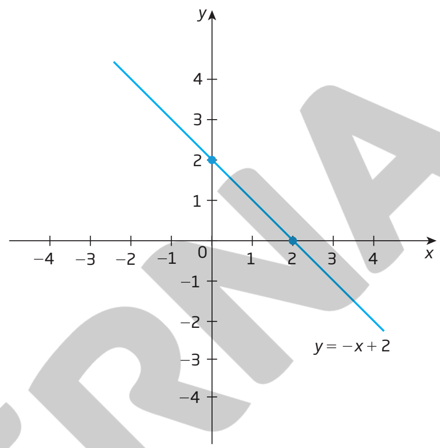
Observe os gráficos das funções dadas por $y = 3x - 3$ e $y = -x + 2$, em que *x* pode ser qualquer número real.

x	*y*	(*x*, *y*)
0	–3	(0, –3)
1	0	(1, 0)



Aumentando o valor de *x*, o valor de *y* aumenta; por isso, dizemos que a função é **crescente**. Observe que na lei $y = 3x - 3$, temos $a = 3$.

x	*y*	(*x*, *y*)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)



Aumentando o valor de *x*, o valor de *y* diminui; por isso, dizemos que a função é **decrescente**. Observe que na lei $y = -x + 2$, temos $a = -1$.

De modo geral, temos:

- uma função afim $y = ax + b$ é **crescente** quando o coeficiente *a* é maior que zero ($a > 0$);
- uma função afim $y = ax + b$ é **decrescente** quando o coeficiente *a* é menor que zero ($a < 0$).

Quando $a = 0$ em $y = ax + b$, a função é **constante**, pois, aumentando o valor de *x*, o valor de *y* não se altera.

Taxa de variação de uma função afim

A **taxa de variação de uma função afim** é a razão entre a variação de valores de *y* e a correspondente variação de valores de *x*, nessa ordem. Para encontrar a taxa de variação de uma função afim, precisamos conhecer dois pares ordenados que correspondam a pontos que pertençam à reta que é gráfico dessa função.

Seja (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pontos que pertençam ao gráfico de uma função afim. Assim, a taxa de variação dessa função é dada por:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Vamos determinar a taxa de variação da função $y = 3x - 3$ por meio de seus pontos (0, –3) e (1, 0):

$$\frac{0-(-3)}{1-0} = \frac{3}{1} = 3$$

- Considere outros pontos que pertençam à função $y = 3x - 3$ e calcule a taxa de variação. O que você pode perceber? **Item**: Espera-se que os estudantes percebam que a taxa de variação é sempre igual a 3 (valor do coeficiente *a* da função).

Observação

A taxa de variação de uma função afim *f*, dada por $f(x) = ax + b$, é constante para quaisquer dois pontos pertencentes à função considerados e, numericamente, é igual ao coeficiente *a*.

Estudo do sinal da função afim

Em uma função afim, podemos verificar para quais valores de *x* a função é positiva, para quais valores é negativa e para qual valor é nula.

Acompanhe os exemplos.

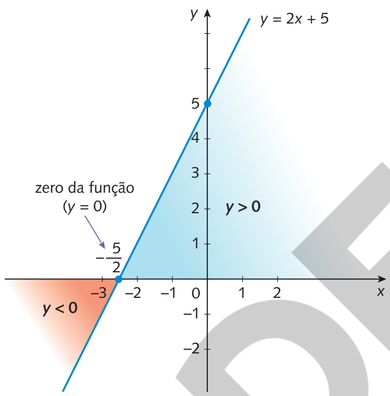
a) Vamos estudar o sinal da função afim: $y = 2x + 5$

A função é crescente, pois $a = 2$ $(2 > 0)$.

O zero da função é $-\frac{5}{2}$.

Observando o gráfico, verificamos que:

- para $x = -\frac{5}{2}$, a função é **nula** $(y = 0)$;
- para $x > -\frac{5}{2}$, a função é **positiva** $(y > 0)$;
- para $x < -\frac{5}{2}$, a função é **negativa** $(y < 0)$.



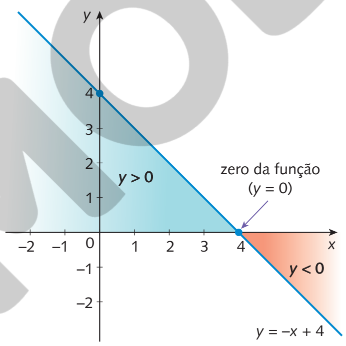
b) Vamos estudar o sinal da função afim: $y = -x + 4$

A função é decrescente, pois $a = -1$ $(-1 < 0)$.

O zero da função é 4.

Observando o gráfico, verificamos que:

- para $x = 4$, a função é **nula** $(y = 0)$;
- para $x < 4$, a função é **positiva** $(y > 0)$;
- para $x > 4$, a função é **negativa** $(y < 0)$.



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Estudo do sinal da função afim

Explique aos estudantes que estudar o sinal de uma função afim é o mesmo que verificar para quais valores da variável independente a função é positiva, para quais valores é negativa e para qual valor é nula. Comente que, para fazer o estudo de sinal, é preciso determinar o zero da função e saber se ela é crescente ou decrescente.

Sugestão de leitura

O documento *Material teórico – módulo função afim*, do prof. Angelo Papa Neto, no Portal da Matemática (OBMEP), aprofunda o estudo de função afim, trazendo sua definição e propriedades básicas, bem como diversos exemplos para explorar a caracterização e a representação gráfica de funções afim.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:
- Competência geral 5 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 2 (a descrição está na página VII).

Objetivo:

Compreender como o gráfico de uma função afim do tipo $y = ax + b$ se comporta quando variamos os valores de a e b.

Gráfico de uma função afim

Na falta do computador, a proposta desta seção pode ser adaptada para que os estudantes utilizem papel e instrumentos de desenho e medida.

No *Construa*, os estudantes terão a oportunidade de construir o gráfico de funções afim de duas maneiras diferentes: por meio de dois de seus pontos e digitando a lei da função. Oriente-os a utilizar as ferramentas adequadas e proponha questionamentos sobre as características dos gráficos construídos, como inclinação e intersecção com os eixos.

No *Explore*, os estudantes poderão observar como o gráfico de uma função afim do tipo $y = ax + b$ se comporta quando variamos os valores de a e b. Nesta seção, o *software* de construção de gráficos é utilizado de forma crítica, significativa e reflexiva, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC. Além disso, o encaminhamento da seção visa desenvolver o raciocínio lógico e o espírito investigativo, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **2** da BNCC.

No primeiro momento, o objetivo é que percebam que a reta que é gráfico de uma função afim do tipo $y = x + b$ corresponde a uma translação vertical de b unidades para cima (se $b > 0$) ou para baixo (se $b < 0$) do gráfico de $y = x$. Após chegarem a essas conclusões, peça que construam o gráfico de funções afim do tipo $y = x + b$ a partir do gráfico de $y = x$.

Tecnologias digitais em foco

Gráfico da função afim

Nesta seção, vamos utilizar um *software* de construção de gráficos para investigar o que ocorre com o gráfico de uma função afim do tipo $y = ax + b$, conforme variamos os valores de a e b.

Construa

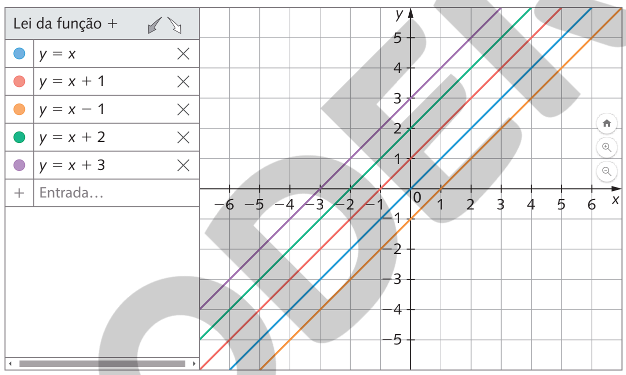
O gráfico de uma função afim é uma reta não perpendicular ao eixo x. No *software*, a construção desse gráfico pode ser feita determinando as coordenadas de dois pontos pertencentes a ele, marcando esses pontos no plano cartesiano e, por fim, traçando a reta que passa por esses pontos.

Um segundo modo de realizar essa construção é digitando a lei da função no campo apropriado e teclando *Enter*.

Escolha um desses modos indicados para fazer a construção de cada gráfico de função afim indicada nas investigações a seguir.

Explore

Vamos começar investigando o que ocorre com o gráfico de uma função afim do tipo $y = x + b$ conforme variamos o valor de b.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a) Em um mesmo plano cartesiano, construa o gráfico das funções $y = x$ e $y = x + 1$. O que você observou?

b) No mesmo plano cartesiano do item **a**, construa o gráfico das funções $y = x - 1$, $y = x + 2$ e $y = x + 3$. Depois, compare o gráfico dessas funções com o gráfico de $y = x$. O que você observou?

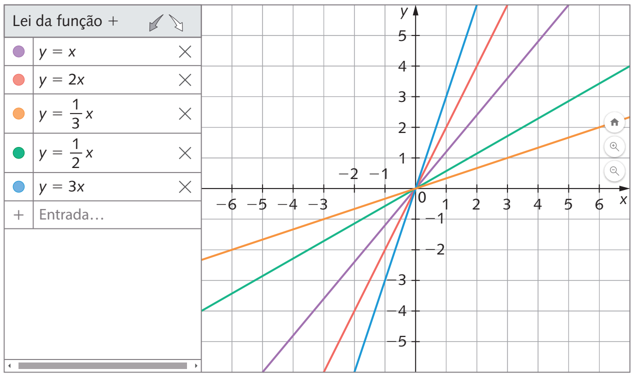
c) O que as investigações anteriores sugerem em relação à posição da reta que é gráfico de uma função afim do tipo $y = x + b$, em que b é qualquer número real, e da reta que é gráfico de $y = x$?

Explore:
a) Espera-se que os estudantes observem que cada ponto do gráfico de $y = x + 1$ tem ordenada igual a uma unidade a mais que a ordenada do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = x$. Ou seja, o gráfico de $y = x + 1$ é uma reta paralela ao gráfico de $y = x$, pois houve uma translação vertical de 1 unidade para cima.
b) Espera-se que os estudantes observem que:
- o gráfico de $y = x - 1$ corresponde a uma translação vertical de 1 unidade para baixo do gráfico de $y = x$;
- o gráfico de $y = x + 2$ corresponde a uma translação vertical de 2 unidades para cima do gráfico de $y = x$;
- o gráfico de $y = x + 3$ corresponde a uma translação vertical de 3 unidades para cima do gráfico de $y = x$.

c) Espera-se que os estudantes respondam que as investigações anteriores sugerem que a reta que é gráfico de uma função afim do tipo $y = x + b$ corresponde a uma translação vertical de b unidades para cima (se $b > 0$) ou para baixo (se $b < 0$) do gráfico de $y = x$.

Tecnologias digitais em foco

Agora, vamos investigar o que ocorre com o gráfico de uma função afim do tipo $y = ax$ conforme variamos o valor de a.



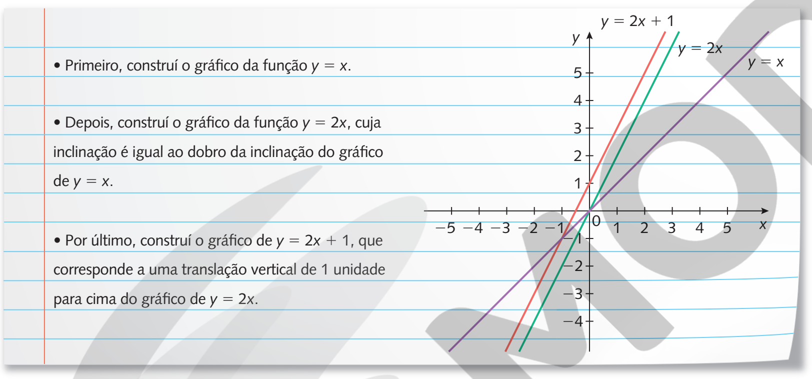
d) Em um mesmo plano cartesiano, construa o gráfico das funções $y = x$ e $y = 2x$. O que você observou?

e) No mesmo plano cartesiano do item **d**, construa o gráfico das funções $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 3x$. Depois, compare o gráfico dessas funções com o gráfico de $y = x$. O que você observou?

f) Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos de $y = x$ e $y = -x$. O que você observou?

g) Dê três exemplos de pares de funções afim cujos gráficos sejam simétricos em relação ao eixo y.

h) Confira a seguir como Luana fez para construir o gráfico de $y = 2x + 1$ a partir do gráfico de $y = x$.



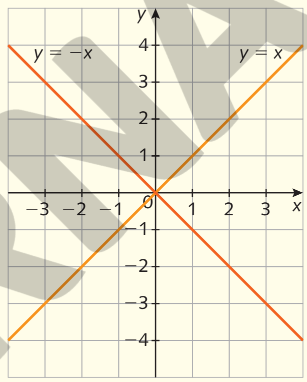
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, faça como Luana e construa os gráficos de $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = 3x - 2$ com base no gráfico de $y = x$.

Explore:
d) Espera-se que os estudantes observem que cada ponto do gráfico de $y = 2x$ tem ordenada igual ao dobro daquela do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = x$. Ou seja, o gráfico de $y = 2x$ é uma reta que tem inclinação igual ao dobro da inclinação de $y = x$.
e) Espera-se que os estudantes observem que cada ponto do gráfico de $y = \frac{1}{3}x$, $y = \frac{1}{2}x$ e $y = 3x$ tem ordenada igual à terça parte, à metade e ao triplo, respectivamente, da ordenada do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = x$.
f) Espera-se que os estudantes observem que cada ponto do gráfico de $y = -x$ tem ordenada igual ao oposto da ordenada do ponto de mesma abscissa no gráfico de $y = x$, ou seja, o gráfico de $y = -x$ é simétrico ao gráfico de $y = x$ em relação ao eixo y.
g) Resposta pessoal.
h) Resposta em *Orientações*.

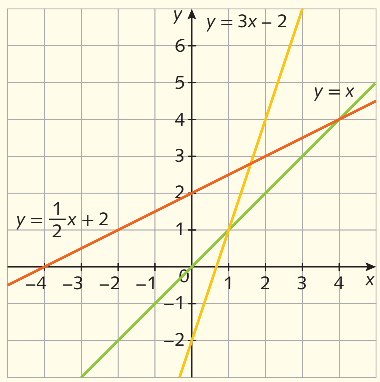
Em um segundo momento, o objetivo é que percebam o que acontece com o gráfico de uma função afim do tipo $y = ax$ quando variamos o valor de a. Durante a investigação por parte dos estudantes, proponha os seguintes questionamentos: “Esses gráficos têm algum ponto em comum? Qual? O que acontece com o gráfico quando o coeficiente de x aumenta? E quando esse coeficiente, embora positivo, diminui? Qual é a relação entre o sinal de a e a variação (crescente ou decrescente) da função?”. Nesse momento, é possível que os estudantes empreguem uma linguagem não formal para justificar suas respostas para essas questões.

- Resposta do **item f**:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

- Resposta do **item h**:



• Na **atividade 22**, espera-se que os estudantes sejam capazes de escrever:

Para uma função afim crescente:

- Para $x = -\frac{b}{a}$, a função é nula.
- Para $x > -\frac{b}{a}$, a função é positiva.
- Para $x < -\frac{b}{a}$, a função é negativa.

Para uma função afim decrescente:

- Para $x = -\frac{b}{a}$, a função é nula.
- Para $x > -\frac{b}{a}$, a função é negativa.
- Para $x < -\frac{b}{a}$, a função é positiva.

Inequações

Objetivo:

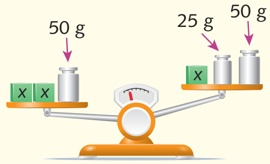
Reconhecer e resolver inequações do 1º grau.

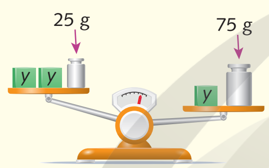
Justificativa

Reconhecer e resolver inequações do 1º grau amplia os conhecimentos adquiridos sobre equações do 1º grau e faz com que os estudantes adquiram mais uma ferramenta para resolver e elaborar problemas.

Mapeando conhecimentos

Reproduza as seguintes balanças na lousa:





ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, peça aos estudantes que traduzam a situação de cada balança por meio de uma sentença algébrica (inequação) e resolvam essas inequações utilizando estratégias pessoais. Deixe-os à vontade para conversar e estabelecer conjecturas. Observe se resolvem as inequações adotando estratégias similares à resolução de equações do 1º grau com uma incógnita.

Para as aulas iniciais

Retome a atividade proposta na dinâmica inicial. Espera-se que os estudantes tenham concluído que a inequação $2x + 50 > x + 75$ representa a situação da primeira balança e que, após resolvê-la, eles concluíram que $x > 25$, ou seja, a medida da massa do peso desconhecido é superior a 25 g. Já a situação da segunda balança é traduzida pela inequação $2y + 25 < y + 75$ e, após resolvê-la, eles devem concluir que $y < 50$, ou seja, a medida da massa do peso desconhecido é inferior a 50 g. Convide alguns estudantes para que compartilhem como fizeram e discuta a atividade oralmente.

20. a) Para $x = 3$, a função é nula. Para $x > 3$, a função é positiva. Para $x < 3$, a função é negativa.
20. b) Para $x = 8$, a função é nula. Para $x > 8$, a função é positiva. Para $x < 8$, a função é negativa.
20. c) Para $x = 11$, a função é nula. Para $x > 11$, a função é negativa. Para $x < 11$, a função é positiva.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

19 Construa o gráfico, localize o zero de cada uma das funções e classifique-as em crescente, decrescente ou constante.

a) $f(x) = 4x - 20$
b) $f(x) = 7x - 21$
c) $f(x) = -4x + 1$
d) $f(x) = x - 3$

20 Determine os valores reais de x que tornam a função positiva, negativa ou nula.

a) $y = 2x - 6$
b) $y = -8 + x$
c) $y = -x + 11$
d) $y = -2x - 4$

19. a) $x = 5$; crescente
19. b) $x = 3$; crescente
19. c) $x = \frac{1}{4}$; decrescente
19. d) $x = 3$; crescente

21 Escreva no caderno a lei de uma função afim que tenha estas características:

- para $x = 2$, $y = 0$;
- para $x < 2$, $y < 0$;
- para $x > 2$, $y > 0$.

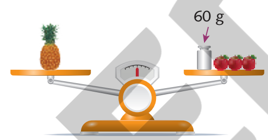
21. Exemplo de resposta: $y = x - 2$

22 Generalize o estudo do sinal de uma função afim cuja lei é $y = ax + b$, crescente $(a > 0)$. Depois, faça o mesmo para uma função afim decrescente. **22.** Resposta em *Orientações*.

20. d) Para $x = -2$, a função é nula. Para $x > -2$, a função é negativa. Para $x < -2$, a função é positiva.

3 Inequações

Na balança de dois pratos a seguir, podemos ver um abacaxi em um prato e no outro um peso de 60 g e três maçãs de mesma medida de massa.

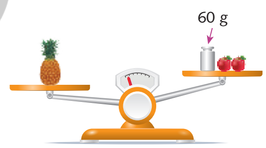


Observe que os pratos dessa balança estão em equilíbrio, ou seja, há **igualdade** das medidas de massa contidas nos dois pratos.

Sabe-se que o abacaxi tem 300 g, mas a medida da massa das maçãs é desconhecida. Considerando que cada maçã tem x g, podemos representar essa igualdade na linguagem matemática pela seguinte equação:

$$300 = 60 + 3x$$

Agora, observe o que ocorre quando retiramos da balança uma das maçãs.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, podemos verificar uma **desigualdade** das medidas de massa contidas nos dois pratos da balança. Essa desigualdade também pode ser representada na linguagem matemática:

$$300 > 60 + 2x$$

Toda desigualdade que tenha pelo menos uma incógnita, com expoente maior ou igual a 1, é chamada de **inequação**. Considere alguns exemplos abaixo.

a) $x + 5 > -3x$ **c)** $12 + x \neq 5x$ **e)** $y^2 - 2y \geqslant -16$

b) $x^2 - 4 \leqslant 20$ **d)** $x + y < 8$ **f)** $-2x < 14$

Uma inequação com uma incógnita é considerada do 1º grau quando o expoente da incógnita é igual a 1. Esse tipo de inequação pode ser escrito de uma das seguintes formas:

$$ax + b > 0$$

$$ax + b < 0$$

$$ax + b \geqslant 0$$

$$ax + b \leqslant 0$$

$$ax + b \neq 0$$

sendo a um número real diferente de zero, b um número real qualquer e x a incógnita.

Observe os exemplos.

a) $3x > 6$ (a incógnita é x) **c)** $2z \geqslant -5$ (a incógnita é z)

b) $4y < 7$ (a incógnita é y) **d)** $3w \leqslant 9$ (a incógnita é w)

Atividades

Faça as atividades no caderno.

23 Identifique, no caderno, os itens que apresentam uma inequação.

a) $3^2 + 1^2 = 10$ **d)** $6x \neq 0$

b) $\frac{x}{3} + 1 < 0$ **e)** $2x - y > 5$

c) $4x = -12$ **f)** $2x + 7 \leqslant 6x$

23. alternativas **b**, **d**, **e**, **f**

24 Escreva no caderno uma inequação que represente cada uma das situações a seguir.

a) O dobro de um número mais cinco é menor que oito. **24. a)** $2x + 5 < 8$

b) A diferença entre um número e sua quinta parte é menor ou igual a quatro.

c) O quíntuplo de um número menos sua terça parte é menor que dois.

d) A diferença entre o triplo de um número e sua quarta parte é maior ou igual a sete. **24. d)** $3x - \frac{x}{4} \geqslant 7$

24. b) $x - \frac{x}{5} \leqslant 4$ **24. c)** $5x - \frac{x}{3} < 2$

25 A medida da distância entre duas estações de metrô é x km. Após percorrer 5 km, um trem está a menos da metade da medida da distância entre as duas estações. No caderno, escreva uma inequação que represente essa situação.

25. $x - 5 < \frac{x}{2}$

ROBERTO CASIMIRO/FOTOARENA

Plataforma do metrô da estação Paulista em São Paulo (SP). Foto de 2018.

26. alternativas **b**, **d**, **f**, **h**

26 Quais dos itens a seguir apresentam uma inequação do 1º grau com uma incógnita?

a) $x + y > 4$ **e)** $x^3 > x$

b) $x + 50 > 60$ **f)** $6w > 10 + w$

c) $x^2 + y > z$ **g)** $7a > a + b$

d) $60 > y$ **h)** $c > 5c - 10$

É importante que os estudantes compreendam que, embora a maior parte das atividades trate a variável como x, ela poderia ser representada com outra letra.

• Amplie a **atividade 23** questionando os estudantes: "A sentença $6x^0 > 0$ é uma inequação?". Espera-se que respondam que não, pois o expoente de x é zero, fazendo com que a expressão seja equivalente a $6 > 0$.

147

• No **item a** da **atividade 27**, espera-se que os estudantes percebam que, como a caixa com indicação de medida de massa x está em um prato mais baixo do que o prato dos pesinhos (5 g), então a caixa tem massa maior que 5 g; dessa forma, podemos expressar a inequação como $x > 5$.

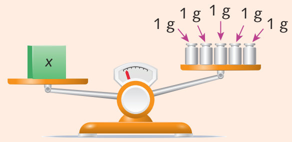
Inequações equivalentes

Relacione o conceito de inequações equivalentes ao de equações equivalentes. Se achar necessário, apresente outros exemplos além dos que constam no livro.

27 Observe esta balança e responda às questões.

a) A desigualdade que melhor representa essa situação é $x > 5$ ou $5 > x$? **27. a)** $x > 5$

b) Se acrescentarmos 100 g a cada prato da balança, como poderemos representar a nova desigualdade? **27. b)** Exemplo de resposta: $x + 100 > 105$



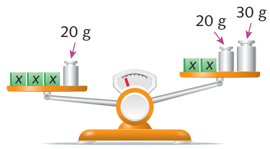
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ ARQUIVO DA EDITORA

Inequações equivalentes

Acompanhe as situações a seguir.

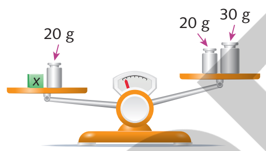
Situação 1

Esta balança está em desequilíbrio, pois a medida de massa contida no prato da esquerda é maior que a do prato da direita.



Podemos representar a situação pela inequação $3x + 20 > 2x + 20 + 30$.

Retirando 2 $\boxed{x}$ de cada prato da balança, ela continua em desequilíbrio e o prato da esquerda continua com maior medida de massa que o prato da direita.



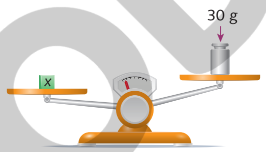
Podemos representar a situação da seguinte forma:

$$3x + 20 - 2x > 2x + 20 + 30 - 2x,$$

ou seja,

$$x + 20 > 20 + 30$$

Retirando 20 g de cada prato, a balança ainda fica em desequilíbrio, e o prato da esquerda continua com maior medida de massa que o prato da direita.



Agora, podemos representar a situação da seguinte forma:

$$x + 20 - 20 > 20 + 30 - 20,$$

ou seja,

$$x > 30$$

As inequações $3x + 20 > 2x + 20 + 30$, $x + 20 > 20 + 30$ e $x > 30$ são equivalentes, ou seja, têm as mesmas soluções.

Em um mesmo conjunto universo, inequações que apresentam as mesmas soluções são chamadas de **inequações equivalentes**.

Quando adicionamos um mesmo número aos dois membros de uma inequação ou subtraímos um mesmo número dos dois membros de uma inequação, obtemos uma inequação equivalente à inequação dada. Esse é o **princípio aditivo das desigualdades**.

Observe alguns exemplos.

a) $2x - 5 > 7$

$2x - 5 + 5 > 7 + 5$ ← Adicionamos 5 unidades a cada membro.

$2x > 12$

As inequações $2x - 5 > 7$ e $2x > 12$ são equivalentes.

b) $3x + 4 < 20$

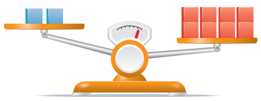
$3x + 4 - 4 < 20 - 4$ ← Subtraímos 4 unidades de cada membro.

$3x < 16$

As inequações $3x + 4 < 20$ e $3x < 16$ são equivalentes.

Situação 2

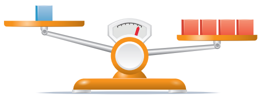
Esta balança está em desequilíbrio, e o prato da esquerda tem menor medida de massa. No prato da esquerda, foram colocados 2 ■ de x g cada. No prato da direita, foram colocados 8 ■ de 2 g cada.



Podemos representar a situação por:

$$2x < 16$$

Retirando a metade da medida de massa de cada prato, a balança permanece desequilibrada e o prato da esquerda continua com menor medida de massa.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Podemos representar a situação por:

$$\frac{2x}{2} < \frac{16}{2}$$

$$x < 8$$

Portanto, 1 ■ tem medida de massa menor que 8 g.

Quando multiplicamos ou dividimos os membros de uma inequação por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma inequação equivalente à inequação dada. Esse é o **princípio multiplicativo das desigualdades**.

Observe este exemplo.

$-9 < 7x$

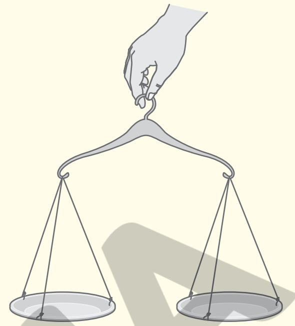
$-9 \cdot 4 < 7x \cdot 4$ ← Multiplicamos cada termo por 4.

$-36 < 28x$

As inequações $-9 < 7x$ e $-36 < 28x$ são equivalentes.

Sugestão de atividade extra

Para que os estudantes entendam melhor a ideia de comparação usando a balança de dois pratos, produza, com o auxílio deles, uma balança usando cabide, barbante e pratos descartáveis (conforme ilustração abaixo).



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

É importante que os pratos sejam capazes de suportar as medidas de massa dos objetos que serão colocados sobre eles.

Explore o equilíbrio e o desequilíbrio na balança, utilizando objetos com medidas de massa conhecidas e desconhecidas. Assim, poderá propor questionamentos do tipo: "Se a balança está em equilíbrio, qual é a medida de massa desconhecida?", "Se a balança não está em equilíbrio, e sabemos a medida de massa de um dos pratos, é possível descobrir a medida de massa do outro prato?". Indagações desse tipo levam os estudantes a refletir e significar tanto o princípio aditivo das desigualdades quanto o princípio multiplicativo das desigualdades.

Para exemplificar a inversão do sinal da desigualdade ao multiplicar os membros de uma inequação por um número negativo, mostre aos estudantes que:

$x > 1 \Rightarrow x \cdot (-1) < 1 \cdot (-1) \Rightarrow -x < -1$

Faça na lousa o seguinte cálculo:

$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 1 - 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 - x > 0 - x \Rightarrow -1 > -x$, que é análogo a dizer que $-x < -1$.

Observações

Ao multiplicar ou dividir os membros de uma desigualdade por um mesmo valor, é necessário estar atento ao sentido da desigualdade.

a) $2 > -7$

$2 \cdot 3 > -7 \cdot 3$ ← Multiplicamos os dois membros da desigualdade por um número positivo.

$6 > -21$ ← O sinal tem o mesmo sentido da desigualdade inicial.

b) $5 < 12$

$5 \cdot (-2) > 12 \cdot (-2)$ ← Multiplicamos os dois membros da desigualdade por um número negativo.

$-10 > -24$ ← O sinal tem o sentido oposto ao da desigualdade inicial.

Por isso, ao multiplicar ou dividir os membros de uma inequação por um número negativo, é necessário inverter o sinal da desigualdade.

Analise estes exemplos.

a) $\frac{x}{5} - 2 > 4$

$5 \cdot \left(\frac{x}{5} - 2\right) > 5 \cdot 4$ ← Multiplicamos os membros por 5.

$x - 10 > 20$ ← Mantemos o sinal da desigualdade, pois multiplicamos os dois membros da inequação por um número positivo.

As inequações $\frac{x}{5} - 2 > 4$ e $x - 10 > 20$ são equivalentes.

b) $-3x < 8$

$\frac{-3x}{-3} > \frac{8}{-3}$ ← Dividimos os dois membros da inequação por -3, que é um número negativo; por isso, invertemos o sinal da desigualdade.

$x > -\frac{8}{3}$

As inequações $-3x < 8$ e $x > -\frac{8}{3}$ são equivalentes.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

28. Sim, pois, ao diminuir 10 unidades de cada membro da inequação, obtemos uma inequação equivalente à primeira.

28 Dada a inequação $x < 15$, é correto escrever: $x - 10 < 15 - 10$? Justifique sua resposta.

29 Considere a inequação $-7 < 5x$. Obtenha inequações equivalentes a essa, fazendo o que se pede em cada item. **29. a)** $-28 < 20x$

a) Multiplique os dois membros por 4.

b) Divida os dois membros da inequação obtida no item **a** por -1. **29. b)** $28 > -20x$

c) Adicione -3 aos dois membros da inequação obtida no item **b**. **29. c)** $25 > -20x - 3$

d) Subtraia -2 dos dois membros da inequação obtida no item **c**.

29. d) $27 > -20x - 1$

30 Sendo $a < b$, indique, no caderno, as sentenças verdadeiras. **30.** alternativas **a**, **b**, **d**, **f**

a) $a + 7 < b + 7$

b) $\frac{a}{5} < \frac{b}{5}$

c) $3a > 3b$

d) $a - 10 < b - 10$

e) $-2a < -2b$

f) $-a > -b$

31 Se multiplicarmos os dois membros da desigualdade $-10x < -12$ por (-1), que desigualdade obteremos? **31.** $10x > 12$

Resolução de uma inequação do 1º grau

Resolver uma inequação do 1º grau com uma incógnita significa determinar as **soluções** da inequação, ou seja, todos os números de determinado conjunto universo que, ao substituírem as incógnitas, tornam a sentença verdadeira. Esses números formam um conjunto chamado de **conjunto solução**, que indicamos pela letra *S*.

Para tanto, vale a forma de resolução usada para as equações, aplicando, nesse caso, os princípios aditivo e multiplicativo das desigualdades.

Sendo $U = \mathbb{Q}$, vamos determinar o conjunto solução das inequações a seguir.

a) $3x - 5 < 8$

$3x - \cancel{5} + \cancel{5} < 8 + 5$ ← Adicionamos 5 aos dois membros da inequação (princípio aditivo das desigualdades).

$3x < 8 + 5$

$3x < 13$

$3x \cdot \frac{1}{3} < 13 \cdot \frac{1}{3}$ ← Multiplicamos por $\frac{1}{3}$ os dois membros da inequação (princípio multiplicativo das desigualdades).

$x < \frac{13}{3}$

A solução da inequação é o conjunto de todos os números racionais menores que $\frac{13}{3}$, ou seja, $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \frac{13}{3}\right\}$.

b) $10 - 6x > -2$

$10 - 6x - 10 > -2 - 10$ ← Subtraímos 10 dos dois membros da inequação (princípio aditivo das desigualdades).

$-6x > -12$

$-6x \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) < -12 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$ ← Multiplicamos por $\left(-\frac{1}{6}\right)$ os dois membros da inequação (princípio multiplicativo das desigualdades).

$x < 2$

A solução da inequação é o conjunto de todos os números racionais menores que 2, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 2\}$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

32. a) $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x < -\frac{8}{3}\right\}$

32 Sendo $U = \mathbb{Q}$, determine o conjunto solução das inequações.

a) $(x + 2) + (x + 3) + (x + 4) \leqslant 1$

b) $4 - 2x > 3 - 3x$ **32. b)** $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -1\}$

c) $x - 5 \leqslant 1 - x$ **32. c)** $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leqslant 3\}$

d) $x - \frac{1}{2} < \frac{5}{2} + 3x$ **32. d)** $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x > -\frac{3}{2}\right\}$

33 Para quais números naturais a inequação $3\left(x - \frac{1}{5}\right) + \frac{2x}{3} < 8$ é verdadeira? **33.** 0, 1 e 2

34 Determine o maior valor inteiro para x que satisfaça a inequação $\frac{x - 10}{5} < 0$. **34.** 9

35 Qual é o número inteiro cujo triplo mais 5 é menor do que 2 e cuja terça parte mais 4 é maior do que 3? **35.** –2

36 Um retângulo tem $2y$ cm de medida do comprimento e y cm de medida da largura. Qual deve ser o menor valor inteiro de y, se a medida do perímetro do retângulo é maior que a medida do perímetro de um triângulo equilátero com 16 cm de medida de comprimento de lado? **36.** 9

Resolução de uma inequação de 1º grau

Desenvolva os exemplos do livro na lousa e incentive os estudantes a explicar quais princípios das desigualdades (aditivo ou multiplicativo) estão sendo empregados em cada passagem da resolução das inequações. Se achar conveniente, resolva outras inequações com a turma.

- Na **atividade 36**, relembre que um triângulo equilátero tem todos os lados com a mesma medida de comprimento; dessa forma, a medida do perímetro do triângulo é 48 cm. Como o retângulo possui $2y$ cm de medida de comprimento e y cm de medida de largura, ele possui perímetro com medida de $6y$ cm. Para que a medida do perímetro do retângulo seja maior que a medida do perímetro do triângulo, é necessário que $6y$ (medida do perímetro do retângulo) seja maior que 48 cm (medida do perímetro do triângulo). Assim:

$6y > 48 \Rightarrow y > 8$

Portanto, é necessário que y seja maior que 8 para que a medida do perímetro do retângulo seja maior que a medida do perímetro do triângulo. Entretanto, como a atividade pede o menor valor inteiro de y, a resposta é 9.

Comparando funções afim

A comparação de funções afim possibilita resolver diferentes problemas.

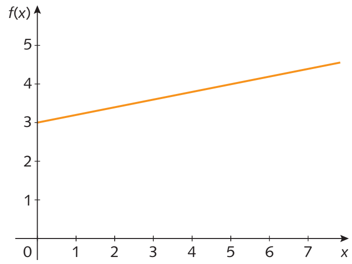
Explore a situação do livro com a turma. Depois, mostre outra forma de resolver essa situação-problema: determinando a abscissa do ponto de interseção dos gráficos de *f* e *g*.

Para calcular essa abscissa, basta fazer $f = g$, ou seja, $0{,}6x + 1 = 0{,}2x + 3$. Resolvendo essa equação, conclui-se que $x = 5$. Observando o gráfico, é possível concluir que, para valores maiores que 5, $g > f$, ou seja, acima de 5 L de suco de uva vendidos, o lucro é maior do que aquele da venda da mesma quantidade de suco de laranja.

Comparando funções afim

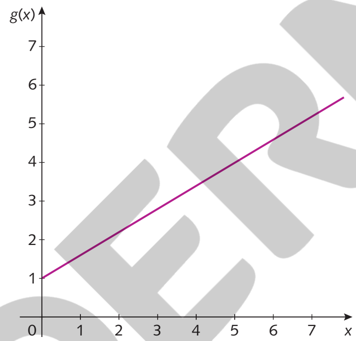
Uma lanchonete vende dois tipos de suco natural. Vamos indicar a quantidade de litros de suco vendido pela letra *x*; o lucro será dado em função de *x*, em dezenas de reais.

O lucro obtido com a venda de suco de laranja, em dezenas de reais, pode ser representado pela função *f*, tal que $f(x) = 0{,}2x + 3$.

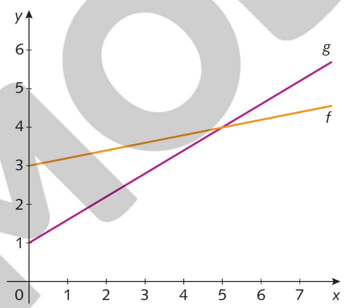


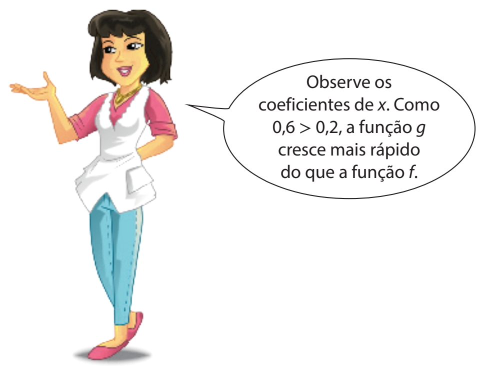
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

O lucro obtido com a venda de suco de uva, em dezenas de reais, pode ser representado pela função *g*, dada por $g(x) = 0{,}6x + 1$.



Podemos analisar a partir de qual momento a venda de um tipo de suco natural gera mais lucro para a lanchonete do que a venda do outro, observando os gráficos dessas funções:





CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Analisando o gráfico, podemos perceber que, para algum valor de x, a venda de suco de uva é mais vantajosa do que a venda de suco de laranja. Para descobrir esse valor, podemos resolver a inequação gerada pela comparação das funções f e g. Assim:

$$g(x) > f(x)$$
$$0{,}6x + 1 > 0{,}2x + 3$$

Resolvendo a inequação, encontramos $x > 5$. Isso significa que, acima de 5 L de suco de uva vendidos, o lucro é maior do que aquele da venda da mesma quantidade de suco de laranja.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

37 Determine os valores reais de x.

a) $f(x) > g(x)$, com $f(x) = 3x + 4$ e $g(x) = 2x + 2$. **37. a)** $x > -2$

b) $f(x) < g(x)$, com $f(x) = 0{,}5x + 1$ e $g(x) = x$. **37. b)** $x > 2$

c) $h(x) \geqslant q(x)$, com $h(x) = 20x + 5$ e $q(x) = 15x - 5$. **37. c)** $x \geqslant -2$

d) $s(x) \leqslant t(x)$, com $s(x) = 7x + 7$ e $t(x) = 2x + 2$. **37. d)** $x \leqslant -1$

38 A seguir, temos as funções f e g, tais que:

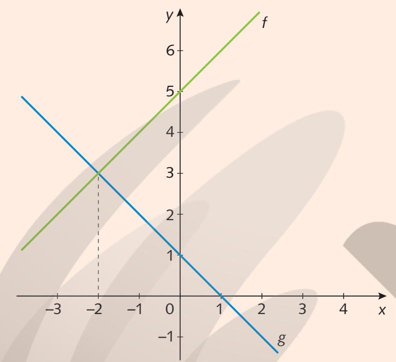
- $f(x) = 2x - 2$
- $g(x) = 0{,}5x + 1$

38. a) Resposta em *Orientações*.

a) Esboce no plano cartesiano o gráfico das duas funções.

b) Verifique a partir de qual valor atribuído a x teremos $f(x) > g(x)$. **38. b)** $x > 2$

39 Analise os gráficos das funções f e g.



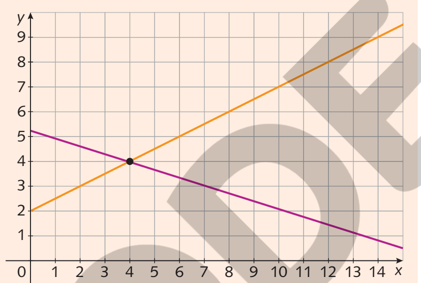
39. a) $x = -2$

a) Para qual valor de x temos $f(x) = g(x)$?

b) Qual é o conjunto solução da inequação $f(x) > g(x)$? **39. b)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

c) Determine o conjunto solução da inequação $g(x) \geqslant f(x)$. **39. c)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$

40 Elabore um problema no qual a solução envolva a comparação de duas funções. Uma deve ser uma função decrescente e a outra, uma função crescente. Utilize os gráficos das funções a seguir para se inspirar na situação a ser elaborada.



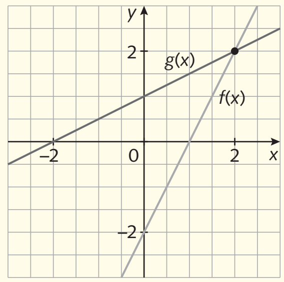
Troque a situação com um amigo e resolva aquela que ele propôs. Em seguida, discutam o resultado e verifiquem os procedimentos efetuados. Caso alguma dúvida persista, discuta com o professor. **40.** Respostas pessoais.

41 Dada a função f cuja lei é $f(x) = 3x + 2$, elabore uma situação na qual x é um número natural. A partir da função e da situação que criar, esboce o gráfico da função, explicitando no contexto criado a variável dependente e a independente.

41. Comentário em *Orientações*.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- No **item a** da **atividade 38**, quando representamos as duas funções no plano cartesiano, obtemos o seguinte gráfico:

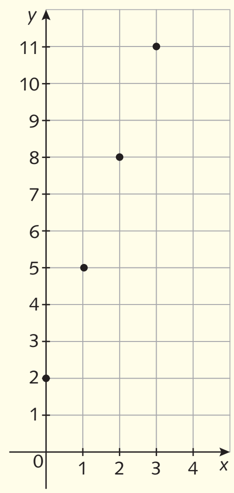


ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

No **item b**, para determinar o valor de x que torna verdadeira a sentença $f(x) > g(x)$, temos:

$$f(x) > g(x)$$
$$2x - 2 > 0{,}5x + 1$$
$$2x - 0{,}5x - 2 > 0{,}5x + 1 - 0{,}5x$$
$$1{,}5x - 2 + 2 > 1 + 2$$
$$1{,}5x > 3$$
$$x > 2$$

- Na **atividade 41**, independentemente da situação criada, os estudantes devem obter um gráfico como este:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Resolvendo em equipe

BNCC:

- Competências gerais 2 e 10 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 5 e 8 (as descrições estão na página VII).

A seção destaca as etapas selecionadas para encaminhar a resolução de problemas. Elas devem ser analisadas e discutidas com os estudantes. Além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **2** e **10** e das competências específicas **2**, **5** e **8**, a seção permite a transferência de estratégias de resolução para outros contextos e situações.

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(Etec) Um grupo de amigos, em visita a Aracaju, alugou um carro por dois dias.
A locação foi feita nas seguintes condições: R$ 40,00 por dia e R$ 0,45 por quilômetro rodado.
No primeiro dia, saíram de Aracaju e rodaram 68 km para chegar à Praia do Saco, no sul de Sergipe.
No segundo dia, também partiram de Aracaju e foram até Pirambu, no norte do estado, para conhecer o Projeto Tamar. Por uma questão de controle de gastos, o grupo de amigos restringiu o uso do carro apenas para ir e voltar desses lugares ao hotel onde estavam hospedados em Aracaju, fazendo exatamente o mesmo percurso de ida e volta. Nas condições dadas, sabendo que foram pagos R$ 171,80 pela locação do carro, então o número de quilômetros percorrido para ir do hotel em Aracaju a Pirambu foi:

a) 68 **b)** 61 **c)** 50 **d)** 46 **e)** 34

Resolvendo em equipe: alternativa **e**

Interpretação e identificação dos dados	• Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema. • No caderno, escreva a lei que relaciona o valor diário (V) a pagar em função da medida da distância (x) percorrida, em quilômetro. • Qual foi a medida da distância total percorrida na viagem de Aracaju à Praia do Saco? • Calcule o valor gasto na viagem de Aracaju à Praia do Saco. **Interpretação e identificação dos dados**: primeiro item: resposta pessoal. segundo item: $V(x) = 40 + 0{,}45x$, em que x é um número real positivo. terceiro item: 136 km quarto item: R$ 101,20
Plano de resolução	• Qual foi o valor gasto na viagem de Aracaju a Pirambu? • O valor calculado no item anterior corresponde a quantos quilômetros percorridos? • Qual é a medida da distância entre Aracaju e Pirambu? **Plano de resolução**: primeiro item: R$ 70,60 segundo item: 68 km terceiro item: 34 km
Resolução	• Forme dupla com um colega. • Mostre a ele seu plano de resolução e verifique se há ideias comuns entre vocês. • A dupla deverá discutir quais são as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolher um deles para a execução do processo de resolução. **Observação** Resolvam o problema de maneira coletiva, mas façam o registro individualmente.
Verificação	• A dupla deve reler o problema e verificar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.
Apresentação	• A dupla deverá pesquisar informações relativas ao município de Pirambu (SE), como origem do nome, histórico, medida da área do município, população estimada, densidade demográfica etc.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Ideia de função

Lei de formação da função

Quando temos uma relação em que uma grandeza é função de outra, a correspondência entre cada valor de uma grandeza e cada valor da outra pode ser expressa por uma sentença chamada **lei de formação da função** ou **lei da função**. Considere o exemplo:

$y = x + 1$ ou $f(x) = x + 1$

x → variável independente

y → variável dependente

Valor de uma função

O valor da função $f(x) = x + 1$ para $x = 3$ é igual a 4, pois:

$$f(3) = 3 + 1 = 4$$

1. A medida do perímetro (p) de um pentágono regular é dado em função da medida de comprimento x do seu lado. **1. a)** $p = 5x$, em que x é um número real positivo.

a) Qual é a lei da função que relaciona p e x?

b) Qual será a medida de perímetro se $x = 7{,}2$ cm? **1. b)** 36 cm

2. Sabe-se que a medida do comprimento (y) de certo retângulo está em função da medida da largura (x) e que a medida do comprimento excede a medida da largura em 5 unidades de medida de comprimento. **2. a)** $y = x + 5$, em que x é um número real positivo.

a) Qual é a lei da função que relaciona y e x?

b) Qual é a medida do comprimento do retângulo se a medida da largura for igual a 3,6 m? **2. b)** 8,6 m

3. Um garçom ganha mensalmente R\$ 1 200,00 de salário mais uma comissão de 15% sobre todas as vendas feitas durante o mês. No mês em que o total de vendas no restaurante foi x, qual foi o salário S desse garçom?
3. $S = 1\,200 + 0{,}15 \cdot x$, em que x é um número natural.

4. A lei de formação de uma função f é dada por $f(x) = 2x + 9$. Calcule:

a) $f(-2)$ **4. a)** 5

b) $f(5)$ **4. b)** 19

c) $f\left(\frac{3}{2}\right)$ **4. c)** 12

d) $f(-1) \cdot f(0)$ **4. d)** 63

e) $\dfrac{f(-3) + f(2)}{f\left(-\frac{1}{2}\right)}$ **4. e)** 2

Função afim

Função afim é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real.

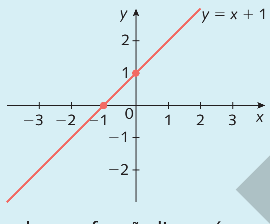
Nos casos em que $a \neq 0$ e $b = 0$, chamamos a função afim de **função linear**.

Nos casos em que $a = 0$, chamamos a função afim de **função constante**.

Gráfico da função afim

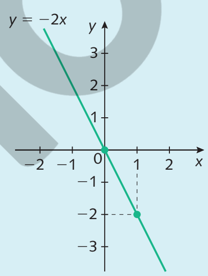
O gráfico que representa uma função afim é sempre uma reta não perpendicular ao eixo x. Vamos construir o gráfico de $f(x) = x + 1$.

x	$f(x) = y$	(x, y)
0	1	(0, 1)
–1	0	(–1, 0)



O gráfico de uma função linear é sempre uma reta que passa pelo ponto (0, 0), ou seja, pela origem do plano cartesiano. Vamos construir o gráfico de $g(x) = -2x$.

x	$g(x) = y$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	–2	(1, –2)



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Ideia de função

• Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes reconheçam que a medida do perímetro de um pentágono regular é função da medida do comprimento de seu lado, uma vez que cada valor da primeira grandeza (x) corresponde a um único valor da segunda grandeza (p). Após escreverem a lei da função no **item a**, é importante incentivá-los a também indicar o conjunto numérico ao qual x pertence. Para responder ao **item b**, os estudantes devem calcular o valor numérico da função encontrada no **item a** para $x = 7{,}2$ cm. Proponha que determinem a medida de perímetro de um pentágono regular para outras medidas de comprimento do lado por meio da lei da função, caso julgue necessário.

• Para determinar a lei da função que relaciona y e x no **item a** da **atividade 2**, os estudantes precisam traduzir para a linguagem algébrica o texto em língua materna. Caso tenham dificuldades, oriente-os a representar o retângulo no caderno e indicar pelas letras x e y, respectivamente, as medidas da largura e do comprimento. Para responder ao **item b**, os estudantes devem calcular o valor numérico da função encontrada no **item a** para $x = 3{,}6$ m.

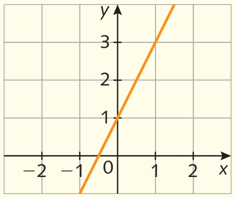
• Na **atividade 3**, espera-se que os estudantes percebam que o salário do garçom é função do total de vendas do restaurante e recordem que 15% é o mesmo que $\frac{15}{100}$ ou 0,15. Após obterem a lei da função que relaciona S e x, verifique se todos percebem que x é um número natural, pois corresponde ao total de vendas do restaurante.

• Na **atividade 4**, os estudantes vão calcular o valor da função $f(x) = 2x + 9$ para diferentes valores de x e também o valor de algumas expressões numéricas. Faça a correção coletiva dos **itens d** e **e** na lousa.

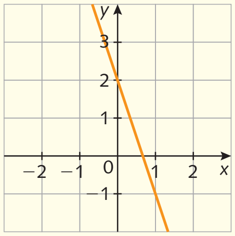
Função afim

- Respostas da **atividade 5**:

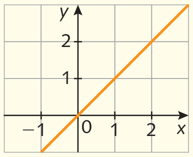
a)



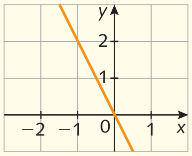
b)



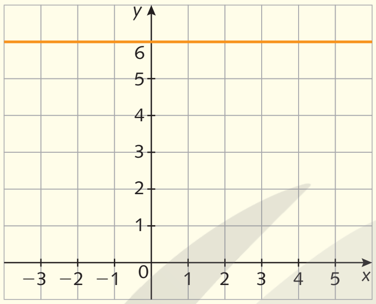
c)



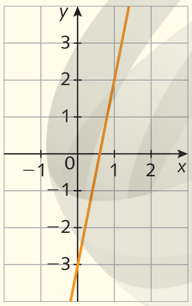
d)



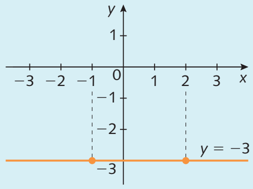
e)



f)



O gráfico de uma função constante sempre será uma reta paralela ao eixo x ou coincidente com o eixo x. Vamos construir o gráfico de $h(x) = -3$.



x	$h(x) = y$	(x, y)
-1	-3	$(-1, -3)$
2	-3	$(2, -3)$

Zero de uma função afim

Em toda função f, cada valor de x em que $f(x) = 0$ é chamado de **zero da função**.

O zero de uma função afim dada por $y = ax + b$, com $a \neq 0$, será um único número x, tal que $ax + b = 0$. Resolvendo essa equação, obtemos $x = -\dfrac{b}{a}$

Graficamente, o zero de uma função afim é a abscissa do ponto de intersecção do gráfico da função com o eixo das abscissas (eixo x).

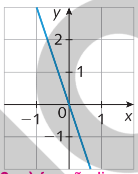
5. Construa os gráficos destas funções afim.

a) $y = 2x + 1$
b) $y = -3x + 2$
c) $y = x$
d) $y = -2x$
e) $y = 6$
f) $y = 5x - 3$

5. Respostas em *Orientações*.

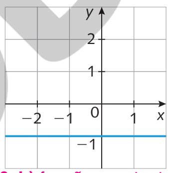
6. Analise os gráficos de funções afim a seguir e determine se representam uma função linear ou constante.

a)



6. a) função linear

b)



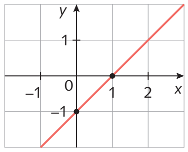
6. b) função constante

7. Carlos revende capas de celular. Cada capa custa R$ 10,50, e o frete é um valor fixo de R$ 23,00. Determine:

a) a lei da função para o valor y a ser pago por Carlos para x capas de celular;
b) o valor a ser pago por Carlos para 120 capas de celular; **7. b)** R$ 1 283,00

7. a) $y = 10{,}5x + 23$, em que x é um número natural maior ou igual a 1.

8. Dado o gráfico a seguir, determine:



a) o par ordenado correspondente ao ponto de intersecção da reta com o eixo y; **8. a)** $(0, -1)$
b) o par ordenado correspondente ao ponto de intersecção da reta com o eixo x; **8. b)** $(1, 0)$
c) a lei de formação da função; **8. c)** $y = x - 1$, em que x é um número real.
d) o zero da função. **8. d)** $x = 1$

9. Determine o zero destas funções considerando que x pode assumir qualquer valor real.

a) $y = x + 3$ **9. a)** -3
b) $y = -2x + 8$ **9. b)** 4
c) $y = -5x$ **9. c)** 0
d) $y = 2x + 5$ **9. d)** $-\dfrac{5}{2}$

Inequações

Toda desigualdade que tenha pelo menos uma incógnita, com expoente maior ou igual a 1, é chamada de **inequação**.

Inequações equivalentes

Em um mesmo conjunto universo, inequações que apresentam as mesmas soluções são chamadas de **inequações equivalentes**.

Pelo **princípio aditivo das desigualdades**, quando adicionamos um mesmo número aos dois membros de uma inequação ou subtraímos um mesmo número dos dois membros de uma inequação, obtemos uma inequação equivalente à inequação dada.

Pelo **princípio multiplicativo das desigualdades**, quando multiplicamos ou dividimos os membros de uma inequação por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma inequação equivalente à inequação dada.

Ao multiplicar ou dividir os membros de uma inequação por um número negativo, é necessário inverter o sinal da desigualdade.

10. Resolva as inequações considerando $U = \mathbb{Q}$.

a) $7 - 3 \cdot (2x + 1) \leqslant -x - 11$ **10. a)** $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 3\}$
b) $3 \cdot (x - 2) + 15 > 2 \cdot (x + 1)$ **10. b)** $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -7\}$
c) $5x - 3 \leqslant 3 \cdot (2x - 5)$ **10. c)** $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 12\}$
d) $7x - 1 > 12x + 7$ **10. d)** $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x < -\dfrac{8}{5}\right\}$

156

- No **item c** da **atividade 8**, para determinar a lei da função representada pelo gráfico, espera-se que os estudantes percebam que o gráfico representa uma função do tipo $y = ax + b$ e utilizem os pontos correspondentes aos pares ordenados $(0, -1)$ e $(1, 0)$, pertencentes ao gráfico da função. Dessa forma, eles podem determinar a e b. Alguns estudantes podem perceber que o gráfico corresponde a uma translação vertical de uma unidade para baixo do gráfico de $y = x$ e, portanto, representa a função $y = x - 1$. Após concluírem a atividade, explore essas duas estratégias de resolução com a turma.

Inequações

- Após os estudantes resolverem as inequações propostas na **atividade 10**, faça a correção coletiva na lousa. Se achar conveniente, questione qual seria o conjunto solução das inequações dos **itens b** e **d** caso o conjunto universo fosse o conjunto dos números naturais.

Capítulo

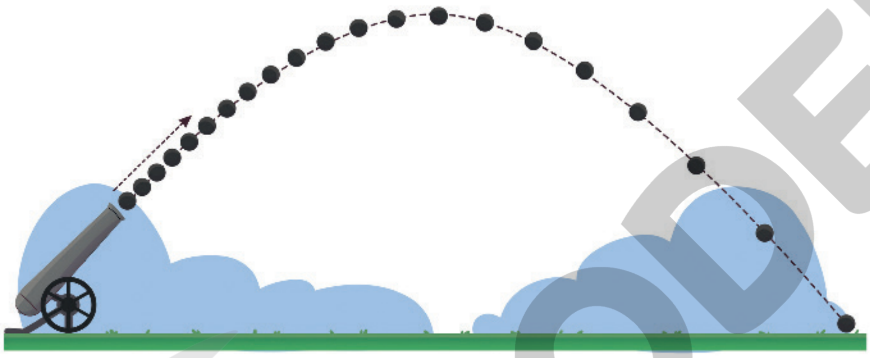
6

Função quadrática

Trocando ideias

A Física é a ciência que estuda a natureza e seus fenômenos em seus aspectos mais gerais. Um dos propósitos da Física é estudar o movimento dos objetos: a trajetória, a rapidez com que se movem, a medida da distância percorrida em dado intervalo de tempo etc. Para isso são utilizadas funções matemáticas.

Alguns movimentos são retilíneos e uniformes e outros, como os movimentos balísticos, apresentam uma trajetória parabólica em que a medida de velocidade não é constante. Confira alguns exemplos de movimento balístico.



ILUSTRAÇÕES: DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

- A trajetória de uma pedra ao ser lançada no ar é dada pela função $S = -t^2 + 10t$, em que S indica a posição, em metros, da pedra no instante t em segundos. **Trocando ideias: a)** 16 m; 24 m **b)** 10 s

a) Qual era a posição da pedra no instante $t = 2$ s? E no instante $t = 4$ s?

b) Após quantos segundos a pedra atingirá o solo? Explique para a turma como você fez para chegar a essa conclusão.

Neste capítulo, vamos estudar o conceito de **função quadrática**, além de construir e analisar gráficos desse tipo de função.

157

CAPÍTULO 6 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 2, 7 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 1, 2, 3, 6 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Verificar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre funções quadráticas.
- Introduzir a noção de movimento balístico.

Para explorar o conteúdo deste *Trocando ideias*, você pode convidar o(a) professor(a) de Ciências. Comente que a Física utiliza modelos matemáticos para estudar diferentes situações cotidianas e que um exemplo disso são os movimentos dos objetos. Depois, peça aos estudantes que analisem o movimento da bala de canhão e o da bola de basquete e digam o que há em comum entre eles. Espera-se que eles percebam que, além de suas trajetórias serem parabólicas, os dois objetos (bala de canhão e bola) atingem uma altura máxima e se movimentam vertical e horizontalmente ao mesmo tempo. Você pode também pedir-lhes que deem outros exemplos de situações cotidianas em que objetos descrevem movimentos parabólicos. Esse tipo de discussão exercita a curiosidade intelectual e a argumentação com base em fatos, o que contribui para o desenvolvimento das competências gerais **2**, **7** e **9** da BNCC.

Solicite aos estudantes que façam a atividade proposta. Pergunte a eles se a função definida pela lei $S = -t^2 + 10t$ é uma função afim. Espera-se que respondam que não, porque é uma função que não pode ser escrita na forma $y = ax + b$, em que a e b são números reais e x pode ser qualquer número real. Se achar necessário, diga que essa é a lei de uma função quadrática. Você pode propor a eles que identifiquem as variáveis dependente e independente e que digam quais valores a variável t pode assumir e por quê.

No **item a**, eles vão calcular o valor numérico da função para $t = 2$ e $t = 4$. Já no **item b**, eles devem interpretar que a pedra atingirá o solo quando $S = 0$; assim, devem resolver a equação do 2º grau $t^2 + 10t = 0$. Ao fazer os cálculos, eles vão obter $t = 0$ s ou $t = 10$ s. Espera-se que percebam que $t = 0$ s corresponde ao momento em que a pedra foi lançada ao ar e que, portanto, após 10 s, a pedra atingiu o solo. Você pode ampliar a proposta dessa atividade e solicitar que esbocem o desenho da trajetória realizada pela pedra com base nos cálculos que fizeram nos **itens a** e **b**.

Esse tipo de atividade possibilita aos estudantes ter ciência de como a Matemática contribui para solucionar problemas e desperta o raciocínio lógico e a capacidade de produzir argumentos convincentes. Além disso, evidencia a relação entre a Matemática e a Física, incentiva a síntese de conclusões por meio de gráficos e da língua materna e promove a interação, pois permite que os estudantes compartilhem suas ideias. Nesse âmbito, é favorecido o desenvolvimento das competências específicas **1**, **2**, **3**, **6** e **8** da BNCC.

Função quadrática

BNCC:

Habilidade EF09MA06.

Objetivos:

- Compreender o conceito de função quadrática.
- Reconhecer, construir e analisar o gráfico de uma função quadrática.
- Determinar algebricamente e graficamente os zeros de uma função quadrática, quando existirem.

Justificativa

Compreender o conceito de função quadrática amplia a ideia de função e os conhecimentos de função afim adquiridos anteriormente pelos estudantes. Além disso, as funções quadráticas modelam diferentes situações cotidianas, como os lançamentos de projéteis, e podem ser usadas para resolver diversos problemas, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA06**.

A determinação dos zeros de uma função quadrática é uma oportunidade de os estudantes mobilizarem os conhecimentos previamente adquiridos sobre resoluções de equações do 2º grau com uma incógnita.

Mapeando conhecimentos

Reproduza a **atividade 19** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e peça aos estudantes que a realize. Após determinarem a sentença algébrica solicitada no **item a**, pergunte: "Essa sentença é uma função? Por quê? Qual é a variável independente? E a variável dependente? A variável a pode assumir qualquer valor? Por quê? Essa função é uma função afim? Por quê?". Dê oportunidade para que os estudantes verbalizem suas respostas. Após concluírem os **itens b** e **c**, você pode ampliar a proposta da atividade e solicitar que representem graficamente a função $y = a^2$, em que a é um número real maior do que 0.

Para as aulas iniciais

Faça a correção coletiva da **atividade 19** e auxilie os estudante a representar graficamente a função $y = a^2$, em que a é um número real maior do que 0. Depois, explore com eles o texto sobre grandezas não proporcionais da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* e enfatize que a medida da área de um quadrado não é proporcional à medida do comprimento do seu lado.

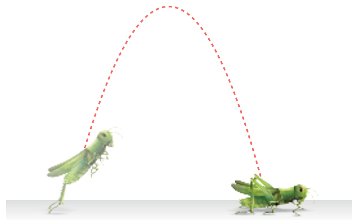
1 Função quadrática

As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

Acompanhe a situação a seguir.

Os gafanhotos são insetos que se alimentam principalmente de folhas. Eles têm pernas posteriores muito fortes, com as quais são capazes de dar grandes saltos.

Um biólogo observou imagens dos movimentos de um gafanhoto e concluiu que, quando o inseto dava um pulo, a medida de sua altura h, em metro, variava em função da medida do tempo t, em segundo, pela lei:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

$$h(t) = -t^2 + 2t, \text{ em que } t \text{ é um número real tal que } 0 \leqslant t \leqslant 2$$

Essa função é um exemplo de **função quadrática**. Note que ela é do tipo $y = ax^2 + bx + c$, com $a = -1$, $b = 2$ e $c = 0$.

Função quadrática é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, e x pode ser qualquer número real.

Considere alguns exemplos.

a) $f(x) = 2x^2 + 16x + 30$, em que $a = 2$, $b = 16$ e $c = 30$.

b) $f(x) = x^2 - 16$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -16$.

c) $f(x) = 6x^2$, em que $a = 6$, $b = 0$ e $c = 0$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 Considerando a função f, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$, determine os valores dos coeficientes a, b e c nestas funções quadráticas.

a) $f(x) = x^2 - 25$ **1. a)** $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$

b) $f(x) = -3x^2 - 6x + 9$ **1. b)** $a = -3$, $b = -6$ e $c = 9$

c) $f(x) = x^2 - 18$ **1. c)** $a = 1$, $b = 0$ e $c = -18$

d) $f(x) = -5x^2 + 13x$ **1. d)** $a = -5$, $b = 13$ e $c = 0$

e) $f(x) = x^2 - 10x + 25$ **1. e)** $a = 1$, $b = -10$ e $c = 25$

f) $f(x) = 3x^2 - 4x + 75$ **1. f)** $a = 3$, $b = -4$ e $c = 75$

2 Sendo a função quadrática f definida por $f(x) = 2x^2 - 6$, determine:

a) $f(5)$ **2. a)** 44

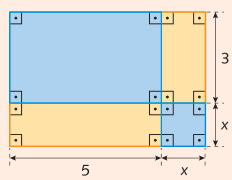
b) $f(0)$ **2. b)** -6

c) $f(-2)$ **2. c)** 2

d) $f(\sqrt{11})$ **2. d)** 16

3 Dada a função quadrática f definida por $f(x) = x^2 - 5x + 6$, para que valores de x tem-se $f(x) = 0$? **3.** $x = 2$ ou $x = 3$

4 Observe a figura a seguir. A medida da área (y) da figura é dada em função da medida de comprimento x indicada. Qual é a lei da função que relaciona x e y?



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

4. $y = x^2 + 8x + 15$, em que x é um número real maior que zero.

158

Peça aos estudantes que identifiquem os coeficientes a, b e c na lei da função que descreve a situação. Espera-se que eles respondam que os coeficientes são: $a = -1$, $b = 2$ e $c = 0$.

(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.

Gráfico da função quadrática

O gráfico de toda função quadrática é uma curva chamada **parábola**.

A parábola é uma curva geométrica que pode ser visualizada parcialmente quando um plano secciona a superfície de um cone (Figura 1) ou quando observamos a trajetória de uma bola lançada obliquamente (Figura 2).

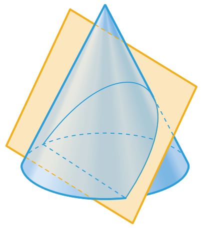

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Figura 1

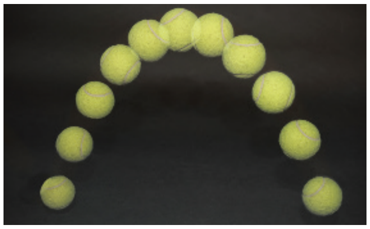

MARCELCLEMENS/SHUTTERSTOCK

Figura 2

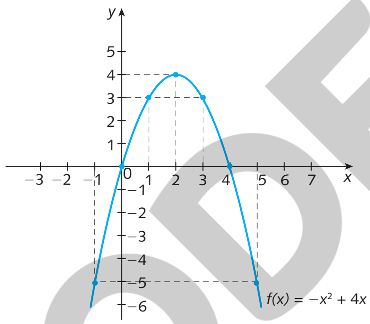
Para construir o gráfico de uma função quadrática, procedemos de maneira similar à da construção dos gráficos de funções afim. Acompanhe os exemplos a seguir.

a) Construção do gráfico da função quadrática f dada pela lei $f(x) = -x^2 + 4x$.

Inicialmente, escolhemos valores arbitrários para x e calculamos os valores de $f(x)$ correspondentes para obter alguns pares ordenados.

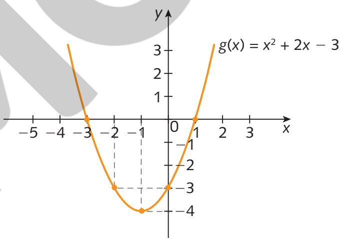
x	$f(x) = y$	(x, y)
–1	–5	(–1, –5)
0	0	(0, 0)
1	3	(1, 3)
2	4	(2, 4)
3	3	(3, 3)
4	0	(4, 0)
5	–5	(5, –5)

Representamos no plano cartesiano os pontos correspondentes aos pares ordenados encontrados e unimos os pontos de modo a traçar a parábola que representa a função.



b) Construção do gráfico da função quadrática g dada pela lei $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

x	y	(x, y)
–3	0	(–3, 0)
–2	–3	(–2, –3)
–1	–4	(–1, –4)
0	–3	(0, –3)
1	0	(1, 0)



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Gráfico da função quadrática

Antes de explorar os exemplos de construção de gráfico, relembre aos estudantes como localizamos os pontos, representados por pares ordenados, no plano cartesiano.

Proponha que façam os cálculos e verifiquem se os valores encontrados para y correspondem aos que estão presentes em cada quadro.

É importante comentar com os estudantes que, no exemplo de construção de gráfico apresentado, os pontos só puderem ser unidos porque x pode assumir qualquer número real.

Concavidade da parábola

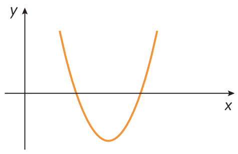
Peça aos estudantes que analisem o gráfico das funções f e g cujos gráficos foram construídos anteriormente. Temos que em $g(x) = -x^2 + 4x$, $a = -1$, e $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $a = 1$. Eles devem observar que, na lei da função g, $a < 0$ e a parábola tem concavidade voltada para baixo; e, na lei da função f, $a > 0$ e a parábola tem concavidade voltada para cima.

Concavidade da parábola

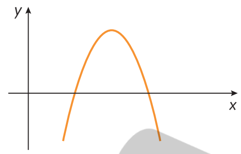
A parábola que representa o gráfico de uma função quadrática pode ter **concavidade** (abertura) voltada para cima ou para baixo.

Dada uma função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando:

- $a > 0$, a parábola tem **concavidade voltada para cima**;



- $a < 0$, a parábola tem **concavidade voltada para baixo**.



Analise alguns exemplos.

a) $f(x) = \underbrace{x^2}_{a = 1} + 2x - 3$

A parábola que representa f tem concavidade voltada para cima, pois $1 > 0$.

b) $g(x) = \underbrace{-x^2}_{a = -1} + 4x$

A parábola que representa g tem concavidade voltada para baixo, pois $-1 < 0$.

Atividades

5. f pode ser relacionada ao Gráfico II e g pode ser relacionada ao Gráfico I.

Faça as atividades no caderno.

5 Considere estes dois gráficos.

Gráfico I

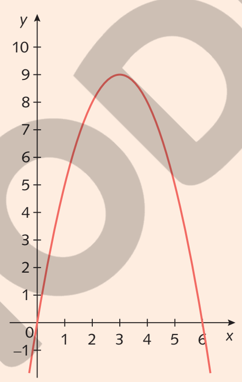
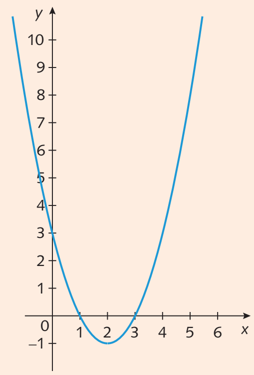


Gráfico II



Sabendo que $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(x) = -x^2 + 6x$, qual função pode ser relacionada a cada um dos gráficos?

6 Das funções quadráticas a seguir, quais representam parábolas com concavidade voltada para cima?

a) $y = -x^2 + x + 2$

b) $y = 2x^2$

c) $y = x^2 + 4x$

d) $y = x^2 + 2x + 5$

e) $y = -3x^2 + 6$

f) $y = -2x^2 + x + 3$

g) $y = -\dfrac{x^2}{2} - x$

h) $y = \left(\dfrac{x}{7} + 6\right)(-x + 2)$

i) $y = \left(\dfrac{5}{9}x + 3\right)^2$

6. alternativas **b**, **c**, **d**, **i**

7 Para que o gráfico da função f dada por $f(x) = (m - 7)x^2 - 3x - 2$ tenha a concavidade voltada para baixo, quais devem ser os valores de m? **7.** $m < 7$

8 Para que valores de p o gráfico da função $g(x) = \left(\dfrac{p}{2} + 3\right)x^2 - \sqrt{2}x + 1$ tem a concavidade voltada para baixo? **8.** $p < -6$

9 Após o lançamento de um projétil, verifica-se que a medida da altura (y) alcançada por ele, em metro, é função da medida da distância percorrida na horizontal (x), em metro, de acordo com a lei e o gráfico a seguir.

$y = -\dfrac{x^2}{900} + \dfrac{2x}{3}$, em que x é um número real tal que $x \geqslant 0$

GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

a) Copie o quadro no caderno substituindo cada ▬ pelos valores correspondentes. **9. a)** Resposta em *Orientações*.

Medida da distância percorrida (em metro)	Medida da altura (em metro)
100	▬
200	▬
▬	100
400	▬
600	0

MODELO MODELO

b) Qual é a medida da altura máxima atingida pelo projétil? **9. b)** 100 metros

c) Depois de quantos metros percorridos na horizontal o projétil atinge a medida da altura máxima? **9. c)** 300 metros

d) Qual é a medida da distância total percorrida na horizontal pelo projétil após ser disparado? **9. d)** 600 metros

Zeros de uma função quadrática

Para uma função f de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, denominamos **zeros da função quadrática** os valores de x tais que $f(x) = 0$.

Assim, na função f dada pela lei $f(x) = x^2 + 2x - 3$:

- o número -3 é zero da função, pois, para $x = -3$, temos:
  $f(-3) = (-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 9 - 6 - 3 = 0$
- o número 1 é zero da função, pois, para $x = 1$, temos:
  $f(1) = (1)^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$
- o número 0 não é zero da função, pois, para $x = 0$, temos:
  $f(0) = (0)^2 + 2 \cdot 0 - 3 = 0 + 0 - 3 = -3$

Determinação dos zeros de uma função quadrática

Para determinar os zeros da função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, basta igualar a função a zero e encontrar as raízes reais da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Graficamente, os zeros da função quadrática (quando existem) correspondem às abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo x.

- Na **atividade 8**, os estudantes precisam lembrar que, para a concavidade estar voltada para baixo, é necessário $a < 0$, ou seja, $\dfrac{p}{2} + 3 < 0$. Dessa forma, temos:

$$\frac{p}{2} + 3 - 3 < 0 - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{p}{2} \cdot 2 < -3 \cdot 2 \Rightarrow p < -6$$

- Resposta do **item a** da **atividade 9**:

Medida da distância percorrida (em metro)	Medida da altura (em metro)
100	$\dfrac{500}{9}$
200	$\dfrac{800}{9}$
300	100
400	$\dfrac{800}{9}$
600	0

Para facilitar os cálculos, oriente os estudantes a colocar o x em evidência na lei da função.

Zeros de uma função quadrática

Antes de iniciar o estudo dos zeros de uma função quadrática, verifique se os estudantes se lembram do conceito de zero de uma função afim.

É importante que eles percebam que, para determinar os zeros de uma função quadrática, precisam calcular as raízes de uma equação do 2º grau com uma incógnita. Se achar necessário, recorde como determinar as raízes de equações do 2º grau incompletas e completas.

Chame a atenção dos estudantes para a relação entre o sinal do discriminante e a quantidade de zeros da função quadrática.

Se achar oportuno, apresente e desenvolva com a turma outros exemplos.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Vamos determinar os zeros da função f dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6$$
$$\Delta = 25 - 24$$
$$\Delta = 1$$

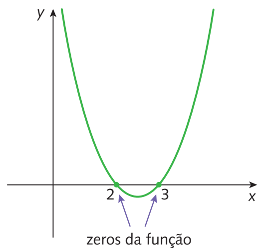
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

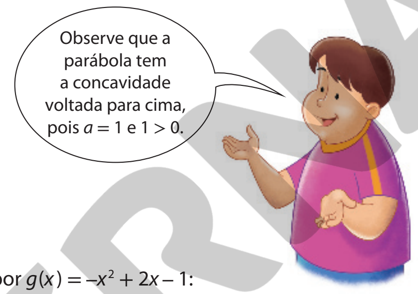
$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{4}{2} = 2 \\ x_2 = \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

A equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ tem duas raízes reais diferentes: $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$.

Assim, os zeros da função f dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$ são 2 e 3. Isso significa que o gráfico da função f intercepta o eixo x em dois pontos: (2, 0) e (3, 0). Analise o esboço do gráfico.

GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA





GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

b) Vamos determinar os zeros da função g dada por $g(x) = -x^2 + 2x - 1$:

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)$$
$$\Delta = 4 - 4$$
$$\Delta = 0$$

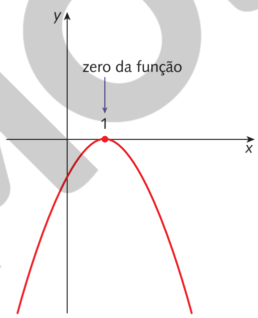
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm 0}{-2} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{-2}{-2} = 1 \\ x_2 = \frac{-2}{-2} = 1 \end{cases}$$

A equação $-x^2 + 2x - 1 = 0$ tem duas raízes reais iguais: $x_1 = x_2 = 1$

Assim, a função g dada por $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ tem um único zero igual a 1. Isso significa que o gráfico da função g intercepta o eixo x em um único ponto: (1, 0). Analise o esboço do gráfico.

GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

c) Vamos determinar os zeros da função h dada por $h(x) = x^2 + 2x + 3$:

$x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3$

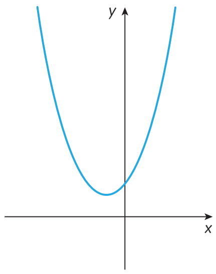
$\Delta = 4 - 12$

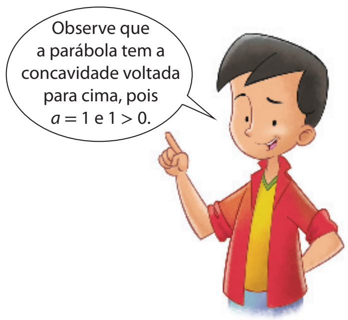
$\Delta = -8$

Como $\Delta < 0$, a equação $x^2 + 2x + 3 = 0$ não tem raízes reais.

Assim, a função dada por $h(x) = x^2 + 2x + 3$ não tem zeros reais.

Isso significa que o gráfico da função h não intercepta o eixo x. Analise o esboço do gráfico.

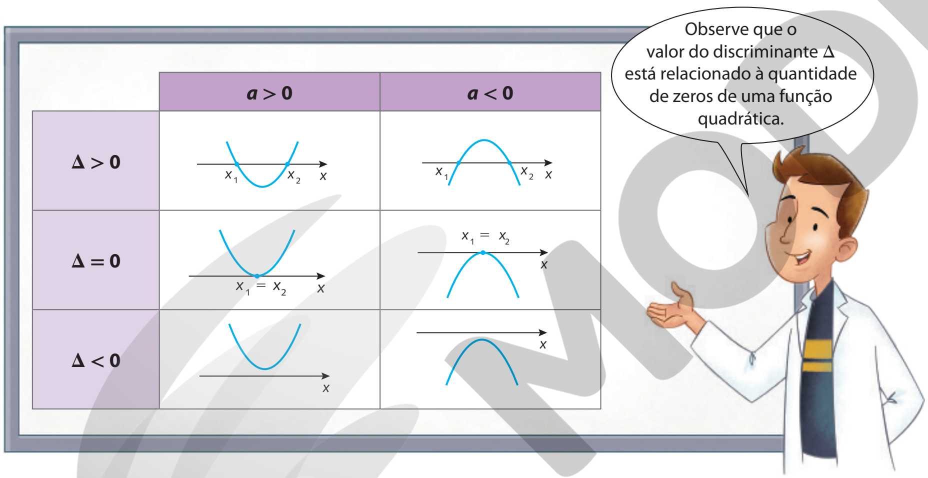




ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

De modo geral, temos que:

- se $\Delta > 0$, a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos;
- se $\Delta = 0$, a parábola tangencia o eixo das abscissas em um único ponto;
- se $\Delta < 0$, a parábola não intercepta o eixo das abscissas.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Após explorar o exemplo da página com os estudantes, proponha que apresentem um exemplo de função quadrática que não tenha zeros reais e cujo gráfico mostre uma parábola com a concavidade voltada para baixo. Depois, reserve um momento para que compartilhem os exemplos e para que os colegas possam validá-los.

Cálculo das coordenadas do vértice da parábola

Represente uma parábola na lousa e trace o eixo de simetria dela. Em seguida, pergunte aos estudantes como eles poderiam calcular as coordenadas do vértice da parábola. Incentive-os a fazer algumas experimentações. A ideia é que eles percebam que a abscissa do vértice é igual à média aritmética das abscissas de pontos simétricos que pertencem à parábola. Além disso, eles devem concluir que a ordenada do vértice corresponde ao valor da função, quando substituímos a variável pela abcissa do vértice.

10. a) 0
10. b) -2 e 2
10. c) -1 e 1
10. d) 0 e -2
10. e) não tem zero real
10. f) 1 e $\frac{2}{3}$
10. g) $-\frac{1}{3}$
10. h) não tem zero real
10. i) não tem zero real

Atividades

Faça as atividades no caderno.

10 Determine no caderno, se houver, os zeros das funções quadráticas definidas pelas leis a seguir.

a) $y = 6x^2$
b) $y = x^2 - 4$
c) $y = -x^2 + 1$
d) $y = 5x^2 + 10x$
e) $y = -x^2 + 2x - 5$
f) $y = 3x^2 - 5x + 2$
g) $y = -9x^2 - 6x - 1$
h) $y = x^2 + 5x + 8$
i) $y = -3x^2 + 2x - 1$

11 Determine as coordenadas dos pontos em que a parábola correspondente a cada função quadrática a seguir intercepta o eixo x.

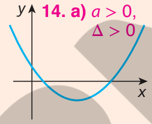
a) $y = -3x^2 + 12x$ **11. a)** (0, 0) e (4, 0)
b) $y = x^2 - 4$ **11. b)** $(-2, 0)$ e $(2, 0)$
c) $y = x^2 - 8x + 15$ **11. c)** (3, 0) e (5, 0)

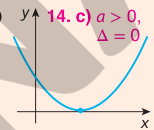
12 Quais das afirmações a seguir são verdadeiras? **12.** alternativas **b**, **c**

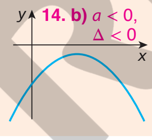
a) Uma função quadrática pode ter três zeros reais e distintos.
b) O gráfico de uma função quadrática dada por $y = ax^2 + c$ não intercepta o eixo das abscissas quando $4ac > 0$.
c) Os zeros da função $g(x) = ax^2 + bx$, em que $a \neq 0$, são 0 e $-\frac{b}{a}$.
d) O gráfico da função quadrática dada por $p(x) = ax^2$ tangencia o eixo das abscissas no ponto (1, 0).

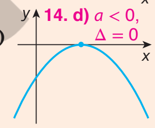
13 A trajetória de um projétil lançado é descrita pelo gráfico da função h, tal que $h(x) = -x^2 + 30x$, no qual, em metro, $h(x)$ representa a medida da altura alcançada e x, a medida da distância percorrida na horizontal. Qual é a medida da distância percorrida pelo projétil ao atingir o solo?
13. 30 metros

14 Estes esboços são de gráficos de funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Em cada caso, escreva no caderno se a é positivo ou negativo e se Δ é positivo, negativo ou nulo.

a)

14. a) $a > 0$, $\Delta > 0$

c)

14. c) $a > 0$, $\Delta = 0$

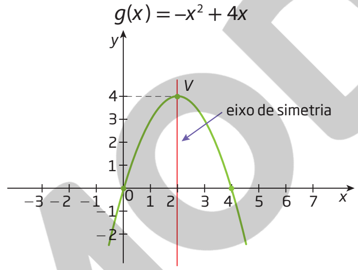
b)

14. b) $a < 0$, $\Delta < 0$

d)

14. d) $a < 0$, $\Delta = 0$

Cálculo das coordenadas do vértice da parábola

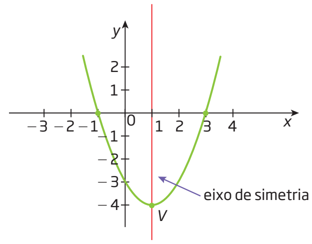
Observe nos exemplos a seguir que toda parábola tem um eixo de simetria e um **vértice** (V).

$g(x) = -x^2 + 4x$



vértice: $V(2, 4)$
zeros da função: 0 e 4

$h(x) = x^2 - 2x - 3$



vértice: $V(1, -4)$
zeros da função: -1 e 3

O vértice é a intersecção da parábola com o eixo de simetria.

Observe que nos dois casos a abscissa do vértice (x_V) corresponde à metade da soma dos zeros da função $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. E, para obter a ordenada do vértice (y_V), basta substituir x por x_V na lei da função e efetuar os cálculos.

Acompanhe como podemos calcular as coordenadas do vértice das parábolas que representam as funções g e h.

- Coordenadas do vértice da parábola que representa a função g:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0+4}{2} = 2$$

$$y_V = g(x_V) = g(2) = -(2)^2 + 4 \cdot (2) = 4$$

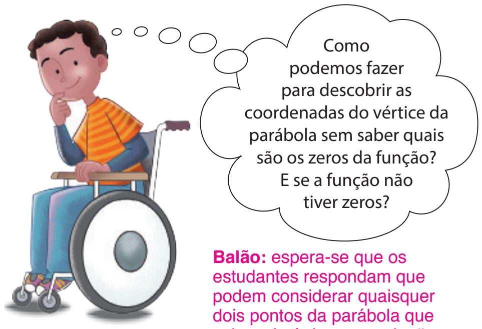
Portanto, $V(2, 4)$.

- Coordenadas do vértice da parábola que representa a função h:

$$x_V = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1$$

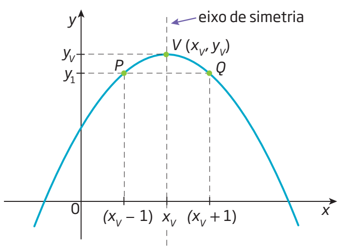
$$y_V = h(x_V) = h(1) = (1)^2 - 2 \cdot (1) - 3 = -4$$

Portanto, $V(1, -4)$.

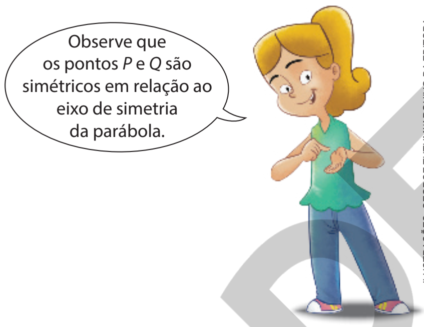


Balão: espera-se que os estudantes respondam que podem considerar quaisquer dois pontos da parábola que sejam simétricos em relação ao seu eixo de simetria.

Como toda parábola tem um eixo de simetria e um vértice V, podemos relacionar a abscissa do vértice da parábola que representa a função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ aos coeficientes a e b.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA



ILUSTRAÇÕES: GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

No gráfico da função quadrática f, as abscissas $x_V - 1$ e $x_V + 1$ estão à mesma medida da distância de x_V e que $f(x_V - 1) = f(x_V + 1) = y_1$. Dessa maneira, temos:

$$a(x_V - 1)^2 + b(x_V - 1) + c = a(x_V + 1)^2 + b(x_V + 1) + c$$

$$a(x_V^2 - 2x_V \cdot 1 + 1) + b(x_V - 1) + c = a(x_V^2 + 2x_V \cdot 1 + 1) + b(x_V + 1) + c$$

$$\cancel{ax_V^2} - 2ax_V + \cancel{a} + \cancel{bx_V} - b + \cancel{c} = \cancel{ax_V^2} + 2ax_V + \cancel{a} + \cancel{bx_V} + b + \cancel{c}$$

$$-2ax_V - b = 2ax_V + b$$

$$-4ax_V = 2b$$

$$x_V = \frac{2b}{-4a}\text{, ou seja: } \boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$

Lembre-se de que, conhecendo a abscissa x_V, a ordenada do vértice será $y_V = f(x_V)$.

▸ Substitua x_V na lei da função quadrática e conclua que $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$, em que $\Delta = b^2 - 4ac$.
Item: Resposta em *Orientações*.

Chame a atenção dos estudantes para o fato de que toda parábola possui um eixo de simetria e um vértice. Esse vértice é determinado pela intersecção da parábola com o eixo de simetria.

Comente com os estudantes que, na demonstração, foram tomados dois pontos simétricos quaisquer em relação ao eixo de simetria e que, por esse motivo, poderíamos considerar suas abscissas, por exemplo, $x_v - 2$ e $x_v + 2$, ou $x_v - 3$ e $x_v + 3$, ou $x_v - 4$ e $x_v + 4$ etc.

No final da página, é proposto aos estudantes como concluir que a ordenada do vértice da parábola é $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$. Dê um tempo para que desenvolvam os cálculos. Depois, mostre a eles como podem chegar a essa conclusão:

$$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right) =$$

$$= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} =$$

$$= \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$$

• Na **atividade 15**, espera-se que os estudantes percebam que, para o vértice da parábola pertencer ao eixo x, ela deve tangenciar esse eixo, e portanto, $(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 0$. Por meio dessa equação, os estudantes podem concluir que $k = 16$.

• Amplie a proposta da **atividade 16** e pedindo aos estudantes que construam o gráfico da função quadrática indicada em cada item. Oriente-os a iniciar a construção tomando como base o vértice e os zeros de cada função (se existirem).

• Na **atividade 17**, para determinar a e b, os estudantes devem resolver um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Um exemplo de sistema é:

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{a}{9} + \dfrac{b}{3} + 2 = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Caso eles obtenham um valor negativo para a, incentive-os a perceber que podem ter cometido algum equívoco nos cálculos, uma vez que $a > 0$ (a parábola tem concavidade voltada para cima).

Agora, acompanhe dois exemplos.

a) Vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola correspondente ao gráfico da função quadrática p dada por $p(x) = x^2 - 3x + 2$:

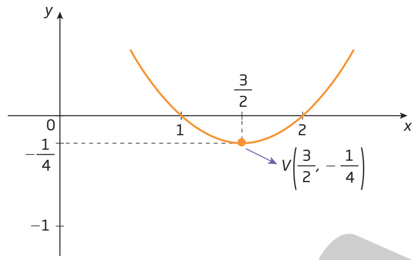
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-3)}{2 \cdot 1} = \frac{3}{2}$$

$$y_V = p(x_V) = p\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) + 2$$

$$p\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}$$

Portanto: $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.



b) Vamos determinar os valores de m e n para que o gráfico da função q dada por $q(x) = x^2 - mx + \frac{n}{2}$ tenha vértice $V(1, 1)$:

A abscissa do vértice é dada por: $x_V = -\frac{b}{2a}$. Então, para que $x_V = 1$, devemos ter:

$$-\frac{(-m)}{2 \cdot 1} = 1, \text{ ou seja: } m = 2$$

Substituindo o valor de m na lei da função, obtemos:

$$q(x) = x^2 - 2x + \frac{n}{2}$$

Como $x_V = 1$ e $y_V = 1$, temos: $q(1) = 1$. Assim, podemos determinar o valor de n:

$$q(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + \frac{n}{2}$$

$$1 = 1 - 2 + \frac{n}{2} \Rightarrow 2 = \frac{n}{2} \Rightarrow n = 4$$

Assim: $m = 2$ e $n = 4$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

15 Determine o valor de k para que o vértice da parábola, que é gráfico da função f tal que $f(x) = x^2 - 8x + k$, pertença ao eixo x.

15. $k = 16$

16 Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa cada função quadrática a seguir.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 16. a) $V(2, -1)$

b) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ 16. b) $V(3, 0)$

c) $f(x) = -x^2 + 2x$ 16. c) $V(1, 1)$

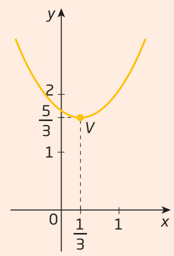
d) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ 16. d) $V(-1, 2)$

e) $f(x) = x^2 - x - 2$ 16. e) $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

f) $f(x) = 3x^2 - 4x$ 16. f) $V\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

17 A lei da função quadrática f correspondente ao gráfico a seguir é $f(x) = ax^2 + bx + 2$. Determine a e b.

17. $a = 3$, $b = -2$



ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

166

Construção do gráfico de uma função quadrática com base nas coordenadas do vértice

Analise como podemos construir o gráfico da função quadrática f dada por $f(x) = x^2 - 4x + 5$ com base nas coordenadas do vértice.

1º) Determinamos as coordenadas do vértice.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2 \qquad y_V = f(x_V) = (2)^2 - 4 \cdot (2) + 5 = 1$$

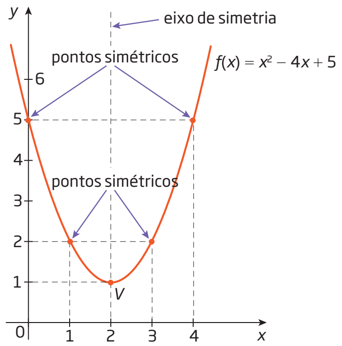
Assim, o vértice é o ponto $V(2, 1)$.

2º) Determinamos valores para x que sejam simétricos em relação à abscissa do vértice e calculamos os valores de y correspondentes para obter alguns pares ordenados.

Nesse caso, vamos escolher valores para x que sejam simétricos em relação a $x_V = 2$.

x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
1	2	(1, 2)
2	**1**	**(2, 1)** → coordenadas do vértice
3	2	(3, 2)
4	5	(4, 5)

3º) Marcamos no plano cartesiano os pontos correspondentes aos pares ordenados e traçamos a parábola que passa por esses pontos.



Atividades

Faça as atividades no caderno.

18 Construa no caderno o gráfico de cada função quadrática.

18. Respostas em Orientações.

a) $f(x) = -x^2$

b) $g(x) = x^2 - 9$

c) $h(x) = -x^2 + 4$

d) $s(x) = x^2 - 4x$

e) $t(x) = x^2 - 6x + 10$

f) $u(x) = -x^2 + 4x - 5$

19. A resposta está na seção Resoluções e comentários das atividades deste Manual do Professor.

19 Construa o gráfico das funções quadráticas f e g, dadas pelas leis $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ em um mesmo plano cartesiano. O que você pode perceber?

20 Construa o gráfico de cada função: $f(x) = x^2$, $b(x) = x^2 - 2$, $t(x) = x^2 - 1$, $h(x) = x^2 + 1$ e $m(x) = x^2 + 2$. Depois, compare-os e analise como o valor de c influencia o gráfico da função definida pela lei $y = ax^2 + c$.

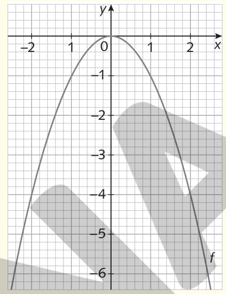
20. A resposta está na seção Resoluções e comentários das atividades deste Manual do Professor.

Construção do gráfico de uma função quadrática com base nas coordenadas do vértice

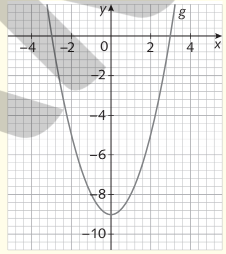
Considere a função f, tal que $f(x) = x^2 - 4x + 5$, explorada no exemplo, sendo $a = 1$, $b = -4$ e $c = 5$. Altere o valor de c, a fim de que os estudantes percebam, de forma mais clara, a influência do coeficiente c no gráfico da função. Para isso, pode ser usado um *software* que gere gráficos a partir da lei de uma função.

- Respostas da **atividade 18**:

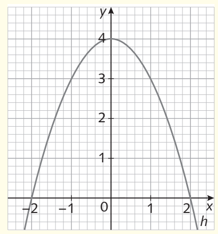
a)



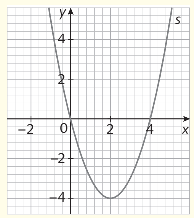
b)



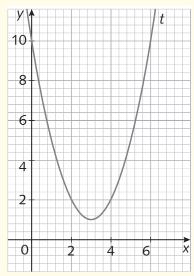
c)



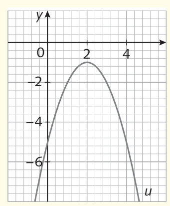
d)



e)



f)



- Na **atividade 19**, espera-se que os estudantes percebam que os gráficos são simétricos em relação ao eixo das abscissas.
- Na **atividade 20**, espera-se que os estudantes percebam que o valor de c determina o deslocamento vertical da parábola.

Ponto de mínimo ou ponto de máximo de uma função quadrática

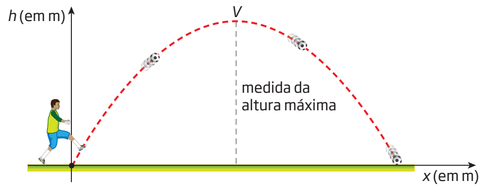
Comente com os estudantes que, diferente da função afim, a função quadrática apresenta um valor máximo ou um valor mínimo. Utilize a representação gráfica de diferentes funções quadráticas para explicar que, quando essa função tem concavidade para cima, ela possui ponto de mínimo (consequentemente, um valor mínimo) e, quando tem a concavidade para baixo, ela possui ponto de máximo (consequentemente, um valor máximo). Para compreender de fato essas ideias, eles precisam identificar corretamente o que está sendo representado em cada um dos eixos do plano cartesiano.

- Amplie a proposta da **atividade 22** e peça aos estudantes que construam a parábola que representa a função quadrática de cada item. Essa construção não só permite a mobilização de diferentes registros de representação, como também pode auxiliá-los a verificar se determinaram corretamente o valor mínimo ou máximo em cada caso.

Ponto de mínimo ou ponto de máximo de uma função quadrática

Acompanhe a situação a seguir.

Um goleiro chuta uma bola cuja trajetória pode ser representada pelo gráfico da função h, dada pela lei $h(x) = -\frac{x^2}{20} + x$, em que x indica a medida da distância horizontal percorrida, em metro, e $h(x)$, a medida da altura que a bola alcançou, em metro. Qual é a medida da altura máxima atingida pela bola?



Perceba que o gráfico que representa a trajetória da bola é parte de uma parábola com a concavidade voltada para baixo e que a medida da altura máxima atingida pela bola corresponde à ordenada do vértice.

Vamos calcular x_V e y_V:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{20}\right)}, \text{ ou seja, } x_V = 10;$$

$$y_V = h(x_V) = h(10) = -\frac{10^2}{20} + 10, \text{ ou seja, } y_V = 5.$$

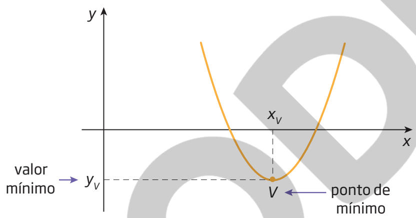
Portanto, a medida da altura máxima atingida pela bola é 5 metros.

Toda função quadrática tem um **valor máximo** ou um **valor mínimo** que corresponde à ordenada do vértice da parábola que a representa.

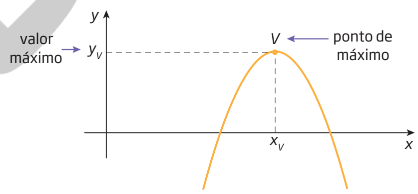
Para uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

- se $a > 0$, a função tem **valor mínimo**, e o vértice é chamado **ponto de mínimo**;
- se $a < 0$, a função tem **valor máximo**, e o vértice é chamado **ponto de máximo**.

$a > 0$



$a < 0$



Atividades

22. a) valor mínimo: –64
22. b) valor máximo: 0
22. c) valor máximo: $\frac{9}{4}$
22. d) valor mínimo: $-\frac{25}{4}$
22. e) valor máximo: $-\frac{3}{4}$
22. f) valor mínimo: $-\frac{25}{8}$

Faça as atividades no caderno.

21 Em cada item, calcule o valor de x para que a função tenha um valor máximo.

a) $f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ **21. a)** $\frac{5}{4}$
b) $f(x) = -x^2 + 11x - 8$ **21. b)** $\frac{11}{2}$

22 Verifique se as funções quadráticas admitem valor máximo ou valor mínimo e calcule esse valor.

a) $f(x) = x^2 - 64$
b) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$
c) $f(x) = -x^2 + 3x$
d) $f(x) = x^2 - x - 6$
e) $f(x) = -x^2 + 5x - 7$
f) $f(x) = 2x^2 + 5x$

ILUSTRAÇÕES: LUIZ RUBIO/ ARQUIVO DA EDITORA

23 Determine o valor de k para que a função definida por $f(x) = -4x^2 + (k + 1)x + 2$ admita valor máximo para $x = 2$. **23.** $k = 15$

24 Determine o valor de p na função dada por $f(x) = 3x^2 - 2x + p$, para que o valor mínimo seja $\frac{5}{3}$. **24.** $p = 2$

25 Após o lançamento de uma bala por um canhão, verifica-se que a medida da altura (y), alcançada pela bala, em metro, é função da medida da distância horizontal percorrida (x), em metro, de acordo com a lei $y = 100x - 2x^2$, sendo $0 \leqslant x \leqslant 50$.

Determine, em metro:

a) o alcance do lançamento; **25. a)** 50 m

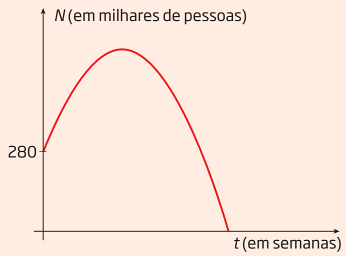
b) a medida da altura máxima atingida pela bala. **25. b)** 1 250 m

26 A função g dada pela lei $g(t) = t^2 - 4t + 3$ relaciona a medida da temperatura g, em grau Celsius, de uma câmara frigorífica e a medida do tempo t, em hora, em que permaneceu ligada. **26. a)** 1 hora e 3 horas depois que a câmara é ligada.

a) Em quais momentos a medida da temperatura é igual a 0 °C?

b) Qual é a medida de temperatura mínima atingida? **26. b)** –1 °C

27 Em certo país, houve uma epidemia provocada por um vírus. As estatísticas apontaram que, inicialmente, foram comprovados 280 mil casos de pessoas infectadas pelo vírus. Essa epidemia pode ser representada pela lei $N(t) = 280 + 120t - 10t^2$, em que $N(t)$ é o número de pessoas infectadas (em milhares) dado em função do número t de semanas decorridas. Imediatamente após a comprovação dos primeiros casos, teve início a vacinação em massa da população, a fim de controlar essa epidemia. O gráfico esboçado a seguir representa a situação desde o aparecimento do vírus até o seu combate.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual foi a maior quantidade de pessoas infectadas nesse período? **27. a)** 640 000 pessoas

b) Depois de quantas semanas essa epidemia foi controlada, isto é, o número de pessoas infectadas foi reduzido para zero? **27. b)** depois de 14 semanas

28 Elabore um problema em que haja um lançamento oblíquo de um objeto. Escolha o contexto que julgar mais interessante. A resolução do problema deve envolver uma função quadrática que determine a trajetória do objeto e a busca pela medida da altura máxima atingida na trajetória. Troque seu problema com um colega e resolva o que ele propôs. Discutam as estratégias e os procedimentos da resolução do problema. Se houver divergências, tentem esclarecer as dúvidas um do outro. Caso as dúvidas persistam, conversem com o professor. **28.** Resposta pessoal.

29 Em dupla, elaborem um problema no qual uma indústria produza determinado produto. Para isso, sigam as instruções a seguir. Depois, troquem o problema com outra dupla e resolvam. **29.** Respostas pessoais.

- Considere x a quantidade do produto em milhares. O preço de custo é dado por uma função afim c da forma $c(x) = ax + b$, com a e b reais positivos. E o preço de venda é dado por $v(x) = kx^2 + mx + n$, com k, m e n reais e $k \neq 0$.
- Uma das tarefas será determinar e esboçar o gráfico da função L (lucro), em que $L(x) = v(x) - c(x)$. É importante que a parábola que represente a função L tenha concavidade para baixo e uma das raízes seja zero.
- No gráfico, identifiquem o ponto que determina o lucro máximo em função da quantidade de produtos vendidos.

- Na **atividade 23**, verifique se os estudantes percebem que eles devem resolver a seguinte equação do 1º grau com uma incógnita: $\frac{k+1}{8} = 2$, com $U = \mathbb{R}$.
- Para calcular o valor de p na **atividade 24**, os estudantes devem perceber que $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}$. Assim, eles devem resolver a seguinte equação do 1º grau com uma incógnita: $-\frac{1}{3} + p = \frac{5}{3}$, com $U = \mathbb{R}$.
- Ao realizarem a **atividade 25**, verifique se percebem que, para responder ao **item a**, precisam determinar os zeros da função e, para responder ao **item b**, devem calcular a ordenada do vértice da parábola que representa a função.

169

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Função quadrática

• Na **atividade 1**, antes que os estudantes façam os cálculos solicitados em cada item, peça para que justifiquem o porquê da função *f* ser quadrática. Você também pode pedir para que apresentem os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* dessa função.

• Na **atividade 2**, os estudantes vão resolver uma equação do 2º grau com uma incógnita. Deixe-os a vontade para utilizar a estratégia que quiserem. Ao final, incentive-os a compartilhar como fizeram.

• Na **atividade 3**, os estudantes vão lidar com conceitos e procedimentos das unidades temáticas *Álgebra* e *Grandezas e Medidas*, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **3** de Matemática da BNCC. É importante que eles percebam que x deve ser um número real maior que 3, pois, se x for menor ou igual a 3, a medida do comprimento de um dos lados do modelo será zero ou negativa, o que não convém.

• Verifique se todos os estudantes se recordam de como determinar a medida da área de um triângulo na **atividade 4**. Nesta atividade, como $x - 1$ representa a medida da altura do triângulo, x deve ser um número real maior que 1. Chame a atenção dos estudantes para esse detalhe.

• Na **atividade 5**, espera-se que os estudantes considerem que, para o gráfico da função ter concavidade voltada para cima, $2p + 8 > 0$. Verifique se apresentam dificuldades para resolver a inequação e, se necessário, retome os princípios aditivo e multiplicativo das desigualdades.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Função quadrática

Função quadrática é toda função f cuja lei pode ser escrita na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$, e x pode ser qualquer número real.

1. Sendo a função quadrática f definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$, determine:

a) $f(-1)$ **1. a)** 6

b) $f(3)$ **1. b)** 2

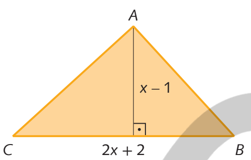
c) $f(0) + f(-2)$ **1. c)** 14

d) $\dfrac{f(1) + f(2)}{f(0)}$ **1. d)** 0

2. Dada a função $f(x) = x^2 - 4x + 3$, determine o número real x tal que $f(x) = 3$. **2.** $x = 0$ ou $x = 4$

3. Uma empresa de embalagens utiliza modelos retangulares de papelão com dimensões que medem $x + 4$ e $x - 3$ para construir caixas. Determine a lei da função que representa a medida da área $A(x)$ desses modelos de papelão em função de x. **3.** $A(x) = x^2 + x - 12$, em que x é um número real maior que 3.

4. Considere a figura a seguir.



4. a) $y = x^2 - 1$, em que x é um número real maior que 1.

a) Determine a medida da área y do triângulo em função de x.

b) Calcule a medida da área em m² para $x = 7$ m. **4. b)** 48 m²

Gráfico da função quadrática

O gráfico de toda função quadrática é uma curva chamada **parábola**.

Concavidade da parábola

A parábola que representa o gráfico de uma função quadrática pode ter **concavidade** (abertura) voltada para cima ou para baixo. Dada uma função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, quando:

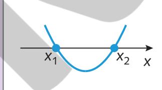
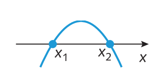
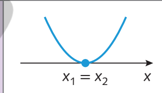
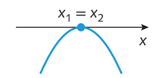
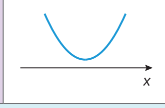
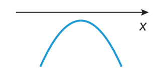
- $a > 0$, a parábola tem **concavidade voltada para cima**;
- $a < 0$, a parábola tem **concavidade voltada para baixo**.

Zeros de uma função quadrática

Para uma função f de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, denominamos **zeros da função quadrática** os valores de x tais que $f(x) = 0$.

Seja $\Delta = b^2 - 4ac$, quando:

- $\Delta > 0$, a função tem dois zeros reais diferentes e a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos distintos;
- $\Delta = 0$, a função tem dois zeros reais iguais e a parábola tangencia o eixo das abscissas em um único ponto;
- $\Delta < 0$, a função não tem zeros reais e a parábola não intercepta o eixo das abscissas.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$		

Cálculo das coordenadas do vértice da parábola

$$V = (x_V, y_V)$$

$$\boxed{x_V = -\frac{b}{2a}} \qquad \boxed{y_V = f(x_V)}$$

5. Determine os valores de p para que o gráfico da função dada por $f(x) = (2p + 8)x^2 - 5x - 13$ tenha a concavidade voltada para cima. **5.** $p > -4$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

8. a) $\Delta = 16$, corta o eixo x em dois pontos distintos.
8. b) $\Delta = -28$, não corta o eixo x.
8. c) $\Delta = 0$, tangencia o eixo x em um único ponto.
8. d) $\Delta = 4$, corta o eixo x em dois pontos distintos.

6. Determine os valores de q para que o gráfico da função dada por $f(y) = (5 - 3q)y^2 - y + 8$ tenha a concavidade voltada para baixo. **6.** $q > \frac{5}{3}$

7. Para as funções quadráticas a seguir, determine os zeros da função.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 7$ **7. a)** 1 e 7
b) $f(x) = x^2 - 36$ **7. b)** -6 e 6
c) $f(x) = x^2 - 3x$ **7. c)** 0 e 3
d) $f(x) = -x^2 - 8x - 16$ **7. d)** -4

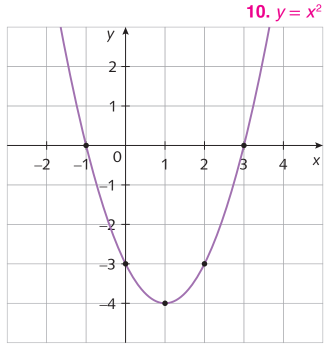
8. Verifique, para cada função quadrática, se a parábola intercepta o eixo x em dois pontos distintos, se tangencia o eixo x ou se não intercepta o eixo x.

a) $y = x^2 - 6x + 5$
b) $y = -x^2 + 6x - 16$
c) $y = -x^2 - 2x - 1$
d) $y = x^2 + 6x + 8$

9. Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa cada função quadrática.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **9. a)** $V(-2, -3)$
b) $f(x) = x^2 - 25$ **9. b)** $V(0, -25)$
c) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **9. c)** $V(1{,}5; -0{,}25)$
d) $f(x) = -x^2 - 4x - 4$ **9. d)** $V(-2, 0)$

10. Esta parábola representa a função $f(x) = ax^2 + bx - 3$. Determine a lei dessa função após calcular os coeficientes a e b. **10.** $y = x^2 - 2x - 3$



11. Sabendo que o vértice da parábola é $V\left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, determine os coeficientes a e b da função quadrática $y = ax^2 + bx + 12$. **11.** $y = x^2 - 7x + 12$

12. Para cada função quadrática a seguir, determine:

I. os zeros da função;
II. o vértice;
III. o ponto em que a parábola corta o eixo das ordenadas;
IV. o gráfico. **12.** Respostas em *Orientações*.

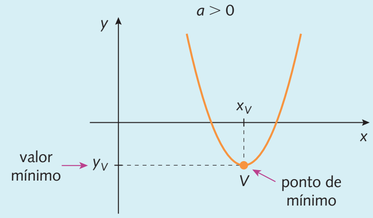
a) $y = x^2 - 8x + 15$
b) $y = -x^2 + 10x - 24$
c) $y = x^2 - 2x$
d) $y = -x^2 + 4$

Ponto de mínimo ou ponto de máximo de uma função quadrática

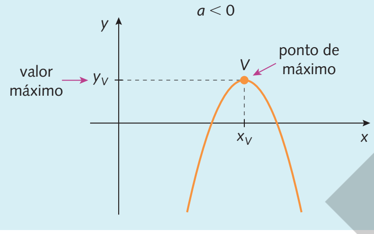
Toda função quadrática tem um **valor máximo** ou um **valor mínimo** que corresponde à ordenada do vértice da parábola que a representa.

Para uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

- se $a > 0$, a função tem **valor mínimo**, e o vértice é chamado **ponto de mínimo**;



- se $a < 0$, a função tem **valor máximo**, e o vértice é chamado **ponto de máximo**.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

13. Verifique se as funções quadráticas admitem valor máximo ou valor mínimo e calcule esse valor.

a) $f(x) = -x^2 - 6x + 7$ **13. a)** valor máximo: 16
b) $f(x) = -x^2 + 121$ **13. b)** valor máximo: 121
c) $f(x) = x^2 - 20x$ **13. c)** valor mínimo: -100
d) $f(x) = x^2 - 12x + 36$ **13. d)** valor mínimo: 0

14. Qual deve ser o valor de k para que a função definida por $f(x) = -3x^2 + (2k + 7)x + 2$ admita valor máximo para $x = 4$? **14.** $k = 8{,}5$

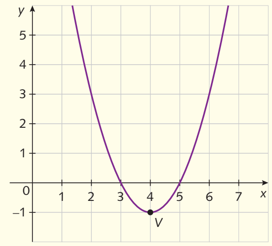
15. Em uma companhia de transporte de ônibus, a receita de determinada viagem é dada por $f(x) = -x^2 + 104x + 120$, em que $f(x)$ é a receita, em reais, e x é o número de passageiros para essa viagem. Determine:

a) o número de passageiros para atingir a receita máxima; **15. a)** 52 passageiros
b) a receita máxima. **15. b)** R$ 2 824,00

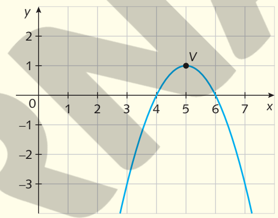
171

- Respostas da **atividade 12**:

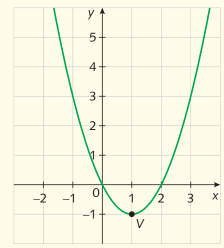
a) Zeros da função: $x_1 = 5$ e $x_2 = 3$;
Vértice: $V(4, -1)$;
Intersecção com o eixo y: (0, 15)
Gráfico da função:



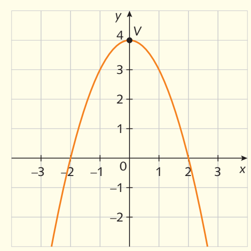
b) Zeros da função: $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$;
Vértice: $V(5, 1)$;
Intersecção com o eixo y: – (0, –24)
Gráfico da função:



c) Zeros da função: $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$;
Vértice: $V(1, -1)$;
Intersecção com com o eixo y: (0, 0)
Gráfico da função:



d) Zeros da função: $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$;
Vértice: $V(0, 4)$;
Intersecção com com o eixo y: (0, 4)
Gráfico da função:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 8**, os estudantes podem analisar o sinal de Δ ou fazer um esboço do gráfico da função de cada item. Após realizarem a atividade, explore essas duas estratégias com eles.
- Após os estudantes determinarem as coordenadas do vértice da parábola que representa cada função da **atividade 9**, você pode propor que construam o gráfico dessas funções no GeoGebra, localizem o vértice com base nas coordenadas que calcularam e verifiquem, se de fato, o ponto que aparece na tela é o vértice da parábola correspondente.
- A **atividade 10** pode ser feita tomando as coordenadas de dois pontos que pertencem ao gráfico da função e resolvendo um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas (a e b). Os estudantes podem escolher os pontos correspondentes a qualquer um destes pares ordenados: (–1, 0), (3, 0), (0, –3), (2, –3) ou (1, –4). Após concluírem, incentive-os a compartilhar como fizeram.

É hora de extrapolar

BNCC:

• Competência geral 9 (a descrição está na página VI).

• Competências específicas 3, 5 e 8 (as descrições estão na página VII).

Esta seção propõe o fechamento da Unidade por meio de um trabalho colaborativo que explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um *podcast* ou um seminário, que será compartilhado com a turma ou com a comunidade escolar.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a seção é dividida em etapas que promovem:

• entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado;
• pesquisa coletiva;
• elaboração, em grupo, do produto proposto;
• apresentação e exposição do produto;
• reflexão e síntese do trabalho.

As etapas de pesquisa e elaboração do produto podem ser realizadas extraclasse.

A seção também favorece o desenvolvimento das competências gerais **5** e **6** e das competências específicas **5**, **6** e **7**, procurando mobilizar conteúdos estudados nos capítulos que integram a unidade. Portanto, é recomendável trabalhar a seção depois de estudar os capítulos, mas, se preferir, desenvolva as etapas da seção à medida que os capítulos forem estudados, atentando aos conhecimentos prévios necessários.

Se achar oportuno, trabalhe esta seção em parceria com o(a) professor(a) de História. Os estudantes podem aprofundar a pesquisa e o debate sobre quais foram as principais tecnologias de cada período histórico e como essas tecnologias influenciaram o modo de viver dos seres humanos em cada um desses períodos.

• Os **itens b** e **c** da **atividade 1** da etapa 1 ajudam a responder uma das questões propostas na abertura desta Unidade ("Como as tecnologias influenciam a vida das pessoas?"). É importante que os estudantes tenham a oportunidade de compartilhar suas respostas. Se achar conveniente, anote na lousa as influências levantadas por eles.

• Para a **atividade 3** da etapa 1, se possível, construa essa linha do tempo coletiva utilizando alguma ferramenta *on-line*.

• Na **atividade 4** da etapa 1, os estudantes vão retomar outra questão proposta na abertura desta Unidade. Outras respostas além da sugerida podem surgir. Se achar necessário, forme uma roda de conversa para explorar esta questão.

CIÊNCIA E TECNOLOGIA

É hora de extrapolar

Faça as atividades no caderno.

Como as tecnologias influenciam a vida das pessoas?

A palavra "tecnologia" tem a sua origem no grego antigo téchne, *que significa técnica, arte, ofício, e* logos, *que significa estudo de algo. Atualmente, a presença das tecnologias da informação e da comunicação na vida das pessoas é inegável, mas que outras tecnologias estão presentes em nosso cotidiano? E que tecnologias foram importantes para a história da humanidade?*

Objetivos: Refletir sobre a influência das tecnologias; analisar dados sobre tecnologia nas ciências; pesquisar o funcionamento de inventos tecnológicos e produzir modelos para explicar o funcionamento de tais tecnologias.

Etapa 1: Reflexão sobre a influência das tecnologias no cotidiano e na história.

1. Reúnam-se em grupos e respondam às questões em seus cadernos. **1. a)** Respostas pessoais.

a) Analisem a sentença "*as tecnologias influenciam a humanidade*". Vocês concordam com ela? Por quê?

b) Quais tecnologias estão presentes atualmente na vida das pessoas? **1. b)** Resposta pessoal.

c) Essas tecnologias são importantes? Por quê? **1. c)** Respostas pessoais.

2. c) As informações e a linha do tempo dependem da lista de inventos feita no item **b**.

2. Segundo o dicionário eletrônico *Houaiss*, tecnologia pode ser definida como:

> 1 teoria geral e/ou estudo sistemático sobre técnicas, processos, métodos, meios e instrumentos de um ou mais ofícios ou domínios da atividade humana (p. ex., indústria, ciência etc.)
> 2 técnica ou conjunto de técnicas de um domínio particular
> 3 qualquer técnica moderna e complexa


TEK IMAGE/SCIENCE PHOTO LIBRARY/AFP

O Projeto Genoma Humano (1990-2003) teve como uma das suas principais metas identificar todos os genes humanos, interpretando a sequência do DNA humano.

a) Podemos dizer que a manufatura de ferramentas de pedra, a descoberta do fogo, a invenção da roda, as técnicas utilizadas na agricultura, os computadores e o mapeamento do DNA humano são exemplos de tecnologia? **2. a)** sim

b) Discutam e façam uma lista com 10 inventos tecnológicos que vocês consideram importantes para a história da humanidade. **2. b)** Resposta pessoal.

c) Pesquisem na internet algumas informações sobre os inventos listados no item anterior e elaborem uma linha do tempo.

3. Comentário em *Orientações.*

3. Apresentem a linha do tempo para a turma. Depois das apresentações, montem uma linha do tempo coletiva com todos os inventos tecnológicos escolhidos pelos grupos.

4. De que forma a Matemática está presente nas tecnologias que utilizamos no dia a dia?


ANDREW BROOKES/CULTURA/GETTY IMAGES

Na agricultura, diante das pesquisas desenvolvidas a partir de novas tecnologias, temos a criação de culturas mais resistentes a doenças, insetos e secas; produção de bioenergia; desenvolvimento de biopesticidas etc.

Etapa 2: Análise de dados sobre tecnologias nas ciências.

5. Leiam este texto e respondam à questão.

> A ciência e a tecnologia alimentam-se uma à outra, impulsionando ambas para a frente. O conhecimento científico permite-nos desenvolver novas tecnologias, que muitas vezes nos permitem fazer novas observações sobre o mundo, que, por sua vez, nos permitem construir ainda mais conhecimento científico, que, em seguida, vai inspirar outra tecnologia… e assim por diante.
>
> A ciência e a tecnologia em desenvolvimento acelerado. **Saber Ciência: como a ciência realmente funciona**, s.d. Disponível em: http://saberciencia.tecnico.ulisboa.pt/artigos/realizacoes-da-ciencia-03.php. Acesso em: 22 jul. 2022.

Vocês acham que o desenvolvimento de foguetes e satélites pode ser considerado exemplo de tecnologia que impulsiona a ciência? Por quê? **5.** Respostas pessoais.

4. Exemplo de resposta: Nas medidas (medidas de tempo, de capacidade, de voltagem etc.), no formato dos aparelhos e em seus *softwares*, uma vez que muitos deles são desenvolvidos por meio de algoritmos escritos em determinada linguagem de programação e que levam em consideração as ideias de função e de variável.

• Amplie o assunto trabalhado na **atividade 5** da etapa **2** sugerindo uma pesquisa, ou mesmo uma experiência com o auxílio do(a) professor(a) de Ciências, sobre o funcionamento de um foguete.

6. Vocês sabem como os foguetes funcionam? Existem experiências que mostram de forma análoga, por meio de reações químicas, a propulsão dos foguetes construídos com garrafas PET, por exemplo.

Ao ser lançados, os foguetes do experimento chegam a determinada medida da altura e, como não continuam recebendo propulsão para se movimentar, começam a cair em algum momento. Esse movimento pode ser descrito por uma função quadrática. Considerem o lançamento de um foguete cuja medida da altura $h(x)$, em metros, pode ser descrita pela função h, tal que $h(x) = -x^2 + 3x$, em que x representa a medida do tempo a partir do lançamento, em segundos.

ROBYN BECK/AFP/GETTY IMAGES

Lançamento do foguete SpaceX Falcon 9, na Califórnia (Estados Unidos). Foto de 2017.

a) Em que momentos a medida da altura alcançada por esse foguete é de 2 metros? **6. a)** 1 segundo e 2 segundos

b) Construa o gráfico da função h, que representa o movimento desse foguete. **6. b)** Resposta em *Orientações*.

c) Em que momento esse foguete atinge a medida da altura máxima? Qual é essa medida de altura máxima? **6. c)** 1,5 segundo; 2,25 metros

Etapa 3: Pesquisa sobre inventos tecnológicos importantes e planejamento e produção de modelo explicativo. **Etapa 3**: Comentários em *Orientações*.

7. Escolham um dos inventos tecnológicos marcados na linha do tempo elaborada na atividade 2. Façam uma pesquisa complementando as informações sobre o invento: como funciona, quando e quem o inventou e quais são as utilidades desse invento.

8. Vocês deverão construir um modelo do invento escolhido que ajude a explicar como ele funciona. Discutam no grupo quais materiais serão necessários para construí-lo. Deem preferência para as sucatas ou materiais reutilizáveis. Elaborem um planejamento, listando os materiais que serão utilizados e as divisões das tarefas entre os membros do grupo.

9. Construam o modelo do invento escolhido e elaborem um texto com as informações obtidas na pesquisa.

Etapa 4: Apresentação, análise e divulgação do modelo explicativo. **Etapa 4**: Comentários em *Orientações*.

10. Estabeleçam uma parceria com outro grupo, para que mostrem o texto informativo e o modelo do invento tecnológico escolhido e façam uma apresentação explicando-o um para o outro. Façam uma leitura cuidadosa do texto, observem o modelo construído e escutem a apresentação, analisando a clareza das informações no texto e na apresentação e a qualidade do modelo.

11. Anotem as dúvidas, as opiniões e as sugestões dos colegas.

12. Depois dos ajustes necessários, exibam o modelo para a turma e façam uma apresentação explicando como o invento tecnológico funciona, quando e por quem foi inventado e quais são os seus usos.

13. Por fim, organizem uma exposição dos modelos e dos textos elaborados para a comunidade escolar.

Etapa 5: Síntese do trabalho realizado.

14. Algumas questões que devem ser discutidas:

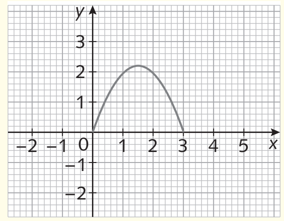
a) Quais tecnologias vocês utilizaram para realizar as atividades das etapas anteriores? **14. a)** Resposta pessoal.

b) Quais tecnologias vocês acreditam que existirão daqui a dez anos? E daqui a cem anos? **14. b)** Respostas pessoais.

15. Redijam um texto que descreva o processo realizado pelo grupo nas etapas 3 e 4.

15. Comentário em *Orientações*.

- No **item b** da **atividade 6** da etapa 2, peça aos grupos que comparem os gráficos construídos. Discuta com os estudantes se, nesse caso, faz sentido traçar o gráfico para pontos com coordenada y negativa.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 8** da etapa 3, discuta com os estudantes o que se espera desses modelos explicativos. Solicite que pensem em como seria um modelo para explicar o funcionamento dos foguetes, quais partes deveriam ser exibidas e quais materiais poderiam ser usados. Dessa forma, eles terão critérios para pensar no modelo do invento tecnológico escolhido pelos seus grupos.
- Na **atividade 9** da etapa 3, é importante alertar os estudantes que, mesmo com um planejamento detalhado, algum imprevisto pode surgir, fazendo com que alguma etapa seja alterada. Incentive-os a encarar as adversidades com resiliência e criatividade.
- Nas **atividades** de **10** a **13** da etapa 4, os estudantes vão apresentar o modelo explicativo e receber *feedback* do trabalho realizado. Na **atividade 10** é importante que você incentive os grupos a analisar com critério o trabalho uns dos outros e a dar sugestões construtivas. O grupo que receber o *feedback* deve estar aberto a sugestões e escutar os colegas com atenção e empatia. A exibição dos modelos (**atividade 13**) pode ser feita na conversa, com o grupo que estiver apresentando posicionado no centro da roda.
- Na **atividade 15** da etapa 5, os estudantes devem escrever um texto sobre o processo realizado pelo grupo nas etapas 3 e 4. Deixe-os à vontade para organizar o texto da maneira que julgarem adequada. Você pode utilizar o texto produzido por eles como instrumento de avaliação.

Sugestão de atividade para combater o *bullying*

Aproveite o tema desta seção para discutir e desenvolver um trabalho com a turma sobre o problema do *cyberbullying*. Explique que o *cyberbullying* é a prática do *bullying* quando se usa como meio de propagação as tecnologias de informação e comunicação digitais e que ele pode ser feito a qualquer hora, de qualquer lugar e compartilhado por muitas pessoas ao mesmo tempo – inclusive de maneira anônima. Forme uma roda de conversa com a turma e pergunte: “Vocês já sofreram ou conhecem alguém que já sofreu *cyberbullying*? Na opinião de vocês, que medidas podem ser tomadas para combater o *cyberbullying*?”. Deixe-os à vontade para expor suas experiências e o que pensam do tema. Depois, organize a turma em grupos e proponha que elaborem um cartaz com recomendações voltadas para o combate ao *cyberbullying*. Ao final da atividade, exponha os cartazes no mural da escola.

Abertura da Unidade

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 2 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Motivar a turma a estudar os conteúdos da Unidade 3.
- Verificar se eles reconhecem círculos e polígonos regulares em algumas placas de trânsito.
- Conscientizá-los sobre a importância de respeitar a sinalização de trânsito.

Tema contemporâneo transversal:

FORMAÇÃO CIDADÃ

Pergunte para a turma se conhecem a placa presente na imagem e dê um tempo para que respondam. Espera-se que alguns deles reconheçam que essa placa indica que o condutor deve parar o automóvel antes de cruzar ou entrar em uma via. Você pode ampliar a discussão apresentando mais algumas placas e solicitando que expliquem o significado delas. Por fim, comente sobre a importância de respeitar as leis de trânsito e ter comportamento solidário, pois, ao adotar essa postura, diminuem-se as ocorrências de acidentes.

Peça aos estudantes que digam com qual figura geométrica plana se parece a placa de PARE. Espera-se que eles não tenham dificuldades em reconhecer que a placa se parece com um octógono. Depois, aprofunde um pouco mais a discussão, e pergunte se o octógono tem alguma característica especial. Dê um tempo para que levantem hipóteses ou estabeleçam conjecturas. É possível que alguns deles percebam que esse octógono tem todos os lados com mesma medida de comprimento e todos os ângulos internos com a mesma medida de abertura, ou seja, é um octógono regular.

A competência geral **9** e a competência específica **8** da BNCC tem o seu desenvolvimento favorecido nesta abertura de Unidade, uma vez que o diálogo e a interação entre os estudantes são incentivados. O espírito de investigação também é estimulado e, por isso, a competência específica **2** também tem o seu desenvolvimento favorecido.

No **capítulo 7**, serão estudadas as relações métricas no triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras. Circunferências, arcos e ângulos serão abordados no **capítulo 8**. Por fim, no **capítulo 9**, serão estudados os polígonos regulares e suas propriedades.

Unidade 3

Veículos parados na cidade de Holambra (SP). Observe que a placa "Pare" não é uma indicação de estacionamento. Foto de 2018.

O que você conhece sobre trânsito seguro? Você sabe o que significa a placa que aparece na imagem? Essa placa se parece com qual polígono? No fim desta Unidade, você responderá a essas e outras questões.

Na seção *É hora de extrapolar*, os estudantes vão conhecer e entender o significado de algumas placas de trânsito, analisar estatísticas de acidentes de trânsito e práticas para aumentar a segurança no trânsito e produzir placas para uma campanha pelo trânsito seguro.

Capítulo 7

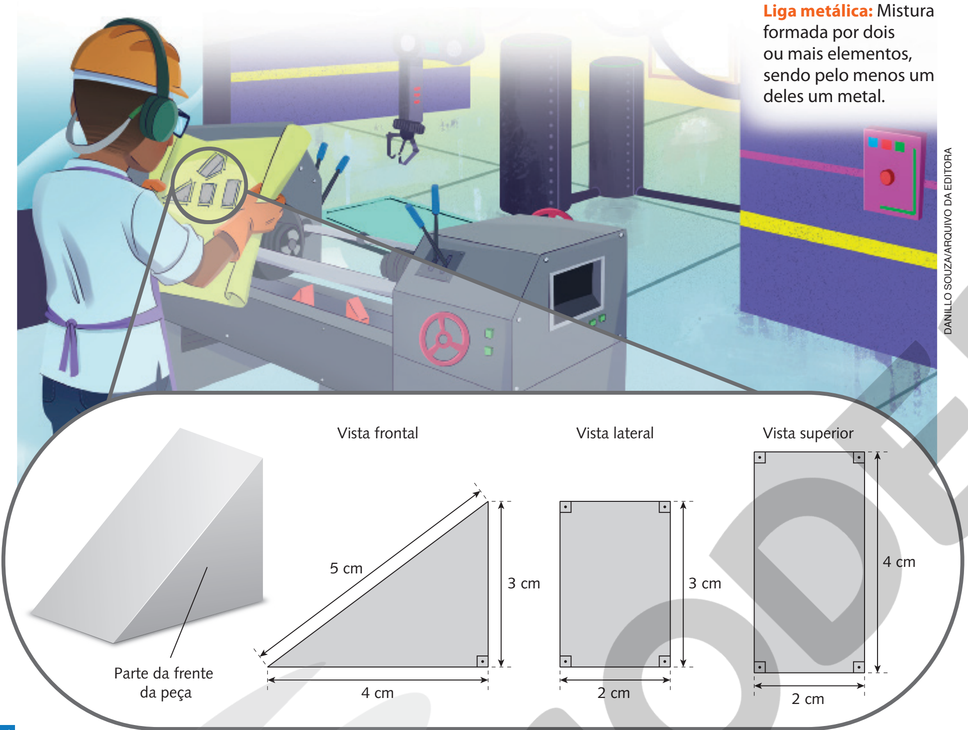
Relações métricas no triângulo retângulo

SAÚDE

Trocando ideias

O metalúrgico é o profissional responsável pelos projetos de tratamento e de produção de metais e ligas metálicas. Em seu dia a dia, ele precisa ler e interpretar projetos de peças tanto para fabricá-las como para conferir suas medidas.

Liga metálica: Mistura formada por dois ou mais elementos, sendo pelo menos um deles um metal.



DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

- Em sua opinião, por que é importante que profissionais como os metalúrgicos utilizem equipamentos de proteção individual? Converse com os colegas.
- Como podemos classificar o triângulo correspondente à vista frontal da peça? Por quê?
- Como as medidas de comprimento 3 cm, 4 cm e 5 cm dos lados da parte frontal da peça podem ser relacionadas? Converse com os colegas.

Neste capítulo, vamos estudar as relações métricas e trigonométricas de triângulos retângulos.

Trocando ideias: primeiro item: resposta pessoal; segundo item: triângulo retângulo, pois um dos seus ângulos internos é reto; terceiro item: espera-se que os estudantes identifiquem que $(3\ cm)^2 + (4\ cm)^2 = (5\ cm)^2$.

175

Para responder ao terceiro item, eles terão que realizar investigações com o objetivo de encontrar uma relação que envolva as medidas dos comprimentos dos lados do triângulo retângulo. Após discutirem, revele que $(3\ cm)^2 + (4\ cm)^2 = (5\ cm)^2$. Caso ache oportuno, diga que as medidas dos comprimentos dos lados de um triângulo retângulo estão relacionadas pelo teorema de Pitágoras e que essa será uma das relações métricas que será estudada no capítulo.

A proposta desta seção *Trocando ideias* mobiliza conceitos das Unidades temáticas *Geometria* e *Grandezas e medidas*, favorecendo, assim, o desenvolvimento da competência específica **3** da BNCC. A última questão desperta o espírito investigativo e a capacidade de produzir argumentos convincentes e, além disso, promove a interação entre os pares de forma cooperativa, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **9** e das competências específicas **2** e **8**.

CAPÍTULO 7 – RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Trocando ideias

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 2, 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Verificar se os estudantes reconhecem triângulos retângulos.
- Explorar de maneira intuitiva o teorema de Pitágoras.
- Conhecer o que fazem os metalúrgicos.

Tema contemporâneo transversal:

SAÚDE

Comece a aula perguntando para os estudantes se eles têm algum familiar ou se conhecem alguém que é metalúrgico e se sabem o que esse profissional faz. Depois, explique a eles que a metalurgia é a ciência que estuda e gerencia os metais desde sua extração do subsolo até sua transformação em produtos adequados ao uso. Já os metalúrgicos são uma categoria de profissionais que lida diretamente com o tratamento e a produção de um determinado tipo de metal e de suas ligas, passando pela sua extração e até pelo manuseio ou transformação, entre outras etapas. Enfatize com eles a importância do desenho técnico na rotina desses profissionais e, se possível, leve alguns exemplares para que eles possam manusear e analisar. Você pode comentar que, no **capítulo 10** deste volume, eles estudarão as vistas ortogonais e terão a oportunidade de analisar outros desenhos como o mostrado no livro.

O primeiro item desta seção convida-os a responder sobre a importância dos EPIs (Equipamentos de Proteção Individual). Após emitirem suas opiniões, é importante enfatizar com eles que o uso desses equipamentos visa garantir a saúde e a proteção do trabalhador, evitando consequências negativas em casos de acidente de trabalho.

Solicite aos estudantes que observem a imagem da peça e das vistas frontal, lateral e superior. Verifique se todos compreenderam o projeto apresentado. Depois, convide-os a responder às questões do segundo e do terceiro item. Ao responder ao segundo item, é importante incentivá-los a justificar suas respostas.

Projeções ortogonais

Objetivo:

Compreender o conceito de projeção ortogonal.

Justificativa

Compreender o conceito de projeção ortogonal é importante para que os estudantes identifiquem os elementos de um triângulo retângulo e entendam as relações métricas entre esses elementos. Além disso, esse é um conceito importante no estudo de vistas ortogonais realizado mais adiante.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes qual é o significado do termo "projeção ortogonal". Se necessário, proponha a eles que pesquisem o significado da palavra "ortogonal" em algum dicionário. Depois, peça que representem a projeção ortogonal de:

- um ponto sobre uma reta;
- um segmento de reta sobre uma reta.

Observe como os estudantes procedem em cada caso.

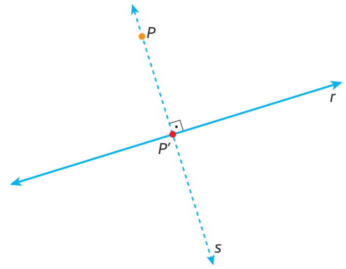
Para as aulas iniciais

Peça a alguns deles que compartilhem as projeções ortogonais feitas e comentem como fizeram para representar cada uma.

Neste tópico, iniciamos o trabalho apresentando as noções de projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta e de um segmento de reta sobre uma reta, conceitos que serão utilizados para estabelecer as relações métricas em um triângulo retângulo.

1 Projeções ortogonais

Considere um ponto P e uma reta r. Se traçarmos por P uma reta s perpendicular a r, obteremos na intersecção de s e r um ponto P', denominado **projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r**.



Quando o ponto P pertence à reta r, ele coincide com sua projeção ortogonal sobre ela.

Agora, considere um segmento de reta $\overline{AB}$ e a reta r. Denominamos **projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre a reta r** o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre r.

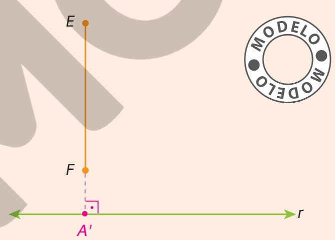
Logo, $\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre a reta r.

Atividades

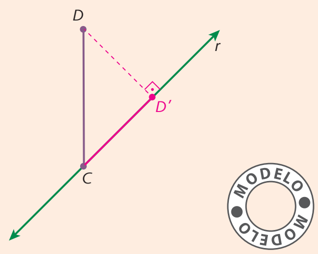
Faça as atividades no caderno.

1 Copie as figuras no caderno e determine:

a) a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{EF}$ sobre a reta r; **1. a)** A'

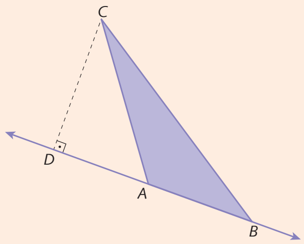


b) a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{CD}$ sobre a reta r. **1. b)** $\overline{CD'}$

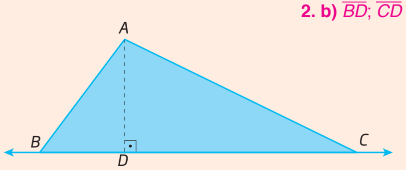


2 Observe as figuras e determine:

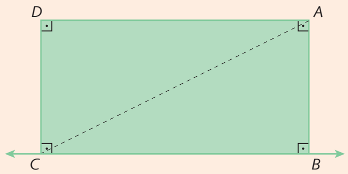
a) a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{BC}$ sobre $\overleftrightarrow{AB}$; **2. a)** $\overline{BD}$



b) a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$ e a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{AC}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$; **2. b)** $\overline{BD}$; $\overline{CD}$

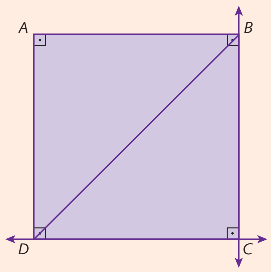


c) a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{AC}$ sobre $\overleftrightarrow{CB}$; **2. c)** $\overline{CB}$



d) a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{AD}$ sobre $\overleftrightarrow{DC}$ e a projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{BD}$ sobre $\overleftrightarrow{BC}$.

2. d) D; $\overline{BC}$

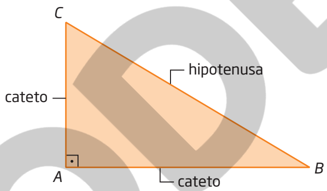


ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI /ARQUIVO DA EDITORA

2 Triângulo retângulo

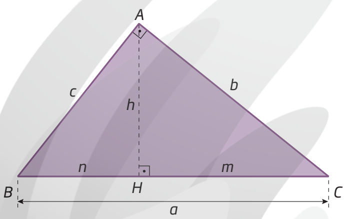
Em um triângulo retângulo, chamamos o lado oposto ao ângulo reto de **hipotenusa** e os lados adjacentes a esse ângulo de **catetos**.

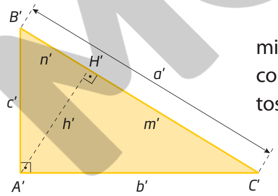
No triângulo retângulo ABC, $\overline{CB}$ é a hipotenusa e $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ são os catetos.



Elementos de um triângulo retângulo

Considere os triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$.





Representamos por letras minúsculas as medidas de comprimento dos segmentos de reta dos triângulos.

É importante que os estudantes saibam identificar cada elemento do triângulo retângulo, pois esses estão envolvidos nas relações métricas, conteúdo que será abordado mais adiante.

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

Triângulo retângulo

BNCC:

Habilidade EF09MA13.

Objetivo:

Compreender e aplicar as relações métricas no triângulo retângulo.

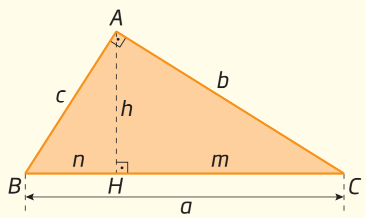
Justificativa

Compreender e aplicar as relações métricas no triângulo retângulo é um pré-requisito importante para o estudo do teorema de Pitágoras e possibilita resolver diferentes problemas. A demonstração dessas relações métricas, etapa importante para que os estudantes possam atribuir significado a cada uma, mobiliza o que foi estudado sobre semelhança de triângulos e favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA13**.

Mapeando conhecimentos

Inicialmente, reproduza a **atividade 20** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e proponha aos estudantes que a realizem. Este é o momento oportuno para verificar se compreendem o conceito de triângulo retângulo. Após concluírem, reserve um momento para discutir o modo como fizeram e recorde a definição de triângulo retângulo.

Em um segundo momento, proponha que analisem uma figura como a apresentada a seguir e tentem encontrar relações entre as medidas de comprimento indicadas utilizando o que estudaram sobre semelhança de triângulos.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Deixe-os à vontade para experimentar, testar hipóteses e discutir suas estratégias com os demais colegas. Caso seja necessário, auxilie-os a organizar o raciocínio.

Para as aulas iniciais

Verifique quais relações métricas os estudantes conseguiram deduzir e convide alguns deles para que expliquem como fizeram. Ajude-os a deduzir outras relações métricas caso ache importante. Você também pode propor que construam um triângulo retângulo em um *software* de geometria dinâmica e verifiquem, utilizando as ferramentas do *software*, a validade das relações métricas no triângulo construído.

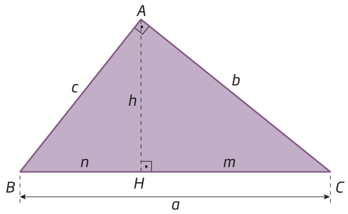
Relações métricas no triângulo retângulo

As demonstrações das relações métricas são feitas a partir da semelhança entre triângulos. Se julgar necessário, retome os casos de semelhança de triângulos.

As atividades de demonstração favorecem o desenvolvimento dos diferentes tipos de **raciocínio lógico-matemático** (indução, dedução, abdução e raciocínio por analogia), de argumentação e de inferência. Após a primeira demonstração, explique aos estudantes que as demais podem ser obtidas por analogia, pois todas partem da proporcionalidade determinada pela semelhança dos triângulos.

Assim:

- para o $\triangle ABC$, temos:



$BC = a$ → medida de comprimento da hipotenusa

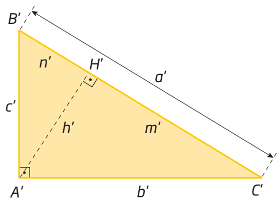
$AC = b$, $AB = c$ → medidas de comprimento dos catetos

$AH = h$ → medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa

$HC = m$ → medida de comprimento da projeção ortogonal de $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa

$HB = n$ → medida de comprimento da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa

- para o $\triangle A'B'C'$, temos:



$B'C' = a'$ → medida de comprimento da hipotenusa

$A'C' = b'$, $A'B' = c'$ → medidas de comprimento dos catetos

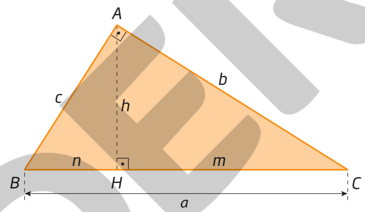
$A'H' = h'$ → medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa

$H'C' = m'$ → medida de comprimento da projeção ortogonal de $\overline{A'C'}$ sobre a hipotenusa

$H'B' = n'$ → medida de comprimento da projeção ortogonal de $\overline{A'B'}$ sobre a hipotenusa

Relações métricas no triângulo retângulo

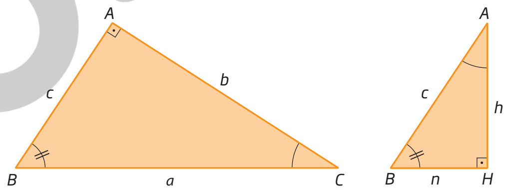
Considere o triângulo retângulo ABC.



Traçando a altura ($\overline{AH}$) relativa à hipotenusa, podemos destacar três triângulos retângulos: $\triangle ABC$, $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$.

Vamos mostrar que esses triângulos são semelhantes entre si:

- $\triangle ABC \sim \triangle HBA$

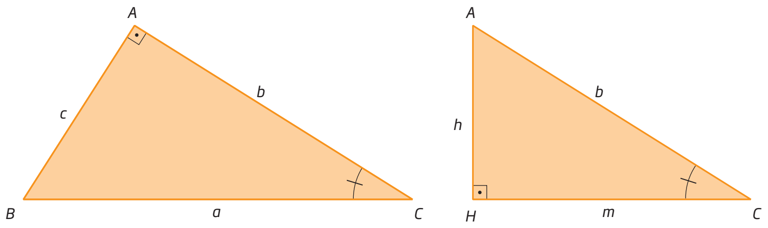


Observe que $B\hat{A}C \cong B\hat{H}A$, pois são ângulos retos, e $A\hat{B}C \cong H\hat{B}A$, pois são ângulos comuns aos dois triângulos.

Então, pelo caso AA, temos: $\triangle ABC \sim \triangle HBA$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

- $\triangle ABC \sim \triangle HAC$



Observe que $B\hat{A}C \cong A\hat{H}C$, pois são ângulos retos, e $A\hat{C}B \cong H\hat{C}A$, pois são ângulos comuns aos dois triângulos.

Então, pelo caso AA, temos: $\triangle ABC \sim \triangle HAC$.

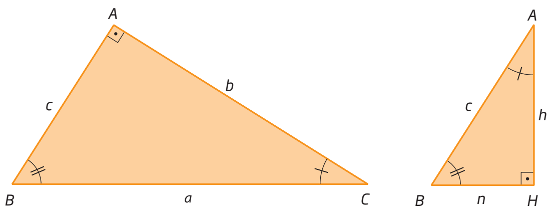
Como $\triangle ABC \sim \triangle HBA$ e $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, podemos afirmar que: $\triangle HBA \sim \triangle HAC$.

Portanto, os triângulos *ABC*, *HBA* e *HAC* são semelhantes entre si.

Em todo triângulo retângulo, a altura relativa à hipotenusa determina dois outros triângulos retângulos semelhantes entre si e também ao triângulo dado.

Em triângulos semelhantes, os lados correspondentes são proporcionais. Assim, podemos escrever as seguintes proporções em relação aos pares de triângulos:

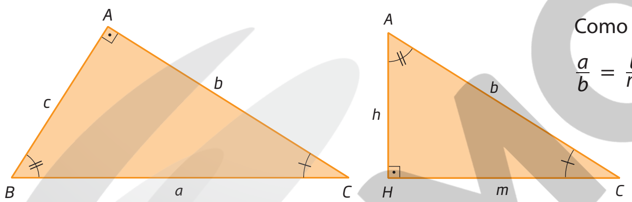
- $\triangle ABC$ e $\triangle HBA$



Como $\triangle ABC \sim \triangle HBA$, então:

$\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow \boxed{c^2 = a \cdot n}$

- $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$



Como $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, então:

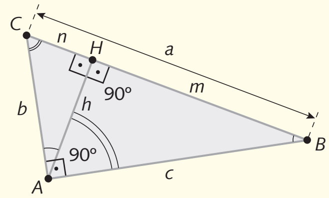
$\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow \boxed{b^2 = a \cdot m}$

O quadrado das medidas de comprimento de cada um dos catetos é igual ao produto da medida de comprimento da hipotenusa pela medida de comprimento da projeção ortogonal do cateto considerado sobre a hipotenusa.

Sugestão de atividade extra

Proponha aos estudantes a seguinte atividade de investigação, com a utilização de um *software* de geometria dinâmica:

Construa um triângulo *ABC*, retângulo em *A*, conforme a figura a seguir.



$\overline{AH}$, de medida de comprimento *h*, é a altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$; $\overline{BH}$, de medida de comprimento *m*, é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$, de medida de comprimento *c*, sobre o lado $\overline{BC}$; e $\overline{HC}$, de medida de comprimento *n*, é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$, de medida de comprimento *b*, sobre o lado $\overline{BC}$.

Após a construção, verifique os triângulos semelhantes, justificando cada uma das semelhanças encontradas.

Agora, meça o comprimento dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AH}$, $\overline{HC}$ e $\overline{BH}$.

Após obter as medidas, determine as seguintes razões com base nas semelhanças de triângulos:

$\triangle ABC \sim \triangle HBA \Rightarrow \frac{AB}{HB} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{HA}$

$\triangle ABC \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{AB}{HA} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC}$

$\triangle HBA \sim \triangle HAC \Rightarrow \frac{HB}{HA} = \frac{BA}{AC} = \frac{HA}{HC}$

Espera-se que os estudantes concluam que:

$\triangle ABC \sim \triangle HBA \sim \triangle HAC$

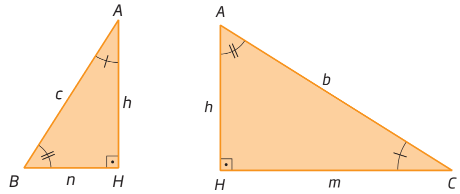
Movimente os pontos *A*, *B* e *C* de modo a obter outros triângulos retângulos e, a cada movimento, observe as razões explicitadas anteriormente para responder às seguintes questões: “O que você observou ao movimentar os pontos *A*, *B* e *C*?”; “O que você pode concluir com essa experiência?”.

Peça aos estudantes que aproveitem a construção feita com o *software* de geometria dinâmica para verificar a validade das relações métricas no triângulo retângulo.

Faça a demonstração das relações métricas na lousa com a participação da turma.

É importante que os estudantes atribuam significado a cada uma das relações métricas, em vez de simplesmente memorizá-las. Construir o triângulo retângulo com a altura relativa à hipotenusa e entender as demonstrações das relações auxiliam-nos a atribuir significado a elas.

- $\triangle HBA$ e $\triangle HAC$

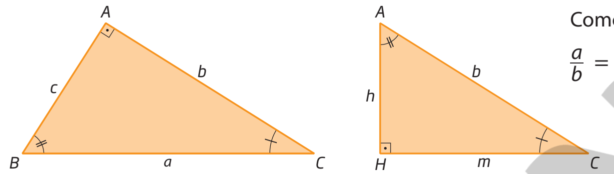


Como $\triangle HBA \sim \triangle HAC$, então:

$\frac{n}{h} = \frac{h}{m} \Rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n}$

O quadrado da medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas de comprimento das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa.

- $\triangle ABC$ e $\triangle HAC$



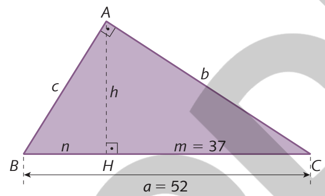
Como $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, então:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow \boxed{b \cdot c = a \cdot h}$

O produto das medidas de comprimento dos catetos é igual ao produto da medida de comprimento da hipotenusa pela medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa.

Analise como podemos aplicar algumas relações métricas no triângulo retângulo.

a) O comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo *ABC* mede 52 cm, e o comprimento da projeção ortogonal do maior cateto sobre ela mede 37 cm. Vamos determinar a medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa.



$m + n = a \Rightarrow n = a - m$

Substituindo os valores dados:

$n = 52 - 37 = 15$

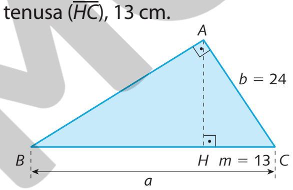
Pela relação métrica $h^2 = m \cdot n$, temos:

$h^2 = 37 \cdot 15 = 555$

Como $h > 0$, temos: $h = \sqrt{555} \simeq 23{,}6$

Portanto, o comprimento da altura relativa à hipotenusa mede aproximadamente 23,6 cm.

b) Vamos determinar a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo *ABC* em que o comprimento do cateto $\overline{AC}$ mede 24 cm, e o comprimento da sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa ($\overline{HC}$), 13 cm.



Considerando os dados apresentados, temos:

$b^2 = a \cdot m$

$576 = a \cdot 13$

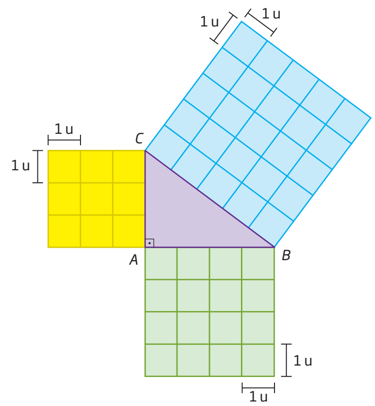
$a = \frac{576}{13} = 44{,}3$

Portanto, o comprimento da hipotenusa $\overline{BC}$ mede aproximadamente 44,3 cm.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

3 Teorema de Pitágoras e aplicações

Na figura a seguir, representamos o triângulo retângulo *ABC*, cujos lados medem 3 u, 4 u e 5 u de comprimento, sendo u a unidade de medida de comprimento, e três quadrados construídos sobre cada um dos lados do triângulo.



Esses quadrados estão divididos em quadradinhos com lados de medida 1 u de comprimento, ou seja, cada um desses quadradinhos tem área medindo 1 u². Portanto:

- a área do quadrado amarelo mede 9 u²;
- a área do quadrado verde mede 16 u²;
- a área do quadrado azul mede 25 u².

Observe que a medida da área do quadrado azul corresponde à soma das medidas de área dos outros dois quadrados, pois:

$$25 \text{ u}^2 = 16 \text{ u}^2 + 9 \text{ u}^2$$

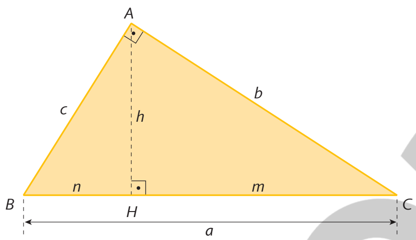
Associando essa relação às medidas de comprimento dos lados do triângulo *ABC*, temos:

$$25 \text{ u}^2 = 16 \text{ u}^2 + 9 \text{ u}^2 \Rightarrow (5 \text{ u})^2 = (4 \text{ u})^2 + (3 \text{ u})^2$$

Observe que o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos.

Será que essa relação é válida para todos os triângulos retângulos? Vamos verificar!

Considere um triângulo retângulo *ABC* qualquer.



Temos que:

$b^2 = a \cdot m$ e $c^2 = a \cdot n$

Adicionando as sentenças membro a membro, obtemos:

$b^2 + c^2 = am + an$

$b^2 + c^2 = a\underbrace{(m + n)}_{m + n = a}$

$b^2 + c^2 = a \cdot a$

$b^2 + c^2 = a^2$

Portanto: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Teorema de Pitágoras e aplicações

BNCC:

Habilidades EF09MA13 e EF09MA14.

Objetivo:

Compreender e aplicar o teorema de Pitágoras na resolução de problemas.

Justificativa

O teorema de Pitágoras pode ser aplicado, por exemplo, no cálculo da medida do comprimento da diagonal de um retângulo, da medida do comprimento da altura de um triângulo isósceles, da medida da distância entre dois pontos no plano cartesiano e da medida do comprimento da diagonal de um paralelepípedo. Esse teorema é uma das relações métricas no triângulo retângulo, e uma das demonstrações apresentadas é feita com base em outras relações estudadas anteriormente, favorecendo o desenvolvimento da habilidade **EF09MA13**. O teorema de Pitágoras também pode ser empregado na resolução de diferentes problemas, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**.

Mapeando conhecimentos

Na sala de informática (se houver) ou em casa, peça aos estudantes que construam um triângulo retângulo em um *software* de geometria dinâmica e meçam o comprimento dos catetos e da hipotenusa. Em seguida, peça que calculem o quadrado das medidas dos comprimentos dos catetos e o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa dos triângulos construídos. Então, peça que modifiquem o triângulo construído inicialmente e refaçam os cálculos. Oriente-os a organizar as informações em um quadro, como o do exemplo a seguir:

Quadrado da medida do comprimento da hipotenusa	Quadrado da medida do comprimento de um cateto	Quadrado da medida do comprimento de outro cateto

O objetivo é que, a partir do preenchimento do quadro, os estudantes percebam que o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos.

Para aqueles que, eventualmente, já conheçam o teorema de Pitágoras, desafie-os a demonstrá-lo com base nas relações métricas estudadas no tópico anterior.

Neste tópico, demonstramos o teorema de Pitágoras utilizando as relações métricas que foram estudadas. Pode-se solicitar aos estudantes que, em grupos, pesquisem a respeito das diferentes demonstrações do teorema de Pitágoras dadas ao longo do tempo.

Para as aulas iniciais

Verifique se os estudantes conseguiram identificar que o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos. Caso tenham apresentado dificuldades, explore com eles as medidas de comprimento de alguns triângulos retângulos representados em folhas de papel avulsas. A turma pode estar organizada em grupos para facilitar a tarefa.

(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

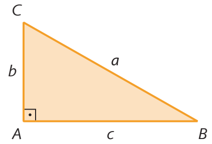
Ao explorar a demonstração do teorema de Pitágoras utilizando medidas de área de figuras geométricas, comente com os estudantes que as medidas das áreas dos quadrados *HIJK* e *QRST* são iguais, pois correspondem a quadrados congruentes. Assim, após serem subtraídas de cada um deles a medida da área de quatro triângulos congruentes entre si, concluímos que as medidas das áreas restantes são iguais também.

Assim, concluímos que:

> Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos.

Essa é a relação métrica no triângulo retângulo mais conhecida, denominada **teorema de Pitágoras**.

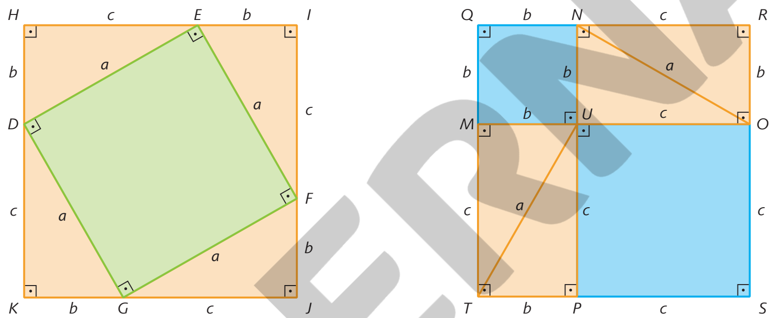
Vamos realizar outra demonstração do teorema de Pitágoras. Podemos comparar as medidas de área de figuras geométricas. Para isso, considere o triângulo retângulo *ABC* a seguir.



Precisamos demonstrar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Isso será feito com base nas seguintes figuras.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA



Os quadrados *HIJK* e *QRST* têm a mesma medida de área, pois seus lados têm a mesma medida de comprimento $(b + c)$:

- a medida de área do quadrado *HIJK* é igual à soma da medida de área do quadrado *DEFG* e das medidas de área dos quatro triângulos, ou seja:

$$a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} \quad \text{I}$$

- a medida de área do quadrado *QRST* é igual à soma da medida de área do quadrado *QNUM*, da medida de área do quadrado *UOSP* e das medidas de área dos quatro triângulos, ou seja:

$$b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} \quad \text{II}$$

Como as medidas de área dos quadrados *HIJK* e *QRST* são iguais, podemos igualar I e II:

$$a^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2} = b^2 + c^2 + 4 \cdot \frac{b \cdot c}{2}$$

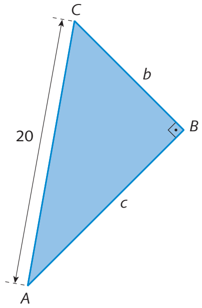
Subtraindo $4 \cdot \frac{b \cdot c}{2}$ dos dois membros, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Assim, demonstramos o teorema de Pitágoras.

Agora, vamos analisar um exemplo da aplicação do teorema de Pitágoras para determinar as medidas de comprimento desconhecidas de um triângulo retângulo.

O comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo *ABC* mede 20 cm, e a razão entre as medidas de comprimento dos catetos é $\frac{3}{4}$. Vamos determinar as medidas de comprimento *b* e *c*, respectivamente, dos catetos $\overline{BC}$ e $\overline{BA}$.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Pelo teorema de Pitágoras, temos: $20^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 400 = b^2 + c^2$ (I)

De acordo com o enunciado, sabemos que:

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{9}{16} \Rightarrow b^2 = \frac{9}{16}c^2 \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$\frac{9}{16}c^2 + c^2 = 400 \Rightarrow \frac{9c^2 + 16c^2}{16} = 400 \Rightarrow \frac{25}{16}c^2 = 400 \Rightarrow c^2 = 256 \overset{c>0}{\Rightarrow} c = 16$$

Como $c = 16$, então:

$$\frac{b}{c} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{b}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = 12$$

Portanto, os catetos medem 12 cm e 16 cm de comprimento.

Um pouco de história

Pitágoras

Pitágoras (aproximadamente 580 a.C.-500 a.C.) fundou a Escola Pitagórica, em Crotona (colônia grega situada ao sul da Itália), que constituía um centro de estudos de Matemática, Filosofia e Ciências Naturais. Como os ensinamentos eram orais e era costume atribuir todas as descobertas ao fundador da escola, várias delas foram atribuídas a Pitágoras, embora não se saiba ao certo se realmente foram realizadas por ele ou por outros membros do grupo.

Pitágoras é lembrado até hoje, principalmente pelo teorema que leva seu nome e estabelece uma relação entre as medidas de comprimento dos lados de um triângulo retângulo. Sabe-se, atualmente, que os babilônios, mais de um milênio antes de Pitágoras, já tinham conhecimento de tal relação para casos particulares, porém sua primeira demonstração pode ter sido dada por Pitágoras. Hoje são conhecidas cerca de 370 demonstrações desse teorema.

XAVI/ARQUIVO DA EDITORA

Caricatura do filósofo e matemático grego Pitágoras.

BIBLIOTECA BRITÂNICA, LONDRES

O teorema de Pitágoras em uma tradução árabe da obra *Os elementos*, de Euclides.

Atividades

a) Identifique alguma superfície que se pareça com um triângulo retângulo em sua sala de aula ou em casa e verifique a validade do teorema de Pitágoras.

b) Em grupo, pesquise outro modo de verificar ou demonstrar o teorema de Pitágoras.

Um pouco de história: **a)** Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

Sugestão de atividade extra

Se considerar adequado, sugira aos estudantes que, em grupo, façam as atividades propostas pelo professor Francisco Dutenhefner na oficina Quebra-cabeças pitagóricos, que apresentam algumas demonstrações do teorema de Pitágoras obtidas pela comparação de medidas de área, além de revisar conteúdos como semelhança e congruência de triângulos.

Disponível em: https://www.yumpu.com/pt/document/read/12931249/proposta-de-oficina-o-teorema-de-pitagoras-titulo-ufmg. Acesso em: 7 ago. 2022.

Tecnologias digitais em foco

Objetivo:

Verificar experimentalmente, com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, a validade do teorema de Pitágoras.

Verificando a validade do teorema de Pitágoras

Nesta seção, os estudantes terão a oportunidade de construir quadrados sobre os lados de um triângulo retângulo e verificar que a medida da área do quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma das medidas das áreas dos quadrados sobre os catetos. Oriente-os quanto às ferramentas que devem utilizar na construção e, depois, na investigação que deverão realizar. Deixe-os livres para conjecturar e trocar ideias.

Relembre-os de que um triângulo é acutângulo quando a abertura de cada ângulo interno mede mais que 0° e menos que 90°; um triângulo é obtusângulo quando a abertura de um de seus ângulos mede mais que 90° e menos que 180°; e um triângulo é retângulo quando a abertura de um dos seus ângulos mede 90°.

Nesta seção, foi usado o GeoGebra para fazer as construções, mas ela pode ser desenvolvida com a utilização de qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de computador, a seção pode ser adaptada de modo que os estudantes utilizem papel e instrumentos de desenho e de medida.

Tecnologias digitais em foco

Verificando a validade do teorema de Pitágoras

Nesta seção, utilizaremos o GeoGebra, ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor indicar, para construir um triângulo e três quadrados sobre os lados desse triângulo e para comparar a medida de área do quadrado maior com a soma das medidas de área dos quadrados menores.

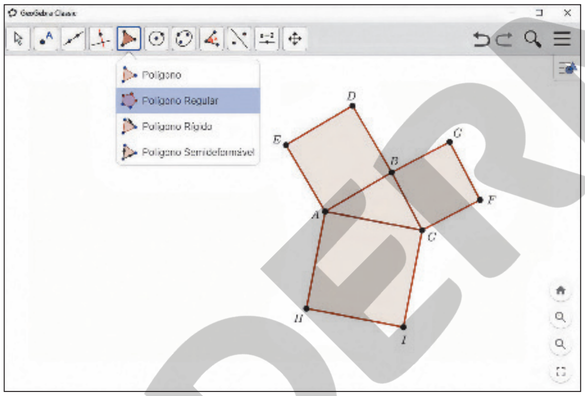
Construa

Siga os passos a seguir para construir um triângulo e três quadrados sobre os lados dele.

1º) Construa um triângulo *ABC* qualquer.

2º) Sobre o lado $\overline{AB}$, construa o quadrado *ABDE* externo ao triângulo.

3º) Da mesma maneira, construa o quadrado *BCFG* sobre o lado $\overline{BC}$ e o quadrado *ACIH* sobre o lado $\overline{AC}$.



© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

Explore

a) Meça as aberturas dos três ângulos internos do triângulo *ABC* e, usando a ferramenta [cm²], determine as medidas de área dos quadrados *ABDE*, *BCFG* e *ACIH*. Movimente os vértices do triângulo construído de modo a obter um triângulo acutângulo. Compare a medida de área do quadrado maior com a soma das medidas de área dos quadrados menores. O que você observa?

b) Movimente, agora, os vértices do triângulo de modo a obter um triângulo obtusângulo. Compare a medida de área do quadrado maior com a soma das medidas de área dos quadrados menores. O que você observa?

c) Desta vez, movimente os vértices do triângulo de modo a obter um triângulo retângulo. Compare a medida de área do quadrado maior com a soma das medidas de área dos quadrados menores. O que você observa?

Explore:
a) A medida de área do quadrado maior é menor que a soma das medidas de área dos quadrados menores.
b) A medida de área do quadrado maior é maior que a soma das medidas de área dos quadrados menores.
c) A medida de área do quadrado maior é igual à soma das medidas de área dos quadrados menores, ou seja, vale o teorema de Pitágoras.

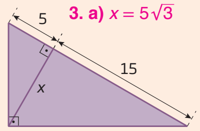
Atividades

8. medidas de comprimento dos catetos: 21 m e 28 m; medida de comprimento da hipotenusa: 35 m

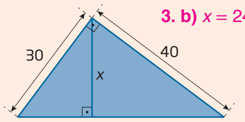
Faça as atividades no caderno.

3 Determine o valor de x nos triângulos retângulos.

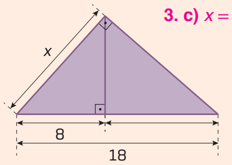
a) **3. a)** $x = 5\sqrt{3}$



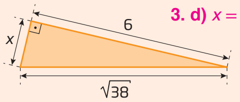
b) **3. b)** $x = 24$



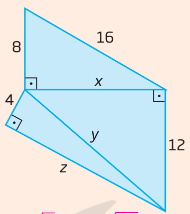
c) **3. c)** $x = 12$



d) **3. d)** $x = \sqrt{2}$



4 Determine os valores de x, y e z.



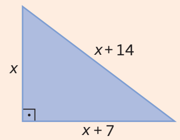
4. $x = 8\sqrt{3}$, $y = 4\sqrt{21}$ e $z = 8\sqrt{5}$

5 Em um triângulo retângulo, o comprimento da hipotenusa mede 40 m, e o comprimento da altura relativa a ela, 19,2 m. Calcule as medidas de comprimento dos catetos. **5.** 24 m e 32 m

6 O comprimento de uma escada mede 4 m e tem uma de suas extremidades apoiada no topo de um muro. A outra extremidade dista 2,4 m da base do muro. Determine a medida da altura do muro. **6.** 3,2 m

7 Em um trapézio retângulo, as bases medem 16 cm e 4 cm de comprimento, respectivamente. O comprimento do maior lado não paralelo mede 13 cm. Quanto mede o perímetro do trapézio? **7.** 38 cm

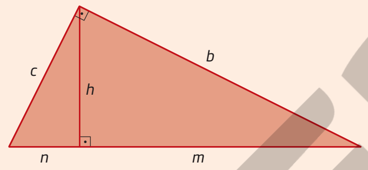
8 Determine as medidas de comprimento dos catetos e da hipotenusa deste triângulo retângulo, em metro.



9 O comprimento da hipotenusa de um triângulo mede 40 cm, e a razão entre as medidas de comprimento dos catetos é $\frac{3}{4}$.

Calcule as medidas de comprimento dos catetos. **9.** 24 cm e 32 cm

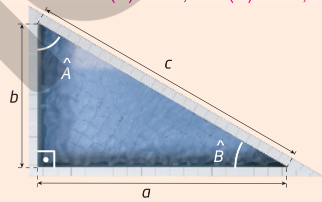
10 Neste triângulo retângulo, b é o dobro de c. Determine $\frac{m}{n}$. **10.** 4



11 Qual é a razão entre as medidas de comprimento da hipotenusa e de um cateto de um triângulo retângulo isósceles? **11.** $\sqrt{2}$

12 Uma empresa foi encarregada de construir uma piscina em um terreno. Como o terreno tinha formato irregular, só foi possível construir uma piscina com formato parecido com um triângulo com as seguintes características: $\text{med}(\hat{A}) = 2 \cdot \text{med}(\hat{B})$, $a = 2\sqrt{3}$ m e $b = 2$ m. Determine $\text{med}(\hat{A})$, $\text{med}(\hat{B})$ e c.

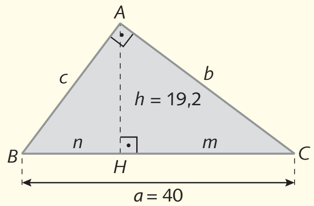
12. $\text{med}(\hat{A}) = 60°$; $\text{med}(\hat{B}) = 30°$; $c = 4$ m



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

185

- Para auxiliar a resolução da **atividade 5**, sugira aos estudantes que representem um triângulo como o abaixo, identificando as medidas dadas.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Esse recurso os ajudará a perceber que deverão usar as relações:

$a = m + n \Rightarrow m = 40 - n$

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow n^2 - 40n + 368{,}64 = 0$

Resolvendo a equação:

$n = 25{,}6$ ou $n = 14{,}4$

Como $m = 40 - n$, temos:

$m = 14{,}4$ ou $m = 25{,}6$

Como c e b são números positivos por serem medidas, sabemos que:

$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c = 24$

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = 32$

Portanto, as medidas de comprimento dos catetos são 24 m e 32 m.

- Na **atividade 8**, os estudantes deverão estabelecer a seguinte relação:

$(x + 14)^2 = (x + 7)^2 + x^2$

$x^2 - 14x - 147 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtém-se:

$x = 21$ ou $x = -7$

Como x é medida, considera-se somente o valor positivo. Logo, as medidas de comprimento dos catetos são 21 m e 28 m (21 + 7) e a medida de comprimento da hipotenusa é 35 m (21 + 14).

- Na **atividade 10**, os estudantes devem observar que $b = 2c$. Logo, podemos escrever:

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow 4c^2 = a \cdot m$ **(I).**

Substituindo $c^2 = a \cdot n$ em **I**, temos:

$4 \cdot a \cdot n = a \cdot m$

Dividindo ambos os membros por $a \cdot n$, temos:

$$\frac{4 \cdot a \cdot n}{a \cdot n} = \frac{a \cdot m}{a \cdot n} \Rightarrow 4 = \frac{m}{n}$$

- Para a **atividade 11**, os estudantes deverão relembrar que um triângulo retângulo isósceles possui catetos de mesma medida de comprimento. Assim:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2$

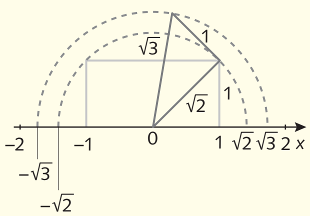
Logo, como a e b são números positivos, $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

Aplicações do teorema de Pitágoras

Antes de trabalhar com as aplicações do teorema de Pitágoras, peça aos estudantes que, em duplas, descubram a relação entre a medida do comprimento da diagonal do quadrado e a medida do comprimento de seus lados e também que descubram a medida do comprimento da altura de um triângulo equilátero com base na medida do comprimento de seus lados.

Sugestão de atividade extra

Proponha aos estudantes como utilizar o teorema de Pitágoras para localizar na reta numérica alguns números irracionais, por exemplo, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc. A imagem a seguir ilustra esse processo:



ADILSON SECCOI/ARQUIVO DA EDITORA

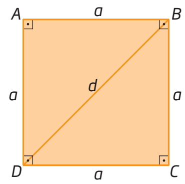
Aplicações do teorema de Pitágoras

Agora, vamos estudar duas importantes aplicações do teorema de Pitágoras: uma no quadrado e outra no triângulo equilátero.

Diagonal de um quadrado

Considere este quadrado *ABCD*, em que:

- a é a medida de comprimento do lado;
- d é a medida de comprimento da diagonal.



Observe que a diagonal $\overline{BD}$ divide o quadrado *ABCD* em dois triângulos retângulos congruentes ($\triangle BAD \cong \triangle BCD$).

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *BCD*, obtemos:

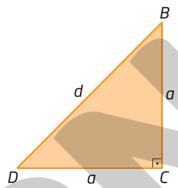
$(BD)^2 = (CD)^2 + (BC)^2$

$d^2 = a^2 + a^2$

$d^2 = 2a^2$

Como $d > 0$ e $a > 0$, temos:

$$\boxed{d = a\sqrt{2}}$$

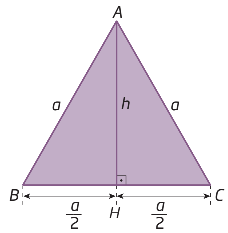


Portanto, em um quadrado com lados de medida de comprimento x, a medida de comprimento da diagonal é $x\sqrt{2}$.

Altura de um triângulo equilátero

Considere este triângulo equilátero *ABC*, em que:

- a é a medida de comprimento do lado;
- h é a medida de comprimento da altura.



Observe que a altura $\overline{AH}$ divide o triângulo equilátero *ABC* em dois triângulos retângulos congruentes ($\triangle ABH \cong \triangle ACH$).

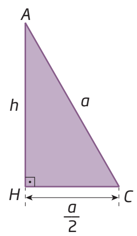
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *ACH*, obtemos:

$(AC)^2 = (AH)^2 + (CH)^2$

$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \overset{h > 0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \overset{a > 0}{\Rightarrow} \boxed{h = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$



Portanto, em um triângulo equilátero com lados de medida de comprimento x, a medida de comprimento da altura é $\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

23. Exemplo de resposta:
Quantas diagonais podemos traçar na superfície do cubo e em seu interior? (Resposta: 12 diagonais na superfície e 4 no interior.)
As medidas de comprimento das diagonais $\overline{AH}$ e $\overline{AD}$ são iguais? Calcule-as. (Resposta: Não são iguais; o comprimento da diagonal $\overline{AH}$ mede $2\sqrt{2}$ cm, e o comprimento da diagonal $\overline{AD}$ mede $2\sqrt{3}$ cm.)

Atividades

Faça as atividades no caderno.

13 Determine a medida de comprimento da diagonal de um quadrado cujos lados medem 17 cm de comprimento. **13.** $17\sqrt{2}$ cm

14 Determine a medida de comprimento da diagonal de um quadrado com 400 cm² de medida de área. **14.** $20\sqrt{2}$ cm

15 O comprimento da diagonal de um quadrado mede 10 cm. Determine a medida de comprimento do lado desse quadrado. **15.** $5\sqrt{2}$ cm

16 Qual é a medida de comprimento da diagonal de um quadrado cujo perímetro mede $10\sqrt{2}$ cm? **16.** 5 cm

17 Qual é a medida de comprimento da diagonal de um retângulo cuja medida de comprimento x da altura tem um terço da medida de comprimento da base? **17.** $\sqrt{10}x$

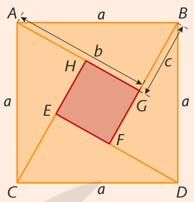
18 Determine a medida de comprimento da altura de um triângulo equilátero cujo comprimento do lado mede 8 cm. **18.** $4\sqrt{3}$ cm

19 O perímetro de um triângulo equilátero mede 12 cm. Determine a medida de comprimento da altura desse triângulo. **19.** $2\sqrt{3}$ cm

20 Quanto mede o perímetro de um triângulo equilátero cujo comprimento da altura mede $4\sqrt{5}$ cm? **20.** $8\sqrt{15}$ cm

21 Mostre que a área do quadrado *EFGH* mede $(b - c)^2$.

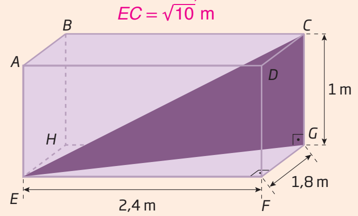
21. Exemplo de resposta:
$A = a^2 - 4 \cdot \frac{bc}{2}$
$A = (b^2 + c^2) - 2bc$
$A = (b - c)^2$



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

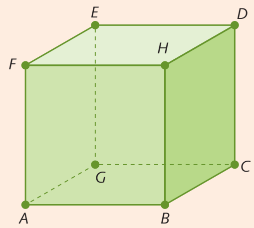
22 Observe o paralelepípedo reto-retângulo representado e calcule a medida de comprimento dos segmentos de reta $\overline{EG}$ e $\overline{EC}$.

22. $EG = 3$ m; $EC = \sqrt{10}$ m



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

23 Cada aresta deste cubo mede 2 cm de comprimento. Observe-o e faça o que se pede.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- No caderno, elabore duas questões relacionadas com a figura, sendo que pelo menos uma possa ser respondida utilizando o teorema de Pitágoras.
- Troque de caderno com um colega e responda às questões elaboradas por ele.
- Analise a resposta do colega e dê um retorno a ele, dizendo o que respondeu corretamente e em que pontos ele se equivocou.

4 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

A palavra **trigonometria** vem do grego *trígono*, que significa "triangular", e *metria*, que significa "medida".

Entre os povos antigos, a Trigonometria surgiu como elemento de apoio na solução de problemas práticos de astronomia, agrimensura e navegação.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Objetivo:

Reconhecer as razões trigonométricas em um triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo).

Justificativa

As razões trigonométricas são aplicadas na resolução de diversos problemas, por exemplo, os problemas de determinação de medidas inacessíveis: medidas da altura de torres ou prédios ou medida de distância entre as margens de um rio. Além disso, é uma ferramenta importante para que se determine medidas de comprimento de lados ou de aberturas de ângulos desconhecidos em figuras. Reconhecer essas razões amplia o repertório de estratégias dos estudantes para que possam resolver problemas como os descritos. É ainda uma oportunidade para que apliquem o que foi estudado sobre semelhança de triângulos.

Mapeando conhecimentos

Organize a turma em grupos e distribua uma folha de papel com vários triângulos retângulos representados. As medidas de abertura das aberturas dos ângulos internos de todos os triângulos devem ser 30°, 60° e 90°. Em cada triângulo, devem estar indicadas as medidas das aberturas dos ângulos agudos e as medidas dos comprimentos dos lados. Em seguida, proponha aos grupos que respondam as seguintes questões.

1. Qual é a razão, em cada triângulo, entre a medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo cuja abertura mede 30° e a medida do comprimento da hipotenusa? O que vocês podem observar?
2. Qual é a razão, em cada triângulo, entre a medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo cuja abertura mede 30° e a medida do comprimento da hipotenusa? O que vocês podem observar?
3. Qual é a razão, em cada triângulo, entre a medida do comprimento do cateto oposto e a medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo cuja abertura mede 30°? O que vocês podem observar?

Por fim, peça a eles que respondam às mesmas perguntas, tomando como referência o ângulo cuja abertura mede 60°.

Para as aulas iniciais

Defina seno, cosseno e tangente e ajude os estudantes a organizar os valores encontrados na dinâmica inicial em um quadro como o da referência a seguir:

	Seno	Cosseno	Tangente
30°			
60°			

Algumas das células do quadro podem ser preenchidas com os valores aproximados encontrados pela turma. Se achar oportuno, calcule com os estudantes, utilizando triângulos retângulos isósceles, o seno, o cosseno e a tangente de 45°.

Seno de um ângulo agudo

A primeira razão trigonométrica apresentada é o seno de um ângulo agudo, que relaciona esse ângulo às medidas dos comprimentos do cateto adjacente e da hipotenusa. Essa razão é demonstrada com a aplicação da semelhança de triângulos.

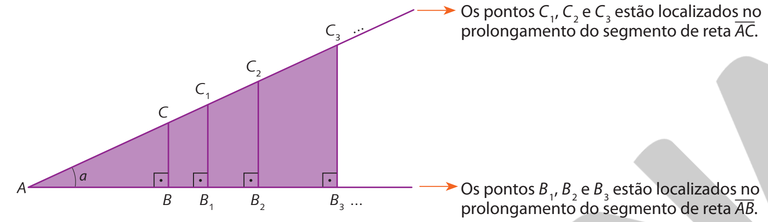
Hiparco (190 a.C.-125 a.C.) – astrônomo grego famoso por ter catalogado aproximadamente 1 000 estrelas e calculado a medida da distância da Terra à Lua com erro inferior a 10% – teria sido o primeiro a utilizar as relações entre as medidas de comprimento dos lados e de abertura dos ângulos de um triângulo. É considerado o precursor da Trigonometria.

Atualmente, a Trigonometria tem vasta aplicação na topografia, na aviação e nos diversos ramos da engenharia.

Seno de um ângulo agudo

Considere os triângulos retângulos ABC, AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3.

LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA



Os triângulos retângulos AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3 são semelhantes ao triângulo ABC, pois têm em comum o ângulo $\hat{A}$ e o ângulo reto (caso AA). Assim, podemos escrever:

- $\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$
  $\dfrac{AC}{AC_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}$
- $\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$
  $\dfrac{AC}{AC_2} = \dfrac{BC}{B_2C_2}$
- $\triangle ABC \sim \triangle AB_3C_3$
  $\dfrac{AC}{AC_3} = \dfrac{BC}{B_3C_3}$

A partir disso, temos:

- $\dfrac{B_1C_1}{AC_1} = \dfrac{BC}{AC}$
- $\dfrac{B_2C_2}{AC_2} = \dfrac{BC}{AC}$
- $\dfrac{B_3C_3}{AC_3} = \dfrac{BC}{AC}$

Observe que:

$$\frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{B_3C_3}{AC_3} = \frac{BC}{AC} = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo } \hat{A}}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}$$

Podemos traçar infinitos triângulos retângulos semelhantes ao triângulo ABC, com vértice A e lado oposto ao vértice A formado por segmento de reta paralelo a $\overline{BC}$ com vértices situados nos prologamentos de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

A razão que relaciona a medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$ com a medida de comprimento da hipotenusa, em todos esses triângulos, é constante e recebe o nome de **seno** do ângulo de medida de abertura a. Assim:

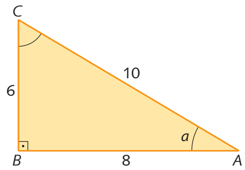
$$\text{sen } a = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura } a}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}$$

seno do ângulo de medida de abertura a; lemos: "seno de a"

Em todo triângulo retângulo, denominamos **seno de um ângulo agudo** a razão entre a medida de comprimento do cateto oposto a esse ângulo e à medida de comprimento da hipotenusa.

Confira mais um exemplo.

Vamos calcular o seno do ângulo $\hat{A}$ no triângulo retângulo *ABC*.



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

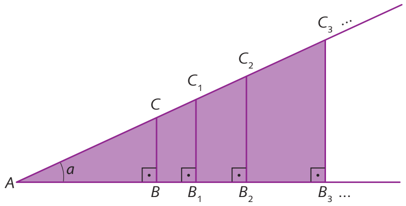
medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$

$$\text{sen } a = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

medida de comprimento da hipotenusa

Cosseno de um ângulo agudo

Considere os triângulos retângulos *ABC*, AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3, já apresentados.



$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$

$\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$

$\triangle ABC \sim \triangle AB_3C_3$

LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, podemos escrever:

- $\frac{AC}{AC_1} = \frac{AB}{AB_1}$
- $\frac{AC}{AC_2} = \frac{AB}{AB_2}$
- $\frac{AC}{AC_3} = \frac{AB}{AB_3}$

A partir disso, temos:

- $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC}$
- $\frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB}{AC}$
- $\frac{AB_3}{AC_3} = \frac{AB}{AC}$

Observe que:

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{AB_3}{AC_3} = \frac{AB}{AC} = \frac{\text{medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo } \hat{A}}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}$$

A razão que relaciona a medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$ com a medida de comprimento da hipotenusa, em todos esses triângulos, é constante e recebe o nome de **cosseno** do ângulo de medida de abertura *a*. Assim:

$$\cos a = \frac{\text{medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura } a}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}$$

cosseno do ângulo de medida de abertura *a*; lemos: "cosseno de *a*"

> Em todo triângulo retângulo, denominamos **cosseno de um ângulo agudo** a razão entre a medida de comprimento do cateto adjacente a esse ângulo e à medida de comprimento da hipotenusa.

189

Cosseno de um ângulo agudo

Com base no que foi estudado sobre o seno de um ângulo agudo, é possível que alguns estudantes tenham condições de desenvolver sozinhos o raciocínio apresentado neste tópico. Se achar conveniente, desafie-os a fazer isso. Reproduza a figura inicial na lousa e solicite que, utilizando a semelhança de triângulos, concluam que a medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura *a* e a medida de comprimento da hipotenusa, em todos os triângulos, é constante.

Sugestão de leitura

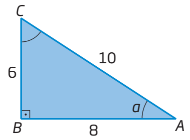
Sobre o ensino de Trigonometria, sugerimos a leitura da dissertação de mestrado de Carlos Eduardo Moraes Pires, intitulada *O ensino de Trigonometria por meio de aulas práticas*.

Tangente de um ângulo agudo

Se julgar necessário, dê outros exemplos sobre o cálculo de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo. Certifique-se de que os estudantes reconhecem e identificam corretamente a hipotenusa, o cateto oposto e o cateto adjacente. Caso apresentem dificuldade, retome os elementos de um triângulo retângulo.

Analise mais alguns exemplos.

a) Vamos calcular o cosseno do ângulo $\hat{A}$ no triângulo retângulo *ABC*.

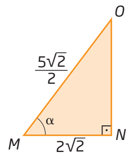


medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$

$$\cos a = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

medida de comprimento da hipotenusa

b) Vamos determinar o cosseno do ângulo $\hat{M}$ no triângulo retângulo *MNO*.



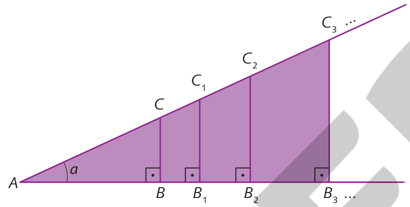
medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo $\hat{M}$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{5}$$

medida de comprimento da hipotenusa

Tangente de um ângulo agudo

Considere, mais uma vez, os triângulos retângulos *ABC*, AB_1C_1, AB_2C_2 e AB_3C_3, já apresentados.



$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$

$\triangle ABC \sim \triangle AB_2C_2$

$\triangle ABC \sim \triangle AB_3C_3$

Assim, podemos escrever:

- $\frac{AB}{AB_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$
- $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{B_2C_2}$
- $\frac{AB}{AB_3} = \frac{BC}{B_3C_3}$

A partir disso, temos:

- $\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{BC}{AB}$
- $\frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{BC}{AB}$
- $\frac{B_3C_3}{AB_3} = \frac{BC}{AB}$

Observe que:

$$\frac{B_1C_1}{AB_1} = \frac{B_2C_2}{AB_2} = \frac{B_3C_3}{AB_3} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo } \hat{A}}{\text{medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo } \hat{A}}$$

A razão que relaciona a medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$ com a medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$, em todos esses triângulos, é constante e recebe o nome de **tangente** do ângulo de medida de abertura *a*. Assim:

$$\text{tg } a = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura } a}{\text{medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura } a}$$

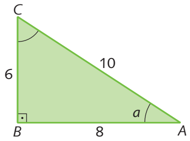
tangente do ângulo de medida de abertura *a*; lemos: "tangente de *a*"

Peça aos estudantes que observem atentamente o segundo exemplo. Verifique se percebem que sen b = cos c, cos b = sen c e tg b é o inverso de tg c.

Em todo triângulo retângulo, denominamos **tangente de um ângulo agudo** a razão entre a medida de comprimento do cateto oposto a esse ângulo e à medida de comprimento do cateto adjacente a esse ângulo.

Verifique mais alguns exemplos.

a) Vamos calcular a tangente do ângulo $\hat{A}$ no triângulo retângulo *ABC*.

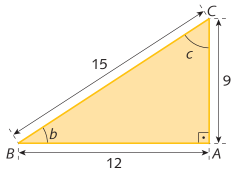


medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo $\hat{A}$

$$\text{tg } a = \frac{BC}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo $\hat{A}$

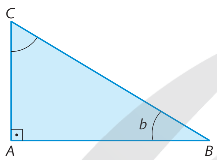
b) Com base no triângulo retângulo *ABC*, vamos determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$.



- $\text{sen } b = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
- $\cos b = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$
- $\text{tg } b = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

- $\text{sen } c = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$
- $\cos c = \frac{AC}{BC} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$
- $\text{tg } c = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

A tangente de um ângulo agudo também pode ser obtida como a razão entre o seno e o cosseno desse ângulo. Dado um triângulo *ABC* qualquer, temos:



- $\text{sen } b = \frac{AC}{BC} \Rightarrow AC = BC \cdot \text{sen } b$ I
- $\cos b = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = BC \cdot \cos b$ II

Como $\text{tg } b = \frac{AC}{AB}$, temos:

$$\text{tg } b = \frac{\overset{\text{I}}{AC}}{\underset{\text{II}}{AB}} = \frac{\cancel{BC} \cdot \text{sen } b}{\cancel{BC} \cdot \cos b} = \frac{\text{sen } b}{\cos b} \Rightarrow \boxed{\text{tg } b = \frac{\text{sen } b}{\cos b}}$$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

191

• Na **atividade 24**, os estudantes deverão determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos internos de diferentes triângulos retângulos. Aproveite o momento para verificar a compreensão deles a respeito desse conteúdo. Sugira que façam a resolução desta atividade na lousa e, para que todos possam participar, podem-se construir outros triângulos retângulos. Essa estratégia permite a identificação de dúvidas, que poderão ser esclarecidas no processo de resolução.

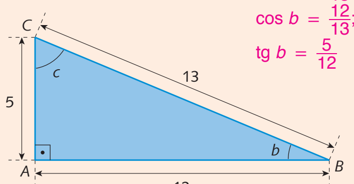
• A situação da **atividade 25** aborda uma aplicação prática das razões trigonométricas. Comente com os estudantes que, segundo as normas de acessibilidade da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), a medida da inclinação das rampas de acesso, salvo algumas exceções, não deve ser superior a 8,33%, o que significa que a tangente do ângulo deve ser menor ou igual a 0,0833, isto é, o ângulo deve ter menos que 5° de medida de abertura. Comente que essa inclinação é indicada para facilitar a locomoção de pessoas com deficiência ou mobilidade reduzida.

Atividades

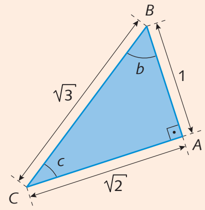
Faça as atividades no caderno.

24 Determine as razões trigonométricas solicitadas em cada item.

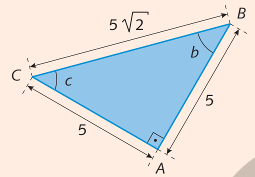
a) sen c, cos b, tg b; **24. a)** sen $c = \frac{12}{13}$; cos $b = \frac{12}{13}$; tg $b = \frac{5}{12}$



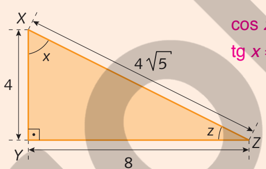
b) sen b, cos b, tg c; **24. b)** sen $b = \frac{\sqrt{6}}{3}$; cos $b = \frac{\sqrt{3}}{3}$; tg $c = \frac{\sqrt{2}}{2}$



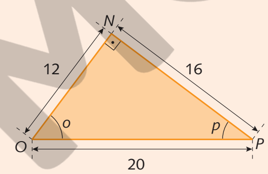
c) sen b, cos b, tg b; **24. c)** sen $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$; cos $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$; tg $b = 1$



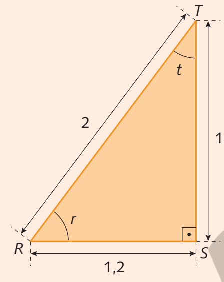
d) sen x, cos z, tg x; **24. d)** sen $x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; cos $z = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; tg $x = 2$



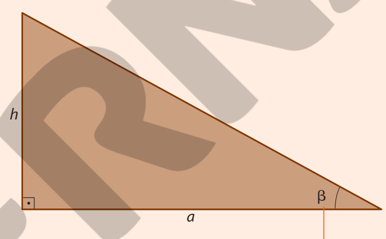
e) sen o, cos p, tg p; **24. e)** sen $o = \frac{4}{5}$; cos $p = \frac{4}{5}$; tg $p = \frac{3}{4}$



f) sen r, cos t, tg t. **24. f)** sen $r = 0{,}8$; cos $t = 0{,}8$; tg $t = \frac{3}{4}$



25 A medida da inclinação de uma rampa corresponde à tangente do ângulo adjacente à base e oposto à altura dessa rampa.



β é a medida de abertura do ângulo de inclinação dessa rampa

Assim, para calcular a medida da inclinação (tangente de β), devemos dividir a medida da altura da rampa (h) pela medida do afastamento (a). Caso o resultado encontrado seja menor ou igual a 0,0833 (8,33%), a rampa é segura e segue os padrões de acessibilidade. Esse cálculo é necessário na construção de rampas de acesso para pessoas com deficiência de mobilidade.

Agora, com base nessa informação, responda:

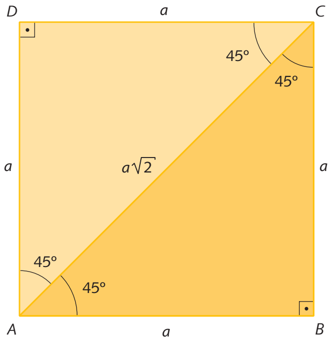
a) Qual deve ser a medida da altura máxima de uma rampa que mede 2,5 m de afastamento? **25. a)** 0,20825 m

b) Qual deve ser a medida mínima de afastamento se uma rampa mede 25 cm de altura? **25. b)** 3,0012 m

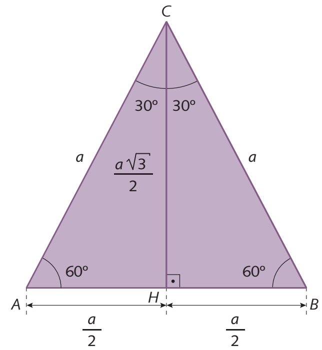
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

As razões trigonométricas dos ângulos de medidas de abertura de 30°, 45° e 60°

Considere o quadrado *ABCD* e o triângulo equilátero *ABC* a seguir.



- medida de comprimento do lado do quadrado *ABCD*: *a*
- medida de comprimento da diagonal do quadrado *ABCD*: $a\sqrt{2}$



- medida de comprimento do lado do triângulo equilátero *ABC*: *a*
- medida de comprimento da altura do triângulo equilátero *ABC*: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

As medidas de comprimento das diagonais de um quadrado e das alturas de um triângulo equilátero podem ser determinadas pelo teorema de Pitágoras.

Agora, vamos usar essas figuras para determinar o seno, o cosseno e a tangente dos ângulos de medidas de abertura de 30°, 45° e 60°.

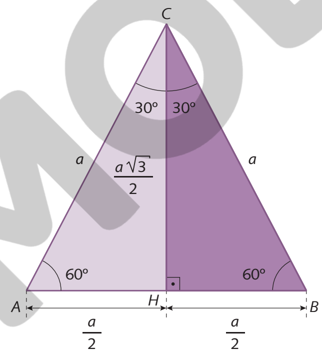
Seno, cosseno e tangente do ângulo de medida de abertura de 30°

Observe o $\triangle BHC$ e a aplicação das definições de seno, cosseno e tangente para o ângulo de medida de abertura de 30°:

$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{\cancel{a}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{a}}{2} \cdot \frac{2}{\cancel{a}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

As razões trigonométricas dos ângulos de medidas de abertura de 30°, 45° e 60°

Para trabalhar as razões trigonométricas dos ângulos de medidas de abertura de 30°, 45° e 60°, relembre com a turma que a diagonal do quadrado o divide em dois triângulos retângulos e isósceles (congruentes), que os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, que todos os ângulos internos de um triângulo equilátero tem abertura medindo 60° e que a altura, a bissetriz e a mediana que partem de um mesmo vértice de um triângulo equilátero coincidem e têm uma extremidade no ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Se julgar necessário, reproduza na lousa o passo a passo de como foram obtidos os valores do seno, do cosseno e da tangente de 30°, 45° e 60° e esclareça qualquer dúvida dos estudantes sobre as relações utilizadas.

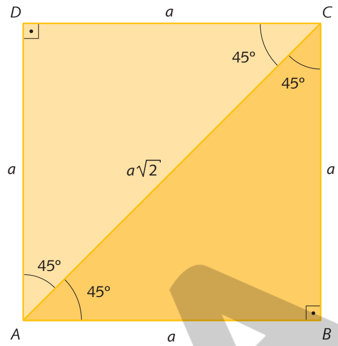
Seno, cosseno e tangente do ângulo de medida de abertura de 45°

Observe o $\triangle ABC$ e a aplicação das definições de seno, cosseno e tangente para o ângulo de medida de abertura de 45°:

$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\cancel{a}\cdot 1}{\cancel{a}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\cancel{a}\cdot 1}{\cancel{a}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{\cancel{a}}{\cancel{a}} = 1$$



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

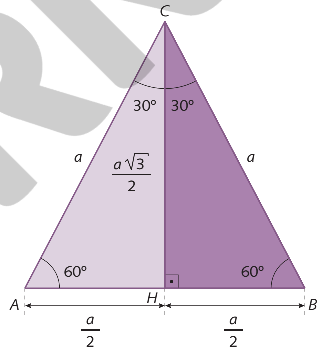
Seno, cosseno e tangente do ângulo de medida de abertura de 60°

Observe o $\triangle BHC$ e a aplicação das definições de seno, cosseno e tangente para o ângulo de medida de abertura de 60°:

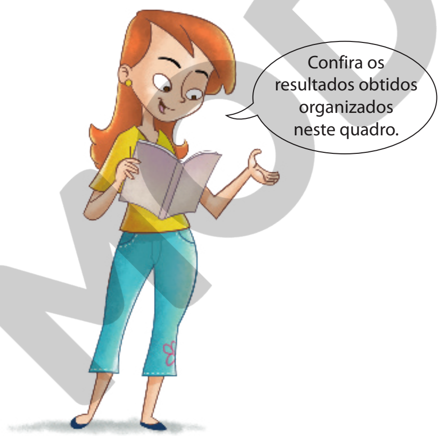
$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{\cancel{a}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{a}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\cancel{a}} = \sqrt{3}$$



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA



GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

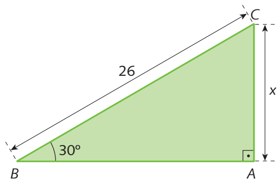
x	30°	45°	60°
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

194

Reproduza os exemplos na lousa e verifique se fazem o uso correto das informações do quadro apresentado com os valores de seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°.

Analise mais alguns exemplos.

a) Vamos determinar o valor de x no triângulo retângulo ABC.



$\text{sen } 30° = \frac{AC}{CB}$

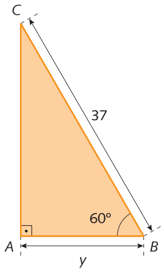
$\text{sen } 30° = \frac{x}{26}$

$x = 26 \cdot \text{sen } 30°$

$x = 26 \cdot \frac{1}{2} = 13$

Portanto, o valor de x é 13.

b) Dado o $\triangle ABC$, vamos determinar o valor de y.



$\cos 60° = \frac{AB}{BC}$

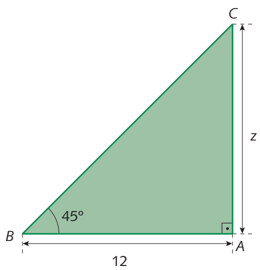
$\cos 60° = \frac{y}{37}$

$y = 37 \cdot \cos 60°$

$y = 37 \cdot \frac{1}{2} = 18{,}5$

Portanto, o valor de y é 18,5.

c) Vamos determinar o valor de z para o triângulo retângulo ABC.



$\text{tg } 45° = \frac{AC}{AB}$

$\text{tg } 45° = \frac{z}{12}$

$z = 12 \cdot \text{tg } 45°$

$z = 12 \cdot 1 = 12$

Portanto, o valor de z é 12.

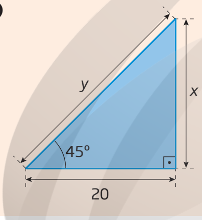
As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

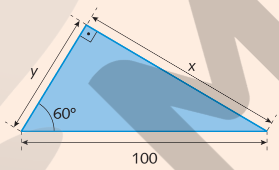
26 Calcule o valor de x e y nestes triângulos retângulos.

a)



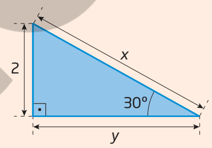
26. a) $x = 20$; $y = 20\sqrt{2}$

b)



26. b) $x = 50\sqrt{3}$; $y = 50$

c)



26. c) $x = 4$; $y = 2\sqrt{3}$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

195

• Na **atividade 27**, para determinar o valor de x, pode-se fazer:

$$\text{sen } 30° = \frac{80}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{80}{x} \Rightarrow x = 160$$

Do mesmo modo, o valor de n pode ser determinado considerando-se o triângulo *ABD* e o cos 60°:

$$\cos 60° = \frac{n}{80} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{n}{80} \Rightarrow n = 40$$

Como $m + n = x$, temos: $m + 40 = 160 \Rightarrow$ $\Rightarrow m = 120$

Considerando novamente o triângulo *ABD* e a tg 60°, obtemos h:

$$\text{tg } 60° = \frac{h}{40} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{40} \Rightarrow h = 40\sqrt{3}$$

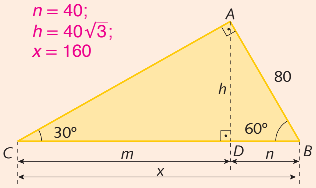
Tabela de razões trigonométricas

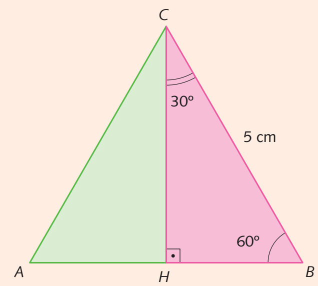
Ao trabalhar a tabela de razões trigonométricas com os valores aproximados de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos, chame a atenção dos estudantes para o fato de que os valores de seno e cosseno estão entre 0 e 1.

As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

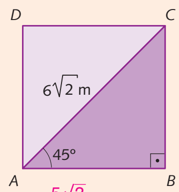
27 Determine o valor de m, n, h e x no triângulo retângulo a seguir.

27. $m = 120$; $n = 40$; $h = 40\sqrt{3}$; $x = 160$





28 Calcule a medida de comprimento do lado do quadrado *ABCD*, em metro, e a medida de comprimento da altura $\overline{CH}$ do triângulo *ABC*, em centímetro.



28. $CB = 6$ m; $CH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

29 Determine a medida de comprimento h da altura deste triângulo retângulo.

29. $h = 300(1 + \sqrt{3})$ m

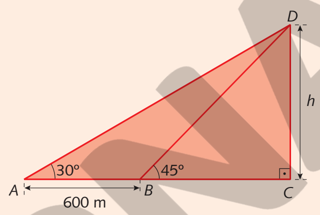


Tabela de razões trigonométricas

Na resolução de diversos problemas envolvendo razões trigonométricas, necessitamos dos valores do seno, do cosseno e da tangente de alguns ângulos com medidas de abertura diferentes de 30°, 45° e 60°.

Por exemplo, o que você faria se precisasse do seno de 39° para resolver um problema? Ou se precisasse do cosseno de 50°? E da tangente de 81°?

Por isso, há alguns séculos, matemáticos calcularam e organizaram os valores aproximados do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos agudos cujas medidas de abertura variam de 1° a 89°.

Observe a seguir os valores com aproximação de milésimos.

x	sen *x*	cos *x*	tg *x*	*x*	sen *x*	cos *x*	tg *x*
1°	0,017	1,000	0,017	**13°**	0,225	0,974	0,231
2°	0,035	0,999	0,035	**14°**	0,242	0,970	0,249
3°	0,052	0,999	0,052	**15°**	0,259	0,966	0,268
4°	0,070	0,998	0,070	**16°**	0,276	0,961	0,287
5°	0,087	0,996	0,087	**17°**	0,292	0,956	0,306
6°	0,105	0,995	0,105	**18°**	0,309	0,951	0,325
7°	0,122	0,993	0,123	**19°**	0,326	0,946	0,344
8°	0,139	0,990	0,141	**20°**	0,342	0,940	0,364
9°	0,156	0,988	0,158	**21°**	0,358	0,934	0,384
10°	0,174	0,985	0,176	**22°**	0,375	0,927	0,404
11°	0,191	0,982	0,194	**23°**	0,391	0,921	0,424
12°	0,208	0,978	0,213	**24°**	0,407	0,914	0,445

Faça a leitura dos exemplos do livro com a turma. Em seguida, se achar necessário, apresente outros exemplos para que os estudantes localizem os valores aproximados de seno, cosseno e tangente na tabela de razões trigonométricas.

x	**sen *x***	**cos *x***	**tg *x***	***x***	**sen *x***	**cos *x***	**tg *x***
25°	0,423	0,906	0,466	**58°**	0,848	0,530	1,600
26°	0,438	0,899	0,488	**59°**	0,857	0,515	1,664
27°	0,454	0,891	0,510	**60°**	0,866	0,500	1,732
28°	0,469	0,883	0,532	**61°**	0,875	0,485	1,804
29°	0,485	0,875	0,554	**62°**	0,883	0,469	1,881
30°	0,500	0,866	0,577	**63°**	0,891	0,454	1,963
31°	0,515	0,857	0,601	**64°**	0,899	0,438	2,050
32°	0,530	0,848	0,625	**65°**	0,906	0,423	2,145
33°	0,545	0,839	0,649	**66°**	0,914	0,407	2,246
34°	0,559	0,829	0,675	**67°**	0,921	0,391	2,356
35°	0,574	0,819	0,700	**68°**	0,927	0,375	2,475
36°	0,588	0,809	0,727	**69°**	0,934	0,358	2,605
37°	0,602	0,799	0,754	**70°**	0,940	0,342	2,747
38°	0,616	0,788	0,781	**71°**	0,946	0,326	2,904
39°	0,629	0,777	0,810	**72°**	0,951	0,309	3,078
40°	0,643	0,766	0,839	**73°**	0,956	0,292	3,271
41°	0,656	0,755	0,869	**74°**	0,961	0,276	3,467
42°	0,669	0,743	0,900	**75°**	0,966	0,259	3,732
43°	0,682	0,731	0,933	**76°**	0,970	0,242	4,011
44°	0,695	0,719	0,966	**77°**	0,974	0,225	4,332
45°	0,707	0,707	1,000	**78°**	0,978	0,208	4,705
46°	0,719	0,695	1,036	**79°**	0,982	0,191	5,145
47°	0,731	0,682	1,072	**80°**	0,985	0,174	5,671
48°	0,743	0,669	1,111	**81°**	0,988	0,156	6,314
49°	0,755	0,656	1,150	**82°**	0,990	0,139	7,115
50°	0,766	0,643	1,192	**83°**	0,993	0,122	8,144
51°	0,777	0,629	1,235	**84°**	0,995	0,105	9,514
52°	0,788	0,616	1,280	**85°**	0,996	0,087	11,430
53°	0,799	0,602	1,327	**86°**	0,998	0,070	14,301
54°	0,809	0,588	1,376	**87°**	0,999	0,052	19,081
55°	0,819	0,574	1,428	**88°**	0,999	0,035	28,636
56°	0,829	0,559	1,483	**89°**	1,000	0,017	57,290
57°	0,839	0,545	1,540				

Analise a seguir alguns exemplos do uso da tabela de razões trigonométricas.

a) Vamos localizar o valor aproximado do cosseno de 33°.

Primeiro, localizamos 33° e, então, na coluna "cos *x*", encontramos 0,839.

Portanto: cos 33° ≃ 0,839.

O cosseno de 33° é aproximadamente igual a 0,839.

x	**sen *x***	**cos *x***	**tg *x***
31°	0,515	0,857	0,601
32°	0,530	0,848	0,625
33°	0,545	**0,839**	0,649
34°	0,559	0,829	0,675
35°	0,574	0,819	0,700

GEORGE TUTUMI/ ARQUIVO DA EDITORA

No boxe *Observação*, os estudantes entrarão em contato com a calculadora científica e aprenderão a utilizar as teclas de seno, cosseno e tangente. Se possível, oriente-os a usar a calculadora científica (presente também em muitos celulares) para calcular o seno, o cosseno e a tangente de alguns ângulos e comparar os valores obtidos com os apresentados na tabela de razões trigonométricas. Essa é uma forma não só de familiarizá-los com a calculadora científica, como também de reforçar o fato de que a maior parte dos valores apresentados na tabela são aproximações, assim como os valores da calculadora, porém os valores da calculadora científica apresentam mais casas decimais.

b) Vamos determinar a medida de abertura do ângulo cuja tangente é aproximadamente igual a 1,6.

Localizamos, na coluna "tg *x*", o valor 1,6 e encontramos a medida de abertura do ângulo correspondente a esse valor.

x	sen *x*	cos *x*	tg *x*
56°	0,829	0,559	1,483
57°	0,839	0,545	1,540
58°	0,848	0,530	**1,600**
59°	0,857	0,515	1,664
60°	0,866	0,500	1,732

Portanto, a medida de abertura do ângulo procurado é 58°.

c) Qual é a medida de abertura do ângulo cujos seno e cosseno têm valores iguais?

Para responder a essa pergunta, localizamos, nas colunas "sen *x*" e "cos *x*", valores iguais. Depois, encontramos a medida de abertura do ângulo correspondente a esses valores.

x	sen *x*	cos *x*	tg *x*
43°	0,682	0,731	0,933
44°	0,695	0,719	0,966
45°	**0,707**	**0,707**	1,000
46°	0,719	0,695	1,036
47°	0,731	0,682	1,072

Portanto, a medida de abertura do ângulo procurado é 45°.

Observação

A calculadora científica é um recurso útil e poderá ajudar no cálculo das razões trigonométricas dos ângulos.

Para a realização dos cálculos, utilize as teclas SIN para seno, COS para cosseno e TAN para tangente e verifique se a calculadora científica está no modo DEG (grau = *degree*).

Vamos fazer um teste? Digite a sequência de teclas a seguir e confirme o resultado no visor.

- 4 0 SIN 0.6428
- 3 6 COS 0.8090
- 7 0 TAN 2.7475

Lembre-se de que calculadoras diferentes, por vezes, requerem distintos procedimentos para os cálculos.

AMANKRIS/SHUTTERSTOCK

Atividades

Faça as atividades no caderno.

30 Utilizando uma calculadora científica ou a tabela de razões trigonométricas, determine, com aproximação de três casas decimais, os valores de:

a) sen 17° **30. a)** 0,292
b) cos 2° **30. b)** 0,999
c) tg 26° **30. c)** 0,488
d) sen 43° **30. d)** 0,682
e) cos 38° **30. e)** 0,788
f) tg 50° **30. f)** 1,192
g) cos 14° **30. g)** 0,970
h) tg 88° **30. h)** 28,636

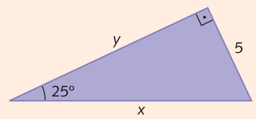
31 Utilizando a tabela de razões trigonométricas, determine *a* (em grau), sabendo que:

a) sen $a = 0{,}122$
b) cos $a = 0{,}342$
c) tg $a = 0{,}7$
d) sen $a = 0{,}829$
e) tg $a = 0{,}176$
f) sen $a = 0{,}988$
g) cos $a = 0{,}777$
h) tg $a = 1{,}732$

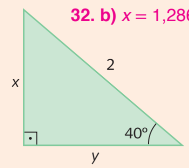
31. a) 7°
31. b) 70°
31. c) 35°
31. d) 56°
31. e) 10°
31. f) 81°
31. g) 39°
31. h) 60°

32 Calcule o valor de *x* e *y* nestes triângulos retângulos. **32. a)** $x \simeq 11{,}82$; $y \simeq 10{,}73$

a)



b) **32. b)** $x = 1{,}286$; $y = 1{,}532$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

5 Resolução de problemas

Neste tópico, vamos estudar alguns problemas que envolvem aplicações das razões trigonométricas estudadas.

Problema 1

De um posto de observação situado a 100 m de um prédio, vê-se o ponto mais alto desse prédio sob um ângulo de medida de abertura de 44°. Determine a medida da altura do prédio, sabendo que o posto está a 1 m do solo. (Utilize: sen 44° = 0,70; cos 44° = 0,72; tg 44° = 0,97.)

Como x corresponde à medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura de 44°, podemos escrever:

$$\text{tg } 44° = \frac{x}{100 \text{ m}}$$

$$x = 100 \text{ m} \cdot \text{tg } 44°$$

$$x = 100 \text{ m} \cdot 0{,}97$$

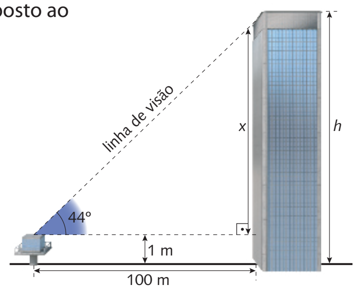
$$x = 97 \text{ m}$$

Então:

$$h = x + 1 \text{ m}$$

$$h = 97 \text{ m} + 1 \text{ m} = 98 \text{ m}$$

Portanto, a medida da altura do prédio é 98 m.



Representação esquemática fora de escala.

Problema 2

Um avião, a uma medida da altura de 2 000 m, é visto por dois observadores que estão nos pontos A e B, sob ângulos de medidas de abertura de 28° e 40°, respectivamente. Qual é a medida da distância aproximada entre esses dois observadores? (Utilize: sen 28° = 0,47; cos 28° = 0,88; tg 28° = 0,53; sen 40° = 0,64; cos 40° = 0,77; tg 40° = 0,84.)

De acordo com o esquema a seguir, temos os triângulos retângulos BVC e AVC, com um dos catetos comum ($\overline{VC}$). A medida da distância entre os dois observadores é representada por x, que corresponde a uma parte da medida de comprimento do cateto $\overline{AC}$ do triângulo AVC.

Do triângulo BVC, temos:

$$\text{tg } 40° = \frac{2\,000 \text{ m}}{y}$$

$$y = \frac{2\,000 \text{ m}}{\text{tg } 40°}$$

$$y = \frac{2\,000 \text{ m}}{0{,}84}$$

$$y \simeq 2\,380{,}95 \text{ m}$$

E, do triângulo AVC, temos:

$$\text{tg } 28° = \frac{2\,000 \text{ m}}{x + y}$$

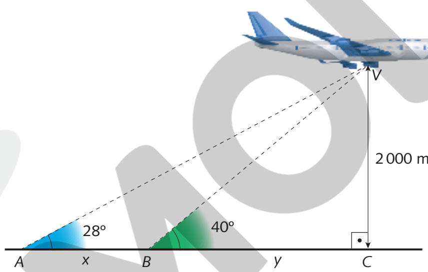
$$x + y = \frac{2\,000 \text{ m}}{\text{tg } 28°}$$

$$x + y = \frac{2\,000 \text{ m}}{0{,}53}$$

$$x + y \simeq 3\,773{,}58 \text{ m}$$

$$x \simeq 3\,773{,}58 \text{ m} - 2\,380{,}95 \text{ m}$$

$$x \simeq 1\,392{,}63 \text{ m}$$



Representação esquemática fora de escala.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a medida da distância aproximada entre os dois observadores é 1 392,63 m.

199

Ao explorar os problemas deste tópico, certifique-se de que os estudantes identificam o triângulo retângulo, seus elementos e a razão trigonométrica a ser aplicada na resolução; se houver necessidade, leia os problemas com a turma, esclarecendo eventuais dúvidas.

Resolução de problemas

Objetivo:

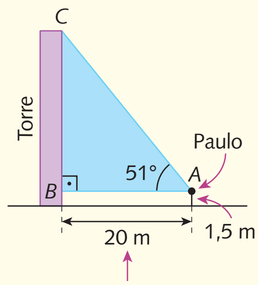
Aplicar as razões trigonométricas em um triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo) na resolução de problemas.

Justificativa

As razões trigonométricas podem ser aplicadas para resolver problemas que envolvam a determinação de medidas inacessíveis, por exemplo, as medidas da altura de torres ou prédios ou a medida da distância entre as margens de um rio. Aplicar as razões trigonométricas para resolver problemas como esses amplia o repertório de estratégias dos estudantes e pode ajudá-los a atribuir mais significado a esse conteúdo.

Mapeando conhecimentos

Apresente para a turma a seguinte situação problema: "Paulo mede 1,5 m de altura e deseja saber a medida da altura de uma torre para antena de celular. Ele está a 20 m dela e a medida da abertura do ângulo com que ele enxerga parte da torre é igual a 51°. Como Paulo poderá calcular a medida da altura dessa torre, sem subir na torre?". Você pode pedir para que os estudantes se organizem em duplas. Deixe-os à vontade para utilizar suas estratégias pessoais. Você pode orientá-los a fazer um esquema, como o da referência a seguir, para representar a situação.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Proponha as seguintes questões para eles: "Quais são as informações fornecidas no enunciado do problema?"; "Qual das razões trigonométricas devemos calcular para determinar parte da medida da altura da torre?"; "Como podemos determinar a tangente de 51°?"; "A medida da altura de Paulo é um dado importante? Por quê?".

Para as aulas iniciais

Resolva o problema proposto na dinâmica inicial coletivamente e tire as eventuais dúvidas. Depois, você pode propor outros problemas para os estudantes resolverem ou pedir que elaborem problemas que possam ser resolvidos utilizando razões trigonométricas.

Sugestão de atividade extra

Após os estudantes compreenderem o problema **3**, pergunte-lhes qual seria a medida da largura do rio caso a medida da abertura do ângulo obtido fosse 40° em vez de 55°.

Espera-se que eles percebam que basta substituir o valor da tangente de 55° pelo o valor da tangente de 40°, assim:

$$\text{tg } 40° = \frac{r}{20 \text{ m}}$$
$$r = 20 \text{ m} \cdot \text{tg } 40°$$
$$r = 20 \text{ m} \cdot 0{,}839$$
$$r = 16{,}78 \text{ m}$$

Portanto, a largura do rio mediria 16,78 m.

Ao propor as atividades, incentive os estudantes a justificar suas resoluções e avaliar se a resposta encontrada atende às condições do problema. Identifique as dificuldades enfrentadas por eles e retome algum conceito se achar necessário.

- Na **atividade 33**, os estudantes devem estar atentos para não esquecer de considerar a medida da altura do observador ao determinar a medida aproximada da altura do mastro.
- Se considerar necessário, proponha a eles que façam um esquema para auxiliar a resolução da **atividade 34**.
- Para resolver a **atividade 36**, eles deverão considerar que a medida da altura corresponde à medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo de 30° de medida de abertura e que a medida da distância percorrida corresponde à medida de comprimento da hipotenusa. Desse modo, temos:

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow x = 4$$

Portanto, a altura medirá 4 km.

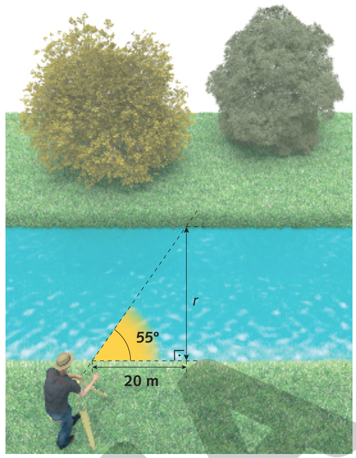
As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

Problema 3

Há situações em que não podemos utilizar uma trena para medir determinado comprimento, como a largura de um rio. Nesses casos, é comum utilizar um instrumento ótico chamado teodolito, que mede a abertura de um ângulo. Então, por meio da Trigonometria, é possível descobrir a medida desejada.

Observe esta situação representada. Determine a medida r da largura do rio.

(Utilize: sen 55° = 0,82; cos 55° = 0,57; tg 55° = 1,43.)



Representação esquemática fora de escala.

Do triângulo representado, temos:

$$\text{tg } 55° = \frac{r}{20 \text{ m}}$$

$$r = 20 \text{ m} \cdot \text{tg } 55°$$

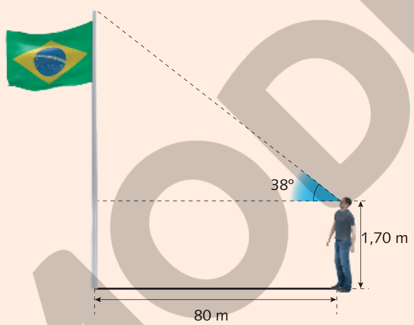
$$r = 20 \text{ m} \cdot 1{,}43 = 28{,}6 \text{ m}$$

Logo, a largura do rio mede 28,6 m.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

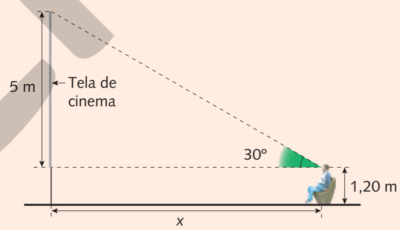
33 Um observador, distante 80 m do mastro de uma bandeira, vê seu ponto mais alto sob o ângulo de medida de abertura de 38°. A distância dos olhos dele ao chão mede 1,70 m. Qual é a medida aproximada da altura do mastro? **33.** 64,18 m



Representação esquemática fora de escala.

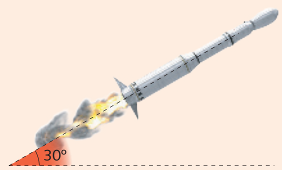
34 Do alto de uma torre que mede 50 m de altura, localizada em uma ilha, avista-se a praia sob um ângulo de medida de abertura de 45° em relação à horizontal. Quanto mede a distância da torre à praia? **34.** 50 m

35 Observe o esquema e calcule a medida da distância (x) a que o garoto deve estar da tela. **35.** $5\sqrt{3}$ m



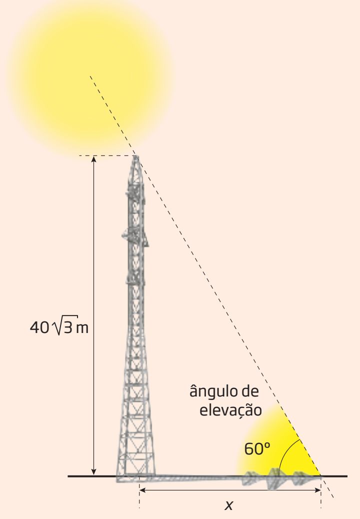
Representação esquemática fora de escala.

36 Um foguete é lançado de uma rampa situada no solo, sob um ângulo de medida de abertura de 30°. A que medida da altura estará o foguete após percorrer 8 km em linha reta? **36.** 4 km



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

37 Determine a medida do comprimento da sombra projetada por uma torre que mede $40\sqrt{3}$ m de altura, sob ângulo de elevação de medida de abertura de 60° em relação ao Sol. **37.** 40 m



Representação esquemática fora de escala.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

38 Uma das preocupações dos engenheiros de uma cidade litorânea é verificar as medidas das inclinações α, em relação à vertical, dos prédios situados na orla marítima. Essas inclinações podem ocorrer em razão de problemas nas fundações construídas sobre o solo arenoso. Os valores aceitos, segundo os engenheiros, devem satisfazer esta condição: $\text{tg}\ \alpha \leqslant 0{,}052$.

Reúna-se com um colega e determinem a medida da inclinação máxima aceita pelos engenheiros em um prédio situado à beira-mar. **38.** 3°

Solo arenoso: Tipo de solo com pouca umidade, com teor de areia superior a 70%.

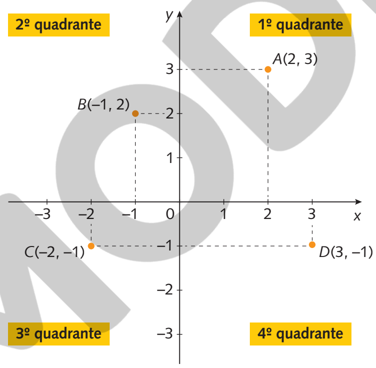
Construções tortuosas na orla da praia de Santos (SP) causadas por problemas de fundação. Foto de 2021.

WILL RODRIGUES/SHUTTERSTOCK

6 Plano cartesiano

O plano cartesiano é composto de um eixo horizontal e um vertical, chamados de **eixo das abscissas** (eixo *x*) e **eixo das ordenadas** (eixo *y*), respectivamente, e podemos representar pontos ou polígonos em um plano.

Analise a representação dos pontos *A*, *B*, *C* e *D*, cujos **pares ordenados** são (2, 3), (–1, 2), (–2, –1) e (3, –1), respectivamente.



Em um plano cartesiano:

- os pontos (*x*, *y*) do 1º quadrante têm abscissas e ordenadas positivas ($x > 0$ e $y > 0$);
- os pontos (*x*, *y*) do 2º quadrante têm abscissas negativas e ordenadas positivas ($x < 0$ e $y > 0$);
- os pontos (*x*, *y*) do 3º quadrante têm abscissas e ordenadas negativas ($x < 0$ e $y < 0$);
- os pontos (*x*, *y*) do 4º quadrante têm abscissas positivas e ordenadas negativas ($x > 0$ e $y < 0$).

201

Iniciamos com uma revisão sobre a localização de pontos e de polígonos no plano cartesiano para, depois, prosseguir com o cálculo da medida da distância entre dois pontos no plano e a determinação das coordenadas do ponto médio. Aproveite esse momento para identificar as eventuais dúvidas dos estudantes em relação a esse assunto.

(EF09MA16) Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.

- Na **atividade 38**, como a tg α deve ser menor ou igual a 0,052, α não pode ser maior que 3°.

Plano cartesiano

BNCC:

Habilidade EF09MA16.

Objetivos:

- Determinar a medida da distância entre dois pontos quaisquer no plano cartesiano.
- Determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta no plano cartesiano.

Justificativa

Determinar a medida da distância entre dois pontos quaisquer do plano cartesiano e as coordenadas do ponto médio de um segmento de reta é uma oportunidade para a aplicação do teorema de Pitágoras e favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA16**.

Mapeando conhecimentos

Peça aos estudantes que, em uma folha de papel quadriculado, representem um plano cartesiano e dois pontos quaisquer. Depois, proponha que conjecturem como podem determinar a medida da distância entre esses pontos com base no que já estudaram. Se achar pertinente, proponha que façam essa investigação com o apoio de um *software* de geometria dinâmica. Depois, pergunte como poderiam determinar as coordenadas do ponto médio do segmento de reta cujas extremidades sejam os pontos representados por eles.

Para as aulas iniciais

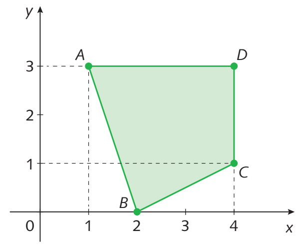
Peça a alguns estudantes que verbalizem como determinaram a medida da distância entre os pontos e as coordenadas do ponto médio na dinâmica inicial. Ajude aqueles que tiveram dificuldades. Depois, desafie-os a generalizar o cálculo da medida da distância entre dois pontos quaisquer $P(x_1, y_1)$ e $Q(x_2, y_2)$ do plano cartesiano. Espera-se que eles concluam que a medida da distância entre esses dois pontos é dada por: $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Em seguida peça também que generalizem o cálculo das coordenadas do ponto médio *M* do segmento de reta $\overline{PQ}$. Espera-se, nesse caso, que concluam que $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Medidas de comprimento dos lados de um polígono

Reforce o fato de que a medida da distância entre dois pontos é dada em módulo, ou seja, mesmo que um ponto tenha uma ou mais coordenadas negativas, a medida da distância entre esses dois pontos será um valor positivo.

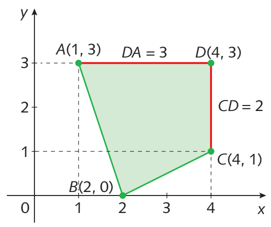
Observe, agora, o quadrilátero *ABCD* representado no plano cartesiano. Os pontos *A*(1, 3), *B*(2, 0), *C*(4, 1) e *D*(4, 3) correspondem aos vértices do polígono.

Conhecendo as coordenadas dos vértices de um polígono, além de localizá-lo no plano cartesiano, podemos calcular as medidas de comprimento de seus lados.



Medidas de comprimento dos lados de um polígono

Continuando com o exemplo do quadrilátero *ABCD*, verifique que:



- as ordenadas dos pontos *A* e *D* têm o mesmo valor (3). Isso significa que o segmento de reta $\overline{DA}$ é paralelo ao eixo *x*;
- as abscissas dos pontos *C* e *D*, que determinam o lado $\overline{CD}$, são iguais (4). Isso significa que $\overline{CD}$ é paralelo ao eixo *y*.

Para determinar a medida de comprimento de $\overline{DA}$ (paralelo ao eixo *x*), calculamos a diferença entre as abscissas dos pontos *D* e *A*:

$$DA = \underbrace{4}_{\text{abscissa do ponto } D} - \underbrace{1}_{\text{abscissa do ponto } A} = 3$$

Assim, a medida de comprimento de $\overline{DA}$ é 3 unidades de medida de comprimento.

Da mesma maneira, podemos determinar a medida de comprimento do lado $\overline{CD}$ (paralelo ao eixo *y*), calculando a diferença entre as ordenadas dos pontos *D* e *C*:

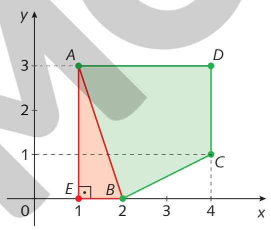
$$CD = \underbrace{3}_{\text{ordenada do ponto } D} - \underbrace{1}_{\text{ordenada do ponto } C} = 2$$

Assim, a medida de comprimento de $\overline{CD}$ é 2 unidades de medida de comprimento.

Como os outros dois lados do quadrilátero ($\overline{AB}$ e $\overline{BC}$) não são paralelos aos eixos *x* e *y*, para determinar suas medidas de comprimento, podemos usar o teorema de Pitágoras.

Considere os pontos que determinam o lado $\overline{AB}$, *A*(1, 3) e *B*(2, 0), e o ponto *E* de coordenadas (1, 0), obtendo, assim, o triângulo retângulo *ABE*, como indicado a seguir.

Nesse caso, temos:



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

$EA = 3 - 0 = 3$
$BE = 2 - 1 = 1$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle ABE$, determinamos a medida de comprimento de $\overline{AB}$:

$AB^2 = EA^2 + BE^2$
$AB^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$
$AB = \sqrt{10}$

Portanto, a medida de comprimento de $\overline{AB}$ é $\sqrt{10}$ unidades de medida de comprimento.

202

De modo análogo, determinamos a medida de comprimento de $\overline{BC}$. Para isso, consideramos os pontos B e C, o ponto F de coordenadas (4, 0) e o triângulo retângulo BCF. Assim:

$$CF = 1 - 0 = 1$$

$$FB = 4 - 2 = 2$$

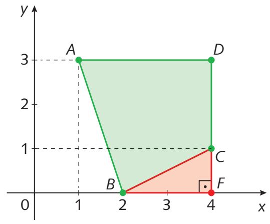
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\triangle BCF$, determinamos a medida de comprimento de $\overline{BC}$:

$BC^2 = CF^2 + FB^2$

$BC^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

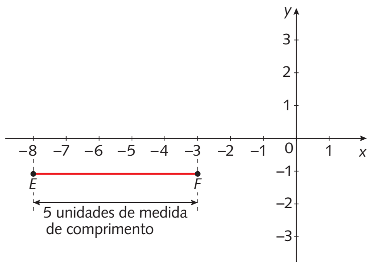
$BC = \sqrt{5}$

Portanto, a medida de comprimento de $\overline{BC}$ é $\sqrt{5}$ unidades de medida de comprimento.



Observações

1. Calcular a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$ equivale a calcular a medida da distância entre os pontos A e B.
2. É importante lembrar que a medida da distância é dada em módulo; assim, para um segmento de reta $\overline{EF}$ de coordenadas $E(-8, -1)$ e $F(-3, -1)$, a medida da distância entre os pontos E e F é $|-8 - (-3)|$, que resulta em 5 unidades de medida de comprimento.



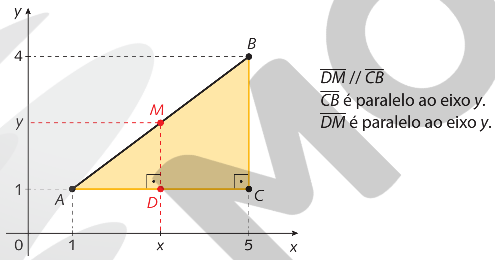
Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Acompanhe a situação a seguir.

Sejam os pontos $A(1, 1)$ e $B(5, 4)$ extremidades do segmento de reta de reta $\overline{AB}$. Vamos determinar as coordenadas (x, y) de M, o ponto médio de $\overline{AB}$.

Para auxiliar na resolução, vamos representar o segmento de reta $\overline{AB}$ no plano cartesiano e considerar o ponto C de coordenadas (5, 1), de modo a obter o triângulo retângulo ABC.

Consideramos M o ponto médio de $\overline{AB}$, e o ponto D pertencente a $\overline{AC}$, de modo que AMD seja um triângulo retângulo.



Observe que, como o ponto D pertence a $\overline{AC}$, sua ordenada é 1, ao passo que sua abscissa é x, a mesma do ponto M, pois $\overline{DM}$ é paralelo ao eixo y.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta

Neste tópico, a semelhança de triângulos será usada para a determinação das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta. Caso julgue necessário, reproduza o exemplo na lousa e tire as possíveis dúvidas dos estudantes.

Certifique-se de que os estudantes compreenderam os enunciados das atividades propostas e, se houver necessidade, leia os enunciados com a turma, esclarecendo eventuais dúvidas.

Pelo caso AA, com o ângulo reto e o ângulo $\hat{A}$ em comum, os triângulos *AMD* e *ABC* são semelhantes. Logo, as medidas de comprimento de seus lados são proporcionais. Desse modo, podemos escrever:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AD} \quad \text{(I)}$$

Como *M* é ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$\frac{AB}{2} = AM \Rightarrow AB = 2AM \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$\frac{2AM}{AM} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC = 2AD$$

Sabemos que: $AC = 5 - 1$ e $AD = x - 1$. Logo:

$$5 - 1 = 2(x - 1)$$
$$4 = 2x - 2$$
$$x = 3$$

Para determinar *y*, podemos escrever:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{BC}{MD} \Rightarrow \frac{2AM}{AM} = \frac{BC}{MD} \Rightarrow BC = 2MD$$

Como $BC = 4 - 1$ e $MD = y - 1$, então:

$$4 - 1 = 2(y - 1)$$
$$3 = 2y - 2$$
$$y = 2{,}5$$

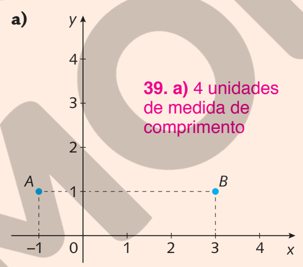
Assim, concluímos que as coordenadas do ponto médio *M* são (3; 2,5).

Atividades

Faça as atividades no caderno.

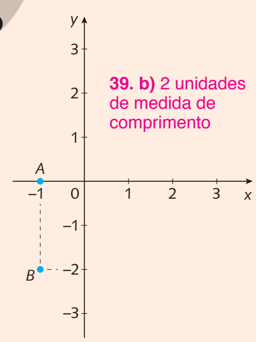
39 Em cada caso, calcule a medida da distância entre os pontos *A* e *B*.

a)



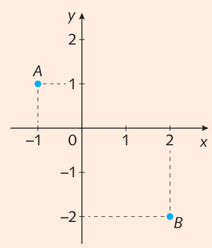
39. a) 4 unidades de medida de comprimento

b)



39. b) 2 unidades de medida de comprimento

c)



39. c) $3\sqrt{2}$ unidades de medida de comprimento

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

40. a) Resposta em *Orientações*.

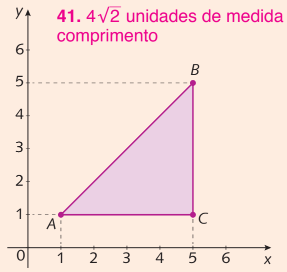
40 As coordenadas dos vértices do quadrilátero $ABCD$ são $A(-1, -1)$, $B(-1, 3)$, $C(2, 3)$ e $D(2, -1)$.

a) Represente esse quadrilátero em um plano cartesiano.

b) Como podemos classificar esse quadrilátero? **40. b)** retângulo

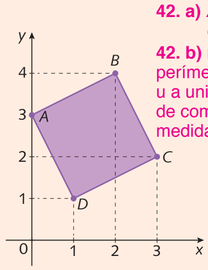
c) Calcule a medida de perímetro desse quadrilátero. **40. c)** 14 unidades de medida de comprimento

41 Determine a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo a seguir.



41. $4\sqrt{2}$ unidades de medida de comprimento

42 Considere o quadrilátero $ABCD$ representado no plano cartesiano a seguir.



42. a) $A(0, 3)$; $B(2, 4)$; $C(3, 2)$; $D(1, 1)$

42. b) medida de perímetro: $4\sqrt{5}$ u, sendo u a unidade de medida de comprimento; medida de área: 5 u²

a) Quais são as coordenadas dos vértices desse quadrilátero?

b) Determine as medidas de perímetro e de área desse quadrilátero.

43 Em um plano cartesiano, represente:

- um ponto A distante 5 unidades de medida de comprimento do eixo das abscissas;
- um ponto B distante 5 unidades de medida de comprimento do eixo das ordenadas;
- um ponto C de coordenadas (5, 3);
- um ponto D de coordenadas (2, 5).

43. a) Exemplos de resposta: (5, 5) ou (–1, 5)
43. b) Exemplos de resposta: (5, 9) ou (5, –3)
45. coordenadas do ponto médio de $\overline{CD}$: (2,5; –2); coordenadas do ponto médio de $\overline{EF}$: (–2, 1)

a) Que coordenadas A pode assumir de modo que a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{AD}$ seja de 3 unidades de medida de comprimento?

b) Que coordenadas B pode assumir de modo que a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{BC}$ seja de 6 unidades de medida de comprimento?

c) Que coordenadas os pontos A e B podem assumir de modo a obter um trapézio isósceles $ABCD$?

43. c) Exemplo de resposta: $A(-2, 5)$ e $B(-5, 3)$

44 Determine a medida da distância do ponto $P(5, -2)$:

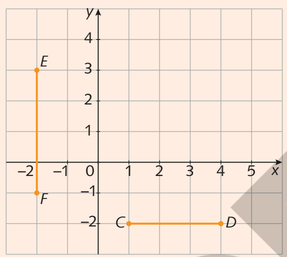
a) à origem; **44. a)** $\sqrt{29}$ unidades de medida de comprimento

b) ao eixo das abscissas; **44. b)** 2 unidades de medida de comprimento

c) ao eixo das ordenadas.

44. c) 5 unidades de medida de comprimento

45 Quais são as coordenadas do ponto médio de cada um dos segmentos de reta representados a seguir?



46 Utilizando um *software* de geometria dinâmica, construa um quadrado $ABCD$ de modo que cada um de seus vértices esteja localizado em quadrantes diferentes de um plano cartesiano. Depois, responda:

a) Quantos quadrados podem ser construídos obedecendo essa indicação?

b) O que poderia ser acrescentado no enunciado do problema de modo que a construção do quadrado: **46. a)** infinitos **46. b)** Respostas pessoais.

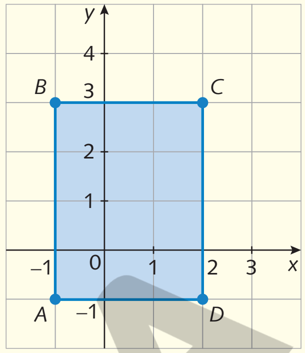
- tenha resposta única;
- tenha duas respostas possíveis;
- não tenha solução.

c) Converse com um colega e comparem as alterações propostas no item **b**. Verifiquem se há mais de uma maneira de fazer essas alterações no enunciado.

46. c) Espera-se que os estudantes percebam que existe mais de uma maneira de fazer alterações no enunciado para satisfazer as condições do item **b**.

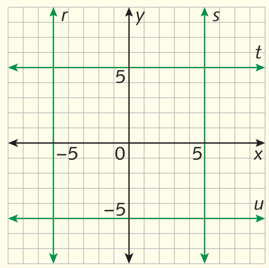
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 40**, os estudantes deverão perceber que os pontos indicados são vértices de um retângulo. Para auxiliar a construção, oriente-os a utilizar uma malha quadriculada.
- Resposta do **item a** da **atividade 40**:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

- Ao localizar os pontos A e B da **atividade 43** no plano cartesiano, os estudantes devem perceber que as coordenadas do ponto A podem ser $(x, 5)$ ou $(x, -5)$, com $x \in \mathbb{R}$; e as do ponto B podem ser $(5, y)$ ou $(-5, y)$ com $y \in \mathbb{R}$. Podemos ilustrar essas situações considerando as retas r e s, paralelas ao eixo y e as retas t e u paralelas ao eixo x, conforme representação a seguir:



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

O ponto A pode ser associado a qualquer ponto da reta t ou da reta u, e o ponto B pode ser associado a qualquer ponto da reta r ou da reta s.

- Na **atividade 44**, se considerar adequado, oriente os estudantes a representar o ponto P em um plano cartesiano, antes de determinarem as medidas das distâncias pedidas.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Triângulo retângulo

• Na **atividade 1**, os estudantes vão aplicar as relações métricas no triângulo retângulo para determinar as medidas de comprimento desconhecidas. Oriente-os a identificar os catetos e a hipotenusa de cada triângulo antes de aplicar alguma relação. Também é importante que avaliem se a medida obtida é plausível. Por exemplo, no **item a**, *y* não pode ser maior do que 8 cm; e no **item c**, *x* não pode ser menor do que 12 cm, pois corresponde à medida do comprimento da hipotenusa e 12 cm é a medida do comprimento de um dos catetos do triângulo. Ter esse hábito ajuda a verificar se a resposta obtida é correta e contribui para que encontrem possíveis equívocos nos cálculos ou na estratégia de resolução empregada.

• Solicite aos estudantes que realizem os itens da **atividade 2** na ordem. Oriente-os a representar o triângulo no caderno e indicar as medidas de comprimento fornecidas e as que devem determinar nele.

Teorema de Pitágoras e aplicações

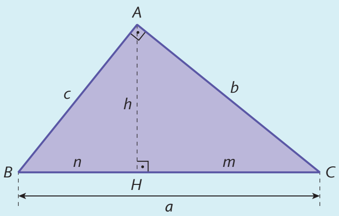
• Na **atividade 3**, para calcular os valores de *x* e de *y*, é importante que os estudantes identifiquem os catetos e a hipotenusa de cada triângulo para que apliquem corretamente o teorema de Pitágoras. Faça a correção coletiva da atividade após concluírem os cálculos.

• Na **atividade 4**, oriente os estudantes a fazer um esboço da situação. Dessa maneira, pode ficar mais claro para eles que medida devem determinar.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Triângulo retângulo



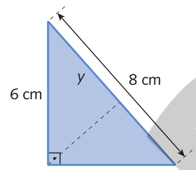
a → medida de comprimento da hipotenusa
b, c → medidas de comprimento dos catetos
h → medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa
m, n → medidas de comprimento das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa

Relações métricas no triângulo retângulo

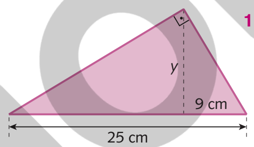
$c^2 = n \cdot a$ $\qquad$ $b^2 = m \cdot a$

$h^2 = m \cdot n$ $\qquad$ $a \cdot h = b \cdot c$

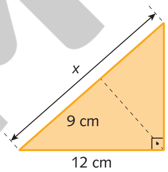
1. Determine o valor desconhecido nos triângulos retângulos a seguir.

a) 

1. a) $y = 4{,}5$ cm

b) 

1. b) $y = 12$ cm

c) 

1. c) $x = 16$ cm

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

2. Sabendo que, em um triângulo retângulo, o comprimento da hipotenusa mede 25 cm e o comprimento de um dos catetos mede 7 cm, determine:

a) as medidas de comprimento das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa; **2. a)** 1,96 cm e 23,04 cm

b) a medida de comprimento do outro cateto; **2. b)** 24 cm

c) a medida de comprimento da altura relativa à hipotenusa. **2. c)** 6,72 cm

Teorema de Pitágoras e aplicações

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida de comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas de comprimento dos catetos. Assim, seja *a* a medida de comprimento da hipotenusa e *b* e *c* as medidas de comprimento dos catetos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Aplicações do teorema de Pitágoras

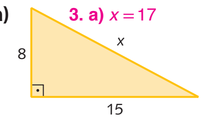
Diagonal de um quadrado

Em um quadrado com lados de medida de comprimento *x*, a medida de comprimento da diagonal é $x\sqrt{2}$.

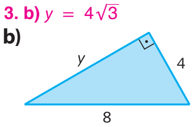
Altura de um triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero com lados de medida de comprimento *x*, a medida de comprimento da altura é $\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

3. Calcule os valores de *x* e de *y* indicados nas figuras.

a) 

3. a) $x = 17$

b) 

3. b) $y = 4\sqrt{3}$

4. Uma escada de 2,5 m de medida de comprimento é encostada em uma parede com o pé afastado 1,5 m da parede. Quanto mede a altura que a escada atinge? **4.** 2 m

5. Calcule:

a) a medida de comprimento da diagonal de um retângulo, cujos lados medem 8 cm e 15 cm de comprimento; **5. a)** 17 cm

b) a medida de comprimento da diagonal de um quadrado cujo lado mede 20 m de comprimento; **5. b)** $20\sqrt{2}$ m

c) a medida de comprimento da altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 8 cm de comprimento. **5. c)** $4\sqrt{3}$ cm

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

$$\text{sen } a = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura } a}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}$$

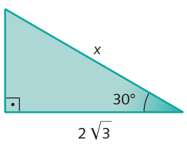
$$\cos a = \frac{\text{medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura } a}{\text{medida de comprimento da hipotenusa}}$$

$$\text{tg } a = \frac{\text{medida de comprimento do cateto oposto ao ângulo de medida de abertura } a}{\text{medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo de medida de abertura } a}$$

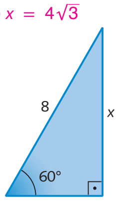
x	30°	45°	60°
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

6. Determine o valor desconhecido nos triângulos retângulos abaixo:

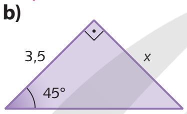
a) **6. a)** $x = 4$



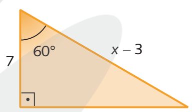
c) **6. c)** $x = 4\sqrt{3}$



b) **6. b)** $x = 3{,}5$



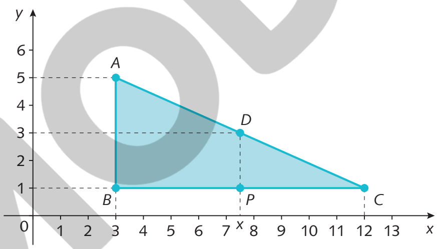
d) **6. d)** $x = 11$



7. A pipa de Joaquim ficou presa em uma árvore. A linha da pipa ficou esticada, formando com o chão um ângulo de medida de abertura de 45°. O comprimento da linha da pipa mede 8,5 m. Determine a medida da altura da pipa em relação ao solo. (Utilize: $\sqrt{2} = 1{,}4$). **7.** 5,95 m

8. Um avião está a 1 300 m de medida de altura quando começa um movimento de descida para a pista de aterrissagem, em uma linha imaginária que forma um ângulo de medida de abertura de 30° com o solo. Qual será a medida da distância percorrida pelo avião até tocar o solo? **8.** 2 600 m

9. Observe o triângulo abaixo e determine:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

a) as coordenadas dos vértices;

b) as medidas de comprimento dos lados do triângulo em u, unidade de medida de comprimento; **9. b)** $AB = 4$ u, $BC = 9$ u, $CD = \sqrt{97}$ u

c) a abcissa x do ponto médio D do lado $\overline{AC}$.

9. c) $x = 7{,}5$

9. a) $A(3, 5)$, $B(3, 1)$, $C(12, 1)$

- Casos os estudantes tenham dificuldades para realizar a **atividade 5**, oriente-os a representar, no caderno, o polígono descrito em cada item. Chame a atenção da turma para a importância de apresentarem a resposta com a unidade de medida de comprimento correta.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

- Na **atividade 6**, os estudantes devem aplicar as relações trigonométricas em cada triângulo retângulo para determinar os valores desconhecidos. Oriente-os a usar o quadro com os valores de seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60° ao realizar a atividade.
- Nas **atividades 7** e **8**, convém orientar os estudantes a fazer um esboço da situação para auxiliar na resolução.
- A **atividade 9** envolve a representação de um triângulo no plano cartesiano. No **item c**, os estudantes podem determinar a abcissa do ponto *D*, utilizando o cosseno do ângulo com vértice em *C* dos triângulos *ABC* e *DPC*.

207

CAPÍTULO 8 – CIRCUNFERÊNCIA, ARCOS E ÂNGULOS

Trocando ideias

BNCC:

• Competências gerais 2, 3, 6 e 9 (as descrições estão na página VI).

• Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

• Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre circunferências e arcos de circunferência.

• Verificar se os estudantes identificam circunferências e arcos de circunferência em obras de arte.

Inicie a aula comentando com a turma que Wassily Kandinsky foi um importante pintor russo do século XX e é considerado um dos principais artistas plásticos da arte abstrata de todos os tempos. Depois, proponha aos estudantes que observem a reprodução da obra *Composição VIII* e convide-os a falar sobre o que mais lhes chamou a atenção nessa obra. Espera-se que eles façam observações em relação às cores, ao uso de figuras geométricas e à sensação de movimento que a obra transmite.

A primeira questão proposta permite verificar o que os estudantes sabem sobre circunferências e arcos de circunferência. Registre na lousa as respostas deles. Neste momento, é possível que utilizem vocabulário próprio para se expressarem, e isso deve ser valorizado.

No segundo item é solicitada uma pesquisa. Essa pesquisa pode ser realizada na escola (em classe com livros ou na sala de informática) ou em casa. Se julgar necessário, convide o(a) professor(a) de Arte para participar da condução desse trabalho. Reserve um momento para que compartilhem o que pesquisaram.

Neste *Trocando ideias*, os estudantes são convidados a apreciar obras de arte, a valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e a exercitar a imaginação, o que favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **3** e **6** da BNCC. Além disso, eles realizam uma pesquisa, colocando em jogo o espírito coletivo e a empatia com o próximo, o que possibilita o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8** da BNCC.

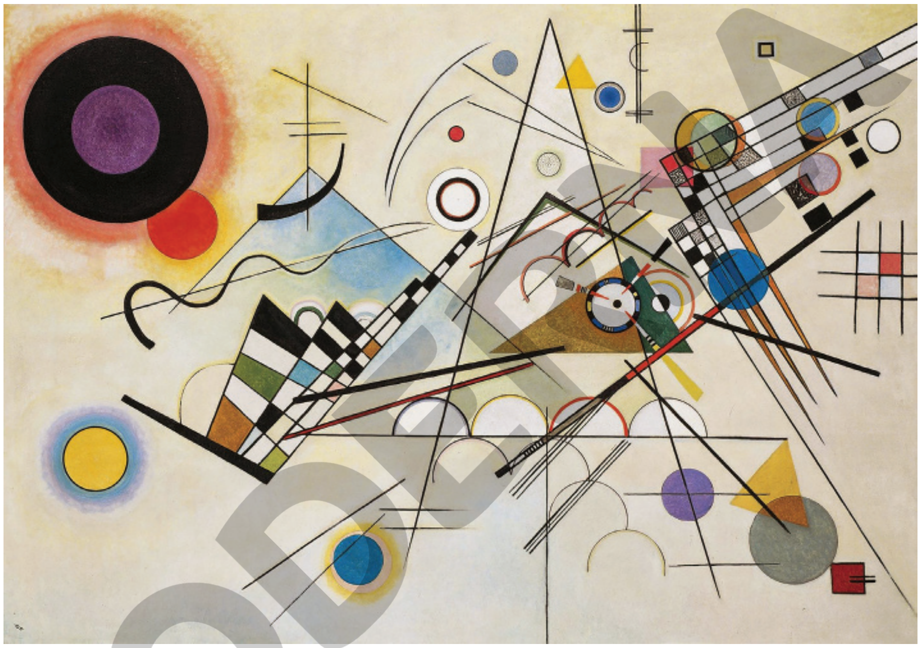
Capítulo **8**

Circunferência, arcos e ângulos

Trocando ideias

Wassily Wassilyevich Kandinsky (1866-1944) foi um artista russo. No início de sua carreira, retratou a arte popular russa e paisagens. No entanto, suas obras ganharam destaque quando ele se dedicou à arte abstrata. Observe abaixo a reprodução de uma de suas obras.

Arte abstrata: arte que não procura elaborar uma representação visual precisa da realidade.



MUSEU SOLOMON R. GUGGENHEIM, NOVA YORK

KANDINSKY, Wassily. *Composição VIII*, óleo sobre tela, 140 cm × 201 cm, 1923.

Trocando ideias: primeiro item: resposta pessoal; segundo item: resposta pessoal.

- Na obra *Composição VIII*, é possível notar figuras que se parecem com circunferências e arcos de circunferência. O que você sabe sobre essas figuras geométricas planas? Converse com os colegas.
- Reúna-se com um colega e pesquisem obras de arte em que é possível identificar figuras que se parecem com circunferências e arcos de circunferência. Depois, compartilhem com a turma o que encontraram.

Conheça mais

No *site* da Galeria Lenbachhaus de Munique (Alemanha), podem ser vistas diversas obras de Kandinsky.

Neste capítulo, vamos ampliar os conhecimentos sobre circunferência e estudar arcos e ângulos central e inscrito a uma circunferência.

1 Circunferência

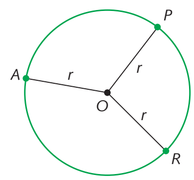
Analisamos uma obra de arte em que é possível identificar figuras que lembram circunferências.

Em Geometria:

Circunferência é a figura formada por todos os pontos de um plano que estão à mesma medida da distância de um ponto fixo desse plano. O ponto fixo é chamado de **centro** da circunferência.

Considere esta figura.

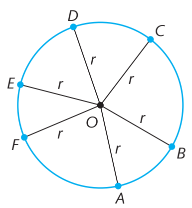
- O ponto O é o **centro** da circunferência (ponto fixo).
- Os pontos A, P e R estão a uma medida de distância r do centro da circunferência (ponto O), ou seja, são pontos da circunferência.
- Os segmentos de reta $\overline{OA}$, $\overline{OP}$ e $\overline{OR}$ são **raios** da circunferência e têm medida de comprimento r.



Raio de uma circunferência

Temos que:

- raio é o segmento de reta que tem uma extremidade no centro da circunferência e a outra em qualquer ponto pertencente à circunferência;

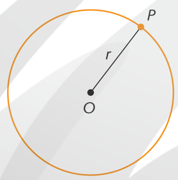


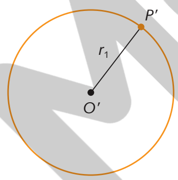
O: centro da circunferência
A, B, C, D, E, F: pontos da circunferência
$\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}, \overline{OF}$: raios da circunferência

- em uma circunferência, podemos traçar infinitos raios e todos serão congruentes;

$$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD} \cong \overline{OE} \cong \overline{OF} \cong ...$$
$$OA = OB = OC = OD = OE = OF = ... = r$$

- quando duas circunferências têm raios com a mesma medida de comprimento, dizemos que as circunferências são **congruentes**.





Temos:

$$\left.\begin{array}{l} OP = r \\ O'P' = r_1 \end{array}\right\} r = r_1$$

Como $r = r_1$, então a circunferência de centro O é congruente à circunferência de centro O'.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Circunferência

Objetivos:

- Recordar o conceito de circunferência.
- Identificar os elementos de uma circunferência.

Justificativa

Neste capítulo, será aprofundado o que foi estudado sobre circunferências em anos anteriores, e, por isso, é importante que os estudantes recordem o conceito de circunferência e identifiquem os seus elementos: raio, corda e diâmetro.

Mapeando conhecimentos

Peça aos estudantes que, com o auxílio de um compasso, representem uma circunferência em uma folha de papel. Alerte-os para que tomem cuidado quanto ao manuseio do compasso e observe como manipulam esse instrumento para traçar a circunferência. Em seguida, peça que representem um raio, uma corda e um diâmetro dessa circunferência. Esse é o momento oportuno para diagnosticar se conhecem e fazem distinção entre esses elementos e, também, para verificar se alguns deles reconhecem que o diâmetro é também uma corda e tem o dobro da medida do comprimento do raio.

Para as aulas iniciais

Explore com a turma a revisão sobre circunferência e seus elementos presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Em seguida, solicite aos estudantes que façam a **atividade 21**. Após concluírem, incentive-os a comparar as respostas. Reserve um momento para discutir cada uma das afirmações da atividade coletivamente.

Ao retomar os elementos de uma circunferência, verifique os conhecimentos prévios dos estudantes, sugerindo que eles definam cada elemento. Faça as correções necessárias.

Corda e diâmetro de uma circunferência

Após trabalhar os conceitos de corda, raio e diâmetro de circunferências, reproduza na lousa as seguintes afirmações, para que os estudantes julguem quais são verdadeiras e quais são falsas.

- O diâmetro é uma corda. (Verdadeira)
- A medida do comprimento do raio corresponde ao dobro da medida do comprimento do diâmetro. (Falsa)
- O raio é uma corda. (Falsa)
- Não existe corda que passe pelo centro de uma circunferência. (Falsa)

Em seguida, peça aos estudantes que corrijam as afirmações falsas, por exemplo:

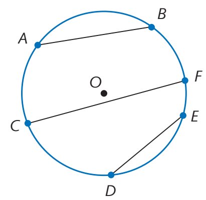
- A medida do comprimento do diâmetro corresponde ao dobro da medida do comprimento do raio.
- O raio não é uma corda.
- A corda que passa pelo centro de uma circunferência é chamada de diâmetro.

Corda e diâmetro de uma circunferência

A corda e o diâmetro são dois importantes elementos relativos a uma circunferência.

Corda é o segmento de reta com extremidades em dois pontos distintos de uma circunferência.

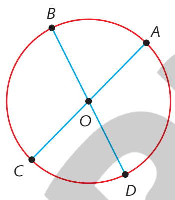
Considere a seguinte figura.



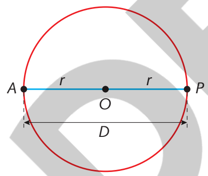
$\overline{AB}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são exemplos de cordas da circunferência.

Diâmetro é o segmento de reta com extremidades em dois pontos distintos de uma circunferência, passando sempre pelo centro.

Na figura a seguir, os segmentos de reta $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são diâmetros da circunferência de centro *O*.



Podemos observar que, em uma circunferência qualquer com centro *O* e diâmetro com extremidades em *A* e *P*, temos:



- $\overline{AO}$ é raio de medida de comprimento *r*;
- $\overline{OP}$ é raio de medida de comprimento *r*;
- $\overline{AP}$ é diâmetro de medida de comprimento *D*.

Assim, verificamos que:

$$AP = AO + OP$$

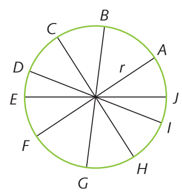
$$D = r + r = 2r$$

Logo, a medida de comprimento do diâmetro (*D*) é igual ao dobro da medida de comprimento do raio (*r*).

Observações

1. O diâmetro é a maior corda da circunferência.
2. Em uma circunferência, podemos traçar infinitos diâmetros e todos serão congruentes. Nesta figura, temos:

$$AF = BG = CH = DI = EJ = ... = 2r$$

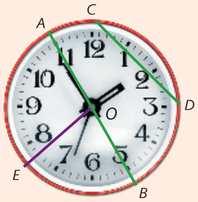


ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 Na figura a seguir, o contorno do relógio se parece com uma circunferência. Considere que a medida de comprimento do diâmetro desse relógio é 40 cm.



DIMEDROL68/SHUTTERSTOCK

a) Determine a medida de comprimento do raio desse relógio. **1. a)** 20 cm

b) Identifique duas cordas na figura. **1. b)** $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

c) Identifique um diâmetro na figura. **1. c)** $\overline{AB}$

d) Identifique um raio na figura. **1. d)** Exemplo de resposta: $\overline{OE}$

2 Em uma circunferência, a medida de comprimento do diâmetro é 1,44 m. Quanto mede o comprimento do raio dessa circunferência? **2.** 0,72 m

3 Copie os itens no caderno, substituindo cada ■ por uma palavra correspondente, tornando a sentença verdadeira.

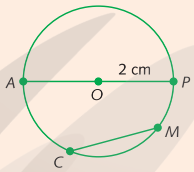
a) ■ é o segmento de reta que une o centro a qualquer ponto da circunferência. **3. a)** Raio

b) Em uma circunferência, podemos traçar infinitos ■. Todos eles são ■. **3. b)** diâmetros ou raios; congruentes entre si

c) Duas circunferências são ■ quando os raios têm a mesma medida de comprimento. **3. c)** congruentes

d) A maior corda da circunferência é o ■. **3. d)** diâmetro

4 Observe a figura e responda às questões.



4. a) 2 cm
4. b) 4 cm

a) Qual é a medida de comprimento de $\overline{OP}$?

b) Qual é a medida de comprimento de $\overline{AP}$?

c) A medida de comprimento de $\overline{CM}$ é maior que 4 cm ou menor? Justifique sua resposta.

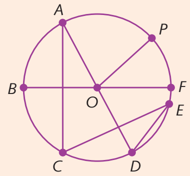
4. c) Menor, pois $\overline{CM}$ não é diâmetro da circunferência, que é a maior corda e mede 4 cm de comprimento.

5 Determine:

a) a medida de comprimento do diâmetro de uma circunferência cujo comprimento do raio mede 4,5 cm; **5. a)** 9 cm

b) a medida de comprimento do raio de uma circunferência cujo comprimento do diâmetro mede 17 cm. **5. b)** 8,5 cm

6 Observe a circunferência de centro O a seguir e responda às questões.



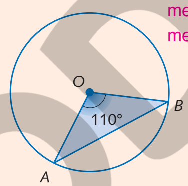
a) Quais são os segmentos de reta que representam os raios? **6. a)** $\overline{OP}$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$, $\overline{OF}$

b) Quais são os segmentos de reta que representam as cordas? **6. b)** $\overline{AC}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$, $\overline{BF}$

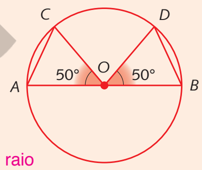
c) Quais são os segmentos de reta que representam os diâmetros? **6. c)** $\overline{AD}$, $\overline{BF}$

7 Considere a circunferência de centro O e classifique o triângulo AOB quanto às medidas de comprimento dos lados. Depois, determine quanto medem as aberturas dos ângulos $O\hat{A}B$ e $O\hat{B}A$.

7. isósceles; med($O\hat{A}B$) = 35°; med($O\hat{B}A$) = 35°



8 Considerando a circunferência de centro O, mostre que as cordas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são congruentes.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

8. $\overline{OC} \cong \overline{OD}$ → raio
$\overline{OA} \cong \overline{OB}$ → raio
$A\hat{O}C \cong B\hat{O}D$ → ângulo dado
$\triangle AOC \cong \triangle BOD$ → caso LAL
Logo: $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

- Na **atividade 6**, verifique se os estudantes nomeiam corretamente os elementos da circunferência e se diferenciam, de maneira correta, raios e diâmetros. Para verificar essa diferença, faça questionamentos como: “Se o comprimento do raio de uma circunferência medir 3,5 cm, qual será a medida do comprimento do diâmetro?” (Resposta: 7 cm); “Se o comprimento do diâmetro de uma circunferência medir 16 cm, qual será a medida do comprimento de seu raio?” (Resposta: 8 cm).
- Na **atividade 7**, retome a classificação de um triângulo quanto às medidas de comprimento dos lados: equilátero (os três são congruentes); isósceles (pelo menos dois lados são congruentes); escaleno (não tem lados congruentes).

Lendo e aprendendo

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 5 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Desenvolver a competência leitora.
- Comparar medidas de comprimento.
- Calcular a medida do comprimento do raio de planetas..
- Refletir sobre a importância de estudos como os que estão sendo realizados em Marte.

Tema contemporâneo transversal:

Ciência e tecnologia

O texto desta seção fala sobre a finalidade das sondas enviadas a Marte e os objetivos dos estudos futuros. Proponha a leitura individual do texto. Depois, comente que Marte é o quarto planeta mais próximo do Sol e o segundo menor planeta do Sistema Solar. Diga também que esse planeta possui coloração avermelhada devido à presença de óxido de ferro em sua superfície e que ele pode ser visto a olho nu da Terra, ou seja, sem o auxílio de telescópio. Se achar conveniente, convide o(a) professor(a) de Ciências da Natureza para falar um pouco mais sobre Marte com a turma.

- Na **atividade 1**, os estudantes vão avaliar algumas afirmações sobre o texto e identificar as verdadeiras e as falsas. Incentive-os a justificar suas respostas. As afirmações dos **itens a** e **b** são falsas, porque ainda não foram encontrados seres vivos em Marte e seres humanos ainda não haviam sido enviados para lá. A afirmação do **item c** é verdadeira, pois corresponde à consequência do primeiro objetivo descrito no texto. Já a afirmação do **item d** também é verdadeira, pois 12 755,66 km > 6 791, 43 km.
- A **atividade 2** envolve os conceitos de diâmetro e raio de esferas. Se achar conveniente, recorde os conceitos de diâmetro e raio de uma circunferência. Espera-se que os estudantes dividam 12 755, 66 km por 2 para determinar a medida aproximada do comprimento do raio da Terra e que dividam 6 791,43 km por 2 para determinar a medida aproximada do comprimento do raio de Marte. O uso da calculadora, incentivado nesta atividade, favorece o desenvolvimento da competência específica **5** da BNCC.
- Na **atividade 3**, os estudantes vão opinar sobre a importância de estudos como o que estão sendo realizados em Marte. Deixe-os à vontade para verbalizar suas opiniões. Momentos como esses contribuem para o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8** da BNCC.

Lendo e aprendendo

Ciência e tecnologia

Marte, o planeta vermelho

Em 2021, diversas missões espaciais pretendem estudar Marte. Veja o que já se sabe sobre o planeta vizinho da Terra e o que os cientistas ainda querem descobrir

Sondas enviadas para Marte

Agências espaciais dos Estados Unidos, Rússia, Índia, China, Europa e Emirados Árabes Unidos já enviaram sondas para analisar o planeta vizinho. Esses robôs tiram fotos, coletam amostras de solo e rochas, fazem medidas do território, entre outras funções. Além das sondas, cientistas estudam o planeta por meio da observação e de outras técnicas.

Os objetivos dos estudos são...

... reunir mais informações sobre a história, clima e formação de Marte. Acredita-se que o planeta vermelho possa nos ajudar a entender melhor como o Sistema Solar foi constituído e como os planetas passaram por transformações ao longo do tempo.

... descobrir se já existiram ou ainda existem seres vivos em Marte. Já se sabe que, no passado, o planeta tinha rios e lagos. Como a água é essencial para haver vida, isso pode ser uma pista de que Marte tenha abrigado formas de vida antigamente.

... estudar a possibilidade de, no futuro, enviar seres humanos para Marte. Até hoje, a humanidade só foi capaz de mandar sondas até o planeta vermelho.

Temperaturas médias

Terra: 14 °C

Marte: 63 °C

Diâmetro da Terra: 12 755,66 km

Diâmetro de Marte: 6 791,43 km

A Terra é o terceiro planeta mais próximo do Sol. Ela só fica atrás de Mercúrio e Vênus.

[...]

Ficha técnica

Posição no sistema solar: quarto planeta mais próximo do Sol.

Duração de um ano (tempo que leva para dar uma volta ao redor do Sol): equivalente a 687 dias terrestres.

Temperatura média: 63 °C.

Luas: Fobos e Deimos.

Fontes: Nasa e Nature.

Marte, o planeta vermelho.
Jornal Joca, n. 165, p. 7, 1 a 15 de março de 2021.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Copie as afirmações no caderno e marque **V** para as verdadeiras e **F** para as falsas.

a) (■) As sondas que foram enviadas para Marte já encontraram seres vivos. **1. a)** Falsa

b) (■) Seres humanos já foram enviados para Marte. **1. b)** Falsa

c) (■) Estudar Marte é importante para entender como o Sistema Solar foi constituído. **1. c)** Verdadeira

d) (■) A medida de comprimento do diâmetro da Terra é maior que a medida de comprimento do diâmetro de Marte. **1. d)** Verdadeira

2. O diâmetro de uma esfera é o segmento de reta com extremidades em dois pontos distintos da esfera, passando sempre pelo centro. Supondo que os planetas Terra e Marte se parecem com uma esfera, use uma calculadora para determinar:

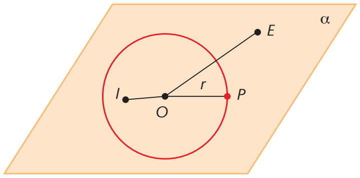
a) a medida de comprimento do raio da Terra; **2. a)** 6 377,83 km

b) a medida de comprimento do raio de Marte. **2. b)** 3 395,715 km

3. Na sua opinião, qual é a importância de estudos como os que estão sendo realizados em Marte? Converse com os colegas. **3.** Resposta pessoal.

2 Posições de um ponto em relação a uma circunferência

Observe a figura.



A circunferência está contida no plano α, e os pontos *P*, *E* e *I* desse plano são, respectivamente, pertencente, externo e interno à circunferência.

Dizemos que:

- considerando um ponto *P* e uma circunferência de centro *O*, se a medida da distância entre *O* e *P* for igual à medida de comprimento do raio (***OP* = *r***), o ponto *P* **pertence** à circunferência;
- considerando um ponto *E* e uma circunferência de centro *O*, se a medida da distância entre *O* e *E* for maior que a medida de comprimento do raio (***OE* > *r***), o ponto *E* é **externo** à circunferência;
- considerando um ponto *I* e uma circunferência de centro *O*, se a medida da distância entre *O* e *I* for menor que a medida de comprimento do raio (***OI* < *r***), o ponto *I* é **interno** à circunferência.

Atividades

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso nas atividades **10** e **11**.

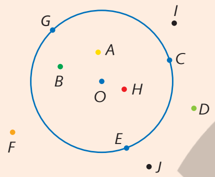
Faça as atividades no caderno.

9 Observe os pontos desta figura e indique:

a) os pontos pertencentes à circunferência; **9. a)** *G, C, E*

b) os pontos externos à circunferência; **9. b)** *F, I, D, J*

c) os pontos internos à circunferência. **9. c)** *B, A, H, O*



10 Desenhe, no caderno, uma circunferência com:

a) medida de comprimento do raio igual a 2 cm; **10.** Exemplo de resposta em *Orientações*.

b) centro *O*;

c) pontos *A*, *B* e *C* pertencentes à circunferência;

d) pontos *D*, *E* e *F* externos à circunferência;

e) pontos *G*, *H*, *I* e *J* internos à circunferência.

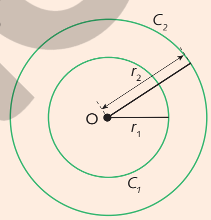
11 Com uma régua, meça o comprimento dos raios r_1 e r_2 das circunferências C_1 e C_2, respectivamente. Em seguida, copie esta figura no caderno e desenhe: **11.** Exemplo de resposta em *Orientações*.

- os pontos *A*, *B* e *C*, externos à C_2;
- os pontos *D*, *E* e *F*, externos à C_1 e internos à C_2;
- os pontos *G*, *H* e *I*, internos à C_1.

Agora, responda:

a) Todos os pontos de C_1 são internos à C_2? **11. a)** sim

b) Todos os pontos de C_2 são internos à C_1? **11. b)** não



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

213

Posições de um ponto em relação a uma circunferência

BNCC:

Competência específica 2 (a descrição está página VII).

Objetivo:

Identificar as posições relativas entre um ponto e uma circunferência.

Justificativa

Reconhecer as diferentes posições de um ponto em relação a uma circunferência é um pré-requisito para que se compreendam as posições de uma reta em relação a uma circunferência e, também, propriedades como a dos segmentos de reta tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência e das medidas dos comprimentos dos lados de um quadrilátero circunscritível a uma circunferência.

Mapeando conhecimentos

Se possível, leve os estudantes para a sala de informática da escola (se houver uma) e peça que, em um *software* de geometria dinâmica, representem uma circunferência de centro *O* e três pontos: *P*, *E* e *I*. O ponto *P* deve pertencer à circunferência, o ponto *E* deve ser externo a ela e o ponto *I* deve ser interno a ela. Em seguida, proponha que investiguem as relações entre a medida do comprimento do raio da circunferência (*r*) e *OP*, *OE* e *OI*. Oriente-os a utilizar a ferramenta de medir comprimento do *software* e registrar as conclusões no caderno.

Para as aulas iniciais

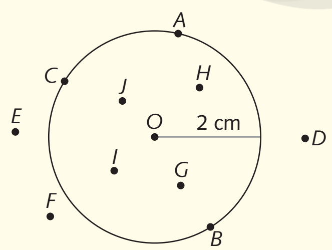
Reproduza o quadro a seguir na lousa e proponha aos estudantes que preencham coletivamente:

Nome do estudante	*r*	*OP*	*OE*	*OI*

Após o preenchimento do quadro, espera-se que todos concluam que *OP* = *r*, *OE* > *r* e *OI* < *r*.

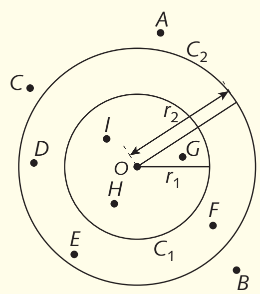
A atividade proposta na dinâmica inicial pode ser feita com instrumentos de desenho e com o auxílio da régua graduada, caso seja inviável o uso do computador.

- Exemplo de resposta da **atividade 10**:



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 11**, sugira aos estudantes que se reúnam em duplas após a realização da atividade para corrigi-la. Em seguida, faça a correção coletiva da atividade, dirimindo dúvidas ainda existentes. Essa atividade incentiva o desenvolvimento da competência específica **2**. Confira este exemplo de resposta:



- Nas **atividades 10** e **11** alerte os estudantes quanto aos cuidados para evitar acidentes durante o manuseio do compasso.

Posições de uma reta em relação a uma circunferência

BNCC:

Competência geral 2 (a descrição está na página VI).

Objetivo:

Identificar as posições relativas entre uma reta e uma circunferência.

Justificativa

Reconhecer as diferentes posições de uma reta em relação a uma circunferência contribui para que os estudantes entendam termos como "segmentos de reta tangentes" e "lados secantes" utilizados no estudo de propriedades como a das medidas dos comprimentos dos lados de um quadrilátero circunscritível a uma circunferência e do ângulo inscrito.

Mapeando conhecimentos

Se possível, leve os estudantes para a sala de informática da escola (se houver uma) e peça que, em um *software* de geometria dinâmica, representem uma circunferência de centro O e três retas: s, t e q. A reta s deve ser secante à circunferência, a reta q deve ser tangente e a reta r deve ser externa. Em seguida, proponha que investiguem as relações entre a medida do comprimento do raio da circunferência (r) e a medida da distância entre O e as retas s, t e q. Oriente-os a utilizar a ferramenta de medir comprimento do *software* e registrar as conclusões no caderno.

Para as aulas iniciais

Reproduza o quadro a seguir na lousa e proponha aos estudantes que preencham coletivamente:

Nome do estudante	r	Medida da distância entre O e s (d_1)	Medida da distância entre O e t (d_2)	Medida da distância entre O e q (d_3)

Após o preenchimento do quadro, espera-se que todos concluam que $d_1 < r$, $d_2 = r$ e $d_3 > r$.

A atividade proposta na dinâmica inicial pode ser feita com instrumentos de desenho e com o auxílio da régua graduada, caso seja inviável o uso do computador.

3 Posições de uma reta em relação a uma circunferência

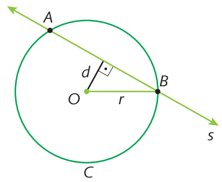
Em relação à circunferência, uma reta pode ser: secante, tangente ou externa. A seguir, vamos estudar cada uma dessas possibilidades.

Reta secante

Uma reta é **secante** a uma circunferência quando corta a circunferência em dois pontos distintos.

A palavra secante vem de *seccionar*, que significa "cortar".

Na figura abaixo, a reta s é secante à circunferência C de centro O.

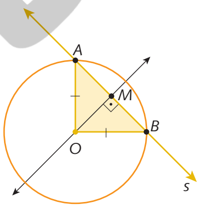


Observe que a medida da distância (d) do centro (O) à reta s é menor que a medida de comprimento do raio (r): $\boxed{d < r}$

Propriedade em relação à reta secante

Toda reta que passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma secante passa pelo ponto médio da corda determinada por essa secante.

Analise a figura.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Temos $\overleftrightarrow{AB}$ perpendicular a $\overleftrightarrow{OM}$ e o triângulo AOB é isósceles, pois $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são raios da circunferência.

Então, pelo caso LAA_o, temos: $\triangle AOM \cong \triangle BOM$

Assim: $MA = MB$ e, portanto, M é ponto médio de $\overline{AB}$.

214

Reta secante

Para verificar a propriedade da reta secante a uma circunferência, sugira aos estudantes que, utilizando régua e compasso, façam a construção de uma circunferência de centro O e medida de comprimento de raio qualquer, tracem uma reta secante à circunferência, determinem os pontos A e B (intersecção entre a reta secante e a circunferência) e construam o triângulo AOB. Em seguida, auxilie-os na análise dos segmentos obtidos, tirando conclusões a respeito dos segmentos traçados.

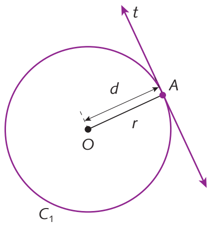
Alerte os estudantes quanto aos cuidados para evitar acidentes durante o manuseio do compasso.

Reta tangente

Uma reta é **tangente** a uma circunferência quando tem apenas um ponto em comum com ela.

A palavra tangente vem de *tanger*, que significa "tocar".

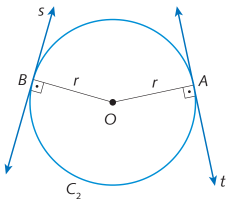
Na figura abaixo, a reta *t* é tangente à circunferência C_1, e *A* é denominado **ponto de tangência** ("ponto de contato").



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que a medida da distância (*d*) do centro (*O*) à reta *t* é igual à medida de comprimento do raio (*r*): $\boxed{d = r}$

Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular a um raio dessa circunferência no ponto de tangência.



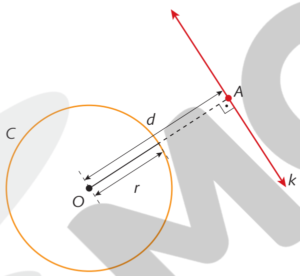
s é tangente à circunferência C_2 e é perpendicular a $\overline{OB}$ em *B*.

t é tangente à circunferência C_2 e é perpendicular a $\overline{OA}$ em *A*.

Reta externa

Uma reta é **externa** a uma circunferência quando não tem nenhum ponto em comum com ela.

Observe na figura abaixo que a reta *k* é externa à circunferência *C*.



Note que a medida da distância (*d*) do centro (*O*) à reta *k* é maior que a medida de comprimento do raio (*r*): $\boxed{d > r}$

Reta tangente

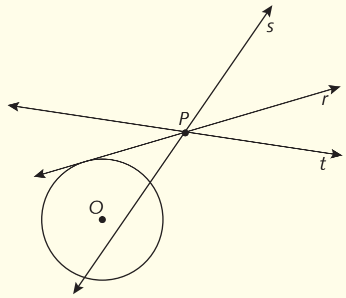
Antes de abordar o assunto, peça aos estudantes que tracem uma circunferência e uma reta tangente a ela. Depois, solicite que tracem o raio que contém o ponto de tangência e meçam, com o auxílio de um transferidor, a medida da abertura do ângulo determinado pelo raio e pela reta tangente. Espera-se que os estudantes concluam que a medida da abertura desse ângulo é igual a 90°.

Alerte os estudantes quanto aos cuidados para evitar acidentes durante o manuseio do compasso.

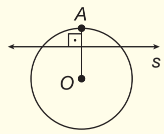
Reta externa

Antes de iniciar a abordagem deste conteúdo, proponha aos estudantes que, utilizando régua e compasso, façam a construção de uma circunferência de centro *O* e medida de comprimento de raio qualquer, e tracem uma reta externa à circunferência. Depois, incentive-os a verificar, com o auxílio de uma régua, que a medida da distância do centro da circunferência à reta é maior que a medida do comprimento do raio.

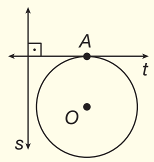
- A seguir apresentamos um exemplo de resposta para a **atividade 12**:



- Na **atividade 14**, espera-se que os estudantes percebam que, por exemplo, na figura a seguir, a reta *s* é perpendicular ao raio $\overline{OA}$, mas não é tangente à circunferência.



- Sugira aos estudantes que resolvam a **atividade 15** fazendo uma ilustração como este exemplo.



Em seguida, peça a eles que formalizem a resposta por meio de uma justificativa escrita. Espera-se que os estudantes percebam que a reta *s* é perpendicular à reta *t*, tangente à circunferência, porém *s* não passa pelo centro *O* da circunferência. Esse tipo de atividade é importante para que os estudantes desenvolvam a escrita em problemas de Matemática e consigam justificar suas conclusões com base em propriedades e teoremas consolidados anteriormente.

Posições relativas de duas circunferências

Objetivo:

Reconhecer as diferentes posições relativas entre duas circunferências.

Justificativa

Reconhecer as diferentes posições entre duas circunferências amplia os conhecimentos sobre circunferência adquiridos pelos estudantes. Em particular, o reconhecimento de circunferências secantes, é empregado na construção de polígonos regulares, assunto abordado no capítulo seguinte.

Circunferências tangentes exteriores

16. A medida da distância de uma das retas ao centro deve ser igual a 10 cm e a medida da distância da outra reta ao centro deve ser maior que 10 cm.

Atividades

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso na atividade **12**.

Faça as atividades no caderno.

12 Represente, em seu caderno, um ponto *P* que dista 10 cm do centro *O* de uma circunferência cujo comprimento do raio mede 5 cm. Depois, trace uma reta passando por *P* que seja:

a) tangente à circunferência;

b) secante à circunferência;

c) externa à circunferência.

12. Exemplo de resposta em *Orientações*.

13 Sendo *d* a medida da distância de uma reta *t* ao centro de uma circunferência, qual é a posição de *t* em relação a essa circunferência quando:

a) $d = 8$ e $r = 7$? **13. a)** externa

b) $d = 6$ e $r = 9$? **13. b)** secante

c) $d = 10$ e $r = 10$? **13. c)** tangente

14 Em uma circunferência qualquer, toda reta perpendicular a um dos raios é tangente a essa circunferência? Justifique sua resposta.

14. não; exemplo de resposta em *Orientações*.

15 Toda reta que forma um ângulo reto com outra reta, que seja tangente a uma circunferência, passa pelo centro dessa circunferência? Justifique sua resposta.

15. não; exemplo de resposta em *Orientações*.

16 Sabendo que o comprimento do raio de uma circunferência mede 10 cm, responda: A que medida da distância *d* do centro deveriam estar as retas *r* e *s*, paralelas, para que fossem, respectivamente, tangente e externa à circunferência?

4 Posições relativas de duas circunferências

De acordo com a posição relativa que apresentam, duas circunferências podem ser: tangentes exteriores, tangentes interiores, secantes, externas ou internas.

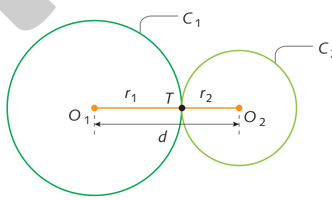
Para facilitar nosso estudo, vamos adotar as seguintes notações:

- O_1: centro da circunferência C_1;
- O_2: centro da circunferência C_2;
- d: medida da distância entre os centros O_1 e O_2;
- r_1: medida de comprimento do raio da circunferência C_1;
- r_2: medida de comprimento do raio da circunferência C_2;
- $r_1 > r_2$.

Circunferências tangentes exteriores

Duas circunferências são **tangentes exteriores** quando têm apenas um ponto comum e suas regiões internas não têm pontos comuns.

A medida da distância *d* entre os centros das duas circunferências tangentes exteriores é igual à soma das medidas de comprimento dos raios dessas circunferências.



$d = r_1 + r_2$

T: ponto de tangência

216

Mapeando conhecimentos

Represente na lousa, com a ajuda da turma, as diferentes posições entre duas circunferências de medidas de comprimento de raios r_1 e r_2, e peça aos estudantes que escrevam, para cada posição, uma relação entre d, r_1 e r_2, em que d é a medida da distância entre os centros das circunferências.

Para as aulas iniciais

Se possível, leve os estudantes para a sala de informática da escola (se houver uma) e peça que, em um *software* de geometria dinâmica, representem as diferentes posições entre duas circunferências de medidas de comprimento de raios r_1 e r_2. Depois, oriente-os a verificar as relações entre d, r_1 e r_2 obtidas na dinâmica inicial, em que d é a medida da distância entre os centros das circunferências.

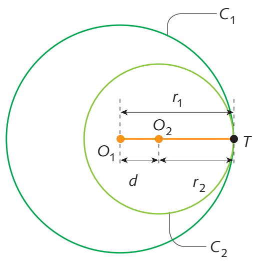
Continua

Circunferências tangentes interiores

Duas circunferências são **tangentes interiores** quando têm apenas um ponto comum e uma é interna à outra.

A medida da distância d entre os centros das duas circunferências tangentes interiores é igual à diferença das medidas de comprimento dos raios dessas circunferências.

$$\boxed{d = r_1 - r_2}$$



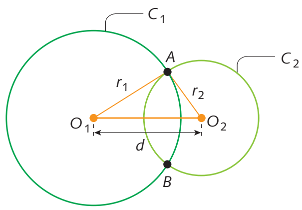
T: ponto de tangência

Circunferências secantes

Duas circunferências são **secantes** quando têm dois pontos em comum.

Os pontos A e B são intersecções entre as circunferências. A medida da distância d entre os centros das duas circunferências secantes é dada pela seguinte desigualdade:

$$\boxed{r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2}$$

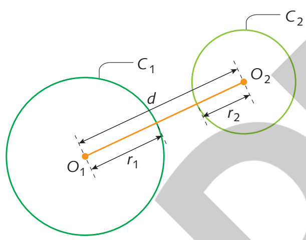


Circunferências externas

Duas circunferências são **externas** quando não têm ponto comum e suas regiões internas não têm pontos comuns.

A medida da distância d entre os centros das duas circunferências externas é maior que a soma das medidas de comprimento dos raios dessas circunferências.

$$\boxed{d > r_1 + r_2}$$

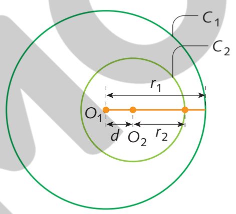


Circunferências internas

Duas circunferências são **internas** quando não têm ponto comum e uma é interna à outra.

A medida da distância d entre os centros das duas circunferências internas é menor que a diferença das medidas de comprimento dos raios dessas circunferências.

$$\boxed{d < r_1 - r_2}$$



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Continuação

Caso não tenha tido a oportunidade de trabalhar a proposta sugerida no boxe *Mapeando conhecimentos*, você pode pedir aos estudantes que tracem, com o auxílio do compasso, duas circunferências tangentes exteriores. Alerte-os para que tomem cuidado ao manusear o compasso. Em seguida, proponha que, com o auxílio de uma régua, meçam o comprimento dos raios das circunferências traçadas e a medida da distância entre os centros das circunferências. Espera-se que eles concluam que a medida da distância entre os centros é igual à soma das medidas dos comprimentos dos raios. Incentive-os a compartilhar os desenhos e a trocar ideias com os colegas.

Circunferências tangentes interiores

Caso não tenha tido a oportunidade de trabalhar a proposta sugerida no boxe *Mapeando conhecimentos,* você pode pedir aos estudantes que tracem, com o auxílio do compasso, duas circunferências tangentes interiores. Alerte-os para que tomem cuidado ao manusear o compasso. Em seguida, proponha que, com o auxílio de uma régua, meçam o comprimento dos raios das circunferências traçadas e a medida da distância entre os centros das circunferências. Espera-se que eles concluam que a medida da distância entre os centros é igual à diferença entre as medidas dos comprimentos dos raios. Incentive-os a compartilhar os desenhos e a trocar ideias com os colegas.

Circunferências secantes

Proponha aos estudantes que tracem, com o auxílio do compasso, duas circunferências secantes. Alerte-os para que tomem cuidado ao manusear o compasso. Em seguida, proponha que, com o auxílio de uma régua, meçam o comprimento dos raios das circunferências traçadas e a medida da distância entre os centros das circunferências. Espera-se que eles concluam que a medida da distância entre os centros é maior que a diferença e menor que a soma das medidas dos comprimentos dos raios. Essa atividade pode ser feita caso a atividade sugerida do boxe *Mapeando conhecimentos* não tenha sido realizada.

Circunferências externas

Proponha aos estudantes que tracem, com o auxílio do compasso, duas circunferências externas. Depois, deixe-os à vontade para verificar que a medida da distância entre os centros dessas circunferências é maior que a soma das medidas dos comprimentos dos raios. Incentive-os a compartilhar os desenhos e a trocar ideias com os colegas.

Circunferências internas

Proponha aos estudantes que tracem, com o auxílio do compasso, duas circunferências internas. Depois, incentive-os a verificar que a medida da distância entre os centros dessas circunferências é menor que a diferença entre as medidas dos comprimentos dos raios. Incentive-os a com partilhar os desenhos e a trocar ideias com os colegas.

• Na **atividade 17**, caso os estudantes tenham dificuldades em determinar as posições relativas, sugira a eles que construam, com régua e compasso, as circunferências determinadas em cada item.

Alerte os estudantes quanto aos cuidados para evitar acidentes durante o manuseio do compasso.

Sugestão de atividade extra

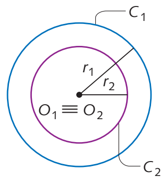
Na abertura deste capítulo, tivemos a oportunidade de explorar a obra *Composição VIII*, de Wassily Kandinsky. Sugira aos estudantes que se organizem em grupos e procurem outros artistas e obras que usaram elementos geométricos como forma de expressão. Em seguida, peça que elaborem uma composição artística como releitura das obras consultadas e que também utilizem os elementos geométricos trabalhados neste capítulo. Por fim, organize uma exposição com as obras criadas por eles.

Observações

1. Quando duas ou mais circunferências têm o mesmo centro e uma é interna à outra, são denominadas **circunferências concêntricas**.

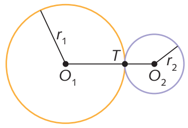
Lembre-se: $O_1 \equiv O_2$

Lemos: "o ponto O_1 é coincidente a O_2".

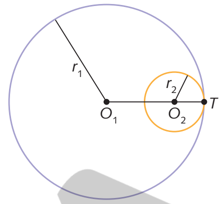


2. No caso das circunferências tangentes exteriores e das circunferências tangentes interiores, os centros O_1 e O_2 e o ponto de tangência T estão sempre alinhados.

17. a) externas
17. b) tangentes interiores
17. c) tangentes exteriores
17. d) internas
17. e) secantes
17. f) secantes



circunferências tangentes exteriores



circunferências tangentes interiores

Atividades

Faça as atividades no caderno.

17 Sendo r_1 e r_2 as medidas de comprimento dos raios de duas circunferências C_1 e C_2, respectivamente, e d a medida da distância entre os centros, determine as posições relativas em cada caso.

a) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 10$ cm
b) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 2$ cm e $d = 2$ cm
c) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 7$ cm e $d = 10$ cm
d) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 10$ cm e $d = 4$ cm
e) $r_1 = 5$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 8$ cm
f) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm e $d = 9$ cm

18 Determine a relação entre a medida da distância entre os centros (d) e as medidas de comprimento dos raios de duas circunferências (r_1 e r_2, com $r_1 > r_2$) que são:

a) tangentes exteriores; **18. a)** $d = r_1 + r_2$
b) secantes; **18. b)** $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$
c) externas; **18. c)** $d > r_1 + r_2$
d) concêntricas. **18. d)** $d = 0$

19 São dadas duas circunferências com medidas de comprimento dos raios $r_1 = 13$ cm e $r_2 = 7$ cm. Sendo d a medida da distância entre os centros dessas circunferências, quanto mede d para que essas circunferências sejam tangentes interiores?

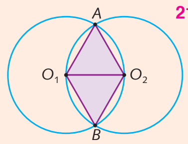
19. 6 cm

20 Dadas duas circunferências, C_1 e C_2, com medidas de comprimento dos raios r_1 e r_2, identifique as afirmações verdadeiras abaixo, considerando d como a medida da distância entre os centros dessas circunferências.

a) As duas circunferências são concêntricas quando $d = 0$.
b) As duas circunferências, com $r_1 > r_2$, são secantes quando $r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$.
c) As duas circunferências são tangentes quando têm dois pontos comuns.
d) As duas circunferências são externas quando $d > r_1 + r_2$. **20.** alternativas **a**, **b**, **d**

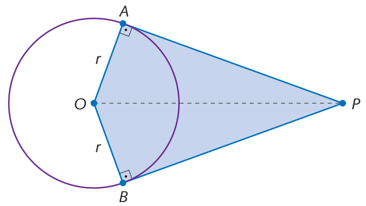
21 As circunferências da figura a seguir, de centros O_1 e O_2, têm raios medindo 2 cm de comprimento. Responda:

a) Quais são as medidas de comprimento de $\overline{AO_1}$ e $\overline{BO_2}$? **21. a)** 2 cm e 2 cm
b) Quanto mede o comprimento de cada lado do triângulo AO_1O_2? **21. b)** 2 cm
c) Qual é a medida da abertura do ângulo $O_1\hat{A}O_2$? **21. c)** 60°
d) Qual é o nome do quadrilátero AO_2BO_1? **21. d)** losango



5 Segmentos de reta tangentes

Observe a figura.



O ponto P é externo à circunferência de centro O e cujo comprimento do raio mede r, e os segmentos de reta $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência.

Analisando os triângulos retângulos OAP e OBP, temos:

- $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ ⟶ raios da circunferência
- $\overline{OP} \cong \overline{OP}$ ⟶ lado comum
- $\text{med}(O\hat{A}P) = \text{med}(O\hat{B}P) = 90°$

Pelo caso de congruência do triângulo retângulo, temos: $\triangle OAP \cong \triangle OBP$

Portanto, $\overline{PA} \cong \overline{PB}$.

> Os **segmentos de reta tangentes** traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são **congruentes**.

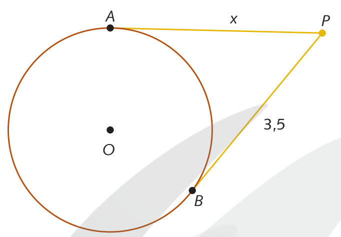
Observação

Dois triângulos retângulos que têm a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes são congruentes.

Analise estes exemplos.

Vamos determinar o valor de x, sabendo que $\overline{PA}$ e, $\overline{PB}$, $\overline{QB}$ e $\overline{QC}$ são tangentes às circunferências.

a)

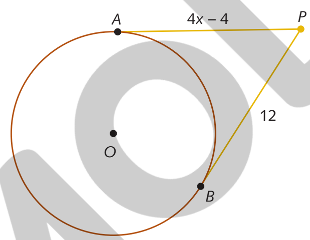


Temos: $PA = PB$

Logo:

$x = 3{,}5$

b)



Temos: $PA = PB$

Logo:

$4x - 4 = 12$

$4x = 12 + 4$

$4x = 16$

$x = 4$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Segmentos de reta tangentes

Objetivo:

Compreender a propriedade de dois segmentos tangentes a uma circunferência traçados de um mesmo ponto exterior.

Justificativa

Compreender a propriedade de dois segmentos tangentes a uma circunferência traçados de um mesmo ponto exterior é importante porque permite resolver diferentes problemas e deduzir a propriedade que envolve as medidas de comprimento dos lados de um quadrilátero circunscritível a uma circunferência.

Mapeando conhecimentos

Se possível, leve os estudantes para a sala de informática da escola (se houver uma) e peça que, em um *software* de geometria dinâmica, sigam os seguintes passos:

1º) Trace uma circunferência e um ponto P externo a ela.

2º) Com uma das extremidades em P, construa dois segmentos de reta tangentes à circunferência e indiquem os pontos de tangência por Q e R.

3º) Meça o comprimento de $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ e verifique se há relação entre essas medidas.

4º) Movimente o ponto P e verifique se a relação continua válida.

Para as aulas iniciais

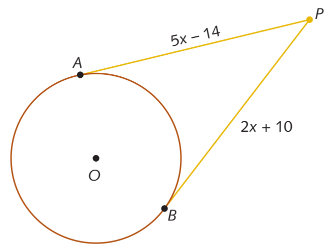
Verifique se todos concluíram que $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ são congruentes. Em seguida, solicite que apliquem essa propriedade na determinação de medidas de comprimento desconhecidas em figuras.

Polígonos circunscritos a uma circunferência

Antes de iniciar este tópico, retome com os estudantes o que entendem por polígonos, como são nomeados e as características dos polígonos regulares, para, então, introduzir polígonos circunscritos a uma circunferência.

Reproduza o exemplo na lousa, verificando se a propriedade de segmentos tangentes foi compreendida pelos estudantes.

c)



Temos: $PA = PB$

Logo:

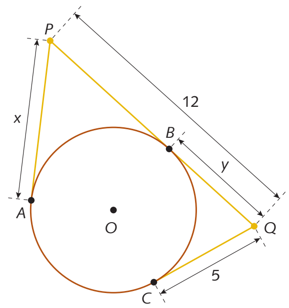
$5x - 14 = 2x + 10$

$5x - 2x = 10 + 14$

$3x = 24$

$x = 8$

d)



Como $PA = PB$, temos:

$PB = x$

Como $QB = QC$, temos: $y = 5$

Assim: $PQ = PB + QB$

$12 = x + 5$

$x = 7$

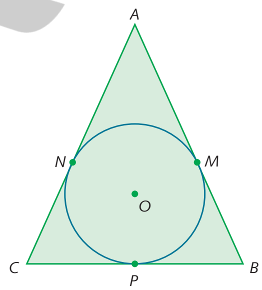
Polígonos circunscritos a uma circunferência

Um polígono está circunscrito a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes à circunferência.

Triângulo circunscrito

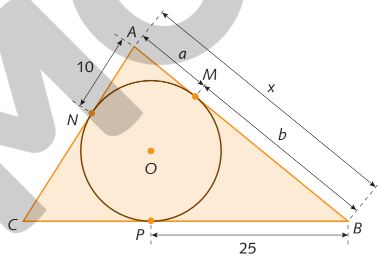
Confira esta figura.

O $\triangle ABC$ está circunscrito à circunferência de centro O, e os pontos M, N e P são os pontos de tangência.



Analise este exemplo.

Observe o $\triangle ABC$ circunscrito à circunferência na figura a seguir. Vamos determinar o valor de x.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Como $AN = AM$ e $MB = BP$, temos:

$AN = a$ e $BP = b$

Então: $a = 10$ e $b = 25$

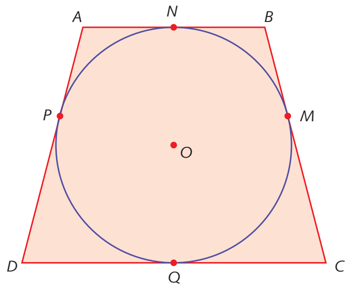
Sendo $AB = AM + MB$, temos:

$x = 10 + 25$

$x = 35$

Quadrilátero circunscrito

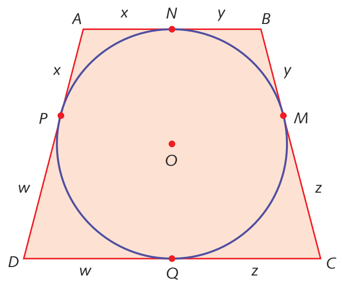
Observe a figura abaixo.



O quadrilátero *ABCD* está circunscrito à circunferência de centro *O*, e os pontos *M*, *N*, *P* e *Q* são pontos de tangência.

A soma das medidas de comprimento de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível a uma circunferência é igual à soma das medidas de comprimento dos outros dois.

Considere as medidas de comprimento x, y, z e w indicadas no quadrilátero *ABCD* circunscrito à circunferência.



M, *N*, *P* e *Q* são pontos de tangência.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Como $AN = AP = x$, $BM = BN = y$, $CQ = CM = z$ e $DP = DQ = w$, temos:

$AB + CD = x + y + z + w$

$AD + BC = x + w + y + z$

Logo: $\boxed{AB + CD = AD + BC}$

Observações

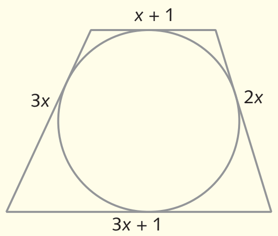
1. A recíproca é verdadeira: em um quadrilátero, se a soma das medidas de comprimento de dois lados opostos é igual à soma das medidas de comprimento dos outros dois, o quadrilátero é circunscritível a uma circunferência.
2. Podemos dizer que os polígonos estão circunscritos às circunferências ou que as circunferências estão **inscritas** nos polígonos.

Para explorar o assunto sobre quadrilátero circunscrito, organize os estudantes em trios e apresente a eles um quadrilátero circunscrito a uma circunferência. Em seguida, sugira que mostrem a propriedade apresentada. Permita que os estudantes utilizem estratégias próprias, dando-lhes tempo para a discussão em grupo. Faça as intervenções necessárias. Depois, sugira a eles que apresentem suas estratégias. Por fim, formalize a propriedade, fazendo a demonstração conforme o que foi desenvolvido.

Estas atividades têm por objetivo observar a aplicação das propriedades apresentadas. Faça a correção esclarecendo as dúvidas remanescentes.

Sugestão de atividade extra

Determine a medida do perímetro do quadrilátero a seguir.



Resposta: 20 unidades de medida de comprimento

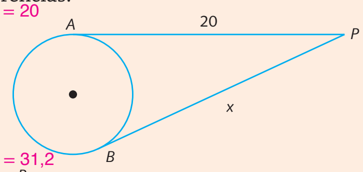
Atividades

Faça as atividades no caderno.

22 Determine o valor de x, sabendo que os segmentos de reta são tangentes às circunferências.

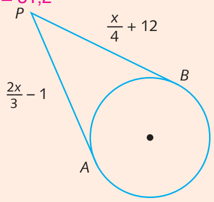
22. a) $x = 20$

a)



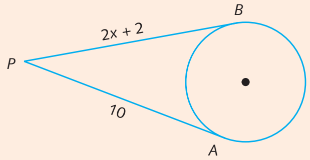
22. b) $x = 31{,}2$

b)



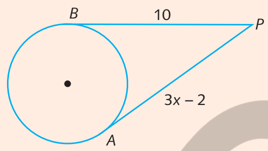
22. c) $x = 4$

c)



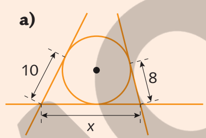
22. d) $x = 4$

d)



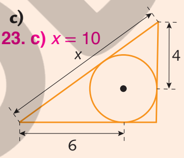
23 Determine o valor de x nos casos a seguir.

a)

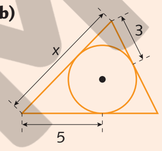


23. a) $x = 18$

c) 23. c) $x = 10$

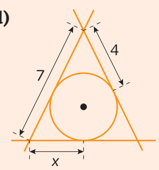


b)



23. b) $x = 8$

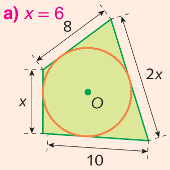
d)



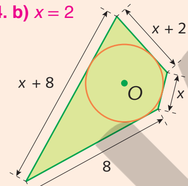
23. d) $x = 3$

24 Determine o valor de x em cada caso.

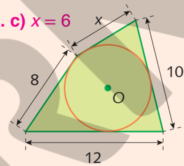
a) 24. a) $x = 6$



b) 24. b) $x = 2$

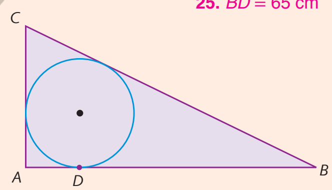


c) 24. c) $x = 6$



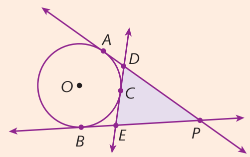
25 O ponto D é o ponto de tangência da circunferência inscrita com o lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC. Sabendo que $AC = 39$ cm, $AB = 80$ cm e $BC = 89$ cm, determine BD.

25. $BD = 65$ cm



26 Na figura, $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$ e $\overleftrightarrow{DE}$ são tangentes à circunferência. Calcule a medida de perímetro do triângulo PDE, sendo $PA = 8$ cm.

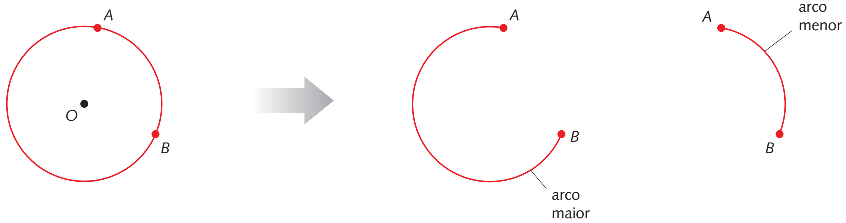
26. 16 cm



6 Arco de circunferência e ângulo central

Arco de circunferência

A parte da circunferência compreendida entre dois de seus pontos é denominada **arco de circunferência**.

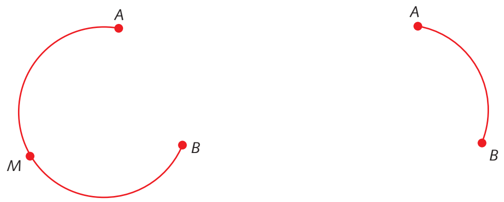


Notação: $\overset{\frown}{AB}$

Lemos: "arco *AB*".

Chamamos os pontos *A* e *B* de **extremos** do arco $\overset{\frown}{AB}$.

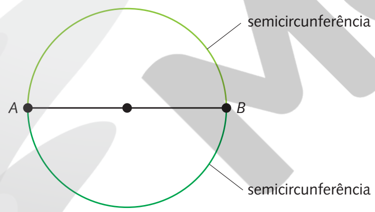
Para distinguir o arco menor do arco maior, indicamos $\overset{\frown}{AB}$ para o menor e utilizamos mais um ponto da circunferência para o maior. Observe as figuras.



Notação: $\overset{\frown}{AMB}$

Notação: $\overset{\frown}{AB}$

Quando os extremos *A* e *B* do arco coincidem com as extremidades de um diâmetro, cada um dos arcos formados é denominado **semicircunferência**.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Inicie este tópico explicando aos estudantes que é possível dividir uma circunferência em partes que são denominadas arcos de circunferência. Em Matemática, *arco* é a parte da circunferência compreendida entre dois pontos, denominados extremos.

Dê ênfase para a notação do arco menor e do arco maior e verifique se os estudantes compreenderam a diferença de notação.

Explique que, na determinação de arcos de uma circunferência, há dois tipos de medição: linear (comprimento) e angular. Estudaremos a medida angular de arco, que chamaremos apenas de medida do arco, em seguida.

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

Arco de circunferência e ângulo central

BNCC:

- Competência geral 2 (a descrição está na página VI).
- Habilidade EF09MA11.

Objetivo:

Relacionar arcos e ângulos centrais na circunferência.

Justificativa

Os arcos de circunferência são figuras presentes em diferentes construções geométricas e estão relacionados aos ângulos centrais da circunferência. Além disso, essas relações entre arcos e ângulos centrais na circunferência possibilitam resolver diferentes problemas, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA11**.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes: "O que é um arco de circunferência?". Em seguida, peça para que representem arcos de circunferência no caderno. Depois, defina ângulo central e peça para que representem um ângulo central de uma circunferência qualquer no caderno. Verifique se percebem que o ângulo central construído determina um arco na circunferência.

Por fim, solicite que, no caderno, construam circunferências e ângulos centrais de medidas de aberturas iguais a 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 180° etc. para construir e completar um quadro como o do exemplo a seguir:

Medida da abertura do ângulo central	Razão entre as medidas de comprimento do arco e da circunferência
30°	$\frac{1}{12}$
45°	$\frac{1}{8}$

Os estudantes podem fazer as construções usando instrumentos de desenho e obter as medidas das aberturas dos ângulos centrais com um transferidor.

Para as aulas iniciais

Verifique se os estudantes compreenderam os conceitos de arco e ângulo central. Depois, verifique se todos concluíram que razão entre as medidas de comprimento do arco e da circunferência é diretamente proporcional à medida da abertura do ângulo central. Caso ache pertinente, proponha aos estudantes que reproduzam a atividade da dinâmica inicial no em um *software* de geometria dinâmica.

Ângulo central

Ao trabalhar com as noções de arco de circunferência e ângulo central, chame a atenção dos estudantes para o fato de que, se um arco tem medida igual a x, em graus, o arco complementar terá medida igual a $360° - x$.

Sugestão de atividade extra

Determine a medida angular do arco de modo que sua medida de comprimento corresponda:

- à metade da medida do comprimento da circunferência (Resposta: 180°);
- a um quarto da medida do comprimento da circunferência (Resposta: 90°);
- a um terço da medida do comprimento da circunferência (Resposta: 120°).

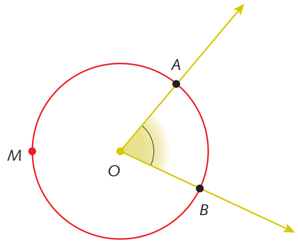
É interessante mostrar aos estudantes que essa atividade também pode ser resolvida utilizando regra de três simples.

Ângulo central

O ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é denominado **ângulo central**.

Observe na figura que $A\hat{O}B$ é um ângulo central e $\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente.

Um arco pode ter medida angular ou medida de comprimento. Aqui usaremos apenas a medida angular, que indicaremos por **medida do arco**.



$A\hat{O}B$: ângulo central

$\overset{\frown}{AB}$: arco correspondente ao ângulo $A\hat{O}B$

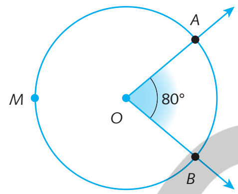
A medida da abertura do ângulo central é igual à medida do arco correspondente.

Assim:

$$\boxed{\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(\overset{\frown}{AB})}$$

Confira estes exemplos.

a) Vamos determinar a medida de $\overset{\frown}{AMB}$.



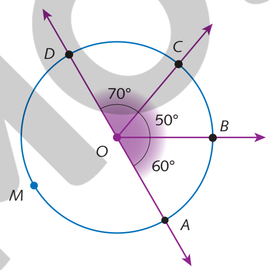
Como $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \text{med}(A\hat{O}B) = 80°$, temos:

$\text{med}(\overset{\frown}{AMB}) = 360° - \text{med}(\overset{\frown}{AB})$

$\text{med}(\overset{\frown}{AMB}) = 360° - 80°$

$\text{med}(\overset{\frown}{AMB}) = 280°$

b) Observando a figura, vamos determinar as medidas de $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{AMD}$.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

- $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \text{med}(A\hat{O}B) = 60°$
- $\text{med}(\overset{\frown}{AC}) = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) + \text{med}(\overset{\frown}{BC})$
  $\text{med}(\overset{\frown}{AC}) = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) + \text{med}(B\hat{O}C)$
  $\text{med}(\overset{\frown}{AC}) = 60° + 50° = 110°$
- $\text{med}(\overset{\frown}{AD}) = \text{med}(\overset{\frown}{AC}) + \text{med}(\overset{\frown}{CD})$
  $\text{med}(\overset{\frown}{AD}) = \text{med}(\overset{\frown}{AC}) + \text{med}(C\hat{O}D)$
  $\text{med}(\overset{\frown}{AD}) = 110° + 70° = 180°$
- $\text{med}(\overset{\frown}{AMD}) = 360° - \text{med}(\overset{\frown}{AD})$
  $\text{med}(\overset{\frown}{AMD}) = 360° - 180° = 180°$

Esta sequência de atividades permite desenvolver parte da habilidade **EF09MA11** na resolução de problemas que envolvem a relação entre arcos e ângulos centrais.

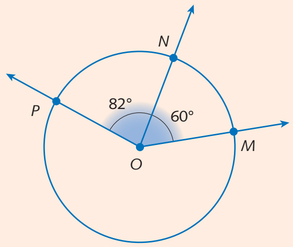
- Na **atividade 32**, explique aos estudantes que provar que uma afirmação é verdadeira significa obter relações válidas, com base em teoremas e propriedades verdadeiras. Atividades como esta mobilizam diferentes tipos de raciocínio lógico-matemático (indução, dedução, abdução e raciocínio por analogia), de argumentação e de inferência, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **2.**

Atividades

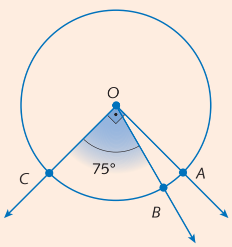
Faça as atividades no caderno.

27 Dadas as figuras abaixo, determine as medidas dos arcos:

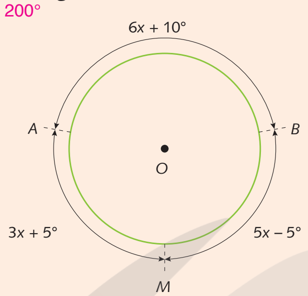
a) $\overset{\frown}{MN}$, $\overset{\frown}{NP}$ e $\overset{\frown}{MP}$ **27. a)** 60°, 82°, 142°



b) $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$ **27. b)** 75°, 15°, 90°



28 Quantos graus mede o arco $\overset{\frown}{AMB}$ da figura? **28.** 200°



29. a) 82° 30' **29.b)** 120° **29. c)** 80°

29 Em uma circunferência, os arcos $\overset{\frown}{MN}$ e $\overset{\frown}{MAN}$ formam o giro de uma volta. Determine a medida de abertura x quando:

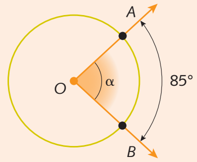
a) $\text{med}(\overset{\frown}{MAN}) = 3x$ e $\text{med}(\overset{\frown}{MN}) = x + 30°$

b) $\text{med}(\overset{\frown}{MAN}) = x + 120°$ e $\text{med}(\overset{\frown}{MN}) = x$

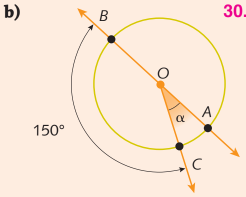
c) $\text{med}(\overset{\frown}{MAN}) = 2x + 80°$ e $\text{med}(\overset{\frown}{MN}) = \dfrac{3x}{2}$

30 Calcule a medida de abertura α de cada ângulo a seguir. **30. a)** 85°

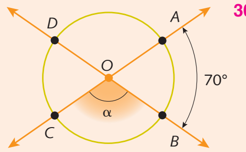
a)



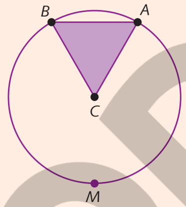
b) **30. b)** 30°



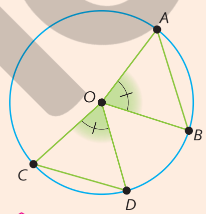
c) **30. c)** 110°



31 Nesta figura, o ponto C é o centro da circunferência e o triângulo ABC é equilátero. Qual é a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$? **31.** 60°



32 Prove que, em uma circunferência, ângulos centrais congruentes determinam cordas congruentes.



32. $A\hat{O}B \cong C\hat{O}D$

$\overline{OA} \cong \overline{OB} \cong \overline{OC} \cong \overline{OD}$ (raios)

Logo, $\triangle AOB \cong \triangle COD$, pelo caso LAL.

Assim: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

225

Ângulo inscrito

BNCC:

Habilidade EF09MA11.

Objetivo:

Relacionar arcos e ângulos inscritos na circunferência.

Justificativa

Relacionar arcos e ângulos inscritos na circunferência mobiliza os conhecimentos abordados no tópico anterior e possibilita que os estudantes resolvam diversos problemas, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA11**.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes: "O que é um ângulo inscrito?". Deixe-os à vontade para que verbalizem suas respostas mesmo que não utilizem o vocabulário matemático adequado. Depois, peça que façam as atividades propostas na seção *Tecnologias digitais em foco* relativa a este tópico.

Para as aulas iniciais

Proponha aos estudantes que empreguem a relação entre a medida da abertura do ângulo inscrito em uma circunferência e a medida do arco que ele determina para calcular medidas de abertura de ângulos desconhecidos em figuras.

Tecnologias digitais em foco

BNCC:

- Competência geral 5 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 2 (a descrição está na página VII).
- Habilidade EF09MA11.

Objetivo:

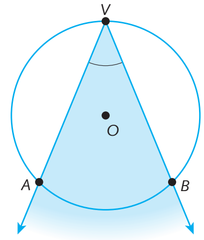
Investigar a relação entre as medidas das aberturas do ângulo inscrito na circunferência e do ângulo central correspondentes ao mesmo arco usando *software* de geometria dinâmica..

Nesta seção, os alunos deverão verificar experimentalmente, com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica, que a medida da abertura do ângulo inscrito na circunferência é igual à metade da medida da abertura do ângulo central correspondente. A proposta dessa seção contribui para que os estudantes desenvolvam o espírito investigativo a fim de produzir conhecimento, e é nesse sentido que a competência geral **5** e a competência específica **2** da BNCC têm o seu desenvolvimento favorecido.

7 Ângulo inscrito

Ângulo inscrito a uma circunferência é todo ângulo cujo vértice é um ponto da circunferência e cujos lados são secantes a essa circunferência.

Podemos estabelecer uma relação entre a medida da abertura do ângulo inscrito e a medida do arco da circunferência por ele determinado.



$A\hat{V}B$ é um ângulo inscrito que determina o arco $\widehat{AB}$ na circunferência.

GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Tecnologias digitais em foco

Ângulos central e inscrito a uma circunferência

Nesta seção, utilizaremos o GeoGebra, ou outro *software* de geometria dinâmica que seu professor indicar, para construir um ângulo inscrito a uma circunferência e o ângulo central correspondente e para investigar a relação entre as medidas das aberturas desses ângulos.

Construa

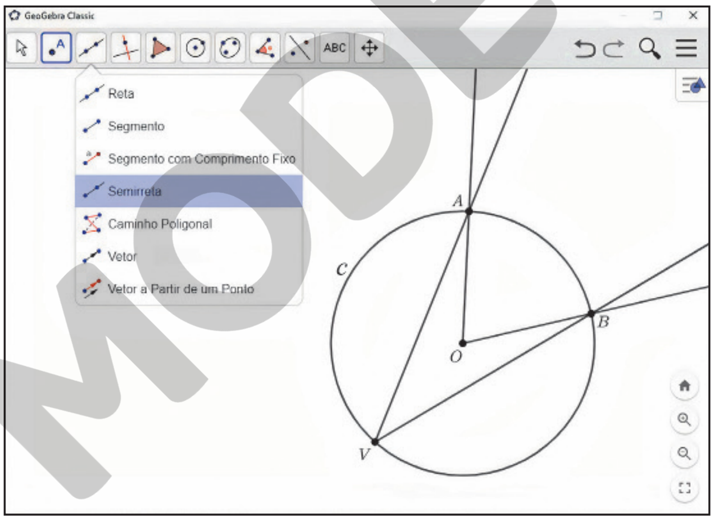
Siga os passos abaixo para construir os ângulos.

1º) Construa uma circunferência *C* de centro *O*.

2º) Marque três pontos distintos, *A*, *B* e *V*, na circunferência.

3º) Trace as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{VA}$ e $\overrightarrow{VB}$.

O ângulo $A\hat{V}B$ é um ângulo inscrito e $A\hat{O}B$ é o ângulo central correspondente.



© INTERNATIONAL GEOGEBRA INSTITUTE, 2022

226

Esta atividade foi apresentada no GeoGebra, mas pode ser desenvolvida em qualquer *software* de geometria dinâmica. Na falta de computador, a atividade proposta pode ser adaptada de modo que os estudantes utilizem papel e instrumentos de desenho e de medida.

(EF09MA11) Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.

Destaque aos estudantes que, na seção *Tecnologias digitais em foco*, eles identificaram a relação existente entre as medidas das aberturas de um ângulo inscrito na circunferência e do ângulo central correspondente ao mesmo arco. Em seguida, faça a demonstração dessa relação junto com a turma na lousa com base na demonstração apresentada no livro.

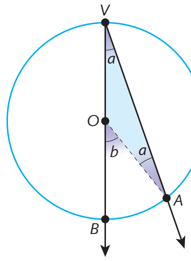
Explore:
a) Espera-se que os estudantes percebam que a medida da abertura do ângulo inscrito à circunferência é igual à metade da medida da abertura do ângulo central correspondente.
b) Essa propriedade é válida independentemente da configuração apresentada.

Explore

a) Meça as aberturas dos ângulos $A\hat{V}B$ e $A\hat{O}B$. É possível perceber alguma relação entre essas medidas?

b) Movimente os pontos móveis da construção, modificando a configuração inicial. A relação observada é válida em diferentes configurações?

Nesta figura, $A\hat{V}B$ é um ângulo inscrito e $\overline{VB}$ é um diâmetro da circunferência, sendo a a medida da abertura do ângulo inscrito $A\hat{V}B$ e b a medida da abertura do ângulo central $A\hat{O}B$.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Como $\overline{OV}$ e $\overline{OA}$ são raios da circunferência, o triângulo AOV é isósceles. Assim, os ângulos da base do triângulo AOV são congruentes:

$$\text{med}(O\hat{V}A) = \text{med}(O\hat{A}V) = a$$

No triângulo AOV, temos $\text{med}(V\hat{O}A) = 180° - 2a$, pois a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Observe que $V\hat{O}A$ e $B\hat{O}A$ formam um ângulo raso (estão sobre $\overrightarrow{VB}$), assim:

$\text{med}(V\hat{O}A) + \text{med}(B\hat{O}A) = 180°$

$\cancel{180°} - 2a + b = \cancel{180°} \Rightarrow b = 2a \Rightarrow a = \dfrac{b}{2}$

Logo:

$$\boxed{\text{med}(A\hat{V}B) = \frac{\text{med}\left(A\hat{O}B\right)}{2} \text{ ou } \text{med}(A\hat{V}B) = \frac{\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right)}{2}}$$

A medida da abertura do ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida do arco que ele determina na circunferência.

Esse resultado vale também para outras configurações, mas não faremos a demonstração disso aqui.

Analise estes exemplos.

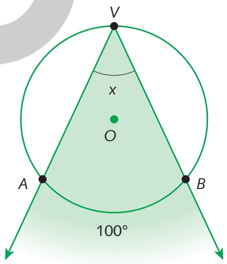
a) Vamos determinar a medida de abertura x do ângulo nesta figura.

Como $\text{med}(A\hat{V}B) = \dfrac{\text{med}\left(\overset{\frown}{AB}\right)}{2}$, temos:

$\text{med}(A\hat{V}B) = \dfrac{100°}{2}$

$\text{med}(A\hat{V}B) = 50°$

Portanto: $x = \text{med}(A\hat{V}B) = 50°$



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

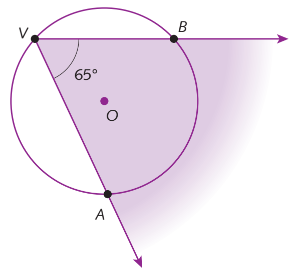
227

Sugestão de atividade extra

O fato de que ângulos inscritos que determinam o mesmo arco na circunferência serem congruentes também pode ser percebido por meio de investigações realizadas em um *software* de geometria dinâmica. Segue um exemplo de como conduzir a atividade:

- Trace uma circunferência e determine o arco de extremos *A* e *B* sobre ela.
- Nessa circunferência, construa dois ângulos inscritos distintos, com vértices *E* e *F*, respectivamente, correspondentes ao arco $\overset{\frown}{AB}$.
- Meça a abertura dos ângulos construídos. Altere o arco movimentando o ponto *A* ou o ponto *B*. Em seguida, movimente os pontos *E* e *F*.
- Ao final, pergunte: "O que podemos observar?" (Resposta: Os ângulos $A\hat{E}B$ e $A\hat{F}B$ são congruentes e se mantêm congruentes após as movimentações).

b) Nesta figura, qual é a medida de $\overset{\frown}{AB}$?



Como $\text{med}(A\hat{V}B) = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$, temos:

$65° = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2} \Rightarrow \text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 65° \cdot 2 \Rightarrow \text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 130°$

c) Sabendo que *A*, *B* e *C* são pontos de uma circunferência e que a abertura do ângulo central $A\hat{O}B$ mede 70°, quais são as medidas de $\overset{\frown}{AB}$ e da abertura do ângulo inscrito $A\hat{C}B$?

Como $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \text{med}(A\hat{O}B)$, temos:

$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 70°$

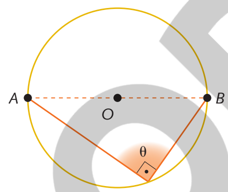
Como $\text{med}(A\hat{C}B) = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$, temos:

$\text{med}(A\hat{C}B) = \dfrac{70°}{2}$

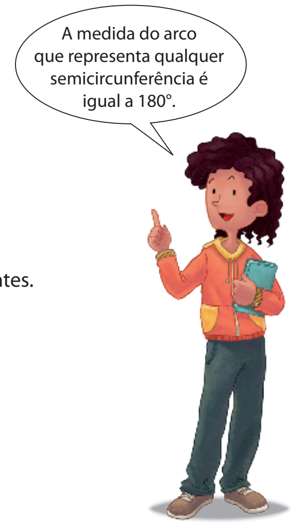
$\text{med}(A\hat{C}B) = 35°$

Observações

1. O ângulo inscrito em uma semicircunferência é reto.

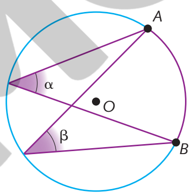


$\theta = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$



TIAGO SILVA/ARQUIVO DA EDITORA

2. Ângulos inscritos que determinam o mesmo arco são congruentes.



$\alpha = \beta = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$

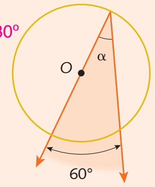
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

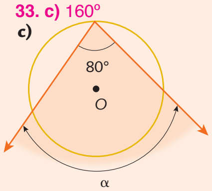
Faça as atividades no caderno.

33 Encontre o valor de α, em grau, em cada figura.

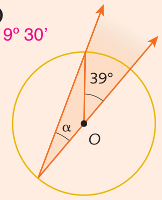
a) 33. a) 30°



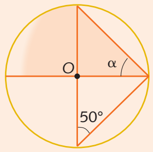
c) 33. c) 160°



b) 33. b) 19° 30'



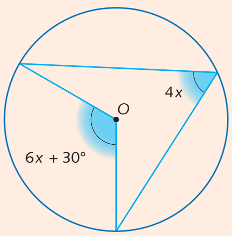
d)



33. d) 40°

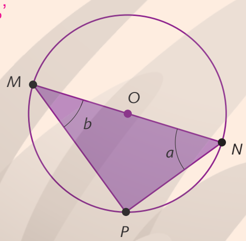
34 Um triângulo ABC está inscrito em uma circunferência, e o arco $\overset{\frown}{AC}$ mede 100°. Calcule a medida da abertura do ângulo $C\hat{A}B$, sabendo que a abertura de $B\hat{C}A$ mede 60°. 34. 70°

35 Calcule a medida da abertura, em grau, dos ângulos assinalados. 35. 60° e 120°

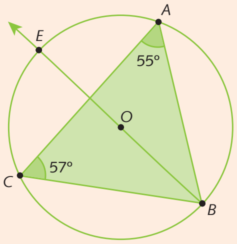


36 Determine a e b, em grau, na figura abaixo sabendo que $a + 2b = 127°$.

36. $a = 53°$; $b = 37°$



37 Sabendo que $\overrightarrow{BE}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$, determine a medida do arco $\overset{\frown}{ECB}$. 37. 178°



38 Utilizando um *software* de geometria dinâmica, faça uma construção geométrica de acordo com os passos a seguir.

1º) Construa uma circunferência C_1 de centro em A e raio $\overline{AB}$.

2º) Construa uma circunferência C_2 de centro em B e raio $\overline{AB}$.

3º) Marque C, uma das intersecções entre as circunferências C_1 e C_2.

4º) Trace a reta $\overleftrightarrow{CA}$.

5º) Marque D, intersecção da circunferência C_1 com a reta $\overleftrightarrow{CA}$, $D \neq C$.

6º) Trace a semirreta $\overrightarrow{AB}$.

7º) Trace a semirreta $\overrightarrow{DB}$.

38. a) Exemplo de construção em *Orientações*.

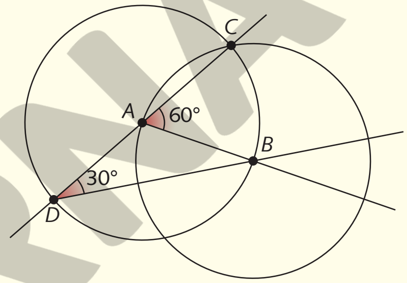
Agora faça o que se pede:

a) Utilizando as ferramentas do *software*, analise a construção realizada e indique a relação entre as medidas das aberturas dos ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$.

b) No caderno, elabore uma questão sobre a construção realizada de maneira que um colega possa responder utilizando os recursos disponíveis no *software* de geometria dinâmica. 38. b) Resposta pessoal.

c) Troque de caderno com um colega e responda à questão elaborada por ele. Em seguida, troquem as descobertas que fizeram com a construção e a investigação dos passos descritos. 38. c) Resposta pessoal.

- Na **atividade 33**, antes que realizem os cálculos, oriente os estudantes a indicar por letras os pontos de intersecção dos lados do ângulo inscrito com a circunferência e a identificar os ângulos inscrito e central em cada caso.
- Na **atividade 34**, é importante que façam uma figura para traduzir as informações fornecidas pelo enunciado.
- Na **atividade 35**, espera-se que os estudantes resolvam a seguinte equação para determinar as medidas das aberturas dos ângulos assinalados: $4x = \frac{6x + 30}{2}$, em que x é um número real.
- Exemplo de construção do **item a** da **atividade 38**:



Sendo $\overset{\frown}{CB}$ o arco correspondente ao ângulo central $C\hat{A}B$ e o arco correspondente ao ângulo inscrito $C\hat{D}B$, podemos afirmar que a medida da abertura do ângulo inscrito $C\hat{D}B$ mede metade da medida da abertura do ângulo central $C\hat{A}B$.

Resolvendo em equipe

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

A seção destaca as etapas selecionadas para encaminhar a resolução de problemas. Elas devem ser analisadas e discutidas com os estudantes. Além de favorecer o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8**, a seção permite a transferência de estratégias de resolução para outros contextos e situações.

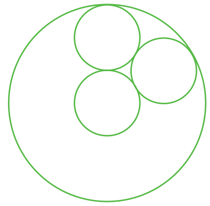
Na etapa “Verificação”, os estudantes devem averiguar se todas as condições do enunciado foram satisfeitas e testar o plano de resolução formulado na etapa anterior.

Na etapa “Apresentação”, oriente os estudantes a tomarem cuidado ao manusear o compasso.

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(Obmep) Desenhe duas circunferências de mesmo centro, uma de raio medindo 1 cm e a outra de raio medindo 3 cm. Na região exterior à circunferência de 1 cm de raio e interior à de 3 cm de raio, desenhe circunferências que sejam, simultaneamente, tangentes às duas circunferências, como mostrado na figura dada.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Qual deve ser o raio dessas circunferências?

b) Qual é o número máximo dessas circunferências que podem ser desenhadas, sem que elas se sobreponham?

Resolvendo em equipe:
a) 1 cm
b) 6

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso.

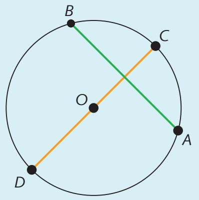
Interpretação e identificação dos dados	• Analise as informações do enunciado e anote no caderno as que você julgar relevantes para a resolução do problema. • Copie a figura em seu caderno e analise-a considerando as duas circunferências desenhadas inicialmente (concêntricas). Depois, determine a medida de comprimento *r* dos raios das circunferências tangentes. • Una os centros das circunferências menores. Que figura geométrica você obtém? Justifique. **Interpretação e identificação dos dados**: primeiro item: Resposta pessoal. segundo item: $r = 1$ cm terceiro item: Um triângulo equilátero, pois a medida de comprimento dos lados é 2 cm.
Plano de resolução	• Quais são as medidas das aberturas dos ângulos internos da figura encontrada no item anterior? **Plano de resolução**: 60°
Resolução	• Junte-se a dois colegas. • Comparem os planos de resolução e verifiquem se eles contêm ideias comuns. • Discutam as diferenças e as semelhanças de cada plano e escolham um deles para a execução do processo de resolução. <u>Observação</u> Resolvam o problema de forma coletiva, mas façam o registro individualmente no caderno.
Verificação	• Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.
Apresentação	• Apresentem a figura dada no problema e sua solução, construídas com régua e compasso, em uma folha de papel sulfite.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Circunferência

Corda e diâmetro de uma circunferência

Sendo O, centro da circunferência, temos:



- $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são **cordas**;
- $\overline{CD}$ é um **diâmetro**;
- $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$ são **raios**.

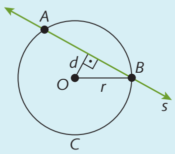
Posições de uma reta em relação a uma circunferência

Em cada circunferência C, considere d a medida da distância da reta ao centro O da circunferência e r a medida de comprimento do raio da circunferência.

Reta secante

Uma reta é **secante** a uma circunferência quando corta a circunferência em dois pontos distintos.

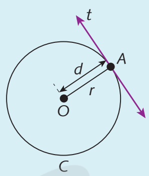
Nesse caso, temos: $d < r$



Reta tangente

Uma reta é **tangente** a uma circunferência quando tem apenas um ponto em comum com ela.

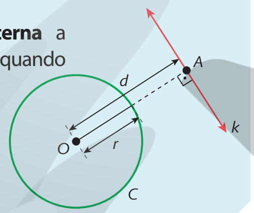
Nesse caso, temos: $d = r$



Reta externa

Uma reta é **externa** a uma circunferência quando não tem nenhum ponto em comum com ela.

Nesse caso, temos: $d > r$



Posições relativas de duas circunferências

Nas circunferências C_1 e C_2, considere d a medida da distância entre O_1 e O_2 (respectivamente, centros das circunferências C_1 e C_2) e r_1 e r_2 as medidas de comprimento dos raios, respectivamente, das circunferências C_1 e C_2, tal que $r_1 > r_2$.

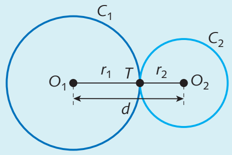
Circunferências tangentes exteriores

Duas circunferências são **tangentes exteriores** quando têm apenas um ponto comum e suas regiões internas não têm pontos comuns.

Nesse caso, temos:

$d = r_1 + r_2$

T: ponto de tangência



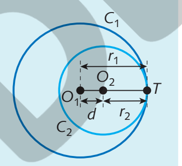
Circunferências tangentes interiores

Duas circunferências são **tangentes interiores** quando têm apenas um ponto comum e uma é interna à outra.

Nesse caso, temos:

$d = r_1 - r_2$

T: ponto de tangência



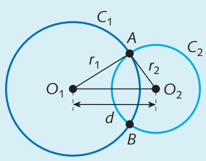
Circunferências secantes

Duas circunferências são **secantes** quando têm dois pontos em comum.

Nesse caso, temos:

$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$

A e B: intersecções entre as circunferências.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Circunferência

Ao retomar os elementos de uma circunferência com a turma, enfatize que todo diâmetro é também uma corda da circunferência.

Posições de uma reta em relação a uma circunferência

Ao retomar as posições de uma reta em relação a uma circunferência, você pode pedir aos estudantes que apresentem mais exemplos no caderno. Alerte-os para que tomem cuidado ao manusear o compasso.

Posições relativas de duas circunferências

Faça a leitura coletiva da revisão com os estudantes. Se julgar necessário, reproduza as figuras na lousa e explore com eles a relação entre as medidas de comprimento dos raios das circunferências e a medida da distância entre os centros dessas circunferências.

• Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes percebam que há mais de uma possibilidade de resposta para cada item. Após concluírem a atividade, incentive-os a compartilhar as respostas obtidas.

• Caso os estudantes tenham dificuldades para realizar a **atividade 2**, oriente-os a representar a circunferência e a reta em cada item. Em atividades que envolvam o uso do compasso, sempre alerte para que tomem cuidado ao manusear esse instrumento, pois podem se machucar ou machucar um colega.

• Na **atividade 3**, espera-se que os estudantes percebam que, para determinar o valor x, precisam resolver a equação:

$$(2x - 3) - (x + 1) = 7$$

Espera-se que concluam que $x = 11$ cm. Depois, espera-se que, substituam x por 11 cm em $2x - 3$ e $x + 1$ para determinar a medida de comprimento do raio de cada circunferência.

• Na **atividade 4**, espera-se que os estudantes percebam que, para determinar o valor x, precisam resolver a equação:

$$(3x + 1) + (5x - 2) = 55$$

Espera-se que concluam que $x = 7$ cm. Depois, espera-se que substituam x por 7 cm em $3x + 1$ e $5x - 2$ para determinar a medida de comprimento do raio de cada circunferência.

• Na **atividade 5**, oriente os estudantes a representar as duas circunferências nas condições do enunciado caso tenham dificuldades para identificar a posição relativa entre elas.

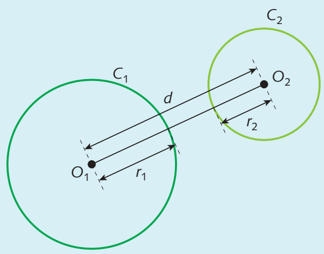
Segmentos de reta tangentes

• Na **atividade 6**, os estudantes vão aplicar a propriedade dos segmentos de reta tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência. No **item a**, espera-se que eles obtenham o valor de x resolvendo a equação $3x + 5 = 7x - 15$. Já no **item b**, a equação a ser resolvida para calcular o valor de x é $\frac{3x}{2} - 5 = \frac{4x}{3} + 4$. Em ambos os casos, enfatize com a turma que x é um número real maior do que zero por ser uma medida de comprimento.

Circunferências externas

Duas circunferências são **externas** quando não têm ponto comum e suas regiões internas não têm pontos comuns.

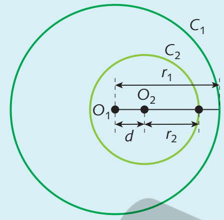
Nesse caso, temos: $d > r_1 + r_2$



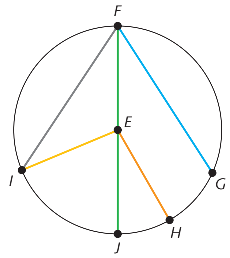
Circunferências internas

Duas circunferências são **internas** quando não têm ponto comum e uma é interna à outra.

Nesse caso, temos: $d < r_1 - r_2$



1. Observe a figura e indique um segmento de reta que seja:



a) raio
b) corda
c) diâmetro

1. a) $\overline{EF}$, $\overline{EJ}$, $\overline{EH}$, $\overline{EI}$
1. b) $\overline{FG}$, $\overline{FI}$, $\overline{FJ}$
1. c) $\overline{FJ}$

2. Considere uma circunferência de centro O e raio de medida de comprimento r. Indicando por d a medida da distância entre uma reta e o centro da circunferência, determine a posição da reta em relação à circunferência para:

a) $d = 4$ cm e $r = 4$ cm; **2. a)** tangente
b) $d = 8$ cm e $r = 5$ cm; **2. b)** exterior
c) $d = 11$ cm e $r = 16$ cm; **2. c)** secante
d) $d = 5$ cm e $r = 5$ cm. **2. d)** tangente

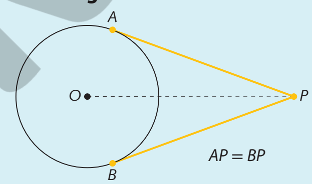
3. A medida da distância entre os centros de duas circunferências tangentes interiores é 7 cm. As medidas de comprimento dos raios são $2x - 3$ e $x + 1$. Qual é a medida de comprimento do raio de cada circunferência, considerando que o raio de maior medida de comprimento mede $2x - 3$? **3.** 19 cm e 12 cm

4. Os centros de duas circunferências tangentes exteriores estão distantes 55 cm, e as medidas de comprimento dos raios são expressas por $3x + 1$ e $5x - 2$. Qual é a medida de comprimento do raio de cada circunferência?
4. 22 cm e 33 cm

5. Qual é a posição relativa de duas circunferências cujos raios medem 7 cm e 4 cm de comprimento e a distância entre seus centros mede 10 cm?
5. secantes

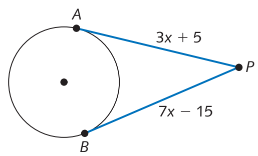
Segmentos de reta tangentes

Os segmentos de reta tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são **congruentes**.



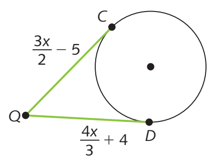
6. Determine o valor de x em cada caso sabendo que os segmentos de reta são tangentes às circunferências.

a)



6. a) $x = 5$

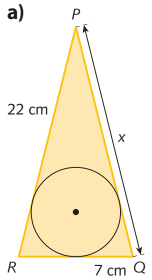
b)



6. b) $x = 54$

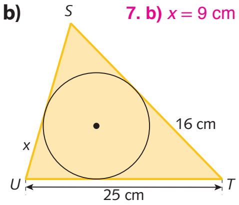
7. Em cada figura a seguir, temos uma circunferência inscrita em um triângulo. Determine as medidas de comprimento *x*.

a)



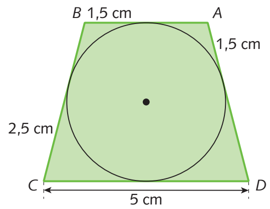
7. a) $x = 29$ cm

b)



7. b) $x = 9$ cm

8. Calcule a medida de perímetro deste quadrilátero circunscrito à circunferência. 8. 16 cm



Arco de circunferência e ângulo central

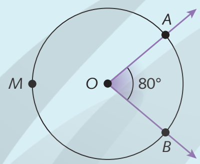
Arco de circunferência

A parte da circunferência compreendida entre dois de seus pontos é denominada **arco de circunferência**.

Ângulo central

O ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é denominado **ângulo central**.

A medida da abertura do ângulo central é igual à medida do arco correspondente.



Como $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \text{med}(A\hat{O}B)$, temos:

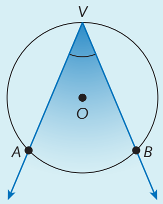
$\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 80°$

$\text{med}(\overset{\frown}{AMB}) = 280°$

Ângulo inscrito

Ângulo inscrito a uma circunferência é todo ângulo cujo vértice é um ponto da circunferência e cujos lados são secantes a essa circunferência.

A medida da abertura do ângulo inscrito em uma circunferência é a metade da medida do arco que ele determina na circunferência.



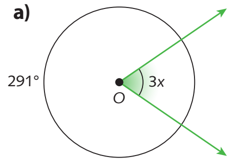
$$\text{med}(A\hat{V}B) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

9. b) $x = 8°;\ 64°$

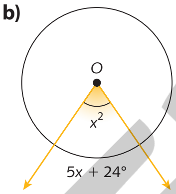
9. Determine a medida *x*, em graus, e a medida da abertura de cada ângulo central em destaque.

a)



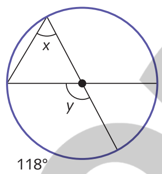
9. a) $x = 23°;\ 69°$

b)



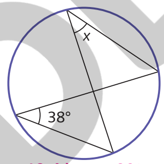
10. Determine as medidas *x* e *y* das aberturas dos ângulos nas circunferências abaixo.

a)



10. a) $x = 59°$ e $y = 118°$

b)

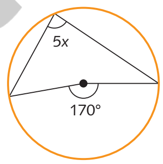


10. b) $x = 38°$

11. Se a medida da abertura de um ângulo inscrito em uma circunferência é 84° e o arco da circunferência compreendido entre seus lados mede $5x + 8°$, qual é a medida da abertura *x*? 11. 32°

12. Qual é a medida *x*, em grau, nesta figura?

12. 17°



Arcos de circunferência e ângulo central

Represente algumas circunferências na lousa, marque alguns pontos sobre ela e convide alguns estudantes para que identifiquem arcos de circunferência e ângulos centrais. Este é o momento oportuno para verificar se consolidaram esses conceitos.

Ângulo inscrito

- Na **atividade 9**, os estudantes devem se lembrar de que a medida da abertura do ângulo central é igual à medida do arco correspondente. No caso do **item a**, espera-se que eles percebam que a medida do arco que corresponde a $3x$ é 69°, pois $360° - 291° = 69°$. No **item b**, eles vão resolver um equação do 2º grau com uma incógnita e obter dois valores para *x* (um positivo e outro negativo). Espera-se que eles percebam que o valor negativo não convém, pois *x* representa uma medida de abertura de ângulo.
- No **item b** da **atividade 10**, espera-se que os estudantes percebam que o ângulo cuja abertura mede 38° e o ângulo cuja abertura mede *x* determinam o mesmo arco, por isso $x = 38°$.
- Para determinar *x* na **atividade 11**, espera-se que os estudantes resolvam a seguinte equação:

$$84° = \frac{(5x + 8°)}{2}$$

Faça um esboço da situação na lousa caso perceba que alguns estudantes estão com dificuldades para interpretar o enunciado.

- Para determinar *x* na **atividade 12**, espera-se que os estudantes resolvam a seguinte equação:

$$5x = \frac{170°}{2}$$

Discuta a atividade com eles, após terminarem.

CAPÍTULO 9 – POLÍGONOS REGULARES

Trocando ideias

BNCC:

• Competências gerais 2 e 9 (as descrições estão na página VI).

• Competências específicas 2, 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

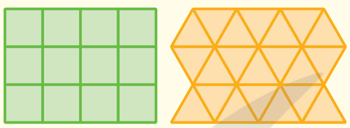
Objetivos:

• Introduzir o conceito de polígono regular.

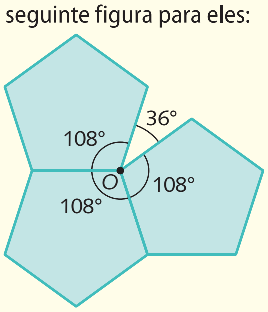
• Introduzir os conceitos de mosaico e mosaico regular.

• Verificar os conhecimentos prévios dos estudantes para o cálculo da medida das aberturas dos ângulos internos de um polígono regular.

Apresente alguns exemplos de mosaicos não regulares para a turma e pergunte em que situações cotidianas eles já viram um. Depois, apresente os conceitos e peça que respondam às questões propostas no primeiro item. Espera-se que eles respondam de maneira afirmativa a ambas as questões e que justifiquem usando os conhecimentos prévios que têm sobre as medidas das aberturas dos ângulos internos de quadrados e triângulos equiláteros e sobre divisibilidade. Você pode ampliar a proposta deste item e pedir que representem mosaicos formados por quadrados e por triângulos equiláteros em uma folha de papel.



Para responder à questão do segundo item, eles devem determinar a medida das aberturas dos ângulos internos de um pentágono regular. Deixe-os à vontade para utilizar a estratégia que julgarem mais conveniente. Depois de um tempo, oriente-os a decompor o polígono em triângulos. Espera-se que eles consigam concluir que as medidas das aberturas dos ângulos internos de um pentágono regular é 108°. Como 108 não é divisor de 360, eles também devem concluir que não é possível construir um mosaico regular somente com pentágonos regulares. Para exemplificar esta impossibilidade, reproduza a seguinte figura para eles:



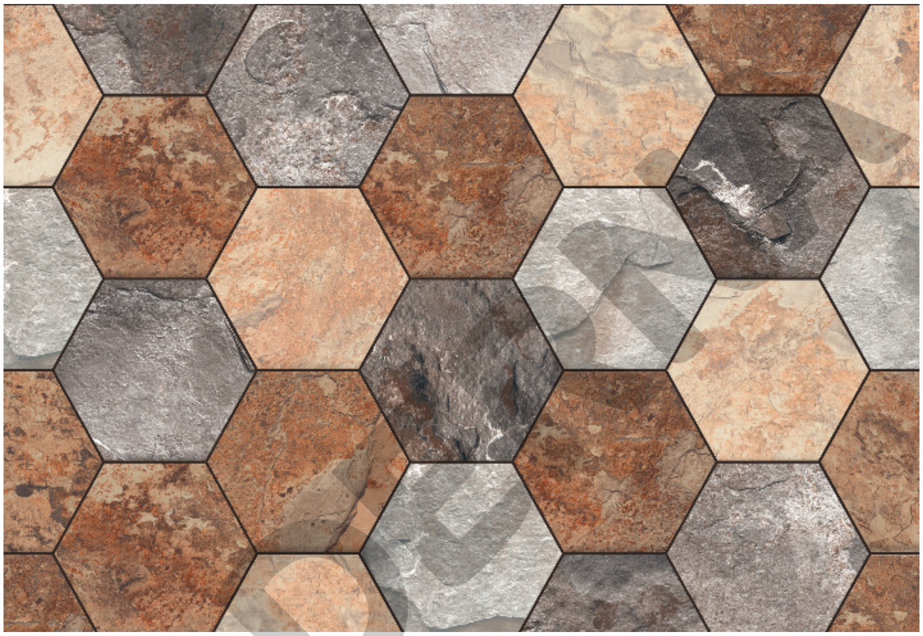
ILUSTRAÇÕES: ORACIART/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo 9

Polígonos regulares

Trocando ideias

Os mosaicos são composições feitas com peças que se encaixam lado a lado. Eles costumam apresentar um padrão e podem ser encontrados em pisos, calçadas ou paredes.



YOZE/SHUTTERSTOCK

As peças do mosaico acima se parecem com hexágonos regulares, ou seja, hexágonos em que todos os lados têm a mesma medida de comprimento e todos os ângulos internos são congruentes. Esse mosaico é um exemplo de mosaico regular, pois suas peças se parecem com um só tipo de polígono regular.

Para a construção de mosaicos com peças que se parecem apenas com um tipo de polígono regular, é preciso que o número que expressa a medida da abertura do ângulo interno desse polígono seja um divisor de 360.

- É possível formar um mosaico em que todas as peças sejam iguais e quadradas? E um mosaico em que todas as peças sejam iguais e o formato delas seja de um triângulo equilátero? Por quê?
- É possível formar um mosaico em que todas as peças sejam iguais e o formato delas seja de um pentágono regular? Por quê? Converse com os colegas.

Neste capítulo, vamos estudar os **polígonos regulares**.

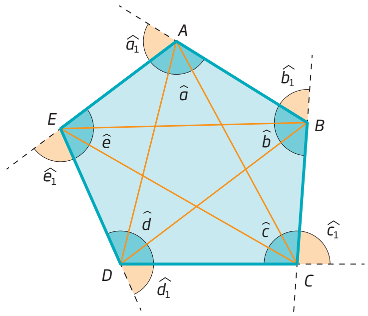
234

Trocando ideias: primeiro item: sim, porque as aberturas dos ângulos internos de um quadrado medem 90°, as aberturas dos ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60° e 90 e 60 são divisores de 360; segundo item: não, porque as aberturas dos ângulos internos de um pentágono regular medem 108° e 108 não é divisor de 360.

As competências gerais **2** e **9** da BNCC têm o seu desenvolvimento favorecido, pois as atividades propostas estimulam a curiosidade e o exercício da empatia. As competências específicas **2**, **3** e **8** também se desenvolvem por meio das atividades propostas, porque despertam o espírito de investigação, mobilizam conceitos de unidades temáticas diferentes (Geometria e Números) e promovem a interação entre os pares.

1 Polígonos

Um **polígono** é uma figura plana, definida por uma linha poligonal, fechada e simples com sua região interna.



Observe este polígono *ABCDE*. Podemos destacar os seguintes elementos desse polígono:

- **lados**: segmentos de reta que formam o contorno do polígono;

  $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$

- **vértices**: pontos de encontro de dois lados consecutivos;

  A, *B*, *C*, *D*, *E*

- **diagonais**: segmentos de reta cujas extremidades são dois vértices não consecutivos;

  $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$

- **ângulos internos**: ângulos formados por dois lados consecutivos;

  $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{d}$, $\hat{e}$

- **ângulos externos**: ângulos formados por um lado do polígono e pelo prolongamento do lado consecutivo a ele.

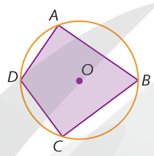
  $\hat{a}_1$, $\hat{b}_1$, $\hat{c}_1$, $\hat{d}_1$, $\hat{e}_1$

Balão de fala: sim

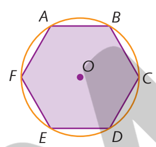
GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência

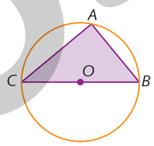
Um polígono está inscrito em uma circunferência quando todos os vértices são pontos dessa circunferência. Observe os exemplos.



quadrilátero inscrito em uma circunferência



hexágono inscrito em uma circunferência



triângulo inscrito em uma circunferência

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Podemos dizer que os polígonos estão **inscritos** nas circunferências ou que as circunferências **circunscrevem** os polígonos.

Neste tópico, relembramos a definição de polígono e destacamos seus elementos. Se considerar adequado, desenhe diferentes polígonos na lousa e solicite a diferentes estudantes que identifiquem alguns elementos desses polígonos. Essa atividade permitirá a verificação de eventuais dificuldades e dúvidas que ainda possam surgir em relação a esse assunto.

Polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência

Após apresentar os conceitos, peça aos estudantes que representem, no caderno, polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência. Depois, peça que compartilhem suas representações com um colega. Caso seja possível, você também pode propor que estas representações sejam feitas no GeoGebra.

Polígonos

Objetivos:

- Recordar o conceito de polígono.
- Reconhecer polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência.

Justificativa

Recordar o conceito de polígono é importante para iniciar, no tópico seguinte, o estudo sobre polígonos regulares. Reconhecer polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência é pertinente, pois todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência; além disso, triângulos inscritos em uma circunferência que têm um lado coincidente com o diâmetro e quadriláteros inscritos apresentam propriedades específicas que podem auxiliar na resolução de diferentes problemas.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes: "O que é um polígono?". Em seguida, peça que representem alguns polígonos no caderno. Depois, represente na lousa polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência e solicite que respondam às seguintes questões: "Como podemos definir polígono inscrito em uma circunferência? E polígono circunscrito?". Registre as respostas dos estudantes na lousa.

Para as aulas iniciais

Analise com a turma todas as respostas registradas na dinâmica inicial e tentem chegar a um consenso de qual seria a definição mais adequada para polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência. Depois, se possível, leve-os para a sala de informática da escola (se houver uma) e oriente-os a realizar a seguinte tarefa investigativa no GeoGebra:

1º) construam circunferências com diferentes medidas de comprimento de raio;

2º) tracem um diâmetro de cada circunferência construída;

3º) construam um triângulo inscrito em cada uma dessas circunferências de modo que os vértices sejam um ponto qualquer da circunferência e as extremidades do diâmetro;

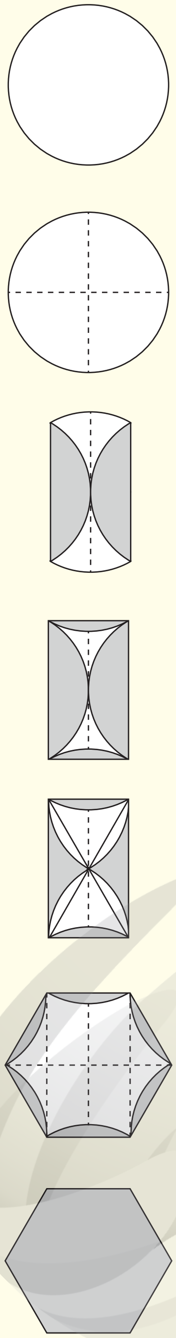
4º) utilizem as ferramentas do GeoGebra e classifiquem o triângulo construído quanto à medida das aberturas dos ângulos internos.

Espera-se que eles percebam que os triângulos inscritos construídos são triângulos retângulos.

Você também pode orientá-los a investigar a propriedade de que os ângulos opostos de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência são suplementares.

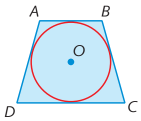
Sugestão de atividade extra

Proponha aos estudantes que obtenham um modelo de hexágono regular, por meio de dobraduras, a partir de uma folha de papel de formato circular, conforme indica a sequência de figuras abaixo.

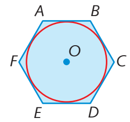


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

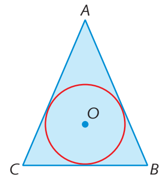
Um polígono está circunscrito a uma circunferência quando todos os lados são tangentes à circunferência. Analise os exemplos.



quadrilátero circunscrito a uma circunferência



hexágono circunscrito a uma circunferência



triângulo circunscrito a uma circunferência

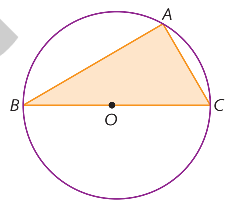
Nesse caso, podemos dizer que os polígonos estão **circunscritos** às circunferências ou que as circunferências estão **inscritas** nos polígonos.

Temos as seguintes propriedades para alguns polígonos inscritos em uma circunferência:

1ª propriedade

Todo **triângulo inscrito** em uma circunferência que tem um lado coincidente com o diâmetro da circunferência é retângulo.

Dado um $\triangle ABC$ qualquer inscrito em uma circunferência, como o da figura, em que $\overline{BC}$ é o lado do $\triangle ABC$ que coincide com o diâmetro da circunferência, temos:



$\overline{BC}$: diâmetro da circunferência

$$\text{med}(\hat{A}) = \frac{\text{med}(B\hat{O}C)}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

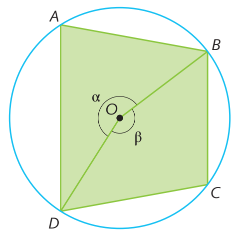
Assim: $\text{med}(\hat{A}) = 90°$

Portanto, o $\triangle ABC$ é retângulo.

2ª propriedade

Os ângulos opostos de um **quadrilátero convexo inscrito** em uma circunferência são suplementares.

Dado um quadrilátero convexo $ABCD$ qualquer inscrito em uma circunferência, conforme indicado na figura, temos:



$\hat{A}$ e $\hat{C}$, $\hat{B}$ e $\hat{D}$: pares de ângulos opostos

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

$$\text{med}(\hat{A}) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BCD})}{2} = \frac{\beta}{2} \text{ e } \text{med}(\hat{C}) = \frac{\text{med}(\overset{\frown}{BAD})}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$$

Por analogia: $\text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{D}) = 180°$

Logo:

$$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{C}) = \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{D}) = 180°$$

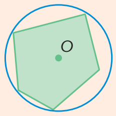
236

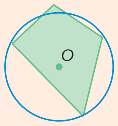
As propriedades apresentadas nesta página favorecem o desenvolvimento de diferentes tipos de **raciocínio lógico-matemático** como a dedução e a analogia.

Atividades

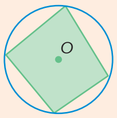
Faça as atividades no caderno.

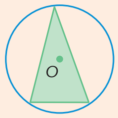
1 Identifique os itens que apresentam um polígono inscrito em uma circunferência.

a) 

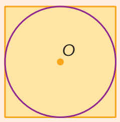
c) 

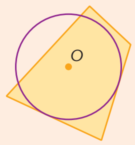
1. itens **b**, **d**

b) 

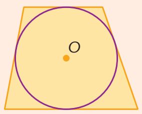
d) 

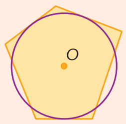
2 Identifique os itens que apresentam um polígono circunscrito à circunferência.

a) 

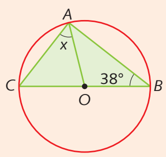
c) 

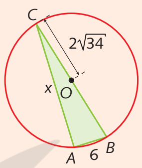
2. itens **a**, **b**

b) 

d) 

3 Sabendo que O é o centro das circunferências, determine o valor de x nas figuras.

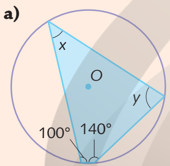
a) 

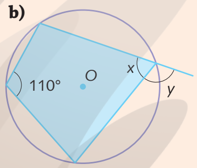
b) 

3. a) $x = 52°$

3. b) $x = 2\sqrt{127}$

4 Determine as medidas x e y das aberturas dos ângulos nas figuras.

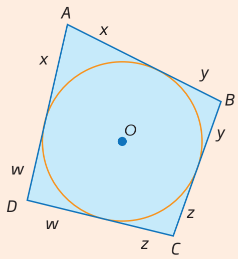
a) 

b) 

4. a) $x = 40°$; $y = 80°$ 4. b) $x = 70°$; $y = 110°$

5 Reúna-se com um colega, observem o quadrilátero $ABCD$ circunscrito a uma circunferência e façam no caderno o que se pede.

Considere que x, y, z e w são as medidas de comprimento dos segmentos de reta com uma extremidade no vértice do quadrilátero e a outra extremidade no ponto de tangência do quadrilátero com a circunferência.



a) Escrevam as medidas de comprimento de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

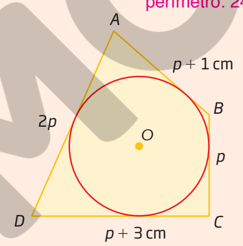
5. a) respectivamente $x + y$, $y + z$, $z + w$, $w + x$

b) Escrevam a soma das medidas de comprimento de $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. 5. b) $x + y + z + w$

c) Escrevam a soma das medidas de comprimento de $\overline{BC}$ e $\overline{DA}$. 5. c) $y + z + w + x$

d) O que vocês podem concluir sobre as somas das medidas de comprimento dos lados opostos de um quadrilátero circunscritível? 5. d) As somas das medidas de comprimento dos lados opostos são iguais.

6 O quadrilátero $ABCD$ está circunscrito a uma circunferência. Determine a medida de comprimento p e a medida de perímetro desse quadrilátero. 6. $p = 4$ cm; medida de perímetro: 24 cm



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

- Na **atividade 5**, os estudantes devem relembrar a seguinte propriedade: a soma das medidas dos comprimentos de dois lados opostos de um quadrilátero circunscritível a uma circunferência é igual à soma das medidas dos comprimentos dos outros dois. Caso considere necessário, relembre com eles a demonstração que foi apresentada na página 221 deste volume.
- Para determinar a medida de comprimento p na **atividade 6**, os estudantes deverão considerar o que observaram na **atividade 5**. Desse modo, temos:

$$(p + 1\text{ cm}) + (p + 3\text{ cm}) = 2p + p$$
$$2p + 4\text{ cm} = 3p$$
$$p = 4\text{ cm}$$

237

Polígonos regulares

BNCC:
EF09MA15.

Objetivos:

• Compreender o conceito de polígono regular.

• Construir polígonos regulares com régua e compasso.

Justificativa

A compreensão do conceito de polígono regular é importante, pois possibilita aos estudantes mobilizar o conceito de polígono e o reconhecimento de segmentos de reta e ângulos congruentes. Além disso, essa compreensão auxilia a interpretar, do ponto de vista matemático, alguns mosaicos presentes no cotidiano.

A construção de polígonos regulares com régua e compasso, por sua vez, permite aos estudantes colocar em prática o fato de que todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência, o reconhecimento de circunferência secantes e o conceito de mediatriz. Construir esses polígonos também favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15**.

Mapeando conhecimentos

Pergunte aos estudantes: "O que é um polígono regular?". Em seguida, peça que representem em uma folha de papel alguns polígonos regulares utilizando estratégias pessoais.

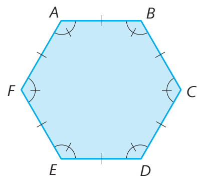
Depois, reproduza as **atividades 22** a **25** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e peça aos estudantes que façam em duplas. Essas atividades permitem mapear os conhecimentos previamente adquiridos sobre as medidas das aberturas dos ângulos internos, externos e central de polígonos regulares.

Para as aulas iniciais

Defina polígonos regulares para os estudantes e peça que verifiquem se os polígonos representados por um colega são ou não regulares. Depois, faça a leitura coletiva das revisões sobre medidas das aberturas do ângulo interno e do ângulo externo de um polígono regular e também sobre o ângulo central, presentes na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Por fim, explore as **atividades 22** a **25** com a turma e esclareça as dúvidas remanescentes.

2 Polígonos regulares

Um **polígono regular** é o polígono em que todos os lados têm a mesma medida de comprimento e todos os ângulos internos são congruentes, ou seja, quando o polígono é **equiângulo** e **equilátero**.



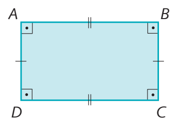
Observe o hexágono *ABCDEF*. Esse polígono é regular, pois tem todos os lados congruentes e todos os ângulos congruentes, ou seja:

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$$

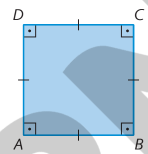
$$\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E} \cong \hat{F}$$

Observações

1. Os ângulos de um retângulo são todos congruentes, mas não podemos afirmar que seus lados são sempre congruentes. Logo, o retângulo é um polígono regular quando também for um quadrado.

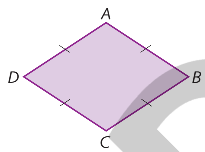


retângulo

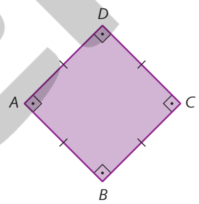


quadrado (quadrilátero regular)

2. Os lados de um losango são todos congruentes, mas não podemos afirmar que seus ângulos são sempre congruentes. Logo, o losango é um polígono regular quando também for um quadrado.



losango



quadrado (quadrilátero regular)

Propriedades dos polígonos regulares

1ª propriedade

Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.

Para inscrever um polígono regular de *n* lados ($n > 2$) em uma circunferência, basta dividi-la em *n* arcos congruentes e traçar todos os segmentos de reta que tenham como extremidades dois pontos consecutivos obtidos nessa divisão, determinando, assim, os lados do polígono.

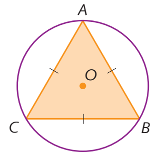
Relembre aos estudantes que, quando marcamos os ângulos ou os lados de um polígono com a mesma quantidade de tracinhos, queremos dizer que eles têm a mesma medida.

Propriedades dos polígonos regulares

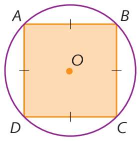
Se possível, solicite aos estudantes que verifiquem as propriedades dos polígonos regulares utilizando o GeoGebra.

(EF09MA15) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.

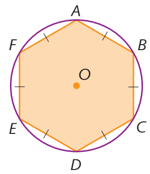
Considere os exemplos.



triângulo regular inscrito em uma circunferência



quadrilátero regular inscrito em uma circunferência



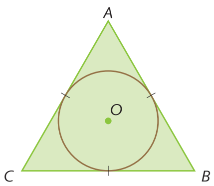
hexágono regular inscrito em uma circunferência

2ª propriedade

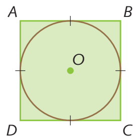
Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.

Para circunscrever um polígono regular de n lados ($n > 2$) a uma circunferência, basta dividi-la em n arcos congruentes e traçar as tangentes nos pontos de divisão.

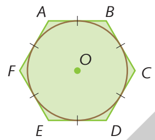
Confira os exemplos.



triângulo regular circunscrito à circunferência



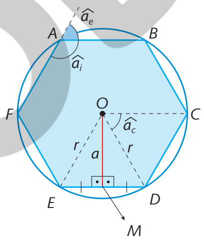
quadrilátero regular circunscrito à circunferência



hexágono regular circunscrito à circunferência

Elementos de um polígono regular

Vamos identificar os elementos de um polígono regular. Analise a figura.



- O ponto O é o **centro do polígono** e corresponde ao centro da circunferência circunscrita ao polígono.
- O raio da circunferência circunscrita (de medida de comprimento r) é o **raio do polígono**: $\overline{OC}$, $\overline{OD}$, $\overline{OE}$.
- O segmento de reta cujas extremidades são o centro e o ponto médio de qualquer lado do polígono é um **apótema do polígono**: $\overline{OM}$, sendo M o ponto médio de $\overline{DE}$ e $OM = a$.
- O ângulo que tem o vértice no centro e cujos lados contêm vértices consecutivos do polígono é um **ângulo central** ($\hat{a}_c$): $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $B\hat{O}C$, $A\hat{O}B$, $A\hat{O}F$, $F\hat{O}E$.
- O ângulo formado por dois lados consecutivos do polígono é um **ângulo interno** ($\hat{a}_i$).
- O **ângulo externo** ($\hat{a}_e$) é o suplemento do ângulo interno correspondente, ou seja: $a_i + a_e = 180°$.

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Elementos de um polígono regular

Chame a atenção dos estudantes para o fato de que a medida do comprimento do apótema corresponde à medida do comprimento do raio da circunferência inscrita no polígono regular correspondente.

Ressalte aos estudantes que o centro de uma circunferência inscrita também coincide com o centro do polígono regular.

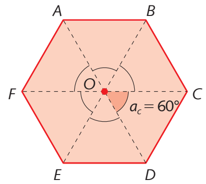
Se tiver oportunidade, antes de trabalhar a determinação da medida da abertura do ângulo central e a dos ângulos internos e externos de um polígono regular a partir do número de lados, proponha aos estudantes que construam alguns polígonos regulares em um *software* de Geometria dinâmica, meçam as aberturas dos ângulos central, internos e externos e investiguem a relação existente entre essas medidas e o número de lados do polígono.

Vamos relembrar como determinar as medidas das aberturas dos ângulos central, interno e externo de um polígono regular.

- **Ângulo central**

A soma das medidas das aberturas dos ângulos centrais de um polígono regular é 360°, ou seja, corresponde a uma volta completa. Logo, em um polígono regular de n lados, a medida da abertura do ângulo central é:

$$\boxed{a_c = \frac{360°}{n}}$$



No hexágono *ABCDEF*, a abertura do ângulo central mede 60°, pois:

$$a_c = \frac{360°}{6} = 60°$$

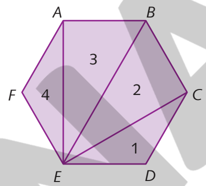
- **Ângulo interno**

A partir de um único vértice, podemos decompor um polígono em triângulos e verificar que o número de triângulos é duas unidades menor que o número de lados. Como a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, podemos afirmar que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos (S_i) de um polígono de n lados corresponde a:

$$\boldsymbol{S_i = (n - 2) \cdot 180°}$$

Assim, em um polígono regular de n lados, a medida da abertura do ângulo interno é:

$$\boxed{a_i = \frac{(n - 2) \cdot 180°}{n}}$$



No hexágono *ABCDEF*, a abertura do ângulo interno mede 120°, pois:

$$a_i = \frac{(6 - 2) \cdot 180°}{6} = 120°$$

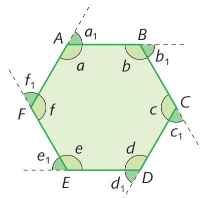
- **Ângulo externo**

Como em um polígono o ângulo externo e o ângulo interno são suplementares, temos:

- $a + a_1 = 180°$
- $c + c_1 = 180°$
- $e + e_1 = 180°$
- $b + b_1 = 180°$
- $d + d_1 = 180°$
- $f + f_1 = 180°$

Calculando a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos e externos, temos:

$$\underbrace{a + b + c + d + e + f}_{\text{soma das medidas das aberturas dos ângulos internos } (S_i)} + \underbrace{a_1 + b_1 + c_1 + d_1 + e_1 + f_1}_{\text{soma das medidas das aberturas dos ângulos externos } (S_e)} = \underbrace{6}_{\text{número de lados do polígono regular } (n)} \cdot 180°$$



No hexágono *ABCDEF*, a abertura do ângulo externo mede 60°, pois:

$$a_e = \frac{360°}{6} = 60°$$

Então, em um polígono regular de n lados:

$$S_i + S_e = n \cdot 180° \Rightarrow (n - 2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n \cdot 180° - 360° + S_e = n \cdot 180° \;\Rightarrow\; \boldsymbol{S_e = 360°}$$

Assim, em um polígono regular de n lados, a medida da abertura do ângulo externo é:

$$\boxed{a_e = \frac{360°}{n}}$$

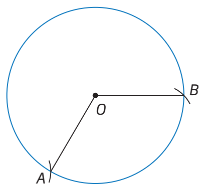
ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Construção de polígonos regulares com régua e compasso

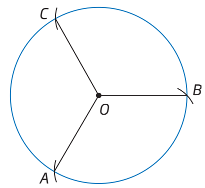
Podemos construir alguns polígonos regulares a partir do seu ângulo central, como a construção de um triângulo equilátero.

Construção de um triângulo equilátero

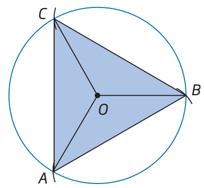
1º) Traçamos uma circunferência qualquer e construímos um ângulo central de medida de abertura de 120°, marcando, na circunferência, os pontos *A* e *B*.



2º) Construímos outro ângulo central de mesma medida de abertura, adjacente ao primeiro, ao redor da circunferência, marcando o ponto *C*.



3º) Unimos os pontos *A*, *B* e *C* com segmentos de reta e obtemos o $\triangle ABC$.



Note que, nessa construção, o polígono obtido está inscrito em uma circunferência.

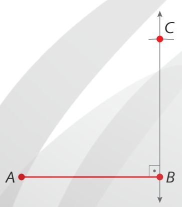
Podemos construir outros polígonos regulares a partir do ângulo central, mas também podemos construir polígonos regulares a partir de um de seus lados.

Acompanhe, a seguir, a construção de um quadrado a partir de um de seus lados.

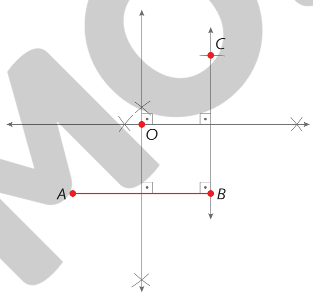
Construção de um quadrado

A partir do segmento de reta $\overline{AB}$ dado, vamos construir um quadrado considerando esse segmento de reta como um de seus lados.

1º) Construímos uma reta perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$, passando por *B*, e, com o auxílio de um compasso, transportamos a medida de comprimento de $\overline{AB}$ para a reta perpendicular, marcando o ponto *C*.



2º) Construímos as mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e marcamos na intersecção das duas retas o ponto *O*.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

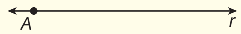
241

Construção de polígonos regulares com régua e compasso

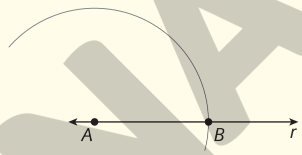
Antes de iniciar as construções, alerte os estudantes a tomar os devidos cuidados com o manuseio do compasso a fim de evitar acidentes.

Para construir um ângulo cuja abertura mede 120°, é possível seguir os passos abaixo:

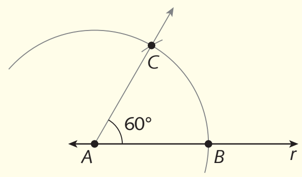
- Trace uma reta *r* qualquer e determine um ponto *A* nessa reta.



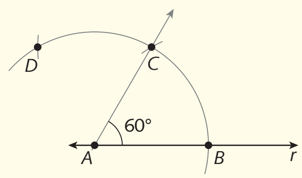
- Com a ponta-seca do compasso centrada em *A*, trace um arco que intersecte a reta *r*. Vamos indicar por *B* o ponto de intersecção.



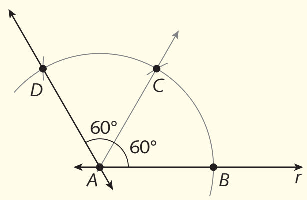
- Com a mesma abertura no compasso, centre a ponta-seca no ponto *B* e trace um novo arco que cruze o arco já representado. Vamos indicar por *C* esse ponto de intersecção. Traçamos a semirreta $\overrightarrow{AC}$. Dessa forma, obtemos o ângulo $B\hat{A}C$ de medida de abertura igual a 60°.



- Mantendo a mesma abertura no compasso, centre a ponta-seca em *C* e trace um novo arco que cruze o arco inicial em um novo ponto que indicaremos por *D*.



- Por fim, trace uma reta que passe pelos pontos *A* e *D*, obtendo o ângulo $B\hat{A}D$ cuja abertura mede 120°.



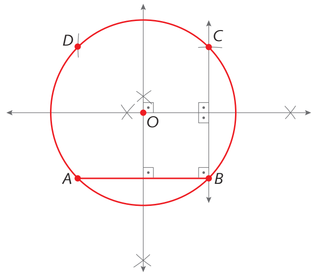
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Peça aos estudantes que construam, no caderno, um quadrado com o auxílio de régua e compasso. Aproveite esse momento para verificar se eles têm dificuldade no manuseio do compasso e auxilie-os quando necessário. Oriente-os a tomar os devidos cuidados ao manusear o compasso.

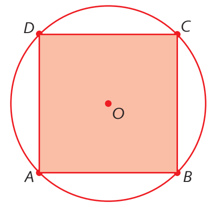
Após construírem o quadrado, peça que verifiquem com uma régua que as medidas dos comprimentos dos lados são iguais e, com um transferidor, que a medida de abertura de cada ângulo interno é igual a 90º.

Peça que construam um polígono regular utilizando o algoritmo fornecido. Caso tenham dificuldade, relembre-os de como se constroem alguns ângulos utilizando apenas régua e compasso.

3º) Construímos uma circunferência de centro em O e raio $\overline{AO}$ e, a partir do ponto C, transportamos a medida de comprimento do lado do quadrado, marcando o ponto D.



4º) Traçamos os segmentos de reta $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$ determinando, assim, o quadrado $ABCD$.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que o quadrado construído está inscrito em uma circunferência de centro O, obtido a partir do encontro das mediatrizes de dois lados do polígono.

Observação

O encontro das mediatrizes dos lados de um polígono é o circuncentro do polígono, centro da circunferência circunscrita a ele.

Construção de um polígono regular de *n* lados

Analise os passos descritos no esquema para construir polígonos regulares a partir de um lado conhecido.

- Número de lados do polígono (n, com $n > 2$)
- Um lado do polígono

↓

Determinar a medida da abertura de um ângulo interno (ou externo) do polígono e construir esse ângulo em uma das extremidades do lado fornecido.

↓

Transportar a medida de comprimento do lado fornecido para o lado do ângulo interno (ou externo) construído.

↓

Determinar o circuncentro do polígono, construindo as mediatrizes dos dois lados já construídos.

↓

Construir a circunferência circunscrita ao polígono.

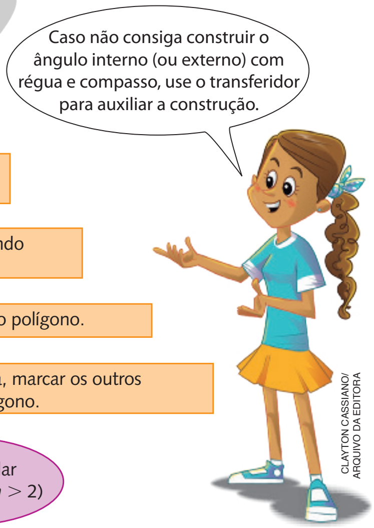
↓

Na circunferência circunscrita, marcar os outros vértices do polígono.

↓

- Polígono regular com n lados ($n > 2$)

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

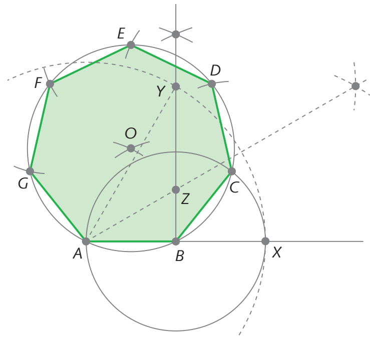


CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

Desenhar um polígono regular com régua e compasso significa obtê-lo com o auxílio de intersecções feitas por segmentos de reta e circunferências desenhados com esses instrumentos.

O matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) provou que nem todo polígono regular pode ser desenhado com régua e compasso, como é o caso do heptágono regular. O que podemos obter é uma boa aproximação para esse polígono, que pode ser utilizada dependendo do objetivo. Observe uma aproximação dessa construção.



Atividades

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso nas atividades **8** e **15**.

Faça as atividades no caderno.

7 Quais das afirmações são verdadeiras?

a) Todo polígono regular é inscritível e circunscritível a uma circunferência.

b) Denomina-se equiângulo um polígono que tem todos os ângulos congruentes.

c) O retângulo é um polígono regular.

d) Denomina-se equilátero um polígono que tem todos os lados congruentes.

7. alternativas **a**, **b**, **d**

8 Desenhe, em seu caderno, um polígono regular qualquer, identificando:

a) o centro do polígono;

b) um ângulo central;

c) um raio;

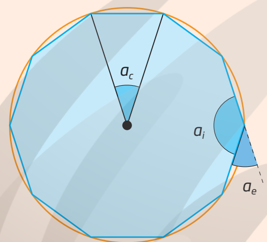
d) um ângulo interno;

e) um apótema;

f) um ângulo externo.

8. Exemplo de resposta em *Orientações*.

9 Calcule as medidas das aberturas do ângulo central, do ângulo interno e do ângulo externo do decágono regular.



9. $a_c = 36°$; $a_i = 144°$; $a_e = 36°$

10 Calcule as medidas das aberturas do ângulo central, do ângulo interno e do ângulo externo do: **10. a)** $a_c = 120°$; $a_i = 60°$; $a_e = 120°$

a) triângulo equilátero;

b) quadrado; **10. b)** $a_c = 90°$; $a_i = 90°$; $a_e = 90°$

c) hexágono regular.

10. c) $a_c = 60°$; $a_i = 120°$; $a_e = 60°$

11 Determine o polígono regular cujas aberturas dos ângulos centrais medem:

a) 36°; **11. a)** decágono

b) 40°; **11. b)** eneágono

c) 60°; **11. c)** hexágono

d) 90°; **11. d)** quadrado

e) 120°. **11. e)** triângulo equilátero

12 Quantos lados tem um polígono regular cujas aberturas dos ângulos externos medem 24°? **12.** 15 lados

13 A abertura do ângulo interno de um polígono regular mede 135°. Quanto mede a abertura do ângulo externo? Qual é esse polígono? **13.** $a_e = 45°$; octógono

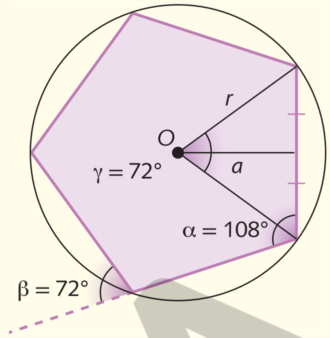
14 A soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono regular é 1 440°. Quanto mede a abertura do ângulo externo desse polígono? **14.** 36°

15 Trace um segmento de reta medindo 3 cm de comprimento e, a partir dele, desenhe um triângulo equilátero.

15. Exemplo de resposta em *Orientações*.

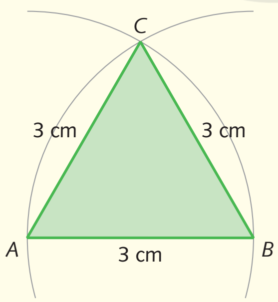
- Após a realização da **atividade 8**, solicite aos estudantes que compartilhem o polígono regular representado com um colega, para que ambos possam conferir se os elementos identificados estão corretos.

Exemplo de resposta da **atividade 8**:



- Na **atividade 15**, verifique se os estudantes lembram da soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um triângulo e, também, que cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60° de abertura. Se julgar necessário, retome a construção do ângulo de 120°, pois ela foi feita com base na construção do ângulo de 60°.

- Exemplo de resposta da **atividade 15**:



- No **item c** da **atividade 16**, caso os estudantes não tenham acesso ao *software* indicado, pergunte quais seriam os comandos necessários para a construção do polígono regular. Desse modo, eles devem indicar que o processo precisa ser repetido 24 vezes, e que a medida da distância pode variar, mas o giro deve ser de 15° no sentido horário.

Relações métricas nos polígonos regulares

Objetivo:

Compreender as relações métricas nos polígonos regulares.

Justificativa

Compreender as relações métricas nos polígonos regulares é importante, uma vez que permite resolver diversos problemas e mobilizar conceitos como o de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência, semelhança de figuras e o de razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Mapeando conhecimentos

Crie um circuito de estações dentro da sala de aula. Cada uma das estações deve propor uma atividade diferente sobre relações métricas nos polígonos regulares.

Cada grupo vai começar em uma estação diferente e circular a partir dela. A ideia é que os grupos cumpram as tarefas isoladamente. Se a turma estiver organizada em 4 grupos, você poderá propor as seguintes estações:

Estação 1: Analisar a figura de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência.

Estação 2: Analisar a figura de um quadrado inscrito em uma circunferência.

Estação 3: Analisar a figura de um hexágono regular inscrito em uma circunferência.

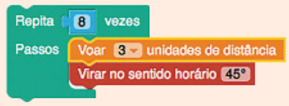
Nas estações 1, 2 e 3 os grupos deverão encontrar a relação entre a medida do comprimento do lado do polígono inscrito e a medida do comprimento do raio e, também, a relação entre a medida do comprimento do apótema e a medida do comprimento do raio.

Estação 4: Analisar a figura de uma circunferência e um hexágono regular inscrito e outro circunscrito a ela. Depois, encontrar a relação entre as medidas dos comprimentos dos lados dos dois hexágonos e dos apótemas de cada um.

Em cada estação, incentive os grupos a trocar ideias, estabelecer conjecturas e argumentar com base no que já estudaram.

© WILLIAN SILVA/HUMOR COM CIÊNCIA

16 A figura mostra um bloco de comandos realizado no TucaProg (*software* de programação visual).



Observe os comandos e responda às questões.

a) Esse bloco de comandos dá origem a qual polígono regular? **16. a)** octógono regular

b) Em um polígono regular temos o ângulo central, o ângulo interno e o ângulo externo. Qual deles está representado no comando "Virar no sentido horário 45°"? **16. b)** ângulo externo

c) Utilize o TucaProg para construir um tetracoságono regular (polígono com 24 lados).

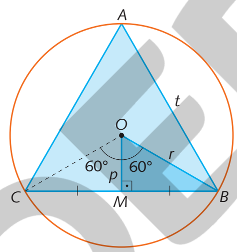
16. c) Comentário em *Orientações*.

3 Relações métricas nos polígonos regulares

Vamos estudar as relações entre as medidas de comprimento do lado, do apótema de um polígono regular e do raio da circunferência em que o polígono está inscrito.

Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência

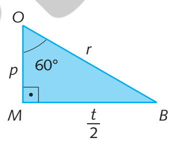
No $\triangle ABC$, temos:



- t: medida de comprimento do lado do triângulo ABC;
- p: medida de comprimento do apótema do triângulo ABC (OM);
- r: medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC;
- $a_c = \dfrac{360°}{3} = 120°$.

medida da abertura do ângulo central $B\hat{O}C$

Agora, considerando o triângulo OMB, determinamos as relações:



$$\text{sen } 60° = \frac{\frac{t}{2}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{t}{2r} \Rightarrow \boxed{t = r\sqrt{3}}$$

$$\cos 60° = \frac{p}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{p}{r} \Rightarrow \boxed{p = \frac{r}{2}}$$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Para as aulas iniciais

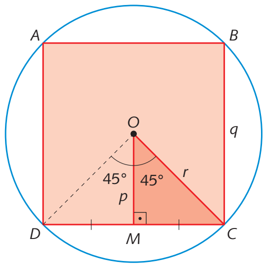
Converse com a turma sobre como procederam para realizar as tarefas propostas em cada estação e as dificuldades apresentadas. Depois, faça um resumo no quadro das relações métricas que conseguiram deduzir. Caso ache pertinente, proponha que verifiquem a validade dessas relações utilizando o GeoGebra.

Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência

Proponha aos estudantes que representem, em uma folha de papel, um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência e verifiquem a validade das relações métricas estudadas com o auxílio de uma régua. Oriente-os a tomar os devidos cuidados ao manusear o compasso.

Quadrado inscrito em uma circunferência

No quadrado *ABCD*, temos:

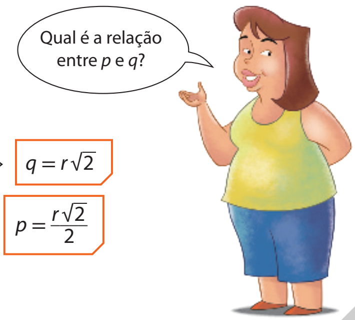


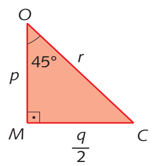
- q: medida de comprimento do lado do quadrado *ABCD*;
- p: medida de comprimento do apótema do quadrado *ABCD* (*OM*);
- r: medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao quadrado *ABCD*;
- $a_c = \dfrac{360°}{4} = 90°$.

  a_c: medida da abertura do ângulo central $C\hat{O}D$

Balão de fala: *p* é metade de *q*.

Agora, considerando o triângulo *OMC*, determinamos as relações:





$$\text{sen } 45° = \frac{\frac{q}{2}}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{q}{2r} \Rightarrow \boxed{q = r\sqrt{2}}$$

$$\cos 45° = \frac{p}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{p}{r} \Rightarrow \boxed{p = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

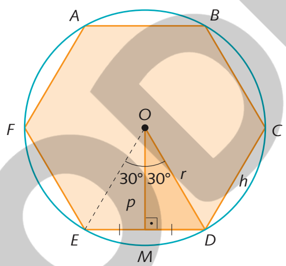
GEORGE TUTUMI/ARQUIVO DA EDITORA

Hexágono regular inscrito em uma circunferência

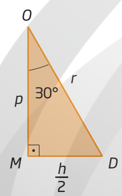
No hexágono *ABCDEF*, temos:

- h: medida de comprimento do lado do hexágono;
- p: medida de comprimento do apótema do hexágono;
- r: medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao hexágono;
- $a_c = \dfrac{360°}{6} = 60°$.

  a_c: medida da abertura do ângulo central $D\hat{O}E$



Considerando o triângulo *OMD*, determinamos as relações:



$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{h}{2}}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{2r} \Rightarrow \boxed{h = r}$$

$$\cos 30° = \frac{p}{r} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{p}{r} \Rightarrow \boxed{p = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

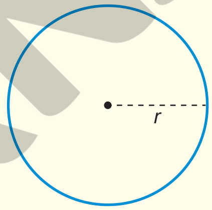
Quadrado inscrito em uma circunferência

É comum que as razões trigonométricas representem um obstáculo ao processo de aprendizagem de alguns tópicos de Geometria para os estudantes. Verifique se eles, de fato, compreenderam cada uma das razões e, se julgar necessário, retome os valores dessas razões para os ângulos de 30°, 45°, 60° e 90°.

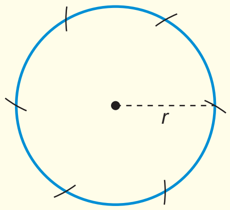
Hexágono regular inscrito em uma circunferência

Proponha aos estudantes que representem, em uma folha de papel, um hexágono regular inscrito em uma circunferência. Você pode orientá-los a fazer isso sem o uso do transferidor seguindo os seguintes passos:

1º) Peça para que tracem com o compasso uma circunferência com raio de medida de comprimento *r*.

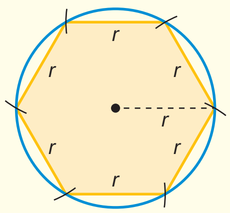


2º) Com a mesma abertura do compasso, solicite que dividam a circunferência em 6 arcos com a mesma medida.



Durante a realização do 1º e 2º passos, oriente os estudantes a tomar os devidos cuidados ao manusear o compasso.

3º) Peça que liguem os pontos obtidos e pintem o interior da figura, construindo um hexágono regular com lados de medida de comprimento *r*.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Após finalizarem a representação, solicite que verifiquem a validade das relações métricas estudadas com o auxílio de uma régua.

Ao trabalhar os exemplos e as atividades deste tópico, chame a atenção dos estudantes para o fato de que, caso não se lembrem das fórmulas, eles poderão resolver os problemas utilizando métodos alternativos, como a aplicação do teorema de Pitágoras e das razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Confira estes exemplos.

a) Vamos determinar as medidas de comprimento do lado (*q*) e do apótema (*p*) de um quadrado inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 10 cm.

$$q = r\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$p = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Portanto, o comprimento do lado mede $10\sqrt{2}$ cm e o comprimento do apótema mede $5\sqrt{2}$ cm.

b) Vamos determinar as medidas de comprimento do lado (*t*) e do apótema (*p*) de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 12 cm.

$$t = r\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

$$p = \frac{r}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Portanto, o comprimento do lado mede $12\sqrt{3}$ cm e o comprimento do apótema mede 6 cm.

c) Agora, vamos determinar as medidas de comprimento do lado (*h*) e do apótema (*p*) de um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 8 cm.

$$h = r = 8$$

$$p = \frac{r\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

Portanto, o comprimento do lado mede 8 cm e o comprimento do apótema mede $4\sqrt{3}$ cm.

17. medida de comprimento do lado: $10\sqrt{2}$ cm; medida de comprimento do apótema: $5\sqrt{2}$ cm

22. medida de comprimento do lado: $8\sqrt{3}$ cm; medida de comprimento do apótema: 4 cm

Atividades

23. medida de comprimento do raio: $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ cm; medida de comprimento do apótema: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

Faça as atividades no caderno.

17 Calcule as medidas de comprimento do lado e do apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 10 cm.

18 O perímetro de um quadrado inscrito em uma circunferência mede 40 cm. Determine a medida de comprimento do raio. **18.** $5\sqrt{2}$ cm

19 O comprimento do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência mede 12 cm. Calcule a medida de comprimento:

a) do raio da circunferência que circunscreve o quadrado; **19. a)** $6\sqrt{2}$ cm

b) do apótema do quadrado. **19. b)** 6 cm

20 O comprimento do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $6\sqrt{2}$ cm. Determine a medida de comprimento do apótema desse quadrado.

20. $3\sqrt{2}$ cm

21 Um quadrado está inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 4 cm. Determine a medida:

a) de perímetro aproximado desse quadrado, usando $\sqrt{2} = 1{,}41$; **21. a)** 22,56 cm

b) da área desse quadrado. **21. b)** 32 cm²

22 Calcule as medidas de comprimento do lado e do apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 8 cm.

23 O comprimento do lado de um triângulo equilátero mede 20 cm. Determine as medidas de comprimento do raio da circunferência circunscrita e do apótema.

24 O comprimento do apótema de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência mede 6 cm. Calcule a medida de comprimento do lado desse triângulo.

24. $12\sqrt{3}$ cm

26. medida de comprimento do lado: 12 cm; medida de comprimento do apótema: $6\sqrt{3}$ cm

28. medida de comprimento do raio: 8 cm; medida de comprimento do apótema: $4\sqrt{3}$ cm

25 Calcule a medida de perímetro de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede de $10\sqrt{3}$ cm. **25.** 90 cm

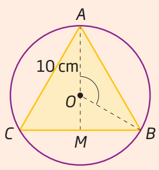
26 Calcule as medidas de comprimento do lado e do apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede 12 cm.

27 O comprimento do apótema de um hexágono regular mede $5\sqrt{3}$ cm. Determine a medida de perímetro do hexágono. **27.** 60 cm

28 O comprimento do lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede 8 cm. Calcule as medidas de comprimento do raio da circunferência e do apótema do hexágono.

29 O comprimento da maior diagonal de um hexágono regular mede $12\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida de comprimento do apótema desse hexágono. **29.** 9 cm

30 Com base no triângulo equilátero inscrito na circunferência, determine:



a) a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{AB}$; **30. a)** $10\sqrt{3}$ cm

b) a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{OM}$; **30. b)** 5 cm

c) a medida da abertura do ângulo $A\hat{O}B$; **30. c)** 120°

d) a medida de comprimento do segmento de reta $\overline{AM}$. **30. d)** 15 cm

31 O comprimento do apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $6\sqrt{3}$ cm. Determine a medida de comprimento do lado desse hexágono. **31.** 12 cm

32 O comprimento do lado de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $8\sqrt{3}$ cm. Determine a medida de comprimento do apótema do hexágono regular inscrito na mesma circunferência. **32.** $6\sqrt{2}$ cm

33 Qual é a razão entre as medidas de comprimento do lado de um hexágono regular e do lado de um quadrado, nessa ordem (os dois estão inscritos na mesma circunferência)? **33.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

34 O comprimento do apótema de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $12\sqrt{3}$ m. Determine a medida de comprimento:

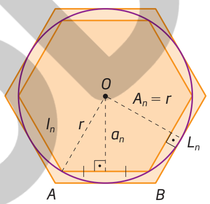
a) da diagonal do quadrado inscrito nessa circunferência; **34. a)** 48 m

b) do apótema do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência. **34. b)** 12 m

ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

Polígonos regulares circunscritos

Considere os polígonos de n lados (na figura, $n = 6$), sendo um inscrito e outro circunscrito à circunferência cujo comprimento do raio mede r. Nessa figura, temos:



- l_n: medida de comprimento do lado do polígono regular inscrito;
- a_n: medida de comprimento do apótema do polígono regular inscrito;
- L_n: medida de comprimento do lado do polígono regular circunscrito;
- A_n: medida de comprimento do apótema do polígono regular circunscrito.

Como os polígonos inscrito e circunscrito à circunferência são semelhantes, podemos estabelecer a relação:

$$\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{A_n} \xRightarrow{A_n = r} \boxed{\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{r}}$$

Acompanhe alguns exemplos.

a) Vamos calcular a medida de comprimento do lado de um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência cujo comprimento do raio mede 6 cm.

- Na **atividade 27**, é dada a medida do comprimento do apótema: $5\sqrt{3}$ cm. Sabendo que a medida do comprimento do apótema (p) do hexágono regular pode ser determinado por $p = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$5\sqrt{3}\text{ cm} = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$
$$(5\sqrt{3}\text{ cm}) \cdot 2 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \cdot 2$$
$$(10\sqrt{3}\text{ cm}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$10\text{ cm} = r$$

Como a medida do comprimento do lado do hexágono é igual à medida do comprimento do raio, a medida do perímetro do polígono é 60 cm.

Caso os estudantes tenham dificuldades de realizar as atividades propostas, comente sobre a possibilidade de fazerem um esboço de cada figura no caderno, indicando os dados fornecidos no enunciado. Esse recurso é um importante instrumento para a realização de atividades de Geometria.

Polígonos regulares circunscritos

Para estabelecer as relações, utiliza-se o fato de que o polígono regular inscrito é semelhante ao polígono regular circunscrito a uma mesma circunferência. Se achar conveniente, retome o conceito de semelhança de figuras.

247

• Na **atividade 36**, após os estudantes calcularem a medida do comprimento do lado do quadrado, peça que representem um quadrado circunscrito a uma circunferência com raio de medida de comprimento 8 cm e verifiquem se a medida do comprimento do lado do quadrado representado coincide com a medida calculada.

• Caso os estudantes apresentem dificuldades para realizar a **atividade 37**, oriente-os a fazer uma figura que traduza as informações descritas no enunciado.

• A **atividade 39** pode ser adaptada para que os estudantes utilizem papel e instrumentos de desenho (compasso e lápis) e de medida (régua e transferidor). Alerte-os sobre os cuidados necessários ao manusear o compasso a fim de evitar acidentes.

Precisamos das medidas de comprimento do apótema a_3 e do lado l_3 do triângulo equilátero inscrito nessa mesma circunferência. Utilizando as relações estudadas $a_3 = \frac{r}{2}$ e $l_3 = r\sqrt{3}$, obtemos estas medidas:

$a_3 = \frac{6}{2} = 3$ e $l_3 = 6\sqrt{3}$.

Agora, substituindo os valores na proporção $\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{r}$, temos:

$\frac{6\sqrt{3}}{L_3} = \frac{3}{6} \Rightarrow L_3 = 12\sqrt{3}$

Portanto, o comprimento do lado do triângulo circunscrito a essa circunferência mede $12\sqrt{3}$ cm.

b) Vamos calcular a medida de comprimento do lado de um quadrado circunscrito a uma circunferência cujo comprimento do raio mede 10 cm.

As medidas de comprimento do apótema a_4 e do lado l_4 do quadrado inscrito nessa mesma circunferência se relacionam com a medida de comprimento do raio:

$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$

$l_4 = r\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

Agora, substituindo os valores na proporção $\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{r}$, temos:

$\frac{10\sqrt{2}}{L_4} = \frac{5\sqrt{2}}{10} \Rightarrow L_4 = 20$

Portanto, o comprimento do lado do quadrado circunscrito a essa circunferência mede 20 cm.

Atividades

39. b) Espera-se que os estudantes identifiquem que a relação continua válida.

Faça as atividades no caderno.

35 Calcule a medida de comprimento do lado de um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência cujo comprimento do raio mede $2\sqrt{3}$ cm. **35.** 12 cm

36 Calcule a medida de comprimento do lado de um quadrado circunscrito a uma circunferência cujo comprimento do raio mede 8 cm. **36.** 16 cm

37 Calcule a medida de comprimento do lado de um hexágono regular circunscrito a uma circunferência cujo comprimento do raio mede $4\sqrt{3}$ cm. **37.** 8 cm

38 O perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $24\sqrt{3}$ cm. Calcule a medida de perímetro de um triângulo equilátero circunscrito a essa circunferência. **38.** 72 cm

39 Utilize um *software* de geometria dinâmica para realizar as construções a seguir:

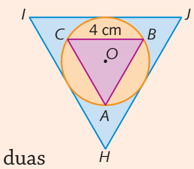
- construa um pentágono regular *ABCDE*;
- determine o centro *O* do polígono;
- construa a circunferência de raio $\overline{OA}$;
- construa um pentágono regular *FGHIJ* circunscrito à circunferência;
- construa um apótema do pentágono menor.

a) Utilizando as ferramentas do *software*, meça o comprimento dos lados dos polígonos, o comprimento do apótema do polígono menor e o comprimento do raio da circunferência. Em seguida, com o auxílio de uma calculadora, verifique a validade da relação entre essas medidas.

b) Movimente os pontos do pentágono *ABCDE* e observe o que acontece com a relação analisada no item **a**.

40 Analise a construção.

Considere que os triângulos *HIJ* e *ABC* são equiláteros e $BC = 4$ cm.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

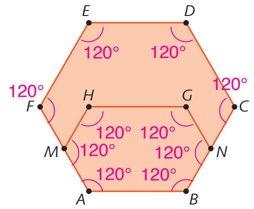
- No caderno, elabore duas questões relacionadas com a figura.
- Troque de caderno com um colega e responda às questões elaboradas por ele. Em seguida, analise as respostas do colega e dê um retorno a ele, dizendo o que ele respondeu corretamente e em que pontos ele se equivocou. **40.** Respostas pessoais.

39. a) Espera-se que os estudantes identifiquem que a relação é válida.

Resolvendo em equipe

Faça a atividade no caderno.

(Obmep) O polígono *ABCDEF* é um hexágono regular. Os pontos *M* e *N* são pontos médios dos lados $\overline{AF}$ e $\overline{BC}$, respectivamente. O hexágono *ABNGHM* é simétrico em relação à reta que passa por *M* e *N*. Qual é a razão entre as áreas dos hexágonos *ABNGHM* e *ABCDEF*?



GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

a) $\frac{3}{10}$

b) $\frac{4}{11}$

c) $\frac{3}{7}$

d) $\frac{7}{15}$

e) $\frac{5}{12}$

Resolvendo em equipe: alternativa **e**

Interpretação e identificação dos dados:
primeiro item: Resposta pessoal.
segundo item: todos os ângulos internos dos hexágonos são congruentes e suas aberturas medem 120°
terceiro item: não, pois as medidas de comprimento dos lados correspondentes não são proporcionais

Interpretação e identificação dos dados

- Analise as informações do enunciado e anote aquelas que você julgar relevantes para a resolução do problema.
- Calcule a medida das aberturas dos ângulos internos dos hexágonos *ABCDEF* e *ABNGHM*.
- Os hexágonos *ABCDEF* e *ABNGHM* são polígonos semelhantes?

Plano de resolução:
primeiro item: sim
segundo item: a medida de comprimento do lado do triângulo equilátero é metade da medida de comprimento do lado do hexágono maior
terceiro item: 10; 24

Plano de resolução

- Os hexágonos *ABCDEF* e *ABNGHM* podem ser decompostos em triângulos equiláteros congruentes?
- Qual é a relação entre a medida de comprimento do lado desses triângulos equiláteros e a medida de comprimento do lado do hexágono maior?
- Quantos triângulos equiláteros congruentes recobrem o hexágono *ABNGHM*? E quantos recobrem o hexágono *ABCDEF*?

Resolução

- Junte-se a um colega.
- Compartilhem os planos de resolução.
- Discutam as diferenças e as semelhanças entre os planos e escolham um para a execução do processo de resolução.

  Observação

  Resolvam o problema de maneira coletiva, mas façam o registro individualmente no caderno.

Verificação

- Releiam o problema e verifiquem se todas as condições do enunciado foram satisfeitas.

Apresentação

- Construam diversos triângulos equiláteros de cartolina. Utilizando apenas esses triângulos, componham novos polígonos, regulares ou não, e apresentem para os colegas.

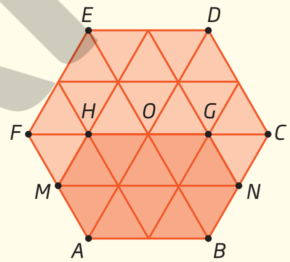
Resolvendo em equipe

BNCC:

- Competências gerais 2, 4, 9 e 10 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 3 e 8 (as descrições estão na página VII).

Esta seção destaca as etapas selecionadas para encaminhar a resolução de problemas. Elas devem ser analisadas e discutidas com os estudantes. Além de favorecer o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **9** e **10** e das competências específicas de Matemática **2**, **3** e **8**, a seção permite a transferência de estratégias de resolução para outros contextos e situações.

Uma forma alternativa de resolução seria decompor o hexágono regular *ABCDEF* em 24 pequenos triângulos equiláteros congruentes e verificar que o hexágono *ABNGHM* é composto de 10 desses triângulos equiláteros.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a razão entre as medidas das áreas dos hexágonos *ABNGHM* e *ABCDEF* é $\frac{10}{24}$ ou $\frac{5}{12}$ (alternativa **e**).

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Polígonos

- Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes concluam que as medidas das aberturas de todos os ângulos solicitados são iguais a 90°, uma vez que são ângulos que determinam uma semicircunferência, ou seja, um arco que mede 180°.
- Para determinar x na **atividade 2**, espera-se que os estudantes considerem que os ângulos opostos de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência são suplementares. Assim:

$$(2x - 35°) + (x + 5°) = 180°$$

Revisão dos conteúdos deste capítulo

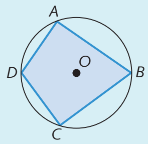
Faça as atividades no caderno.

Polígonos

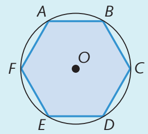
Um **polígono** é uma figura plana, definida por uma linha poligonal, fechada e simples com sua região interna.

Polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência

Um polígono está inscrito em uma circunferência quando todos os vértices são pontos dessa circunferência.

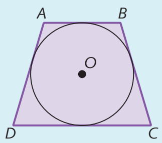


quadrilátero inscrito em uma circunferência

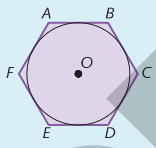


hexágono inscrito em uma circunferência

Um polígono está circunscrito a uma circunferência quando todos os lados são tangentes a circunferência.



quadrilátero circunscrito a uma circunferência



hexágono circunscrito uma circunferência

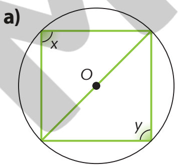
1ª propriedade: Todo triângulo inscrito em uma circunferência que tem um lado coincidente com o diâmetro da circunferência é retângulo.

2ª propriedade: Os ângulos opostos de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência são suplementares.

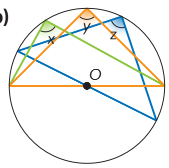
1. a) $x = y = 90°$ **1. b)** $x = y = z = 90°$

1. Determine as medidas x, y e z das aberturas dos ângulos desconhecidos nas circunferências.

a)

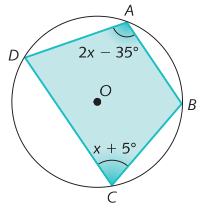


b)



2. Sabendo que $ABCD$ é um quadrilátero inscrito na circunferência, determine a medida de abertura x.

2. 70°



Polígonos regulares

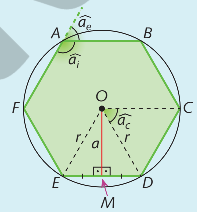
Um **polígono regular** é o polígono em que todos os lados têm a mesma medida de comprimento e todos os ângulos internos são congruentes, ou seja, quando o polígono é equiângulo e equilátero.

Propriedades dos polígonos regulares

1ª propriedade: Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.

2ª propriedade: Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.

Elementos de um polígono regular



- O: centro do polígono e da circunferência
- r: medida de comprimento do raio do polígono e da circunferência circunscrita
- a: medida de comprimento do apótema (segmento de reta cujas extremidades são o centro e o ponto médio de qualquer lado do polígono)
- n: número de lados
- $\hat{a}_c$: ângulo central (ângulo que tem o vértice no centro e cujos lados contêm vértices consecutivos do polígono)

$$\boxed{a_c = \frac{360}{n}}$$

- $\hat{a}_i$: ângulo interno (ângulo formado por dois lados consecutivos do polígono)

$$\boxed{a_i = \frac{(n-2).180°}{n}}$$

- $\hat{a}_e$: ângulo externo (suplemento do ângulo interno correspondente)

$a_i + a_e = 180°$

$$\boxed{a_e = \frac{360}{n}}$$

3. Calcule a medida de abertura do ângulo central destes polígonos regulares:

a) pentágono; **3. a)** 72°

b) octógono; **3. b)** 45°

c) dodecágono (polígono de 12 lados); **3. c)** 30°

d) polígono de 24 lados. **3. d)** 15°

4. Sabendo que um pentadecágono regular tem 15 lados, determine: **4. a)** 156° **4. b)** 24°

a) a medida da abertura de cada ângulo interno;

b) a medida da abertura de cada ângulo externo;

c) a medida da abertura de cada ângulo central. **4. c)** 24°

5. Sabendo que a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos de um polígono regular mede 2880°, determine quantos lados tem o polígono. **5.** 18 lados

6. Se a abertura do ângulo externo de um polígono regular mede 18°, quantos lados tem esse polígono? **6.** 20 lados

7. Em um polígono regular, a medida da abertura do ângulo central é 40°. Responda: **7. a)** 9 lados

a) Quantos lados tem esse polígono?

b) Qual é a medida da abertura do ângulo interno? **7. b)** 140°

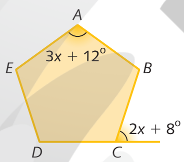
c) Qual é a medida da abertura do ângulo externo? **7. c)** 40°

8. Em um polígono regular, $(3x + 36°)$ representa a medida da abertura de um dos ângulos internos e $(x - 8°)$ representa a medida da abertura do ângulo externo adjacente a esse ângulo interno.

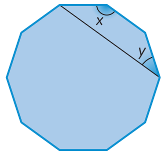
a) Qual é a medida de abertura x? **8. a)** 38°

b) Quantos lados tem esse polígono? **8. b)** 12 lados

9. Calcule a medida de abertura x, sabendo que a figura é um pentágono regular. **9.** 32°

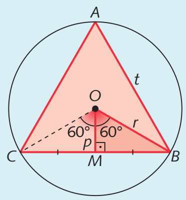


10. Este polígono regular é um decágono regular; determine as medidas x e y das aberturas dos ângulos. **10.** $x = 144°$ e $y = 36°$



Relações métricas nos polígonos regulares

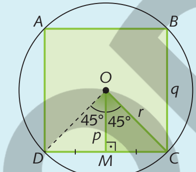
Triângulo equilátero inscrito em uma circunferência



- t: medida de comprimento do lado do triângulo
- r: medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao triângulo
- p: medida de comprimento do apótema do triângulo

$$\boxed{t = r\sqrt{3}} \qquad \boxed{p = \frac{r}{2}}$$

Quadrado inscrito em uma circunferência



- q: medida de comprimento do lado do quadrado
- r: medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao quadrado
- p: medida de comprimento do apótema do quadrado

$$\boxed{q = r\sqrt{2}} \qquad \boxed{p = \frac{r\sqrt{2}}{2}}$$

ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Polígonos regulares

- Na **atividade 3**, os estudantes vão calcular a medida da abertura de um ângulo central de alguns polígonos regulares. Você pode ampliar a proposta desta atividade e pedir para que representem os polígonos regulares de cada item em um *software* de geometria dinâmica e, depois, que determinem a medida de um dos ângulos centrais utilizando as ferramentas do *software*. Depois, peça para que comparem as medidas obtidas por meio do *software* com as que calcularam na atividade.
- Na **atividade 5**, espera-se que os estudantes escrevam a equação $2880° = (n-2) \cdot 180°$ para encontrar o número de lados do polígono.
- Na **atividade 10**, se necessário, mostre aos estudantes que a figura formada na parte interna do decágono regular é um trapézio isósceles e, portanto, os ângulos da base são congruentes e a soma das medidas das aberturas dos ângulos internos é igual a 360°.

Relações métricas nos polígonos regulares

• Caso os estudantes tenham dificuldades para interpretar a situação-problema da **atividade 11**, ajude-os a fazer um esboço.

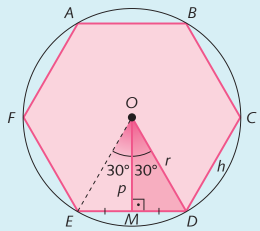
• No **item a** da **atividade 12**, espera-se que calculem $(8\sqrt{2}\text{ cm}) \cdot \sqrt{2}$ para determinar a medida do comprimento do lado do quadrado. Já no **item b**, espera-se que calculem $(\sqrt{2}\text{ cm}) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ para determinar a medida do comprimento do apótema do quadrado.

• Na **atividade 13**, antes que realizem os cálculos, peça a alguns deles que verbalizem como planejam realizar a atividade.

Polígonos regulares circunscritos

• Após os estudantes concluírem as **atividades 16**, **17** e **18**, solicite que comparem as respostas obtidas e compartilhem como fizeram. Esse momento de troca favorece o desenvolvimento da competência geral **9** da BNCC.

Hexágono regular inscrito em uma circunferência



- h: medida de comprimento do lado do hexágono
- r: medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita ao hexágono
- p: medida de comprimento do apótema do hexágono

$$\boxed{h = r} \qquad \boxed{p = \frac{r\sqrt{3}}{2}}$$

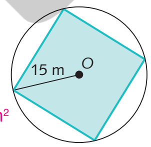
11. Uma mesa circular tem como detalhe em seu tampo o desenho de um hexágono regular inscrito. Se o comprimento do raio do tampo mede $2\sqrt{3}$ m, qual é a medida de perímetro do hexágono? Dado: $\sqrt{3} = 1{,}7$. **11.** 20,4 m

12. Um quadrado *ABCD* está inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio mede $8\sqrt{2}$ cm. Calcule:

a) a medida de comprimento do lado do quadrado; **12. a)** 16 cm

b) a medida de comprimento do apótema do quadrado. **12. b)** 8 cm

13. Determine a medida de perímetro e a medida da área do quadrado representado. Use: $\sqrt{2} = 1{,}4$.



13. respectivamente, 84 m e 441 m²

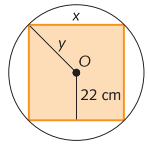
14. O comprimento do lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência mede 10 cm. Determine:

a) a medida de comprimento do raio da circunferência; **14. a)** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm

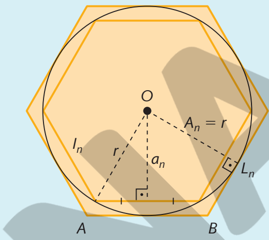
b) a medida de comprimento do apótema do triângulo. **14. b)** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm

15. $x = 44$ cm e $y = 22\sqrt{2}$ cm

15. Determine as medidas de comprimento x e y na figura abaixo, sabendo que o quadrado está inscrito na circunferência.



Polígonos regulares circunscritos



- r: medida de comprimento do raio da circunferência
- n: número de lados
- l_n: medida de comprimento do lado do polígono regular inscrito
- a_n: medida de comprimento do apótema do polígono regular inscrito
- L_n: medida de comprimento do lado do polígono regular circunscrito
- A_n: medida de comprimento do apótema do polígono regular circunscrito

$$\boxed{\frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{A_n} \xrightarrow{A_n = r} \frac{l_n}{L_n} = \frac{a_n}{r}}$$

16. Calcule a medida de comprimento do lado de um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência cujo comprimento do raio mede $4\sqrt{3}$ cm. **16.** 24 cm

17. Calcule a medida de comprimento do lado de um quadrado circunscrito a uma circunferência cujo comprimento do raio mede 16 m. **17.** 32 m

18. Calcule a medida de comprimento do lado de um hexágono regular circunscrito a uma circunferência cujo comprimento do raio mede $\sqrt{3}$ cm. **18.** 2 cm

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

É hora de extrapolar

Formação cidadã

Faça as atividades no caderno.

O que você conhece sobre trânsito seguro?

Diariamente, a maior parte da população brasileira transita em vias, seja como pedestre, ciclista, motorista ou passageiro e, infelizmente, as estatísticas apontam que os acidentes de trânsito estão entre as principais causas de óbito no país. Para que esses números diminuam, é importante que os cidadãos respeitem a legislação vigente e coloquem em prática ações para construir um trânsito mais seguro para todos.

Objetivos: Conhecer e entender o significado das placas de trânsito, analisar estatísticas de acidentes de trânsito e práticas para aumentar a segurança no trânsito e produzir placas para uma campanha pelo trânsito seguro.

Etapa 1: Conhecer e entender o significado das placas de trânsito.

1. Reúna-se em grupo e respondam às questões em seus cadernos. **1. a)** Resposta pessoal.

a) As placas de trânsito são importantes? Por quê? **1. b)** Resposta em *Orientações*.

b) O que são placas de regulamentação? Explique para que servem e dê cinco exemplos de placas desse tipo.

c) O que são placas de advertência? Explique para que servem e dê cinco exemplos de placas desse tipo. **1. c)** Resposta em *Orientações*.

2. As placas de regulamentação têm uma borda vermelha, preenchimento branco e formato circular, com exceção das placas: **2. a)** Resposta em *Orientações*.

placa A

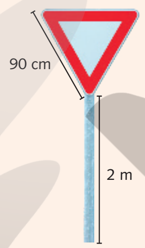
placa B

FOTOS: JUNIOR ROZZO/ROZZO IMAGENS

a) Qual é o significado dessas placas e por que elas têm o formato diferente das outras placas de regulamentação? Caso necessário, pesquisem em *sites* especializados.

b) A placa A se parece com qual polígono? O que seria preciso verificar para saber se esta placa se parece com um polígono regular?

c) A regulamentação do Conselho Nacional de Trânsito (Contran) recomenda que, nas vias urbanas, a placa B tenha o formato de triângulo equilátero com lado medindo 90 cm de comprimento e, ao ser colocada em suporte vertical, seja disposta de modo que a borda inferior fique a pelo menos 2 m do solo. Analise esta imagem e determine, em metro, a medida da altura total desta sinalização.



KASPRI/SHUTTERSTOCK

3. Analisem a placa e respondam às questões. Caso seja necessário, pesquisem em *sites* especializados.

3. b) Alertar à existência de uma escola nas proximidades, com a possibilidade de circulação de crianças e adolescentes.

a) Essa placa é de regulamentação ou de advertência? **3. a)** advertência

b) Essa placa recebe o nome "área escolar". Qual é a importância dessa sinalização?

Etapa 2: Análise de dados sobre a estatística do trânsito (acidentes) no Brasil.

4. Leiam o texto e respondam às questões.

Acidentes de trânsito: Mais de 1,35 milhão de pessoas perdem a vida, aponta OMS

[...]

De acordo com o "*Global status report on road safety 2018*", lançado em dezembro de 2018, as mortes nas estradas continuam aumentando em todo o mundo e mais de 1,35 milhão de pessoas perdem a vida todos os anos em decorrência de acidentes de trânsito, o que significa que, em média, morre uma pessoa a cada 24 segundos. O documento revela ainda que as lesões causadas pelo trânsito são hoje a principal causa de morte de crianças e jovens entre 5 e 29 anos.

[...]

No Brasil, no ano de 2016, os dados também são lamentáveis: 3,5 crianças morreram por dia, ou seja, são 105 vidas perdidas em um mês. Conforme números compilados pelo

2. b) Octógono; é preciso verificar se todos os lados têm mesma medida de comprimento e se todos os ângulos internos são congruentes, ou seja, se é equilátero e equiângulo.

2. c) 2,78 m, aproximadamente

É hora de extrapolar

BNCC:

- Competências gerais 2, 4, 7, 9 e 10 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 4, 5, 7 e 8 (as descrições estão na página VII).

A seção retoma as questões propostas na abertura da Unidade e propõe um trabalho colaborativo que explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de placas para a campanha de trânsito seguro, que serão compartilhadas com a comunidade escolar.

Com a finalidade de organizar o trabalho, esta seção é dividida em etapas que promovem:

- Entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado.
- Pesquisa coletiva.
- Elaboração, em grupo, do produto proposto.
- Apresentação e exposição do produto.
- Reflexão e síntese do trabalho.

As etapas de pesquisa e elaboração do produto podem ser realizadas extraclasse. Verifique o perfil dos estudantes e oriente-os com relação ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização desse trabalho.

A seção favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4**, **7**, **9** e **10** e das competências específicas de Matemática **2**, **4**, **5**, **7** e **8**, procurando mobilizar conteúdos estudados nos capítulos que integram a Unidade. Portanto, é recomendável trabalhar a seção depois de estudar os capítulos, mas, se preferir trabalhar as etapas da seção à medida que os capítulos forem estudados, atente para os conhecimentos prévios necessários.

- No **item b** da **atividade 1**, explique aos estudantes que as placas de regulamentação informam os condutores das proibições, obrigações, condições e restrições. Desobedecê-las é infração das regras. São exemplos de placas de regulamentação: parada obrigatória, sentido proibido, proibido estacionar, velocidade máxima permitida, altura máxima permitida etc. No **item c**, esclareça que as placas de advertência alertam os condutores sobre condições perigosas, restrições ou obstáculos nas vias e têm como função recomendar que o motorista fique alerta e tome os cuidados necessários. São exemplos de placas de advertência: semáforo à frente, saliência ou lombada, área escolar, declive acentuado, cuidado animais etc.

- Na **atividade 2**, retoma-se uma das questões propostas na abertura desta Unidade. Espera-se que eles respondam que a placa A representa "parada obrigatória" e indica que o condutor deve parar o automóvel antes de cruzar ou entrar em uma via. A placa B representa "dê a preferência" e indica que o condutor deve dar a preferência de passagem para o automóvel que estiver na via em que ele vai entrar ou cruzar, reduzindo a velocidade ou parando se necessário. Elas têm o formato diferente das outras placas para que os condutores possam identificá-las mesmo quando vistas por trás. Após responder ao **item c**, peça aos estudantes que compartilhem as estratégias usadas. Alerte-os para que adicionem a medida do comprimento da altura da placa à medida do comprimento do poste. Assim, devem chegar à conclusão de que a medida da altura total da sinalização é obtida por meio do seguinte cálculo:

$$2\text{ m} + 45\sqrt{3}\text{ cm}$$

Portanto, devem concluir que a medida da altura total da sinalização é igual a aproximadamente 2,78 m.

• Se achar conveniente, permita que os estudantes compartilhem as respostas da **atividade 4**. Oriente-os a, no momento da conversa, focar nas causas e soluções. Pode ser que esse seja um assunto sensível para alguns estudantes. Dessa forma, é importante refletir sobre maneiras de conduzir a conversa acolhendo os estudantes que precisarem.

• As **atividades 6** e **7** da etapa 3 focam os direitos e deveres dos pedestres no trânsito. Ao realizarem a **atividades 6**, se possível, disponibilize o Código de Trânsito Brasileiro para que possam folheá-lo. Depois, ajude-os a encontrar o capítulo mencionado na atividade. Na lousa, escreva de um lado os deveres e do outro os direitos dos pedestres levantados pela turma. Antes que elaborem a lista solicitada na **atividade 7**, forme uma roda de conversa para falarem sobre atitudes que todos nós podemos tomar para prevenir acidentes no trânsito.

• As **atividades** de **8** a **12** da etapa 4 são dedicadas à confecção, análise das placas e realização de uma campanha de trânsito seguro. Na **atividade 8**, os estudantes vão usar a criatividade. Oriente-os a adotar um critério ao planejar os esboços. Na **atividade 9**, eles vão disponibilizar os esboços com o intuito de dar e receber *feedback* dos colegas. É o momento de saber respeitar a opinião do próximo e agir com flexibilidade e resiliência. Nas **atividades 11** e **12**, você pode convidar o professor de Arte para dar sua contribuição.

• Na **atividade 14**, a escrita do texto sobre as etapas **3** e **4** contribui para a aprendizagem dos estudantes ao possibilitar que eles reflitam sobre os processos realizados, identificando o que aprenderam nessas etapas e as principais dificuldades que encontraram ao realizá-las.

Observatório Nacional de Segurança Viária (ONSV), juntamente com a Universidade Federal do Paraná (UFPR), com informações do Sistema Datasus, foram registradas 1 292 mortes de crianças entre zero e 14 anos naquele ano. Esta faixa etária representa 23% da população brasileira.

[...]

Em dezembro de 2018, audiência na Comissão de Viação e Transportes da Câmara dos Deputados destacou que a maioria dos acidentes de trânsito ocorre nos municípios, onde há excesso de motocicletas, pouca sinalização e, muitas vezes, falta um gestor específico de trânsito. A gestão do trânsito nos municípios foi apontada como o principal desafio para reduzir pela metade as mortes por acidentes no Brasil, por grupo de 100 mil habitantes, até 2028. A meta está prevista no Plano Nacional de Redução de Mortes e Lesões no Trânsito, que virou lei (Lei 13.614/18) em janeiro de 2018.[...]

Sociedade Brasileira de Medicina Tropical. Acidentes de trânsito: Mais de 1,35 milhão de pessoas perdem a vida, aponta OMS. Disponível em: https://www.sbmt.org.br/portal/traffic-accidents-over-1-35-million-people-lose-their-lives-says-who/. Acesso em: 29 jun. 2022.

a) Quais são as atitudes imprudentes que podem causar fatalidades no trânsito?

b) Que ações podem ser tomadas pelos cidadãos para diminuir as mortes no trânsito no Brasil? **4. b)** Resposta pessoal.

c) Segundo a ONG Criança Segura, em 2018, 30% das mortes de crianças por acidente ocorreram no trânsito. Que medidas podem ser tomadas para diminuir esse percentual?

4. a) Resposta pessoal. **4. c)** Resposta pessoal.

5. O governo da cidade de Seul, na Coreia do Sul, anunciou em 2016 a instalação da seguinte placa de trânsito em algumas vias da cidade.

ZOART STUDIO/SHUTTERSTOCK

5. a) alertar para o uso de celulares (*smartphones*) ao andar nas ruas.

a) Qual é o objetivo da instalação dessa placa?

b) Seria interessante que a legislação brasileira adotasse uma placa semelhante no Brasil? Justifiquem. **5. b)** Respostas pessoais.

Etapa 3: Pesquisar sobre direitos e deveres dos pedestres no trânsito e sobre dicas de como evitar acidentes. **Etapa 3**: Comentário em *Orientações.*

6. O Código de Trânsito Brasileiro tem um capítulo destinado aos pedestres e condutores de veículos não motorizados. Pesquisem e façam uma lista dos direitos e dos deveres dos pedestres no trânsito.

7. Elaborem uma lista com dicas que motoristas, passageiros, ciclistas e pedestres podem utilizar para prevenir acidentes de trânsito.

Etapa 4: Confecção, análise das placas e realização de uma campanha pelo trânsito seguro.
Etapa 4: Comentário em *Orientações.*

8. Agora, cada grupo deverá confeccionar, utilizando ilustrações e textos:

- uma placa que transmite um direito ou um dever dos pedestres;
- uma placa contendo uma dica para prevenir acidentes de trânsito.

Essas placas deverão ter as características de uma placa de regulamentação ou de uma placa de advertência, dependendo do que vocês vão transmitir. Façam um esboço das placas para que os demais colegas da turma analisem a produção.

9. Disponibilizem os esboços das placas que serão elaboradas para que a turma analise a pertinência do desenho e o texto escolhido. Justifiquem a escolha do tipo de placa para cada caso: regulamentação ou advertência.

10. Anotem as dúvidas, as opiniões e as sugestões dos colegas.

11. Determinem com a turma qual será o tamanho das placas, considerando que serão expostas para a comunidade escolar.

12. Depois dos ajustes necessários, confeccionem as placas e promovam uma campanha pelo trânsito seguro na comunidade escolar.

Etapa 5: Síntese do trabalho realizado.
13. a) Respostas pessoais.

13. Algumas questões que devem ser discutidas:

a) Vocês consideram importante que todos tenham uma educação para o trânsito mesmo não sendo motoristas? Por quê?

b) Vocês acham que o conhecimento das dicas elaboradas na **atividade 7** pode ajudar a prevenir acidentes? **13. b)** Resposta pessoal.

14. Redijam um texto que descreva o processo realizado pelo grupo nas etapas **3** e **4**.

14. Comentário em *Orientações.*

PLURALIDADE CULTURAL

Unidade 4

Roda de capoeira em Salvador (BA). Foto de 2022.

GABRIEL P. PINHEIRO/SHUTTERSTOCK

A roda de capoeira é uma manifestação cultural brasileira, herança africana que se difundiu por todo o Brasil, com elementos de arte marcial, esporte, cultura, dança e música.

Quais são as regras da capoeira? O que você conhece da cultura afro-brasileira? Qual era a porcentagem da população negra no Brasil de 2014 a 2019? Ao final desta Unidade, você responderá a essas e outras questões.

Abertura da Unidade

BNCC:

- Competências gerais 3, 6 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

- Motivar os estudantes a estudar os conteúdos da Unidade 4.
- Discutir a influência da cultura africana na formação do povo brasileiro.

Tema contemporâneo transversal:

PLURALIDADE CULTURAL

Pergunte aos estudantes se conhecem a capoeira ou se já jogaram capoeira. Reserve um tempo para ouvir as experiências deles. Peça que comentem o que souberem sobre as regras, os golpes, a música e os instrumentos usados na prática da capoeira. Depois convide-os a falar sobre a cultura afro-brasileira de uma forma mais geral. Explique, por exemplo, que a cultura africana teve influência, por exemplo, na música e na dança (jongo, maracatu e samba de roda), nos instrumentos musicais (berimbaus e tambores), na religião (candomblé e umbanda), na culinária (azeite de dendê) etc.

Ao perguntar se os negros eram maioria ou minoria do povo brasileiro no decorrer dos anos 2014 a 2019, verifique se os estudantes percebem a necessidade de pesquisar dados sobre a composição da população brasileira. Aproveite a oportunidade para discutir com eles como esta pesquisa é feita: desde a coleta dos dados até a apresentação das conclusões. Avise que na seção *É hora de extrapolar* proposta ao final da Unidade, eles vão conhecer mais sobre a cultura afro-brasileira e terão a oportunidade de retomar esta e as demais questões que conversaram durante esta aula.

O contexto dessa abertura convida os estudantes a apreciar e valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais dos africanos. Além disso, os estudantes dialogam e exercitam a empatia, o que possibilita o desenvolvimento das competências gerais **3**, **6** e **9** e da competência específica **8**.

No **capítulo 10**, serão estudados as vistas ortogonais e o cálculo da medida de volume de prismas e cilindros. Já, no **capítulo 11**, o foco é a construção de diferentes tipos de gráficos estatísticos. Por fim, no **capítulo 12**, será estudado o cálculo de probabilidade, e os estudantes vão planejar e realizar uma pesquisa estatística amostral.

Na seção *É hora de extrapolar*, os estudantes vão analisar dados sobre a composição da população brasileira, pesquisar sobre a cultura afro-brasileira e sobre personalidades negras importantes para a história do Brasil e produzir um gibi que será exibido para a comunidade escolar.

CAPÍTULO 10 – VISTAS ORTOGONAIS E VOLUME

Trocando ideias

BNCC:

- Competência geral 9 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 8 (a descrição está na página VII).

Objetivos:

- Verificar se os estudantes reconhecem e sabem representar as vistas ortogonais de uma figura.
- Conhecer sobre o que fazem os modeladores 3D.

Tema contemporâneo transversal:

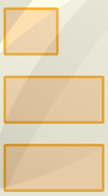
Inicie a aula perguntando aos estudantes se já ouviram falar em modelagem 3D e se alguém sabe do que se trata. Depois, explique que modelagem 3D é o processo de desenvolvimento de uma representação de qualquer superfície tridimensional de um objeto (inanimado ou vivo) por meio de *softwares* específicos. Se achar conveniente, proponha aos estudantes que pesquisem mais sobre a modelagem 3D e, na aula seguinte, reserve um tempo para que compartilhem o que acharam mais interessante.

Convide-os a realizar a atividade proposta no primeiro item. Este pode ser o momento oportuno para verificar se eles conseguem reconhecer e representar as vistas ortogonais de uma figura. Acompanhe o trabalho das duplas e observe como lidam com o problema. Espera-se que eles façam representações como as seguintes:

Em α:

Em β:

Em γ:



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Convide-os a refletir sobre as questões propostas no segundo item. Após dar um tempo para a troca de ideias, comente que muitos projetos feitos pelos modeladores 3D podem ser impressos em impressoras 3D. Dessa forma, no caso da Medicina, o trabalho desenvolvido por este profissional pode ser útil para o desenvolvimento de próteses e, no caso da Engenharia, para a confecção de ferramentas.

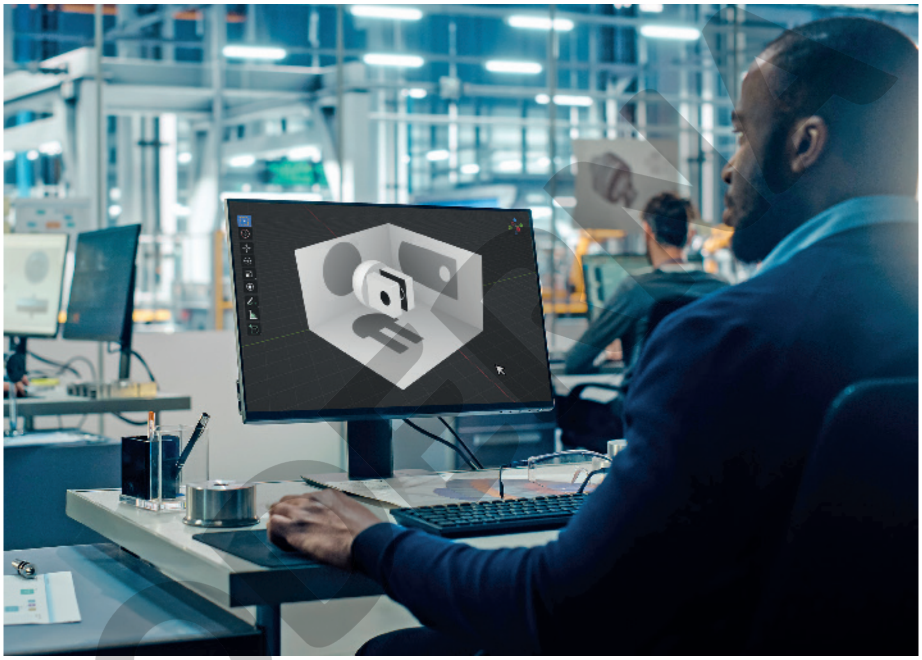
A competência geral **9** e a competência específica **8** da BNCC têm o seu desenvolvimento favorecido neste *Trocando ideias*, uma vez que o diálogo e a interação entre os estudantes são incentivados.

Capítulo 10

Vistas ortogonais e volume

Trocando ideias

O modelador 3D é o profissional que desenvolve a representação de objetos tridimensionais, por meio de *softwares*. Os modelos criados podem ser usados por cientistas, arquitetos, médicos e engenheiros. Além disso, muitos modeladores 3D trabalham para a indústria cinematográfica, de *games* ou no mercado publicitário.

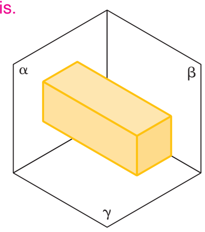


GORODENKOFF/SHUTTERSTOCK

IMAGEM 3-D NO COMPUTADOR: JOÃO SALMOÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Modelador 3D trabalhando no protótipo de uma peça automotiva.

Trocando ideias: primeiro item: resposta em *Orientações*; segundo item: respostas pessoais.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

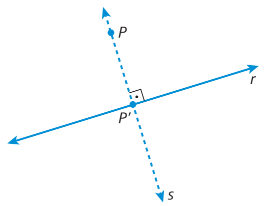
- Reúna-se com um colega e, inspirados na imagem acima, desenhem as projeções do paralelepípedo nos planos α, β e γ.
- Em sua opinião, qual é a importância do trabalho dos modeladores 3D para a Medicina? E para a Engenharia? Converse com os colegas.

Neste capítulo, vamos estudar as vistas ortogonais de figuras espaciais e as medidas de volume de prismas e cilindros retos.

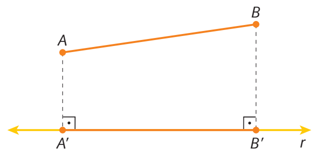
1 Vistas ortogonais

Projeção ortogonal

Analise as projeções ortogonais de um ponto sobre uma reta e de um segmento de reta sobre uma reta.



A projeção ortogonal do ponto P sobre a reta r é o ponto P'.



A projeção ortogonal do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre a reta r é o segmento de reta $\overline{A'B'}$.

Agora, vamos estudar as projeções ortogonais sobre um plano.

Considere o ponto P e o plano α representados a seguir.

$P \notin \alpha$

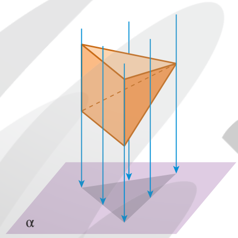
$P \notin \alpha$
$P' \in \alpha$

O ponto P' é a projeção ortogonal do ponto P sobre o plano α. Considerando uma reta perpendicular ao plano α, que contém o ponto P, o ponto P' é a intersecção dessa reta com o plano.

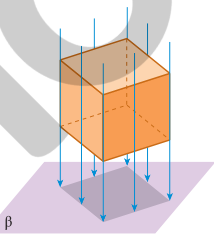
Projeção ortogonal de figuras sobre um plano

A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos dessa figura sobre esse plano.

Considere alguns exemplos.



O triângulo é a projeção ortogonal dessa pirâmide, nessa posição, sobre o plano α.



O quadrado é a projeção ortogonal desse cubo, nessa posição, sobre o plano β.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

257

Projeção ortogonal

Verifique se os estudantes compreendem que a projeção ortogonal de um objeto tridimensional resulta em uma figura bidimensional. Relembre-os de que formas bidimensionais possuem medidas de altura e de comprimento, como as figuras planas; já as formas tridimensionais possuem medidas de altura, de comprimento e de largura, como as figuras espaciais.

Reforce com os estudantes que uma projeção ortogonal é feita sob um ângulo de 90°. Estimule-os a observar que linhas projetantes paralelas entre si e perpendiculares ao plano de projeção reproduzem no plano uma imagem com o mesmo contorno e a mesma grandeza do objeto. Na projeção ortogonal, a figura plana considerada é reproduzida em verdadeira grandeza, ou seja, com medidas reais.

(EF09MA17) Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Vistas ortogonais

BNCC:

- Competência geral 1 (a descrição está na página VI).
- Habilidade EF09MA17.

Objetivos:

- Compreender o conceito de vistas ortogonais.
- Reconhecer as vistas ortogonais de uma figura.

Justificativa

A utilização das vistas ortogonais é fundamental para o setor industrial, em que é necessário conhecer todas as perspectivas de um objeto antes de fabricá-lo. Também é utilizada em outras áreas, como Engenharia, Arquitetura e Urbanismo. Na área de desenho técnico, é indispensável para se obter a representação de um objeto. Esse contexto justifica a importância dos objetivos acima levantados. Além disso, o reconhecimento das vistas ortogonais de uma figura ajuda a representar objetos em perspectiva, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA17**.

Mapeando conhecimentos

Para mapear os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a representação e o reconhecimento de vistas ortogonais de um objeto, crie um circuito de estações dentro da sala de aula.

Cada grupo vai começar em uma estação diferente e circular a partir dela. A ideia é que os grupos cumpram as tarefas isoladamente. Se a turma estiver organizada em 4 grupos, você poderá propor as seguintes estações:

Estação 1: Disponibilize um modelo de paralelepípedo e peça aos grupos que representem as vistas ortogonais frontal, posterior, superior, inferior, lateral direita e lateral esquerda.

Estação 2: Dadas as vistas ortogonais de um pirâmide de base quadrada, solicite aos estudantes que identifiquem a figura geométrica não plana correspondente.

Estação 3: Disponibilize um modelo de prisma de base hexagonal e peça aos grupos que representem as vistas ortogonais frontal, posterior, superior, inferior, lateral direita e lateral esquerda.

Estação 4: Dadas as vistas ortogonais de um cilindro, solicite aos estudantes que identifiquem a figura geométrica não plana correspondente.

Para as aulas iniciais

Você pode reunir os estudantes em duplas e solicitar que representem objetos em perspectiva a partir de suas vistas ortogonais.

• Na **atividade 4**, se necessário, após a representação das projeções, peça aos estudantes que compartilhem as diferentes representações antes de responderem às questões. No **item b**, espera-se que percebam que, como a face lateral é paralela ao plano α, a projeção é um retângulo; porém, se a base hexagonal for paralela ao plano α, a projeção será um hexágono.

Vistas ortogonais

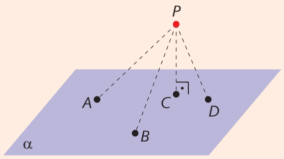
Neste tópico, inicia-se o estudo das vistas ortogonais. Analise com os estudantes a peça apresentada no exemplo dado e suas vistas. Em seguida, proponha outros objetos ou figuras espaciais para que eles representem, no caderno, as vistas de cada um.

Atividades

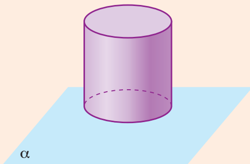
3. Não. Ao posicionar, por exemplo, a base paralela ao plano, obtém-se um quadrado como projeção ortogonal dessa pirâmide.

Faça as atividades no caderno.

1 Identifique a projeção ortogonal do ponto *P* sobre o plano α. **1.** ponto *C*



2 Que figura plana representa a projeção ortogonal do cilindro a seguir, nessa posição, sobre o plano α? **2.** círculo



3 Analise o exemplo anterior da projeção ortogonal da pirâmide sobre o plano α. Ao mudar a posição dessa pirâmide, a projeção ortogonal sobre o plano sempre continuará sendo um triângulo? Explique sua resposta.

4 Represente, no caderno, a projeção ortogonal de um prisma de base hexagonal em relação a um plano α. Considere que uma das faces do prisma esteja contida em um plano β paralelo a α. Depois, responda:

a) A projeção ortogonal será sempre a mesma, independentemente da posição do prisma em relação ao plano?

b) Supondo que seja um prisma hexagonal regular e reto, se uma face lateral for paralela ao plano α, que figura representará a projeção ortogonal do prisma sobre o plano β?

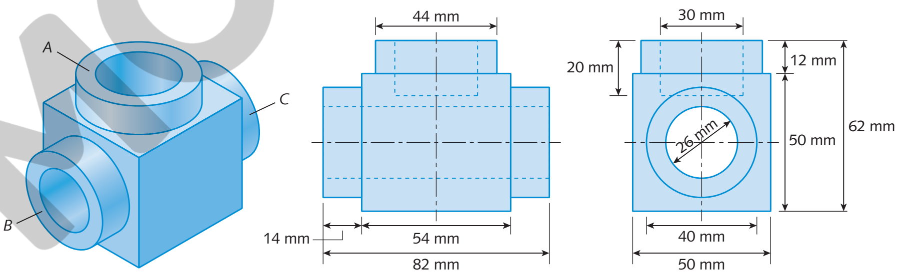
4. a) Não. A projeção ortogonal depende da inclinação e do posicionamento do prisma.
4. b) um retângulo

Vistas ortogonais

Carlos trabalha em uma metalúrgica. Para confeccionar algumas peças, ele usa as especificações que estão em um manual de instruções.

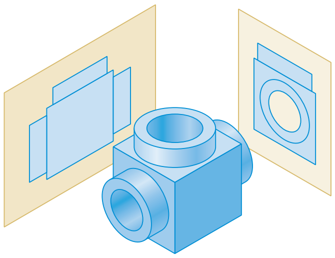
CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Estas são as imagens do manual de instruções.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Neste exemplo, podemos identificar a imagem da peça a ser confeccionada e a representação de duas de suas vistas ortogonais. Essas vistas correspondem à projeção ortogonal da peça a dois planos distintos.

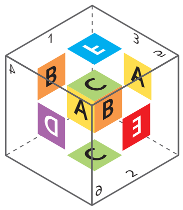


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

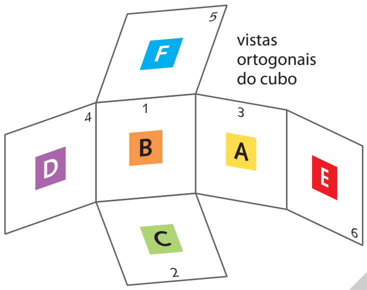
A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é chamada de **vista ortogonal**.

As vistas são obtidas em planos perpendiculares entre si e paralelos dois a dois. Nas ilustrações a seguir, temos a representação de um cubo e as projeções ortogonais de suas faces sobre os planos numerados de 1 a 6.

cubo



projeções ortogonais das faces do cubo sobre os planos numerados de 1 a 6

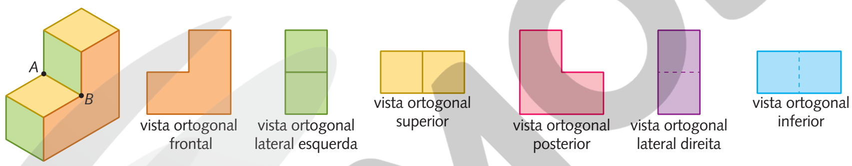


vistas ortogonais do cubo

Neste caso, consideraremos a vista sobre o plano 1 como a vista frontal do cubo; logo, teremos seis vistas ortogonais do cubo: frontal (1), posterior (6), superior (2), inferior (5), lateral esquerda (3) e lateral direita (4).

Observações

1. Quando as arestas não são visíveis na vista ortogonal considerada, usamos linhas tracejadas para indicá-las. Considerando que a vista ortogonal da face laranja, na figura abaixo, corresponde à vista frontal da figura, temos:



Observe que a aresta $\overline{AB}$, visível somente nas vistas superior e lateral esquerda, foi representada por uma linha tracejada nas vistas inferior e lateral direita.

2. Não existe uma regra para determinar a frente de uma figura e, consequentemente, sua vista frontal. Uma vez escolhida a frente, esta é tomada como referência para obtermos as outras vistas da figura.

Para que os estudantes entendam melhor o conceito de vista ortogonal, são apresentadas as projeções ortogonais de um cubo, cujas faces estão identificadas com as letras A, B, C, D, E e F, sobre seis planos diferentes de projeção perpendiculares entre si e paralelos dois a dois.

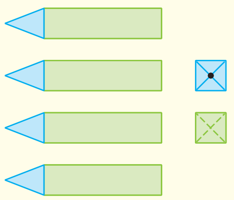
Podemos ver seis diferentes vistas ortogonais, uma em cada um dos seis planos (numerados de 1 a 6) que envolvem o cubo.

É interessante que os estudantes estudem essas vistas observando um cubo ou outro prisma reto retangular qualquer; para isso, traga alguns modelos de sólidos ou solicite, previamente, que tragam algumas embalagens vazias nesse formato.

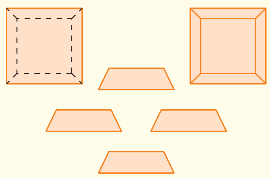
Enfatize com os estudantes que, na representação das vistas ortogonais, as arestas não visíveis devem ser indicadas por linhas tracejadas.

Comente e reforce com os estudantes que não existe uma regra para definir quais são as vistas ortogonais frontal, posterior, superior, inferior, lateral esquerda ou lateral direita. No entanto, uma vez escolhida a vista ortogonal frontal, esta é tomada como referência para definir as demais.

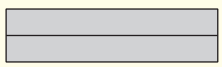
- Resposta do **item a** da **atividade 6**:



- Resposta do **item b** da **atividade 6**:



- Exemplo de resposta do **item a** da **atividade 7**:



- No **item b** da **atividade 7**, considere as diferentes respostas apresentadas pelos estudantes, desde que consigam justificar sua representação.

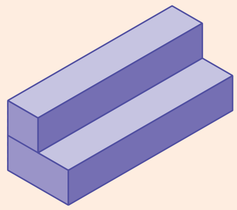
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Atividades

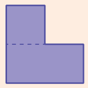
Faça as atividades no caderno.

5 Entre as imagens a seguir, qual **não** representa uma das vistas ortogonais da peça abaixo?

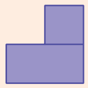
5. alternativa a



a)

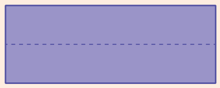


b)



c)

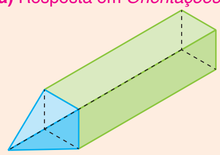
d)



6 Represente, no caderno, as seis vistas ortogonais de cada um dos sólidos.

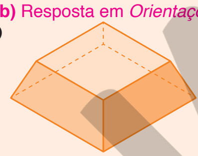
6. a) Resposta em *Orientações*.

a)

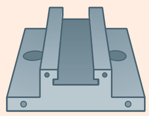


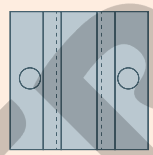
6. b) Resposta em *Orientações*.

b)

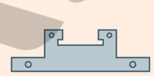


7 Márcia desenhou duas vistas ortogonais de uma peça de metal.





Vista ortogonal superior



Vista ortogonal frontal

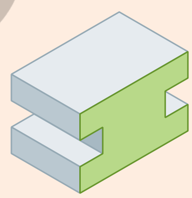
7. a) Exemplo de resposta em *Orientações*.

a) Desenhe, no caderno, uma possível vista lateral dessa peça.

b) Há mais de um modo de desenhar essa vista? Converse com o professor e os colegas.

7. b) Espera-se que os estudantes percebam que, como a lateral da peça não foi representada, há diferentes modos de desenhar uma possível vista lateral dessa peça.

8 Considerando que a vista ortogonal da face verde, na figura abaixo, corresponde à vista frontal da figura, represente no caderno as vistas frontal, superior e lateral esquerda.



8. a) Se a peça tiver as faces laterais direita e esquerda iguais, faces frontal e posterior iguais e faces superior e inferior iguais, podemos afirmar que os pares de figuras que as representam são congruentes.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Depois, responda às questões.

a) Qual é a relação entre a vista ortogonal frontal e posterior, entre a vista ortogonal superior e inferior, e entre a vista ortogonal lateral esquerda e direita?

b) Para que, a partir das vistas, possamos imaginar a figura tridimensional, precisamos desenhar as seis vistas? Converse com o professor e os colegas.

8. b) Espera-se que os estudantes observem que obter as 6 vistas ortogonais permite a visualização completa da peça.

Sugira aos estudantes que reproduzam, em uma malha triangular, a figura presente no exemplo, seguindo os passos apresentados. Outra opção é reproduzir na lousa as vistas ortogonais de objetos e propor aos estudantes que os desenhem com o auxílio de uma malha triangular.

Representação de figuras

Acompanhamos, anteriormente, como representar as vistas ortogonais de figuras não planas ou de objetos. Nesse momento, vamos estudar uma técnica para representar, no plano, uma figura ou um objeto a partir de suas vistas ortogonais.

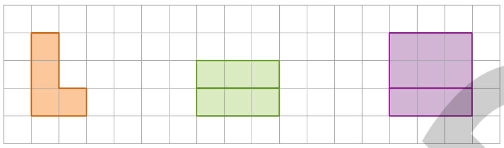

CHAOSAMRAN_STUDIO/SHUTTERSTOCK

Em diferentes profissões, como em arquitetura, engenharia, *design* etc., usam-se diversas técnicas para representar um objeto no plano.

Para fazer essa representação, não é necessário conhecer todas as vistas. Geralmente, são usadas três vistas ortogonais: lateral esquerda, superior e frontal.

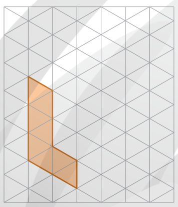
Considere o exemplo.

A seguir, apresentamos três vistas ortogonais de uma figura não plana.

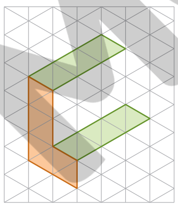


Vamos representar essa figura no plano, utilizando uma malha triangular. Nesse caso, considere, nas respectivas malhas, que o lado do quadradinho tem mesma medida de comprimento do lado do triângulo.

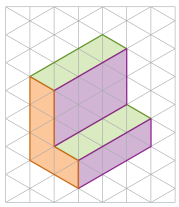
1º) Representamos a vista ortogonal lateral esquerda.



2º) Representamos a vista ortogonal superior.



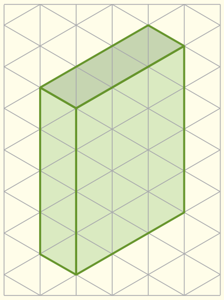
3º) Representamos a vista ortogonal frontal.



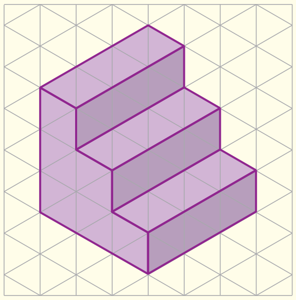
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

• Desenho das figuras referentes à **atividade 9**:

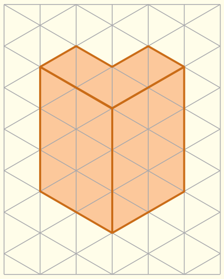
• No **item a**, a figura desenhada deve ser:



• No **item b**, a figura desenhada deve ser:

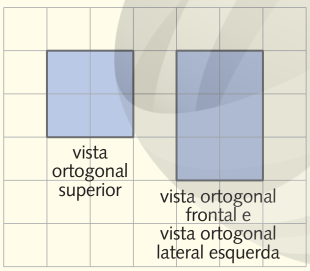


• No **item c**, a figura desenhada deve ser:

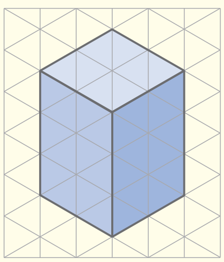


• Exemplo de resposta para a **atividade 12**: imaginando um bloco retangular, as vistas ortogonais frontal e lateral esquerda são retângulos congruentes e a vista ortogonal superior é um quadrado.

• vistas ortogonais:



• representação na malha triangular:

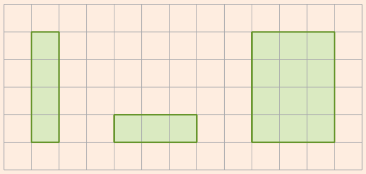


Atividades

Faça as atividades no caderno.

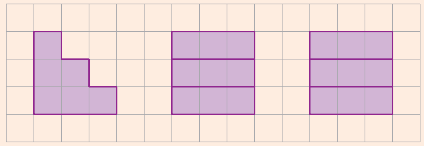
9 Em uma malha triangular, represente a figura correspondente a cada conjunto de vistas.

a)



vista ortogonal lateral esquerda | vista ortogonal superior | vista ortogonal frontal

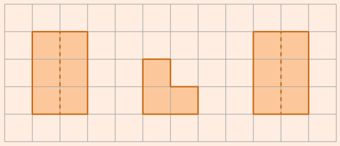
b)



vista ortogonal lateral esquerda | vista ortogonal superior | vista ortogonal frontal

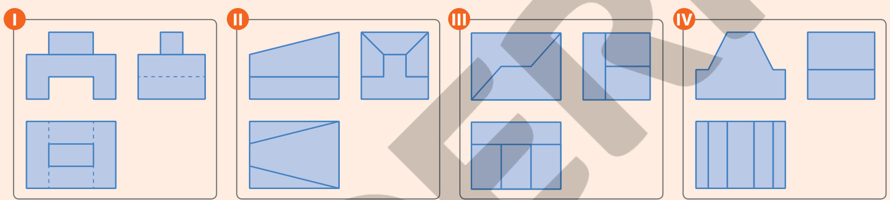
9. Respostas em *Orientações*.

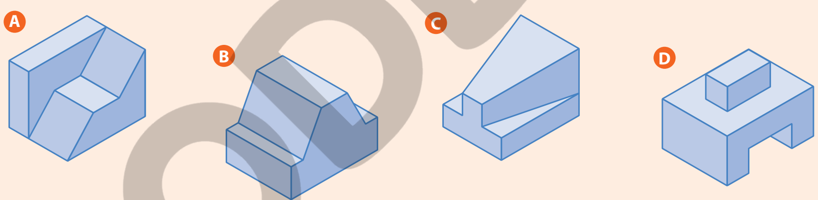
c)



vista ortogonal lateral esquerda | vista ortogonal superior | vista ortogonal frontal

10 Associe cada conjunto de vistas ortogonais ao objeto correspondente. **10.** I – D; II – C; III – A; IV – B





11 Pense em um sólido geométrico e represente três vistas ortogonais dele. Peça a um colega que identifique o sólido geométrico a partir das vistas desenhadas. **11.** Resposta pessoal.

12 Imagine um objeto e represente, em uma malha quadriculada, as vistas ortogonais: frontal, superior e lateral esquerda. Depois, faça o que se pede.

a) Entregue seu desenho a um colega e peça a ele que represente seu objeto em uma malha triangular. Você também deverá representar o objeto que ele imaginou. **12. a)** Resposta pessoal.

b) Depois, confiram os desenhos elaborados e verifiquem se as vistas ortogonais desenhadas estavam adequadas, permitindo a representação correta do objeto. **12. b)** Resposta pessoal.

Veja que interessante

A perspectiva na arte

Houve um período em que as imagens eram retratadas sem a utilização de técnicas para criar a noção de profundidade e volume.

Com o passar do tempo, os artistas foram desenvolvendo e aperfeiçoando formas de retratar o aspecto da realidade em suas obras.

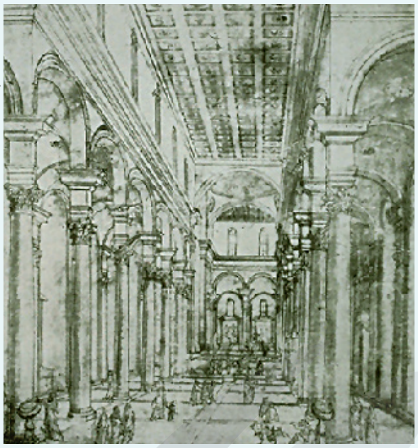
No século XV, o escultor e arquiteto Filippo Brunelleschi (1377-1446) percebeu que, ao olhar paisagens, construções ou outros elementos distantes, todas as linhas convergiam para um ponto no horizonte. Ele também percebeu que essas linhas marcavam a diminuição da medida de comprimento dos objetos quanto mais distantes se encontravam de nosso olhar. Esse ponto no horizonte é chamado **ponto de fuga**.

ALAMY/FOTOARENA - BYZANTINE CHURCH OF SAINT GEORGE, MADABA

Reprodução do mapa de Madaba, também conhecido como mosaico de Madaba. Datada do século VI d.C., essa é a representação mais antiga de Jerusalém, Israel.

Com isso, foi desenvolvida uma perspectiva que se caracterizava pelo uso do ponto de fuga, para o qual converge uma série de linhas (linhas de fuga), tornando possível a representação de objetos tridimensionais.

Confira o seguinte desenho de um trabalho de Brunelleschi e a construção finalizada.



FILIPPO BRUNELLESCHI - COLEÇÃO PARTICULAR

Filippo Brunelleschi, *Desenho em perspectiva para a Igreja do Espírito Santo*, Florença, Itália, 1428.

GIONNIXXX/GETTY IMAGES

Vista interna da Igreja do Espírito Santo, Florença, Itália. Foto de 2020.

Atividade

Pesquise obras de arte em que seja possível notar a presença de um ou mais pontos de fuga. Depois, compartilhe com um colega as obras que você encontrou e analise as obras dele enquanto ele analisa as suas. **Veja que interessante**: Resposta pessoal.

No boxe *Veja que interessante*, é apresentada a perspectiva, uma técnica bastante usada em pinturas e ilustrações. O estudo desse boxe visa favorecer o desenvolvimento da competência geral **1**.

A técnica sobre perspectiva foi desenvolvida com o passar dos anos, e os artistas puderam, assim, reproduzir com mais perfeição a realidade em suas obras, já que a perspectiva possibilita criar noções de profundidade e volume, tornando possível a representação de objetos tridimensionais. Duas características importantes da perspectiva são a linha do horizonte e o ponto de fuga, que fazem com que o que está sendo retratado mantenha todas as proporções corretamente.

No boxe, podemos observar um mosaico do século VI d.C. em que não há perspectiva e um desenho da Igreja do Espírito Santo, em perspectiva, acompanhado de uma foto do mesmo local.

Sugestão de atividade extra

Peça aos estudantes que pesquisem as obras e os estudos de Leonardo da Vinci sobre perspectiva e ponto de fuga.

Medidas de volume

BNCC:

Habilidade EF09MA19.

Objetivo:

Calcular a medida do volume de prismas e cilindros retos quaisquer.

Justificativa

Já foi abordado como determinar a medida do volume de paralelepípedos reto-retângulos. O cálculo da medida do volume de prismas e cilindros retos quaisquer amplia esse conhecimento e possibilita aos estudantes resolver e elaborar diferentes problemas, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA19**.

Mapeando conhecimentos

Reproduza o quadro da **atividade 26** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* na lousa e peça aos estudantes que completem o quadro com as medidas que faltam. Esse é o momento oportuno para diagnosticar se recordam como se calcula a medida do volume de um paralelepípedo reto-retângulo. Se necessário, peça que leiam a definição apresentada na seção.

Pergunte aos estudantes: "Como calcular a medida do volume de um prisma reto qualquer? E de um cilindro reto qualquer?". Para ajudá-los a responder a essas questões, organize-os em duplas ou trios e disponibilize modelos de prismas triangulares retos que, ao ser justapostos, convenientemente formam modelos de outros prismas retos.

Para as aulas iniciais

Caso os estudantes tenham demonstrado dificuldades na dinâmica inicial, oriente-os a concluir que a medida do volume de um prisma triangular reto é obtido multiplicando a medida da área de sua base pela medida de sua altura. Depois, incentive-os a empregar a mesma estratégia para determinar a medida do volume de outros prismas retos.

Se julgar pertinente, proponha aos estudantes que confeccionem a planificação dos prismas apresentados neste tópico. Além disso, utilize os prismas construídos para consolidar o aprendizado dos tópicos anteriores, sobre vistas ortogonais. Peça aos estudantes que identifiquem em cada prisma a vista frontal. Lembre-os de que podem escolher qualquer face para considerar como vista frontal. Em seguida, e a partir da definição da vista frontal, peça que determinem as outras vistas desse prisma, numerando as faces da planificação.

Prismas e cilindros

Após retomar o conceito de prismas e cilindros, é importante definir prismas e cilindros retos porque serão mencionados no estudo da determinação das medidas de volume. Comente que prismas retos são aqueles que têm as arestas laterais perpendiculares às bases. Depois, mostre exemplos de prismas que não são retos, ou seja, prismas oblíquos. Já os cilindros retos são aqueles que têm o eixo (segmento de reta que liga os centros das bases do cilindro) perpendicular aos planos das bases.

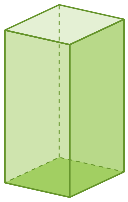
Continua

2 Medidas de volume

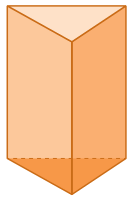
Agora, vamos estudar as medidas de volume de prismas e cilindros retos. Antes de iniciar esse estudo, é necessário relembrar as características dessas figuras geométricas.

Prismas e cilindros

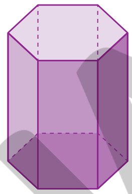
Os **prismas** são poliedros com duas bases paralelas que são polígonos congruentes; as demais faces são paralelogramos.



prisma de base quadrada



prisma de base triangular

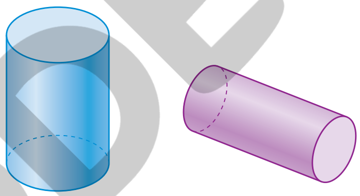


prisma de base hexagonal

Observações

1. O prisma de base retangular e faces também retangulares é denominado **bloco retangular** ou **paralelepípedo reto-retângulo**.
2. O **cubo** é o paralelepípedo reto-retângulo que tem todas as faces quadradas.

Os **cilindros** são corpos redondos que têm duas bases circulares congruentes.



Medida do volume de um paralelepípedo reto-retângulo

Para estudar a medida do volume dos outros prismas e dos cilindros, vamos relembrar o cálculo da medida do volume de um bloco retangular.

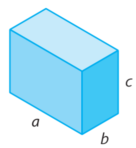
A medida do volume de um paralelepípedo reto-retângulo é calculada da maneira a seguir.

$$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c$$

medida da altura

medida da largura

medida do comprimento



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando as medidas do comprimento (a) e da largura (b) como medidas das dimensões da base de um paralelepípedo reto-retângulo, podemos escrever:

$$\underbrace{V_{\text{paralelepípedo}} = A_{\text{base}}}_{\text{medida da área da base}} \cdot \underbrace{c}_{\text{medida da altura}}$$

Considere este exemplo.

Uma piscina, que tem o formato de um bloco retangular, ocupa uma área cuja medida é igual a 20 m^2. Foi colocada água até 1,5 m de medida de altura. Quantos litros de água foram colocados nessa piscina? (Lembre que 1 m^3 = 1 000 L)

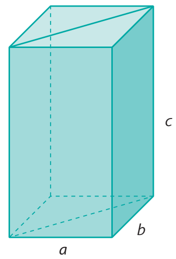
$$V_{\text{piscina}} = A_{\text{base}} \cdot h = 20\ m^2 \cdot 1{,}5\ m = 30\ m^3$$

Como 1 m^3 = 1 000 L, temos:

$$30\ m^3 = 30\,000\ L$$

Portanto, foram colocados 30 000 L de água na piscina.

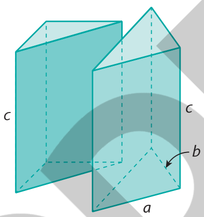
Medida do volume de um prisma triangular reto



Considere que um paralelepípedo reto-retângulo, como o representado, foi decomposto em dois prismas triangulares idênticos, cujas bases são triângulos retângulos.

A medida do volume de um paralelepípedo reto-retângulo é calculada pelo produto:

$$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c$$



Como esse paralelepípedo foi decomposto em dois prismas triangulares idênticos, a medida do volume de cada prisma triangular corresponde à metade da medida do volume do paralelepípedo.

$$V_{\text{prisma triangular}} = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{paralelepípedo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot c \quad \text{I}$$

A medida da área da base do paralelepípedo é igual a:

$$A_{\text{base do paralelepípedo}} = a \cdot b$$

A medida da área da base de cada prisma triangular é metade da medida da área da base do paralelepípedo. Então:

$$A_{\text{base do prisma triangular}} = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{base do paralelepípedo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad \text{II}$$

De I e II, podemos escrever:

$$V_{\text{prisma triangular}} = A_{\text{base do prisma triangular}} \cdot c$$

Ou seja:

$$V_{\text{prisma triangular}} = \underbrace{A_{\text{base}}}_{\text{medida da área da base}} \cdot \underbrace{c}_{\text{medida da altura}}$$

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Chame a atenção dos estudantes a respeito da unidade de medida utilizada para determinar o volume da piscina apresentada no exemplo. Peça que observem que temos o produto de três medidas dadas em metro e que, portanto, o produto final será metro ao cubo (metros cúbicos). Comente a título de curiosidade que eles, provavelmente, vão estudar as operações entre grandezas nas unidades de medida em Física, no Ensino Médio, sob o título de análise dimensional.

Medida do volume de um prisma triangular reto

Nesse tópico, apresentamos a fórmula para determinar a medida do volume de um prisma triangular, obtido por meio da fórmula que determina a medida do volume de um paralelepípedo reto-retângulo. Esse processo é importante, pois ajuda o estudante a não apenas memorizar, mas a compreender o **raciocínio lógico-matemático** envolvido na dedução dessas fórmulas.

Continuação

Medida do volume de um paralelepípedo reto-retângulo

Caso os estudantes não se recordem, retome o cálculo da medida de volume de um paralelepípedo reto-retângulo por meio da contagem da quantidade de cubinhos. Se possível, incentive a manipulação de cubinhos do material dourado para que concluam que a medida do volume é obtida multiplicando-se a medida do comprimento pela medida da largura e pela medida da altura.

(EF09MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

Medida do volume de um prisma reto

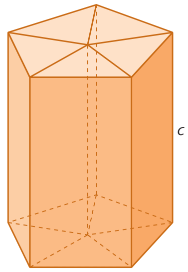
Os estudantes devem perceber que a fórmula $V = A_{base} \cdot c$ é válida para qualquer prisma regular. Se julgar adequado, promova um momento de reflexão, fazendo as seguintes perguntas a eles a respeito de um prisma de base quadrada e volume igual a k:

Se quisermos o volume igual a $2k$, sem alterar a medida da base, o que deveremos fazer com a medida da altura? (Resposta: dobrar a medida da altura.)

Se quisermos o volume igual a $\frac{k}{4}$, sem alterar medida da altura, o que deveremos fazer com a área da base? Qual é o efeito na medida do lado da base quadrada? (Resposta: reduzir à quarta parte. A medida do lado da base será reduzido à metade.)

Pensando em volume constante, a área da base e a medida da altura do prisma são direta ou inversamente proporcionais? (Resposta: inversamente proporcionais.)

Medida do volume de um prisma reto



Qualquer prisma regular pode ser dividido em prismas triangulares idênticos. A quantidade de prismas triangulares formados será igual ao número de lados da base desse prisma regular.

Por exemplo, o prisma pentagonal regular pode ser decomposto em 5 prismas triangulares idênticos.

Logo, a medida do volume desse prisma pode ser calculada assim:

$$V_{\text{prisma pentagonal}} = 5 \cdot V_{\text{prisma triangular}}$$

$$V_{\text{prisma pentagonal}} = 5 \cdot A_{\text{base do prisma triangular}} \cdot \underbrace{c}_{\text{medida da altura}}$$

Observe que a medida da área da base do prisma pentagonal corresponde à soma das medidas das áreas das bases dos prismas triangulares, ou seja, $A_{\text{base do prisma pentagonal}} = 5 \cdot A_{\text{base do prisma triangular}}$. Assim, podemos escrever:

$$V_{\text{prisma pentagonal}} = A_{\text{base do prisma pentagonal}} \cdot \underbrace{c}_{\text{medida da altura}}$$

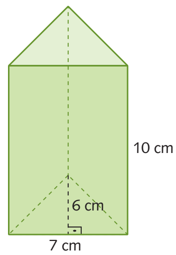
Esse processo descrito para o prisma pentagonal regular pode ser adaptado para qualquer prisma reto.

De modo geral, a medida do volume de qualquer prisma reto pode ser calculada multiplicando-se a medida da área da base pela medida da altura.

$$\boxed{V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot \underbrace{c}_{\text{medida da altura}}}$$

Acompanhe estes exemplos.

a) A altura do prisma triangular mede 10 cm, e a base é um triângulo equilátero cujo comprimento do lado mede 7 cm e o comprimento da altura mede 6 cm. Qual é a medida do volume desse prisma?



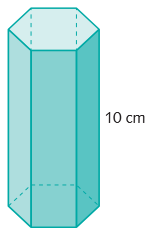
Inicialmente, calculamos a medida da área da base:

$$A_{\text{base}} = \frac{7\text{ cm} \cdot 6\text{ cm}}{2} = 21\text{ cm}^2$$

Logo, a medida do volume do prisma é:

$$V_{\text{prisma}} = 21\text{ cm}^2 \cdot 10\text{ cm} = 210\text{ cm}^3$$

b) Um prisma reto de base hexagonal regular tem 10 cm de medida de altura e base de medida de área igual a 15 cm². Qual é a medida do volume desse prisma?



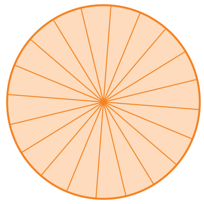
$$V_{\text{prisma}} = 15\text{ cm}^2 \cdot 10\text{ cm} = 150\text{ cm}^3$$

Portanto, a medida do volume do prisma é 150 cm³.

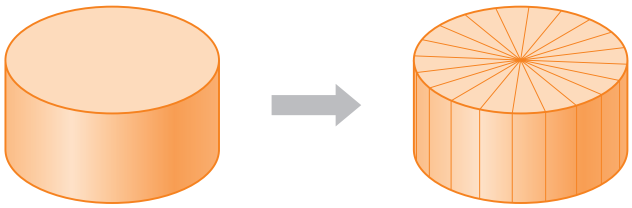
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Medida do volume de um cilindro reto

Ao dividir um círculo em n setores, sendo n um número muito grande, cada um dos setores circulares se aproxima do formato de um triângulo.



Do mesmo modo, dado um cilindro, a medida da área da sua base pode ser aproximada pela medida da área de n triângulos. Assim, a medida do volume de um cilindro reto poderá ser aproximada pela medida do volume de n prismas triangulares com a mesma medida da altura do cilindro.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

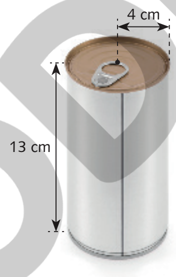
A medida do volume de um cilindro reto pode ser calculada multiplicando-se a medida da área da base pela medida da altura:

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot c \quad \text{ou} \quad V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot c$$

medida da altura

Acompanhe o exemplo.

Uma lata se parece com um cilindro reto, conforme mostra a imagem. Sabendo que a medida da capacidade interna da lata corresponde a 90% da medida do volume total, quantos mililitros, aproximadamente, cabem nessa lata?



YELLOW CAT/SHUTTERSTOCK

Inicialmente, calculamos a medida da área da base. Para isso, vamos considerar $\pi = 3{,}14$:

$$A_{base} = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot (4 \text{ cm})^2 = 3{,}14 \cdot 16 \text{ cm}^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$$

Logo, a área da base mede 50,24 cm^2.

Agora, determinamos a medida do volume da lata:

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot c = 50{,}24 \text{ cm}^2 \cdot 13 \text{ cm} = 653{,}12 \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume da lata mede 653,12 cm^3.

Para determinar a medida da capacidade interna da lata, consideramos 90% da medida do volume total.

$$653{,}12 \text{ cm}^3 \cdot 0{,}9 = 587{,}808 \text{ cm}^3$$

Como 1 cm^3 = 1 mL, concluímos que cabem aproximadamente 588 mL nessa lata.

Medida do volume de um cilindro reto

Ao trabalhar o exemplo, verifique se os estudantes diferenciam volume de capacidade. É interessante relembrar esses conceitos:

Volume é a medida do espaço ocupado por um corpo ou um objeto.

Capacidade é o volume interno de um corpo ou um objeto.

Desses conceitos, peça aos estudantes que deem exemplos de unidade de medida de cada uma delas presentes no cotidiano (m^3 de areia comprada para uma obra; litros de leite utilizado em uma receita etc.). Mais do que isso, verifique se eles lembram e compreendem a relação convencionada entre as unidades de medida.

• Na **atividade 17**, uma estratégia para resolver o problema é perceber que o pentágono regular, base do prisma, pode ser decomposto em 5 triângulos congruentes. Dessa maneira, pode-se calcular a medida da área da base determinando a medida da área de um desses triângulos e multiplicando esse valor encontrado por 5. Assim:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{3\text{ cm} \cdot 2{,}1\text{ cm}}{2} = 3{,}15\text{ cm}^2$$

$$A_{\text{base}} = 5 \cdot 3{,}15\text{ cm}^2 = 15{,}75\text{ cm}^2$$

Uma vez calculada a medida da área da base, basta multiplicar esse valor pela medida de comprimento da altura do prisma.

$V_{\text{prisma}} = 15{,}75\text{ cm}^2 \cdot 5\text{ cm} = 78{,}75\text{ cm}^3$

Logo, a medida do volume do prisma pentagonal reto é igual a $78{,}75\text{ cm}^3$.

As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

Atividades

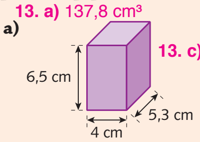
19. a) Sim, pois ambas têm medida de volume igual a $1\,000\text{ cm}^3$.

Faça as atividades no caderno.

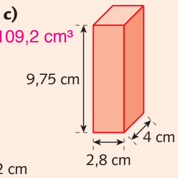
13 Calcule a medida do volume dos seguintes paralelepípedos.

13. a) $137{,}8\text{ cm}^3$

a)

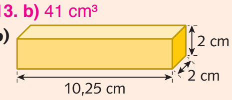


c) 13. c) $109{,}2\text{ cm}^3$



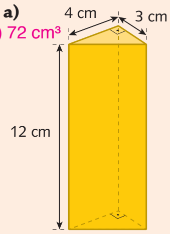
13. b) 41 cm^3

b)



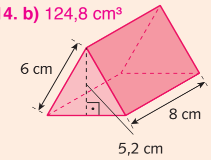
14 Calcule a medida do volume dos prismas a seguir.

a) 14. a) 72 cm^3



b) Considere que o triângulo da base é equilátero.

14. b) $124{,}8\text{ cm}^3$

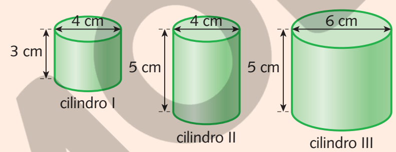


15 Considere um prisma octogonal regular, que foi decomposto em oito prismas triangulares idênticos. A medida da área da base desse prisma octogonal é 32 cm^2 e a medida da altura é 5 cm.

a) Calcule a medida do volume do prisma octogonal. 15. a) 160 cm^3

b) Calcule a medida do volume de cada prisma triangular. 15. b) 20 cm^3

16 Considere os cilindros a seguir.



a) Sem efetuar os cálculos, indique qual dos cilindros tem maior medida de volume e qual tem menor medida de volume. Justifique sua resposta.

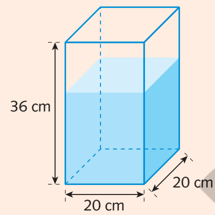
b) Calcule a medida do volume de cada um dos cilindros. Considere $\pi = 3{,}14$.

17 Considere um prisma pentagonal reto em que a altura mede 5 cm e sua base é um pentágono regular cujo comprimento do lado mede 3 cm (considere que o comprimento do apótema mede 2,1 cm). Qual é a medida do volume desse prisma?

17. $78{,}75\text{ cm}^3$

18 Neste recipiente, colocou-se água até $\frac{2}{3}$ da medida de altura.

18. a) $9\,600\text{ cm}^3$

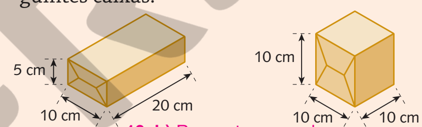


a) Qual é a medida do volume de água que foi colocada nesse recipiente?

b) Quantos mililitros de água ainda poderiam ser colocados nesse recipiente?

18. b) 4 800 mL

19 Márcia pretende embalar alguns bombons para entregar a um cliente. Ela já embalou, anteriormente, essa mesma quantidade em uma caixa cujo volume media 900 cm^3. Para esses novos bombons, ela tem as seguintes caixas:



19. b) Resposta pessoal.

a) Considerando somente a medida do volume, Márcia poderá utilizar as caixas disponíveis? Justifique.

b) Além da medida do volume, o que Márcia poderia considerar na escolha da caixa?

c) Indique uma informação que poderia ser acrescentada no enunciado, de modo que torne ambas as caixas inadequadas para Márcia. 19. c) Resposta pessoal.

20 Elabore um problema envolvendo o cálculo da medida do volume de um cilindro reto qualquer. Escolha adequadamente o cilindro e suas medidas.

Em seguida, troque seu problema com o de um colega para que um resolva o problema criado pelo outro. Depois, confiram as resoluções e verifiquem se as informações contidas nos problemas foram suficientes para resolvê-los. 20. Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

16. a) Espera-se que os estudantes identifiquem que o cilindro III tem maior medida de volume por ser maior que os outros cilindros e que o cilindro I tem menor medida de volume por ser menor que os outros cilindros.
16. b) Da esquerda para a direita: $37{,}68\text{ cm}^3$, $62{,}8\text{ cm}^3$ e $141{,}3\text{ cm}^3$.

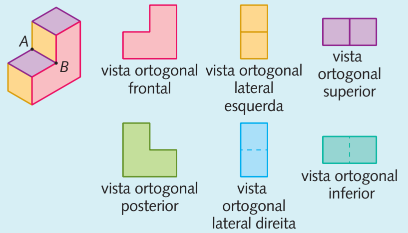
As imagens foram aplicadas sem respeitar a proporção real entre suas medidas.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

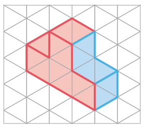
Faça as atividades no caderno.

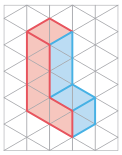
Vistas ortogonais

A projeção ortogonal de uma figura sobre um plano é chamada de **vista ortogonal**.
Quando as arestas não são visíveis na vista ortogonal considerada, usamos linhas tracejadas para indicá-las, como a aresta $\overline{AB}$ está indicada nas vistas inferior e lateral direita.



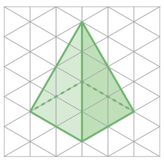
1. Considerando que a frente da figura é a face azul, represente a vista ortogonal superior, lateral esquerda e frontal destes sólidos geométricos.

a) 

b) 

1. Respostas em *Orientações*.

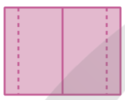
2. Represente a vista ortogonal frontal, lateral esquerda e superior desta pirâmide de base quadrada representada na malha triangular.



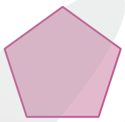
2. Resposta em *Orientações*.

3. Escreva o poliedro que tenha as vistas ortogonais indicadas em cada item.

a)



vista ortogonal superior



vista ortogonal frontal

3. a) prisma de base pentagonal

b)

vista ortogonal superior

vista ortogonal frontal

3. b) pirâmide de base hexagonal

Medidas de volume

Medida do volume de um prisma reto

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot c$$

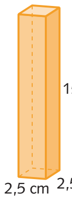
c — medida da altura

Medida do volume de um cilindro reto

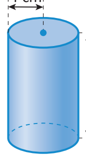
$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot c \quad \text{ou} \quad V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot c$$

c — medida da altura

4. Determine a medida do volume destes sólidos geométricos. Considere $\pi = 3{,}14$.

a) 

4. a) 93,75 cm³

b) 

4. b) 602,88 cm³

5. Quantos metros cúbicos de água são necessários para encher uma piscina retangular com 25 m de medida do comprimento, 10 m de medida da largura e 1,8 m de medida da profundidade? 5. 450 m³

6. Um aquário tem o formato de um prisma de base triangular. Sabe-se que o triângulo da base é retângulo com catetos com medidas de comprimento de 50 cm e 40 cm e que a medida da altura do aquário é 20 cm. Determine:

a) a medida do volume do aquário em cm³;

b) quantos litros de água cabem nesse aquário. (Lembre-se: 1 L = 1 000 cm³) 6. a) 40 000 cm³ 6. b) 40 L

7. Uma caixa-d'água cilíndrica será esvaziada completamente para limpeza. Ela tem 2,4 m de medida de comprimento do diâmetro e 1 m de medida da altura. Considerando $\pi = 3$, determine:

a) a medida do volume da caixa-d'água em m³;

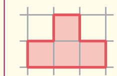
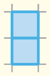
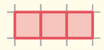
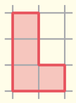
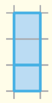
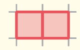
b) quantos litros de água cabem nessa caixa. (Lembre-se: 1 L = 1 000 cm³) 7. a) 4,32 m³ 7. b) 4 320 L

8. Calcule a medida do volume de um prisma de base hexagonal, sabendo que o hexágono da base é regular com lados medindo 3 cm de comprimento e que a medida da altura do prisma é 8 cm. 8. $108\sqrt{3}$ cm³

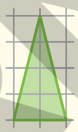
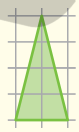
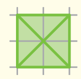
Revisão dos conteúdos deste capítulo

Vistas ortogonais

• Respostas da **atividade 1**:

Item	Vista ortogonal lateral esquerda	Vista ortogonal frontal	Vista ortogonal superior
a			
b			

• Resposta da **atividade 2**:

Vista ortogonal lateral esquerda	Vista ortogonal frontal	Vista ortogonal superior
		

Medidas de volume

• Na **atividade 4**, espera-se que os estudantes reconheçam que o sólido geométrico do **item a** é um paralelepípedo e o do **item b** é um cilindro reto. Aproveite a oportunidade para verificar se apresentam alguma dificuldade para determinar a medida do volume destes sólidos. Verifique, em cada caso, se apresentam a medida do volume utilizando a unidade de medida correta.

• Após concluírem a **atividade 5**, pergunte: "Quantos litros de água são necessários para encher esta piscina?". Espera-se que eles se recordem que 1 m³ = 1 000 L e, portanto, são necessários 450 000 L de água para encher a piscina.

• Caso os estudantes tenham dificuldades para compreender a situação-problema da **atividade 6**,oriente-os a fazer um esboço da situação.

• Após concluírem as **atividades 7** e **8**, discutam cada uma coletivamente. Você pode convidar alguns estudantes para mostrarem no quadro como fizeram.

CAPÍTULO 11 – CONSTRUÇÃO DE GRÁFICOS ESTATÍSTICOS

Trocando ideias

BNCC:

- Competências gerais 2, 4 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 6 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

- Levantar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre a construção de gráficos de barras simples e gráficos de setores.
- Ler, interpretar e construir fluxogramas.

Reproduza na lousa os fluxogramas do material. Depois, dê um tempo para que os estudantes analisem e discutam entre si o que entenderam. Em seguida, peça que respondam à primeira questão. Espera-se que eles percebam que o primeiro fluxograma descreve o procedimento para a construção de um gráfico de barras simples verticais. Caso tenham dificuldade, proponha que reproduzam os passos descritos. Repita o mesmo procedimento ao explorar a questão proposta no segundo item.

Convide-os a construir o fluxograma solicitado no terceiro item. É importante deixá-los à vontade para conversar com os colegas. Depois, peça a alguns estudantes que reproduzam na lousa o fluxograma que fizeram para que ele seja validado coletivamente. Espera-se que eles construam um fluxograma similar ao do exemplo abaixo:

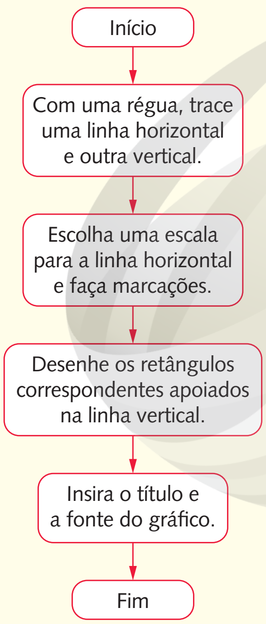


ILUSTRAÇÃO: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

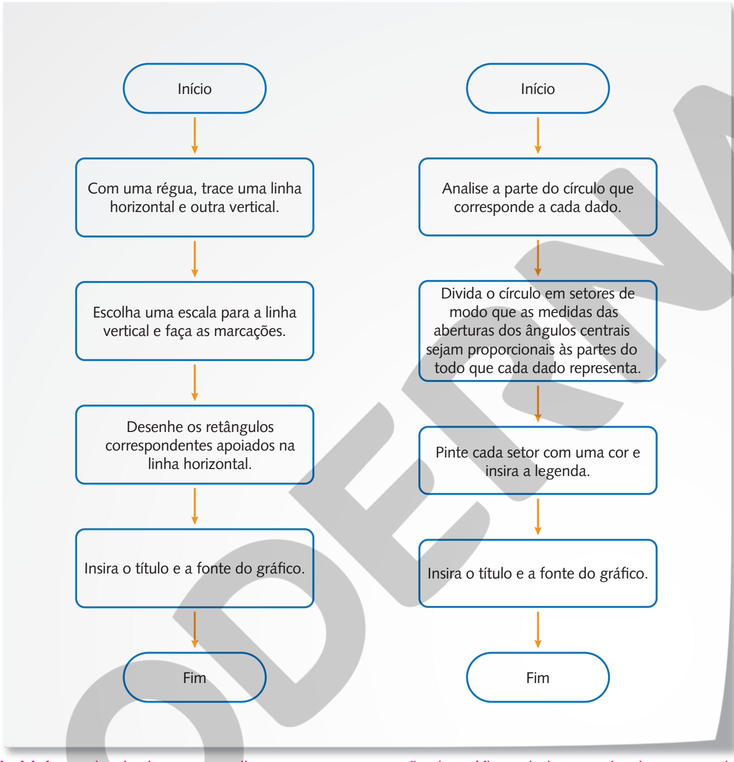
Se achar conveniente, amplie essa proposta perguntando aos estudantes se sabem construir outros tipos de gráficos. Peça àqueles que responderam de maneira afirmativa que expliquem o procedimento verbalmente ou por meio de um fluxograma.

Capítulo 11

Construção de gráficos estatísticos

Trocando ideias

Analise os fluxogramas a seguir.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Trocando ideias: primeiro item: procedimento para construção de gráficos de barras simples; segundo item: procedimento para construção de gráficos de setores; terceiro item: exemplo de resposta em *Orientações*.

- Qual é o procedimento representado pelo fluxograma da esquerda?
- Qual é o procedimento representado pelo fluxograma da direita?
- Represente na forma de um fluxograma o procedimento para a construção de gráficos de barras simples horizontais. Depois, compartilhe com os colegas.

Neste capítulo, você aprofundará seus conhecimentos sobre a construção de gráficos estatísticos, inclusive com o auxílio de *software* de planilhas eletrônicas, e analisará como algumas escolhas podem afetar a interpretação da informação com base nesses gráficos.

A proposta deste *Trocando ideias* possibilita aos estudantes lidar com diferentes linguagens (verbal e fluxograma), o que favorece o desenvolvimento da competência geral **4** e da competência específica **6** da BNCC. Além disso, a turma é incentivada a exercitar sua curiosidade e colocar em prática o espírito de investigação, o que permite o desenvolvimento da competência geral **2** e da competência específica **2**. Por fim, por promover o diálogo e a interação, a competência geral **9** e a competência específica **8** também têm o seu desenvolvimento favorecido.

1 Construção de gráficos

Em uma pesquisa estatística, os dados coletados podem ser organizados e representados em gráficos. Para isso, é necessário escolher o gráfico mais adequado para representar os dados.

Na tabela a seguir, está representada a quantidade de medalhas conquistadas pelo Brasil em suas participações nos Jogos Olímpicos desde 1920.

Medalhas conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos (1920-2020)

Ano	Ouro	Prata	Bronze	Total
2020	7	6	8	21
2016	7	6	6	19
2012	3	5	9	17
2008	3	4	10	17
2004	5	2	3	10
2000	0	6	6	12
1996	3	3	9	15
1992	2	1	0	3
1988	1	2	3	6
1984	1	5	2	8
1980	2	0	2	4
1976	0	0	2	2
1972	0	0	2	2
1968	0	1	2	3
1964	0	0	1	1
1960	0	0	2	2
1956	1	0	0	1
1952	1	0	2	3
1948	0	0	1	1
1936	0	0	0	0
1932	0	0	0	0
1924	0	0	0	0
1920	1	1	1	3
Total	37	42	71	150

Dados obtidos em: https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas. Acesso em: 13 jun. 2022.

* Os Jogos Olímpicos de Tóquio 2020 foram disputados em 2021 devido à pandemia de Covid-19.

** Os Jogos Olímpicos de 1940 e 1944 não ocorreram devido à Segunda Guerra Mundial.

*** O Brasil não participou dos Jogos Olímpicos de Amsterdã 1928 por falta de recursos para enviar uma delegação.

Construção de gráficos

BNCC:

Habilidades EF09MA21 e EF09MA22 (as descrições estão na página IX).

Objetivos:

- Construir histogramas de frequência e gráficos de barras, de setores e de segmentos.
- Identificar problemas que podem comprometer a leitura e a interpretação dos dados representados em diferentes tipos de gráficos.

Tema contemporâneo transversal:

PLURALIDADE CULTURAL

Justificativa

A representação e a organização dos dados coletados são uma etapa importante do processo de uma pesquisa estatística e, por isso, é fundamental que os estudantes saibam construir diferentes tipos de gráficos. A experiência com essas construções também pode fazer com que eles sejam críticos quanto à escolha do gráfico mais adequado para apresentar determinado conjunto de dados, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA22**.

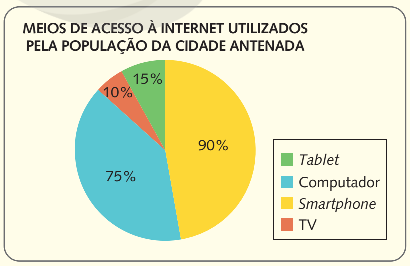
A identificação de problemas que podem comprometer a leitura e a interpretação dos dados representados em diferentes tipos de gráficos, por sua vez, prepara os estudantes para analisar de maneira crítica gráficos divulgados pela mídia. A ideia é que eles reconheçam quando um erro pode sugerir uma interpretação equivocada da situação em questão, o que favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA21**.

Mapeando conhecimentos

Peça aos estudantes que façam as **atividades 27** e **28** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Durante a realização das atividades, pergunte: "Em que situações é mais conveniente utilizar o gráfico de barras? E o gráfico de setores? E o gráfico de segmentos? Como foram construídos os gráficos da **atividade 27**? Quais cuidados devem ser tomados para construir o gráfico de segmentos solicitado na **atividade 28**? Que problemas na construção de um gráfico podem induzir a erros de leitura e/ou interpretação?".

Para as aulas iniciais

Faça a correção coletiva das **atividades 27** e **28** e explore o texto sobre gráficos estatísticos presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, apresente para a turma o gráfico a seguir.



Dados obtidos pela prefeitura da cidade Antenada em 2024.

ILUSTRAÇÃO: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

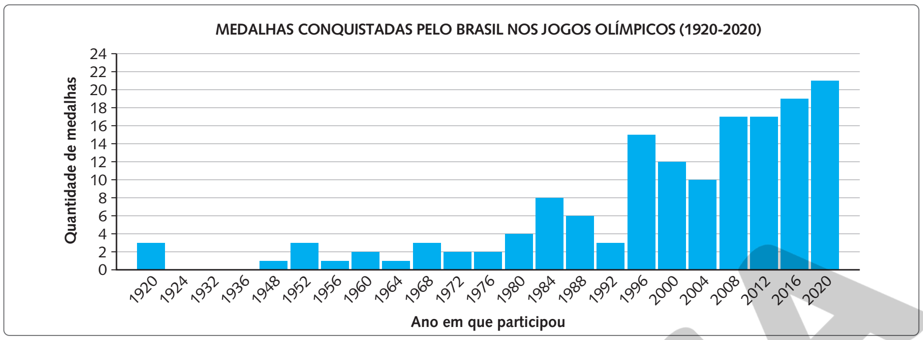
Pergunte: "O que há de errado neste gráfico? O que pode justificar o fato de a soma das porcentagens não ser igual a 100%?". Espera-se que os estudantes percebam que a soma das porcentagens não é igual a 100% e que isso ocorreu porque as pessoas que responderem à pesquisa acessam a internet utilizando mais de um meio. Enfatize que o gráfico de setores, nesse caso, não é o mais adequado para representar o conjunto de dados dessa pesquisa.

Ao iniciar o estudo sobre a construção de gráficos, é possível solicitar aos estudantes que levem à sala de aula alguma notícia publicada recentemente em jornal, revista ou *site* e que faça uso de dados estatísticos envolvendo tabelas ou gráficos diversos. Analise, junto com os estudantes, do ponto de vista estatístico, levando-os a perceber como atribuir significado aos dados apresentados e como interpretá-los. Esse tipo de atividade contribui para que analisem e relacionem criticamente os dados apresentados, questionando ou ponderando até mesmo sua veracidade. Interpretar e comparar dados é tão importante quanto organizar e representar um conjunto de dados. A situação também contribui para que os estudantes percebam a variedade de formas de apresentar dados tratados estatisticamente e a função dessas diversas representações, que é facilitar a compreensão de determinados aspectos ou particularidades daquilo que está sendo estudado.

Ao trabalhar com a construção de gráficos estatísticos de diferentes tipos, reforce aos estudantes quais cuidados devem ser tomados durante essas construções (escolha do tipo de gráfico, que deve levar em consideração os dados a serem representados, a escala a ser utilizada etc.), para que, de fato, a representação gráfica seja adequada. A identificação dos eixos e a indicação do título dos gráficos devem ser incentivadas durante as aulas, pois esses elementos contêm informações que devem ser examinadas com cuidado.

Os dados estatísticos podem ser organizados de diversas formas. É possível que os estudantes já tenham repertório para ler, interpretar e construir alguns gráficos; por isso, é importante que, nesse momento, eles analisem qual tipo de gráfico é mais conveniente para representar determinada informação.

Ao analisar os dados presentes na tabela, é possível observar que, com o passar dos anos, os atletas brasileiros conquistaram uma quantidade maior de medalhas. Entretanto, para chegar a essa conclusão, é necessária uma análise mais cuidadosa da tabela, que demanda certo tempo. Agora, analise os mesmos dados representados em um gráfico de barras.



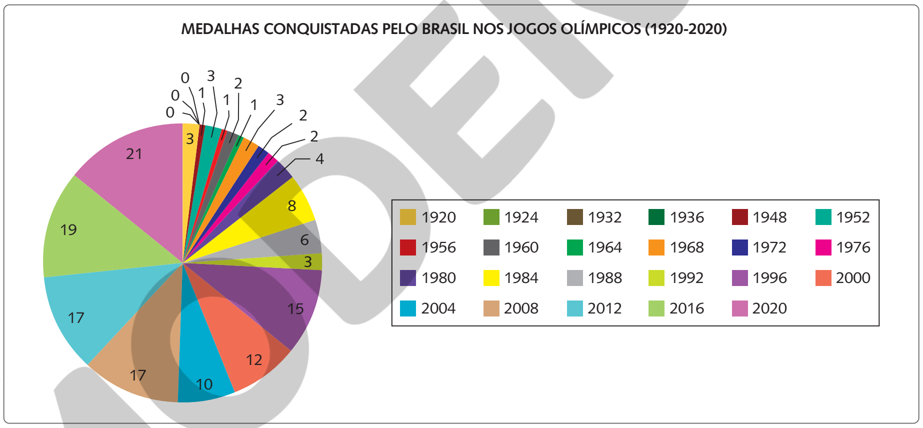
Dados obtidos em: https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas. Acesso em: 13 jun. 2022.

Por meio do gráfico é mais fácil perceber, por exemplo, que, a partir de 1996, uma quantidade maior de medalhas foi conquistada.

Os gráficos estatísticos podem nos ajudar a interpretar os resultados de uma pesquisa estatística. Confira como os mesmos dados podem ser representados em um gráfico de setores.

Conheça mais

No *site* do Comitê Olímpico do Brasil (COB), podem ser encontradas mais informações sobre os Jogos Olímpicos e as participações brasileiras.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

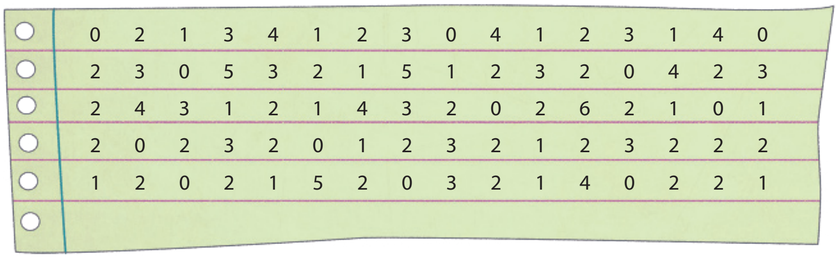
Dados obtidos em: https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas. Acesso em: 13 jun. 2022.

Assim como a escolha do gráfico pode facilitar a leitura e a interpretação dos dados, ela pode, também, dificultá-las, e até mesmo induzir a erros. Por isso, há gráficos mais adequados para apresentar determinados tipos de dados. A interpretação dos dados também fica comprometida quando os gráficos, utilizam escalas inadequadas, não têm legenda ou não têm fonte. Além disso, isso pode ser um indício de que os dados representados foram manipulados.

Vamos analisar a construção de alguns tipos de gráfico.

Construção de gráfico de barras

Foi realizada uma pesquisa estatística no município Alfa, em 2023, para averiguar a quantidade de filhos por família. Em uma amostra com 80 famílias que moram em diversos bairros desse município, foram obtidos os dados apresentados a seguir.



LÉO FANELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Para facilitar a visualização desses dados, eles foram organizados nesta tabela. A quantidade de filhos foi dividida em sete **categorias** distintas: nenhum filho, um filho, dois, três, quatro, cinco e seis filhos. A quantidade de elementos que pertencem a determinada categoria é chamada de **frequência** da categoria.

Podemos apresentar esses dados em um **gráfico de barras verticais**, representado em um plano com retângulos, todos com mesma medida de comprimento da base. A base dos retângulos situa-se no eixo horizontal e as alturas têm medidas proporcionais aos valores da variável representada no eixo vertical.

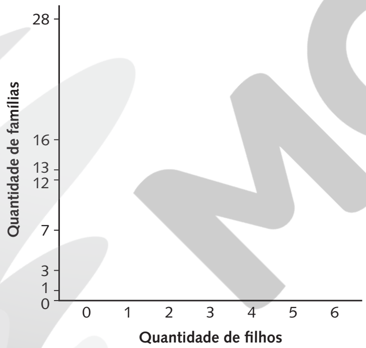
Quantidade de filhos por família do município Alfa em 2023

Quantidade de filhos	Quantidade de famílias (frequência)
0	12
1	16
2	28
3	13
4	7
5	3
6	1

Dados obtidos pela Secretaria Municipal de Assistência Social de Alfa em 2023.

Para construir o gráfico:

1º) identificamos os eixos e definimos a escala. No eixo horizontal, colocaremos a quantidade de filhos. No eixo vertical, a quantidade de famílias. Ao observar a amplitude dos dados, já podemos acertar as marcações dos eixos de forma conveniente;



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Construção de gráfico de barras

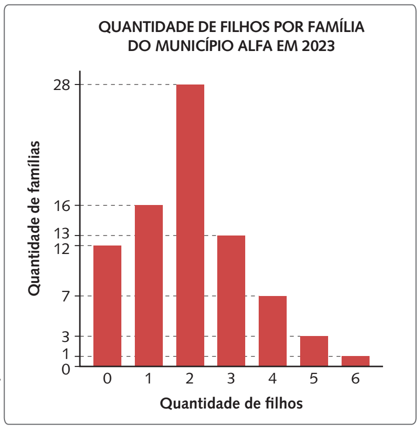
Pode-se propor aos estudantes que organizem dados coletados sobre determinado tema. Para isso, cada estudante pode, por exemplo, entrevistar as pessoas que moram na mesma casa que ele e anotar a idade de cada morador e seu estilo musical favorito. A ideia é que os estudantes reúnam os dados coletados de modo a obter um conjunto de dados maior. Podem-se organizar os dados em uma tabela de frequências e fixá-la em uma das paredes da sala. A intenção é que, conforme se avança no estudo dos tópicos deste capítulo, esses dados sejam tratados coletivamente e se transformem em informações significativas. É importante que os estudantes vivenciem experiências de coleta, organização, representação e interpretação de dados, pois isso poderá contribuir para que sejam capazes de atribuir significado aos conceitos que serão estudados.

Para responder à questão proposta pelo personagem (“Apenas observando o gráfico, qual é a moda desses dados?”), retome o conceito de moda com os estudantes, objeto de estudo no ano anterior.

Construção de histograma de frequência

Comente com os estudantes que tanto o gráfico de barras quanto o histograma servem para representar variáveis que exprimem quantidades, ou seja, variáveis quantitativas. A escolha de qual gráfico construir deve levar em consideração se as variáveis são quantitativas discretas ou contínuas. Se for uma variável quantitativa discreta, o conjunto de dados será enumerável; se for uma variável quantitativa contínua, os valores formarão um intervalo de números reais.

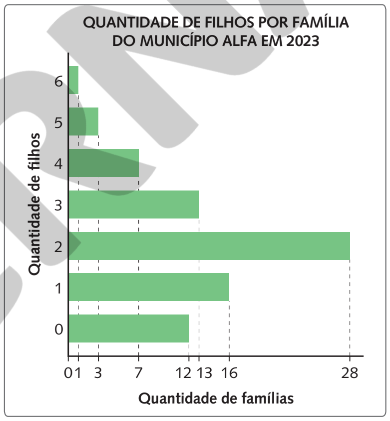
2º) em seguida, construímos os retângulos correspondentes e inserimos a fonte e o título do gráfico, que deve transmitir com precisão quais são as variáveis representadas nele.



Dados obtidos pela Secretaria Municipal de Assistência Social de Alfa em 2023.

Balão de fala: 2

De maneira parecida com a construção do gráfico de barras verticais, podemos construir um **gráfico de barras horizontais**. Esse tipo de gráfico é representado em um plano também com retângulos, todos com mesma medida de comprimento da base. A base dos retângulos fica no eixo vertical, indicando a quantidade de filhos. As medidas dos comprimentos dos retângulos devem ser proporcionais aos valores da variável representada no eixo horizontal, no qual, neste caso, indicamos a quantidade de famílias com determinada quantidade de filhos.



Dados obtidos pela Secretaria Municipal de Assistência Social de Alfa em 2023.

Construção de histograma de frequência

Em janeiro de 2024, um professor do colégio Beta queria analisar a medida da altura dos estudantes do 9º ano. Ele obteve as medidas indicadas a seguir, em centímetro.

171	159	185	170	169	174	175	180	158
160	150	168	167	174	163	158	165	168
176	176	165	142	175	172	161	169	165
154	164	156	162	179	160	149	188	

LÉO FANELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Na tabela abaixo, os dados foram agrupados em classes (ou intervalos) de valores. A diferença entre o maior e o menor extremo de uma classe, nessa ordem, é chamada de **amplitude** da classe. No exemplo, a amplitude da classe 140 ⊢ 150 é 10, pois 150 − 140 = 10.

Distribuição de frequência das medidas de altura dos estudantes do 9º ano do colégio Beta em janeiro de 2024

Medida da altura (em cm)	Quantidade de estudantes (frequência)
140 ⊢ 150	2
150 ⊢ 160	6
160 ⊢ 170	14
170 ⊢ 180	10
180 ⊢⊣ 190	3

Dados obtidos pelo professor em janeiro de 2024.


LÉO FANELLI/ARQUIVO DA EDITORA

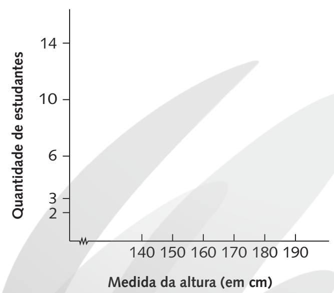
Observe que, nas quatro primeiras classes consideradas nesse exemplo, os intervalos não incluem os números situados no extremo à direita de cada classe. Por isso, dizemos que os intervalos são fechados à esquerda e abertos à direita, exceto a última classe, que é fechada à direita.

Podemos representar os dados relativos à medida da altura dos estudantes por meio de um **histograma** de classes.

O histograma é um gráfico utilizado para representar uma distribuição de frequências em que as classes são representadas por intervalos de mesma amplitude. Na elaboração de um histograma, constroem-se retângulos cujas medidas de comprimento das bases coincidem com as amplitudes das classes e a medida de comprimento da altura de cada retângulo representa a frequência da classe correspondente.

Para construir esse gráfico:

1º) identificamos os eixos e os valores que eles conterão, usando a tabela com os dados agrupados em classes, como referência tanto para as frequências que estarão no eixo vertical quanto para as classes que estarão no eixo horizontal;



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Deixe claro para os estudantes que, diferentemente do gráfico de barras, em que a posição das barras (verticais ou horizontais) não influencia a informação a ser transmitida por ele, no histograma só podemos construir barras justapostas na posição vertical.

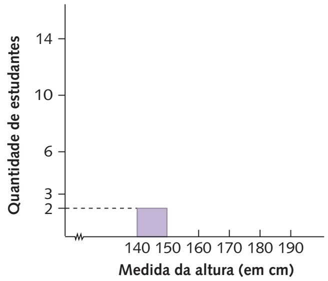
Construção de gráfico de setores

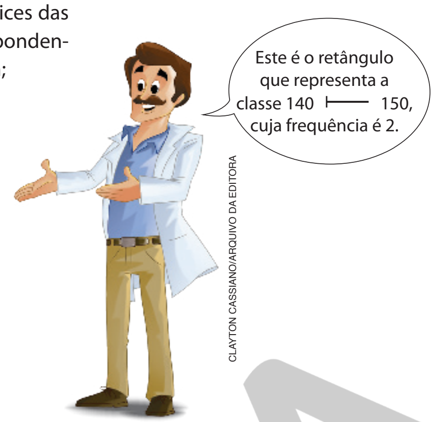
Ao trabalhar a construção de gráficos de setores, é importante retomar as ideias de medidas de abertura de ângulos e proporcionalidade.

É importante que os estudantes tenham alguns referenciais, como saber que a soma das porcentagens de todos os setores do gráfico representam 100% dos dados observados e que a metade do círculo que representa o gráfico é 50% e que 25% é equivalente à metade da metade do círculo. Isso facilita a identificação de valores sem que seja necessário realizar cálculos exatos.

Alerte os estudantes sobre os cuidados necessários durante o manuseio do compasso para construir gráficos de setores, a fim de evitar acidentes.

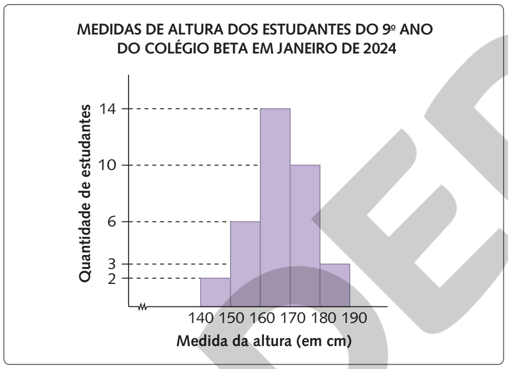
2º) em seguida, construímos os retângulos cujos vértices das bases estão localizados sobre os números correspondentes aos extremos das classes que eles representam;



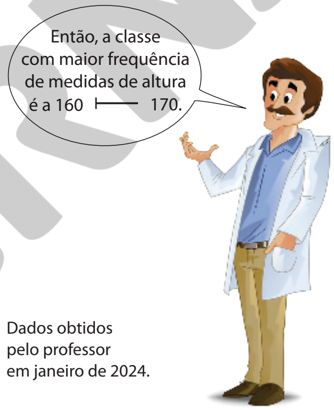


CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

3º) após construirmos todos os retângulos, inserimos a fonte e o título do gráfico. Repare que, no histograma, os retângulos ficam justapostos, sem espaço entre eles, pois onde termina uma classe já começa a outra.



Dados obtidos pelo professor em janeiro de 2024.



ILUSTRAÇÕES: GUILHERME CASAGRANDI/ARQUIVO DA EDITORA

CLAYTON CASSIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Construção de gráfico de setores

Confira o total de medalhas de ouro, prata e bronze conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos, de 1920 a 2020.

Quantidade de medalhas de ouro, prata e bronze conquistadas pelo Brasil nos Jogos Olímpicos (1920-2020)		
Ouro	Prata	Bronze
37	42	71

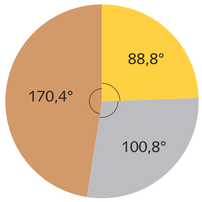
Dados obtidos em: https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas. Acesso em: 13 jun. 2022.

PHOTO BY PHIL WALTER/GETTY IMAGES

Isaquias Queiroz dos Santos, canoísta brasileiro, conquistou medalha de ouro nos Jogos Olímpicos de 2020, em Tóquio, no Japão. Foto de 2021.

Na construção do **gráfico de setores**, dividimos um círculo em setores com ângulos de medidas de abertura proporcionais às frequências das classes. Como o círculo corresponde ao total de medalhas conquistadas, associamos a medida da abertura do ângulo de 360° a 150 medalhas. Com base nessa informação, podemos obter a medida das aberturas dos ângulos associados ao setores correspondentes ao número de medalhas de ouro, prata e bronze conquistadas:

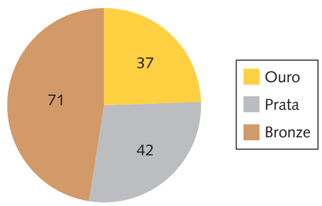
- medalhas de ouro: $\frac{37}{150} \cdot 360° = 88,8°$;
- medalhas de prata: $\frac{42}{150} \cdot 360° = 100,8°$;
- medalhas de bronze: $\frac{71}{150} \cdot 360° = 170,4°$.



Assim, o círculo deverá ser dividido em 3 partes de acordo com a medida de abertura do ângulo central: uma de 88,8°, uma de 100,8° e outra de 170,4°. Depois, cada parte deve ser pintada com uma cor diferente.

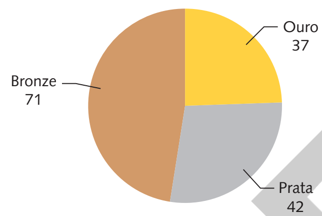
Por fim, devemos identificar os valores, com uma legenda ou traços com inscrições que correspondam aos setores da variável apresentada, e inserir o título e a fonte.

QUANTIDADE DE MEDALHAS DE OURO, PRATA E BRONZE CONQUISTADAS PELO BRASIL NOS JOGOS OLÍMPICOS (1920-2020)



Dados obtidos em: https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas. Acesso em: 13 jun. 2022.

QUANTIDADE DE MEDALHAS DE OURO, PRATA E BRONZE CONQUISTADAS PELO BRASIL NOS JOGOS OLÍMPICOS (1920-2020)



Dados obtidos em: https://www.cob.org.br/pt/cob/time-brasil/brasil-nos-jogos/medalhas-olimpicas. Acesso em: 13 jun. 2022.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Construção de gráfico de segmentos

Os dados seguintes são da balança comercial brasileira no primeiro semestre de 2021.

Balança comercial do Brasil no primeiro semestre de 2021 (em milhões de US$)		
Mês	Exportação	Importação
Janeiro	14947,7	15167,3
Fevereiro	16375,3	14539,2
Março	24335,8	17865,3
Abril	26059,4	16096,3
Maio	26200,7	17664,7
Junho	28257,9	17843,6

Dados obtidos em: https://balanca.economia.gov.br/balanca/pg_principal_bc/principais_resultados.html. Acesso em: 13 jun. 2022.

A indicação do título dos gráficos deve ser incentivada durante as aulas, pois os títulos contêm informações que devem ser examinadas com cuidado.

É importante que os estudantes saibam trabalhar com porcentagens para a articulação e a interpretação dos dados contidos no gráfico de setores.

Construção de gráfico de segmentos

Antes de explicar o processo de construção, é importante esclarecer para os estudantes que os gráficos de segmentos são usados para mostrar visualmente a evolução das frequências de uma variável no decorrer do tempo. A posição de cada segmento de reta indica crescimento, decréscimo ou estabilidade no período considerado. A inclinação do segmento de reta, por sua vez, indica a intensidade do crescimento ou do decréscimo.

Se achar pertinente, antes de explorar o exemplo do livro, mostre para a turma como construir um gráfico de segmentos mais simples (com uma única linha, por exemplo).

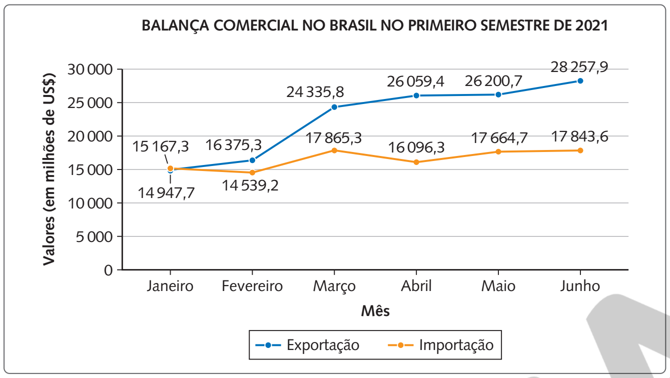
Após o trabalho com gráficos de barras (verticais e horizontais), histogramas, gráficos de setores e gráficos de segmentos, é possível discutir com os estudantes quais tipos de situação podem ser bem representados por esses gráficos e comentar sobre as vantagens e as desvantagens de utilizar cada um deles em determinado contexto. Para enriquecer essa discussão, proponha a eles que busquem notícias que façam uso de cada um desses tipos de gráfico, para interpretá-los e procurar refletir a respeito da conveniência ou não da representação escolhida em cada situação. Essa análise é importante, pois, quando tiverem de optar pela organização de dados em um tipo de gráfico, os estudantes deverão saber que características são relevantes para, então, optar por um ou por outro.

Após essa discussão, espera-se que percebam, por exemplo, que os gráficos de segmento são frequentemente usados para apresentar dados que variam ao longo de determinado período de tempo ou para identificar tendências de aumento ou decréscimo dos dados apresentados.

É importante que eles sejam estimulados a identificar os intervalos de crescimento, de decréscimo ou de constância da variável representada ao trabalhar com esse tipo de gráfico.

Nesta sequência de atividades, buscamos propiciar o desenvolvimento de parte da habilidade **EF09MA22**, apresentando situações nas quais os estudantes devem fazer leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas e representações gráficas.

A representação de dados utilizando um **gráfico de segmentos** permite observar a variação de certo dado ao longo do tempo.



Dados obtidos em: https://balanca.economia.gov.br/balanca/pg_principal_bc/principais_resultados.html. Acesso em: 13 jun. 2022.

Para construir esse gráfico, seguimos estes passos.

1º) Representamos, no eixo horizontal, os meses e, no eixo vertical, os valores da exportação e importação (em milhões de US$). Além disso, escolhemos uma escala para o eixo vertical.

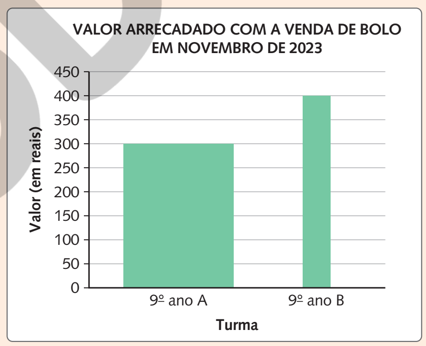
2º) Marcamos, a cada mês, os pontos correspondentes aos valores de exportação e importação. Em seguida, ligamos esses pontos por segmentos de reta.

3º) Colocamos a legenda para diferenciar exportação e importação e, por fim, inserimos a fonte e o título do gráfico.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 As duas turmas do 9º ano de um colégio vão realizar um passeio ao zoológico. Para auxiliar no custo do passeio, as turmas venderam bolos nos intervalos. No gráfico a seguir, constam os valores arrecadados pelas duas turmas em novembro de 2023.



Dados obtidos pelos estudantes em novembro de 2023.

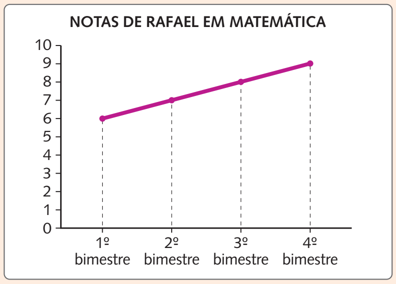
Se uma pessoa observar rapidamente o gráfico, qual é a impressão que terá sobre a arrecadação das duas turmas? O que pode ser feito para evitar essa impressão?

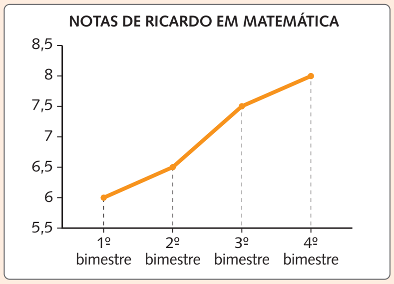
1. Espera-se que os estudantes respondam que um observador pode interpretar a arrecadação do 9º ano A como maior do que a arrecadação do 9º ano B. Para corrigir isso, as barras devem ter mesma medida de comprimento da base.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

2. Espera-se que os estudantes não concordem com a afirmação de Ricardo, pois ele usou uma escala diferente da escala de Rafael para indicar a evolução das notas. Rafael foi quem teve maior evolução.

2 Em 2023, os irmãos Rafael e Ricardo elaboraram os seguintes gráficos para mostrar a evolução das notas obtidas em Matemática.



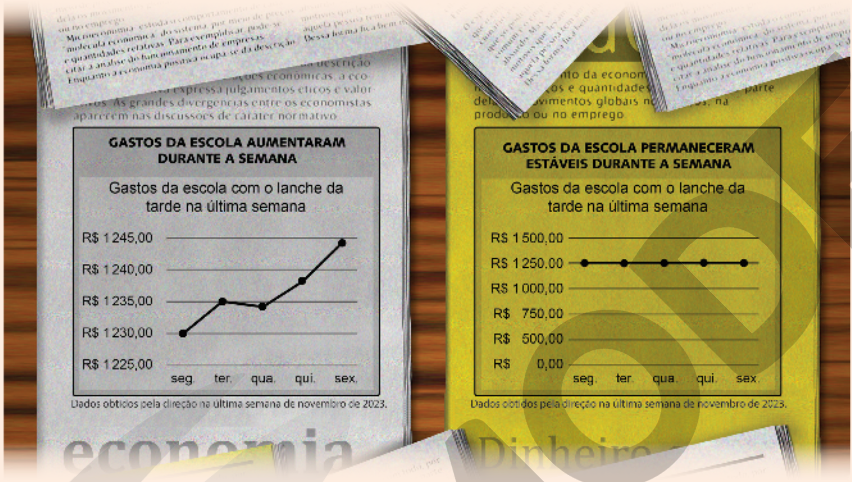


Dados obtidos por Rafael e Ricardo em 2023.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Ricardo afirmou ao pai que teve maior evolução nas notas do que Rafael. Você concorda com a afirmação dele? Explique sua resposta.

3 A escola Gama tem dois grêmios estudantis, os quais publicam as notícias semanais. Um deles costuma criticar e ser contra as decisões da direção da escola. Já o outro grêmio geralmente aprova as decisões da direção. Na última semana de novembro de 2023, ambos pediram informações a respeito dos gastos com o lanche da tarde. A direção entregou exatamente os mesmos dados para o diretor de cada grêmio. Analise as manchetes e os gráficos publicados nos dois jornais da escola.



MANGA/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que os gráficos apresentam as informações corretamente, responda às questões.

a) Qual é a amplitude dos valores observados? **3. a)** aproximadamente R$ 14,00

b) Qual é a porcentagem de aumento nos gastos de segunda-feira para sexta-feira? **3. b)** aproximadamente 1,1%

c) Qual é a impressão que se tem ao olhar o gráfico e a manchete do jornal à esquerda? E o gráfico e a manchete do jornal à direita? **3. c)** Espera-se que os estudantes percebam que a impressão é de que representam situações diferentes.

d) O que a escolha da escala do eixo vertical promoveu?

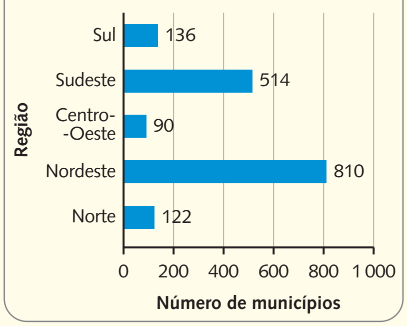
3. d) No gráfico da esquerda, promoveu a sensação de que os gastos da escola com o lanche da tarde aumentaram muito e, no gráfico da direita a sensação de que os gastos foram praticamente constantes durante a semana.

- Aproveite as **atividades 2** e **3** para promover uma discussão sobre como a escolha de uma escala inadequada (intencional ou não) pode induzir a erro de interpretação. Incentive-os a conjecturar sobre possíveis consequências que podem ser geradas pela interpretação errada.

- A cultura africana exerce forte influência na cultura brasileira, por meio da culinária, da religiosidade, das palavras de origem africana, das comidas, das festas, da música etc. Por isso, é importante aproveitar o **item b** da **atividade 4** para conversar com a turma sobre a importância das comunidades quilombolas.

Resposta do **item a** da **atividade 4**.

NÚMERO ESTIMADO DE MUNICÍPIOS COM LOCALIDADES QUILOMBOLAS NO BRASIL EM 2019



Dados obtidos em: BASE de Informações Geográficas e Estatísticas sobre os indígenas e quilombolas para enfrentamento à Covid-19. **Notas Técnicas**. Rio de Janeiro: IBGE, 2020. Volume especial.

Se achar conveniente, amplie essa atividade e desenvolva um trabalho interdisciplinar com História sobre os costumes e as tradições de diferentes comunidades quilombolas.

- Exemplo de resposta da **atividade 5**:

Medida da massa dos pacotes de feijão	
Medida da massa (em grama)	Quantidade de pacotes (frequência)
940 ⊢— 960	3
960 ⊢— 980	6
980 ⊢— 1000	6
1000 ⊢— 1020	3
1020 ⊢— 1040	2

Dados obtidos pelo laboratório em janeiro de 2024.

4. b) Exemplo de resposta: As comunidades quilombolas resgatam a história afro-brasileira, valorizando a preservação de costumes, organizações, saberes e tradições desse segmento social.

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso na atividade **7**.

4 Durante o regime escravocrata que existiu no Brasil, surgiram os quilombos, comunidades formadas por africanos que foram escravizados e resistiam a esse regime.

No Brasil, atualmente, existem o que chamamos de comunidades quilombolas, que, segundo Françoise Jean, diretora de patrimônio cultural da Fundação Municipal de Cultura de Belo Horizonte (MG), são "territórios ocupados por grupos étnicos raciais, com presença de ancestralidade negra, que se ligam e tem suporte". Algumas dessas comunidades quilombolas inclusive são remanescentes dos quilombos da época da escravidão.

Confira a seguir estimativas do IBGE sobre municípios com localidades quilombolas em cada região do país em 2019.

Número estimado de municípios com localidades quilombolas no Brasil em 2019	
Região	Número de municípios
Norte	122
Nordeste	810
Centro-Oeste	90
Sudeste	514
Sul	136

Dados obtidos em: BASE de Informações Geográficas e Estatísticas sobre os indígenas e quilombolas para enfrentamento à Covid-19. **Notas Técnicas**. Rio de Janeiro: IBGE, 2020. Volume especial.

4. a) Resposta em *Orientações*.

a) Construa um gráfico de barras horizontais a partir das informações apresentadas na tabela.

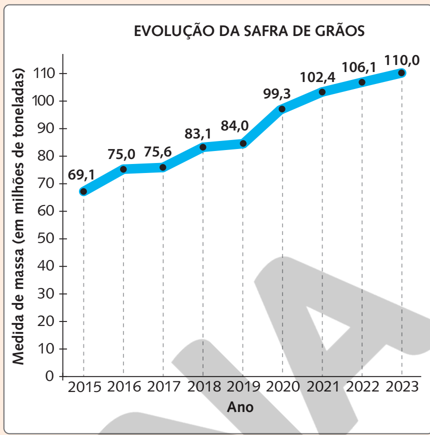
b) Qual é a importância atual das comunidades quilombolas no Brasil? Pesquise sobre as comunidades quilombolas e converse com os colegas sobre o que encontrou.

5 Em janeiro de 2024, um laboratório coletou uma amostra de pacotes de feijão e constatou as seguintes medidas de massa, em grama: 964, 1 008, 945, 990, 998, 964, 978, 1 036, 994, 958, 1 010, 960, 975, 982, 996, 1 020, 955, 976, 998, 1 016. Construa uma tabela de distribuição de frequências dessa amostra, com cinco classes. Em seguida, construa um histograma.

NIGEL CATTLIN/ALAMY/GLOW IMAGES

5. Exemplo de resposta em *Orientações*.

6 O gráfico a seguir mostra a safra de grãos, em milhões de toneladas, no período de 2015 a 2023, em determinada região.



LUIZ RUBIO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pelos agricultores entre 2015 e 2023.

Responda às questões.

a) Que tipo de gráfico é esse? 6. a) gráfico de segmentos

b) Quantos milhões de toneladas de grãos foram produzidos em 2019?

c) A safra de 2023 foi superior à safra de 2016 em quantos por cento? 6. c) 46,66%

6. b) 84 milhões de toneladas

7 Foi feita uma pesquisa com 800 estudantes de uma escola sobre a atividade esportiva de sua preferência. Confira o resultado obtido.

Atividades esportivas preferidas pelos estudantes da escola em 2023	
Atividade esportiva	Quantidade de estudantes
Futebol	400
Vôlei	120
Basquete	80
Tênis	40
Natação	160

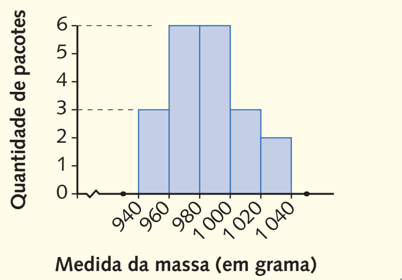
Dados obtidos pelos professores em 2023.

Construa um gráfico de setores com base nos dados da tabela.

7. Exemplo de resposta em *Orientações*.

280

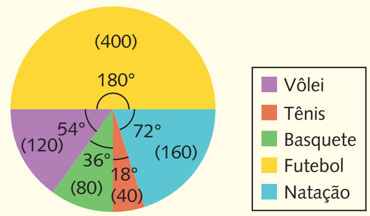
MEDIDA DA MASSA DOS PACOTES DE FEIJÃO



Dados obtidos pelo laboratório em janeiro de 2024.

- Exemplo de resposta da **atividade 7**:

ATIVIDADES ESPORTIVAS PREFERIDAS PELOS ESTUDANTES DA ESCOLA EM 2023



Dados obtidos pelos professores em 2023.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Lendo e aprendendo

Uma viagem ao Níger

O país costuma ser lembrado por uma característica triste: o mais pobre do mundo, segundo levantamento da ONU. Conversamos com moradores e especialistas para conhecer melhor essa nação africana, suas raízes, cultura e o que tem sido feito para reduzir as dificuldades

O mais recente Relatório de Desenvolvimento Humano, divulgado pela Organização das Nações Unidas (ONU), apontou o Níger como o país de pior Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), que mede o desempenho em saúde, educação e renda.

Infelizmente, essa não é uma novidade para os habitantes nigerinos: desde que o levantamento foi criado, há 30 anos, o país africano tem aparecido entre os três últimos no *ranking*.

São diversos os fatores que contribuem para essa realidade. Um deles é a sua condição geográfica. O norte do Níger é desértico, o que dificulta bastante o cultivo do solo e a pecuária. Além disso, o país não é banhado por nenhum mar, prejudicando a troca de mercadorias com outras nações.

Cerca de 40% da população vive na chamada pobreza extrema, quando a pessoa ganha menos de US$ 2 (cerca de R$ 10) por dia. Com uma renda tão baixa, muitas famílias acabam colocando as crianças para ajudar, gerando um outro problema: a educação precária. Segundo os dados da ONU, somente 30% da população do Níger sabe ler e escrever. Para se ter uma ideia, no Brasil 93% das pessoas acima de 15 anos são alfabetizadas.

HARMATTAN TOUJOURS/SHUTTERSTOCK

Criança segurando um pé de manga em um subúrbio de Niamei, capital do Níger. Foto de 2020.

(EF09MA22) Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.

Lendo e aprendendo

BNCC:

- Competências gerais 6 e 9 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 3, 6 e 8 (as descrições estão na página VII).
- Habilidade EF09MA22.

Objetivos:

- Desenvolver a competência leitora.
- Construir gráfico de setores com transferidor, compasso e régua.
- Pesquisar e comparar o IDH de países pobres e ricos.

Temas contemporâneos transversais:

Antes de ler o texto da seção com a turma, comente que nele será abordada a situação do Níger, um país que se localiza no continente africano e que já foi uma colônia da França. Se possível, apresente o mapa da África para a turma e mostre onde está localizado o Níger. Informações básicas como a capital, população estimada, idioma, religião, expectativa de vida, economia e clima também podem ser dadas neste primeiro momento. Depois, inicie o trabalho com a seção fazendo a leitura coletiva do texto com os estudantes.

Converse com eles também sobre a importância dos projetos sociais como a Academie Atcha para a população do Níger. Enfatize que projetos como esse são exemplos de exercício de cidadania e peça que comentem sobre outros projetos sociais que conhecem.

Após a leitura, converse com a turma sobre os aspectos que mais chamaram a atenção deles. Se possível, convide o(a) professor(a) de Geografia para participar desse momento e enriquecer essa troca com os estudantes.

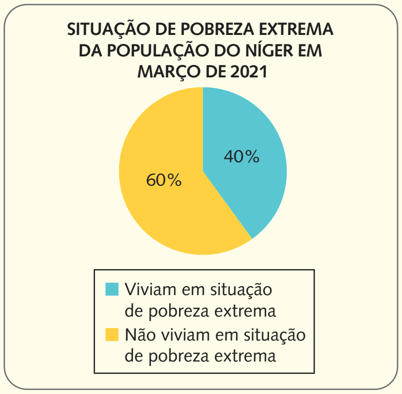
O texto possibilita valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais dos estudantes e serve de estopim para o exercício do diálogo, o que contribui para o desenvolvimento das competências gerais **6** e **9** da BNCC.

• Na **atividade 1**, os estudantes vão responder a algumas questões sobre o texto. Após responderem, peça que formem duplas e comparem as respostas. Acompanhe a troca de ideias entre as duplas e tire as possíveis dúvidas.

• A **atividade 2** envolve a construção de gráficos de setores. Antes de os estudantes iniciarem a atividade, verifique se todos têm transferidor, régua e compasso. Espera-se que os estudantes mobilizem o que sabem sobre medidas de abertura de ângulos e proporcionalidade para construir os gráficos solicitados.

Alerte os estudantes sobre os cuidados necessários durante o manuseio do compasso, a fim de evitar acidentes.

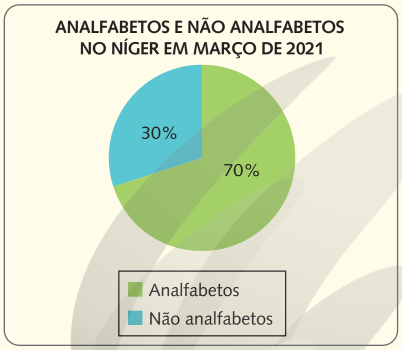
Exemplo de resposta do **item a**:



Fonte: Relatório de Desenvolvimento Humano da Organização das Nações Unidas (ONU).

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Exemplo de resposta do**item b**:



Fonte: Organização das Nações Unidas (ONU).

Após terminarem as construções, peça que compartilhem os cálculos e os gráficos que fizeram. Enfatize a importância de inserir título, legenda e fonte. Caso alguns estudantes tenham demonstrado dificuldades, faça a correção de um dos itens na lousa.

A atividade envolve procedimentos das Unidades temáticas *Números* e *Probabilidade e estatística*, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **3** da BNCC. Além disso, os estudantes lidam com diferentes registros (língua materna e gráficos), e isso possibilita o desenvolvimento da competência específica **6**.

• A **atividade 3** propõe aos estudantes uma pesquisa sobre o IDH de dois países (um com IDH inferior a 0,5 e outro com IDH superior a 0,8) e, depois, a produção de um texto comparando a situação dos países pesquisados. Pergunte qual estratégia adotarão para realizar a pesquisa. Alguns podem dizer que vão consultar alguma lista com o IDH de todos os países e outros podem afirmar que já sabem de antemão que a maior parte dos países com IDH inferior a 0,5 está localizada no continente africano, enquanto a maior parte dos que têm IDH superior a 0,8 está no continente europeu e que, portanto, vai selecionar países desses dois continentes.

Em relação à produção do texto, oriente-os a comparar os mesmos aspectos e deixar claro as diferenças entre os dois países. Reserve uma aula para que todos possam compartilhar os seus textos. O(a) professor(a) de Geografia também pode participar dessa dinâmica caso seja possível.

A competência geral **9** e a competência específica **8** da BNCC são favorecidas nessa atividade, pois os estudantes exercitam a empatia e o diálogo.

Lendo e aprendendo

"Infelizmente, o país está localizado em uma região complicada, onde chove muito pouco e o solo é seco. Em casos assim, é preciso muito investimento em tecnologia para tornar o campo mais produtivo. E o Níger não dispõe desses recursos", explica Clint Borgen, que coordena a Borgen Project, uma ONG de ajuda a países pobres.

Organizações internacionais e outros países vêm tentando auxiliar, por exemplo, por meio da conscientização das famílias sobre a importância da educação. "Uma coisa leva a outra. Pessoas que não estudam costumam ter dificuldade de conseguir um trabalho com salário digno. Ou seja, se deixarem as crianças fora da escola, ficará ainda mais difícil acabar com a pobreza", explica.

Além da ajuda direta, por meio de doações, há outros projetos sociais no país. Um exemplo é o da Academie Atcha, uma escola de futebol para meninas em que são aceitas apenas aquelas que estão matriculadas na escola. A iniciativa já recebeu investimento de diferentes organismos internacionais, como o Unicef dos Estados Unidos.

A preocupação com as meninas é ainda maior, pois muitas delas acabam se casando antes de completar 18 anos de idade. Elas buscam formar uma nova família por falta de perspectivas de estudo e de emprego e tendem a ficar "presas" a tarefas domésticas.

"Quando as meninas jogam, podem ir à escola e aproveitar sua infância como outras crianças, o mundo sai ganhando", diz Félicité Tchibindat, representante do Unicef no Níger.

[...]

Chuva e muita festa

Assim como grande parte da África, a cultura nigerina reúne elementos de etnias locais, que habitam a região há séculos, e também da França, que colonizou o país durante 40 anos. Essas influências podem ser observadas em diferentes formas, como na culinária, na música e na arquitetura.

Um dos eventos mais populares do país é o Cure Salée. Em meados de setembro, quando termina a época da chuva, o pasto cresce de forma bastante nutritiva para os animais. Os nômades, que haviam caminhado por meses atrás desse alimento, chegam à cidade de Ingall, no Norte, e comemoram com uma grande festa. Entre as atividades estão a tradicional corrida de camelos e o Gerewol, ritual em que os homens se vestem de forma especial, com uma forte maquiagem, para disputar o coração das mulheres. Algumas semanas após a festa, os nômades começam a preparar a viagem de volta ao Sul, pois o Norte entrará novamente em período de seca.

PEIXOTO, F. Uma viagem ao Níger. **Qualé**, São Paulo, ed. 23, p. 6-9, fev./mar. 2021.

Atividades

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso na atividade **2**.

1. Responda às questões no caderno.

a) Em que continente fica o Níger? **1. a)** continente africano

b) O que é o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH)? **1. b)** índice que mede o desempenho dos países em saúde, educação e renda

c) Quais são os fatores que contribuíram para que o Níger tivesse o pior IDH do mundo no início de março de 2021? **1. c)** condição geográfica (clima desértico e o fato de não ser banhado por nenhum mar), população vivendo em pobreza extrema e educação precária devido ao trabalho infantil

d) O que é a Academie Atcha? **1. d)** escola de futebol para meninas nigerinas em que são aceitas apenas aquelas que estão matriculadas na escola

e) Por que a preocupação com as meninas é maior? **1. e)** muitas delas se casam antes de completar 18 anos de idade por falta de perspectivas de estudo e de emprego, ficando "presas" a tarefas domésticas

2. Em seu caderno, construa um gráfico de setores correspondente:

a) à situação de pobreza extrema da população do Níger em março de 2021; **2. a)** Exemplo de resposta em *Orientações*.

b) ao analfabetismo da população do Níger em março de 2021. **2. b)** Exemplo de resposta em *Orientações*.

3. O IDH é um índice que varia de 0 a 1. Quanto mais próximo de 1, melhor é a avaliação do país e quanto mais próximo de zero, pior é a situação. Pesquise algum país que tenha IDH abaixo de 0,5 e outro que tenha IDH acima de 0,8. Depois, escreva um texto no caderno comparando a situação dos dois países pesquisados por você e compartilhe-o com os colegas. **3.** Comentário em *Orientações*.

2 Gráfico de barras em planilha eletrônica

Uma das funcionalidades de um *software* de planilha eletrônica é a construção de gráficos estatísticos. Geralmente, com base em tabelas, o *software* gera os gráficos correspondentes automaticamente.

Construção de gráfico de barras em *software* de planilha eletrônica

Antes de construírmos um gráfico de barras, precisamos organizar os dados que serão apresentados nele em uma tabela de frequência, como a apresentada a seguir.

	A	B	C	D
1				
2		**Estados com os maiores rebanhos de bovinos no Brasil em 2020**		
3		**Estado**	**Sigla**	**Cabeças de gado**
4		Mato Grosso	MT	32 702 525
5		Goiás	GO	23 626 608
6		Pará	PA	22 267 207
7		Minas Gerais	MG	22 165 606
8		Mato Grosso do Sul	MS	19 027 086
9		Rondônia	RO	14 804 398
10		Rio Grande do Sul	RS	11 128 019
11		São Paulo	SP	10 563 637
12		Bahia	BA	9 748 632
13		Tocantins	TO	9 129 804
14				

Dados obtidos em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rs/pesquisa/18/0?tipo=ranking&indicador=16533&ano=2020. Acesso em: 13 jun. 2022.

Conheça mais

Para ter acesso aos dados dos rebanhos bovinos de outros estados brasileiros, acesse a área de pecuária da página do IBGE na internet.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Para construir o gráfico de barras, vamos selecionar a coluna correspondente à sigla dos estados e a coluna correspondente ao número de cabeças de gado de cada estado em 2020.

A seleção das colunas deve ficar como na imagem a seguir.

	A	B	C	D
1				
2		**Estados com os maiores rebanhos de bovinos no Brasil em 2020**		
3		**Estado**	**Sigla**	**Cabeças de gado**
4		Mato Grosso	MT	32 702 525
5		Goiás	GO	23 626 608
6		Pará	PA	22 267 207
7		Minas Gerais	MG	22 165 606
8		Mato Grosso do Sul	MS	19 027 086
9		Rondônia	RO	14 804 398
10		Rio Grande do Sul	RS	11 128 019
11		São Paulo	SP	10 563 637
12		Bahia	BA	9 748 632
13		Tocantins	TO	9 129 804
14				

Dados obtidos em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rs/pesquisa/18/0?tipo=ranking&indicador=16533&ano=2020. Acesso em: 13 jun. 2022.

Se possível, proponha aos estudantes atividades a serem desenvolvidas em planilhas eletrônicas, pois elas possuem ferramentas que permitem a representação dos dados por meio de gráficos de diferentes tipos, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **5** e da competência específica **5**.

Gráfico de barras em planilha eletrônica

BNCC:

- Competência geral 5 (a descrição está na página VI).
- Competência específica 5 (a descrição está na página VII).

Objetivo:

Construir gráfico de barras em *software* de planilha eletrônica.

Justificativa

A quantidade de dados envolvida em uma pesquisa estatística pode ser enorme e, portanto, é necessário o uso de planilhas eletrônicas para auxiliar a organização e a análise desses dados. Nesse âmbito, é pertinente que os estudantes consigam construir gráficos de barras em planilhas eletrônicas.

Mapeando conhecimentos

Se possível, leve os estudantes para a sala de informática da escola (se houver uma) e peça que copiem para uma planilha eletrônica os dados da tabela apresentada no tópico *Construção de gráfico de barras em* software *de planilha eletrônica*. Em seguida, solicite que construam, utilizando as ferramentas da planilha eletrônica, um gráfico de barras correspondente. Deixe-os à vontade para explorar a barra de ferramentas. Oriente-os a identificar os eixos, inserir título e inserir a fonte dos dados. Caso a escola não disponha de uma sala de informática, permita que a tarefa seja realizada em casa.

Para as aulas iniciais

Inicie a exploração do tópico solicitando aos estudantes que comparem os gráficos construídos entre si e, também, que comparem os gráficos que fizeram com os que aparecem no livro. Depois, peça a alguns deles que descrevam como fizeram para construir os gráficos, identificar os eixos e inserir o título e a fonte dos dados. Se achar conveniente, incentive-os a descrever esses passos por meio de um fluxograma.

Você pode ampliar a proposta da dinâmica inicial e pedir que copiem os dados de alguma tabela publicada em jornal ou revista para uma planilha eletrônica. Os jornais ou as revistas podem ser disponibilizados previamente por você ou eles podem fazer uma pesquisa. Em seguida, proponha que construam, utilizando a planilha eletrônica, o gráfico que melhor representa os dados da tabela.

Comente com os estudantes que a organização dos menus e dos ícones apresentados pode variar dependendo do *software* utilizado. Oriente-os no processo de criação do gráfico. Em linhas gerais, a construção ocorre de forma parecida.

Ao analisar a adequação do gráfico de segmentos para a situação apresentada, aproveite para analisar os casos de uso de gráficos de barras e de setores também. Leve-os a ter as conclusões a seguir:

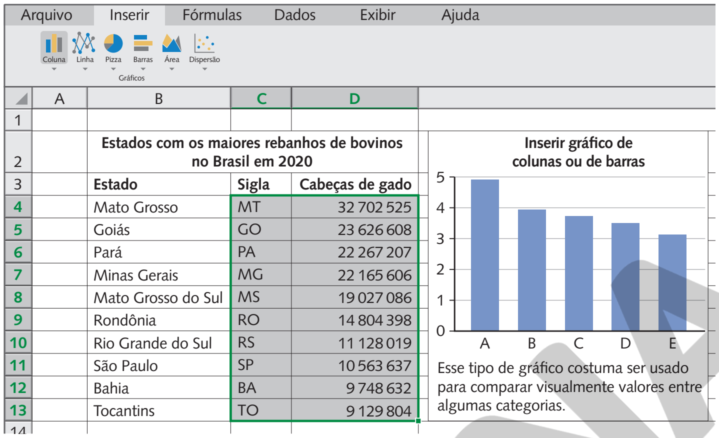
É possível construir diferentes tipos de gráfico usando um *software*.

• gráfico de barras (verticais ou horizontais): pode ser utilizado para comparar os valores de variáveis distribuídas em classes;

• gráfico de setores: costuma ser utilizado para representar proporções de um todo. Aparece muito na mídia como forma de ilustrar porcentagens quando há parcelas cuja soma resulta em 100%;

• gráfico de segmentos (ou de linhas): é um ótimo recurso para exibir tendências ao longo do tempo ou entre categorias.

O próximo passo é utilizar a ferramenta de inserir gráficos; geralmente, ela é um dos itens do *menu* "Inserir" e pode, também, estar disponível como um botão representado por um ícone que se parece com um gráfico estatístico.

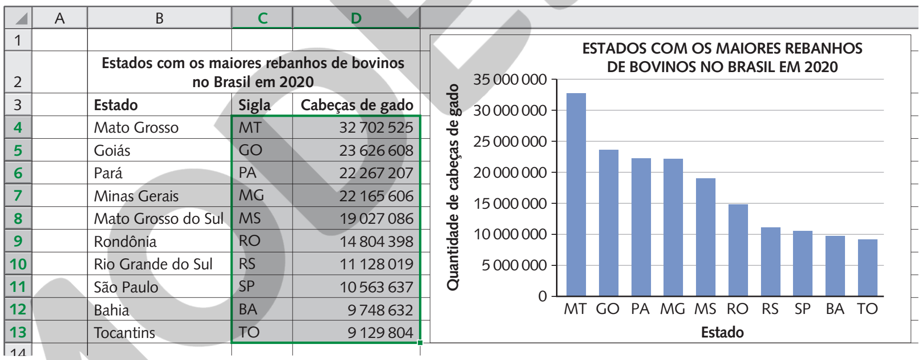


	A	B	C	D
1				
2		Estados com os maiores rebanhos de bovinos no Brasil em 2020		
3		Estado	Sigla	Cabeças de gado
4		Mato Grosso	MT	32 702 525
5		Goiás	GO	23 626 608
6		Pará	PA	22 267 207
7		Minas Gerais	MG	22 165 606
8		Mato Grosso do Sul	MS	19 027 086
9		Rondônia	RO	14 804 398
10		Rio Grande do Sul	RS	11 128 019
11		São Paulo	SP	10 563 637
12		Bahia	BA	9 748 632
13		Tocantins	TO	9 129 804

Dados obtidos em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rs/pesquisa/18/0?tipo=ranking&indicador=16533&ano=2020. Acesso em: 13 jun. 2022.

Ao ativar a ferramenta, o *software* apresenta sugestões de tipos de gráfico. Nesse momento, devemos optar pelo gráfico de barras (ou colunas).

O gráfico é construído automaticamente com base nos dados selecionados. Depois, podemos ajustar o título e a identificação dos eixos, modificar a escala (se necessário) e inserir a fonte. Na imagem a seguir, temos o gráfico de barras corresponde à tabela inserida na planilha.



	A	B	C	D
1				
2		Estados com os maiores rebanhos de bovinos no Brasil em 2020		
3		Estado	Sigla	Cabeças de gado
4		Mato Grosso	MT	32 702 525
5		Goiás	GO	23 626 608
6		Pará	PA	22 267 207
7		Minas Gerais	MG	22 165 606
8		Mato Grosso do Sul	MS	19 027 086
9		Rondônia	RO	14 804 398
10		Rio Grande do Sul	RS	11 128 019
11		São Paulo	SP	10 563 637
12		Bahia	BA	9 748 632
13		Tocantins	TO	9 129 804

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/rs/pesquisa/18/0?tipo=ranking&indicador=16533&ano=2020. Acesso em: 13 jun. 2022.

▸ Podemos afirmar que, em 2020, o número de cabeças de gado no estado do Mato Grosso era superior ao dobro do número de cabeças de gado do estado de Rondônia? Por quê?

▸ O gráfico de segmentos é adequado para representar os dados da tabela que foi inserida na planilha eletrônica acima? Por quê?

Primeiro item: Sim, porque, em 2020, Mato Grosso superou 30 000 000 de cabeças de gado enquanto Rondônia ficou abaixo de 15 000 000 de cabeças de gado, e 30 000 000 é o dobro de 15 000 000.
Segundo item: Não, porque os gráficos de segmentos são utilizados para representar a variação de certo dado no decorrer do tempo, o que não ocorre com os dados dessa tabela.

No dia a dia, estamos cercados de informações transmitidas por meio de gráficos, porém alguns desses gráficos podem nos levar a conclusões equivocadas, pois eles nem sempre são construídos de maneira adequada.

Alguns dos problemas que podem aparecer são:

- erros de escala;
- gráficos de setores cuja soma das porcentagens não é igual a 100%;
- gráfico inadequado para representar determinado conjunto de dados;
- omissão de título, legenda e/ou fonte.

Problemas como os listados acima distorcem a informação e podem levar o leitor a conclusões equivocadas. Por isso, é importante ser crítico e estar atento para não ser manipulado.

Pesquisem gráficos que foram divulgados pela mídia e que podem levar a conclusões equivocadas. Depois, para cada gráfico encontrado escrevam um pequeno texto no caderno justificando quais foram os erros cometidos. **Item**: Comentários em *Orientações*.

8. a) Os estudantes podem construir um gráfico de barras (vertical ou horizontal) ou um gráfico de setores.

Atividades

8. c) Como as medidas de massa estão em classes, os estudantes podem construir um histograma de frequência.

Faça as atividades no caderno.

8 Com base nos dados disponíveis a seguir, construa um gráfico adequado utilizando um *software* de planilha eletrônica.

a) Uma turma de 30 estudantes foi entrevistada pela professora a respeito das frutas preferidas em junho de 2023.

Preferência dos estudantes por frutas em 2024

Fruta	Quantidade de estudantes	Porcentagem de estudantes
Banana	12	40%
Maçã	6	20%
Pera	8	27%
Uva	4	13%

Dados obtidos pela professora em junho de 2023.

b) Luiza adora jogos de *videogame* e anotou a variação do preço de um lançamento em dezembro de 2023.

Variação do preço de um jogo após o lançamento em dezembro de 2023

Semana	Preço do jogo
1ª semana	R$ 200,00
2ª semana	R$ 195,00
3ª semana	R$ 190,00
4ª semana	R$ 159,00

Dados obtidos por Luiza em dezembro de 2023.

8. b) Para acompanhar a variação no decorrer do mês, um gráfico interessante seria o de segmentos.

c) Os estudantes do 9º ano do colégio Beta passaram por uma pesagem em janeiro de 2024 durante a aula de Educação Física.

Distribuição de frequência das medidas de massa dos estudantes do 9º ano em janeiro de 2024

Medida de massa (em kg)	Frequência
45 ⊢ 55	12
55 ⊢ 65	13
65 ⊢ 75	7
75 ⊢ 85	2

Dados obtidos pelo professor em janeiro de 2024.

9 Em seu caderno, escreva duas perguntas para coletar dados de sua turma. Pense em uma variável qualitativa (bairro em que mora, cidade em que nasceu etc.) e em uma variável quantitativa discreta (quantidade de animais de estimação, quantidade de irmãos etc.). Utilizando um *software* de planilha eletrônica, construa uma tabela de frequência de acordo com o tipo de dado coletado e faça um gráfico para cada variável. Depois, elabore duas perguntas que possam ser respondidas com base na interpretação dos gráficos criados. Troque sua tarefa com um colega, respondendo às questões que ele elaborou. Verifiquem e discutam a respeito das respostas. **9.** Respostas pessoais.

Depois da pesquisa de gráficos e tabelas em veículos de comunicação, os estudantes podem montar painéis mostrando eventuais induções a erros e sugestões de alteração para a correta veiculação da informação. Essa atividade desenvolve a argumentação e a criticidade deles.

- A **atividade 8** favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA22,** a partir da escolha e da construção do gráfico mais adequado para apresentar os conjuntos de dados. Espera-se que, no **item a,** os estudantes optem por um gráfico de barras; no **item b**, por um gráfico de segmentos; e, no **item c**, por um histograma.

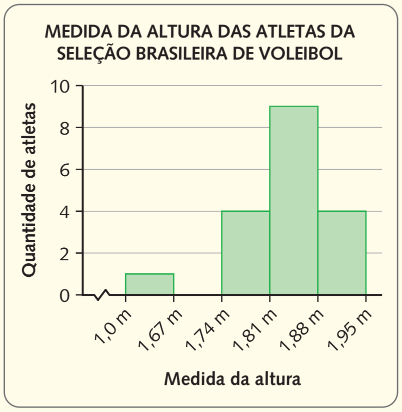
Revisão dos conteúdos deste capítulo

Construção de gráficos

• Exemplo de resposta da **atividade 1**:

Medida da altura das atletas da seleção brasileira de voleibol	
Medida da altura (em metro)	**Quantidade de atletas**
1,60 ⊢— 1,67	1
1,67 ⊢— 1,74	0
1,74 ⊢— 1,81	4
1,81 ⊢— 1,88	9
1,88 ⊢— 1,95	4

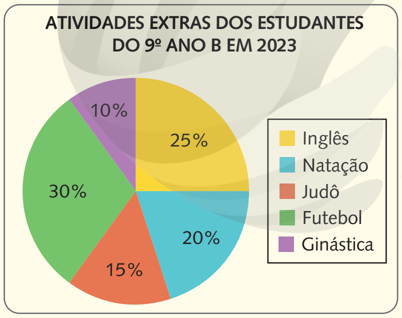
Dados obtidos em: https://cbv.com.br/ligadasnacoes/selecao-brasileira-feminina. Acesso em: 26 jun. 2022.



Dados obtidos em: https://cbv.com.br/ligadasnacoes/selecao-brasileira-feminina. Acesso em: 26 jun. 2022.

• Oriente os estudantes a construir o gráfico de setores do **item b** da **atividade 2** com régua, compasso e transferidor. Alerte os estudantes sobre os cuidados necessários durante o manuseio do compasso, a fim de evitar acidentes.

Exemplo de resposta do **item b** da **atividade 2**:



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pela professora do 9º ano B em 2023.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Construção de gráficos

Construção de gráfico de barras

Início → Identificamos os eixos, definimos a escala e marcamos os eixos de forma conveniente. → Construímos os retângulos correspondentes. → Inserimos a fonte e o título do gráfico, que deve transmitir com precisão quais são as variáveis representadas nele. → Fim

Construção de histograma de frequência

Início → Identificamos os eixos e os valores que eles conterão. → Construímos os retângulos cujos vértices da base estão localizados sobre os números correspondentes aos extremos da classe que eles representam. → Inserimos a fonte e o título do gráfico. → Fim

Construção de gráfico de setores

Início → Dividimos um círculo em setores com ângulos de medidas de abertura proporcionais às frequências das classes. → Pintamos cada setor com uma cor diferente. → Identificamos os setores e inserimos a fonte e o título do gráfico. → Fim

Construção de gráfico de segmentos

Início → Identificamos os eixos e escolhemos uma escala. → Marcamos os pontos correspondentes aos valores e os unimos por segmentos de reta. → Colocamos uma legenda, se necessário, e inserimos a fonte e o título do gráfico. → Fim

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

2. a) inglês: 25%; natação: 20%; judô: 9%; futebol: 18%; ginástica: 6%

1. O quadro abaixo contém a medida da altura, em metro, de cada jogadora da seleção brasileira de voleibol. **1.** Exemplo de resposta em *Orientações*.

1,60	1,75	1,76	1,78	1,80
1,82	1,84	1,84	1,85	1,85
1,85	1,86	1,87	1,87	1,88
1,89	1,90	1,90		

Dados obtidos em: https://cbv.com.br/ligadasnacoes/selecao-brasileira-feminina. Acesso em: 26 jun. 2022.

Construa um quadro de distribuição de frequências desses dados divididos em 5 classes. Em seguida, construa um histograma.

Cuidado! Evite acidentes ao usar o compasso na atividade **2**.

2. O quadro abaixo mostra as atividades extras realizadas pelos estudantes do 9º ano B em 2023.

ATIVIDADES EXTRAS DOS ESTUDANTES DO 9º ANO B EM 2023	
Atividade extra	**Quantidade de estudantes**
Inglês	15
Natação	12
Judô	9
Futebol	18
Ginástica	6
Total	60

Dados obtidos pela professora do 9º ano B em 2023.

2. b) Exemplo de resposta em *Orientações*.

a) Determine a porcentagem de estudantes que realiza cada atividade extra.

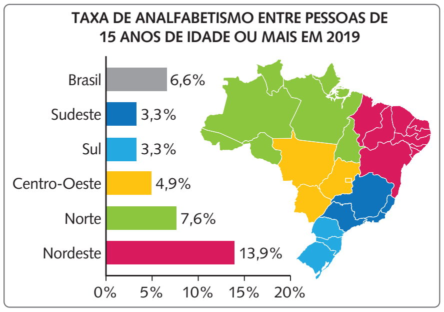
b) Construa um gráfico de setores com base nos dados da tabela.

c) Escreva três análises para o gráfico construído.

2. c) Exemplo de resposta: A atividade extra mais realizada pelos estudantes do 9º B é o futebol, enquanto a menos praticada é a ginástica. Os estudantes que praticam ginástica representam um terço dos estudantes que praticam futebol.

3. c) Exemplo de resposta: Gráfico de setores, porque possibilita comparar as taxas de analfabetismo entre as regiões e a taxa de analfabetismo de cada região com a taxa de analfabetismo nacional.

3. O infográfico abaixo mostra a taxa de analfabetismo das pessoas com 15 anos de idade ou mais por regiões do Brasil e no território brasileiro como um todo em 2019.



Dados obtidos em: IBGE. Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2016-2019**. Rio de Janeiro: IBGE, 2020.

3. a) região Nordeste

a) Qual região do Brasil estava com a taxa de analfabetismo mais alta em 2019?

b) Quais regiões estavam com a taxa de analfabetismo abaixo da taxa de analfabetismo do Brasil? **3. b)** regiões Sudeste, Sul e Centro-Oeste

c) Que outro tipo de gráfico poderia ser construído para representar os dados do infográfico acima? Por quê?

4. Uma empresa de ferramentas fez um estudo do salário médio dos funcionários de produção nos últimos anos e organizou esses dados em uma tabela.

SALÁRIO MÉDIO DOS FUNCIONÁRIOS DE UMA EMPRESA (2000-2020)

Ano	Salário médio (em reais)
2000	150
2005	300
2010	510
2015	780
2020	1 140

Dados obtidos pelo departamento de Recursos Humanos da empresa entre 2000 e 2020.

a) Construa um gráfico de segmentos com base nos dados da tabela. **4. b)** entre 2010 e 2015

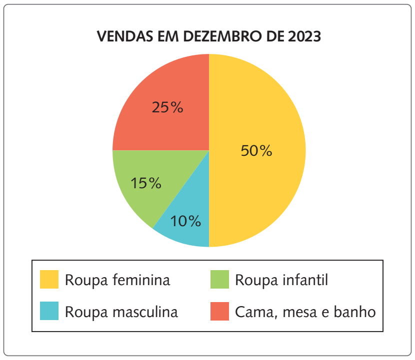
b) Entre quais anos, o salário médio, subiu R$ 270,00? **4. c)** Respostas pessoais.

c) Em sua opinião, o salário médio dos funcionários de produção dessa empresa continuará aumentando nos próximos anos? Por quê?

4. a) Exemplo de resposta em *Orientações*.

5. Uma loja de departamento produziu este gráfico de setores sobre as vendas dos produtos em dezembro de 2023.

5. b) Exemplo de resposta em *Orientações*.



Dados obtidos pelo departamento de vendas da loja em dezembro de 2023.

5. a) Resposta em *Orientações*.

a) Sabendo que, em dezembro de 2023, o total de produtos vendidos foi 2 400, construa uma tabela de frequência com a quantidade de vendas de cada produto.

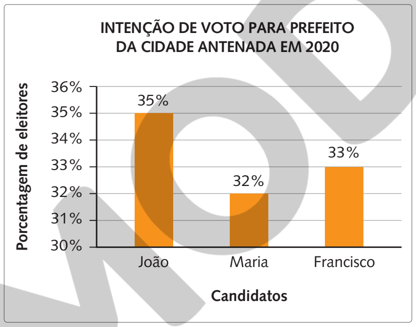
b) Construa um gráfico de barras horizontais com base na tabela construída no item **a**.

c) Escreva três análises para o gráfico que você construiu no item **b**.

5. c) Exemplo de resposta em *Orientações*.

6. O gráfico a seguir mostra o resultado de uma pesquisa de intenção de voto para prefeito de da cidade Antenada em 2020.

6. Exemplo de resposta em *Orientações*.

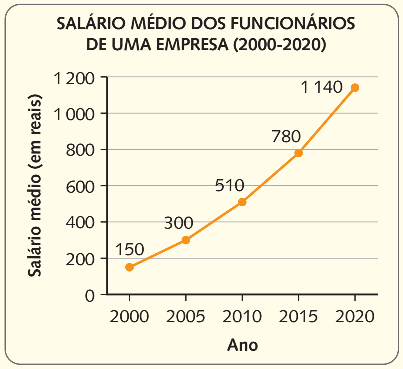


Dados obtidos por Instituto de Pesquisa de Antenada em 2020.

Qual é o problema desse gráfico? Qual é o impacto desse problema para a interpretação dos dados?

- Na **atividade 6**, espera-se que os estudantes percebam que o problema do gráfico apresentado está na escala, uma vez que as porcentagens no eixo vertical não começam em 0% e que isso faz parecer que o percentual de eleitores que pretendem votar em João é muito maior do que o percentual dos eleitores que pretendem votar em Maria e Francisco. Nesse tipo de atividade, convém incentivar o diálogo e o levantamento de hipóteses. Após os estudantes discutirem e concluírem a atividade, você pode pedir para que refaçam o gráfico adotando uma escala adequada.

- Exemplo de resposta do **item a** da **atividade 4**:



Dados obtidos pelo departamento de Recursos Humanos da empresa entre 2000 e 2020.

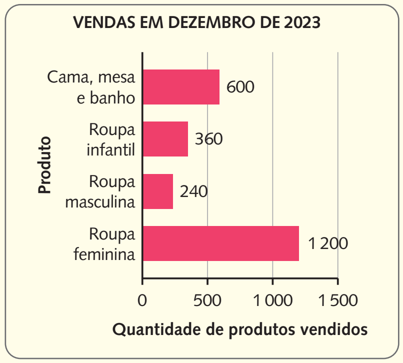
- Resposta do **item a** da **atividade 5**:

VENDAS EM DEZEMBRO DE 2023

Produto	Quantidade de produtos vendidos
Roupa feminina	1 200
Roupa masculina	240
Roupa infantil	360
Cama, mesa e banho	600
Total	**2 400**

Dados obtidos pelo departamento de vendas da loja em dezembro de 2023.

- Exemplo de resposta do **item b** da **atividade 5**:



Dados obtidos pelo departamento de vendas da loja em dezembro de 2023.

- Exemplo de resposta do **item c** da **atividade 5**:

I. Os produtos mais vendidos foram as roupas femininas.

II. Os produtos menos vendidos foram as roupas masculinas.

III. As roupas femininas vendidas correspondem ao dobro dos itens de cama, mesa e banho vendidos em dezembro de 2023.

CAPÍTULO 12 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

Trocando ideias

BNCC:

• Competência geral 9 (a descrição está na página VI).

• Competências específicas 4, 6 e 8 (as descrições estão na página VII).

Objetivos:

• Verificar se os estudantes reconhecem a necessidade de realizar pesquisas amostrais.

• Conscientizar os estudantes sobre a importância de respeitar e valorizar os idosos.

Tema contemporâneo transversal:

Convide os estudantes a analisar os gráficos presentes neste *Trocando ideias* e a fazer observações daquilo que mais acharem importante. Você pode propor algumas questões, como: "É correto afirmar que, em 2020, mais da metade dos idosos do Brasil era casada ou amigada? Podemos dizer que aproximadamente um terço dos idosos que viviam no Brasil, em 2020, eram solteiros? Por quê? Podemos afirmar que, de cada 4 idosos que viviam no Brasil em 2020, 3 tinham filhos?". Você também pode pedir que elaborem questões com base nesses gráficos e, depois, troquem com um colega para responder às questões propostas por ele. Ler e interpretar gráficos contribui para que os estudantes desenvolvam a capacidade de fazer observações de aspectos quantitativos presentes nas práticas sociais e possibilita a utilização das linguagens verbal e gráfica, desenvolvendo assim as competências específicas **4** e **6** da BNCC.

Convide os estudantes a responder às questões do primeiro item. Espera-se que eles percebam que, por questões práticas e econômicas, não seria viável consultar toda a população de idosos, e, por esse motivo, os dados foram coletados consultando apenas uma parte dessa população. Comente com eles que uma pesquisa estatística pode ser censitária (feita acessando toda a população) ou amostral (acessando parte da população), e, ao fazer uma pesquisa amostral, é importante que a amostra escolhida seja representativa da população que lhe dá origem.

Para responder à questão do segundo item, forme uma roda de conversa com a turma. Antes de opinarem, pergunte se eles já presenciaram algum idoso passar por situação de constrangimento, de humilhação ou de maus-tratos. Você pode ainda comentar sobre as violências mais comuns praticadas contra essa população como agressões verbais e físicas, abandono por parte dos filhos ou familiares, apropriação indébita de valores como o benefício da aposentadoria, atendimento indevido em bancos, postos de saúde, hospital etc. Depois, peça que um por vez dê sua opinião. As sugestões levantadas por eles podem ser registradas na lousa. Dinâmicas como essa exercitam o diálogo e a capacidade de ouvir o colega com atenção e empatia, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8** da BNCC.

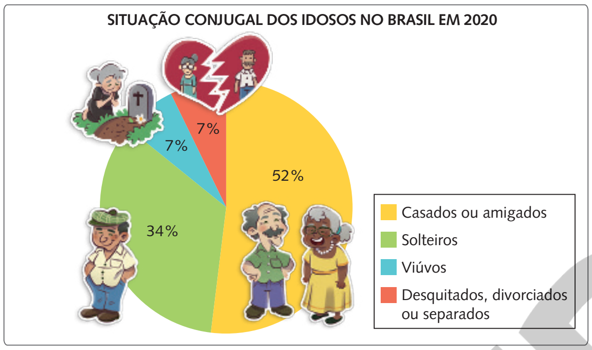
Capítulo 12

Probabilidade e estatística

FORMAÇÃO CIDADÃ

Trocando ideias

Segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), em 2020, homens e mulheres acima de 60 anos representavam aproximadamente 14,26% da população brasileira. Analise alguns dados sobre a população idosa no Brasil.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART E DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. **Fatos e números**: idosos e família no Brasil. Brasília, DF: Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos, 2021. p. 7.

Dados obtidos em: BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. **Fatos e números**: idosos e família no Brasil. Brasília, DF: Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos, 2021. p. 7.

- Para coletar esses dados sobre os idosos, você acha que toda a população de idosos foi consultada? Por quê? Como você acha que os dados dessa pesquisa foram coletados? Converse com os colegas.
- Em sua opinião, que atitudes podem ser tomadas para evitar que os idosos sejam maltratados e desrespeitados? Converse com os colegas.

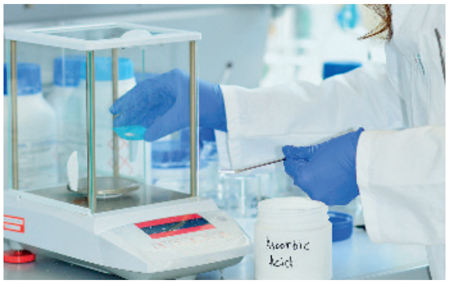
Neste capítulo, você vai aprofundar o estudo sobre o cálculo de probabilidades, além de planejar e executar **pesquisas amostrais**. **Trocando ideias**: primeiro item: Respostas pessoais; segundo item: Resposta pessoal.

288

1 Probabilidade

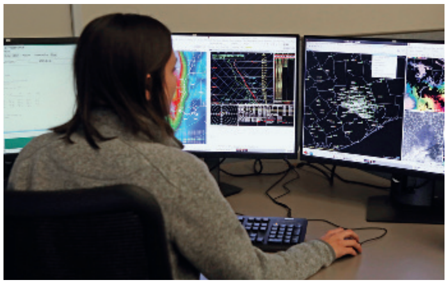
A área da Matemática que estuda a chance de ocorrência de um evento é denominada **teoria das probabilidades**.

São várias as profissões que requerem conhecimentos de probabilidade. Em algumas, o profissional usa os conhecimentos relacionados a essa teoria para interpretar informações; em outras, é necessário fazer o cálculo de probabilidades e, com base nos resultados, tomar decisões.



SMEREKA/SHUTTERSTOCK

Usa-se a teoria das probabilidades para estabelecer os possíveis efeitos colaterais de um medicamento.



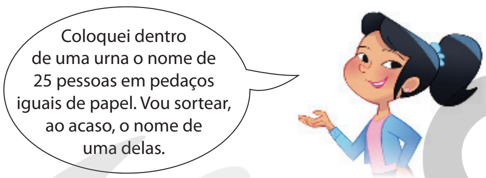
KELSEY WALLING/THE GALVESTON COUNTY DAILY NEWS/AP PHOTO/GLOW IMAGES

Aplica-se a probabilidade para indicar, por exemplo, a previsão do tempo em determinado período.

CRIS FAGA/GETTY IMAGES

A probabilidade também é usada para fazer análises e projeções sobre o mercado financeiro.

Vamos relembrar alguns termos relacionados ao estudo de probabilidade. Para isso, considere a situação a seguir.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Como não é possível saber com exatidão o nome que será sorteado, essa situação é um exemplo de **experimento aleatório**.

O conjunto de todos os nomes forma o **espaço amostral**. Chamamos de **evento** qualquer subconjunto do espaço amostral. Como todos os nomes têm a mesma chance de ser sorteados, chamamos o espaço amostral desse evento de **espaço amostral equiprovável**.

BILDER/SHUTTERSTOCK

Outro exemplo de experimento aleatório é o lançamento de um "dado honesto" de seis faces. Um possível evento é "sair o número 6" e o espaço amostral é formado pelos números 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

289

Probabilidade

BNCC:

• Competências específicas 2 e 6 (as descrições estão na página VII).

• Habilidade EF09MA20.

Objetivos:

• Calcular probabilidades.

• Reconhecer eventos dependentes e independentes.

Justificativa

Calcular probabilidade envolve realizar experimentos aleatórios, organizar as informações obtidas, identificar o espaço amostral e, finalmente, calcular a razão entre o número de elementos favoráveis e o número de elementos do espaço amostral. Por mobilizar todas essas capacidades e por serem frequentes os experimentos aleatórios em nosso cotidiano, justifica-se a importância de calcular probabilidades. Além disso, para calcular probabilidades, é importante reconhecer eventos independentes e dependentes, o que contribui também para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**.

Mapeando conhecimentos

Reproduza na lousa as **atividades 29** e **30** da seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores* e peça aos estudantes que as realizem. Incentive o uso de estratégias pessoais e a troca de ideias.

Para as aulas iniciais

Explore com os estudantes a revisão sobre experimento aleatório, espaço amostral, princípio multiplicativo e cálculo de probabilidades presente na seção *Revisão dos conteúdos de anos anteriores*. Depois, faça a correção coletiva das **atividades 29** e **30**. Por fim, você pode pedir aos estudantes que elaborem problemas inspirados na **atividade 30**. Após a elaboração, peça que troquem os enunciados com um colega e resolvam o problema proposto por ele.

As noções de experimento aleatório, espaço amostral e evento de um experimento aleatório podem ser mais bem compreendidas se os estudantes tiverem a oportunidade de vivenciar situações cujo resultado dependa exclusivamente do acaso. Propiciar situações que envolvam lançamento de "dados honestos" ou de "moedas honestas", sorteios etc. contribui para o desenvolvimento, por parte do estudante, de noções de aleatoriedade e de estimativa, favorecendo, assim, a competência específica **2**.

Se possível, traga "dados honestos" de seis faces para a sala de aula para que os estudantes possam manusear e simular o evento descrito no exemplo.

Inicie o estudo conversando com os estudantes sobre os usos diários que fazemos da noção de probabilidade, por exemplo, as chances de ganhar um sorteio, as previsões meteorológicas, a previsão de resultados de um experimento, as inferências a respeito de uma população com base em dados coletados em uma amostra etc.

(EF09MA20) Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.

Cálculo de probabilidade

É importante que, ao definir probabilidade, retome com os estudantes o conceito de razão e a ideia de que, ao obter uma razão entre números que trazem informações a respeito de determinadas grandezas, estamos, na verdade, estabelecendo uma comparação entre elas. Por exemplo, se considerarmos dois segmentos de reta e obtivermos a razão entre as medidas de seus comprimentos, poderemos determinar a porcentagem que um segmento de reta é maior ou menor do que o outro.

É fundamental que, ao explorar a definição de probabilidade como razão, os estudantes concluam que probabilidade negativa não faz sentido, uma vez que, para isso, o número de elementos favoráveis ao evento ou o número de elementos do espaço amostral deveriam ser negativos. Também não faz sentido probabilidade maior que 1, já que isso implicaria a existência de um evento com o número de elementos maior que o número de elementos do espaço amostral.

Cálculo de probabilidade

Em uma urna giratória, há 100 bolinhas com as mesmas dimensões e as mesmas medidas de massa, numeradas de 1 a 100. Cada bolinha tem a mesma chance de ser retirada. Qual é a probabilidade de se retirar, ao acaso, uma bolinha cujo número seja múltiplo de 5?

A **probabilidade** de um evento de espaço amostral equiprovável ocorrer, em um experimento aleatório, é a razão entre o número de elementos favoráveis a esse evento e o número de elementos do espaço amostral.

$$\boxed{P(\text{evento}) = \frac{\text{número de elementos favoráveis ao evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}}$$

Nesse caso, os elementos do espaço amostral equiprovável são os números de 1 a 100; portanto, há 100 elementos.

Agora, vamos determinar os elementos que são favoráveis ao evento, ou seja, os números da sequência de 1 a 100 que são múltiplos de 5. Listando os elementos, temos:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

Assim, determinamos que o evento é composto de 20 elementos.

Logo, a probabilidade de se retirar, ao acaso, uma bolinha cujo número seja múltiplo de 5 é:

número de elementos favoráveis ao evento

$$P(\text{número múltiplo de 5}) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

número de elementos do espaço amostral

Concluímos que a probabilidade é $\frac{1}{5}$. Também podemos representar por meio de uma porcentagem, que, nesse caso, é 20%.

Observação

A probabilidade é a medida da chance de ocorrência de um evento. Essa medida pode assumir um valor de 0 a 1.

- Se a probabilidade de um evento for igual a zero, dizemos que esse evento é **impossível**.
- Se a probabilidade de um evento for igual a um, dizemos que esse evento é **certo**.

Observe este exemplo.

Considerando a situação da urna giratória com 100 bolinhas numeradas de 1 a 100, qual é a probabilidade de se retirar, ao acaso, uma bolinha cujo número seja múltiplo de 2?

Nesse caso, o número de elementos favoráveis ao evento é 50, pois metade das bolinhas corresponde a números pares, ou seja, múltiplos de 2. Logo, a probabilidade é 50%, pois:

$$P(\text{número múltiplo de 2}) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1 No lançamento de um "dado honesto" com as faces numeradas de 1 a 6, qual é a probabilidade de se obter, na face voltada para cima, um número de pontos menor que 5?

1. $\frac{2}{3}$

2 No sorteio de um *tablet*, foram entregues 200 cartelas numeradas de 1 a 200. Ana recebeu as cartelas de números 78, 79, 80, 81, 82 e 83. Sabendo que todos os números têm a mesma probabilidade de ser sorteados, qual é a probabilidade de Ana ganhar o *tablet*?

CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

2. $\frac{3}{100}$

3 Em um saco, há 3 cartões azuis, 4 cartões amarelos, 8 cartões verdes e 5 cartões vermelhos, todos com as mesmas medidas das dimensões. Pretende-se retirar um cartão ao acaso.

a) Qual é a probabilidade de o cartão retirado ser amarelo? **3. a)** $\frac{1}{5}$

b) Que cor de cartão tem maior probabilidade de ser retirada? Justifique.

3. b) Verde, pois há mais cartões dessa cor.

c) Indique um evento que tenha 25% de probabilidade de ocorrência.

3. c) Retirar um cartão vermelho.

4 Em dupla, elaborem uma situação de um experimento aleatório em que o evento:

a) tenha 25% de probabilidade de ocorrência;

b) tenha $\frac{1}{10}$ de probabilidade de ocorrência;

c) seja impossível;

d) seja certo.

4. Respostas pessoais.

Eventos independentes e eventos dependentes

Eventos independentes

Dois "dados honestos", um azul e outro vermelho, serão lançados simultaneamente.


ALEXMILLOS/SHUTTERSTOCK

Vamos analisar dois eventos:

- evento *A*: sair o número 1 no dado vermelho;
- evento *B*: sair o número 3 no dado azul.

Considerando o lançamento simultâneo desses dados, vamos determinar o espaço amostral. Para isso, organizaremos as informações em um quadro.

		Dado azul					
		1	2	3	4	5	6
Dado vermelho	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

A sequência de atividades propostas explora o cálculo de probabilidades baseando-se na construção do espaço amostral. Sendo assim, essas atividades têm por intenção favorecer o desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**.

- São respostas possíveis para a **atividade 4**:

a) em uma sala com três meninos e uma menina, sortear uma menina;

b) em um saco com bolinhas numeradas de 1 a 10, sortear a bolinha de número 4;

c) em uma turma que tem apenas meninos, eleger uma menina como representante da turma;

d) em uma caixa com bolinhas numeradas de 1 a 50, tirar uma bolinha menor do que 100.

Eventos independentes e eventos dependentes

Comente com os estudantes que, em muitas situações, o experimento aleatório pode ser separado em etapas e que a informação do que ocorreu em determinada etapa pode influenciar ou não na probabilidade de ocorrência das etapas sucessivas. É importante que os estudantes compreendam que dois eventos são considerados independentes quando a ocorrência de um deles não interfere na probabilidade de ocorrência do outro; caso contrário, os eventos são dependentes.

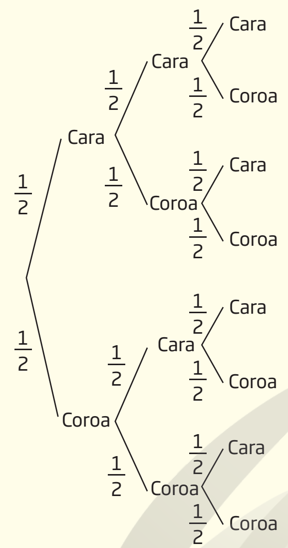
É fundamental comentar com os estudantes que há outras formas de representação do espaço amostral além do quadro, por exemplo, a árvore de possibilidades. Apresentar a eles várias formas de representar o espaço amostral favorece o desenvolvimento da competência específica **6.**

Sugestão de atividade extra

Peça aos estudantes que determinem a probabilidade de eventos independentes representando o espaço amostral por meio da árvore de probabilidades. Para isso, dê o seguinte problema:

Ao lançar, ao mesmo tempo, três "moedas honestas", qual é a probabilidade de sair três caras?

Considerando o lançamento simultâneo das três moedas, vamos determinar o espaço amostral construindo a árvore de probabilidades representada a seguir.



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que o espaço amostral é formado por 8 elementos, ou seja, há 8 resultados possíveis. Logo, só há uma chance de sair cara em cada uma das moedas. Conforme representada na árvore, a probabilidade desse evento será:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Observe que o espaço amostral é formado por 36 elementos, ou seja, há 36 resultados possíveis.

Há 6 possibilidades de sair o número 1 no dado vermelho, ou seja, de ocorrer o evento *A*. São elas:

(**1**, 1); (**1**, 2); (**1**, 3); (**1**, 4); (**1**, 5); (**1**, 6)

Nesse caso, a probabilidade de sair o número 1 no dado vermelho é:

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Também há 6 possibilidades de sair o número 3 no dado azul, ou seja, de ocorrer o evento *B*:

(1, **3**); (2, **3**); (3, **3**); (4, **3**); (5, **3**); (6, **3**)

Então, a probabilidade de sair o número 3 no dado azul é:

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Observe que a ocorrência de um evento não interfere na ocorrência do outro. Por esse motivo, dizemos que são **eventos independentes**.

Agora, qual seria a probabilidade de os dois eventos acontecerem simultaneamente: sair o número 1 no dado vermelho e o número 3 no dado azul?

Vamos retomar o quadro com o espaço amostral e destacar as possibilidades referentes a cada evento.

		Dado azul					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado vermelho	**1**	(1, 1)	(1, 2)	(**1**, **3**)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Observe que há somente uma possibilidade de os dois eventos acontecerem simultaneamente: (**1**, **3**). Logo, a probabilidade *P* será:

$$P = \frac{1}{36}$$

A probabilidade *P* de dois eventos independentes ocorrerem simultaneamente também pode ser calculada multiplicando as probabilidades de cada evento ocorrer.

$$P = \underbrace{\frac{1}{6}}_{P(A)} \cdot \underbrace{\frac{1}{6}}_{P(B)} = \frac{1}{36}$$

292

Comente com os estudantes que os eventos independentes e dependentes, que envolvem sorteios, podem ser chamados de eventos com e sem reposição, respectivamente. Se o evento for o sorteio de algo com reposição, isso significa o retorno do objeto sorteado ao seu conjunto de origem; é isso que mantém a probabilidade de sorteio constante, portanto, não altera a probabilidade de sorteio do objeto seguinte. Agora, se o evento é o sorteio de algo sem reposição, trata-se do condicional e significa que não haverá retorno do objeto sorteado ao seu conjunto de origem, alterando a probabilidade de sorteio do objeto seguinte.

Acompanhe outro exemplo que aborda eventos independentes.

Na escola Prisma, há duas turmas de 9º ano. A professora de Arte sorteará, ao acaso, um estudante de cada turma para fazer uma apresentação de teatro. A turma A tem 25 estudantes, sendo 15 meninas e 10 meninos. Já na turma B, há 24 estudantes, sendo 12 meninos e 12 meninas. Qual é a probabilidade de a professora sortear um menino da turma A e uma menina da turma B?

Os eventos "sortear um menino da turma A" e "sortear uma menina da turma B" são independentes, pois a ocorrência de um evento não interfere na ocorrência do outro.

- Vamos determinar a probabilidade de sortear um menino da turma A (evento *A*):

$$P(A) = \frac{\overset{\text{total de meninos na turma A}}{10}}{\underset{\text{total de estudantes da turma A}}{25}} = \frac{2}{5}$$

- Agora, vamos calcular a probabilidade de sortear uma menina da turma B (evento *B*):

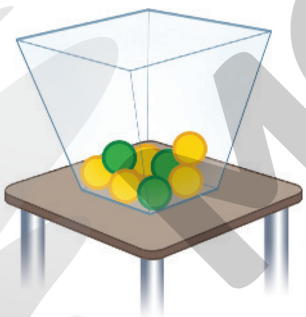
$$P(B) = \frac{\overset{\text{total de meninas na turma B}}{12}}{\underset{\text{total de estudantes da turma B}}{24}} = \frac{1}{2}$$

Como os eventos são independentes, a probabilidade será o produto entre a probabilidade de sortear um menino da turma A e a probabilidade de sortear uma menina da turma B. Assim, a probabilidade *P* de a professora sortear um menino da turma A e uma menina da turma B é:

$$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

Eventos dependentes

Em um recipiente, há 3 bolinhas verdes e 5 bolinhas amarelas, todas com as mesmas dimensões e as mesmas medidas de massa. Com os olhos vendados, uma pessoa vai retirar, ao acaso, uma bolinha. Depois, sem devolver a primeira bolinha ao recipiente, vai retirar uma segunda bolinha. Qual é a probabilidade de a primeira bolinha retirada ser verde e a segunda, amarela?



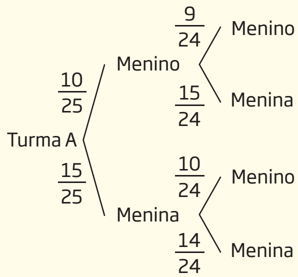
ILUSTRAÇÕES: CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Sugestão de atividade extra

Para encontrar a probabilidade de eventos dependentes inspirada no exemplo anterior do sorteio da professora de Arte, proponha aos estudantes a seguinte atividade:

Qual é a probabilidade de a professora sortear um menino e uma menina, nessa ordem, da turma A?

Considerando o sorteio sem reposição dos nomes dos estudantes, vamos determinar o espaço amostral construindo a árvore de probabilidades representada a seguir.



Observe que o fato de sortear um menino influenciará na quantidade total de estudantes para sortear a menina. Assim, a probabilidade de a professora sortear um menino e uma menina, nessa ordem, da turma A será:

$$P = \frac{10}{25} \cdot \frac{15}{24} = \frac{150}{600} = \frac{15}{60} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Vamos inicialmente calcular a probabilidade de a primeira bolinha ser verde:

$$P(\text{retirar uma bolinha verde}) = \underset{\text{total de bolinhas na urna}}{\overset{\text{total de bolinhas verdes}}{\frac{3}{8}}}$$

Agora, vamos calcular a probabilidade de a segunda bolinha ser amarela. Nesse caso, devemos considerar que uma bolinha verde foi retirada da urna; portanto, sobraram 7 bolinhas na urna: 2 verdes e 5 amarelas. Logo:

$$P(\text{retirar uma bolinha amarela após uma verde}) = \underset{\text{total de bolinhas na urna}}{\overset{\text{total de bolinhas amarelas}}{\frac{5}{7}}}$$

Desse modo, a probabilidade P de a primeira bolinha ser verde e a segunda ser amarela é:

$$P = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}$$

Nessa situação, observe que o primeiro evento (retirar uma bolinha verde) interfere na ocorrência do segundo evento (retirar uma bolinha amarela). Portanto, dizemos que são **eventos dependentes**.

Observação

Se alterarmos a situação e considerarmos que a primeira bolinha, após ser retirada, será devolvida ao recipiente para retirarmos a segunda bolinha, o que acontecerá?

Observe que o primeiro evento (retirar uma bolinha verde) não vai interferir na ocorrência do segundo evento (retirar uma bolinha amarela), pois a bolinha será devolvida. Com essa alteração, os eventos passaram a ser independentes.

Vamos, então, calcular a probabilidade de a primeira bolinha retirada ser verde e a segunda ser amarela, considerando que a primeira bolinha será devolvida à urna.

- $P(A)$, ou seja, a probabilidade de a primeira bolinha ser verde:

$$P(A) = \underset{\text{total de bolinhas na urna}}{\overset{\text{total de bolinhas verdes}}{\frac{3}{8}}}$$

- $P(B)$, ou seja, a probabilidade de a segunda bolinha ser amarela:

$$P(B) = \underset{\text{total de bolinhas na urna}}{\overset{\text{total de bolinhas amarelas}}{\frac{5}{8}}}$$

Assim, a probabilidade P de a primeira bolinha retirada ser verde e a segunda ser amarela é:

$$P = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{15}{64}$$

Esta sequência de atividades busca favorecer o desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**, pois há situações que envolvem a análise de probabilidade de eventos dependentes e independentes em experimentos aleatórios.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

5 Identifique se os eventos a seguir são independentes ou dependentes.

a) Uma indústria sabe que cerca de 5% dos parafusos fabricados têm defeitos. Um funcionário retirou ao acaso um parafuso de um lote A com 100 peças e outro parafuso de um lote B com 200 peças para analisá-los. Qual é a probabilidade de ele ter retirado parafusos com defeito dos dois lotes? **5. a)** independentes

b) Uma livraria vai sortear dois livros entre os clientes que preencheram um questionário sobre o atendimento da loja. No total, foram 500 questionários respondidos por clientes com 40 anos ou mais e 200 respondidos por clientes com menos de 40 anos. Qual é a probabilidade de o primeiro livro ser sorteado para um cliente com 40 anos ou mais e o segundo livro, para um cliente com menos de 40 anos? **5. b)** dependentes

6 Em uma caixa, há fichas numeradas de 1 a 100. Qual é a probabilidade de ser retirada inicialmente a ficha de número 5 e, depois, a ficha de número 58? Considere que a primeira ficha não foi devolvida à caixa. **6.** $\frac{1}{9\,900}$

7 Allan lançará duas "moedas honestas". Qual é a probabilidade de sair cara nas duas moedas se ele lançar:

a) uma moeda após a outra? **7. a)** $\frac{1}{4}$

b) as moedas simultaneamente? **7. b)** $\frac{1}{4}$

- Há diferença entre as probabilidades dos lançamentos de cada item? Justifique sua resposta.

8 Uma gincana terá 4 equipes: azul, verde, amarela e vermelha. Nas equipes azul e vermelha, há 15 participantes e, nas equipes verde e amarela, há 16 participantes.

a) A primeira prova será uma apresentação de teatro e a ordem de apresentação será definida por sorteio. Qual é a probabilidade de a ordem de apresentação ser: equipe amarela, equipe verde, equipe azul e equipe vermelha? **8. a)** $\frac{1}{24}$

b) Em uma das provas, uma equipe será sorteada e, em seguida, um componente dessa equipe será sorteado. Rafaela está na equipe azul. Qual é a probabilidade de ela ser a primeira sorteada? **8. b)** $\frac{1}{60}$

9 Uma empresa detectou que metade das 100 peças fabricadas em um setor estava com defeito. Essas 100 peças foram levadas para avaliação da equipe de controle de qualidade. Se essa equipe pegar, aleatoriamente, 2 peças para avaliar, qual será a probabilidade de essas peças estarem com defeito? **9.** $\frac{49}{198}$

10 Na escola Musicando, os estudantes de guitarra, violão e bateria estavam distribuídos desta maneira em 2023.

	Estudantes da escola Musicando em 2023			
	Guitarra	**Violão**	**Bateria**	**Total**
Homem	20	15	10	45
Mulher	14	12	15	41
Total	34	27	25	86

Dados obtidos pela escola Musicando em 2023.

a) Se fosse realizado um sorteio para cada grupo de estudantes conforme o instrumento de estudo, qual seria a probabilidade de serem sorteados uma mulher que pratica guitarra, um homem que pratica violão e uma mulher que pratica bateria? **10. a)** $\frac{7}{51}$

b) Se fossem realizados 3 sorteios agrupando todos os estudantes, sem separá-los por instrumento de estudo, qual seria a probabilidade de serem sorteados uma mulher que pratica guitarra, um homem que pratica violão e uma mulher que pratica bateria? **10. b)** $\frac{15}{2\,924}$

11 Crie um experimento aleatório em que os eventos sejam dependentes e outro experimento em que os eventos sejam independentes. Depois, proponha a um colega que determine a probabilidade de cada um desses eventos enquanto você faz o mesmo para os eventos dele. **11.** Resposta pessoal.

7. item: Não, pois, em ambos os casos, os lançamentos das moedas são eventos independentes.

Pesquisa estatística

BNCC:

- Competência geral 5 (a descrição está na página VI).
- Competências específicas 4 e 5 (as descrições estão na página VII).
- Habilidade EF09MA23.

Objetivos:

- Conhecer as etapas para realizar uma pesquisa estatística.
- Planejar e executar uma pesquisa estatística.

Justificativa

Conhecer as etapas para realizar uma pesquisa estatística possibilita aos estudantes entender como os dados de pesquisas sobre a população ou pesquisas eleitorais chegam até nós. Além disso, fornece subsídios para que eles possam realizar suas próprias pesquisas estatísticas.

O planejamento e a realização de pesquisas estatísticas permitem aos estudantes se engajarem na busca por respostas relacionadas a temas da realidade social, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade **EF09MA23**. Além disso, mobiliza os conhecimentos adquiridos sobre a construção, leitura e interpretação de tabelas e gráficos de diferentes tipos. Por ser uma atividade que envolve diálogo e cooperação, os estudantes exercitam também a empatia e o respeito às diferentes opiniões.

Mapeando conhecimentos

Na lousa, apresente as etapas de uma pesquisa estatística, mas fora de ordem. Depois, proponha aos estudantes que analisem as etapas e os ajude a ordená-las. Durante a dinâmica, incentive-os a explicar no que consiste cada uma das etapas.

Para as aulas iniciais

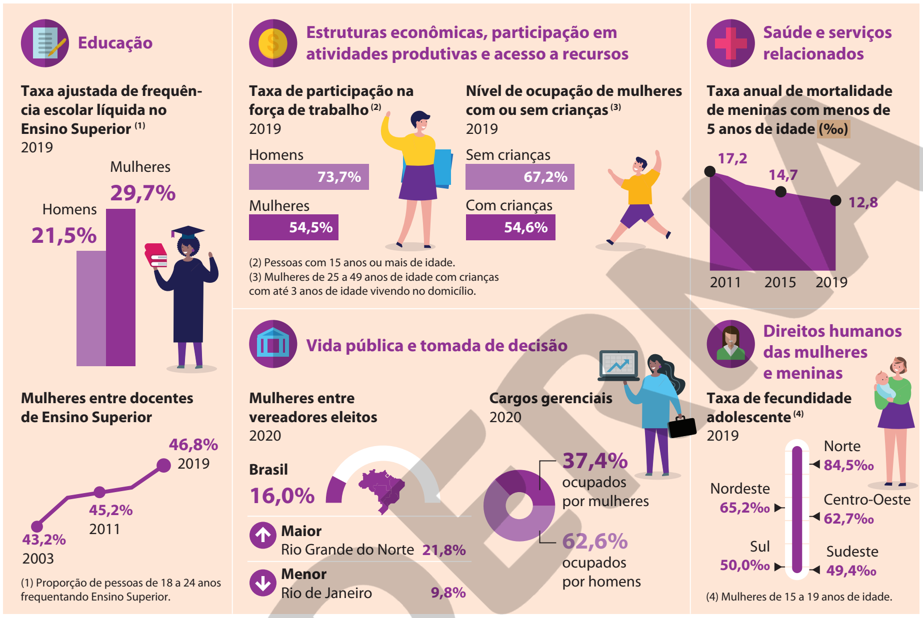
Organize a turma em grupos e solicite que façam uma pesquisa estatística sobre um tema que seja do interesse deles. Oriente-os a seguir as etapas que foram reordenadas na dinâmica inicial. Você pode propor para eles algumas questões como: "Qual é o tema? Qual é a importância deste tema? Qual é o público-alvo? Quais cuidados serão tomados ao selecionar a amostra? Como os dados serão coletados? Quais perguntas serão feitas? Quais gráficos vocês vão utilizar para representar os dados? Por quê? O que é possível concluir com base nos gráficos? O objetivo da pesquisa foi alcançado?". Reserve uma ou duas aulas para que todos os grupos tenham a oportunidade de apresentar o que fizeram.

2 Pesquisa estatística

Em 2021, o IBGE divulgou a segunda edição do estudo *Estatísticas de gênero: indicadores sociais das mulheres no Brasil* com dados coletados de diversas fontes, como a Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2019 e o Tribunal Superior Eleitoral, em 2020.

Analise este infográfico com informações sobre esse estudo.

‰: símbolo que representa a permilagem, que corresponde a uma fração de denominador 1 000.



MÁRIO KANNO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: IBGE. Diretoria de Pesquisas, Coordenação de População e Indicadores Sociais. **Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2019**. Rio de Janeiro: IBGE, 2020.

Estudos como esse são realizados por meio de técnicas e métodos estatísticos, que orientam as diferentes etapas do estudo: planejamento, coleta, organização, representação, análise, previsões e tomadas de decisão.

A Estatística está presente nas diferentes áreas de conhecimento e em nosso cotidiano, como nos noticiários, nas previsões do tempo, no estudo sobre a eficácia de medicamentos e em diferentes previsões e planejamentos de diversas áreas.

Neste momento, retomaremos os conceitos estudados em anos anteriores com o objetivo de orientar a compreensão e a realização de pesquisas estatísticas.

Planejamento de uma pesquisa estatística

Na realização de uma pesquisa estatística é comum passarmos pelas seguintes etapas de planejamento: problematização, definição da população ou amostra e realização da coleta dos dados.

Ao mostrar o infográfico, comente com os estudantes o seu significado. **Infográfico** é a explicação feita por meio de imagens (fotografia, desenho, gráficos, anagramas etc.) e é usada para sintetizar ou resumir as informações apresentadas em um texto.

Pergunte aos estudantes: "Quais informações vocês observam nesse infográfico?". Os estudantes podem mencionar, por exemplo, a proporção de mulheres na política e em cargos gerenciais, a taxa de fecundidade de adolescentes do sexo feminino distribuída por regiões ou a taxa de participação de homens e mulheres na força de trabalho. É importante mediar as discussões entre os estudantes com base nas informações apresentadas.

(EF09MA23) Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Problematização

Uma investigação estatística parte da observação dos fenômenos e da identificação de um problema, o primeiro elemento a ser determinado em uma pesquisa. É com base nele que identificamos as perguntas a que queremos responder.

No exemplo apresentado, a investigação da pesquisa foi a desigualdade de gênero no Brasil, sendo elaboradas perguntas do tipo:

- Você frequenta as aulas da faculdade/universidade em que estuda?
- Você trabalha?
- Você tem filhos?
- Você ocupa cargo gerencial na empresa em que trabalha?

Observe que essas questões permitem coletar alguns dos dados apresentados no infográfico.

População e amostra

O conjunto formado por todos os elementos de uma pesquisa é denominado **população** ou **universo estatístico**. Quando uma pesquisa é realizada com todos os elementos de uma população, ela é denominada **pesquisa censitária**.

Entretanto, nem sempre é possível coletar dados de todos os elementos de um universo. Nesse caso, seleciona-se apenas uma parte da população, que chamamos de **amostra**.

Ao optar por uma **pesquisa por amostragem** (ou pesquisa amostral), a amostra deve ser escolhida de maneira conveniente e estratégica, para que seja possível extrair informações que representem a população como um todo.

Na escolha da amostra, devemos considerar algumas questões:

- Qual será o tamanho da amostra?
- Como essa amostra poderá ser selecionada?
- Que variáveis (qualitativa, quantitativa discreta ou contínua) devem-se considerar?

Por fim, devemos escolher a técnica de amostragem mais adequada: casual simples, sistemática ou estratificada. Cada uma com características que possam favorecer a representatividade da amostra, dependendo do cenário da pesquisa.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

12 A diretoria de uma empresa pretende realizar um estudo sobre a satisfação de seus funcionários em relação à segurança no trabalho. Essa empresa tem 5 setores e 2 turnos de trabalho. Para essa pesquisa, será considerada uma amostra dos funcionários. Na sua opinião, que técnica de amostragem pode ser utilizada para determinar a amostra? **12.** Resposta pessoal.

13 Imagine que você vai realizar uma pesquisa com estudantes da sua escola para saber a opinião deles sobre os alimentos servidos. Em dupla, conversem sobre a problematização motivadora dessa pesquisa, elaborando perguntas que possam ser realizadas. Analisem se será uma pesquisa amostral ou censitária. Caso seja amostral, descrevam o tipo de amostragem a ser realizada. No fim, conversem com outra dupla para analisar as perguntas elaboradas e o tipo de pesquisa escolhido. **13.** Resposta pessoal.

Atente os estudantes para o fato de que é fundamental em uma pesquisa estatística saber o significado de população e amostra, bem como a diferença entre pesquisas censitárias e amostrais. Além disso, retome com eles as técnicas de amostragem.

- Casual simples: podemos citar como exemplo um sorteio em que a probabilidade de cada elemento do espaço amostral ser sorteado é a mesma. Por exemplo, para conhecer a opinião dos estudantes de uma escola sobre a reforma feita nos banheiros, uma diretora pode selecionar três estudantes, ao acaso, de cada uma das turmas.
- Sistemática: definimos momentos convenientes para a seleção de elementos da amostra. Por exemplo, em um pedágio, a cada 50 carros a concessionária entrevista um motorista para saber origem e destino.
- Estratificada: geralmente utilizada quando há variáveis que podem influenciar o resultado da pesquisa, dependendo da escolha da amostra. Por exemplo, ao entrevistar pessoas sobre o que gostam de assistir na TV, muito provavelmente a faixa etária dessas pessoas irá influenciar na determinação dos programas favoritos.

Alerte os estudantes sobre alguns cuidados importantes que devem ser tomados ao montar um questionário de uma pesquisa estatística. Por exemplo:

- Perguntas que não apresentem resultados que interessem diretamente na problematização da pesquisa devem ser eliminadas.
- As informações de natureza pessoal ou muito delicadas podem ser difíceis de obter do entrevistado. O entrevistado pode ficar constrangido em responder a essas perguntas.
- Use palavras comuns, que estejam de acordo com o nível de vocabulário do entrevistado. Evite a complexidade.

Coleta dos dados

As pesquisas estatísticas nos ajudam a responder a perguntas em diversos contextos. Vamos verificar como obter informações por meio de entrevistas e questionários. Acompanhe a situação.


fonte primária

fonte secundária

A diretoria de uma escola quer saber a data de nascimento de todos os estudantes do 9º ano. Para isso, há duas opções: perguntar diretamente a cada um dos estudantes do 9º ano ou olhar a documentação que está nos arquivos dos estudantes.

Quando optam por perguntar diretamente a cada um dos elementos da amostra (nesse caso, aos estudantes), dizemos que a **fonte** é **primária**.

Ao optar por olhar a documentação, dizemos que a **fonte** é **secundária**.

Após definir a amostra e a fonte dos dados, a coleta poderá ser realizada por meio de entrevistas, questionários, fichas de observação ou outros instrumentos, conforme a variável escolhida.

Ao elaborar um questionário ou uma entrevista, dependendo da característica da variável, podemos ter perguntas abertas ou fechadas.

- **Perguntas abertas:** permitem qualquer tipo de resposta.
- **Perguntas fechadas:** geralmente são acompanhadas de alternativas para escolha. Nesse caso, pode-se deixar uma alternativa aberta, caso o entrevistado não encontre uma alternativa adequada.

Observação

Quando, em uma entrevista ou questionário, optamos por perguntas abertas, obtemos um resultado mais próximo do real, mas às vezes as respostas podem ser tão distintas entre si que dificultam sua organização.

Acompanhe a situação.

A professora de Giovana e Felipe pediu a eles que fizessem uma pesquisa sobre o tipo de filme preferido pelos colegas de classe. Confira o questionário que cada um elaborou.

Questionário de Giovana

Questionário
Nome: ▬
Qual é o seu tipo de filme preferido? Resposta: ▬

Questionário de Felipe

Questionário	
Nome: ▬	
Qual é o seu tipo de filme preferido?	
(▬) Ação	(▬) Romance
(▬) Comédia	(▬) Ficção
(▬) Terror	(▬) Outro. Qual? ▬

Observe que Giovana deixou a pergunta em aberto, permitindo qualquer resposta. Já Felipe colocou algumas opções de resposta, o que facilitará a organização dos resultados.

Atividades

14. b) Resposta pessoal.
14. c) Espera-se que os estudantes percebam que sim.

Faça as atividades no caderno.

14 Uma empresa pretende lançar um novo sabor de sorvete para vender a clientes adultos. Ela está em dúvida entre quatro sabores: goiaba, maracujá, acerola e manga. Para escolher o sabor, foi encomendada uma pesquisa.

14. a) adultos

a) Qual deve ser o público pesquisado?

b) Supondo que a pesquisa seja feita com uma amostra de 100 pessoas, que fatores devem ser levados em consideração?

c) O fato de o entrevistado consumir ou não sorvete deve ser considerado? E a frequência com que consome?

d) Monte um possível questionário para a realização dessa pesquisa.

14. d) Resposta pessoal.

15 Retome as perguntas elaboradas na **atividade 13**, sobre a pesquisa da qualidade dos alimentos servidos na escola. Reflita com sua dupla sobre o tipo de perguntas feitas, se mudariam o tipo de pergunta ou incluíram novas. Depois, elabore um questionário com alguma pergunta fechada.

15. Resposta pessoal.

16 Em grupo, você vai realizar uma pesquisa amostral com os estudantes de sua escola sobre o meio de transporte que utilizam para ir à escola. Definam a técnica de amostragem a ser utilizada, o tipo de perguntas e o questionário a ser aplicado. Depois, realize a coleta de dados. A análise será feita após os próximos tópicos.

16. Resposta pessoal.

Organização e representação

Um questionário com sugestões de respostas em alternativas nos ajuda a organizar os dados. Quando não estão apresentados dessa forma, é preciso categorizá-los, ou seja, agrupar os elementos que têm a mesma propriedade.

Para isso, devemos considerar que todos os elementos devem estar em alguma categoria e que nenhum elemento deve aparecer em mais de uma categoria. Acompanhe um exemplo.

Apresentamos a lista de respostas que Gabriela obteve quando perguntou aos colegas qual era o lazer favorito deles em 2023.

Gabriela analisou as respostas e pensou em agrupá-las em duas categorias: atividades esportivas e outras atividades.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

• No **item d** da **atividade 14**, oriente os estudantes a lembrar dos critérios que consideraram importantes no **item b**. Além de determinar o público-alvo da pesquisa, é importante que percebam que a empresa já tem quatro sabores em mente, portanto é suficiente uma pergunta com quatro alternativas para determinar a preferência de sabor do público-alvo.

• Na **atividade 16**, espera-se que os estudantes percebam que uma pesquisa censitária tomaria muito tempo e daria muito trabalho para analisar todos os dados. Além disso, espera-se que optem por questões fechadas para facilitar a compilação e análise das respostas.

Organização e representação

Note que Gabriela poderia organizar os dados dividindo, por exemplo, em atividades que podem ser realizadas em grupo ou individualmente. Ela também poderia ter continuado a dividir as atividades esportivas, como em atividades com bola e sem bola.

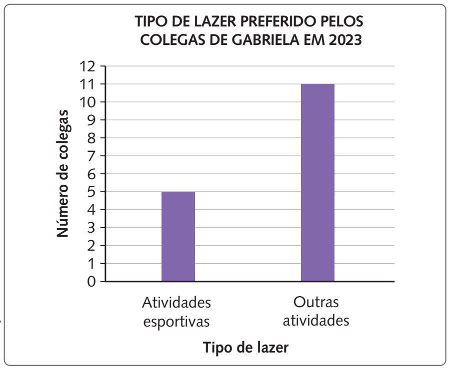
Se possível, neste momento, explore as planilhas eletrônicas: elas possuem ferramentas que permitem a organização e a representação dos dados por meio de gráficos de diferentes tipos, quadros e tabelas, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **5** e da competência específica **5**.

Análise e conclusão

Comente com os estudantes sobre a importância de cada uma das etapas do processo estatístico, sendo que a coleta de dados, a organização e a apuração dos dados obtidos, e a apresentação dos dados por meio de tabelas e gráficos fazem parte da Estatística descritiva, ao passo que a análise e a interpretação dos resultados integram a Estatística inferencial ou indutiva.

É importante que os estudantes entendam o significado das medidas de tendência central (média, moda e mediana) e da amplitude para que possam estimar esses parâmetros corretamente, a fim de montar um relatório com as conclusões adequadas.

Após agrupá-los nessas categorias, Gabriela poderá representar esses dados em uma tabela e, depois, em diferentes gráficos. Por exemplo:



Dados obtidos por Gabriela em 2023.

Dados obtidos por Gabriela em 2023.

Observe que os dois gráficos representam a mesma informação, mas de modos diferentes. No gráfico de barras, foram colocados os valores numéricos referentes ao número de colegas. Já no de setores, as informações foram colocadas em porcentagem.

Análise e conclusão

Assim como organizamos conjuntos de dados em tabelas e gráficos, também podemos sintetizar os dados utilizando as medidas de tendência central: **moda**, **média** e **mediana**. Elas são usadas para resumir ou representar um conjunto de dados, pois visam identificar um valor em torno do qual os dados tendem a se concentrar. Acompanhe a situação.

Mariana mediu a altura de todos os estudantes de sua turma e anotou os dados na lousa.

1,56 m	1,45 m	1,80 m	1,56 m	1,74 m	1,59 m	1,69 m
1,63 m	1,56 m	1,54 m	1,59 m	1,79 m	1,74 m	1,56 m
1,67 m	1,72 m	1,69 m	1,65 m	1,68 m	1,72 m	1,68 m

Depois, ela organizou os dados em ordem crescente e determinou algumas medidas:

1,45 m	1,54 m	1,56 m	1,56 m	1,56 m	1,56 m	1,59 m	• Moda = 1,56 m
1,59 m	1,63 m	1,65 m	1,67 m	1,68 m	1,68 m	1,69 m	• Média ≃ 1,648 m
1,69 m	1,72 m	1,72 m	1,74 m	1,74 m	1,79 m	1,80 m	• Mediana = 1,67 m

- A **moda** corresponde ao valor de maior frequência e é usada para identificar a preferência em diferentes situações. Por esse motivo, pode ser aplicada em variáveis quantitativas ou qualitativas. Na situação, a moda é 1,56 m, ou seja, é a medida da altura mais frequente na turma de Mariana.
- Já a **mediana** divide um conjunto de dados ordenado em duas partes iguais. Nesse exemplo, o termo central é 1,67 m, o que significa que é possível dividir a turma em dois grupos com a mesma quantidade de estudantes, sendo um deles com 1,67 m ou menos de medida da altura e o outro com 1,67 m ou mais de medida da altura.

- A **média** é o quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações. Essa medida sofre influência de todos os valores do conjunto de dados e nem sempre corresponde a um desses valores. Na situação observada, a média foi aproximadamente 1,648 m.

Se analisarmos a média e a mediana juntas, podemos dizer que a maior parte dos estudantes da turma de Mariana tem medida da altura maior que a medida da altura média da turma.

Além dessas medidas, também temos a **amplitude total**, que é a diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da variável. No exemplo dado, a amplitude total é 35 cm, o que indica que o estudante mais alto é 35 cm maior que o mais baixo.

No fim de uma pesquisa, precisamos voltar às questões de problematização e buscar respondê-las. Para isso, podemos montar um relatório com todas as informações coletadas, a representação e a análise dos dados e as respostas das questões iniciais.

17. c) Espera-se que os estudantes respondam que a média da medida do tempo de serviço é de 2,5 anos e que o funcionário com mais tempo de serviço trabalha há 4 anos na lanchonete e o que tem menos tempo trabalha há 1 ano e meio.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

17 Observe os dados de todos os funcionários da lanchonete Bom Lanche.

Sexo	Salário (em reais)	Grau de escolaridade	Anos de serviço
Feminino	3000	Ensino Médio	2
Feminino	1700	Ensino Médio	1,5
Feminino	3750	Ensino Superior	3
Masculino	4000	Ensino Superior	4
Masculino	2500	Ensino Médio	2

a) Qual é o salário médio dos funcionários dessa lanchonete? **17. a)** R$ 2990,00

b) Que medida de tendência central pode ser aplicada em relação às variáveis sexo e grau de escolaridade? **17. b)** moda

c) O que podemos dizer sobre a medida do tempo de serviço dos funcionários dessa lanchonete?

18 Uma empresa perguntou a opinião de 60 clientes em relação a um novo produto. Analise, no quadro, as notas, de 0 a 10, dadas pelos clientes.

5	8	10	6	7	3	4	5	6	7
4	9	10	7	8	9	10	3	4	1
5	5	8	6	3	7	8	8	9	10
3	10	5	7	5	6	7	8	2	5
8	8	4	7	5	6	1	2	9	4
9	3	4	5	8	4	3	5	9	1

18. a) Comentário em *Orientações*.

a) Essas notas poderiam ser agrupadas em conceitos como: ruim, regular, bom e muito bom. Crie um critério para associar as notas a um desses conceitos.

b) Organize esses dados em uma tabela ou um gráfico, agrupando as notas de acordo com o conceito correspondente.

18. b) Comentário em *Orientações*.

c) Determine a moda, a média e a mediana desse conjunto de dados. Depois, escreva uma conclusão sobre isso no caderno. **18. c)** Moda: 5; média: aproximadamente 5,97; mediana: 6; espera-se que os estudantes concluam que o produto não agradou muito aos clientes.

19 Organize, em tabelas e gráficos, os dados da sua pesquisa da **atividade 16**, sobre o meio de transporte utilizado pelos estudantes para irem à escola. Depois, determine medidas de tendência central e escreva no caderno uma conclusão sobre sua pesquisa. **19.** Resposta pessoal.

20 Realize uma pesquisa censitária ou por amostragem com os colegas de turma de algum tema relevante para o grupo. Elabore um questionário a ser aplicado, organize as informações em tabelas e gráficos, utilize as medidas de tendência central adequadas para a interpretação das informações, elabore um relatório com uma análise e sua conclusão sobre o tema pesquisado e, depois, apresente-o aos colegas de classe. **20.** Comentário em *Orientações*.

- No **item a** da **atividade 18**, um critério possível seria estipular que as notas de [0; 2,5[correspondem a ruim; de [2,5; 5[correspondem a regular; de [5; 7,5[correspondem a bom e [7,5; 10] correspondem a muito bom. O quadro a seguir ilustra uma forma de organizar esses dados dentro das classes estabelecidas a partir dos intervalos, conforme solicitado no **item b**.

Conceito	Frequência
Ruim	5
Regular	13
Bom	22
Muito bom	20

- Na **atividade 20**, para incentivá-los a realizar a pesquisa, peça aos estudantes que investiguem os temas preferidos por eles. Reserve um tempo para que discutam os temas escolhidos e, se possível, evitem repetições.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Probabilidade

• Antes que façam a **atividade 1**, proponha as seguintes questões para os estudantes: “A probabilidade de retirar uma bolinha vermelha é maior ou menor do que a probabilidade de retirar uma bolinha azul? Por quê? Se na urna houvesse 18 bolinhas, sendo 9 vermelhas e 9 azuis, o que poderíamos falar sobre a probabilidade de retirar bolinhas vermelhas ou azuis?”. Deixe-os à vontade para verbalizar suas respostas. Ao determinar a probabilidade solicitada no **item b**, verifique se alguns estudantes calculam $1 - \frac{9}{25}$.

• Na **atividade 2**, é importante que os estudantes reconheçam que o espaço amostral é composto pelos números de 1 a 6, que são todos os resultados possíveis do lançamento do “dado honesto”. Depois, em cada item, incentive-os a discriminar o evento em questão. Com isso, espera-se que não tenham dificuldades para determinar as probabilidades solicitadas.

• Na **atividade 3**, peça aos estudantes que escrevam os números de 1 a 50 em um quadro. Nesse caso, cada célula do quadro representa um cartão numerado. Antes que eles calculem a probabilidade solicitada no **item a**, oriente-os a hachurar as células do quadro que contêm múltiplos de 4. Dessa forma, eles poderão perceber mais facilmente quais são os elementos favoráveis ao evento. Adote procedimento similar para os **itens b** e **c**.

• Na **atividade 4**, espera-se que os estudantes percebam que os eventos são independentes, ou seja, o resultado obtido no primeiro lançamento da “moeda honesta” não interfere no segundo lançamento. Caso tenham dificuldades para determinar as probabilidades solicitadas em cada item, oriente-os a construir um quadro com todos os resultados possíveis desse experimento aleatório.

Pesquisa estatística

Recorde com os estudantes cada etapa de uma pesquisa estatística. Você pode fazer a leitura coletiva do quadro de revisão com eles. Se achar conveniente, apresente exemplos.

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Faça as atividades no caderno.

Probabilidade

Um **experimento aleatório** é aquele em que conhecemos os resultados possíveis, mas não sabemos com exatidão qual deles vai ocorrer.

O conjunto de todos os resultados forma o **espaço amostral**. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento**.

Quando cada resultado tem a mesma chance de ocorrer, dizemos que o espaço amostral é **equiprovável**.

Cálculo de probabilidade

A **probabilidade** de um evento de espaço amostral equiprovável ocorrer, em um experimento aleatório, é a razão entre o número de elementos favoráveis a esse evento e o número de elementos do espaço amostral.

$$P(\text{evento}) = \frac{\text{número de elementos favoráveis ao evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

Eventos independentes

Quando a ocorrência de um evento não interfere na ocorrência do outro, temos **eventos independentes**.

Eventos dependentes

Quando um evento interfere na ocorrência de outro evento que ocorrerá, temos **eventos dependentes**.

1. Em uma urna, foram colocadas 25 bolinhas, sendo 16 azuis e 9 vermelhas, e foi retirada ao acaso uma bolinha.

a) Qual é a probabilidade de a bolinha retirada ser vermelha? **1. a)** $\frac{9}{25}$

b) Qual é a probabilidade de a bolinha retirada ser azul? **1. b)** $\frac{16}{25}$

c) Retirou-se uma bolinha azul e, sem repô-la, retirou-se outra bolinha ao acaso. Qual é a probabilidade de essa segunda bolinha ser azul? **1. c)** $\frac{15}{24} = \frac{3}{8}$

2. No lançamento de um “dado honesto” de seis faces numeradas de 1 a 6, qual é a probabilidade de sair:

a) um número par? **2. a)** $\frac{1}{2}$

b) um número menor que 5? **2. b)** $\frac{2}{3}$

c) um número maior que 6? **2. c)** 0

3. Uma urna contém 50 cartões, numerados de 1 a 50. Ao retirar um cartão, ao acaso, qual é a probabilidade de sair:

a) um múltiplo de 4? **3. a)** $\frac{6}{25}$

b) um divisor de 5? **3. b)** $\frac{1}{5}$

c) um cartão com número maior que 30? **3. c)** $\frac{2}{5}$

4. Para o lançamento de uma “moeda honesta” duas vezes consecutivas, determine a probabilidade de:

a) saírem duas faces diferentes; **4. a)** $\frac{1}{2}$

b) sair pelo menos uma “cara”. **4. b)** $\frac{3}{4}$

Pesquisa estatística

Planejamento de uma pesquisa estatística

O conjunto formado por todos os elementos de uma pesquisa é denominado **população** ou **universo estatístico**. Quando uma pesquisa é realizada com todos os elementos de uma população, ela é denominada **pesquisa censitária**.

Entretanto, nem sempre é possível coletar dados de todos os elementos de um universo. Nesse caso, seleciona-se apenas uma parte da população, que chamamos de **amostra**.

Ao optar por uma **pesquisa por amostragem** (ou pesquisa amostral), a amostra deve ser escolhida de maneira conveniente e estratégica, para que seja possível extrair informações que representem a população como um todo.

Organização e representação

Os dados de uma pesquisa podem ser organizados em algumas categorias e, depois, representados em uma tabela ou em diferentes gráficos.

Análise e conclusão

Assim como organizamos conjuntos de dados em tabelas e gráficos, também podemos sintetizar os dados utilizando as medidas de tendência central:

- **moda:** valor de maior frequência;
- **mediana:** termo central ou média aritmética dos dois termos centrais, quando os dados estão em ordem crescente ou decrescente;
- **média:** quociente entre a soma dos valores observados e o número de observações.

5. Pesquisa amostral, pois a censitária demandaria um gasto muito alto e seria muito trabalhosa para entrevistar todos os adolescentes brasileiros.

5. Um grupo de médicos pretende pesquisar a qualidade de sono dos adolescentes brasileiros. Esse grupo deve optar por uma pesquisa censitária ou amostral? Justifique.

6. b) Resposta em *Orientações*.

6. Analise as medidas de massa dos jogadores do time de Jorge, obtidas por ele em 2023.

61 kg	61 kg	61 kg	62 kg	63 kg
63 kg	63 kg	63 kg	65 kg	65 kg
68 kg	68 kg	70 kg	71 kg	71 kg

6. a) Resposta em *Orientações*.

a) Organize os dados em uma tabela.

b) Construa um gráfico de barras verticais.

c) Calcule a média, a moda e a mediana.

6. c) média: 65; moda: 63; mediana: 63 (8º termo)

7. Uma escola realizou uma pesquisa com os estudantes matriculados, na qual cada um deles apontou sua atividade cultural preferida. O resultado obtido foi representado nesta tabela.

Atividade cultural preferida dos estudantes	
Atividade cultural	**Quantidade de estudantes**
Teatro	116
Cinema	158
Show	122
Contação de histórias	74
Visita a museu	90

Dados obtidos pela direção da escola em janeiro de 2024.

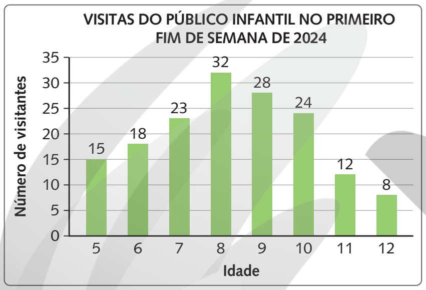
a) Determine a moda. **7. a)** cinema

b) Construa um gráfico de barras horizontais.

c) Escreva no caderno três análises sobre as informações do gráfico. **7. b)** Resposta em *Orientações*.

8. Um parque fez um estudo sobre a idade de crianças visitantes no primeiro fim de semana de 2024, resultando no gráfico. Determine a média e a moda dos dados.

8. média: 8,25 ≃ 8 anos; moda: 8 anos



Dados obtidos pelo parque no primeiro fim de semana de 2024.

7. c) Exemplo de resposta: A atividade preferida é o cinema e a menos escolhida é a contação de histórias. O *show* é a segunda atividade preferida.

11. b) 20 estudantes; média: 5,495.

11. d) Exemplo de resposta: Podemos concluir que os estudantes não se saíram muito bem na avaliação, visto que a média foi 5,6, a moda foi 5,3 e a maior nota foi 6,9 de 10,0.

9. Uma empresa de uniformes tem 8 funcionários cujos salários, em reais, estão indicados a seguir:

5 200	3 780	2 370	2 370
1 180	1 180	1 180	1 180

a) Calcule a média, a mediana e a moda desses dados. **9. a)** média: 2 305; mediana: 1 775; moda: 1 180

b) Se a empresa contratar um profissional especializado com um salário de 7 480 reais, quais medidas de tendência central seriam alteradas?

9. b) a média (2 880) e a mediana (2 370)

10. Fábio anotou a seguir a medida de temperatura mínima de cada dia de uma semana.

Medidas de temperatura mínima durante a semana	
Dia da semana	**Medida de temperatura mínima**
Domingo	17 °C
Segunda-feira	18 °C
Terça-feira	17 °C
Quarta-feira	21 °C
Quinta-feira	19 °C
Sexta-feira	16 °C
Sábado	15 °C

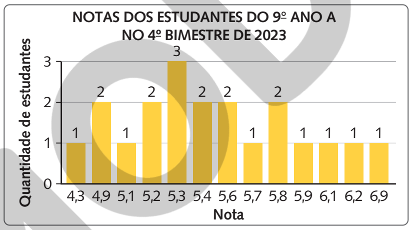
Dados obtidos por Fábio na primeira semana de 2024.

a) Construa um gráfico de segmentos com esses dados. **10. a)** Resposta em *Orientações*.

b) Determine a média, a mediana e a moda desses dados.

10. b) média: 17,6 °C; mediana: 17 °C; moda: 17 °C

11. Este gráfico apresenta as notas da avaliação de Matemática do 4º bimestre de 2023 aplicada no 9º ano A pela professora Gabi. Sabendo que essa avaliação tinha valor de 0,0 a 10,0, responda:



Dados obtidos pela professora Gabi no 4º bimestre de 2023.

a) Essa pesquisa é censitária ou amostral? Justifique.

b) Qual é o tamanho dessa população? Determine a média.

c) Determine a moda. **11. c)** 5,3

d) A qual conclusão podemos chegar com os dados dessa pesquisa?

11. a) Censitária, pois todos os estudantes, ou seja, toda a população fez a prova.

303

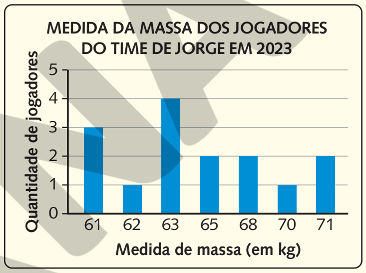
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

• Resposta do **item a** da **atividade 6**:

Medida da massa dos jogadores do time de Jorge em 2023	
Medida de massa (em kg)	**Quantidade de jogadores**
61	3
62	1
63	4
65	2
68	2
70	1
71	2

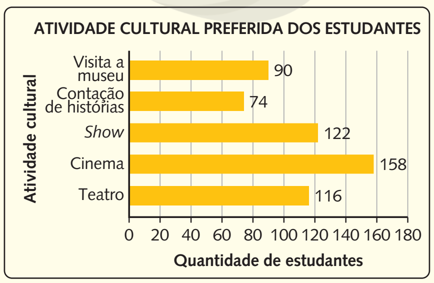
Dados obtidos por Jorge em 2023.

• Resposta do **item b** da **atividade 6**:



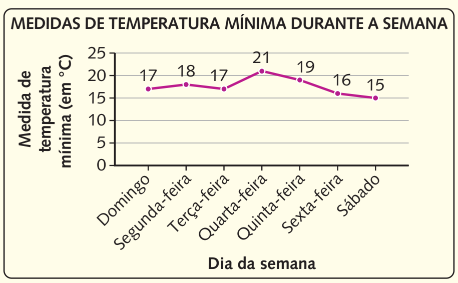
Dados obtidos por Jorge em 2023.

• Resposta do **item b** da **atividade 7**:



Dados obtidos pela direção da escola em janeiro de 2024.

• Resposta do **item a** da **atividade 10**:



Dados obtidos por Fábio na primeira semana de 2024.

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

É hora de extrapolar

BNCC:

- Competências gerais 2, 7, 9 e 10 (as descrições estão na página VI).
- Competências específicas 2, 4, 6, 7 e 8 (as descrições estão na página VII).

Tema contemporâneo transversal:

PLURALIDADE CULTURAL

Esta seção propõe o fechamento da Unidade por meio de um trabalho colaborativo que explora a pesquisa, a comunicação e a elaboração de um gibi, que será compartilhado com a turma e com a comunidade escolar.

Com a finalidade de organizar o trabalho, a seção é dividida em etapas que promovem:

- entendimento do contexto e dos objetivos do trabalho a ser realizado;
- pesquisa coletiva;
- elaboração, em grupo, do produto proposto;
- apresentação e exposição do produto;
- reflexão e síntese do trabalho.

As etapas de pesquisa e elaboração do produto podem ser realizadas extraclasse. Verifique o perfil dos estudantes e oriente-os com relação ao prazo, aos materiais e a outros aspectos necessários à realização do trabalho.

A seção também favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **7**, **9** e **10** e das competências específicas **2**, **4**, **6**, **7** e **8**, procurando mobilizar conteúdos estudados nos capítulos que integram a Unidade. Portanto, é recomendável trabalhar a seção depois de estudar os capítulos, mas, se preferir trabalhar as etapas da seção à medida que os capítulos forem estudados, atente para os conhecimentos prévios necessários.

É hora de extrapolar

PLURALIDADE CULTURAL

Faça as atividades no caderno.

O que você conhece da cultura afro-brasileira?

Atualmente, negros e negras representam mais da metade da população brasileira e formam a maior população negra fora da África. As manifestações da cultura afro-brasileira são constituintes da cultura brasileira e é de extrema importância que sejam de conhecimento de todos, assim como o estudo sobre personalidades negras importantes para o nosso país.

Objetivos: Analisar dados sobre a composição da população brasileira, pesquisar sobre a cultura afro-brasileira e sobre personalidades negras importantes para a história do Brasil e produzir um gibi que será exibido para a comunidade escolar.

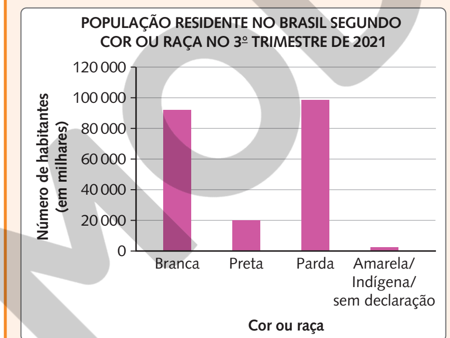
Etapa 1: Análise de dados sobre a composição da população brasileira em relação à raça.

1. Reúnam-se em grupo, analisem a tabela e o gráfico produzidos com base nos dados sobre a composição da população brasileira segundo cor ou raça da Pesquisa Nacional de Amostra de Domicílios (Pnad), realizada no 3º trimestre de 2021 pelo IBGE.

População residente no Brasil segundo cor ou raça no 3º trimestre de 2021

Cor ou raça	Número de habitantes (em milhares)
Branca	92 029
Preta	20 030
Parda	98 425
Amarela/indígena/sem declaração	2 324
Total	**212 808**

Dados obtidos em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6403. Acesso em: 17 jun. 2022.



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6403. Acesso em: 17 jun. 2022.

1. a) Respostas pessoais.

a) O gráfico de colunas é adequado para representar esses dados? Por quê?

b) Com auxílio de uma calculadora, calcule que porcentagem cada categoria considerada na pesquisa representa da população.

c) Utilizando um *software* de planilha eletrônica, construam um gráfico de setores sobre a composição da população brasileira segundo cor ou raça no 3º trimestre de 2021, de acordo com a pesquisa realizada pelo IBGE.

2. Leiam o texto e, com a análise dos dados apresentados a seguir, respondam às questões.

> O IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) usa preto como classificação de cor ou raça nas pesquisas de censo demográfico desde 1872, conforme Nota Técnica sobre o "Histórico da investigação sobre cor ou raça nas pesquisas domiciliares do IBGE".
>
> [...]
>
> Para formar a classificação de negros, é comum que seja somada a população preta à população parda para a formação de um grupo. Portanto, usar o termo preto não é equivalente a usar a categoria negro, que pode incluir os pardos.
>
> [...]
>
> UOL Vestibular. IBGE usa classificação de cor preta; grupo negro reúne pretos e pardos. São Paulo, 2013. Disponível em: https://vestibular.uol.com.br/noticias/redacao/2013/05/03/ibge-usa-classificacao-de-cor-preta-grupo-negro-reune-pretos-e-pardos.htm. Acesso em: 17 jun. 2022.

Analise os percentuais da população que se autodeclarou preta ou parda ao longo de vários anos na Pesquisa Nacional de Amostra de Domicílios, realizada pelo IBGE.

1. b) branca: aproximadamente 43,25%; preta: aproximadamente 9,41%; parda: aproximadamente 46,25%; amarela/indígena/sem declaração: aproximadamente 1,09%

1. c) Exemplo de resposta está na seção *Resoluções e comentários das atividades* deste *Manual do Professor.*

2. a) 2014: 53,1%; 2015: 53,8%; 2016: 54,8%; 2017: 55,4%; 2018: 55,8%; 2019: 56,2%

	População brasileira (em %) que se autodeclarou preta ou parda de 2014 a 2019					
	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Preta	7,3	7,7	8,2	8,6	9,3	9,4
Parda	45,8	46,1	46,6	46,8	46,5	46,8

Dados obtidos em: https://sidra.ibge.gov.br/tabela/6408. Acesso em: 17 jun. 2022.

a) Calculem o percentual da população negra dos anos representados na tabela.

b) Que tipo de gráfico é o mais adequado para representar o percentual de negros no Brasil entre os anos de 2014 e 2019? Por quê? 2. b) Respostas pessoais.

c) Construam o gráfico escolhido no item **b**.
2. c) Resposta pessoal.

Etapa 2: Pesquisa sobre cultura afro-brasileira.

3. Considerando a definição de que a cultura afro-brasileira é todo tipo de manifestação cultural do Brasil que sofreu influência da cultura africana desde os tempos do Brasil colônia até a atualidade, façam uma lista das manifestações conhecidas por vocês que compõem a cultura afro-brasileira. 3. Resposta pessoal.

4. A capoeira é uma expressão cultural afro-brasileira de muita relevância. Em 2014, em Paris, a Roda de Capoeira recebeu da Unesco o título de Patrimônio Imaterial da Humanidade.

GABRIEL BASTOS/FUTURA PRES

Roda de capoeira em frente ao monumento de Zumbi dos Palmares, no Dia da Consciência Negra, no Rio de Janeiro (RJ). Foto de 2021.

Sobre a capoeira, pesquisem e respondam:

a) A prática da capoeira foi proibida no Brasil por muitos anos, sendo liberada apenas na década de 1930. Como surgiu a capoeira e por que sua prática foi proibida?

b) Quais são as regras, os golpes, a música e os instrumentos usados na prática da capoeira?

5. O maracatu recebeu em 2014 o título de Patrimônio Cultural Imaterial do Brasil, dado pelo Iphan (Instituto do Patrimônio Histórico e Artístico Nacional).

Segundo o Iphan, o valor patrimonial do Maracatu Nação está na sua capacidade de comunicar características da cultura brasileira e carregar elementos fundamentais para a memória, a identidade e a formação da população afro-brasileira. Ainda segundo o Iphan, o Maracatu Nação é uma forma de expressão que congrega relações comunitárias, e permite o compartilhamento de práticas, memórias e fortes vínculos com o sagrado.

LEO MALAFAIA/AFP/GETTY IMAGES

Apresentação de maracatu rural, em Olinda (PE). Foto de 2020.

a) O Maracatu é um ritmo típico de qual estado brasileiro? 5. a) Pernambuco

b) Esta imagem mostra a alfaia, tipo de tambor utilizado para dar o ritmo no maracatu.

FERNANDO EDUARDO/INSTITUTO TAMBOR

Como vocês fariam para calcular a medida do volume ocupado pela alfaia?

6. A cultura afro-brasileira se manifesta na música, na culinária, em religiões e em festividades. Escolham uma manifestação da cultura afro-brasileira para fazer uma pesquisa, em *sites* ou livros especializados, sobre as origens e as características dessa manifestação. Selecionem imagens para ilustrá-la. 6. Resposta pessoal.

5. b) Espera-se que os estudantes identifiquem que bastaria multiplicar a medida da área da base (dada pelo produto de π pelo quadrado da medida de comprimento do raio da base) pela medida da altura da alfaia.

4. a) Comentários em *Orientações*.
4. b) Exemplo de resposta em *Orientações*.

- O **item a** da **atividade 2**, a **atividade 3** e o **item b** da **atividade 4** retomam questões da abertura desta Unidade. Aproveite-os para comparar os conhecimentos da turma naquele momento e agora.
- Para a **atividade 3**, oriente os estudantes a pesquisarem como as ciências sociais definem o que é cultura. Assim, eles poderão identificar os elementos culturais que servirão de base para a lista de manifestações solicitadas.
- No **item a** da **atividade 4**, comente que a capoeira é uma luta desenvolvida e praticada por povos escravizados e era usada como forma de defesa aos violentos castigos físicos a que eram submetidos. Após a abolição, muitos negros foram levados à marginalidade, pois não tinham casa, trabalho ou acesso a educação. Por esse motivo, a capoeira passou a ser considerada uma atividade marginal e teve sua prática proibida.
- Exemplos de respostas do **item b** da **atividade 4**:
  - Regras: respeitar o mestre acima de tudo e guardar disciplina durante os treinos; manter permanente vigilância em todo o ambiente; nunca perder de vista os movimentos do seu parceiro etc.
  - Golpes: benção, martelo, rabo de arraia etc.
  - Música: Paranauê, Marinheiro etc.
  - Instrumentos: berimbau, atabaque, pandeiro etc.

Se possível, traga ou peça que os estudantes tragam algumas revistas em quadrinhos para que todos conheçam esse gênero textual e que tipo de linguagem utilizam. Esse trabalho pode ser desenvolvido junto com o professor de Língua Portuguesa.

- Resposta do **item b** da **atividade 9**:
  - Estrutura predominantemente visual.
  - Elementos de narrativa (personagens, enredo, lugar, tempo e desfecho).
  - Diálogos e ideias expressas em balões variados.
  - Sons e expressões por onomatopeias.
  - Cenas formadas por sequências de imagens.
- No **item c** da **atividade 9**, oriente os estudantes a analisar as características apresentadas no **item b** para identificar os elementos que tornam uma história em quadrinhos interessante.
- Na **atividade 10**, se possível, peça ao professor de Língua Portuguesa que auxilie os grupos principalmente com a criação do enredo de cada história em quadrinhos.
- A etapa **5** é uma ótima oportunidade de interação entre os estudantes, na qual eles poderão trabalhar de forma colaborativa em busca de soluções para possíveis problemas, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **9** e da competência específica **8**.
- Na **atividade 15**, espera-se que os estudantes deem destaque à troca de conhecimentos obtidos pela interação e pelo trabalho colaborativo das etapas **4** e **5**.

Etapa 3: Pesquisa sobre personalidades negras importantes para a história do Brasil.

7. Observem as imagens. Vocês conhecem alguma dessas personalidades? Conversem entre si e com o professor e relatem o que sabem sobre cada uma delas. **7.** Respostas pessoais.


MUSEU DA ESCOLA CATARINENSE/ UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA, SANTA CATARINA


FERNANDO RABELO/FOLHAPRESS


MUSEU HISTÓRICO NACIONAL, RIO DE JANEIRO


ALBERTO JACOB/AGÊNCIA O GLOBO


ACERVO DA ORGANIZAÇÃO CULTURAL REMANESCENTES TIA CIATA


MILITÃO AUGUSTO DE AZEVEDO - MUSEU AFRO-BRASILEIRO, SÃO PAULO


INSTITUTO GEOGRÁFICO E HISTÓRICO DA BAHIA - SETOR DO ARQUIVO HISTÓRICO THEODORO SAMPAIO.


FOTO ARQUIVO/AGÊNCIA O GLOBO


ESTADÃO CONTEÚDO


MARCUS LEONI/FOLHAPRESS

1. Antonieta de Barros; 2. Abdias do Nascimento; 3. André Rebouças; 4. Lélia Gonzalez; 5. Hilária de Almeida (Tia Ciata); 6. Luiz Gama; 7. Teodoro Sampaio; 8. Carolina Maria de Jesus; 9. Lima Barreto; 10. Sueli Carneiro.

8. Escolham uma das personalidades da **atividade 7** e pesquisem a sua biografia. Selecionem algumas imagens para apresentar à turma. **8.** Resposta pessoal.

Etapa 4: Confecção de histórias em quadrinhos.

9. Nesta etapa, vocês vão produzir histórias em quadrinhos sobre as pesquisas que fizeram. Para isso, deverão entender melhor esse gênero. Respondam às seguintes questões:

a) Quais histórias em quadrinhos vocês já leram? **9. a)** Resposta pessoal.

b) Quais são as características das histórias em quadrinhos? **9. b)** Resposta em *Orientações*.

c) Que elementos tornam uma história em quadrinhos interessante? **9. c)** Comentário em *Orientações*.

10. Agora, produzam duas histórias em quadrinhos:

I. sobre a manifestação da cultura afro-brasileira selecionada (música, culinária, religiões e festividades);

II. sobre a personalidade negra escolhida.

Incluam as informações obtidas nas pesquisas, considerando as características e os elementos interessantes desse gênero.

10. Comentário em *Orientações*.

Etapa 5: Análise das histórias elaboradas e confecção dos gibis. **Etapa 5:** Comentário em *Orientações*.

11. Disponibilizem as histórias em quadrinhos elaboradas pelo seu grupo para que os outros analisem a clareza das informações, a pertinência do título e as imagens utilizadas e para que deem dicas para deixar a leitura mais fluida e/ou interessante.

12. Anotem as dúvidas, as opiniões e as sugestões dos colegas.

13. Façam os ajustes necessários, confeccionem dois gibis (impressos ou digitais), um com os quadrinhos sobre a cultura afro-brasileira e outro sobre as personalidades negras importantes para a história do Brasil, e os divulguem para a comunidade escolar.

Etapa 6: Síntese do trabalho realizado.

14. a) Respostas pessoais.

14. Algumas questões que devem ser discutidas:

a) Vocês consideram importante que a população brasileira tenha conhecimento sobre a cultura afro-brasileira? Por quê?

b) Vocês consideram que as histórias em quadrinhos são maneiras interessantes de divulgar conteúdo? Por quê?

14. b) Respostas pessoais.

15. Redijam um texto que descreva o processo realizado pelo grupo nas etapas **4** e **5**.

15. Comentário em *Orientações*.

Teste seus conhecimentos

1. Em outubro de 2020, Marte esteve em sua aproximação máxima com a Terra, a uma medida de distância de, aproximadamente, 62 000 000 000 m. Essa medida aproximada pode ser expressa em km por: **1. alternativa c**

a) $6{,}2 \cdot 10^6$
b) $6{,}2 \cdot 10^{10}$
c) $6{,}2 \cdot 10^7$
d) $6{,}2 \cdot 10^9$

2. O valor da expressão $\dfrac{\sqrt{a} \cdot a^2}{a^{-2}}$ é: **2. alternativa b**

a) a
b) $\sqrt{a^9}$
c) 1
d) $\sqrt{a}$

3. Determinado produto de uma loja custava R$ 86,50. Em janeiro, o dono da loja resolveu abaixar o preço em 5% e, em fevereiro, aumentou em 5% o preço do mês anterior. Quanto custava esse produto em fevereiro? **3. alternativa c**

a) R$ 78,00
b) R$ 86,00
c) R$ 86,28
d) R$ 95,37

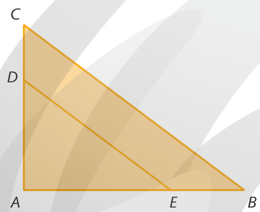
4. Reginaldo tem R$ 1 000,00 para aplicar em algum investimento. Ele tem as seguintes opções:

- A: taxa de 5% a.m. de juro simples para resgatar em 2 anos.
- B: taxa de 30% a.a. de juro composto para resgatar em 1 ano.
- C: taxa de 20% a.a. de juro composto para resgatar em 2 anos.

Os montantes obtidos pelas opções podem ser relacionados por: **4. alternativa a**

a) B < C < A
b) A < C < B
c) A < B < C
d) C < B < A

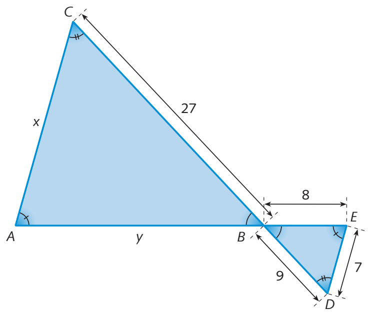
5. Considere que $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$ no triângulo representado a seguir e que $BC = 5$ cm, $AC = 3$ cm, $AD = 2$ cm.



A medida de comprimento de $\overline{DE}$ é: **5. alternativa d**

a) $\dfrac{5}{2}$ cm
b) 5 cm
c) $\dfrac{6}{5}$ cm
d) $\dfrac{10}{3}$ cm

6. Os valores de x e y nos triângulos a seguir são:

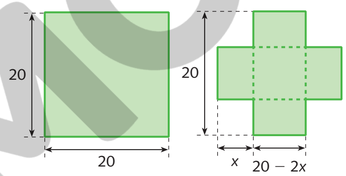


a) $x = 28$ e $y = 29$.
b) $x = 24$ e $y = 21$.
c) $x = 21$ e $y = 24$.
d) $x = 29$ e $y = 28$. **6. alternativa c**

7. A expressão $(a - b)^2 + 2(a + b)^2 - (a - b)$ é igual a: **7. alternativa d**

a) $3a^2 - 6ab + 3b^2 - a - b$
b) $3a^2 + 6ab + 3b^2 - a + b$
c) $3a^2 + 2ab + 3b^2 - a - b$
d) $3a^2 + 2ab + 3b^2 - a + b$

8. Ana tem uma folha de cartolina com formato de um quadrado cujos lados medem 20 cm de comprimento. Cortando, em cada canto, um quadrado cujo comprimento do lado mede x e dobrando as laterais, Ana obtém uma caixa.



Que expressão algébrica representa a medida de volume da caixa? **8. alternativa b**

a) $(20 - 2x)^2$
b) $(20 - 2x)^2 \cdot x$
c) $(20x - 2x^2)^2$
d) $(18x)^2 \cdot x$

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

307

• A **atividade 8** apresenta uma situação envolvendo medida de volume e escrita de expressão algébrica fatorada. Se os estudantes tiverem dificuldades, leia o enunciado com a turma e faça questionamentos, como: "O formato da caixa se parece com qual sólido geométrico?" (Resposta: Paralelepípedo ou bloco retangular.); "Qual é a figura da base da caixa?" (Resposta: Quadrado cujos lados medem $(20 - 2x)$ de comprimento.); "Qual é a medida da altura da caixa?" (Resposta: x.). Se achar conveniente, para facilitar o entendimento dos estudantes, forneça folhas de papel para eles representarem a situação. Nesse caso, alerte-os para a necessidade de ter cuidado ao utilizar a tesoura, para evitar acidentes.

TESTE SEUS CONHECIMENTOS

• Na **atividade 1,** os estudantes precisam escrever uma medida de distância em notação científica. Caso escolham a **alternativa b**, provavelmente eles não notaram que a medida deve ser expressa em quilômetro.

• Na **atividade 2**, os estudantes devem simplificar a expressão algébrica dada escrevendo o radical como uma potência de expoente fracionário e utilizando as propriedades da potência de mesma base. Se tiverem dúvidas para efetuar a adição dos expoentes, principalmente por causa do expoente fracionário, oriente-os a calcular com adição de frações.

• Na **atividade 3**, os estudantes precisam perceber que houve um desconto de 5% e um aumento de 5%, portanto o preço original deve ser multiplicado por 0,95 e 1,05. Ao optar pelo **item a**, eles consideraram dois descontos sucessivos de 5%. Ao optar pelo **item d**, eles calcularam dois aumentos sucessivos de 5%. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de aumentos e descontos sucessivos e percentuais.

• Na **atividade 4**, os estudantes precisam analisar as opções de investimento para calcular o montante obtido em cada uma delas e compará-los. Acompanhe a resolução da atividade e, se necessário, leia o enunciado com a turma, destacando que a opção A é um investimento a juro simples, enquanto as opções B e C são a juro composto. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de juros simples e composto.

• Nas **atividades 5** e **6**, os estudantes devem usar proporcionalidade. Na **atividade 5**, podem utilizar o teorema de Tales no triângulo, enquanto na atividade 6 precisam identificar que os triângulos *ABC* e *EBD* são semelhantes pelo caso AA antes de identificarem a proporção entre as medidas de comprimento dos lados correspondentes. Se tiverem dificuldades na identificação dos lados correspondentes, oriente-os a reproduzir os triângulos no caderno alterando a posição do triângulo *EBD* para que fique na mesma posição do triângulo *ABC*.

• Na **atividade 7,** os estudantes podem aplicar os produtos notáveis para resolvê-la. Caso tenham dúvidas sobre o assunto, permita que escrevam o quadrado da soma e o quadrado da diferença de dois termos como multiplicações que podem ser calculadas usando a propriedade distributiva.

• Na **atividade 9**, espera-se que os estudantes percebam que a tarifa fixa de R$ 95,40 é constante na função, enquanto a tarifa de R$ 0,38 é o valor que multiplica a variável da função. Dessa maneira, a função V é dada por $V = 95{,}40 + 0{,}38x$.

Para ampliar a atividade, se possível, peça aos estudantes que analisem a conta mensal do fornecimento de energia elétrica de onde moram para tentar obter uma função que expresse o valor.

• Na **atividade 10**, os estudantes precisam perceber que o par ordenado do enunciado apresenta valores de x e y que tornam a igualdade verdadeira. Portanto, ao substituí-los na função dada, pode-se descobrir o valor de k. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de função afim e par ordenado.

• Na **atividade 11**, destaque aos estudantes a informação dada no enunciado: a medida de velocidade média de um carro pode ser calculada pela razão entre a medida da distância percorrida e a medida de tempo do percurso. Fixando em 5 horas a medida de tempo, é possível calcular a medida de velocidade média y em função da medida da distância x percorrida. Caso eles tenham dificuldades, na lousa, escreva a lei dessa função conforme as indicações da turma:

$$y = \frac{x}{5}$$

• Na **atividade 12**, sendo h a medida da altura do retângulo, de acordo com os dados do enunciado, os estudantes podem obter a função $A(c) = c \cdot h$. Como a soma das medidas da altura e do comprimento é 12, então $h = 12 - c$. Com isso, chega-se à função procurada. Os estudantes podem cometer equívocos de sinais durante a busca pela função ou não compreenderem as relações dadas entre elas pelo enunciado. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o cálculo da medida de área de um retângulo e dar exemplos em que as medidas das dimensões são conhecidas e outra em que são desconhecidas. Assim, eles podem compreender como resolver a **atividade 12** mais facilmente.

9. Uma empresa fornecedora de energia elétrica cobra, na conta mensal, o consumo referente a um período, considerando uma tarifa fixa e uma tarifa cobrada por quilowatt-hora (kWh) consumido, conforme indicado no quadro a seguir.

Tarifa	Valor (em R$)
Tarifa fixa	95,40
Tarifa cobrada por kWh consumido	0,38

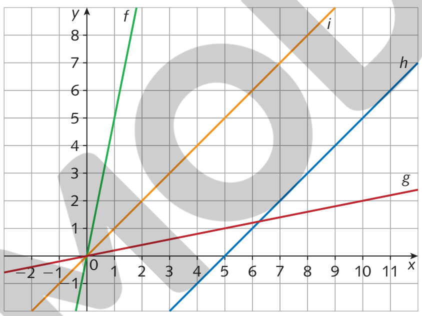
De acordo com esse quadro, considerando o valor V da conta e a quantidade x de quilowatts-hora consumidos, qual função expressa a composição da conta mensal do fornecimento de energia elétrica dessa empresa? **9.** alternativa **c**

a) $V = 0{,}38x$
b) $V = 95{,}40 - 0{,}38x$
c) $V = 95{,}40 + 0{,}38x$
d) $V = 95{,}40x$

10. Sabendo que $\left(1, \frac{10}{3}\right)$ pertence ao gráfico da função $f(x) = 4x - \frac{k}{3}$, o valor de k é: **10.** alternativa **b**

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

11. A medida de velocidade média de um carro pode ser calculada pela razão entre a medida da distância percorrida e a medida de tempo do percurso. Considerando um período de 5 horas fixo, o gráfico que representa a medida de velocidade média y em função da medida da distância x percorrida é o da função:



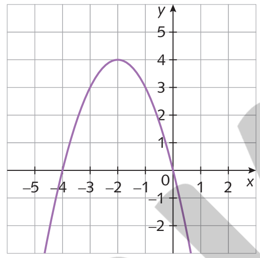
a) f
b) g
c) h
d) i

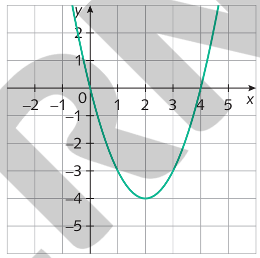
11. alternativa **b**

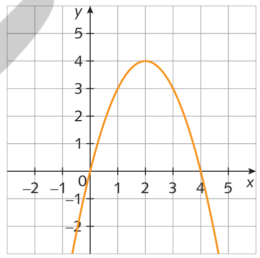
12. Considere um retângulo em que a soma das medidas da altura e do comprimento é 12. A função A proposta para calcular a medida da área desse retângulo, que depende da medida de comprimento c, é dada por: **12.** alternativa **a**

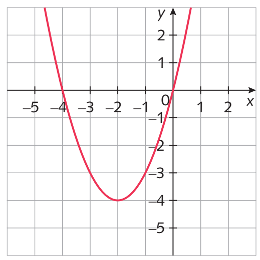
a) $A(c) = -c^2 + 12c$
b) $A(c) = c^2 - 12c$
c) $A(c) = c^2$
d) $A(c) = c^2 + 12c$

13. Qual gráfico corresponde à função quadrática f dada por $f(x) = -x^2 + 4x$? **13.** alternativa **c**

a)


b)


c)


d)


ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

• Na **atividade 13**, os estudantes devem identificar o gráfico da função quadrática dada. Permita o uso de estratégias pessoais e, ao final, oriente-os a compartilhá-las. Se necessário, mostre que é possível identificar pontos nos gráficos para substituir suas coordenadas na lei da função e obter uma igualdade para a resposta correta. Outra estratégia é analisar a concavidade da parábola com base no coeficiente a ($a < 0$, então a concavidade é para baixo) e os zeros da função (0 e 4).

14. O valor máximo da função real $f(x) = -2x^2 - 18x + 20$ é: **14. alternativa d**

a) −101,5
b) −4,5
c) 20
d) 60,5

15. Considere dois triângulos retângulos que têm a mesma tangente em relação a um ângulo agudo correspondente. O primeiro triângulo tem cateto adjacente a esse ângulo com medida de comprimento de $x + 20$ e cateto oposto com medida de comprimento de 15; o segundo triângulo tem cateto adjacente ao ângulo citado com medida de comprimento de 2x e cateto oposto com medida de comprimento de 10. Sabendo que as medidas estão em centímetro, o comprimento da hipotenusa do maior triângulo mede: **15. alternativa a**

a) $\sqrt{1\,125}$
b) $\sqrt{500}$
c) $\sqrt{325}$
d) $\sqrt{675}$

16. Considere os pontos $A(-6, 3)$ e $B(-2, -2)$. O ponto médio do segmento de reta com extremidades em A e B está em: **16. alternativa c**

a) (−4; −0,5)
b) (4; −0,5)
c) (−4; 0,5)
d) (4; 0,5)

17. Se a medida de abertura de determinado ângulo inscrito em uma circunferência é dada por $\frac{2}{3}x - 20°$ e a do ângulo central correspondente, por $3x - 115°$, então a medida de abertura do ângulo central é: **17. alternativa c**

a) 5°
b) 10°
c) 20°
d) 40°

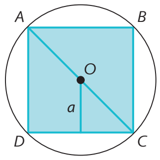
18. Para uma dinâmica em grupo, Eliana vai delimitar um espaço, no chão, em formato de triângulo equilátero, utilizando uma fita adesiva. Ela mediu a distância do centro desse espaço até um vértice e obteve 2 metros. Sabendo que ela vai dar uma volta completa com a fita, quantos metros serão necessários para delimitar o espaço? (Considere a aproximação: $\sqrt{3} = 1{,}7$.) **18. alternativa d**

a) 3,4 metros.
b) 6 metros.
c) 6,8 metros.
d) 10,2 metros.

19. A distância entre o centro de um quadrado e um de seus vértices mede 20 cm. A medida de área desse quadrado é: **19. alternativa c**

a) 400 cm²
b) $400\sqrt{2}$ cm²
c) 800 cm²
d) 1 600 cm²

20. O comprimento da diagonal de um quadrado inscrito em uma circunferência mede $9\sqrt{2}$ cm. Qual é a medida de comprimento a do apótema do quadrado? **20. alternativa a**

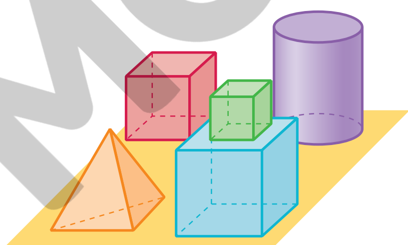


a) $\frac{9}{2}$ cm
b) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm
c) 9 cm
d) $9\sqrt{2}$ cm

21. Laís utilizou um modelo de prisma reto de base hexagonal regular e desenhou a projeção ortogonal dele em um plano. Das figuras indicadas a seguir, qual não pode ser a projeção ortogonal que Laís desenhou? **21. alternativa c**

a) Hexágono.
b) Retângulo.
c) Triângulo.
d) Paralelogramo.

22. Sobre uma mesa retangular de uma sala foram colocados quatro sólidos geométricos, sendo que um deles é composto de dois cubos sobrepostos, conforme representado na figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

309

• Na **atividade 14**, para calcular o valor máximo da função, os estudantes podem lembrar que ele é dado pela ordenada do vértice do gráfico dessa função. Considerando $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-18)}{2 \cdot (-2)} = -4{,}5$, a função terá valor máximo quando $f(4{,}5) = -2 \cdot (-4{,}5)^2 - 18 \cdot (-4{,}5) + 20 = 60{,}5$. Ao optar pelo **item a**, os estudantes trocaram o sinal da abscissa do vértice. Ao optar pelo **item b**, os estudantes indicaram a abscissa do vértice do gráfico. Ao optar pelo **item c**, os estudantes indicaram o valor da função quando $x = 0$. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de valor máximo e mínimo, bem como o vértice do gráfico da função quadrática.

• Na **atividade 15**, para identificar qual é o maior triângulo, os estudantes precisam determinar o valor de x. Isso pode ser feito considerando que eles possuem a mesma tangente referente ao ângulo correspondente. Em seguida, basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo que possui os maiores catetos. Ao optar pelo **item b**, os estudantes indicaram a medida da hipotenusa do menor triângulo. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o teorema de Pitágoras e as razões trigonométricas.

• Na **atividade 16**, os estudantes precisam analisar os pares ordenados das extremidades do segmento de reta $\overline{AB}$. Eles podem fazer um esboço para visualizar o triângulo retângulo que conseguem obter considerando esse segmento de reta como hipotenusa. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de ponto médio e propor exemplos de ponto médio de outros segmentos de reta, paralelos aos eixos do plano cartesiano e inclinados.

• Na **atividade 17**, para calcular a medida de abertura do ângulo central, os estudantes precisam determinar a medida de abertura x. Considerando a relação entre as medidas das aberturas do ângulo inscrito e do ângulo central correspondente, podem resolver a seguinte equação: $\frac{2}{3}x - 20° = \frac{3x - 115°}{2}$. Assim, determinam que $x = 45°$. Eles podem cometer equívoco ao considerar que a abertura do ângulo central mede metade da abertura do ângulo inscrito. Nesse caso, retome esses conceitos com a turma.

• Nas **atividades 18** e **19**, se necessário, incentive os estudantes a representar as situações apresentadas e a traçar uma circunferência circunscrita, respectivamente, ao triângulo equilátero e ao quadrado. Assim, em cada atividade, a medida de distância dada no enunciado corresponde à medida de comprimento do raio dessa circunferência. Logo, a medida de comprimento do lado do triângulo equilátero corresponde a $2\sqrt{3}$ m e a medida de comprimento do lado do quadrado corresponde a $20\sqrt{2}$ cm.

Caso seja preciso, destaque a eles que as atividades não terminam com essas medidas, pois a **atividade 18** pede a medida do perímetro do triângulo equilátero e a **atividade 19** pede a medida de área do quadrado.

• Na **atividade 20**, os estudantes devem notar que a diagonal do quadrado corresponde a um diâmetro da circunferência, ou seja, o comprimento do raio mede metade do comprimento dessa diagonal. Se necessário, relembre com a turma como calcular a medida de comprimento do apótema do quadrado a partir da medida de comprimento do raio da circunferência circunscrita a ele.

• Na **atividade 21**, os estudantes precisam visualizar um prisma reto de base hexagonal regular em diferentes posições para identificar as possibilidades de projeção ortogonal. Se achar necessário, destaque a eles que devem assinalar a alternativa com a figura que Laís **não** desenhou. Caso tenham dificuldades, forneça um prisma reto de base hexagonal regular para que eles experimentem as projeções ortogonais possíveis.

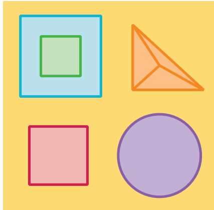
• Na **atividade 22**, os estudantes devem identificar a vista superior dos sólidos geométricos apresentados. Oriente-os a compartilhar as estratégias utilizadas para descobrir a resposta. Se achar conveniente, incentive-os a fazer modelos dos sólidos geométricos da atividade para colocá-los na mesma disposição apresentada, possibilitando a conferência da resposta na prática.

• Na **atividade 23**, para decidir qual recipiente Evandro pode utilizar, os estudantes precisam comparar as medidas de volume considerando que todos os recipientes têm 10 cm de medida de altura. Possíveis erros que os estudantes podem cometer nos cálculos: considerar a medida de comprimento do diâmetro em vez da medida de comprimento do raio no cálculo da medida de área da base do cilindro e calcular a medida de área do triângulo equilátero da base do prisma considerando que a altura desse triângulo mede 2 cm. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o cálculo da medida de volume de cada um desses sólidos geométricos e o cálculo da medida de área de suas bases.

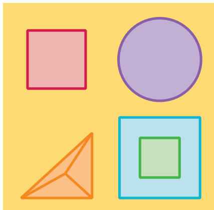
• A **atividade 24** apresenta dados fictícios de uma pesquisa eleitoral. Os estudantes precisam perceber que os valores estão em porcentagem para definir outra maneira de apresentar essas informações. Sabendo o total de entrevistados, a maneira mais prática é utilizar um gráfico de barras. Alguns estudantes podem considerar que o relatório seja o mais adequado; porém, ao visualizar o gráfico de barras, o leitor consegue absorver as informações de maneira mais rápida. Em caso de dificuldades, pode-se retomar os tipos de gráfico estudados durante o ano.

Uma câmara no teto da sala, bem acima da mesa, fotografou esses sólidos geométricos. Qual dos esboços a seguir representa essa fotografia? **22.** alternativa **b**

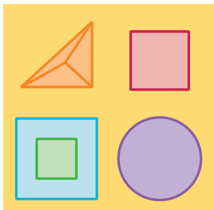
a)



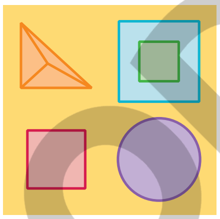
b)



c)



d)



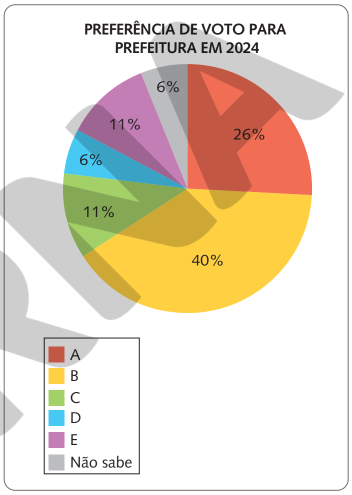
23. Evandro precisa comprar um recipiente em que caibam 35 mL de água. Ele tem as seguintes opções de formato para escolher:

- A: paralelepípedo em que a base é um quadrado cujo comprimento do lado mede 2 cm.
- B: prisma de base triangular regular cujo comprimento do lado da base mede 2 cm.
- C: cilindro cujo comprimento do raio da base mede 2 cm.

Sabendo que todos esses recipientes têm 10 cm de medida da altura, Evandro pode utilizar:

a) qualquer um dos três recipientes.
b) apenas o recipiente A ou C. **23.** alternativa **b**
c) apenas o recipiente A ou B.
d) apenas o recipiente B ou C.

24. Um instituto de pesquisas eleitorais divulgou uma pesquisa amostral realizada em certa cidade sobre a preferência de votos nos candidatos ao cargo de prefeito em 2024. Cada entrevistado escolheu apenas uma opção. Repare no gráfico que foi divulgado. **24.** alternativa **a**



Dados obtidos pelo instituto de pesquisa em 2024.

Sabendo o total de entrevistados, outra maneira de apresentar essas informações de maneira prática é por meio de um:

a) gráfico de barras.
b) gráfico de segmentos.
c) histograma.
d) relatório.

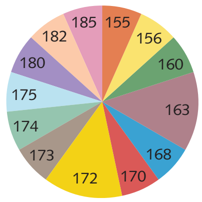
25. Em 2023, Gabriela coletou a medida da altura de cada estudante de sua turma. Confira a seguir as medidas obtidas por ela, em centímetro. **25.** alternativa **d**

172	155	168	163	185
182	170	156	175	180
172	160	174	173	163

Gabriela organizou essas medidas da altura em alguns gráficos e escolheu o que permitiu a melhor interpretação dos dados. Qual gráfico a seguir deve ter sido escolhido por ela?

a)

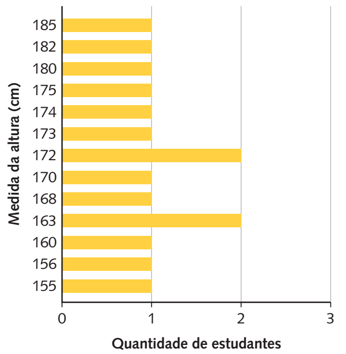
DISTRIBUIÇÃO DAS MEDIDAS DA ALTURA DOS ESTUDANTES DA TURMA DE GABRIELA EM 2023



Dados obtidos por Gabriela em 2023.

b)

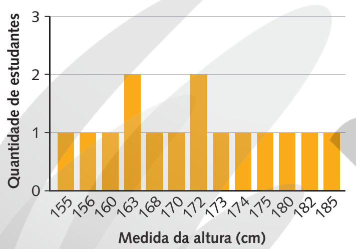
DISTRIBUIÇÃO DAS MEDIDAS DA ALTURA DOS ESTUDANTES DA TURMA DE GABRIELA EM 2023



Dados obtidos por Gabriela em 2023.

c)

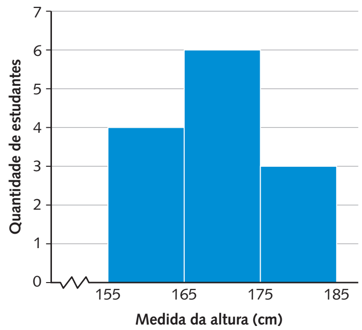
DISTRIBUIÇÃO DAS MEDIDAS DA ALTURA DOS ESTUDANTES DA TURMA DE GABRIELA EM 2023



Dados obtidos por Gabriela em 2023.

d)

DISTRIBUIÇÃO DAS MEDIDAS DA ALTURA DOS ESTUDANTES DA TURMA DE GABRIELA EM 2023



Dados obtidos por Gabriela em 2023.

26. Uma urna, com apenas bolas brancas e pretas, contém dez bolas com as mesmas dimensões e as mesmas medidas de massa. A probabilidade de sortear uma bola preta nessa urna é 0,6. Qual é a probabilidade de retirar duas bolas dessa urna, sendo a primeira branca e a segunda preta, sem colocá-las novamente na urna?

26. alternativa **a**

a) $\frac{4}{15}$

b) $\frac{2}{9}$

c) $\frac{6}{25}$

d) $\frac{2}{5}$

27. alternativa **c**

27. Ismael anotou a seguir a quantidade de horas extras que trabalhou no 1º semestre de 2024.

Mês	Quantidade de horas extras
Janeiro	4
Fevereiro	1
Março	0
Abril	8
Maio	5
Junho	8

A média, a mediana e a moda desse conjunto de dados podem ser relacionadas por:

a) média = mediana = moda
b) média < moda < mediana
c) média < mediana < moda
d) mediana < média < moda

- Na **atividade 25**, os estudantes devem identificar qual gráfico permite a melhor interpretação dos dados. Para isso, pergunte a eles o que podem interpretar a cada gráfico. Assim, nos gráficos de setores, de barras horizontais e de barras verticais, podem considerar que as medidas da altura 163 cm e 172 cm são as mais frequentes; no histograma, podem identificar que a maior parte das medidas da altura da turma de Gabriela concentra-se de 165 cm a 175 cm, sendo uma informação mais útil na interpretação desses dados.
- Na **atividade 26**, com base na informação dada de que a probabilidade de sortear uma bola preta é 0,6, os estudantes precisam perceber que a probabilidade de sortear uma bola branca é 0,4. Como as bolas não vão ser colocadas novamente na urna, tem-se eventos dependentes. Considerando as dez bolas, a probabilidade solicitada pode ser dada por $\frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{24}{90} = \frac{4}{15}$. Ao optar pelo **item c**, os estudantes consideraram que os eventos são independentes. Em caso de dificuldades, pode-se retomar o conceito de eventos dependentes e eventos independentes.
- Na **atividade 27**, para obter as medidas de tendência central, se achar necessário, oriente os estudantes a colocar os dados em ordem crescente. Assim, vão perceber que a posição central é ocupada pelos números 4 e 5, ou seja, a mediana é 4,5. Caso eles confundam as medidas de tendência central, por exemplo, trocando média por mediana, pode-se retomar o conceito de média, moda e mediana.

Respostas

Revisão dos conteúdos de anos anteriores

Para o capítulo 1: Potenciação e radiciação com números reais

Páginas 10 e 11

1 **a)** Falsa
b) Verdadeira
c) Falsa
d) Verdadeira

2 itens **c**, **f**, **h**

3 **a)** 11^{19}
b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{25}$
c) 31^{1}
d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{8}$

4 itens **c**, **d**

5 **a)** 46
b) 25
c) não tem raiz exata
d) 28

6 **a)** 49 e 64
b) 81 e 100
c) 169 e 196
d) 361 e 400

7 **a)** 7,1 **b)** 9,6 **c)** 13,8 **d)** 19,7

Para o capítulo 2: Matemática financeira

Página 11

8 **a)** 21
b) 25,6
c) 19,2
d) 7,6
e) 81,6

9 **a)** R$ 1 035,00
b) R$ 990,00
c) R$ 720,00
d) R$ 891,00

Para o capítulo 3: Segmentos proporcionais e semelhança

Página 11

10 itens **a**, **c**

Para o capítulo 4: Fatoração e equações do 2º grau

Páginas 11 e 12

11 **a)** 2 **b)** 1,3 **c)** 3

12 **a)** $5a + 3b$
b) x
c) $10y$

13 **a)** $198 + 66x - 44y$
b) $-3ab^2$
c) $-\frac{ab}{12}$

14 **a)** incompleta
b) incompleta
c) não é equação do 2º grau
d) completa

15 **a)** $5x^2 + 5x + 5 = 0$
b) $9x^2 - x = 0$
c) $9x^2 - 1 = 0$

16 **a)** Falsa
b) Verdadeira
c) Falsa
d) Verdadeira

17 itens **a**, **c**

Para o capítulo 5: Função afim

Páginas 12 e 13

18 A-III; B-I; C-II

Para o capítulo 6: Função quadrática

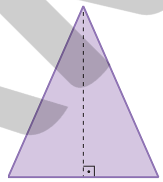
Páginas 13 e 14

19 **a)** $y = a^2$, em que a é um número real maior que 0.
b) 12,25 cm²
c) 8 cm

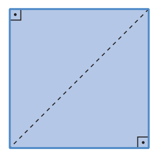
Para o capítulo 7: Relações métricas no triângulo retângulo

Página 14

20 **a)** Exemplo de resposta:



b) Exemplo de resposta:



Para o capítulo 8: Circunferência, arcos e ângulos

Página 14

21 **a)** Verdadeira
b) Verdadeira
c) Verdadeira
d) Falsa

Para o capítulo 9: Polígonos regulares

Páginas 14 e 15

22 **a)** 108°
b) 135°
c) 36°
d) 60°

23 120°

24 45°

25 item **d**

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

312

Para o capítulo 10: Vistas ortogonais e volume

Página 15

26

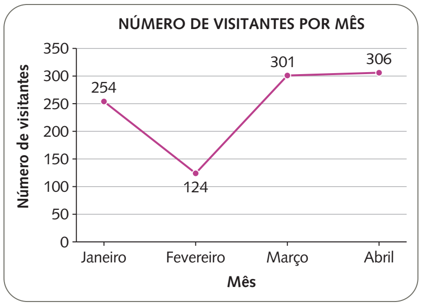
Medida do comprimento	Medida da altura	Medida da largura	Medida do volume
10	2	6	120
0,5	3	0,2	0,3
1	5	6	30
2	2	2	8

Para o capítulo 11: Construção de gráficos estatísticos

Páginas 15 e 16

27 **a)** de setores e de barras
b) Resposta pessoal.

28



ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Para o capítulo 12: Probabilidade e estatística

Página 16

29 **a)** 10 000 possibilidades
b) 100 possibilidades
c) 625 possibilidades

30 **a)** $\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{2}$

Capítulo 1

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 42 a 44

1 **a)** 1
b) –64
c) $\frac{64}{25}$
d) –125

2 **a)** 3^6 **b)** 2^0 **c)** 4^{11} **d)** 2^{15}

3 **a)** 0
b) 9
c) 1
d) 16

4 **a)** 0
b) 5
c) –9
d) –60
e) 1,5 ou $\frac{3}{2}$

5 **a)** –6
b) $\frac{3}{8}$
c) 6
d) 12
e) 1
f) $\frac{2}{7}$

6 **a)** $6\sqrt{7}$
b) $2\sqrt[3]{4}$
c) $5\sqrt{6} - 6\sqrt{2}$
d) $5(\sqrt{2} - \sqrt{3})$

7 **a)** $\sqrt{35}$
b) $\sqrt[3]{-2}$
c) $\sqrt[10]{6075}$
d) $\sqrt[12]{\frac{4}{3}}$
e) $4(\sqrt{10} + 1)$
f) $1 + \sqrt{21}$

8 **a)** 27
b) $\sqrt[3]{25}$
c) b
d) $\sqrt[6]{5}$
e) $\sqrt[8]{a}$
f) $b\sqrt{b}$

9 **a)** $\sqrt{5}$
b) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$
c) $\frac{\sqrt[10]{3^5 \cdot 5^8}}{5}$
d) $3(\sqrt{2} + 1)$
e) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{14}}{4}$
f) $\frac{10\sqrt{3} - \sqrt{15}}{19}$

Capítulo 2

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 57 e 58

1

Peça	Preço de compra	Preço de venda
Vestido florido	R$ 97,00	R$ 128,04
Saia lisa preta	R$ 74,00	R$ 97,68
Short listrado	R$ 49,00	R$ 64,68
Blusa lisa azul	R$ 36,00	R$ 47,52

2 R$ 1 245,64
3 R$ 21,00 e R$ 52,50
4 R$ 2,25
5 R$ 193 600,00
6 25%
7 R$ 92 678,80

8 R$ 3 360,00

9 25 meses

10 **a)** R$ 6 151,25
b) Sim, pois sobrarão R$ 1 151,25.

11 R$ 141 851,91

12 **a)** R$ 77 699,00 **b)** R$ 327 699,00

13 4 meses

14 **a)** R$ 1 333,50 **b)** mais 4 meses

15 **a)** R$ 600,00 e R$ 487,20
b) R$ 41 087,20

Capítulo 3

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 81 e 82

1 **a)** $x = 2{,}25$ **b)** $y = 4{,}8$

2 **a)** $x = 42$
b) $x = 9{,}6$

3 **a)** 11,4 m **b)** 14 m

4 1,6 m por 1,2 m

5 $x = 3{,}4$ m e $y = 3{,}9$ m

6 20 m

7 **a)** AA; $x = 4$ cm e $y = 4{,}5$ cm
b) AA; $x = 3{,}3$ cm e $y = 6{,}4$ cm

Capítulo 4

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 125 e 126

1 **a)** $9x^2 + 6x + 1$
b) $4m^2 - 10m + 25$
c) $36a^2b^2 - 1$
d) $25a^2b^2 - 70ab + 49$
e) $4x^2 - 25$

2 **a)** $5x^2 + 5y^2$ **c)** $2ab$
b) $-m^2 - 8m + 11$ **d)** $5a^2 - 12ab - 16b^2$

3 10

4 **a)** 729
b) 1 849
c) 10 816
d) 88 209

5 **a)** 9 975 **b)** 39 996 **c)** 2 484 **d)** 999 999

6 **a)** medida da área: $x^2 + 6x + 9$; medida do perímetro: $4x + 12$
b) medida da área: $A = 25$ cm²; medida do perímetro: 20 cm

7 **a)** $7(x^2 + y^2)$; fator comum
b) $(xy + 13z)(xy - 13z)$; diferença de quadrados
c) $(10 - 4a)(3 + x)$; agrupamento
d) $x^2(5 - x)$; fator comum
e) $(4a - 1)^2$; trinômio quadrado perfeito

8 **a)** $(a + 6) \cdot a$
b) $yx(x + y)(x - y)$
c) $(y + 3)(y - 3)(y - 1)$
d) $12(x + 2y)(x - 2y)$
e) $6 \cdot (x - 1)^2$

9 **a)** 12 069 **b)** 949

10 **a)** $28y$ **b)** m^2 **c)** 1

11 **a)** $S = \{-3, 3\}$
b) $S = \{-5, -3\}$
c) $S = \{0, \sqrt{2}\}$
d) $S = \{-5\}$
e) $S = \{-1, 7\}$
f) $S = \left\{-\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right\}$
g) $S = \{\varnothing\}$

12 **a)** $S = \{-8, 8\}$
b) $S = \{4, 7\}$
c) $S = \{\varnothing\}$
d) $S = \{-6 - \sqrt{71}, -6 + \sqrt{71}\}$

13 $x = 5$ ou $x = -2$

14 $x = 4$

15 70 m

16 $p = 4$ ou $p = -4$

17 $m > 9$

18 $k < 4$

Capítulo 5

Revisão dos conteúdos deste capítulo

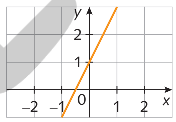
Páginas 155 e 156

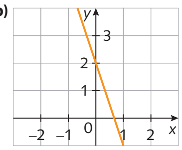
1 **a)** $p = 5x$, em que x é um número real positivo.
b) 36 cm

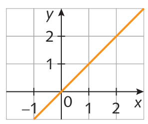
2 **a)** $y = x + 5$, em que x é um número real positivo.
b) 8,6 m

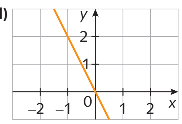
3 $S = 1\,200 + 0{,}15 \cdot x$, em que x é um número natural.

4 **a)** 5 **c)** 12 **e)** 2
b) 19 **d)** 63

5 **a)**


b)


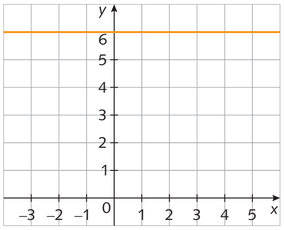
c)


d)


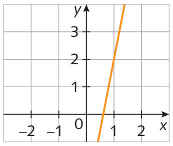
ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

314

e)



f)



6 **a)** função linear
b) função constante

7 **a)** $y = 10{,}5x + 23$, em que x é um número natural maior ou igual a 1.
b) R$ 1 283,00

8 **a)** (0, –1)
b) (1, 0)
c) $y = x - 1$, em que x é um número real.
d) $x = 1$

9 **a)** –3
b) 4
c) 0
d) $-\frac{5}{2}$

10 **a)** $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 3\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -7\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 12\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x < -\frac{8}{5}\right\}$

Capítulo 6

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 170 e 171

1 **a)** 6
b) 2
c) 14
d) 0

2 $x = 0$ ou $x = 4$

3 $A(x) = x^2 + x - 12$, em que x é um número real maior que 3.

4 **a)** $y = x^2 - 1$, em que x é um número real maior que 1.
b) 48 m²

5 $p > -4$

6 $q > \frac{5}{3}$

7 **a)** 1 e 7
b) –6 e 6
c) 0 e 3
d) –4

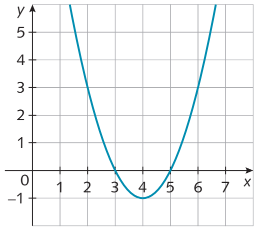
8 **a)** $\Delta = 16$, corta o eixo x em dois pontos distintos.
b) $\Delta = -28$, não corta o eixo x.
c) $\Delta = 0$, tangencia o eixo x em um único ponto.
d) $\Delta = 4$, corta o eixo x em dois pontos distintos.

9 **a)** $V(-2, -3)$
b) $V(0, -25)$
c) $V(1{,}5; -0{,}25)$
d) $V(-2, 0)$

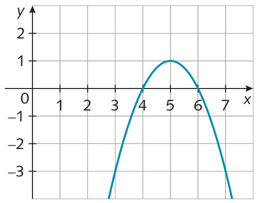
10 $y = x^2 - 2x - 3$

11 $y = x^2 - 7x + 12$

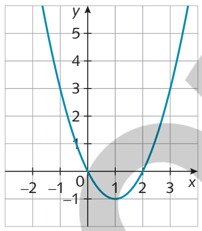
12 **a)** I. $x_1 = 5$ e $x_2 = 3$; II. $V(4, -1)$; III. (0, 15); IV.



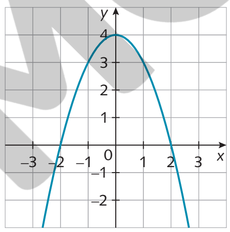
b) I. $x_1 = 4$ e $x_2 = 6$; II. $V(5, 1)$; III. (0, –24); IV.



c) I. $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$; II. $V(1, -1)$; III. (0, 0); IV.



d) I. $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$; II. $V(0, 4)$; III. (0, 4); IV.



ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

315

13 **a)** valor máximo: 16 **b)** valor máximo: 121 **c)** valor mínimo: -100 **d)** valor mínimo: 0

14 $k = 8{,}5$

15 **a)** 52 passageiros **b)** R$ 2824,00

Capítulo 7

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 206 e 207

1 **a)** $y = 4{,}5$ cm **b)** $y = 12$ cm **c)** $x = 16$ cm

2 **a)** 1,96 cm e 23,04 cm **b)** 24 cm **c)** 6,72 cm

3 **a)** $x = 17$ **b)** $y = 4\sqrt{3}$

4 2 m

5 **a)** 17 cm **b)** $20\sqrt{2}$ m **c)** $8\sqrt{3}$ cm

6 **a)** $x = 4$ **b)** $x = 3{,}5$ **c)** $x = 4\sqrt{3}$ **d)** $x = 11$

7 5,96 m

8 2600 m

9 **a)** $A(3{,}5)$, $B(3{,}1)$, $C(12{,}1)$ **b)** $AB = 4$ u, $BC = 9$ u, $CD = \sqrt{97}$ u **c)** $D(7{,}5; 3)$

Capítulo 8

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 231 a 233

1 **a)** $\overline{EF}, \overline{EJ}, \overline{EH}, \overline{EI}$ **b)** $\overline{FG}, \overline{FI}, \overline{FJ}$ **c)** $\overline{FJ}$

2 **a)** tangente **b)** exterior **c)** secante **d)** tangente

3 19 cm e 12 cm

4 22 cm e 33 cm

5 secantes

6 **a)** $x = 5$ **b)** $x = 54$

7 **a)** $x = 29$ cm **b)** $x = 9$ cm

8 16 cm

9 **a)** $x = 23°$; 69° **b)** $x = 8°$; 64°

10 **a)** $x = 59°$ e $y = 118°$ **b)** $x = 38°$

11 32°

12 17°

Capítulo 9

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 250 a 252

1 **a)** $x = y = 90°$ **b)** $x = y = z = 90°$

2 70°

3 **a)** 72° **b)** 45° **c)** 30° **d)** 15°

4 **a)** 156° **b)** 24° **c)** 24°

5 18 lados

6 20 lados

7 **a)** 9 lados **b)** 140° **c)** 40°

8 **a)** 38° **b)** 12 lados

9 32°

10 $x = 144°$ e $y = 36°$

11 20,4 m

12 **a)** 16 cm **b)** 8 cm

13 84 m e 441 m²

14 **a)** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm **b)** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm

15 $x = 44$ cm e $y = 22\sqrt{2}$ cm

16 24 cm **17** 32 cm **18** 2 cm

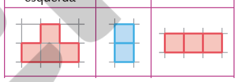
Capítulo 10

Revisão dos conteúdos deste capítulo

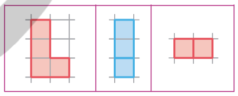
Página 269

1 **a)**

Vista ortogonal lateral esquerda	Vista ortogonal frontal	Vista ortogonal superior

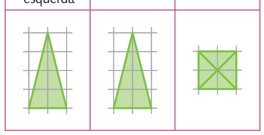


b)



2

Vista ortogonal lateral esquerda	Vista ortogonal frontal	Vista ortogonal superior



3 **a)** prisma de base pentagonal **b)** pirâmide de base hexagonal

4 **a)** 93,75 cm³ **b)** 602,88 cm³

5 450 m³

6 **a)** 40000 cm³ **b)** 40 L

7 **a)** 4,32 m³ **b)** 4320 L

8 $108\sqrt{3}$ cm³

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo 11

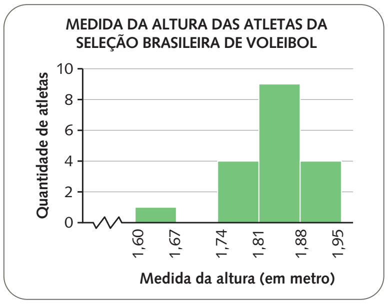
Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 286 e 287

1 Exemplo de resposta:

Medida da altura das atletas da seleção brasileira de voleibol	
Medida da altura (em metro)	**Quantidade de atletas**
1,60 ⊢— 1,67	1
1,67 ⊢— 1,74	0
1,74 ⊢— 1,81	4
1,81 ⊢— 1,88	9
1,88 ⊢— 1,95	4

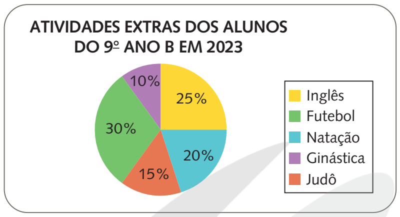
Dados obtidos em: https://cbv.com.br/ligadasnacoes/selecao-brasileira-feminina. Acesso em: 26 jun. 2022.



Dados obtidos em: https://cbv.com.br/ligadasnacoes/selecao-brasileira-feminina. Acesso em: 26 jun. 2022.

2 **a)** inglês: 25%; natação: 20%; judô: 9%; futebol: 18%; ginástica: 6%

b)



Dados obtidos pela professora do 9º ano B em 2023.

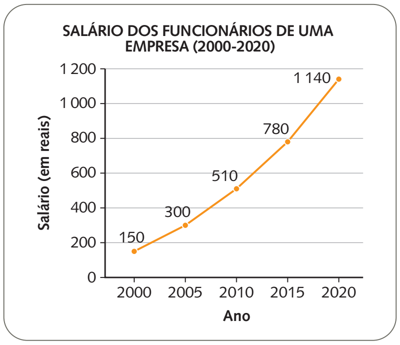
c) Exemplo de resposta: A atividade extra mais realizada pelos alunos do 9º B é o futebol, enquanto a menos praticada é a ginástica. Os estudantes que praticam ginástica representam um terço dos alunos que praticam futebol.

3 **a)** região Nordeste

b) regiões Sudeste, Sul e Centro-Oeste

c) Exemplo de resposta: Gráfico de setores, porque possibilita comparar as taxas de analfabetismo entre as regiões e a taxa de analfabetismo de cada região com a taxa de analfabetismo nacional.

4 **a)**



Dados obtidos pelo departamento de Recursos Humanos da empresa entre 2000 e 2020.

b) entre 2010 e 2015

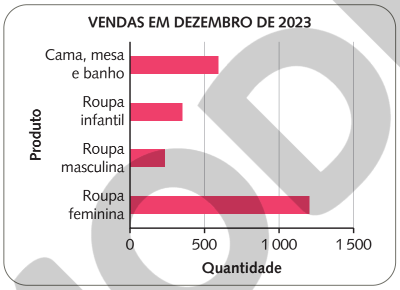
c) Respostas pessoais.

5 **a)**

VENDAS EM DEZEMBRO DE 2023	
Produto	**Quantidade de produtos vendidos**
Roupa feminina	1 200
Roupa masculina	240
Roupa infantil	360
Cama, mesa e banho	600
Total	**2 400**

Dados obtidos pelo departamento de vendas da loja em dezembro de 2023.

b)



Dados obtidos pelo departamento de vendas da loja em dezembro de 2023.

c) Exemplo de resposta:
I. Os produtos mais vendidos foram as roupas femininas.
II. Os produtos menos vendidos foram as roupas masculinas.
III. As roupas femininas vendidas correspondem ao dobro dos itens de cama, mesa e banho vendidos em dezembro de 2023.

6 Exemplo de resposta: O eixo vertical não começa no zero, o que faz a diferença de intenção de voto entre os candidatos parecer muito maior do que realmente é.

317

Capítulo 12

Revisão dos conteúdos deste capítulo

Páginas 302 e 303

1 **a)** $\frac{9}{25}$ **b)** $\frac{16}{25}$ **c)** $\frac{15}{24} = \frac{3}{8}$

2 **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** 0

3 **a)** $\frac{6}{25}$ **b)** $\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{2}{5}$

4 **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{3}{4}$

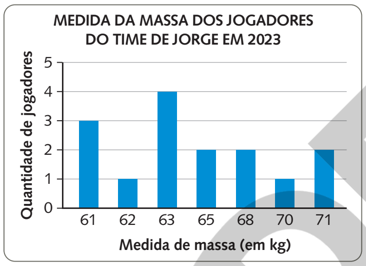
5 Pesquisa amostral, pois a censitária demandaria um gasto muito alto e seria muito trabalhosa para entrevistar todos os adolescentes brasileiros.

6 **a)**

Medida de massa (em kg)	Quantidade de jogadores
61	3
62	1
63	4
65	2
68	2
70	1
71	2

Dados obtidos por Jorge em 2023.

b)

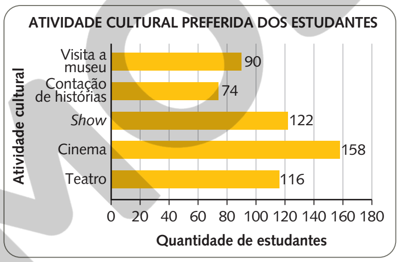


Dados obtidos por Jorge em 2023.

c) média: 65; moda: 63; mediana: 63 (8º termo)

7 **a)** cinema

b)



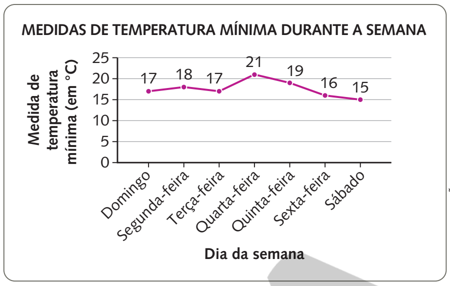
Dados obtidos pela direção da escola em janeiro de 2024.

c) Exemplo de resposta: A atividade preferida é o cinema e a menos escolhida é a contação de histórias. O *show* é a segunda atividade preferida.

8 média: 8,25 ≃ 8 anos; moda: 8 anos

9 **a)** média: 2 305; mediana: 2 960; moda: 1 180
b) a média (2 880) e a mediana 1 180.

10 **a)**



Dados obtidos por Fábio na primeira semana de 2024.

b) média: 17,5 °C; mediana: 17 °C; moda: 17 °C

11 **a)** Censitária, considerando que todos os estudantes, ou seja, toda a população fez a prova.
b) 13 estudantes; média: 5,6
c) 5,3
d) Exemplo de resposta: Podemos concluir que os estudantes não se saíram muito bem na avaliação, visto que a média foi 5,6, a moda foi 5,3 e a maior nota foi 6,9 de 10,0.

Teste seus conhecimentos

1. alternativa **c**
2. alternativa **b**
3. alternativa **c**
4. alternativa **a**
5. alternativa **d**
6. alternativa **c**
7. alternativa **d**
8. alternativa **b**
9. alternativa **c**
10. alternativa **b**
11. alternativa **b**
12. alternativa **a**
13. alternativa **d**
14. alternativa **d**
15. alternativa **a**
16. alternativa **c**
17. alternativa **c**
18. alternativa **d**
19. alternativa **c**
20. alternativa **a**
21. alternativa **c**
22. alternativa **b**
23. alternativa **b**
24. alternativa **a**
25. alternativa **d**
26. alternativa **a**
27. alternativa **c**

ILUSTRAÇÕES: ORACICART/ARQUIVO DA EDITORA

Referências bibliográficas comentadas

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

Este livro, organizado em quatro capítulos, permite que o leitor tenha contato com os primórdios da Matemática por meio de episódios históricos.

BERLONQUIN, Pierre. **100 jogos geométricos**. Lisboa: Gradiva, 2005.

Este livro apresenta 100 jogos geométricos ordenados criteriosamente pelo autor, do mais fácil para o mais difícil, para que, enquanto o leitor se diverte, adquira maior rapidez de raciocínio e uma notável flexibilidade intelectual.

BOLT, Brian. **Actividades matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1991.

Este livro contém atividades matemáticas destinadas a estimular o pensamento criativo e incentivar o leitor a desenvolver a compressão de números, conceitos espaciais e pensamento matemático em geral.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher; Edusp, 2010.

Este livro apresenta um estudo aprofundado da história da Matemática desde o Egito antigo até as tendências mais recentes. Mostra também a fascinante relação entre o desenvolvimento dos conhecimentos sobre números, formas e padrões e a evolução da humanidade.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC; SEB, 2018.

Documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

BROCARD, Joana; SERRAZINA, Lurdes; ROCHA, Isabel. **O sentido do número**: reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar, 2008.

Neste livro reúne-se um conjunto de textos produzidos no âmbito do projeto "Desenvolvendo o sentido do número: perspectivas e exigências curriculares", cujo trabalho se centrou em torno do desenvolvimento do sentido do número para as crianças, concebeu materiais para aulas e refletiu sobre características do currículo que favorecem o sentido do número.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do ensino da Matemática**. São Paulo: Cortez, 2009.

Este livro subsidia o futuro professor no domínio dos conteúdos básicos e da metodologia da Matemática e sugere uma transformação no modo de perceber e compreender o papel dessa disciplina no currículo escolar.

CENTURIÓN, Marília. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. São Paulo: Scipione, 2001.

Este livro baseia-se na ideia de que o estudante constrói seu próprio conhecimento com base em suas ações e problematizações. Aborda as principais dúvidas tanto do estudante de Pedagogia quanto do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 2002.

Este livro propõe a discussão dos fatores que atuam negativamente no aprendizado de Matemática, classifica os vários tipos de problema que se apresentam e mostra as etapas envolvidas na sua resolução.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2011.

Este livro busca introduzir a história da Matemática aos estudantes de graduação dos cursos superiores dessa disciplina. Assim sendo, além da narrativa histórica, há muitos expedientes pedagógicos visando assistir, motivar e envolver o estudante.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

Este livro mostra a riqueza pedagógica que existe na utilização correta de jogos, para ensinar Matemática, para desenvolver o pensamento criativo e até mesmo para transformar o erro em aprendizado.

IFRAH, Georges. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

Este livro oferece, em linguagem acessível, uma visão completa e inovadora da epopeia do cálculo entre as civilizações. Um convite para uma viagem impressionante às origens da representação simbólica dos números.

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1998.

Este livro traça uma resumida, mas completa, história da Matemática, acompanhando a evolução do raciocínio de nossos ancestrais desde a Pré-História, passando por civilizações como a dos egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, hebreus, maias, chineses, hindus e árabes.

IMENES, Luiz Márcio. **A numeração indo-arábica**. São Paulo: Scipione, 1990. (Vivendo a Matemática).

319

Este livro discorre sobre os sistemas de numeração, em uma proposta integrada com História, explorando a Matemática de uma maneira divertida, mas comprometida com o conteúdo.

KAMII, Constance. **Reinventando a Aritmética**: implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1995.

Este livro faz uma análise crítica do ensino da Aritmética para as crianças dos primeiros anos do Ensino Fundamental. Com toda sua sensibilidade e seu conhecimento da teoria piagetiana, a autora aborda temas como importância da interação social, autonomia como finalidade da educação, numerais, adição e subtração.

KARLSON, Paul. **A magia dos números**. Rio de Janeiro: Globo, 1961.

Este livro usa a história da Matemática como bússola em uma jornada desde a Aritmética até o cálculo diferencial e integral. O que destaca essa obra não é apenas a linguagem informal e muitas vezes mordaz do autor, mas principalmente o grau de detalhismo que ele concedeu aos inúmeros assuntos que compõem o livro.

LIMA, Elon lages. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

Este livro é composto de pequenos ensaios sobre Matemática elementar. Em uma coleção de capítulos independentes, aborda tópicos de Matemática que constam dos programas escolares dos diferentes níveis de ensino.

MARANHÃO, Maria Cristina S. **Matemática**. São Paulo: Cortez, 1994. (Magistério).

Este livro reflete sobre a problemática do ensino da Matemática com base na experiência da autora, bem como nos estudos e nas pesquisas na área. Dessa maneira, a autora sugere o desenvolvimento de alguns temas que considera indispensáveis para preparar um estudante para o Ensino Médio.

PÓLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Este livro aborda a resolução de problemas como um recurso para desafiar a curiosidade dos leitores. O autor destaca a importância de situações que apresentam indagações aos estudantes e contribuem para que desenvolvam o interesse pelo raciocínio independente.

ROSA NETO, Ernesto. **Didática da Matemática**. São Paulo: Ática, 2010.

Este livro é destinado a educadores interessados em educação matemática. Levando em consideração o interacionismo e a psicogenética, discute os principais tópicos da Matemática de Pré-escola e Ensino Fundamental, viabilizando sua aplicação em sala de aula.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Este livro contribui para a discussão sobre o lugar e o significado das competências e das habilidades no Ensino Fundamental, enfatizando as habilidades de ler, escrever e resolver problemas de Matemática.

TAHAN, Malba. **Matemática divertida e curiosa**. Rio de Janeiro: Record, 2012.

Este livro traz recreações e curiosidades da Matemática que transformam a aridez dos números e a exigência de raciocínio em brincadeira, ao mesmo tempo útil e prazerosa. O autor consegue fazer a união da ciência com o lúdico, transformando a leitura em um agradável passatempo.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2001.

O livro narra a história de Beremiz Samir, um viajante com o dom intuitivo da Matemática, manejando os números com a facilidade de um ilusionista. Problemas aparentemente sem solução tornam-se de uma transparente simplicidade quando expostos a ele.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mauro. **Teoria e prática de Matemática**. São Paulo: FTD, 2009.

O livro constitui uma valiosa ferramenta para os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. A obra trabalha o desenvolvimento das habilidades matemáticas básicas fundamentado em problemas ligados à experiência prática do estudante, em jogos e em situações que estimulam sua participação na construção de conceitos e o ajudam a compreender a relevância da Matemática como instrumento de transformação da realidade.

ZABALA, Antoni (org.). **Como trabalhar os conteúdos procedimentais em aula**. Trad. Ernani Rosa. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 1999.

Este livro, por meio de uma abordagem prática, mostra como trabalhar 42 conteúdos procedimentais que pertencem a diferentes áreas do Ensino Fundamental.

ZARO, Milton. **Matemática experimental**. São Paulo: Ática, 1996.

O objetivo deste livro é estimular a criatividade do professor no desenvolvimento de atividades com os estudantes, aplicando o método científico na Matemática por meio da técnica da redescoberta, exercitando a redação de textos e experimentos.

MODERNA

ISBN 978-85-16-13560-7

9 788516 135607