Edwaldo Bianchini

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA BIANCHINI

7º ano

Componente curricular:
MATEMÁTICA

PNLD 2024 - Objeto 1
Código da coleção:
0022 P24 01 00 020 020

MODERNA

Edwaldo Bianchini

Licenciado em Ciências pela Faculdade de Educação de Ribeirão Preto,
da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP).
Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo,
no Ensino Fundamental e Médio, por 25 anos.

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA BIANCHINI

7º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

10ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Maria Cecília da Silva Veridiano
Edição de texto: Dario Martins de Oliveira, Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Livia Santa Clara
Assistência editorial: Roberta Stoppe
Preparação de texto: Geuid Dib Jardim
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Tatiane Porusselli
Capa: Douglas Rodrigues José, Tatiane Porusselli, Apis Design, Fábio Luna
Imagem da capa: Detalhe da estrutura do telhado de: Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Xylem Pavilion, 2019, Montana.
© Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Foto: Iwan Baan.
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine
Editoração eletrônica: Grapho Editoração, JSDesign
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Cesar G. Sacramento, Daniela Uemura, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Maura Loria, Patricia Cordeiro, Roberta Otoni, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Vanessa Trindade
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bianchini, Edwaldo
Matemática Bianchini : 7º ano : manual do professor / Edwaldo Bianchini. -- 10. ed. -- São Paulo : Moderna, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-16-13568-3

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

22-115264 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Xilema, o pavilhão de encontros do *Tippet Rise Art Center*, em Montana (EUA), foi projetado pelo arquiteto Diébédo Francis Kéré como um abrigo silencioso e protetor para os visitantes do rancho. Nomeado de forma a evocar as vitais camadas internas da estrutura de uma árvore, Xilema é um lugar onde os visitantes podem se reunir para conversar, contemplar as vistas da margem do riacho Grove, ou sentar e meditar individualmente.

SUMÁRIO

Apresentação

Professor(a),

Como material de apoio à prática pedagógica, este *Manual* traz, de maneira concisa, orientações e sugestões para o uso do livro do estudante como texto de referência, com o objetivo de subsidiar seu trabalho em sala de aula. Esperamos que este material o(a) auxilie a melhor aproveitar e a compreender as diretrizes pedagógicas que nortearam a elaboração dos quatro livros desta coleção.

Este *Manual* também discute a avaliação da aprendizagem sob a luz de pesquisas em Educação e Educação Matemática e em documentos oficiais. Além disso, oferece indicações de leituras complementares e *sites* de centros de formação continuada, na intenção de contribuir para a ampliação de seu conhecimento, sua experiência e atualização.

As características da coleção, as opções de abordagem e os objetivos educacionais a alcançar são também expostos e discutidos aqui.

Visão geral da proposta da coleção

Esta coleção tem como principais objetivos servir de apoio ao professor no desenrolar de sua prática didático-pedagógica e oferecer ao estudante um texto de referência auxiliar e complementar aos estudos.

Com base nos conteúdos indicados para a Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º anos) e suas especificidades de ensino, a obra procura possibilitar ao estudante a elaboração do conhecimento matemático, visando contribuir para a formação de cidadãos que reflitam e atuem no mundo, e subsidiar o trabalho docente, compartilhando possibilidades de encaminhamento e sugestões de intervenção. Nesse sentido, atribui especial importância ao desenvolvimento de conceitos de maneira precisa e por meio de linguagem clara e objetiva, com destaques pontuais para aqueles de maior importância.

As ideias matemáticas são apresentadas e desenvolvidas progressivamente, sem a preocupação de levar o estudante a assimilar a totalidade de cada conteúdo, isto é, sem a pretensão de esgotar o assunto na primeira apresentação. Ao longo da coleção, oferecemos constantes retomadas, não apenas visando à revisão, mas à complementação e ao aprofundamento de conteúdos. Acreditamos que, por meio de diversos contatos com as ideias e os objetos matemáticos, o estudante conseguirá apreender seus significados.

Em relação à abordagem, a apresentação de cada conteúdo se dá, principalmente, por meio de situações contextualizadas e problematizadoras que possibilitem ao estudante uma aprendizagem significativa, assim como estabelecer relações da Matemática com outras áreas do saber, com o cotidiano, com sua realidade social e entre os diversos campos conceituais da própria Matemática.

Essa contextualização abarcou situações comuns, vivenciadas pelos jovens em seu cotidiano, e informações mais elaboradas, que costumam aparecer nos grandes veículos de comunicação. Assim, a obra tem por objetivo contribuir para a formação integral do estudante, de modo que, enquanto assimila e organiza os conteúdos próprios da Matemática, coloque em prática, sempre que possível, suas capacidades reflexiva e crítica, inter-relacionando tanto os tópicos matemáticos entre si quanto estes com os de diferentes áreas do saber. O intento é colaborar de maneira eficaz para a solidificação do conhecimento matemático e com o preparo do exercício da cidadania e da participação positiva na sociedade.

Na perspectiva mundial da permanente busca por melhor qualidade de vida, a Matemática, sobretudo em seus aspectos essenciais, contribui de modo significativo para a formação do cidadão crítico e autoconfiante, com compreensão clara dos fenômenos sociais e de sua atuação na sociedade, com vistas a uma **formação integral** e **inclusiva**. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma, de maneira explícita, seu compromisso com a educação integral e reconhece que:

> [...] a Educação Básica deve visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. Significa, ainda, assumir uma visão plural, singular e integral da criança, do adolescente, do jovem e do adulto – considerando-os como sujeitos de aprendizagem – e promover uma educação voltada ao seu acolhimento, reconhecimento e desenvolvimento pleno, nas suas singularidades e diversidades (BRASIL, 2018, p. 14).
>
> A ideia de educação inclusiva sustenta-se em um movimento mundial de reconhecimento da diversidade humana e da necessidade contemporânea de se constituir uma escola para todos, sem barreiras, na qual a matrícula, a permanência, a aprendizagem e a garantia do processo de escolarização sejam, realmente e sem distinções, para todos (SÃO PAULO, 2019, p. 25).

Na sequência, os conceitos teóricos são trabalhados entremeados por blocos de exercícios e, algumas vezes, por atividades de outra natureza em seções especiais. A distribuição das atividades em diferentes seções procura facilitar e flexibilizar o planejamento do trabalho docente, bem como possibilitar ao estudante desenvolver habilidades diversas.

As atividades também foram pensadas de acordo com o mesmo viés da exposição teórica, intercalando-se aos exercícios convencionais, importantes para formalizar e sistematizar conhecimentos, aqueles que associam os contextos matemáticos aos de outras áreas do conhecimento, que contemplam temas abrangendo informações de Biologia, Ecologia, Economia, História, Geografia, Política, Ciências e Tecnologia.

A constante recorrência a imagens, gráficos e tabelas, muitos deles publicados em mídias atuais, tem por objetivo estimular os estudantes a estabelecerem conexões com o mundo em que vivem.

A obra procura trazer atividades que possibilitam a sistematização dos procedimentos e a reflexão sobre os conceitos em construção. Elas procuram abordar diferentes aspectos do conceito em discussão por meio de variados formatos, apresentando, quando possível, questões abertas, que dão oportunidade a respostas pessoais, questões com mais de uma solução ou cuja solução não existe. Da mesma maneira, há exercícios que estimulam a ação mental, promovendo o desenvolvimento de argumentações, a abordagem de problemas de naturezas diversas e as discussões entre colegas e em grupos de trabalho. O professor tem, então, uma gama de questões a seu dispor para discutir e desenvolver os conceitos matemáticos em estudo.

É importante reafirmar que, ao longo de toda a coleção, houve preocupação com a precisão e a concisão da linguagem. A abordagem dos conteúdos procurou ser clara, objetiva e simples, a fim de contribuir adequadamente para o desenvolvimento da Matemática escolar no nível do Ensino Fundamental. Além do correto uso da língua materna e da linguagem propriamente matemática, procuramos o auxílio da linguagem gráfica, com ilustrações, esquemas, diagramas e fluxogramas que auxiliam a aprendizagem pelas mudanças dos registros de representação.

Objetivos gerais da coleção

- Apresentar a Matemática, em seus diversos usos, como uma das linguagens humanas, explorando suas estruturas e seus raciocínios.
- Introduzir informações que auxiliem a apreensão de conteúdos matemáticos, com vistas à sua inserção em um corpo maior de conhecimentos e à sua aplicação em estudos posteriores.
- Possibilitar ao estudante o domínio de conteúdos matemáticos que lhe deem condições de utilização dessa ciência no cotidiano e na realidade social, oportunizando o desenvolvimento do letramento matemático[1].
- Propiciar, com o auxílio do conhecimento matemático, o desenvolvimento das múltiplas competências e habilidades cognitivas do estudante, preparando-o como pessoa capaz de exercer conscientemente a cidadania e de progredir profissionalmente, garantindo uma formação integral e inclusiva.
- Desenvolver hábitos de leitura, de estudo e de organização.

Esses objetivos se justificam à medida que compreendemos que a Matemática desempenha um importante papel no desenvolvimento dos estudantes, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, com aplicações no mundo do trabalho, e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Possibilita, ainda, o trabalho e o relacionamento com as diferentes linguagens, explorando suas estruturas e raciocínios, além de propiciar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e desenvolver hábitos relacionados ao cotidiano escolar.

Fundamentos teórico-metodológicos

Vamos apresentar alguns temas relativos ao ensino de Matemática que norteiam as escolhas curriculares da coleção e se alinham às proposições da BNCC, documento que foi elaborado após ampla consulta a especialistas e à população e que é a referência para a construção dos currículos de toda a rede de ensino, municipal, estadual e federal, em todo o país. Ela traz o conteúdo mínimo a ser desenvolvido em cada etapa da Educação Básica e, para preservar a autonomia das escolas e dos professores, deve ser complementada com a inclusão das especificidades regionais e locais.

A BNCC traz o conjunto das aprendizagens consideradas essenciais que todo estudante deve desenvolver ao longo de sua trajetória escolar no ensino básico. Essas aprendizagens estão apresentadas em forma de competências gerais, competências específicas e habilidades segundo os componentes curriculares ou as áreas do conhecimento para cada etapa do ensino.

A importância de aprender Matemática

Partimos da proposição de que uma característica da Matemática é ser uma linguagem capaz de decodificar, traduzir e expressar o pensamento humano, o que contribui para a formação integral do estudante.

> O conhecimento matemático é necessário para todos os estudantes da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2018, p. 265).
>
> Atualmente, é indiscutível a importância da Matemática na formação humana, especialmente por vivermos em uma sociedade cada vez mais permeada pela ciência e pela tecnologia. Diversas profissões [...] exigem conhecimentos matemáticos e competências básicas para lidar com as mesmas. Além disso, exige-se do cidadão do século XXI habilidades matemáticas essenciais tais como compreensão de gráficos, capacidade de fazer estimativas, de organização do pensamento, tomada consciente de decisões, entre outras, de modo que ele seja capaz de fazer uma leitura de mundo, de encarar desafios e resolver problemas, levantando hipóteses e buscando soluções, além de emitir opinião sobre fatos e fenômenos que emergem da realidade na qual está inserido (PERNAMBUCO, 2019, p. 65).

A palavra **matemática** vem do grego *mathematike*. Em sua origem, estava ligada ao ato de aprender, pois significava "tudo o que se aprende", enquanto **matemático**, do grego *mathematikos*, era a palavra usada para designar alguém "disposto a aprender". O verbo **aprender** era originalmente, em grego, *manthanein*; mas hoje o radical *math*, antes presente nas palavras ligadas à aprendizagem, parece ter perdido essa conotação e daí talvez resulte a ideia geral de que a Matemática é uma disciplina que lida apenas com números, grandezas e medidas e que se aprende na escola de forma compulsória.

Na realidade, a Matemática fornece ao indivíduo, além de uma linguagem para expressar seu pensamento, ferramentas com as quais ele pode gerar novos pensamentos e desenvolver raciocínios, ou seja,

> [...] a Matemática não é simplesmente uma disciplina, mas também uma forma de pensar. É por isso que a Matemática, assim como a alfabetização, é algo que deveria ser tornado disponível para todos [...] (NUNES; BRYANT; 1997, p. 105).

A Matemática, portanto, é algo que deve estar disponível a todo ser humano, para que possa fazer uso dela como uma de suas ferramentas de sobrevivência e convívio social, promovendo uma formação inclusiva.

---

[1] Segundo a Matriz de Avaliação de Matemática do Pisa 2012 (disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf; acesso em: 2 maio 2022): Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.

Um ponto crucial a considerar é que as formas de pensar características da Matemática podem expandir-se para outros raciocínios, impulsionando a capacidade global de aprendizado. Ao lidar com a Matemática, fundamentamos o pensamento em um conjunto de axiomas, na geração e na validação de hipóteses, no desenvolvimento de algoritmos e procedimentos de resolução de problemas — ferramentas aplicáveis a um conjunto de situações similares —, estabelecendo conexões e fazendo estimativas. Analisando situações particulares e inserindo-as na estrutura global, é possível construir estruturas de pensamento também úteis em situações não matemáticas da vida em sociedade.

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2018, p. 265).

Ao construir sua história, o ser humano tem modificado e ampliado constantemente suas necessidades, individuais ou coletivas, de sobrevivência ou de cultura. O corpo de conhecimentos desenvolvido nesse longo trajeto ocupa lugar central no cenário humano. No que diz respeito aos **conhecimentos matemáticos**, muitos continuam atravessando os séculos, enquanto outros já caíram em desuso. Há, ainda, outros que estão sendo incorporados em razão das necessidades decorrentes das ações cotidianas, como é o caso da Educação Financeira. As novas práticas solicitam a ampliação e o aprofundamento desses conhecimentos.

Até algumas décadas atrás, "saber" Matemática implicava basicamente dominar e aplicar as operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Na atualidade, contudo, as pesquisas educacionais, as diretrizes pedagógicas oficiais e, em especial, a BNCC apontam para a necessidade de que em todos os anos da Educação Básica a escola trabalhe conteúdos organizados nas cinco Unidades Temáticas: **Números**, **Álgebra**, **Geometria**, **Grandezas e medidas** e **Probabilidade e estatística**, tendo como referência o desenvolvimento das competências e habilidades descritas pela BNCC.

> Na BNCC, **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 8).

Para entender a real importância da Matemática, basta pensar em nosso cotidiano. É fácil fazer uma longa lista de ações nas quais precisamos mobilizar os conhecimentos desse campo: calcular uma despesa para efetuar seu pagamento; examinar diferentes alternativas de crédito; estimar valores; calcular medidas e quantidades com alguma rapidez; compreender um anúncio ou uma notícia apresentados por meio de tabelas e gráficos; analisar criticamente a validade de um argumento lógico; avaliar a razoabilidade de um resultado numérico ou estatístico; decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema; orientarmo-nos no espaço (para deslocamentos ou indicações de trajetórias), entre tantas outras situações.

Hoje sabemos da importância de o indivíduo aprender continuamente, durante toda a vida, para assimilar as incessantes inovações do mundo moderno e, desse modo, realimentar seu repertório cultural. Em um ambiente mundial cada vez mais competitivo e desenvolvido do ponto de vista tecnológico, é preciso tornar acessíveis a todas as pessoas as vantagens desses avanços. E é responsabilidade também da educação escolar levar o estudante a perceber criticamente a realidade, cuja interpretação depende da compreensão de sua estrutura lógica, do entendimento da simbologia adotada no contexto, da análise das informações veiculadas por dados numéricos, imagens, taxas, indexadores econômicos etc. Um indivíduo com poucos conhecimentos matemáticos pode estar privado de exercer seus direitos como cidadão, por não ter condições de opinar em situação de igualdade com os demais membros da sociedade, nem de definir seus atos políticos e sociais com base em uma avaliação acurada da situação.

No ensino da Matemática, assumem grande importância aspectos como o estímulo a relacionar os conceitos matemáticos com suas representações (esquemas, diagramas, tabelas, figuras); a motivação para identificar no mundo real o uso de tais representações; o desafio à interpretação, por meio da Matemática, da diversidade das informações advindas desse mundo.

Podemos afirmar que a maior parte das sociedades de hoje depende cada vez mais do conjunto de conhecimento produzido pela humanidade, incluindo de maneira notável as contribuições da ciência matemática. Ao mesmo tempo, esse arcabouço cultural revigora-se incessantemente, com grande diversidade e sofisticação. Os apelos de um mundo que se transforma em incrível velocidade, em uma crescente variedade de domínios, constituem uma das razões mais significativas para o maior desafio dos educadores: preparar os jovens para uma atuação ética e responsável, balizada por uma formação múltipla e consistente.

Matemática acadêmica × Matemática escolar

No âmbito específico da Matemática, há muito mais conhecimento já estabelecido do que o que chega à sala de aula. A seleção desses conhecimentos-conteúdos e a maneira de apresentá-los aos estudantes exigem bom preparo didático e pedagógico e uma série de estudos e adaptações.

Em sua formação inicial, na universidade, o futuro professor de Matemática tem contato simultâneo com a **Matemática acadêmica** e a **Matemática escolar**. No entanto, em seu exercício profissional, o destaque será para a Matemática escolar; daí a relevância de procurarmos entender a distinção entre ambas.

De acordo com Moreira e David (2003), a Matemática acadêmica, ou científica, é o corpo de conhecimentos produzido por matemáticos profissionais. Nesse caso, as demonstrações, definições e provas de um fato e o rigor na linguagem utilizada ocupam papel relevante, visto que é por meio deles que determinado conhecimento é aceito como verdadeiro pela comunidade científica.

No caso da Matemática escolar, há dois aspectos fundamentais que modificam significativamente o papel do rigor nas demonstrações. O primeiro refere-se ao fato de a "validade" dos resultados matemáticos, que serão apresentados aos estudantes no processo de ensino-aprendizagem, não ser colocada em dúvida; ao contrário, já está garantida pela própria Matemática acadêmica. O segundo aspecto diz respeito à aprendizagem; nesse caso, o mais importante é o desenvolvimento de uma prática pedagógica que assegure a compreensão dos conteúdos matemáticos essenciais, assim como a construção de justificativas que permitam ao jovem estudante utilizá-los de maneira coerente e conveniente, tanto na vida escolar quanto na cotidiana, propiciando o desenvolvimento das competências e habilidades para ele exercer a cidadania plena e atuar no mundo.

O pensador Henri Jules Poincaré também discute a diferença entre o rigor necessário e conveniente à Matemática científica e o rigor adequado a um processo educativo. Para ele, uma boa definição é aquela que pode ser entendida pelo estudante.

Diante disso, a coleção procura harmonizar o uso da língua materna com a linguagem matemática, promovendo uma leitura acessível e adequada aos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

A Matemática como componente curricular do Ensino Fundamental

A importância de ensinar Matemática no Ensino Fundamental, conforme indica a BNCC, decorre também da contribuição que a área representa na formação do cidadão.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos estudantes reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).
>
> O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática (BRASIL, 2018, p. 266).

Diversos pesquisadores e profissionais ligados à Educação Matemática têm procurado sintetizar o papel social do ensino dessa área do conhecimento. Na literatura, segundo Ponte (2002), cabem ao ensino da Matemática quatro diferentes papéis:

- instrumento da cultura científica e tecnológica, fundamental para profissionais como cientistas, engenheiros e técnicos, que utilizam a Matemática em suas atividades;
- filtro social para a continuação dos estudos e a seleção para as universidades;
- instrumento político, como símbolo de desenvolvimento e arma de diversas forças sociais que utilizam as estatísticas do ensino da Matemática para seus propósitos;
- promotora do desenvolvimento dos modos de pensar a serem aplicados na vida cotidiana e no exercício da cidadania.

É evidente que cada um desses papéis serve a diferentes interesses e finalidades. Contudo, considerando os indivíduos seres sociais, é o último desses papéis o mais importante e o que mais nos interessa. Como explica Ponte:

> Incluem-se aqui os aspectos mais diretamente utilitários da Matemática (como ser capaz de fazer trocos e de calcular a área da sala), mas não são esses aspectos que justificam a importância do ensino da Matemática. São, isto sim, a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações de interesse pessoal, recreativo, cultural, cívico e profissional. Em teoria, todos reconhecem que esta é a função fundamental do ensino da Matemática. Na prática, infelizmente, é muitas vezes a função que parece ter menos importância (PONTE, 2002).

O fato de a função de promover modos de pensar estar explicitada no currículo e nos programas não é suficiente, contudo, para concretizar essa função.

> O sistema de avaliação, os manuais escolares e a cultura profissional dos professores podem influenciar de tal modo as práticas de ensino que as finalidades visadas pelo currículo em ação, muitas vezes, pouco têm a ver com aquilo que é solenemente proclamado nos textos oficiais. (PONTE, 2002).

Ao discorrer sobre esses papéis, Ponte (2002) analisa em particular a função de filtro social e afirma que "a verdade é que este papel de instrumento fundamental de seleção tem pervertido a relação dos jovens com a Matemática". Isso se dá porque os estudantes passam a enxergá-la como obstáculo a ser transposto para a conquista de objetivos, em vez de entendê-la como aliada nesse processo. O pesquisador enfatiza a importância de identificar os fatores que originam o insucesso dos estudantes em Matemática. Para ele, tais fatores estão relacionados com:

- a crise da escola como instituição, que se reflete na aprendizagem em geral e na Matemática em particular;
- aspectos de natureza curricular — tradição pobre de desenvolvimento curricular de Matemática;
- insuficiente concretização prática e caráter difuso das finalidades do aprendizado;
- o próprio fato de a Matemática constituir-se em instrumento de seleção, o que, de imediato, desencanta e amedronta o estudante;
- questões ligadas à formação dos professores.

Em contrapartida, de acordo com a BNCC, podemos destacar que:

> [...] Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p. 266).

As atuais e inúmeras discussões na área educacional têm nos alertado sobre mudanças na forma de conceber a Educação Básica no mundo. No que diz respeito à Educação Matemática, podemos dizer que ela tem atravessado um grato momento de revitalização:

> Novos métodos, propostas de novos conteúdos e uma ampla discussão dos seus objetivos fazem da Educação Matemática uma das áreas mais férteis nas reflexões sobre o futuro da sociedade (D'AMBROSIO, 2000).

A BNCC preconiza a inclusão e a discussão de temas contemporâneos, como é o caso dos "direitos da criança e do adolescente" e "educação em direitos humanos":

> Por fim, cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora (BRASIL, 2018, p. 19).

A orientação de introduzir e interligar no âmbito escolar temas dessa natureza traz efetivas possibilidades de expansão dos currículos, para além dos conteúdos das disciplinas tradicionais. Esses temas também podem ser abordados de acordo com a necessidade dos estudantes e da comunidade em que estão inseridos.

O importante é ter em vista que, por meio do trabalho com esses temas, é possível incluir as questões sociais nos currículos escolares. Dessa perspectiva, os conteúdos trabalhados ganham novo papel; o aprendizado da Matemática, entre outras abordagens, concorre para a formação da cidadania e, consequentemente, para um entendimento mais amplo da realidade social.

Por compreender a importância desse trabalho, esta coleção procura, na medida do possível, incorporar e discutir alguns conteúdos matemáticos em contextos diversificados.

Objetivos da formação básica para o Ensino Fundamental

Segundo o Parecer 11/2010 do Conselho Nacional de Educação/Câmara de Educação Básica[2] sobre Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos, os objetivos para a formação básica relativos ao Ensino Infantil e Ensino Fundamental são:

- o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
- a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, das artes, da tecnologia e dos valores em que se fundamenta a sociedade;
- a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores como instrumentos para uma visão crítica do mundo;
- o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

O papel do livro didático

Entendemos que, em geral, os recursos presentes em salas de aula não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao trabalho do professor e à aprendizagem do estudante. Nesse caso, o livro didático desempenha um papel importante, assessorando nesse processo, como organização e encaminhamento da teoria e propostas de atividades e exercícios. Assim, o livro didático contribui para o processo de ensino-aprendizagem e atua como mais um interlocutor na comunicação entre educador e educando.

Mas é preciso considerar que o livro didático, por mais completo que seja, deve ser utilizado intercalado com outros recursos que enriqueçam o trabalho do professor.

Concordamos com Romanatto (2004) quando diz que, partindo do princípio de que o verdadeiro aprendizado apoia-se na compreensão, e não na memória, e de que somente uma real interação com os estudantes pode estimular o raciocínio e o desenvolvimento de ideias próprias em busca de soluções, cabe ao professor aguçar seu espírito crítico perante o livro didático.

Na organização desta coleção, os conceitos e as atividades foram concebidos e dispostos em uma sequência que garanta a abordagem dos conhecimentos matemáticos relativos aos Anos Finais do Ensino Fundamental, visando à ampliação dos conhecimentos básicos tratados nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresentando-os em capítulos específicos e, depois, retomando-os e ampliando-os em volumes posteriores. Assim, os estudantes podem resgatar os conhecimentos trabalhados anteriormente, ampliar os conceitos ao longo de seus estudos em Matemática do 6º ao 9º anos e preparar-se para a continuidade no Ensino Médio.

As orientações deste *Manual* pretendem esclarecer intenções, objetivos e concepções das atividades que podem auxiliar o trabalho pedagógico do professor em seus encaminhamentos, intervenções e na ampliação e no enriquecimento de seus conhecimentos matemáticos.

Competências socioemocionais

Nas últimas décadas, a Educação passou a enfatizar abordagens que incluíam outras dimensões do desenvolvimento humano, como a afetiva, a social para além da tradicional ênfase no cognitivo e na aquisição de conhecimento. A educação socioemocional sempre esteve presente no ambiente escolar de diferentes formas, seja na própria cultura escolar ou como suporte para projetos de comportamento positivo. A nova proposta é que essas competências sejam ensinadas propositadamente permitindo aos estudantes oportunidades para praticá-las.

Solidariedade, amizade, responsabilidade, colaboração, empatia, organização, ética, cidadania e honestidade são valores (ou características) que deverão ser ensinados, praticados ou estimulados nas escolas, segundo as diretrizes da BNCC. Esse documento valoriza os estudantes em sua singularidade e diversidade, afirmando que toda criança, jovem ou adolescente deve ter oportunidades para saber ser criativo, analítico-crítico, colaborativo, resiliente, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, entre outras características.

> Compreender o conceito de competências socioemocionais envolve o estudo das emoções. Ao longo da história, as emoções foram abordadas de diferentes perspectivas: da neuropsicologia, da biologia, dos padrões das espécies, da psicopedagogia, da cultura etc. Dentre todas essas abordagens, aquelas voltadas para as competências socioemocionais no contexto escolar são as de interesse nesse texto por abordarem diretamente as novas diretrizes propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a proposta de Educação para o século 21 (proposta pela Unesco) e o ensino integral.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos**. Brasília: Parecer CNE/CEB nº11/2010. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb007_10.pdf. Acesso em: 27 maio 2022.

> Na BNCC, as competências socioemocionais estão presentes em todas as 10 competências gerais. Portanto, no Brasil, até 2020, todas as escolas deverão contemplar as competências socioemocionais em seus currículos (BASE, 2022).

Nesta coleção, trabalhamos com essas competências em diferentes momentos, na forma de atividades ou de orientações para o desenvolvimento do trabalho. Ao longo deste *Manual*, você encontrará diferentes orientações que colaboram para esse trabalho. Para ampliar o trabalho com as competências socioemocionais, temos como apropriado considerar os aspectos que caracterizam a adolescência, a diversidade e as culturas juvenis. Com base nesses aspectos, é importante compreender as situações que podem ser recorrentes na escola, como o *bullying*, e, assim, trabalhar temas e contextos que possibilitem promover a saúde mental dos estudantes e a cultura de paz. De maneira geral, discutiremos esses aspectos a seguir e, mais especificamente, retomaremos esses assuntos no decorrer do *Manual* de cada volume da coleção, quando o contexto apresentado for conveniente para se trabalharem esses temas.

Caracterização da adolescência

Segundo o Estatuto da Criança e do Adolescente – Lei nº 8.069/1990: "Considera-se criança, para os efeitos desta Lei, a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade.".

De acordo com a BNCC:

> Os estudantes dessa fase inserem-se em uma faixa etária que corresponde à transição entre infância e adolescência, marcada por intensas mudanças decorrentes de transformações biológicas, psicológicas, sociais e emocionais. [...] ampliam-se os vínculos sociais e os laços afetivos, as possibilidades intelectuais e a capacidade de raciocínios mais abstratos. Os estudantes tornam-se mais capazes de ver e avaliar os fatos pelo ponto de vista do outro, exercendo a capacidade de descentração, "importante na construção da autonomia e na aquisição de valores morais e éticos" (BRASIL, 2010); (BRASIL, 2018, p. 60).

Esta coleção procura uma aproximação com os estudantes dessa fase, seja na linguagem utilizada, seja na escolha de assuntos que possam despertar seu interesse. Um desses momentos pode ser observado nas aberturas dos capítulos, nas quais são apresentadas situações que buscam aguçar a curiosidade dos estudantes para o tema a ser tratado. Além disso, a coleção busca também facilitar a passagem de um ano para outro no processo de ensino-aprendizagem em Matemática, retomando conceitos, revisitando conhecimentos – como as quatro operações fundamentais e o estudo das figuras geométricas –, ampliando e aprofundando conteúdos com novos aspectos, a fim de que os estudantes se apropriem dos conceitos com a compreensão dos processos neles envolvidos, caso da ampliação do campo numérico (dos números naturais aos números reais).

Diversidade e culturas juvenis

No mundo contemporâneo, um dos principais desafios é aprender a conviver em um ambiente de diversidade, já que muitas vezes as diferenças entre as pessoas não são vistas como algo positivo, dando lugar à discriminação, ao preconceito ou ao reforço de desigualdades.

É importante considerar que os jovens são diferentes em muitos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre tantos outros.

Assim, a escola deve ser o espaço em que essas diversas culturas juvenis se manifestem, se relacionem e se organizem em busca de um objetivo comum. Segundo a BNCC,

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar **uma escola que acolha as diversidades**, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser **protagonistas** de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu **projeto de vida** [...] (BRASIL, 2018, p. 463).

A diversidade não pode ser considerada um obstáculo para a convivência, mas o contrário: deve ser tratada como uma oportunidade ao indivíduo de ganhar novas perspectivas, expandir seus horizontes e aprender com as diferenças, valorizando a multiplicidade de culturas e grupos que formam a sociedade.

> Conforme afirmado na Declaração Universal dos Direitos Humanos, em seu artigo 1º, "Todos os seres humanos nascem livres e iguais em dignidade e em direitos. [...]" (ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS, 1948).

A escola é um espaço formado por uma diversidade de pessoas e deve promover a reflexão sobre diferentes temáticas de modo a desconstruir preconceitos.

Para trabalhar a diversidade, apresente ao estudante o trecho a seguir, da palestra **O perigo de uma história única**, do livro de mesmo nome, da escritora nigeriana Chimamanda Ngozi Adichie. A autora explica em detalhes os problemas causados quando contamos com apenas uma fonte de informações para conhecer a história e a identidade de um povo, enfatizando a necessidade de pesquisar diferentes fontes para compreender outras culturas.

> Anos depois, pensei nisso quando saí da Nigéria para fazer faculdade nos Estados Unidos. Eu tinha dezenove anos. Minha colega de quarto americana ficou chocada comigo. Ela perguntou onde eu tinha aprendido a falar inglês tão bem e ficou confusa quando respondi que a língua oficial da Nigéria era o inglês. Também perguntou se podia ouvir o que chamou de minha "música tribal", e ficou muito decepcionada quando mostrei minha fita da Mariah Carey. Ela também presumiu que eu não sabia como usar um fogão.
>
> O que me impressionou foi: ela já sentia pena de mim antes de me conhecer. Sua postura preestabelecida em relação a mim, como africana, era uma espécie de pena condescendente e bem-intencionada. Minha colega de quarto tinha uma história única da África: uma história única de catástrofe. Naquela história única não havia possibilidade de africanos serem parecidos com ela de nenhuma maneira; não havia possibilidade de qualquer sentimento mais complexo que pena; não havia possibilidade de uma conexão entre dois seres humanos iguais. (ADICHIE, 2009)

Após a apresentação, inicie uma conversa sobre a situação descrita e sobre os fatos serem analisados em uma perspectiva diversa, fundamentada em diversas fontes. Converse sobre o fato de a colega ter uma versão estereotipada da autora e como muitas vezes um grupo de pessoas é julgado como se fosse composto por uma única identidade.

Esse será um momento importante para conversarem sobre a diversidade do grupo e sobre a importância de se respeitarem sem julgamentos prévios. Se considerar adequado, apresente a palestra para os estudantes ou sugira a leitura do livro.

Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes, expressam aspectos das culturas juvenis e possibilitam o convívio com o diferente. Observar os grupos com os quais eles se identificam, ou dos quais fazem parte, contribui para a compreensão de seus modos de agir e, ainda, de seu processo de formação.

Enfim, para construir uma escola inclusiva, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é necessário estabelecer redes de cooperação em que as interações sociais estejam baseadas no respeito mútuo, no companheirismo, na solidariedade e no compartilhamento de experiências e de saberes. O papel do professor na organização dessa rede é fundamental, como mediador desse processo de construção do conhecimento, da identidade, da autonomia e dos projetos de vida, e deve ser desempenhado nas diferentes atividades propostas para serem realizadas em grupos. Ao longo da coleção, os estudantes são instigados a realizar tarefas em grupo ou trocar saberes, momento que pode ser oportuno para trabalhar a diversidade juvenil e propor reflexões sobre cooperação e respeito, promovendo a desconstrução de preconceitos.

• *Bullying*

O termo *bullying* designa um tipo de violência física ou psicológica e tem sido amplamente utilizado em ambientes escolares, para se referir às atitudes hostis, agressivas e mesmo violentas que ocorrem persistentemente nas relações interpessoais de estudantes. A palavra *bullying* tem origem no inglês *bully*, que significa "valentão", "brigão" ou "tirano", e é usada para nomear ações de agressão, intimidação, maus-tratos e ataques ao outro, pautadas em uma relação desigual de poder, para que a vítima se sinta inferiorizada, além de ser muitas vezes excluída socialmente de ambientes aos quais pertence.

Como forma de prevenção, em primeiro lugar os professores devem observar com atenção mudanças apresentadas pelos estudantes, como retraimento excessivo, falta de interesse nas tarefas escolares, ausência frequente às aulas, demonstração de tristeza ou ansiedade, isolamento do grupo, impaciência, baixa autoestima. É importante que professores, assim como toda a comunidade escolar, possibilitem um ambiente acolhedor e estreitem vínculos com os jovens, para que eles possam sentir segurança e recorram a esses adultos quando algo não estiver bem.

Atividades propostas para serem realizadas em grupo podem ser um bom momento para desenvolver o conceito de **empatia** por meio da prática de uma escuta atenta e respeitosa, na qual os estudantes podem falar e ser escutados, e ideias são compartilhadas e podem ser validadas, possibilitando a eles considerar novas maneiras de atuação, fundamentadas na compreensão do ponto de vista do outro.

Sugerimos a seguir uma atividade inicial para trabalhar com o conceito de empatia.

Apresente aos estudantes a definição da palavra *empatia*, conforme consta em dois dicionários:

Empatia

1. PSICOL Habilidade de imaginar-se no lugar de outra pessoa.

2. PSICOL Compreensão dos sentimentos, desejos, ideias e ações de outrem.

3. Qualquer ato de envolvimento emocional em relação a uma pessoa, a um grupo e a uma cultura.

[...]

Fonte: EMPATIA. *In*: MICHAELIS Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2015. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/empatia/. Acesso em: 30 jun. 2022.

Empatia

1. Psi. Experiência pela qual uma pessoa se identifica com outra, tendendo a compreender o que ela pensa e a sentir o que ela sente, ainda que nenhum dos dois o expressem de modo explícito ou objetivo.

2. Capacidade de compreensão emocional e estética de um objeto, ger. de arte (um quadro, livro, filme, p. ex.).

3. Nas inter-relações pessoais e sociais, capacidade de alguém de se ver como os outros o veem, de ver outrem como os outros o veem e também como ele mesmo se vê.

Fonte: EMPATIA. *In*: AULETE Digital. Rio de Janeiro: Lexicon. Disponível em: https://www.aulete.com.br/empatia. Acesso em: 30 jun. 2022.

Em seguida, solicite aos estudantes que expressem, verbalmente ou por escrito, situações em que colocamos em prática a empatia. Se possível, peça que deem exemplos de situações em que alguém foi empático com eles ou em que eles aplicaram empatia. Dê oportunidades para que todos possam se manifestar e, do mesmo modo, respeite aqueles que não quiserem falar. Após a conversa, organize a sala em grupos e solicite que cada grupo escreva cinco atitudes que viabilizam a prática de empatia na escola. Depois, com a participação de todos, escolham dez atitudes que consideram mais importantes e confeccionem cartazes sobre o tema para serem anexados em alguns pontos da escola.

• Saúde mental dos estudantes

É importante que professores, assim como toda a comunidade escolar, observem os diferentes sinais que os jovens em sofrimento emocional costumam dar, como isolamento e distanciamento dos amigos e dos grupos sociais, brigas constantes e agressividade, publicações com conteúdo negativo nas redes sociais ou participação em grupos virtuais que incentivam automutilação ou suicídio, entre outros.

Muitos desses sinais poderão se manifestar ao longo deste e dos próximos anos como decorrência do impacto da pandemia de Covid-19 na saúde emocional dos estudantes.

Um estudo publicado em 1º de abril de 2022, realizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e pelo Instituto Ayrton Senna[3], revelou que dois de cada três estudantes do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio da rede estadual relatam sintomas de depressão e ansiedade. De acordo com esse estudo:

---

[3] INSTITUTO Ayrton Senna. **Mapeamento aponta que 70% dos estudantes de SP relatam sintomas de depressão e ansiedade**. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/mapeamento-aponta-que-70-por-cento-dos-estudantes-de-SP-relatam-sintomas-de-depressao.html. Acesso em: 11 maio 2022.

> A avaliação mergulha nos danos severos à educação causados pela pandemia e reforça o desenvolvimento socioemocional como mola propulsora para a aprendizagem e outras conquistas ao longo da vida. A análise dos dados ainda revela a importância direta das competências socioemocionais para o aprendizado e o seu impacto em outros aspectos que afetam a aprendizagem indiretamente, como saúde mental, violência e estratégias de aprendizagem [...].

Prejuízos no desenvolvimento dessas competências podem impactar diversos resultados ao longo da vida dos estudantes. O estudo revelou que características como autogestão, que inclui foco, determinação, organização, persistência e responsabilidade, e amabilidade, que reúne empatia, respeito e confiança, foram afetadas durante a pandemia.

Desenvolver habilidades de autoconhecimento, como o reconhecimento das próprias emoções, para administrar metas e objetivos de maneira mais eficiente, pode ser um recurso valioso nestas situações. O autoconhecimento faz parte das competências socioemocionais e, quando desenvolvido, possibilita ao jovem criar estratégias eficazes para o manejo das emoções nos diferentes contextos sociais dos quais participa.

É possível trabalhar o autoconhecimento em diferentes situações do cotidiano escolar, trabalhando com os estudantes o reconhecimento das próprias emoções, pensamentos, desejos, medos, frustrações, dificuldades e assim por diante. Uma atividade que pode ser praticada em alguns momentos é sugerir aos estudantes que se perguntem "o porquê".

- Por que estou brigando com esse colega?
- Por que esta tarefa me incomoda?
- Por que não gosto deste professor ou deste colega?
- Por que tenho medo de responder oralmente a uma pergunta feita pelo professor?

Ao identificarem as causas de determinados sentimentos ou ações, poderão refletir sobre suas atitudes e, assim, administrar situações futuras que possam prejudicá-los em momentos diversos, na escola ou no convívio social fora dela.

Para ampliar o conhecimento sobre si mesmo, destacam-se as práticas meditativas, em especial o *mindfulness*, ou atenção plena. Trata-se de um exercício compreendido por Leahy como "estado mental particular e intencional que une atenção focada no presente, consciência aberta e memória de si mesmo". Praticado constantemente, auxilia na redução do estresse e da ansiedade, possibilitando maior criatividade, aumento do autocontrole e da resistência emocional, além de maior satisfação ao realizar as atividades do cotidiano.

Cultura de paz

A cultura de paz está relacionada à compreensão dos princípios de liberdade, justiça, democracia, igualdade e solidariedade, proposta em 1999 pela Organização das Nações Unidas (ONU). Envolve um modo de agir e de se posicionar, com base na prática da não violência, por meio da educação, do diálogo e da cooperação.

> Mais do que teoria e prática, a não violência deve ser uma atitude que permeia toda a prática de ensino, envolvendo todos os profissionais de educação e os estudantes da escola, os pais e a comunidade, em um desafio comum e compartilhado. Assim, a não violência integrada confere ao professor outra visão do seu trabalho pedagógico. A escola deve dar lugar ao diálogo e ao compartilhamento, tornando-se um centro para a vida cívica na comunidade.
>
> Para obter um impacto real, a educação sem violência deve ser um projeto de toda a escola, o qual deve ser planejado, integrado em todos os aspectos do currículo escolar, na pedagogia e nas atividades, envolvendo todos os professores e profissionais da escola, assim como toda a estrutura organizacional da equipe de tomada das decisões educacionais. As práticas de não violência devem ser coerentes e devem estar refletidas nas regras e na utilização das instalações da escola.
>
> Vista pelo ângulo da não violência, a educação ajuda a:
>
> - aprender sobre as nossas responsabilidades e obrigações, bem como os nossos direitos;
> - aprender a viver juntos, respeitando as nossas diferenças e similaridades;
> - desenvolver o aprendizado com base na cooperação, no diálogo e na compreensão intercultural;
> - ajudar as crianças a encontrar soluções não violentas para resolverem seus conflitos, experimentarem conflitos utilizando maneiras construtivas de mediação e estratégias de resolução;
> - promover valores e atitudes de não violência – autonomia, responsabilidade, cooperação, criatividade e solidariedade;
> - capacitar estudantes a construírem juntos, com seus colegas, os seus próprios ideais de paz.
>
> (UNESCO, [entre 2017 e 2022]).

Considerada um espaço privilegiado para a convivência com a diversidade e a promoção do diálogo, diante de tudo que foi apresentado, destacamos que a escola precisa oferecer um ambiente de confiança entre os estudantes, professores e gestores. Para tanto, é preciso formar crianças e jovens que atuem com base em princípios éticos e solidários, além de combater as violências que fazem parte de qualquer sociedade. Pautado em valores humanos, o trabalho com as competências socioemocionais precisa ser exercitado diariamente para que se transforme em uma ação concreta. Ao experimentar uma troca possibilitada por meio do diálogo legítimo, em que o estudante pode ouvir os pares e ser escutado, intercambiando pontos de vista e construindo argumentos consistentes e bem fundamentados, ele irá adquirir e vivenciar habilidades essenciais que farão a diferença em sua profissionalização e em sua vida futura.

BNCC e currículos

A BNCC e os currículos estão em concordância com os princípios e valores que norteiam a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

Com base nesses documentos, relacionam-se algumas ações que visam adequar suas proposições à realidade dos sistemas ou redes de ensino e das instituições escolares, considerando o contexto e as características dos estudantes:

> - contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;
> - decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência

pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;

- selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de estudantes, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;
- conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os estudantes nas aprendizagens;
- construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos estudantes;
- selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;
- criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem;
- manter processos contínuos de aprendizagem sobre gestão pedagógica e curricular para os demais educadores, no âmbito das escolas e sistemas de ensino.

(BRASIL, 2018, p. 16-7).

Competências na BNCC

Visando assegurar as aprendizagens essenciais a que todo estudante da Educação Básica tem direito, a BNCC propõe o desenvolvimento de competências que vão além dos conteúdos curriculares a serem ensinados, pois, como expusemos anteriormente, é preciso assumir a necessidade de os estudantes se tornarem capazes de mobilizar conteúdos, habilidades, atitudes e valores. Nesse sentido, propõe 10 **competências gerais** para a Educação Básica e 8 **competências específicas** para a área de Matemática, as quais listamos a seguir.

COMPETÊNCIAS GERAIS	COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.	**1.** Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.	**2.** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.	**3.** Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.	**4.** Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.	**5.** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.	**6.** Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.	**7.** Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.	**8.** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.	
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.	

Ao longo dos conteúdos, são oferecidas diferentes oportunidades para o estudante interpretar, refletir, analisar, discutir, elaborar hipóteses, argumentar, concluir e expor resultados de diversas maneiras, contribuindo para o desenvolvimento das competências. Esse trabalho é realizado em vários momentos da coleção, como nas seções **Diversificando** e **Trabalhando a informação**.

Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, **Unidades Temáticas** organizam diferentes **objetos de conhecimento** que, por sua vez, propõem um conjunto de **habilidades** a serem trabalhadas com os estudantes.

Unidades Temáticas

De acordo com a BNCC:

> Ao longo do **Ensino Fundamental – Anos Finais**, os estudantes se deparam com **desafios de maior complexidade**, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas. Tendo em vista essa maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, **retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental – Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas**, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios dos estudantes. Nesse sentido, também é importante **fortalecer a autonomia** desses adolescentes, oferecendo-lhes condições e ferramentas para acessar e interagir criticamente com diferentes conhecimentos e fontes de informação (BRASIL, 2018, p. 60).

A BNCC propõe cinco Unidades Temáticas: **Números**, **Álgebra**, **Geometria**, **Grandezas e medidas** e **Probabilidade e estatística**. Dessa forma, procura garantir o trabalho com a variedade de conhecimentos matemáticos ao longo do ano e orientar a formulação de habilidades a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental.

> Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: **equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação**. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p. 268).

A proposta presente nesta coleção, aliada ao trabalho do professor em sala de aula, propicia a articulação das diferentes Unidades Temáticas, estabelecendo conexões entre elas e as outras áreas do conhecimento. Faremos a indicação dessas articulações ao longo deste *Manual*.

Apresentamos, a seguir, as principais ideias relacionadas a cada Unidade Temática que nortearam a organização da coleção, destacando alguns pontos em que contribuímos para o desenvolvimento das competências específicas da Matemática. Ressaltamos que os pontos apresentados são exemplos de trabalho, mas, ao longo de toda a coleção, contemplamos as 8 competências específicas de modo a favorecer o desenvolvimento dos estudantes no estudo da Matemática.

Números

As noções matemáticas fundamentais vinculadas a essa Unidade Temática são as ideias de número, operações, aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem.

Nos anos finais do Ensino Fundamental são trabalhados diferentes campos numéricos, de modo que os estudantes resolvam problemas com números naturais, números inteiros e números racionais, envolvendo as operações e fazendo uso de estratégias diversas, reconheçam a necessidade dos números irracionais e tomem contato com os números reais, comparando, ordenando e relacionando esses números com pontos na reta numérica, envolvendo a valorização do raciocínio estruturado de modo a favorecer o desenvolvimento da **competência específica 2**.

Também recorremos à história da Matemática em diferentes momentos, como no trabalho com os diferentes sistemas de numeração ou com números irracionais, o que contribui para o desenvolvimento da **competência específica 1**, que está relacionada com o processo de reconhecer a Matemática como uma ciência viva, relacionada a diferentes culturas e a diferentes momentos históricos. Espera-se também que os estudantes dominem cálculos com porcentagens, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 5**, que propõe o uso de diferentes ferramentas, entre elas os recursos tecnológicos. O pensamento numérico se completa, é ampliado e aprofundado com a discussão de situações que envolvem conteúdos das demais Unidades Temáticas, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 3**, que propõe aos estudantes a compreensão entre as relações dos conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática.

Outro aspecto que se quer desenvolver nessa Unidade Temática é o estudo de conceitos ligados à educação financeira dos estudantes, como conceitos básicos de economia e finanças, temáticas que estão diretamente ligadas à **competência específica 7**, pois permitem compreender diferentes questões relacionadas ao contexto social.

Álgebra

O foco dessa Unidade Temática é o desenvolvimento do pensamento algébrico, essencial na compreensão, na representação e na análise da variação de grandezas e também no estudo das estruturas matemáticas, o que favorece o trabalho com a **competência específica 2**, que propõe o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos, habilidades que estão intimamente ligadas ao estudo da Álgebra. Nos anos finais do Ensino Fundamental, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam a identificação de regularidades e padrões em sequências (numéricas ou não) e o estabelecimento de leis matemáticas que expressem a interdependência entre grandezas e generalizações. Espera-se que os estudantes criem, interpretem e transitem entre as diversas representações gráficas e simbólicas para resolver equações e inequações, desenvolvidas para representar e solucionar algum tipo de problema, o que contribui para o desenvolvimento das **competências específicas 5 e 6**. É necessário que o estudante estabeleça conexões entre variável e função e entre incógnita e equação.

As ideias matemáticas fundamentais que os estudantes precisam desenvolver nessa Unidade Temática são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. O raciocínio proporcional envolve diferentes processos mentais, como analisar, estabelecer relações e comparação entre grandezas e quantidades, proporcionando uma melhor compreensão das relações multiplicativas, o que favorece o trabalho com a **competência específica 3**.

Além disso, a aprendizagem da Álgebra, assim como as de outros campos da Matemática, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional. Destaca-se, assim, a importância da presença de algoritmos e fluxogramas como objetos de estudo nas aulas de Matemática nessa fase do aprendizado.

Geometria

O desenvolvimento do pensamento geométrico, necessário para avançar nas habilidades de investigação de propriedades, elaboração de conjecturas e produção de argumentos geométricos convincentes, está ligado ao estudo da posição e dos deslocamentos no espaço, das formas de figuras geométricas e relação entre seus elementos, temas dessa Unidade Temática, que contribuem para o desenvolvimento da **competência específica 2**. Além disso, o aspecto funcional também deve estar presente por meio do estudo das transformações geométricas, em especial a simetria, com ou sem o recurso de *softwares* de Geometria dinâmica, favorecendo o trabalho com a **competência específica 5**.

Estão associadas a essa Unidade Temática as seguintes ideias matemáticas fundamentais: construção, representação e interdependência.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino de Geometria deve consolidar e ampliar os conhecimentos construídos anteriormente – enfatizando-se a análise e a produção de transformações, ampliações e reduções de figuras geométricas – para o desenvolvimento dos conceitos de congruência e semelhança. O raciocínio hipotético-dedutivo é outro ponto importante a se destacar; a realização de demonstrações simples pode contribuir para a construção desse tipo de raciocínio. Além disso, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 3**, a articulação da Geometria com a Álgebra também deve ser ampliada com propostas que envolvam o plano cartesiano, objeto de estudo da Geometria analítica.

Grandezas e medidas

O estudo das medidas e das relações entre elas é o foco dessa Unidade Temática. Os anos finais do Ensino Fundamental devem retomar, aprofundar e ampliar as aprendizagens já realizadas. O estudo das relações métricas favorece a integração da Matemática com diversas áreas do conhecimento, assim como a articulação com as demais Unidades Temáticas, consolidando e ampliando a noção de número e promovendo a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico, favorecendo o trabalho com a **competência específica 3**.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que os estudantes reconheçam comprimento, área e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas, resolvam problemas com essas grandezas e obtenham grandezas derivadas, como densidade e velocidade. Além disso, deve-se introduzir medidas de capacidade de armazenamento de computadores ligadas a demandas da sociedade moderna, ressaltando-se o caráter não decimal das relações entre elas. Trabalhando com essas grandezas é possível trabalhar o uso da Matemática em diferentes contextos sociais, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 7**.

Probabilidade e estatística

O intuito dessa Unidade Temática é desenvolver habilidades necessárias para o exercício pleno da cidadania: coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados; descrever, explicar e predizer fenômenos com base em conceitos e representações. Desse modo, esse trabalho favorece o desenvolvimento da **competência específica 7**.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, em Estatística espera-se que cada estudante seja capaz de planejar e elaborar relatórios com base em pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central, construir tabelas e tipos variados de gráfico, o que favorece o trabalho com a **competência específica 4**.

Quanto ao estudo de Probabilidade, deve ser ampliado e aprofundado. Espera-se que os estudantes façam experimentos aleatórios e simulações para aplicar ou comparar resultados obtidos com o cálculo de probabilidades.

Propostas didáticas

Os tópicos a seguir destinam-se a oferecer suporte à discussão sobre as atuais tendências de ensino – que priorizam a globalidade da formação educacional, no sentido de capacitar os jovens a atuar de forma positiva na sociedade – alinhadas à proposta da coleção e auxiliadoras do trabalho em sala de aula.

Conhecimentos prévios

Ao passar de um ano para outro de escolaridade, o estudante traz experiências pessoais, interpretações e conhecimentos acumulados sobre os conteúdos e temas tratados no ano anterior. Torna-se relevante considerar essa bagagem no processo de aprendizagem de modo a fazer com que o estudante seja protagonista no processo de aprendizagem. Há algum tempo, pesquisas na área da educação reforçam a importância de considerar os conhecimentos prévios como forma de tornar a aprendizagem mais significativa.

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos estudantes, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência (BRASIL, 2018, p. 298).
>
> Esses conhecimentos, embora pouco elaborados cientificamente, são construídos pelos estudantes a partir do nascimento, acompanhando-os na vida escolar, onde os conceitos científicos são inseridos sistematicamente em sala de aula. Ausubel (2003) refere-se aos conhecimentos prévios como sendo aquelas ideias, percepções ou explicações funcionais para os objetos e fenômenos, muitas vezes pouco elaborados, diferentemente dos saberes científicos apresentados pela escola. Freire (1996) evidencia os conhecimentos prévios como a base inicial para progressão, sendo as interpretações e representações do senso comum, motores da curiosidade ingênua que poderá vir a ser curiosidade gnosiológica e base de sustentação e progressão para o conhecimento apurado, científico.
>
> Embora a ideia sobre identificar os conhecimentos prévios dos estudantes possa parecer simples, as suas implicações são complexas. O que um ser humano sabe pertence a sua estrutura cognitiva e é de natureza idiossincrática. Isso significa que não é um processo simples, o de descobrir as percepções do estudante

> e aproveitá-las. No entanto, é possível encontrar indícios. Para isso, faz-se necessário buscar o conhecimento prévio em forma de linguagem falada, escrita ou por meio de símbolos. O fato é que subestimar as experiências pessoais dos estudantes seria um erro por parte dos professores, uma vez que a educação ocorre a partir e através da sua própria experiência (UJIIE, 2017).

Em diferentes momentos desta coleção, é possível criar oportunidades para este levantamento, como nas aberturas de cada capítulo, em que, por meio da análise do texto e da imagem e da resolução das questões, é possível fazer com que os estudantes compartilhem suas experiências pessoais e conhecimentos relacionados ao conteúdo que será estudado, tornando a aprendizagem significativa.

Resolução de problemas e compreensão leitora

O trabalho com a resolução de problemas é um dos destaques do ensino matemático contemporâneo. Para atender aos pressupostos de uma educação globalmente formadora, o problema matemático deve, sempre que possível, ser apresentado em um contexto desafiador, que faça sentido ao estudante. Ele possibilita a mobilização dos conteúdos estudados em busca de soluções e, sobretudo, abre espaço para a criação de estratégias pessoais e para a produção de novos conhecimentos.

Um problema matemático é visto como uma situação desafiadora que tem significado para o estudante e se define como tal não por sua forma, mas sim por sua relação com os saberes e o nível de conhecimento do estudante que deve pensar sobre ele.

Na resolução de problemas, é importante que o estudante:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- compare seus resultados com os de outros estudantes;
- valide seus procedimentos.

Nas aulas de Matemática, também é necessário fazer um trabalho voltado para a linguagem matemática e suas especificidades, muito além da aprendizagem de leitura dos enunciados dos problemas propostos. Para isso, deve-se estabelecer um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática, solicitando aos estudantes que, além de explicarem oralmente a resolução, escrevam sobre o percurso mental que realizaram para chegar a ela. Em seguida, em duplas, um estudante lê o texto do outro e ambos sugerem propostas para melhorá-los.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, elaboração de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura e verbalizar com a turma todo esse percurso.

Nesta coleção, procuramos diversificar as atividades e propor problemas variados, distribuídos entre os capítulos e, em especial, nas seções **Pense mais um pouco...** e **Diversificando**.

Uso de tecnologias

Os estudantes estão inseridos na era digital e fazem uso frequente de tecnologia. Assim, a escola não pode ignorar esses importantes recursos e precisa trazê-los para a educação escolar. Para isso, o professor precisa se apropriar dessas ferramentas de modo que possa identificar tipos de *software* e formas de utilizá-los com os estudantes. Vamos destacar a calculadora e o uso de *softwares* e aplicativos, entre as diversas possibilidades.

É importante salientar que, como instrumento de apoio ao processo de ensino-aprendizagem, a calculadora é somente mais um recurso auxiliar, e não um substituto do exercício do raciocínio ou da capacidade analítica. O que propomos é o uso da calculadora de maneira consciente, de modo a contribuir para a reflexão dos conteúdos matemáticos.

O uso da calculadora é sugerido na coleção como auxiliar na resolução de problemas. Das tecnologias disponíveis na escola, a calculadora é, sem dúvida, uma das mais simples e de menor custo. Ela pode ser utilizada como instrumento motivador na realização de atividades exploratórias e investigativas e, assim, contribuir para a melhoria do ensino.

Podemos tomar como orientação para o uso da calculadora em atividades matemáticas os seguintes aspectos:

- é um instrumento que possibilita o desenvolvimento de conteúdos pela análise de regularidades e padrões e pela formulação de hipóteses;
- é um facilitador da verificação e da análise de resultados e procedimentos;
- sua manipulação e utilização são, em si, conteúdos a serem aprendidos.

Sugerimos que, inicialmente, o professor verifique o conhecimento que os estudantes têm sobre o funcionamento da calculadora. O ideal é que a escola disponha de calculadoras simples, que ofereçam as funções básicas. Caso não seja possível disponibilizar uma calculadora para cada estudante, pode-se trabalhar em duplas ou de outra forma a critério do professor.

As atividades sugeridas pressupõem um uso simples da calculadora, o que poderá ser ampliado de acordo com as necessidades e os interesses de cada turma.

Outra possibilidade de aprofundar os conhecimentos matemáticos com o auxílio de tecnologia é o uso de *softwares* e aplicativos, conforme a disponibilidade da escola. Por exemplo, no campo geométrico, *softwares* de geometria dinâmica permitem a construção de retas paralelas e de retas perpendiculares, a investigação e a verificação de propriedades geométricas, entre outras possibilidades.

O uso consciente da internet também deve fazer parte da educação escolar. É importante que os estudantes saibam fazer pesquisas em ambientes confiáveis como também se proteger de notícias falsas ou de outros perigos presentes nos ambientes virtuais. Cabe aos professores e à comunidade escolar fazer com que a inclusão digital desempenhe um papel significativo no processo de aprendizagem, pois ela procura formar cidadãos com capacidade de interagir com outros e compartilhar decisões/informações que propiciem a lógica da informação a serviço da interatividade.

Pensamento computacional

A BNCC propõe trabalhar o pensamento computacional por meio da Álgebra. Quando os estudantes interpretam e elaboram algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, eles podem desenvolvê-los, ao ser "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos".

O pensamento computacional se apoia nos quatro pilares expostos a seguir:

- **Decomposição:** consiste em dividir um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema complexo pode ser resolvido aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- **Reconhecimento de padrões:** ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- **Abstração:** no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.
- **Algoritmo:** a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante destacar que nem todos os pilares precisam ser acionados para a resolução de todos os problemas. Além disso, há atividades desplugadas que podem ser realizadas para ensinar pensamento computacional sem fazer uso de um computador.

Trabalho em grupo e o convívio social

Quando orientado e praticado adequadamente, além de contribuir para o desenvolvimento de competências que visam à interação e à participação sociais, o trabalho em grupo auxilia no desenvolvimento de competências que dependem do confronto e da partilha de ideias, pois oferece a oportunidade de provar resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos de resolução e validar ou não o pensamento na busca de soluções.

Além de reforçar a aprendizagem conceitual, o trabalho em grupo contribui para o aprimoramento da evolução de procedimentos e atitudes, tanto em relação ao pensar matemático quanto em relação à dinâmica grupal.

Pesquisas acerca dos processos de aprendizagem indicam que, mesmo com o exercício em grupo, acaba prevalecendo o aprendizado individual, o qual apenas se enriquece com as múltiplas contribuições geradas pelo trabalho desenvolvido de maneira coletiva, pela interação entre diferentes formas de pensar.

> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras (COHEN; LOTAN, 2017).

De qualquer modo, reforçamos que o sucesso do trabalho em grupo depende notavelmente do planejamento e da supervisão pedagógica, respeitados os diferentes tipos de aprendiz. No intuito de colaborar com a atuação do professor em sala de aula, esta coleção preocupou-se em indicar, pontualmente, as atividades que mais possibilitam a exploração em grupo.

A organização da turma é parte essencial para o sucesso do desenvolvimento do trabalho com os estudantes. Para cada proposta pedagógica, haverá alguma escolha metodológica mais adequada e, junto a essa escolha, a necessidade de organização dos estudantes em sala de aula: trabalhos individuais, em duplas, em pequenos grupos ou em estações de trabalho, por exemplo. Consideramos apropriado descartar a ideia de que uma boa aula é aquela em que os estudantes devem permanecer sentados enfileirados, sem conversas entre os integrantes de uma mesma turma, com uma fala expositiva por parte do professor. Hoje, sabemos que esse tipo de organização constante acaba por dificultar a relação do estudante com os conceitos apresentados e não promove a interação, a busca por diálogo na aprendizagem, muito menos as trocas entre pares possíveis, tão essenciais para desenvolverem competências que visam à empatia e à cooperação, por exemplo.

É necessário considerarmos que a compreensão dos conceitos por parte da turma passa pela observação da dinâmica de aprendizagem em sala; alguns estudantes assimilam melhor em momentos em que escutam sobre determinado tema, outros em situações que proporcionem debates com os colegas sobre o que estão estudando ou, ainda, outros que precisam de uma boa visualização, em esquemas, dos conteúdos ou resoluções dos problemas apresentados. Tornar a sala de aula um ambiente plural e dinâmico, para que todos os estudantes de diferentes perfis possam vivenciar experiências diversas, torna-se crucial para o desenvolvimento da turma como um todo.

Outro fator importante para favorecer a aprendizagem é a promoção da autonomia do estudante no processo de aprendizagem. Essa é uma perspectiva que a BNCC salienta e que está destacada nas competências gerais, principalmente naquelas em que se preza pelo desenvolvimento da autonomia, empatia e cooperação. São elementos que, quando favorecidos no desenvolvimento, proporcionam ganhos na aprendizagem de toda a turma.

Sabendo que cada estudante desenvolve competências e habilidades com mais facilidade usando estratégias diferentes, uma proposta que favorece essa construção é o chamado **painel de soluções**, em que o professor promove um momento de socialização das estratégias de resolução utilizadas pela turma, para que todos possam discutir suas vantagens e desvantagens, verificando similaridades e diferenças, identificando possíveis erros e aprendendo com eles, já que esse é um movimento de grande auxílio para o desenvolvimento autônomo dos estudantes. Para que a turma seja encorajada a construir essa postura, é importante que as tarefas propostas sejam analisadas e discutidas constantemente, problematizando o que é relevante para a aprendizagem.

Para o desenvolvimento de atividades, o professor pode optar por trabalhar com a turma organizada em duplas predefinidas, por exemplo, para que os estudantes com diferentes graus de compreensão sobre determinado assunto possam se ajudar ao trabalharem juntos para resolver as atividades propostas. Quando há auxílio entre pares, a compreensão do que é estudado ganha uma conotação diferente do que quando o professor intervém no processo de aprendizagem. A proximidade de linguagem entre os colegas de turma favorece a construção da aprendizagem nesta faixa etária.

Seguindo a ideia da troca entre pares, o professor pode organizar a turma em grupos, criando dinâmicas de trabalho que favoreçam a autonomia dos estudantes, ao mesmo tempo que haja a necessidade de colaborar uns com os outros para resolver problemas, formular hipóteses, construir e trocar estratégias de resolução, pensando juntos sobre possibilidades de ação. Os grupos de trabalho podem ser organizados para a resolução de problemas, criando sistemas *gamificados* de pontuação, ranqueando a turma ou ainda pensando em trabalhos por estações, em que os grupos se revezam no desenvolvimento de diferentes atividades. Nessa última proposta, é importante promover um momento de discussão entre os estudantes sobre as dificuldades encontradas, as estratégias de resolução e as aprendizagens, que, quando compartilhadas, ampliam o leque de possibilidades de caminhos para a solução de problemas para toda a turma. Essas estratégias de trabalho em grupos podem favorecer, ainda, o desenvolvimento das atividades em turmas com um número grande de alunos.

Trabalhar em grupo demanda socialização, parte importante do desenvolvimento dos estudantes em relação à vida em sociedade. Conviver é um ato constante, principalmente no ambiente escolar, e, por mais que a individualidade seja respeitada, respeitar regras se torna uma ação que permite que a vida em sociedade possa se tornar mais organizada. Assim, o propósito das ações em grupo é o aprendizado, tornando o envolvimento e o papel de cada participante deste trabalho parte integrante e articulada com os demais para que as habilidades envolvidas sejam desenvolvidas por todos. Delegar funções para os estudantes nos seus respectivos grupos, deixando cada um responsável por uma ação (distribuidor de tarefas, controlador do tempo, redator etc.), revezando as funções de um momento para o outro. Quando os estudantes estão próximos uns dos outros, damos a oportunidade para que as trocas aconteçam.

A interdisciplinaridade e os Temas Contemporâneos Transversais

Para o desenvolvimento da **competência geral 2**, que propõe exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, com base nos conhecimentos das diferentes áreas, é necessário propor, em diferentes momentos da vida escolar, um trabalho interdisciplinar. A interdisciplinaridade propicia aos estudantes que realizem conexões entre as áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares, bem como demonstrem criatividade, ampliem a atenção a problemas do entorno e outros, despertando a atenção e levando a uma maior compreensão dos objetos de conhecimento.

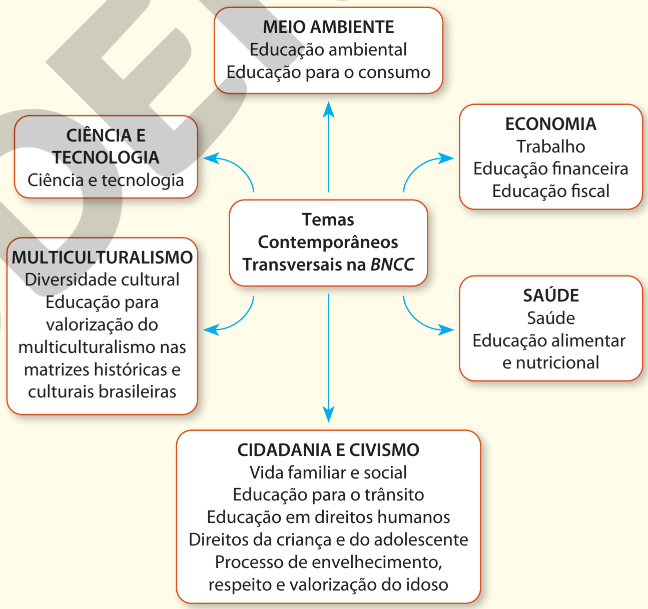
O trabalho interdisciplinar pode ser apoiado no desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs). Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais,

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...] (BRASIL, 2013).

Os TCTs são aqueles conteúdos que não pertencem a apenas um componente curricular, uma vez que podem ser trabalhados por todos eles. Dizem respeito a temas relacionados ao mundo contemporâneo e à atualidade, o que favorece a integração dos componentes curriculares em um processo pedagógico com vistas à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos. A BNCC destaca a sua importância quando afirma que:

> [...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora (BRASIL, 2018, p. 19).

Publicado pelo Ministério da Educação em 2019, o documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: proposta de práticas de implementação* selecionou quinze temas e os distribuiu em seis macroáreas, conforme indicado a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Avaliação

A avaliação e as práticas avaliativas

O cenário de ampla discussão sobre metodologias e práticas pedagógicas que se estabeleceu nos últimos anos trouxe à tona pontos vitais para o surgimento de novas formas de pensar a educação: as concepções de **avaliação da aprendizagem**.

Quanto à importância da avaliação, tomamos emprestadas as palavras de Pavanello e Nogueira:

> Se há um ponto de convergência nos estudos sobre a avaliação escolar é o de que ela é essencial à prática educativa e indissociável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso de seus estudantes está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica. Quanto ao estudante, a avaliação permite que ele saiba como está seu desempenho do ponto de vista do professor, bem como se existem lacunas no seu aprendizado às quais ele precisa estar atento.
>
> [...] Acreditamos que poucos educadores e educandos têm consciência de que a avaliação é um processo contínuo e natural aos seres humanos, de que os homens se avaliam constantemente, nas mais diversas situações, diante da necessidade de tomar decisões, desde as mais simples até as mais complexas (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 36-7).

As divergências, contudo, têm início quando se pretende redefinir a avaliação escolar e os modos e graus de exigência desse processo. Podemos dizer que, por longo tempo, na maior parte da história da Educação Matemática, o que vigorou foi a chamada avaliação informativa:

> Na prática pedagógica da Matemática, a avaliação tem, tradicionalmente, centrado-se nos conhecimentos específicos e na contagem de erros. É uma avaliação somativa, que não só seleciona os estudantes, mas os compara entre si e os destina a um determinado lugar numérico em função das notas obtidas. Porém, mesmo quando se trata da avaliação informativa, é possível ir além da resposta final, superando, de certa forma, a lógica estrita e cega do “certo ou errado” (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 30, 36).

Alguns autores também concordam que, mesmo na avaliação tradicional, há algum espaço para uma busca mais consciente do processo formativo do estudante.

> De fato, estudos têm mostrado que uma tarefa de avaliação, assim como uma tarefa de aprendizagem, deve envolver conhecimento significativo de matemática; permitir ser resolvida por vários caminhos; incentivar a comunicação por parte dos estudantes; e solicitar alguma análise crítica. Além disso, o processo de avaliação em matemática deveria evidenciar, pelo menos:
>
> - as escolhas feitas pelo estudante, na busca em lidar com a situação;
> - a capacidade do estudante em se comunicar matematicamente, comprovando sua capacidade em expressar ideias matemáticas, oralmente ou por escrito, presentes no procedimento que utilizou para lidar com a situação proposta;
> - os conhecimentos matemáticos que utilizou;
> - o modo como interpretou sua resolução para dar resposta.
>
> Assim, a avaliação em matemática deixaria para trás a memorização e a repetição para ir em direção a problemas de investigação (BURIASCO, 2002, p. 262-263).

Uma concepção de avaliação que tem se configurado nos últimos anos é a que se refere à **avaliação formativa**.

Principalmente a partir da década de 1980, muitos estudiosos têm feito importantes contribuições ao entendimento que devemos ter sobre **avaliação como processo**, **ação contínua**. Entre esses pesquisadores, destacamos o trabalho de Luckesi (2001). Segundo o autor, a avaliação deve ser tomada como instrumento para a compreensão do estágio em que se encontra o estudante, tendo em vista a tomada de decisões, suficientes e satisfatórias, para avançar no processo de aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), divulgados desde fins dos anos 1990, colaboraram para a ampliação do olhar sobre as funções da avaliação. Destacam, por exemplo, a **dimensão social** e a **dimensão pedagógica** da avaliação.

No primeiro caso, a avaliação tem a função de, para os estudantes, informar acerca do desenvolvimento das potencialidades que serão exigidas no contexto social, garantindo sua participação no mercado de trabalho e na esfera sociocultural. Para os professores, a avaliação deve auxiliar na identificação dos objetivos alcançados, com a intenção de reconhecer as capacidades matemáticas dos educandos.

No segundo caso, a avaliação tem a função de informar os estudantes sobre o andamento da aprendizagem propriamente dita, isto é, dos conhecimentos adquiridos, do desenvolvimento de raciocínios, dos valores e hábitos incorporados e do domínio de estratégias essenciais.

A BNCC também preconiza uma avaliação formativa:

> [...] construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos estudantes; [...] (BRASIL, 2018, p. 17).

Os instrumentos de avaliação (provas, trabalhos, registros de atitudes, entre outros) devem ser capazes de fornecer informações ao professor sobre as condições de cada estudante com relação à resolução de problemas, ao uso adequado da linguagem matemática, ao desenvolvimento de raciocínios e análises e à integração desses aspectos em seu conhecimento matemático. Devem também contemplar as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não se evidenciam em avaliações escritas.

Para Charles Hadji (2001), a avaliação formativa implica, por parte do professor, flexibilidade e vontade de adaptação e de ajuste. O autor ressalta que a avaliação que não é seguida da modificação das práticas pedagógicas tem pouca capacidade de ser formativa. Posição semelhante é defendida pelas educadoras Pavanello e Nogueira (2006):

> É preciso reconhecer [...] que o professor deve selecionar, dentre as informações captadas, apenas o que é realmente importante [...]. Para isso, existem indicadores que, segundo Vergani (1993, p. 155), podem nortear a observação pelo professor, entre os quais poderiam ser citados:
>
> - o interesse com que o estudante se entrega às atividades matemáticas;

- a confiança que tem em suas possibilidades;
- sua perseverança, apesar das dificuldades encontradas;
- se formula hipóteses, sugere ideias, explora novas pistas de pesquisa;
- se avalia criteriosamente a adequação do processo que adotou ou a solução que encontrou;
- se reflete sobre a maneira de planificar uma atividade e de organizar seu trabalho;
- se pede ajuda em caso de dúvida ou de falta de conhecimentos; e
- se comunica suas dificuldades e descobertas aos colegas, de maneira adequada.

> No entanto, para que essas atitudes possam ser cultivadas pelo estudante, a prática pedagógica não pode mais se centrar na exposição e reprodução de conteúdos que só privilegiam a memorização e não o desenvolvimento do pensamento (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 38-9).

Afinal, o que deve ser avaliado: conteúdos, habilidades, atitudes?

Tudo deve ser avaliado. O fundamental, porém, é saber **como olhar**, **o que olhar** e **como analisar** as coletas. Para isso, o professor pode recorrer a diversificados instrumentos de coleta de informações, selecionando aqueles que permitam compor o melhor panorama da aprendizagem matemática de seus estudantes.

Desse modo, as avaliações precisam ser planejadas, assim como qualquer situação de ensino. É fundamental estar sempre atento ao processo de avaliação sem perder de vista os objetivos e as expectativas para cada ano escolar. Portanto, durante o uso de instrumentos avaliativos, é importante considerar as habilidades propostas nos documentos curriculares e nos planos de ensino e os trabalhados na coleção.

Diante das diferentes concepções sobre como avaliar e com base nas ideias que a coleção assume, entendemos que a avaliação deve ser um processo contínuo durante o ano letivo, e não apenas momentos estanques, como ao final de cada bimestre, de modo que o desenvolvimento dos estudantes seja acompanhado pelo professor e por ele próprio, e que intervenções possam ser feitas ao longo do caminho.

A organização da coleção em capítulos e o bloco de **Exercícios complementares**, a seção **Verificando** e a seção **Organizando** podem ser indicativos ou funcionar como ferramentas iniciais para a construção de momentos avaliativos.

Porém, ressalta-se a importância de complementar as atividades do livro com outros instrumentos para acompanhar os estudantes em seu processo de aprendizagem.

Desse modo, destacam-se a seguir elementos a se considerar no processo avaliativo:

- o caráter processual, formativo e participativo da avaliação e sua forma contínua, cumulativa e diagnóstica;
- a avaliação como oportunidade para professor e estudante refletirem e ajustarem o desempenho;
- as diferentes estratégias e oportunidades para avaliação, não deixando de considerá-las também situações de aprendizagem;
- a importância de registros constantes dos avanços e dificuldades de observação e acompanhamento diário;
- diferentes propostas de avaliação de aprendizagem coerentes com visões atuais de avaliação (mediadora e dialógica, diagnóstica e formativa);
- instrumentos para registros, como relatórios, portfólios, tabelas, fichas, entre outros com critérios para avaliação.

Instrumentos de avaliação nas aulas de Matemática

Ao diversificar os instrumentos de avaliação e autoavaliação, o professor pode produzir momentos de aprendizagem e atender o maior número de estudantes do grupo. Como sugestão, vamos apresentar aqui, resumidamente, um leque de modalidades de avaliação.

Autoavaliação: em primeiro lugar, o professor deve auxiliar os estudantes a compreenderem os objetivos da autoavaliação, fornecendo-lhes para isso um roteiro de orientação. Os estudantes devem ser motivados a detectar suas dificuldades e a questionar as razões delas.

Prova em grupo seguida de prova individual: nesta modalidade, as questões são resolvidas em grupo, e, em seguida, cada estudante resolve questões do mesmo tipo individualmente. O intuito é colaborar para a metacognição, para que o estudante tenha consciência do próprio conhecimento, de suas potencialidades e dificuldades.

Testes-relâmpago: os testes-relâmpago normalmente propõem poucas questões, uma ou duas apenas. Têm por objetivo não permitir que os estudantes mantenham-se sem estudo durante longos períodos, de modo que se acumule uma grande quantidade de conteúdos. Esse recurso, além de manter os estudantes atentos aos assuntos contemplados em aula, ajuda-os na familiarização com os processos avaliativos.

Testes e/ou provas cumulativas: este instrumento de avaliação traz à tona conteúdos trabalhados em momentos anteriores. Tal prática contribui para que os estudantes percebam as conexões entre os conteúdos e a importância de usar os conhecimentos matemáticos de forma contínua.

Testes em duas fases: este tipo de teste, ou prova, é realizado em duas etapas:

1ª) a prova é realizada em sala de aula, sem a interferência do professor;

2ª) os estudantes refazem a prova dispondo dos comentários feitos pelo professor.

O sucesso desse instrumento depende de alguns fatores, como:

- a escolha das questões deve ser norteada pelos objetivos do teste;
- o conteúdo dos comentários formulados pelo professor entre as duas fases;
- a consciência, por parte dos estudantes, de que a segunda fase não consiste em mera correção do que está errado, mas em uma oportunidade de aprendizagem.

As questões devem ser de dois tipos:

- as que requerem interpretação ou justificação, e problemas de resolução relativamente breve;
- as abertas, e problemas que exijam alguma investigação e respostas mais elaboradas.

Resolução de problemas: chamamos de "problema matemático" aquele que envolve um raciocínio matemático na busca por solução. Pode ser resolvido individualmente ou em grupo. A atividade de resolução de problemas deve envolver, entre outros fatores:

- a compreensão da situação-problema por meio de diferentes técnicas (leitura, interpretação, dramatização etc.);
- a promoção da criação de estratégias pessoais (não haver solução pronta);
- a identificação do problema e a seleção e a mobilização dos conhecimentos matemáticos necessários para sua resolução;
- a avaliação do processo para verificar se, de fato, os objetivos estão sendo atingidos;
- a interpretação e a verificação dos resultados, para que se avaliem sua razoabilidade e sua validade.

Mapa conceitual: durante a fase formal de avaliação, o professor pode solicitar aos estudantes que construam o mapa conceitual sobre um tema já discutido e trabalhado em aula. Este tipo de instrumento propicia a verificação da aprendizagem mais aberta e pode ser usado como autoavaliação.

Trabalho em grupo: para que os estudantes trabalhem de fato como grupo, são fundamentais a orientação e o auxílio do professor no sentido de estimular os estudantes a desempenharem novas funções em sala de aula, em colaboração com os colegas. Um incentivo para isso é o grupo receber uma única folha de papel com as atividades propostas, para que todos resolvam em conjunto. A questão a ser respondida deve ser desafiadora, despertando a curiosidade e a vontade de resolvê-la.

Diálogos criativos: a proposta é que os estudantes produzam diálogos matemáticos em que estejam inseridos conceitos e propriedades de determinado conteúdo.

Histórias em quadrinhos: nesta modalidade, os estudantes criam histórias em quadrinhos para abordar os assuntos estudados em sala de aula. Esse é um recurso que, além de intensificar o interesse pela Matemática, permite ao professor a avaliação do conhecimento assimilado pelos estudantes em contextos diversificados.

Seminários e exposições: são atividades que oferecem oportunidade para os estudantes organizarem seu conhecimento matemático e suas ideias sobre os assuntos trabalhados em aula, além de promover a desinibição e a autonomia dos estudantes.

Portfólios: são coletâneas dos melhores trabalhos, que podem ser escolhidos pelos próprios estudantes. O professor deve orientá-los e sugerir que selecionem, durante um período, as atividades de Matemática que preferirem e que justifiquem as suas escolhas.

É importante reforçar que um processo fecundo de avaliação deverá considerar, além dos instrumentos apropriados, o estabelecimento de critérios de correção alicerçado em objetivos claros e justos. Chamamos a atenção para o tratamento que devemos dar ao "erro" nas atividades de Matemática. Ele deve ser analisado criticamente, de modo que forneça indícios de sua natureza e da correção do percurso pedagógico, para o (re)planejamento e a execução das atividades em sala de aula.

> Encarados com naturalidade e racionalmente tratados, os erros passam a ter importância pedagógica, assumindo um papel profundamente construtivo, e servindo não para produzir no estudante um sentimento de fracasso, mas para possibilitar-lhe um instrumento de compreensão de si próprio, uma motivação para superar suas dificuldades e uma atitude positiva para seu futuro pessoal (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 37).

Por fim, a observação atenta e a percepção aguçada do professor também são relevantes no processo de avaliação, no sentido de detectar as aprendizagens, que muitas vezes não são reveladas pelos instrumentos avaliativos escolhidos.

Sejam quais forem os instrumentos utilizados, é fundamental que o professor estabeleça critérios de avaliação da aprendizagem matemática dos estudantes para cada ano escolar, tomando como referência as habilidades de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental. Desse modo, os objetivos de aprendizagem destacados no planejamento do professor precisam ser explicitados para o estudante, para que ele compreenda aonde se quer chegar, tomando o cuidado de usar uma linguagem compatível com o seu entendimento.

Nas **Orientações específicas** de cada volume, indicamos materiais que podem subsidiar o trabalho docente. Para cada ano escolar, serão indicadas atividades comentadas relacionadas às habilidades do ano anterior e que podem compor avaliações diagnósticas. Essas atividades estão organizadas na seção **Avaliação diagnóstica**.

Além disso, sugerimos que os exercícios das seções **Verificando** de cada capítulo sejam utilizados com a finalidade de preparar os estudantes para avaliações e exames externos, de larga escala.

Uma prática de avaliação formativa também deve ser realizada com a participação dos estudantes em relação ao próprio desempenho. A autorreflexão leva ao compartilhamento, com os professores e demais envolvidos no processo educacional, da responsabilidade pela própria aprendizagem. Analisar rotineiramente aspectos como avanços e fragilidades no desempenho leva à superação de dificuldades e ao compromisso com decisões futuras para aprimoramentos. Todos os itens devem ser previamente combinados com os estudantes e, posteriormente, discutidos em entrevista pessoal. Dessa maneira, sugerimos que uma das utilizações das questões da seção **Organizando**, disponibilizada ao final de cada capítulo, seja utilizada como uma maneira de possibilitar a autoavaliação dos estudantes em relação aos conteúdos de cada capítulo. Também indicamos, a seguir, um modelo de autoavaliação que poderá ser adaptado pelo professor, de acordo com a necessidade de cada etapa do processo de ensino que pretende utilizar, seja no início ou no fim de cada bimestre ou ao final do trabalho com o conteúdo de um capítulo, por exemplo.

AUTOAVALIAÇÃO

Avalie seu desempenho educacional comentando aspectos positivos e negativos relacionados a cada item.

1. DESEMPENHO EM SALA DE AULA

- Em relação ao domínio do conteúdo:
- Interesse e participação:
- Realização das atividades individuais e em grupo:
- Autonomia:

a) Indique as principais dificuldades encontradas e o que foi importante para superá-las.

b) Outras observações:

2. RELACIONAMENTO

- Com os colegas:
- Com o professor:
- Com a equipe técnica e demais funcionários da instituição:

a) Indique as principais dificuldades encontradas e o que foi importante para superá-las.

b) Outras observações:

3. COMPROMISSO E RESPONSABILIDADE

- Assiduidade:
- Pontualidade nas aulas e na entrega dos trabalhos:
- Material didático:

a) Indique as principais dificuldades encontradas e o que foi importante para superá-las.

b) Outras observações:

Autonomia do professor e a prática docente

Como já exposto, entendemos o livro didático como apoio do trabalho pedagógico. Nessa perspectiva, o conhecimento, a experiência e a autonomia profissional fazem do docente um coautor do material publicado. Assim, a despeito das propostas explícitas da coleção, o professor sempre poderá ampliar, complementar e inovar no desenvolvimento e nas discussões dos temas e atividades sugeridos, aproveitando as novas questões que emergem em sala de aula no desenrolar do estudo. O modo como o professor usará os recursos que compõem esta coleção depende da teoria que embasa a sua prática pedagógica e de sua experiência em salas de aula diversas e heterogêneas.

É sempre bom lembrar que o estímulo à imaginação e ao interesse dos estudantes conta com uma gama de recursos didáticos, como: o trabalho com jogos ou com materiais manipulativos, vídeos e ferramentas da informática; a pesquisa em livros paradidáticos, dicionários, periódicos (jornais, boletins, revistas de informação geral e especializada) e internet; ou a realização de feiras, gincanas e exposições.

A gestão da sala de aula também faz parte da autonomia do professor e pode ser um meio de estimular os estudantes a desenvolver responsabilidade pessoal e autodisciplina, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais significativo tanto para o professor como para os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor deve refletir sobre o espaço de que dispõe e sobre a melhor maneira de atingir seus objetivos nesse local, com vistas a uma aula o mais inclusiva possível e com a participação de todos os estudantes.

Além disso, o professor deve considerar os perfis variados dos estudantes e das turmas (que podem ser pequenas ou muito grandes). Para dar conta de atender às diferentes necessidades, é necessário que a equipe docente e a de gestão levem em conta tal diversidade, propondo situações diversificadas que respeitem cada indivíduo.

> Uma questão importante a ser considerada quando se resolve debater sobre a heterogeneidade na escola é reconhecer que há diferentes tipos de heterogeneidade e que o modo de tratar cada um deles é bastante específico. A literatura sobre esse tema remete a, pelo menos, três grandes blocos de heterogeneidades a serem abordadas no debate educacional. Um primeiro tipo diz respeito às diferenças socioeconômicas culturais, religiosas, étnico-raciais, de gênero, de orientação sexual, físicas existentes entre as crianças. Um segundo tipo remete às reflexões sobre a inclusão dos estudantes com deficiências físicas e transtornos de aprendizagem. O terceiro diz respeito à heterogeneidade quanto ao nível de escolaridade, idade, conhecimentos (LEAL; SILVA, 2016).

Já destacamos a importância de se respeitar a diversidade, que deve ser tratada como uma oportunidade ao indivíduo de ganhar novas perspectivas, expandir seus horizontes e aprender com as diferenças, valorizando a multiplicidade de culturas e os grupos que formam a sociedade.

Para a inclusão das crianças com deficiência, entendemos que as dificuldades são muitas. Nesses casos é preciso um investimento pedagógico, por parte da gestão escolar e do professor, em busca de subsídios teóricos sobre como abordar os conteúdos, atendendo às necessidades específicas de cada tipo de deficiência ou transtorno.

Em relação aos níveis de conhecimento, devemos considerar que diferentes fatores sociais ou individuais podem influenciar, demandando diferentes tipos de ações didáticas. Além disso,

> é preciso compreender que: (1) a heterogeneidade é constitutiva do processo pedagógico e, portanto, estará sempre presente, mas as turmas são constituídas por identidades sociais (homogeneidades), que precisam ser respeitadas, valorizadas e conhecidas; (2) o currículo escolar traz recortes não neutros do que se ensina e se aprende e, portanto, precisa ser objeto de debate com as próprias comunidades. Por outro lado, é preciso reconhecer que, em decorrência das trajetórias sociais e individuais, sempre haverá heterogeneidade quanto aos níveis de conhecimento, que precisam ser tratados na escola, possibilitando que, ao mesmo tempo, os diferentes saberes sejam valorizados, mas que conteúdos fundamentais sejam garantidos a todos, em condições favoráveis de aprendizagem (LEAL; SILVA, 2016).

Uma das ações para se trabalhar com a heterogeneidade em relação ao nível de conhecimento seria mapear os níveis de conhecimentos dos estudantes em relação aos diversos assuntos. Para isso, pode-se propor uma avaliação diagnóstica no início do ano ou no início de cada etapa. Ações desse tipo podem auxiliar a diagnosticar as facilidades e as fragilidades em relação a cada componente curricular ou ao conteúdo a ser trabalhado.

Uma outra proposta é rever o planejamento a cada etapa do ano, seja bimestral ou trimestralmente. Ao fazer essa revisão é possível fazer ajustes que atendam aos diferentes perfis dos estudantes. Planejar, executar, avaliar e replanejar devem ser ações constantes no trabalho escolar. Com as estratégias de planejamento adequadas, pode-se manter o grupo envolvido e organizado, propiciando um trabalho apropriado a todos.

Formação continuada e desenvolvimento profissional docente

Assim como os estudantes precisam desenvolver habilidades e competências diversificadas, em sintonia com a época em que vivem, nós, professores, mais que outros profissionais, temos a máxima urgência e necessidade de cuidar da continuidade de nossa formação e do consequente desenvolvimento profissional.

O que aprendemos na universidade e a experiência que adquirimos com a prática pedagógica não são suficientes para nos manter longe de atividades de formação. Pesquisas e estudos no campo da Educação Matemática e áreas afins têm nos auxiliado a encontrar as respostas para as muitas dúvidas e angústias inerentes à profissão: "O que ensinar?", "Por que ensinar?", "Como ensinar?"…

O desenvolvimento profissional do professor deve ser entendido como um processo contínuo, que se dá ao longo de toda a vida profissional, não ocorre ao acaso, tampouco é espontâneo, mas resultado do processo de busca que parte das necessidades e dos interesses que surgem no percurso.

Na realidade, a formação profissional docente tem início na experiência como estudante e na formação acadêmica específica, do período de iniciação à docência, até edificar-se com a experiência profissional e os processos de formação continuada.

Lembramos que as ações de formação continuada podem ser desenvolvidas por múltiplas modalidades, como leituras atualizadas, cursos, palestras, oficinas, seminários, grupos de estudos, reuniões e encontros com colegas na própria escola.

Para ampliar essa proposta, indicamos algumas de suas publicações, livros e trabalhos científicos que possam contribuir para um aprofundamento do conhecimento do professor e auxiliá-lo na ampliação das atividades propostas no livro.

Algumas publicações de associações e centros de Educação Matemática

- **Bolema** (Boletim de Educação Matemática) – publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (IGCE-Unesp), *campus* de Rio Claro. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/1050. Acesso em: 13 maio 2022.
- **Boletins do Gepem** – publicados pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Disponível em: http://costalima.ufrrj.br/index.php/gepem/issue/view/127. Acesso em: 13 maio 2022.
- **Educação Matemática em Revista** – publicada pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revista Brasileira de História da Matemática** – publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática – publicada pelo Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (UFSC). Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 14 maio 2022.
- Revista **Educação e Matemática** e Revista **Quadrante** – publicadas pela Associação de Professores de Matemática de Portugal. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revista de História da Educação Matemática** – publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática. Disponível em: https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revista do Professor de Matemática** (RPM) – publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: https://www.rpm.org.br/. Acesso em: 14 maio 2022.
- Revista **Zetetiké** – publicada pelo Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática (Unicamp). Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike. Acesso em: 14 maio 2022.

Referências bibliográficas

ADICHIE, C. N. **O perigo de uma história única**, 2009. Disponível em: <https://www.ted.com/talks/chimamanda_ngozi_adichie_the_danger_of_a_single_story?language=pt-br>. Acesso em: 30 jun. 2022.

Inicialmente divulgada no TED Talk e depois publicada em livro, a palestra relata as experiências da autora nos Estados Unidos e alerta para os riscos de uma visão estreita e estereotipada de mundo.

AULETE Digital. Rio de Janeiro: Lexicon. Disponível em: https://www.aulete.com.br/empatia. Acesso em: 30 jun. 2022.

Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos**: Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

David Ausubel apresenta nesse livro uma visão atualizada da sua teoria da aprendizagem, conhecida como **Teoria da Assimilação**. Ausubel defende que o principal processo de aprendizagem significativa é por recepção, e não por descoberta. E, contrariamente a muitos outros autores, argumenta que a aprendizagem significativa por recepção não é um processo passivo. Pelo contrário, é, necessariamente, um processo ativo, que exige ação e reflexão do aprendiz e que é facilitada pela organização cuidadosa das matérias e das experiências de ensino.

BASE Nacional Comum Curricular: educação é a base. **Competências socioemocionais como fator de proteção à saúde mental e ao *bullying***. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying. Acesso em: 11 maio 2022.

Artigo sobre como o trabalho com as competências socioemocionais pode servir como um fator de prevenção ao *bullying*, apresentando uma atividade como proposta de trabalho.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do Ministério da Educação que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio de todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos**. Brasília: Parecer CNE/CBE nº 11/2010.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares para o Ensino Fundamental de 9 anos em todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

Documento do Ministério da Educação, em 1998, com o objetivo principal de orientar os educadores por meio da normatização de alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina. Esses parâmetros abrangiam tanto a rede pública, como a rede privada de ensino, conforme o nível de escolaridade dos estudantes.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Elaborado pelo Ministério da Educação, guia prático com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BURIASCO, R. Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão. **Educação em Revista** (UFMG), Belo Horizonte, n. 36, dez. 2002.

O artigo é dedicado à apresentação de considerações e reflexões quanto às práticas avaliativas usuais das escolas, às avaliações em larga escala, à avaliação na perspectiva da resolução de Problemas, às diferentes funções da avaliação, à linha de pesquisa da análise de erros e à diretriz para a avaliação, que possam contribuir de fato para uma educação matemática de melhor qualidade.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. **Planejando o trabalho em grupo**: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

O livro explica como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa com base em pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, além de mostrar como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2000.

A proposta dessa obra é a adoção de uma nova postura educacional. Após fazer considerações de caráter geral, abordando aspectos da cognição, da natureza da matemática e questões teóricas da educação, o autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre a matemática.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

O autor aprofunda sua teoria-ética de uma vida voltada para a liberdade, a verdade e a autenticidade dos sujeitos. Reflete sobre o que o ato de ensinar exige de educadores e educandos.

HADJI, C. **Avaliação desmistificada**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Ao refletir sobre a possível formatividade da avaliação, o autor pretende permitir aos professores e a todos aqueles que estão envolvidos com a avaliação escolar que vejam o que significa colocar a avaliação a serviço das aprendizagens e como isso pode ser concretamente feito.

INSTITUTO Ayrton Senna. **Mapeamento aponta que 70% dos estudantes de SP relatam sintomas de depressão e ansiedade**. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/mapeamento-aponta-que-70-por-cento-dos-estudantes-de-SP-relatam-sintomas-de-depressao.html. Acesso em: 11 maio 2022.

O artigo apresenta o resultado de uma pesquisa realizada em 2021 pela Secretaria da Educação e o Instituto Ayrton Senna que revelou os efeitos da pandemia de Covid-19 na saúde mental e socioemocional dos estudantes do estado de São Paulo.

LEAL, T. F.; SÁ, C. F.; SILVA, E. C. N. (org.). **Heterogeneidade, educação e linguagem em contextos do campo e da cidade**. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2016.

As autoras fazem uma síntese de diferentes conceitos de heterogeneidade e seus impactos para a educação, com foco na reflexão sobre as escolas do campo e da zona urbana.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 2015.

O livro oferece subsídios para ampliar a compreensão sobre o ato de avaliar a aprendizagem dos estudantes e, dessa forma, orientar uma prática mais adequada às suas finalidades. No decorrer de suas páginas, há um movimento constante entre a denúncia de uma situação inadequada e o anúncio de novas possibilidades, uma dialética entre a desconstrução e a reconstrução de conceitos e modos de agir.

MICHAELIS Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2015. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/empatia/. Acesso em: 30 jun. 2022.

Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, Matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, Campinas, v. 11, n. 19, 2003.

Nesse artigo, argumenta-se no sentido de mostrar que o processo de constituição da matemática escolar ultrapassa tanto a ideia de transposição didática, regulada pela matemática científica e pelas ciências da educação, quanto a de uma construção totalmente endógena à escola.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

Nesse livro os autores apresentam textos que contribuem para a compreensão a respeito do modo como as crianças trabalham com problemas matemáticos.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Declaração Universal dos Direitos Humanos**, 10 dez. 1948.

Documento aprovado em 1948, na Assembleia Geral da Organização das Nações Unidas (ONU), é a base da luta universal contra a opressão e a discriminação, defendendo a igualdade e a dignidade das pessoas e reconhecendo que os direitos humanos e as liberdades fundamentais devem ser aplicados a cada cidadão do planeta.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006.

O objetivo desse texto é discutir a trajetória a ser considerada quando se pensa na avaliação em matemática. Assim, os autores partem da constatação de que há diferentes modos de conceber a matemática, paradigmas que se filiam a sistemas filosóficos existentes desde a Antiguidade. Esses paradigmas, por sua vez, influenciam o fazer matemática, o fazer pedagógico em matemática e, por conseguinte, a avaliação.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco**: ensino fundamental – área de matemática. Recife: Secretaria de Educação e Esportes, 2019. p. 65.

Documento oficial da Secretaria de Educação e Esportes do estado de Pernambuco que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas na área de Matemática, no Ensino Fundamental de todo o estado.

PONTE, J. P. **O ensino da Matemática em Portugal**: uma prioridade educativa? Conferência plenária apresentada no seminário "O Ensino da Matemática: situação e perspectivas". Lisboa: CNE, 2002.

O autor revê alguns dos marcos mais salientes do percurso do ensino da Matemática em Portugal, analisando os elementos fundamentais que caracterizam o ensino dessa disciplina como fenômeno social. Também identifica os fatores que, na sua perspectiva, contribuem para a crise no ensino da Matemática e indica caminhos para a sua resolução.

ROMANATTO, M. C. O livro didático: alcances e limites. **Anais**. VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo.

O presente trabalho discute a utilização do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem.

SÃO PAULO (Município). Secretaria Municipal de Educação. **Currículo da cidade**: ensino fundamental – componente curricular matemática. 2. ed. São Paulo: SME/COPED, 2019. p. 25.

Documento oficial da Secretaria Municipal de Educação do município de São Paulo que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas na área de Matemática, no Ensino Fundamental de todo o município.

UJIIE. N. T. *et al*. Os Conhecimentos Prévios de Matemática de Estudantes do Ensino Fundamental: O que é Matemática? De Onde Ela Veio? Como Seria um Mundo sem Matemática? *In*: **ALEXANDRIA**: R. Educ. Ci. Tec., Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 57-73, maio 2017.

Nesse artigo, os autores apresentam os resultados de uma investigação com abordagem quali-quantitativa, realizada com 22 estudantes de sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de Tijucas, Santa Catarina, acerca do tema matemática.

UNESCO. **Cultura de paz no Brasil** [entre 2017 e 2022]. Disponível em: https://pt.unesco.org/fieldoffice/brasilia/expertise/culture-peace. Acesso em: 11 maio 2022.

Artigo sobre a cultura de paz no Brasil, destacando que é fundamental promover e disseminar valores, atitudes e comportamentos que conduzam ao diálogo, à não violência e à aproximação das culturas.

Referências bibliográficas complementares

- BELLEMAIN, P. M. B.; BIBIANO, M. F. A.; SOUZA, C. F. Estudar grandezas e medidas na educação básica. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. vol. 9, n. 1, 2018.

  Esse texto problematiza o ensino de grandezas e medidas na matemática da educação básica e na interface entre matemática e física. Discutem-se o porquê de ensinar grandezas e medidas, as dificuldades enfrentadas por estudantes e professores no estudo desse campo e alguns caminhos que podem contribuir para a superação dessas dificuldades.

- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Nesse livro, os autores apresentam exemplos do uso de informática com estudantes e professores para, então, debaterem desde temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa até questões epistemológicas e pedagógicas relacionadas à utilização de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- CAZORLA, I. M.; SANTANA, E. S. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. 2. ed. Itabuna/Ilhéus: Via Litterarum, 2009.

  Esse livro apresenta quatro sequências didáticas para trabalhar de forma objetiva e acessível os conceitos básicos de Estatística e Probabilidade, de acordo com as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, da Educação Básica.

- KALEFF, A. M. M. R.; PEREIRA, P. C. (org.). **Educação Matemática**: diferentes olhares e práticas. Curitiba: Appris, 2020.

  Nessa obra os autores tratam de diferentes temáticas, como o ensino de geometria, laboratório de ensino, recursos virtuais, Educação Inclusiva, Etnomatemática, Educação Escolar Indígena, temas que permitem reconhecer ações e a diversidade dos estudantes na sala de aula.

- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Os autores oferecem aos leitores reflexões sobre aspectos da Modelagem e suas relações com a Educação Matemática. Apresentam a trajetória histórica da Modelagem e provocam discussões sobre suas relações, possibilidades e perspectivas em sala de aula, sobre diversos paradigmas educacionais e sobre a formação de professores.

- MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Nesse livro, os autores abordam temáticas da História da Matemática, História da Educação Matemática e como essas duas regiões de inquérito podem se relacionar com a Educação Matemática.

- NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). **Escritas e leituras na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Os autores apresentam diferentes discussões sobre o trabalho com leitura e escrita nas aulas de Matemática, tais como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados.

- NACARATO, A. M.; GOMES, A. A. M.; GRANDO, R. C. (org.). **Experiências com Geometria na escola básica**: narrativas de professores em (trans)formação. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008.

  O livro traz narrativas de professores da escola básica, participantes de um Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria, localizado institucionalmente na Universidade São Francisco. O livro traz as experiências de seus participantes, bem como discussões epistemológicas do pensamento geométrico.

- PEREIRA, C. A.; SANDMANN, A. Dificuldades do ensino da álgebra no ensino fundamental: algumas considerações. **Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia**. Curitiba: UTFPR, v. 8, n. 17, 2017.

  Nesse artigo os autores apresentam referenciais teóricos que possibilitam uma reflexão acerca das dificuldades existentes no ensino-aprendizagem da Álgebra.

- RODRIGUES, R. S. **Um estudo sobre os efeitos do pensamento computacional na educação**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2017. Campina Grande, 2017.

  O objetivo geral desse trabalho é analisar de forma quantitativa o efeito do Pensamento Computacional desenvolvido pela programação de computadores na capacidade de resolução de problemas e no desempenho de estudantes no ensino básico.

- ROSA, M.; BAIRRAL, M. A.; AMARAL, R. B. **Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância**: pesquisas contemporâneas. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

  Nessa obra os autores apresentam investigações recentes no campo da Educação Matemática em relação às tecnologias digitais e Educação a Distância, de forma a contribuir com professores de matemática e pesquisadores em Educação Matemática.

- SANTOS, J. G.; MONDINI, F. Um estudo sobre o tratamento formal dos números racionais. **ACTIO**: Docência em Ciências. Curitiba: UTFPR, v. 5, n. 2, 2020.

  O artigo tem por objetivo apresentar um estudo sobre o tratamento formal para alguns conceitos referentes aos números racionais, discutidos a partir de demonstrações. A escolha do tema justifica-se também por sua importância, visto que são as demonstrações matemáticas que fundamentam as teorias desta ciência, garantindo sua validade ou não.

- SILVA, G. T. F.; DÍAZ-URDANETA, S. C. **Ensino da Matemática na Educação Especial**: discussões e propostas. Curitiba: Intersaberes, 2021. (Série Pressupostos da Educação Especial).

  Nessa obra, os autores focam no ensino da Matemática na educação especial, principalmente no que se refere à formação do professor, objetivando apresentar alternativas úteis em sala de aula, como estratégias pedagógicas para o ensino de números, álgebra, grandezas e medidas, geometria, probabilidade e estatística na educação especial.

- SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2014. (Perspectivas em Educação Matemática).

  Nesse livro, o autor aborda uma gama de conceitos cruciais no campo da educação matemática crítica, cenários para investigação e matemática em ação.

- SOUZA, F. C. **Números inteiros e suas operações**: uma proposta de estudo para estudantes do 6º ano com o auxílio de tecnologia. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

  Esse trabalho tem como objetivo verificar como os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, que não tiveram contato formal com os números inteiros e suas operações, mobilizam seus conhecimentos prévios para resolver situações que envolvam esse objeto matemático e se eles poderiam se desenvolver de forma autônoma para a sua compreensão.

- VILLAS BOAS, B. M. F.; SOARES, E. R. M. (org.). **Avaliação das aprendizagens, para as aprendizagens e como aprendizagem**: obra pedagógica do professor. Campinas: Papirus, 2022.

  O livro discorre sobre as três funções da avaliação: formativa, diagnóstica e somativa, destacando a formativa, pelo fato de desenvolver-se ao longo do trabalho pedagógico. Esse processo exige a presença do *feedback*, da avaliação informal encorajadora, o envolvimento dos pais/responsáveis, além de recursos avaliativos variados, como o portfólio, a autoavaliação, a avaliação por colegas e outros.

- WING, J. Pensamento computacional. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016.

  Esse artigo, “*Computational Thinking*”, de Jeannette Wing, foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico ***Communications of the ACM***, em março de 2006. Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem conhecer para atuar na sociedade moderna.

Apresentação da coleção

Estrutura da obra

A coleção é composta de quatro livros do estudante e respectivos manuais do professor. O *Manual do Professor* de cada ano reúne o livro do estudante, as Orientações Gerais, comum a cada um dos volumes da coleção, as Orientações específicas de cada volume e orientações do conteúdo, disponibilizadas página a página. Além disso, contém a resposta de todos os exercícios e atividades.

Cada livro do estudante é organizado em 12 capítulos. Cada capítulo enfatiza conteúdos que compõem os objetos de conhecimento descritos na BNCC.

Os capítulos de cada volume são compostos de:

- **Desenvolvimento teórico**

  O desenvolvimento dos conteúdos propostos é acompanhado de diversificação de estratégias. Apresenta-se intercalado com atividades e seções especiais que ampliam e enriquecem o tema estudado.

- **Blocos de exercícios**

  Os exercícios presentes na coleção – distribuídos entre Exercícios propostos, Exercícios complementares e atividades diferenciadas nas seções especiais – possibilitam o trabalho com as Unidades Temáticas e permitem integrações entre elas. Têm o intuito de estimular o raciocínio lógico, a argumentação e a resolução de problemas, além de propor temáticas atuais relevantes à faixa etária.

- **Seções especiais**

Distribuídas ao longo do capítulo, as seções de variados tipos complementam, ampliam e enriquecem o tema tratado e desafiam os estudantes por meio das atividades propostas. Há pelo menos um tipo dessas seções em cada capítulo.

A seguir, apresentamos os principais elementos que compõem os capítulos e descrevemos as seções especiais que aparecem ao longo de cada volume da coleção.

- **Abertura de capítulo**: compreendida por um conjunto de questões, uma imagem e pequeno texto motivadores do tema do capítulo.

- **Exercícios propostos**: aparecem ao longo do desenvolvimento teórico, trabalham aspectos importantes de cada conteúdo de maneira variada. Por exemplo, nos exercícios com indicação **Hora de criar**, os estudantes são convidados a usar criatividade, imaginação, capacidade de argumentação e colaboração trabalhando em duplas ou em grupos.

- **Exercícios complementares**: podem ser trabalhados de diversas maneiras pelo professor, de acordo com suas necessidades didáticas. Podem servir de base para uma discussão em duplas ou em grupos, sintetizar o tema abordado ou ainda ser aproveitados como tarefa extraclasse ou como fonte de exercícios para uma recuperação paralela, entre outras aplicações.
- **Verificando**: ao final de cada capítulo, apresenta um conjunto de testes que podem ser utilizados para autoavaliação ou como uma avaliação formativa relativa aos conteúdos trabalhados no capítulo. As questões apresentadas no tópico **Organizando** têm como objetivo fazer com que os estudantes retomem e reflitam sobre os conceitos estudados.
- Seção **Pense mais um pouco...**: atividades e desafios de aprofundamento dos conteúdos desenvolvidos no capítulo, que solicitam do estudante um pensamento mais elaborado, exigindo a criação de estratégias pessoais de resolução.
- Seção **Para saber mais**: conteúdos e atividades que, fundamentados em contextos diversos, integram a Matemática a outras áreas do saber ou aos diferentes campos dela própria, como a História da Matemática. Geralmente é finalizada por **Agora é com você!**, que traz uma proposta de questões relacionadas ao tema exposto.
- Seção **Trabalhando a informação**: são trabalhados conteúdos de Probabilidade e Estatística, como interpretação e construção de tabelas e gráficos e cálculo de probabilidades.
- Seção **Diversificando**: atividades que relacionam o conteúdo trabalhado no capítulo a outros contextos, como jogos, aplicações e desafios.

Essa estrutura pretende ser organizadora do trabalho docente sem, contudo, tornar-se um entrave para estudantes e professores. Por isso, os capítulos contemplam aspectos fundamentais a serem trabalhados com os estudantes, mas permitem maleabilidade e flexibilidade em sua abordagem, na tentativa de facilitar o trabalho do professor no momento em que ele precisar fazer as adaptações necessárias a cada turma.

Organização geral da obra

No quadro a seguir apresentamos a configuração dos 12 capítulos em cada volume desta coleção:

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 1	Números	Números inteiros	Potências e raízes	Números reais
Capítulo 2	Operações com números naturais	Números racionais	Construções geométricas e lugares geométricos	Operações com números reais
Capítulo 3	Estudando figuras geométricas	Operações com números racionais	Estatística e probabilidade	Grandezas proporcionais
Capítulo 4	Divisibilidade	Ângulos	Cálculo algébrico	Proporcionalidade em Geometria
Capítulo 5	Um pouco de Álgebra	Equações	Polinômios e frações algébricas	Semelhança
Capítulo 6	Um pouco de Geometria plana	Inequações	Produtos notáveis e fatoração	Um pouco mais sobre Estatística
Capítulo 7	Números racionais na forma de fração	Sistemas de equações	Estudo dos triângulos	Equações do 2º grau
Capítulo 8	Operações com números racionais na forma de fração	Simetria e ângulos	A Geometria demonstrativa	Triângulo retângulo
Capítulo 9	Números racionais na forma decimal e operações	Razões, proporções e porcentagem	Estudo dos quadriláteros	Razões trigonométricas nos triângulos retângulos
Capítulo 10	Polígonos e poliedros	Estudo dos polígonos	Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas	Estudo das funções
Capítulo 11	Comprimentos e áreas	Sobre áreas e volumes	Área de regiões poligonais	Circunferência, arcos e relações métricas
Capítulo 12	Outras unidades de medida	Estudo da circunferência e do círculo	Geometria e grandezas	Polígonos regulares e áreas

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

O livro do 7º ano é composto de doze capítulos em que se desenvolvem as cinco Unidades Temáticas propostas pela BNCC: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística, intercaladas e, sempre que possível, integradas, exploradas no corpo do texto explicativo e nas atividades.

A seguir, apresentamos sugestões de cronogramas para trabalhar com esses conteúdos em bimestre, trimestre e semestre com base nas organizações dos capítulos.

			Capítulos	**Conteúdos**	**Habilidades e competências da BNCC**
1º semestre	**1º trimestre**	**1º bimestre**	Capítulo 1 – Números inteiros	• Conceito e emprego do número inteiro em diferentes situações; • Representação de números inteiros na reta numérica; • Módulo e simétrico; • Comparação de números inteiros; • Resolução e elaboração de problemas com números inteiros envolvendo as operações de: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, raiz quadrada; • Interpretação de dados organizados em gráficos e tabelas.	Habilidades: (EF07MA03) (EF07MA04) (EF07MA05) (EF07MA06) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **6**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** e **8**
			Capítulo 2 – Números racionais	• Conceito e emprego do número racional em diferentes situações; • Representação de número racional na reta numérica; • Módulo e oposto; • Comparação de números racionais; • Números primos; • Máximo divisor comum (mdc); • Mínimo múltiplo comum (mmc).	Habilidades: (EF07MA01) (EF07MA05) (EF07MA06) (EF07MA07) (EF07MA08) (EF07MA10) (EF07MA36) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **8**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **4**, **6** e **8**
			Capítulo 3 – Operações com números racionais	• Adição e subtração com números racionais; • Multiplicação e divisão com números racionais; • Potenciação e propriedades; • Sequência recursiva; • Gráfico de colunas duplas.	Habilidades: (EF07MA06) (EF07MA07) (EF07MA11) (EF07MA12) (EF07MA14) (EF07MA15) (EF07MA16) (EF07MA36) Competências gerais: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8**

			Capítulos	Conteúdos	Habilidades e competências da BNCC
1º semestre	1º trimestre	2º bimestre	Capítulo 4 – Ângulos	• Conceito de ângulo; • Medida de ângulos; • Congruência de ângulos; • Operações com medidas de ângulos; • Ângulos formados por duas retas e por uma transversal; • Leitura e interpretação de dados organizados em gráfico de setores.	Habilidades: (EF07MA02) (EF07MA06) (EF07MA07) (EF07MA23) (EF07MA29) (EF07MA37) Competências gerais: **3**, **4**, **5**, **7**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **5**, **6** e **8**
			Capítulo 5 – Equações	• Conceito de variável; • Valor numérico; • Termo algébrico; • Sentença matemática; • Equação, raiz, conjunto universo, solução; • Equação do 1º grau com uma incógnita; • Resolução de problemas envolvendo equações do 1º grau; • Médias e estimativas.	Habilidades: (EF07MA05) (EF07MA06) (EF07MA07) (EF07MA13) (EF07MA15) (EF07MA17) (EF07MA18) (EF07MA35) Competências gerais: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **6** e **8**
	2º trimestre	2º bimestre	Capítulo 6 – Inequações	• Inequação; • Conjunto universo, resolução; • Resolução de problemas; • Gráficos e tabelas.	Habilidades: (EF07MA06) (EF07MA10) (EF07MA13) (EF07MA36) Competências gerais: **2**, **4**, **7**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **6**, **7** e **8**
			Capítulo 7 – Sistemas de equações	• Equação do 1º grau com duas incógnitas; • Plano cartesiano; • Sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas; • Resolução de problemas; • Probabilidade; • Gráfico de linha.	Habilidades: (EF07MA02) (EF07MA10) (EF07MA13) (EF07MA18) (EF07MA34) Competências gerais: **2**, **4**, **6**, **9** e **10** Competências específicas: **3**, **4**, **6**, **7** e **8**
2º semestre			Capítulo 8 – Simetria e ângulos	• Figuras com eixo de simetria; • Simetria em relação a uma reta; • Transformações geométricas; • Transformações geométricas no plano cartesiano.	Habilidades: (EF07MA19) (EF07MA20) (EF07MA21) (EF07MA22) Competências gerais: **3**, **4**, **5**, **9** e **10** Competências específicas: **3**, **5**, **6** e **8**

			Capítulos	Conteúdos	Habilidades e competências da BNCC
2º semestre	3º trimestre	3º bimestre	Capítulo 9 – Razões, proporções e porcentagem	• Razão; • Razão entre grandezas de mesma natureza; • Proporção; • Propriedade fundamental das proporções; • Porcentagem; • Gráfico de setores.	Habilidades: (EF07MA02) (EF07MA05) (EF07MA06) (EF07MA08) (EF07MA09) (EF07MA12) (EF07MA17) (EF07MA36) (EF07MA37) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **5**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6** e **8**
		4º bimestre	Capítulo 10 – Estudo dos polígonos	• Polígonos; • Número de diagonais; • Triângulo, classificação, construção, condição de existência; • Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono; • Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono; • Polígonos regulares; • Congruência; • Rigidez do triângulo.	Habilidades: (EF07MA24) (EF07MA25) (EF07MA26) (EF07MA27) (EF07MA28) (EF07MA34) Competências gerais: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **6** e **8**
			Capítulo 11 – Sobre áreas e volumes	• Conceito de área; • Figuras equivalentes; • Volume; • Metro cúbico; • Volume de um paralelepípedo; • Estimativas.	Habilidades: (EF07MA29) (EF07MA30) (EF07MA31) (EF07MA32) (EF07MA37) Competências gerais: **2**, **3**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **6** e **8**
			Capítulo 12 – Estudo da circunferência e do círculo	• Circunferência e círculo; • Comprimento da circunferência; • Posições relativas (ponto e circunferência; reta e circunferência; duas circunferências); • Triângulo inscrito; • Quadrilátero inscrito; • Arco de circunferência; • Ângulo central; • Ângulo inscrito; • Ângulo com vértice fora da circunferência; • População estatística, pesquisa amostral, pesquisa censitária.	Habilidades: (EF07MA22) (EF07MA29) (EF07MA33) (EF07MA36) Competências gerais: **2**, **4**, **5**, **8**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** e **8**

Considerações iniciais

Cada capítulo aborda objetos de conhecimento, entendidos como conteúdos, conceitos, processos, para desenvolver as habilidades relacionadas a eles. Esses conhecimentos são articulados, retomados e ampliados a fim de proporcionar sua apropriação pelos estudantes, considerando a aprendizagem um processo contínuo e integrado.

Os conteúdos matemáticos são desenvolvidos de modo que as habilidades, as Unidades Temáticas, as competências e outras áreas do conhecimento se articulem e se relacionem e são tratados na perspectiva das aprendizagens dos anos anteriores e posteriores. Assim, no livro do 7º ano do Ensino Fundamental, levamos em conta os objetivos de aprendizagem para o 6º ano, conforme proposto na BNCC, visando preparar os estudantes para se apropriarem dos conhecimentos previstos para o 8º ano.

A seguir, há orientações didáticas sobre cada um dos capítulos e o que se pretende que os estudantes desenvolvam neles.

Capítulo 1 – Números inteiros

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer a necessidade da existência dos números inteiros e as situações que os descrevem.
- Representar números inteiros na reta numérica.
- Identificar números simétricos e reconhecer a igualdade de seus módulos.
- Comparar números inteiros.
- Adicionar, subtrair, multiplicar, dividir números inteiros.
- Calcular a potência de expoente natural e a raiz quadrada de um número inteiro.
- Aplicar as propriedades da adição, multiplicação e potenciação dos números inteiros.
- Calcular o valor de uma expressão numérica.
- Entender o fuso horário.
- Analisar e resolver situações descritas por tabelas.

Ao reconhecer a necessidade da existência dos números inteiros e as situações que os descrevem, os estudantes deverão refletir sobre a Matemática como uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas de diferentes naturezas, conteúdo relacionado à **competência específica 1** e à **competência geral 1**.

A reta numérica é um recurso importante para a compreensão dos números inteiros, pois possibilita relacioná-lo com as medidas de temperatura por meio de termômetros. O trabalho com a simetria, a comparação entre os números e o conceito de módulo fornecerá ferramentas no estudo das operações. Desse modo, contribui-se para o desenvolvimento da **competência específica 2** e das **competências gerais 2** e **4**.

A compreensão e o uso dos números inteiros em diferentes contextos remetem à resolução de problemas envolvendo as diferentes operações, assim como a compreensão de suas propriedades e o cálculo de expressões numéricas. Assim, o trabalho com esses conteúdos estabelece relações com as **competências específicas 1**, **2** e **5** e com a **competência geral 2**.

A proposta apresentada, que relaciona o conceito de números inteiros com a compreensão do conceito de fusos horários, possibilita um trabalho interdisciplinar com o componente curricular de Geografia e o desenvolvimento das **competências específicas 2** e **3**, além das **competências gerais 2** e **4**.

A leitura de informações em tabelas e gráficos possibilita aos estudantes tratar os dados e fazer análises criteriosas, seja em situações de cunho matemático, seja em outras áreas do conhecimento. Isso contribui para o desenvolvimento das **competências específicas 3**, **4** e **6**, além das **competências gerais 2** e **4**.

Na seção *Trabalhando a informação*, exploramos a leitura de tabelas relacionadas ao contexto de lucro e prejuízo, propondo aos estudantes que reflitam sobre os dados apresentados. Por apresentar aos estudantes uma análise e uma reflexão sobre esse conceito pertencente ao mundo do trabalho, contribuímos para o desenvolvimento da **competência geral 6**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

A representação dos números inteiros na reta numérica propicia a integração com a Unidade Temática **Geometria**, ao serem apresentados números simétricos, e consolida procedimentos aplicados no 6º ano no que se refere à comparação, à adição e à subtração entre dois números inteiros.

A ampliação de um conjunto numérico para outro é um momento oportuno para o estudante compreender que a Matemática, diferentemente das ciências experimentais que atingem novos patamares por substituição de modelos, progride cumulativamente incorporando novos conceitos sem refutar os anteriores. Esse fato se dá, aqui, com a ampliação do conjunto dos números naturais para o conjunto dos números inteiros, e será algo recorrente quando houver a ampliação para os demais conjuntos: conjunto dos números racionais, ainda no 7º ano, nos capítulos 2 e 3; dos números reais, no 9º ano (EF09MA04); e dos números complexos (no Ensino Médio).

As operações e suas propriedades estudadas neste capítulo corroboram a característica inclusiva da trajetória do progresso da Matemática, que deve ser enaltecida. A abordagem dada a elas retoma a que foi feita no 6º ano para os números naturais (EF06MA03) e inclui a ideia dos sinais, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA03) e (EF07MA04). Em diferentes momentos, recursos didáticos são usados para levar os estudantes a perceber que problemas com a mesma estrutura podem ser resolvidos por meio de um mesmo procedimento, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA06). Do mesmo modo, o estudo das propriedades das operações possibilita aos estudantes perceber que um mesmo problema pode ser resolvido de modos diferentes, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA05).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas*, que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. O número natural zero não é positivo nem negativo, ele é considerado um número neutro.

2. a) 36 °C

2. b) –3 °C

3. a) Como está acima do nível do mar, tem-se: +6 961 m.

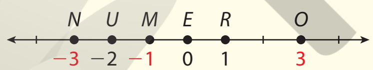
3. b) Como está abaixo do nível do mar, tem-se: –10 924 m.

3. c) Como está abaixo do nível do mar, tem-se: –400 m.

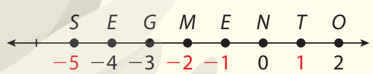
4.

Campeonato Municipal de Futebol			
Times	**Gols pró**	**Gols contra**	**SG**
Perna de Pau F. C.	28	15	28 – 15 = +13
E. C. Canela de Ferro	15	21	15 – 21 = –6
S. C. Fazenda do Toco	20	20	20 – 20 = 0
S. E. Bananeiras	18	19	18 – 19 = –1

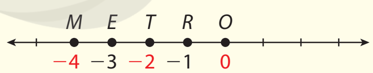
8. a)



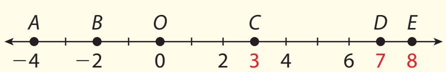
8. b)



8. c)



10. Módulo dos números associados aos pontos:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

10. a) $|A| = 4$

10. b) $|B| = 2$

10. c) $|C| = 3$

10. d) $|O| = 0$

10. e) $|D| = 7$

10. f) $|E| = 8$

12. a) $|-15| = 15$

12. b) $|+100| = 100$

12. c) $|-25| = 25$

12. d) $|-30| = 30$

12. e) $|+90| = 90$

12. f) $|-121| = 121$

12. g) $|0| = 0$

12. h) $|-35| = 35$

12. i) $|+279| = 279$

13. a) $|-9| = 9$ e $|5| = 5$, e como $9 > 5$, temos: $|-9| > |5|$

13. b) $|0| = 0$ e $|-6| = 6$, e como $6 > 0$, temos: $|-6| > |0|$

13. c) $|-8| = 8$ e $|-2| = 2$, e como $8 > 2$, temos: $|-8| > |-2|$

13. d) $|10| = 10$ e $|-4| = 4$, e como $10 > 4$, temos: $|10| > |-4|$

14. a) O oposto de –2 é: $-(-2) = 2$

14. b) O oposto de –64 é: $-(-64) = 64$

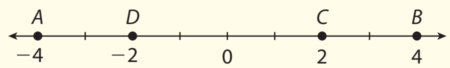
14. c) O oposto de –9 é $-(-9) = 9$, e o oposto dele é: $-(9) = -9$

14. d) O oposto de 15 é $-(15) = -15$, e o oposto dele é: $-(-15) = 15$

14. e) $|-10| = 10$. O oposto de 10 é: $-(10) = -10$

14. f) O oposto de –5 é: $-(-5) = 5$ e $|5| = 5$

15.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

15. a) med $(\overline{AB}) = 4 - (-4) = 4 + 4 = 8$ (8 unidades)

15. b) med $(\overline{AD}) = -2 - (-4) = -2 + 4 = 2$ (2 unidades)

15. c) med $(\overline{CD}) = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$ (4 unidades)

15. d) med $(\overline{BD}) = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$ (6 unidades)

16. a) Como o menor inteiro positivo é o 1, os três menores são: 1, 2 e 3.

16. b) Como o menor inteiro não negativo é o 0, os três menores são: 0, 1 e 2.

16. c) Como o maior inteiro negativo é o –1, os três maiores são: –1, –2 e –3.

16. d) Como o maior inteiro não positivo é o 0, os três maiores são: 0, –1 e –2.

17. a) Como números entre outros dois não incluem os extremos, temos: –1, 0 e 1.

17. b) Nesse caso, incluem-se os extremos. Assim, temos: –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2 e 3.

17. c) Só há um número inteiro entre –3 e –1: –2.

17. d) Nesse caso, deve-se considerar somente os números positivos: 0 e 1.

20. Flávia, pois o número negativo deve ser interpretado como uma dívida. E uma dívida de 2000 reais é maior que uma de 350 reais.

23. Nessa situação, o verbo subir indica uma adição e o verbo descer, uma subtração. Assim:

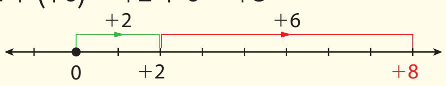
23. a) $0 + 6 + 2 = +8$

23. b) $1 - 3 = -2$

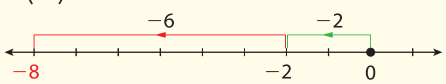
23. c) $3 + 4 - 7 = 0$

23. d) $0 - 3 + 1 = -2$

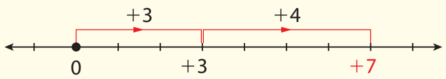
24. a) $+2 + (+6) = +2 + 6 = +8$



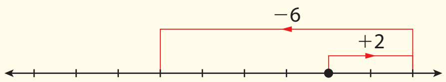
24. b) $-2 + (-6) = -2 - 6 = -8$



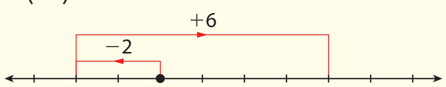
24. c) $+3 + (+4) = +3 + 4 = +7$



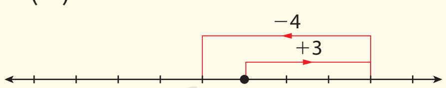
24. d) $+2 + (-6) = +2 - 6 = -4$



24. e) $-2 + (+6) = -2 + 6 = +4$



24. f) $+3 + (-4) = +3 - 4 = -1$



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

25. a) $(+5) + (+20) = +5 + 20 = +25$

25. b) $(+2) + (-12) = +2 - 12 = -10$

25. c) $(-15) + (+9) = -15 + 9 = -6$

25. d) $(-6) + 0 = -6 + 0 = -6$

25. e) $(-8) + (-10) = -8 - 10 = -18$

25. f) $(-9) + (+9) = -9 + 9 = 0$

25. g) $(+15) + (-15) = +15 - 15 = 0$

25. h) $0 + (+20) = 0 + 20 = +20$

26. Quando ocorre a soma de dois números de sinais opostos, o resultado terá o sinal do que tiver maior valor absoluto. Se o resultado é negativo, o maior valor absoluto também é de um número negativo.

27. A soma de dois números opostos ou simétricos é sempre zero.

28. Pontuação de Lucas: $4 \cdot (+3) + 5 \cdot (-2) = (+12) + (-10) = +12 - 10 = +2$; Pontuação de Rafaela: $5 \cdot (+3) + 4 \cdot (-2) = (+15) + (-8) = +15 - 8 = +7$. Assim, Rafaela tem uma diferença de pontos, em relação à pontuação de Lucas, de: $7 - 2 = 5$. Logo, Rafaela fez 5 pontos a mais que Lucas.

31. Na primeira coluna, o número procurado é $+56 + (+18) = 56 + 18 = +74$. Na segunda coluna, o número procurado é $-9 + (-21) = -12$. Na primeira linha, o número é $-17 - (-7) = -10$. Na segunda linha, há infinitas possibilidades. Exemplos: $5 = -4 + 9$ ou $-1 = -10 + 9$.

	+56		–9	
–7	+	**–10**	=	–17
	+18		–21	
+5	=	**–4**	+	+9
	+74		**–12**	

34. a) A ordem das parcelas não altera a soma. Assim: $(+306) + (-185) = 121$

34. b) Podemos associar as parcelas de uma adição de modos diferentes sem alterar a soma. Assim: $(-8) + (+15) + + (-10) = -3$

34. c) Podemos associar as parcelas de uma adição de modos diferentes sem alterar a soma. Assim: $[(+23) + (-9)] + (-4) = 10$

35. a) $(-16) + ■ = 0 \Rightarrow (-16) + (+16) + + ■ = 0 + (+16) \Rightarrow 0 + ■ = 0 + 16 \Rightarrow ■ = +16$

35. b) $(-5) + (+12) + ■ = +12 \Rightarrow -5 + 12 + ■ = +12 \Rightarrow$
$\Rightarrow +7 + ■ = +12 \Rightarrow +7 - 7 + ■ = +12 - 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 + ■ = +12 - 7 \Rightarrow ■ = +5$

35. c) $(-8) + (+5) + ■ = 0 \Rightarrow -8 + 5 + ■ = = 0 \Rightarrow -3 + ■ = 0 \Rightarrow -3 + 3 + ■ = 0 + 3 \Rightarrow ■ = 3$

38. a) $(-3) + (+2) + (+4)$

38. b) $(-3) + (+2) + (+4) = -3 + 2 + 4 = +3$

39. a) $(-15) - (-9) = -15 + 9 = -6$

39. b) $(+12) - (-8) = +12 + 8 = 20$

39. c) $(+14) - (+21) = +14 - 21 = -7$

39. d) $(-18) - (-24) = -18 + 24 = 6$

39. e) $(-48) - (+50) = -48 - 50 = -98$

39. f) $(-106) - (-32) = -106 + 32 = -7$

41. Para saber a idade de alguém, basta subtrair do maior ano o menor. Assim, Arquimedes morreu aos 75 anos, pois $-212 - (-287) = -212 + 287 = 75$.

45. a) $(+3) - (+5) - (-10) = +3 - 5 + 10 = -2 + 10 = 8$

45. b) $(+2) + (-6) - (+5) + (+2) = = +2 - 6 - 5 + 2 = +4 - 11 = -7$

45. c) $(-5) - (-8) + (-7) - (-9) + (-3) = -5 + 8 - 7 + 9 - 3 = = +17 - 15 = 2$

45. d) $(-2) - (-4) - (+7) - (-2) + (-12) = -2 + 4 - 7 + 2 - 12 = = +6 - 21 = -15$

46. a) $-6 + 8 + 6 - 4 + 4 + 1 = -6 + 6 - 4 + 4 + 8 + 1 = = 0 + 0 + 9 = 9$

46. b) $4 - 9 + 2 - 1 + 9 - 2 = 2 - 2 + 9 - 9 + 4 - 1 = = 0 + 0 + 4 - 1 = 3$

46. c) $5 + 6 - 7 + 1 + 7 - 10 = 7 - 7 + 5 + 6 + 1 - 10 = = 0 + 12 - 10 = 2$

46. d) $12 - 6 + 5 - 5 + 6 - 12 = = 12 - 12 + 6 - 6 + 5 - 5 = 0$

47. Como a ordem das parcelas não altera a soma, teremos os seguintes resultados:
$-15 + 9 = -6$
$-15 + (-8) = -15 - 8 = -23$
$-15 + (-2) = -15 - 2 = -17$
$9 + (-8) = 9 - 8 = 1$
$9 + (-2) = 9 - 2 = 7$
$-8 + (-2) = -8 - 2 = -10$

48. a) 13, pois $3 - (-10) = 13$

48. b) 10, pois $-2 - (-12) = 10$

48. c) -15, pois $-9 - 6 = -15$

48. d) -5, pois $-10 - (-5) = -5$

50. a) Os estudantes devem observar que a sequência foi formada ao subtrair 5 unidades de cada termo a partir do primeiro. $17 - 5 = 12$; $12 - 5 = 7$; $7 - 5 = 2$; $2 - 5 = -3$ assim por diante, até $-13 - 5 = -18$.

50. b) Amarelos:
$17 + (-18) = 17 - 18 = -1$
Verdes:
$12 + (-13) = 12 - 13 = -1$
Azuis:
$7 + (-8) = 7 - 8 = -1$
Laranjas:
$2 + (-3) = 2 - 3 = -1$

51. a) Ele ficou com R$ 2 280,00, pois: $5\,000 - 2\,720 = 2\,280$

51. b) Calculando:
$2\,280 - 1\,500 - 850 - 680 = 2\,280 - 3\,030 = -750$.
Ficou com – R$ 750,00, ou devendo R$ 750,00 no cheque especial.

51. c) Ele não ultrapassou o limite do cheque especial, pois usou apenas R$ 750,00, restando ainda R$ 1 250,00 ($2\,000 - 750 = 1\,250$).

51. d) Ele deverá pagar R$ 900,00 ao banco depois de um mês, pois: $750 + 150 = 900$

52. a) Fevereiro, pois foi o mês de maior movimentação (R$ 700 000,00).

52. b) Junho, pois foi o mês de maior movimentação negativa, ou seja, de maior prejuízo (R$ 750 000,00).

52. c) Para saber se ela obteve lucro ou prejuízo, basta adicionar todos os valores. Se o resultado da adição for positivo, significa que houve lucro; caso contrário, houve prejuízo. Calculando:
$100\,000 + 700\,000 + (-400\,000) + (-600\,000) +$
$+ 500\,000 + (-750\,000) = 100\,000 + 700\,000 +$
$+ 500\,000 - 400\,000 - 600\,000 - 750\,000 =$
$= 1\,300\,000 - 1\,750\,000 = 450\,000$
Assim, houve um prejuízo de R$ 450 000,00.

53. Oriente os estudantes na elaboração dos problemas. Caso tenham dúvidas, promova um trabalho criando problemas na lousa com a participação de toda a turma.

56. a) $(-8) \cdot x = (-8) \Rightarrow x = 1$

56. b) $(-4) \cdot y = (+4) \Rightarrow y = -1$

56. c) $(-5) \cdot z = 0 \Rightarrow z = 0$

56. d) $(+9) \cdot t = (+9) \Rightarrow t = 1$

56. e) $(+6) \cdot n = 0 \Rightarrow n = 0$

56. f) $0 \cdot m = 0$; Nesse caso, m pode assumir qualquer número inteiro.

57. $A = (-8) \cdot (-2) = 16$. Nesse caso:
$B = (-10) + (+3) = -10 + 3 = -7$
Como $R = B - A$, temos:
$R = -7 - 16 = -23$

58. a)

Resposta correta	Resposta incorreta	Total de pontos
20	0	$20 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) = 60$
19	1	$19 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 55$
18	2	$18 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 50$
17	3	$17 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) = 45$
16	4	$16 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) = 40$
15	5	$15 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 35$
14	6	$14 \cdot 3 + 6 \cdot (-2) = \mathbf{30}$

58. b)

Resposta correta	Resposta incorreta	Total de pontos
13	7	$13 \cdot 3 + 7 \cdot (-2) = 25$
12	8	$12 \cdot 3 + 8 \cdot (-2) = 20$
11	9	$11 \cdot 3 + 9 \cdot (-2) = 15$
10	10	$10 \cdot 3 + 10 \cdot (-2) = 10$
9	11	$9 \cdot 3 + 11 \cdot (-2) = 5$
8	12	$8 \cdot 3 + 12 \cdot (-2) = \mathbf{0}$

58. c)

Resposta correta	Resposta incorreta	Total de pontos
7	13	$7 \cdot 3 + 13 \cdot (-2) = -5$
6	14	$6 \cdot 3 + 14 \cdot (-2) = -10$
5	15	$5 \cdot 3 + 15 \cdot (-2) = \mathbf{-15}$

58. d) Os estudantes devem perceber que a pontuação obtida é múltiplo de 5, portanto não é possível marcar -4 pontos no jogo.

60. a) Como a ordem dos fatores não altera o produto, as operações têm o mesmo resultado.
$(-80) \cdot (+62) = -4\,960$
$(+62) \cdot (-80) = -4\,960$

60. b) Como podemos associar os fatores de modos diferentes sem alterar o produto, as operações têm o mesmo resultado.
$(-10) \cdot [(-8) \cdot (+15)] =$
$= (-10) \cdot (-120) = 1\,200$
$[(-10) \cdot (-8)] \cdot (+15) =$
$= (+80) \cdot (+15) = 1\,200$

64. Nessa resolução será usado o método de Daniela.

64. a) $(+9) \cdot (-6 + 5) = (+9) \cdot (-1) = -9$

64. b) $(-25) \cdot (-10 - 1) = (-25) \cdot (-11) = 275$

64. c) $(-34) \cdot (+5 + 2) = (-34) \cdot (+7) = -238$

64. d) $(+25) \cdot (-12 + 2) = (+25) \cdot (-10) = -250$

64. e) $(+10) \cdot (-23 + 54) = (+10) \cdot (+31) = 310$

64. f) $0 \cdot (+9 - 1) = 0 \cdot (+8) = 0$

66. a) $x : (-8) = -6 \Rightarrow [x : (-8)] \cdot (-8) = -6 \cdot (-8) \Rightarrow x = 48$

66. b) $y : 9 = -7 \Rightarrow [x : 9] \cdot (9) = -7 \cdot (9) \Rightarrow x = -63$

66. c) $t : (-3) = -24 \Rightarrow [x : (-3)] \cdot (-3) = -24 \cdot (-3) \Rightarrow x = 72$

66. d) $z : (-13) = 12 \Rightarrow [z : (-13)] \cdot (-13) = 12 \cdot (-13) \Rightarrow z = -156$

69. a) $14 - (-10 + 5 + 3) = 14 + 10 - 5 - 3 = 24 - 8 = 16$

69. b) $-15 + [-4 - (-5 + 20)] = -15 + [-4 + 5 - 20] =$
$= -15 - 4 + 5 - 20 = -39 + 5 = -34$

69. c) $20 - \{-10 + [+20 - (-20 + 10)]\} =$
$= 20 - \{-10 + [+20 + 20 - 10]\} =$
$= 20 - \{-10 + [+40 - 10]\} = 20 - \{-10 + [+30]\} =$
$= 20 - \{-10 + 30\} = 20 - \{+20\} = 20 - 20 = 0$

69. d) $-12 + (-6) - [(-8 - 5)] =$
$= -12 - 6 - [-13] = -18 + 13 = -5$

70. a) $(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$
$= [(-1) \cdot (-1)] \cdot [(-1) \cdot (-1)] \cdot (-1) = (+1) \cdot (-1) = -1$

70. b) $-5 + (-3) \cdot (+8) = -5 + (-24) = -5 - 24 = -29$

70. c) $(-6) \cdot (+5) - (-4) \cdot (+3) =$
$= (-30) - (-12) = -30 + 12 = -18$

70. d) $(-5 + 1) \cdot (-8 + 2) = (-4) \cdot (-6) = 24$

70. e) $6 - (-6 + 4) \cdot (-5 + 9) =$
$= 6 - (-2) \cdot (+4) = 6 - (-8) =$
$= 6 + 8 = 14$

70. f) $-3 - 3 \cdot (-3) = -3 + 9 = 6$

72. Resolvendo a expressão de cada um, temos:
Ricardo: $-5 - 2 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-5) + 7 =$
$= -5 + 6 + 10 + 7 = 1 + 17 = 18$
Cristina: $[(-2) \cdot 1 + (-6)] \cdot (-1) =$
$= [-2 - 6] \cdot (-1) = [-8] \cdot (-1) = 8$
João: $(-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-5) + (-3) \cdot (-1) =$
$= -6 + 10 + 3 = -6 + 13 = 7$
Assim, a classificação de cada um foi: Ricardo em 1º lugar, Cristina em 3º e João em 4º.

73. a) $(-4 + 20) : (-8) = (+16) : (-8) = -2$

73. b) $(-6 - 14) : (-6 + 1) = (-20) : (-5) = 4$

73. c) $(-8) \cdot (+3) - (-15) : (+3) =$
$= (-24) - (-5) = -24 + 5 = -19$

73. d) $[-8 + (-4) \cdot (-3)] : (-1 - 1) =$
$= [-8 + 12] : (-2) = [+4] : (-2) = -2$

73. e) $(-6 - 2 + 3) : [-3 \cdot (-2 + 3) + 8] =$
$= (-8 + 3) : [-3 \cdot (1) + 8] =$
$= (-5) : (-3 + 8) = (-5) : (+5) = -1$

74. Resposta possível: Ela pode transformar essa operação na seguinte expressão: $[(-500 \cdot 3) : (-4)] : 5$. Desse modo, deverá digitar:
5 0 0 ± × 3 = ÷ 4 ± = ÷ 5 =

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

76. a) $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3) = 9$

76. b) $(+5)^3 = (+5) \cdot (+5) \cdot (+5) = 125$

76. c) $(+7)^2 = (+7) \cdot (+7) = 49$

76. d) $(-11)^2 = (-11) \cdot (-11) = 121$

76. e) $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125$

76. f) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

76. g) $(-1)^6 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

76. h) $(+6)^1 = 6$

76. i) $(+329)^0 = 1$

77. a) $(-9)^0 = (+31)^0$, pois ambas potências resultam em 1.

77. b) $(-9)^1 < (-1)^6$, pois: $(-9)^1 = -9$ e $(-1)^6 = 1$

77. c) $(-2)^8 > (+3)^3$, pois: $(-2)^8 = 256$ e $(+3)^3 = 27$

77. d) $(+2)^5 > (-2)^5$, pois: $(+2)^5 = 32$ e $(-2)^5 = -32$

78. $(-3)^3 = -27$ e $(+3)^3 = 27$. Os números inteiros divisíveis por 10 nesse intervalo são: –20, –10, 0, 10 e 20.

79. Não é menor, pois efetuando as potências: $(-15)^2 = 225$ e $(-3)^2 = 9$. Como $225 > 9$, então: $(-15)^2 > (-3)^2$

80. Negativo, pois, se a base for positiva, a potência será sempre positiva, independentemente do valor do expoente.

83. a) $(+4)^2 \cdot (+4)^3 = (+4)^{(2+3)} = 4^5$

83. b) $(-10)^3 \cdot (-10)^4 \cdot (-10)^2 =$
$= (-10)^{(3+4+2)} = (-10)^9$

83. c) $(-12) \cdot (-12) \cdot (-12)^2 = (-12)^{(1+1+2)} = (-12)^4$

83. d) $(-6)^8 : (-6)^2 = (-6)^{(8-2)} = (-6)^6$

83. e) $(+9)^3 : (+9) = (+9)^{(3-1)} = 9^2$

83. f) $(-21)^4 : (-21)^3 = (-21)^{(4-3)} = (-21)^1 = -21$

84. a) $(+2^5)^3 = 2^{(5 \cdot 3)} = 2^{15}$

84. b) $[(-2)^3]^4 = (-2)^{(3 \cdot 4)} = (-2)^{12}$

84. c) $[(-7)^2]^5 = (-7)^{(2 \cdot 5)} = (-7)^{10}$

84. d) $[(-3) \cdot (-5)]^3 = (-3)^3 \cdot (-5)^3$

84. e) $[(+2) \cdot (-7)]^2 = (+2)^2 \cdot (-7)^2$

84. f) $[(-2) \cdot (+11) \cdot (-3)]^2 = (-2)^2 \cdot (+11)^2 \cdot (-3)^2$

85. a) $(-2)^3 : (-8) = (-8) : (-8) = 1$

85. b) $(-5)^2 : (-4 - 1) = (+25) : (-5) = -5$

85. c) $(-5 + 1)^2 + (+4)^2 - (-1)^5 =$
$= (-4)^2 + (+16) - (-1) =$
$= 16 + 16 + 1 = 33$

85. d) $(-2)^3 \cdot (-3)^2 - (-5)^2 \cdot (-1)^4 =$
$= (-8) \cdot (+9) - (+25) \cdot (+1) =$
$= -72 - 25 = -97$

85. e) $(5 - 10)^2 - (-3)^2 + (12)^0 =$
$= (-5)^2 - (9) + 1 = 25 - 9 + 1 = 17$

85. f) $(-3)^3 \cdot (-2)^2 + (-10)^1 \cdot (-1)^5 =$
$= (-27) \cdot (4) + (-10) \cdot (-1) =$
$= -108 + 10 = -98$

86. a) $(2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^4) : (2^7 \cdot 2^3) =$
$= (2^{(5+6+4)}) : (2^{(7+3)}) = (2^{15}) : (2^{10}) =$
$= 2^{(15-10)} = 2^5$

86. b) $(3^4 : 3^3) \cdot (3^5 : 3^3) = (3^{(4-3)}) \cdot (3^{(5-3)}) =$
$= (3) \cdot (3^2) = 3^{(1+2)} = 3^3$

86. c) $[(-5)^2 \cdot (-5)^4] : [(-5) \cdot (-5)^3] =$
$= (-5)^{(2+4)} : (-5)^{(1+3)} =$
$= (-5)^6 : (-5)^4 = (-5)^{(6-4)} = (-5)^2$

86. d) $[(-7)^2]^4 \cdot [(-7)^5 : (-7)^3] = (-7)^{(2 \cdot 4)} \cdot (-7)^{(5-3)} =$
$= (-7)^8 \cdot (-7)^2 = (-7)^{(8+2)} = (-7)^{10}$

86. e) $(2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5) : (2^{(-2+5)}) = (2^{(2+3+5)}) : (2^3) =$
$= (2^{10}) : (2^3) = 2^{(10-3)} = 2^7$

86. f) $(-1 - 1 - 1)^2 \cdot (-3)^{(1+2)} = (-3)^2 \cdot (-3)^3 = (-3)^{(2+3)} = (-3)^5$

87. a) $\sqrt{1} = 1$

87. b) $\sqrt{49} = \sqrt{7^2} = 7$

87. c) $-\left(\sqrt{100}\right) = -\left(\sqrt{10^2}\right) = -10$

87. d) $-\left(\sqrt{16}\right) = -\left(\sqrt{4^2}\right) = -4$

87. e) $\sqrt{196} = \sqrt{14^2} = 14$

87. f) $-\left(\sqrt{256}\right) = -\left(\sqrt{16^2}\right) = -16$

88. Não há raiz quadrada de números negativos, logo os números que possuem raízes quadradas inteiras são: 0 ($\sqrt{0} = 0$), 1 ($\sqrt{1} = 1$), 4 ($\sqrt{4} = 2$) e 9 ($\sqrt{9} = 3$).

89. Os números que possuem raízes quadradas inteiras são os dos itens (b), (d) e (e), pois: $\sqrt{18} \simeq 4{,}24264$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{-36}$ não é um número real, $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{144} = 12$; $\sqrt{-225}$ não é um número real.

90. $x^2 = 900 \Rightarrow x = \pm\sqrt{900} \Rightarrow x = \pm 30 \Rightarrow x = +30$ ou $x = -30$

91. Como $-\sqrt{49} = -7$ e $-\sqrt{36} = -6$, é possível escrever o esquema como

	–7	
a	–2	b
	–6	

Então $(-7) \cdot (-2) \cdot (-6) = a \cdot (-2) \cdot b \Rightarrow 42 = a \cdot b$
Considerando que a e b tenham o mesmo sinal, pois o resultado é positivo, e lembrando que $a < b$, são respostas possíveis: $a = -7$ e $b = -6$; $a = -14$ e $b = -3$; $a = -21$ e $b = -2$; $a = -42$ e $b = -1$; $a = 6$ e $b = 7$; $a = 3$ e $b = 14$; $a = 2$ e $b = 21$; $a = 1$ e $b = 42$.

Trabalhando a informação

Página 21

1. a) O lucro em fevereiro foi de R$ 25 687,00 (15 235 + 10 452 = 25 687) e em março de R$ 15 489,00 (7 230 + 8 259 = 15 489).

1. b) O quiosque 1 foi o que obteve o maior lucro.
Quiosque 1: R$ 43 453,00
(22 450 + 15 235 + 7 230 – 1 462 = **43 453**)
Quiosque 2: R$ 33 169,00
(15 632 + 10 452 + 8 259 – 1 174 = **33 169**)

1. c) R$ 76 622,00 (43 453 + 33 169 = 76 622)

1. d) Resposta pessoal. Dependendo da região em que moram, os estudantes podem indicar que as temperaturas são mais baixas no mês de abril. Outros podem falar do período de férias, ou ainda sobre o turismo local.

2. a) Quebec, que registrou –13 °C; Campo Grande, que registrou 29 °C.

2. b) –11 °C – (–13 °C) = 2 °C

2. c) Para cada localidade a variação na medida de temperatura foi:
Cairo: 16 °C – 9 °C = 7 °C
Pequim: 1 °C – (–6 °C) = 7 °C
Campo Grande: 29 °C – 23 °C = 6 °C
Quebec: 2 °C
Portanto, as maiores variações ocorreram em Pequim e Cairo.

2. d) Resposta pessoal. Exemplo de resposta:
Temperaturas do dia 26/05/2022.

3. a) Lucro da loja 1: R$ 60 305,00 (–5 800 + 29 135 – 4 230 + + 41 200 = 70 335 – 10 030 = 60 305).
Lucro da loja 2: R$ 16 725,00 (–8 450 + 2 225 – 3 500 + + 26 450 = 28 675 – 11 950 = 16 725).
O melhor desempenho foi obtido pela loja 1.

3. b) O pior desempenho das duas lojas aconteceu em setembro. O prejuízo foi de R$ 14 250,00 (5 800 + 8 450 = = 14 250).

3. c) Loja 1, a maior queda foi de outubro para novembro:
29 135 – (–4 230) = 33 365
Loja 2, a maior queda foi de outubro para novembro:
2 225 – (–3 500) = 5 725
Portanto, a maior queda foi de R$ 33 365,00, na loja 1.

Pense mais um pouco

Página 26

$10 - a = 6 \Rightarrow a = 4$ $\quad$ $-5 - c = 3 \Rightarrow c = -8$
$11 - b = 8 \Rightarrow b = 3$ $\quad$ $9 - d = -8 \Rightarrow d = 17$

8 – 24 = **–16**
3 – (–21) = 3 + 21 = **24** | **8**
–8 – 13 = **–21** | b = **3** | 6 – (–5) = 6 + 5 = **11**
17 – 4 = **13** | c = **–8** | 4 – 9 = **–5** | **6**
4 | d = **17** | **9** | a = **4** | **10**

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Página 29

1. Resposta possível

–4	1	0
3	–1	–5
–2	–3	2

Testando as somas:
1ª linha: –4 + 1 + 0 = –4 + 1 = –3
2ª linha: 3 + (–1) + (–5) = 3 – 6 = –3
3ª linha: –2 + (–3) + 2 = –3
1ª coluna: –4 + 3 + (–2) = –6 + 3 = –3
2ª coluna: 3 + (–1) + (–5) = 3 – 6 = –3
3ª coluna: –2 + (–3) + 2 = –3
Diagonal principal: –4 + (–1) + 2 = –5 + 2 = –3
Diagonal secundária: –2 – 1 + 0 = –3

2. Exemplo com o quadrado do exercício anterior, adicionando 6:

–4 + 6	1 + 6	0 + 6		2	7	6
3 + 6	–1 + 6	–5 + 6	=	9	5	1
–2 + 6	–3 + 6	2 + 6		4	3	8

Testando as somas do quadrado formado:
1ª linha: 2 + 7 + 6 = 15
2ª linha: 9 + 5 + 1 = 15
3ª linha: 4 + 3 + 8 = 15
1ª coluna: 2 + 9 + 4 = 15
2ª coluna: 7 + 5 + 3 = 15
3ª coluna: 6 + 1 + 8 = 15
Diagonal principal: 2 + 5 + 8 = 15
Diagonal secundária: 4 + 5 + 6 = 15

Exercícios Complementares

1. a) Como Luiz andou para o sentido oposto de João, sua posição será representada por um número negativo, que é –18.

1. b) Devemos somar os valores absolutos das posições de João e Luiz. Assim, eles estão distantes um do outro 38 m, pois 20 m + 18 m = 38 m

2. a) –75 é menor que 42, assim: –75 < 42

2. b) –300 é menor que –10, assim: –300 < –10

2. c) 2 é maior que –20, assim: 2 > –20

2. d) –5 é maior que –30, assim: –5 > –30

3. Colocando em ordem crescente os números apresentados, temos: –21 < –15 < –10 < –5 < 8 < 9 < 12

3. a) Números maiores que –10: –5, 8, 9 e 12.

3. b) Números maiores que –15 e menores que 9: –10, –5 e 8.

3. c) Números de módulo maior que 10: –21, –15 e 12, pois |–21| = 21, |–15| = 15 e |12| = 12.

3. d) Números de módulo menor que 12: –10, –5, 8 e 9, pois |–10| = 10, |–5| = 5, |8| = 8 e |9| = 9

4. a) Como – 228 < –184 , ele subiu.

4. b) 44 m, pois: –184 – (–228) = –184 + 228 = 44

4. c) –228 + 44 = –184

5. As alternativas **a** e **b** têm como resultado um número negativo:

5. a) (–10) – (+6) = –10 – 6 = –16

5. b) (–10) – (–6) = –10 + 6 = –4

5. c) (+10) – (+6) = 10 – 6 = 4

5. d) (+10) – (–6) = 10 + 6 = 16

7. a) –5 200 + 12 560

7. b) O lucro foi de R$ 7 360,00, pois: –5 200 + 12 560 = 7 360

8.

	$P = 17 + 80 = 97$		
	$D = 41 + 39 = 80$	$E = -25 + 41 = +17$	
$A = 50 - 11 = 39$	$B = -9 + 50 = 41$	$C = -15 - 9 = -25$	
–11	+50	–9	–15

9. a) 5 + (2 – 6) = 5 + (–4) = 5 – 4 = 1

9. b) –15 – (–23 + 12) = –15 – (–11) = –15 + 11 = –4

9. c) (9 – 15) + (12 – 20) = –6 + (–8) = –6 – 8 = –14

9. d) (–9 + 5) – (–6 – 8 – 4) = –4 – (–18) = –4 + 18 = 14

9. e) –(–2) + (–3) – {–2 + [–1 – (–2 + 1)] + 5} =
= 2 – 3 – {–2 + [–1 – (–1)] + 5} =
= –1 – {–2 + [–1 + 1] + 5} =
= –1 – {–2 + 0 + 5} = –1 – {+3} = –1 – 3 = –4

9. f) 20 – {–10 – [–8 + (5 – 12)] – 20} =
= 20 – {–10 – [–8 + (–7)] – 20} =
= 20 – {–10 – [–15] – 20} =
= 20 – {–10 + 15 – 20} = 20 – {–15} =
= 20 + 15 = 35

10. a) 15 + (–8) · (+3) = 15 + (–24) = 15 – 24 = –9

10. b) (–30) : (–5) – (–4) = 6 + 4 = 10

10. c) 21 – (–14) : (+2) = 21 – (–7) = 21 + 7 = 28

10. d) (–4) · (–6) – (–6) = 24 + 6 = 30

10. e) 3 · (–8) – 4 · (–5) = –24 + 20 = –4

10. f) (–5) · (+4) + (–15) : (–5) = –20 + 3 = –17

10. g) (–6) · (+3) + (–5) · (–4) = –18 + 20 = 2

11. O produto com quatro fatores negativos é positivo, pois o produto de dois negativos é positivo e podemos agrupar esses fatores dois a dois.

12. a) $(-6)^2 - 12 = 36 - 12 = 24$

12. b) $(-5) \cdot (+6) - (-3)^2 = -30 - (+9) = -30 - 9 = -39$

12. c) $(-8)^2 : (-16) + 5 = +64 : (-16) + 5 = -4 + 5 = 1$

12. d) $(-6)^0 + (-3)^2 + (-2)^3 \cdot (-1) = 1 + 9 + 8 = 18$

12. e) $3^2 - 4^2 - (-2) \cdot (-4) = 9 - 16 - 8 = -15$

12. f) $(-7)^2 - (-7) \cdot (-6) = 49 - (+42) = 49 - 42 = 7$

13. a) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ e $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

13. b) $\sqrt{225} - \sqrt{81} = 15 - 9 = 6$ e $\sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$

13. c) $\sqrt{121} \cdot \sqrt{9} = 11 \cdot 3 = 33$ e $\sqrt{121 \cdot 9} = \sqrt{1089} = 33$

13. d) $\sqrt{324} \div \sqrt{81} = 18 \div 9 = 2$ e $\sqrt{324 \div 81} = \sqrt{4} = 2$

14. I) $(-2+4)^2 - 3 \cdot \left(\sqrt{16} + \sqrt{4}\right) = (2)^2 - 3 \cdot (4+2) = 4 - 3 \cdot (6) =$
$= 4 - 18 = -14$

II) $-\sqrt{64} + \sqrt{3^2 + 4^2} = -8 + \sqrt{9+16} = -8 + \sqrt{25} =$
$= -8 + 5 = -3$

III) $\left(\sqrt{25} - \sqrt{49}\right)^2 \cdot (-3+5) = (5-7)^2 \cdot 2 = (-2)^2 \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$

IV) $\sqrt{10^2 - 8 - 8 \cdot 7} - 2 \cdot 14 = \sqrt{100 - 8 - 56} - 28 = \sqrt{36} -$
$- 28 = 6 - 28 = -22$

Para a soma igual a –36, a opção é I e IV, pois $-14 + (-22) = -36$. Para a diferença igual a –11, temos I e II, ou II e III, pois: $-14 - (-3) = -14 + 3 = -11$ e $-3 - 8 = -11$

Verificando

1. Quantidade de livros, de anos e medida de capacidade são sempre representadas por números positivos, ao contrário do saldo do banco. Logo, a alternativa **c** é a correta.
2. $-(-3) = +3$ é positivo e –2 é negativo. Logo, a alternativa **b** é a correta.
3. Como está à esquerda de 3, o número é menor que 3. Logo, para identificar o número, basta subtrair 10 de 3: **3 – 10** = –7. Assim a alternativa **b** é a correta.
4. O mercado está no ponto –7 e a casa de José no ponto 7, portanto são dois pontos simétricos. Alternativa **d**.
5. Como $-6 < -1 < 0 < 2$, a menor temperatura é –6 °C. Alternativa **a**.
6. $3 - [(1 + 3 \cdot 7) : (-2)] \cdot (-1) =$
$= 3 - [(1 + 21) : (-2)] \cdot (-1) =$
$= 3 - [22 : (-2)] \cdot (-1) =$
$= 3 - [-11] \cdot (-1) = 3 - (+11) = 3 - 11 = -8$
Alternativa **a**.
7. O oposto de –15 pode ser representado por –(–15), assim a expressão pode ser indicada por:
$(-15 \cdot 120) : [-(-15)]$
Resolvendo essa expressão, obtemos:
$(-15 \cdot 120) : [-(-15)] = -1\,800 : [15] = -120$
Alternativa **d**.
8. Analisando as alternativas:

8. a) Verdadeira: $\sqrt{16} = 4$ e $(-2)^2 = +4$

8. b) Falsa: $-2^3 = -8$, que é diferente de $\sqrt{16}$

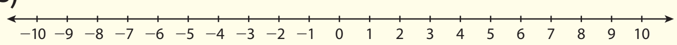
8. c) Falsa: $-9^2 = -81$, que é diferente de $\sqrt{81} = 9$

8. d) Falsa: $(-3)^2 = 9$, que é diferente de $\sqrt{9} = 3$

Organizando

a) Resposta pessoal. Exemplo de resposta: temperatura negativa, pontuação negativa em um jogo, saldo bancário negativo.

b)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

c) Módulo de um número é a distância desse número à origem.

d) Resposta pessoal.

e) Em uma adição de dois números inteiros, a ordem das parcelas não altera a soma e o número zero é o elemento neutro.
Em uma adição de três ou mais números inteiros, podemos associá-los de modos diferentes sem alterar a soma.

f) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem que, quando a operação envolve dois números com o mesmo sinal, o resultado é positivo. Caso contrário, o resultado é negativo.

g) As propriedades são:
Em uma multiplicação de dois números inteiros, a ordem dos fatores não altera o produto.
Em uma multiplicação de três ou mais números inteiros, podemos associá-los de modos diferentes sem alterar o resultado.
O número 1 é o elemento neutro da multiplicação de números inteiros.
Na multiplicação de um número inteiro por uma adição algébrica, podemos multiplicar esse inteiro pelos termos da adição algébrica e depois adicionar os resultados.

h) Se um número negativo for elevado a uma potência par, o resultado é positivo; caso a potência seja ímpar, o resultado é negativo.

Capítulo 2 – Números racionais

Objetivos do capítulo e justificativas

- Ampliar o conceito de número construindo o conjunto Q dos números racionais.
- Reconhecer situações nas quais são usados os números racionais.
- Compreender as diversas representações dos números racionais: na forma de fração e na forma decimal.
- Representar números racionais na reta numérica.
- Comparar números racionais.
- Compreender e aplicar os conceitos de mdc e mmc para resolver problemas.
- Interpretar e construir um gráfico de colunas com variação percentual.

Compreender o conceito de números racionais, nas suas diferentes representações, a partir de suas aplicações torna-se uma importante ferramenta para os estudantes no estudo da Matemática. No caso dos números racionais, compreendê-los como uma ampliação a partir dos números inteiros é essencial, visto que nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental ainda não havia compreensão da representação fracionária e decimal de números negativos que, agora, podem ser incluídos na nova classificação.

Quando os estudantes compreendem que um mesmo número pode ser escrito na forma decimal ou de fração, há um leque de possibilidades se abrindo, inclusive para os processos operatórios, permitindo construções de estratégias de cálculos de multiplicação, divisão ou mesmo nas manipulações algébricas.

Além disso, o uso da reta numérica como recurso de estudo e de cálculo permite a verificação de propriedades relacionadas aos números racionais e suas propriedades. Desse modo, ao desenvolver esses conceitos, contribuímos para o trabalho com as **competências específicas 1**, **2** e **3** e das **competências gerais 1** e **2**.

Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum são conceitos que precisam ser experienciados pelos estudantes para ampliar o leque de recursos possíveis para a resolução de problemas numéricos. Além disso, o trabalho com o conceito de mmc (mínimo múltiplo comum) auxilia nas operações envolvendo números racionais na forma de fração. O estudo desses conceitos está relacionado ao trabalho com a habilidade (EF07MA01).

Na seção *Trabalhando a informação*, a leitura de informações em gráficos de colunas de maneira coerente possibilita aos estudantes realizar análises criteriosas, seja em situações de cunho matemático, seja em outras áreas do conhecimento. A proposta apresentada contém informações sobre a vacinação de crianças solicitando aos estudantes que façam uma pesquisa sobre a vacinação entre os colegas de turma, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA36), das **competências específicas 4**, **6** e **8** e das **competências gerais 2**, **4** e **8**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes que exercitem diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.

Neste capítulo, da Unidade Temática **Números**, com a inclusão da ideia de sinais que indicam a relatividade e a simetria em relação ao zero, são aprofundados os conhecimentos sobre os números racionais estudados no 6º ano (EF06MA08). Ao trabalhar com números racionais exploramos suas diferentes representações, na forma decimal e na forma de fração, e a associação de números desse conjunto numérico a pontos da reta numérica, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA10).

Ao trabalhar com a comparação e a ordenação de números racionais, aprofundamos o estudo apresentado no 6º ano introduzindo os racionais negativos. Utilizando a reta numérica como suporte para esse trabalho, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA08).

Dando continuidade e ampliando o que foi abordado no 6º ano sobre divisibilidade (EF06MA05), os conceitos de mdc e de mmc são vistos em situações contextualizadas e de fácil assimilação, fornecendo, assim, subsídios para o estudo das operações com números racionais trabalhadas no próximo capítulo e propiciando o desenvolvimento das habilidades (EF07MA01) e (EF07MA05).

Uma conexão entre as Unidades Temáticas **Números** e **Geometria** apresenta-se na seção *Para saber mais*, na atividade da divisão de um segmento em partes iguais. Nesta seção, apresentamos um fluxograma para a divisão de um segmento em 7 partes iguais e, a partir de uma análise, os estudantes devem generalizar os passos para *n* partes iguais, o que contribui para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA06) e (EF07MA07).

Outra conexão entre Unidades Temáticas no capítulo é feita com **Probabilidade e estatística**, na seção *Trabalhando a informação*, na qual há atividade que trata de gráfico de colunas com variação percentual. Nesta seção é proposta uma atividade de pesquisa com a temática vacinação, que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA36).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas*, que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

3.

	Número racional inteiro	Número racional não inteiro
Forma de fração	$-\frac{18}{2}$	$\frac{4}{5}$ $-\frac{412}{5}$
Forma decimal	351,0 –2,0	3,51 4,111 4,111... –0,5

4. a) números inteiros: –8,0 e 4,0;

4. b) números racionais na forma de fração: $-\frac{3}{7}$ e $\frac{1}{6}$;

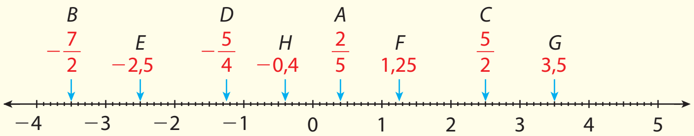
4. c) números racionais na forma decimal: 2,3; –1,6; –8,0; 4,0; 2,555…; e 0,222…

4. d) dízimas periódicas: 2,555… e 0,222…

5. Para cada um dos **itens a**, **b** e **c** há infinitas respostas. Já para o **item d** não é possível dar um exemplo, pois todo número natural é também número racional.

6. A relação entre as unidades de medida de comprimento é: 1 m = 10 dm = 100 cm = 1 000 mm.
Assim, temos: 12,3 m = 123 dm = 1 230 cm = 12 300 mm.

8.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Os pares de pontos simétricos são os que estão à mesma distância do 0: *A* e *H*; *E* e *C*; *F* e *D*; e *B* e *G*.

10. a) $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$

10. b) $|-14,3| = 14,3$

10. c) Como $|-8| = 8$, então T tem módulo valendo 8. As abscissas possíveis são −8 (pois $|-8| = 8$) ou +8 (pois $|+8| = 8$).

10. d) Os possíveis valores de *a* são $-\frac{2}{3}$ $\left(\text{pois } \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}\right)$ e $\frac{2}{3}$ $\left(\text{pois } \left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3}\right)$.

10. e) A distância do ponto de abscissa *x* até a origem é 1,5.

11. a) O oposto de um número *x* é −*x*, então o oposto de $\frac{7}{9}$ é $-\frac{7}{9}$.

11. b) $-\left(-\frac{7}{9}\right) = \frac{7}{9}$

11. c) −5,4238

11. d) O oposto de −6,72 é 6,72 e o oposto de 6,72 é −6,72.

11. e) |−1,555...| = 1,555...
O oposto de 1,555... é −1,555...

11. f) Calculando $\left|-\frac{6}{5}\right| = \frac{6}{5}$. O oposto de $\frac{6}{5}$ é $-\frac{6}{5}$ e o oposto de $-\frac{6}{5}$ é $\frac{6}{5}$.

13. Para comparar dois números de sinais diferentes, lembrar que um número positivo é sempre maior do que um negativo. Ao comparar dois números negativos, o de maior módulo é sempre menor.

13. a) Como $-5,4 < -3,2$, o maior número é −3,2.

13. b) Como $-7,12 < -7,10$, o maior número é −7,10.

13. c) Como $-10,6 < 1,2$, o maior número é 1,2.

13. d) Como $-4,5204 < -4,52$, o maior número é −4,52.

14. A mãe, pois ela comeu $\frac{1}{6}$ do bolo e $\frac{1}{6} > \frac{1}{8} > \frac{1}{12}$.

15. a) $|-0,6| > \left|-\frac{1}{5}\right|$

15. b) $\left|-\frac{5}{6}\right| = \left|-0,8\overline{3}\right| = \left|0,8\overline{3}\right|$

15. c) $\left|-\frac{1}{2}\right| < \left|-\frac{5}{3}\right|$

15. d) $\left|\frac{5}{4}\right| < |-3,2|$

15. e) $\left|-\frac{3}{8}\right| > |0|$

15. f) $|-0,6| > |-0,6|$

16. a) $\frac{9}{2} = 4,5$ e $\frac{5}{3} = 1,\overline{6}$
Organizando os números em ordem crescente: 0,65; $\frac{5}{3}$; 2,1; $\frac{9}{2}$

16. b) $-\frac{11}{2} = -5,5$ e $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$
Em ordem crescente: $-\frac{11}{2}$; −0,122...; 0,1; $\frac{1}{6}$

16. c) $\frac{5}{8} = 0,625$; $\frac{7}{3} = 2,\overline{3}$; $\left|-\frac{9}{4}\right| = 2,25$ e $|-2,34| = 2,34$
Então, em ordem crescente: $\frac{5}{8}$; $\left|-\frac{9}{4}\right|$; $\frac{7}{3}$; $|-2,34|$.

17. a) Carolina estava mais perto da superfície, pois $|-13,5| = 13,5$ e $|-11,6| = 11,6$, então: $|-13,5| > |-11,6|$

17. b) $-11,6 = -\frac{116}{10}$ e $-13,5 = -\frac{135}{10}$

18. Para saber qual é o maior tamanho dos pedaços de ripa que o marceneiro precisa fazer, devemos calcular o maior divisor comum (mdc) de 120 e 180:
divisores de 120: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 40, 30, **60**, 120.
divisores de 180: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, **60**, 90, 180.
O marceneiro deve cortar ripas com medida de comprimento de 60 cm.

19. a) Os divisores de 60 são: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60.

19. b) Os divisores de 72 são: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 e 72.

19. c) Os divisores comuns são: 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

19. d) O maior divisor comum é 12.

20. a) divisores de 8: 1, **2**, 4 e 8
divisores de 10: 1, **2**, 5 e 10
mdc(8, 10) = 2

20. b) divisores de 40: 1, 2, 4, 5, 8, **10**, 20 e 40
divisores de 50: 1, 2, 5, **10**, 25 e 50
mdc(40, 50) = 10

20. c) divisores de 9: 1, **3** e 9
divisores de 12: 1, 2, **3**, 4, 6 e 12
divisores de 15: 1, **3**, 5 e 15
mdc(9, 12, 15) = 3

20. d) divisores de 16: 1, 2, 4, **8**, 16
divisores de 56: 1, 2, 4, 7, **8**, 14, 28, 56
divisores de 80: 1, 2, 4, 5, **8**, 10, 16, 20, 40, 80
mdc(16, 56, 80) = 8

21. a) Para saber a quantidade de estudantes que cada grupo terá, deve-se calcular o mdc de 28 e 21.

Como mdc(28, 21) = 7, temos:
divisores de 28: 1, 2, 4, **7**, 14, 28
divisores de 21: 1, 3, **7**, 21
mdc(28, 21) = 7
Cada grupo deve ter 7 estudantes.

21. b) 3 grupos de meninas, pois: $\frac{21}{7} = 3$

21. c) 4 grupos de meninos, pois: $\frac{28}{7} = 4$

22. Neste exercício, os estudantes devem elaborar um problema com divisores. Oriente-os na elaboração.

25. A medida de comprimento do retalho será o maior divisor comum entre as metragens, de 156 cm e 234 cm.

156, 234	**2**
78, 117	2
39, 117	**3**
13, 39	3
13, 13	**13**
1, 1	

mdc(156, 234) = 2 · 3 · 13 = 78

Assim, cada peça terá 78 cm de medida de comprimento.

27. Alexandre é o irmão mais velho e a sua idade *i* é menor do que 25 e múltiplo de 7. Além disso, *i*, 10 e 12 são primos entre si, ou seja, têm como máximo divisor comum o número 1.
Determinando mdc (10, 12) e os múltiplos de 7 menores que 25:
divisores de 10: 1, 2, 5 e 10.
divisores de 12: 1, 2, 3, 4, 6 e 12.
mdc(10, 12) = 2
múltiplos de 7 menores que 25: 0, 7, 14, 21
Como Alexandre é o mais velho, não tem 7 anos. Como a idade dele não pode ser divisível por 2, não é 14.
Logo, a idade de Alexandre é 21 anos.

29. Para saber o intervalo de anos que leva para as eleições coincidirem, deve-se calcular o mínimo múltiplo comum de 4 e 8:

4, 8	2
2, 4	2
1, 2	2
1, 1	

mmc(4, 8) = 2 · 2 · 2 = 8. Isso significa que as eleições para presidente e senadores coincidem de 8 em 8 anos. Sabendo que em 2022 as eleições coincidem, as próximas quatro eleições coincidentes serão: 2022 + 8 = 2030; 2030 + 8 = 2038; 2038 + 8 = 2046; 2046 + 8 = 2054.

30. a) Os múltiplos de 6 são:
6 · 0 = 0; 6 · 1 = 6; 6 · 2 = 12; 6 · 3 = 18;
6 · 4 = 24; 6 · 5 = 30; 6 · 6 = 36; 6 · 7 = 42...

30. b) Os múltiplos de 9 são:
9 · 0 = 0; 9 · 1 = 9; 9 · 2 = 18; 9 · 3 =
= 27; 9 · 4 = 36; 9 · 5 = 45...

30. c) Os múltiplos comuns de 6 e 9 são 0, 18, 36...

30. d) O menor desses múltiplos comuns a 6 e a 9, diferente de 0, é 18.

31. Os múltiplos de 3 e 8 entre 40 e 60 são:
múltiplos de 3: 42, 45, 48, 51, 54 e 57
múltiplos de 8: 40, 48 e 56
O múltiplo comum é 48, que corresponde à idade do dono da cantina.

32. a) Encontrando mmc(3, 5):
I) *M*(3) = 3, 6, 9, 12, **15**, 18, ...;
II) *M*(5) = 5, 10, **15**, 20, 25, ...;
Assim, o mmc(3, 5) = 15.
Isso significa que 1 a cada 15 pessoas usava ao mesmo tempo alguma peça de roupa branca e óculos. Ou seja, 2 pessoas a cada 30. Assim, pelo menos duas pessoas estavam vestidas com alguma peça de roupa branca e usando óculos.

32. b) Encontrando mmc(3, 4):
I) *M*(3) = 3, 6, 9, **12**, 15, 18, ...;
II) *M*(4) = 4, 8, **12**, 16, 20, ...;
Assim, o mmc(3, 4) = 12.
Isso significa que 1 a cada 12 pessoas usava alguma peça de roupa branca e estava com um saquinho de pipoca. Ou seja, 2 a cada 24 e 3 a cada 36. Assim, pelo menos duas pessoas estavam vestidas com alguma peça de roupa branca e com um saquinho de pipoca.

32. c) Encontrando mmc(4, 5):
I) *M*(4) = 4, 8, 12, 16, **20**, 24, ...;
II) *M*(5) = 5, 10, 15, **20**, 25, 30, ...;
Então, mmc(4, 5) = 20.
Isso significa que 1 a cada 20 pessoas estava com um saquinho de pipoca e usando óculos, ou 2 a cada 40. Assim, pelo menos uma pessoa estava com um saquinho de pipoca e usando óculos.

32. d) Como
M(3) = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, **60**, 63, 66, ...;
M(4) = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56, **60**, 64, 68, ...; e
M(5) = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, **60**, 65, 70, ...
O mmc(3, 4, 5) = 60. Então, 1 a cada 60 pessoas tem todas essas características. De 33 pessoas da fila, provavelmente nenhuma terá as 3 características.

35. a) mmc(25, 30) = 2 · 5 · 5 · 3 = 150, pois:

25, 30	2
25, 15	5
5, 3	5
1, 3	3
1, 1	

35. b) mmc(22, 99) $= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 198$, pois:

22, 99	2
11, 99	3
11, 33	3
11, 11	11
1, 1	

35. c) mmc(36, 48) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 144$, pois:

36, 48	2
18, 24	2
9, 12	2
9, 6	2
9, 3	3
3, 1	3
1, 1	

35. d) mmc(150, 60, 75) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 300$, pois:

150, 60, 75	2
75, 30, 75	2
75, 15, 75	3
25, 5, 25	5
5, 1, 5	5
1, 1, 1	

36. Como nas contagens das duas irmãs não sobrou laranja, a quantidade total de laranjas é um número múltiplo de 6 e de 8. Calculando mmc(6, 8):

6, 8	2
3, 4	2
3, 2	2
3, 1	3
1, 1	

mmc(6, 8) $= 2^3 \cdot 3 = 24$

Assim, a quantidade de laranjas precisa ser múltipla de 24. A quantidade também precisa ser maior do que 90 e menor do que 100. Considerando os múltiplos de 24: 0, 24, 48, 72, <u>96</u>, 120, ...

Logo, 96 é o único valor que satisfaz todas as condições.

37. a) mmc(40, 60) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 120$

40, 60	2
20, 30	2
10, 15	2
5, 15	5
1, 3	3
1, 1	

37. b) mmc(45, 120) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 360$

45, 120	2
45, 60	2
45, 30	2
45, 15	3
15, 5	3
5, 5	5
1, 1	

37. c) mmc(72, 45, 54) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1080$

72, 45, 54	2
36, 45, 27	2
18, 45, 27	2
9, 45, 27	3
3, 15, 9	3
1, 5, 3	3
1, 5, 1	5
1, 1, 1	

37. d) mmc(15, 20, 25) $= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 300$

15, 20, 25	2
15, 10, 25	2
15, 5, 25	5
3, 1, 5	5
3, 1, 1	3
1, 1, 1	

38. Nessas condições, em um horário que seja comum aos três destinos. Por isso, vamos determinar o mmc(3, 6, 8).

3, 6, 8	2
3, 3, 4	2
3, 3, 2	2
3, 3, 1	3
1, 1, 1	

Como mmc(3, 6, 8) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$, concluímos que após 24 horas a coincidência voltará a ocorrer.

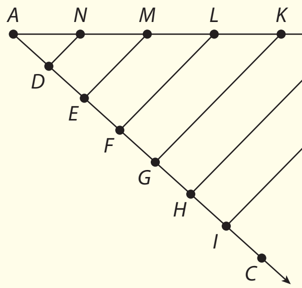
39. A cada 12 metros há um pé de laranja na frente de um pé de limão, pois mmc(4, 6) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

4, 6	2
2, 3	2
1, 3	3
1, 1	

<u>Para saber mais</u>

Página 49

a) Para dividir o segmento $\overline{AB}$ em 6 partes iguais, deve-se traçar uma semirreta $\overrightarrow{AC}$ e encontrar nela 6 segmentos congruentes e consecutivos a partir de A ($\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HI}$). A partir desses pontos, traçar $\overline{BI}$ e outras retas paralelas a ela passando por cada ponto D, E, F, G e H. Essas retas paralelas encontram o segmento $\overline{AB}$ nos pontos N, M, L, K e J, de forma que esses pontos dividem o segmento em 6 partes iguais.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

b) O procedimento é semelhante, independentemente da quantidade em que se deseja dividir o segmento original. Por isso, basta substituir "7" por "n" que o fluxograma continuaria funcionando.

Trabalhando a informação

Página 54

1. **c)** A porcentagem imunizada contra poliomielite em 2015 era de 98,3% e em 2020 era de 76%. A variação foi de –22,3%, pois:
76% – 98,3% = –22,3%

1. **d)** Tríplice viral D1: –16,6% (pois 79,5% – 96,1% = = –16,6%);
Meningite: –19,9% (pois 78,3% – 98,2% = –19,9%).

Exercícios Complementares

5. **a)** $\left|-\dfrac{1}{5}\right| = \dfrac{1}{5}$

5. **b)** Se $|m| = 0{,}8$, seus possíveis valores são –0,8 e 0,8, pois: $|-0{,}8| = |0{,}8| = 0{,}8$

6. **a)** $|-2{,}5| = 2{,}5$

6. **b)** $3{,}426 > 3{,}4181$

6. **c)** $-11{,}3 < -2{,}51$

6. **d)** $-\dfrac{3}{8} > -\dfrac{1}{2}$

6. **e)** $0{,}12 < \dfrac{1}{5}$

6. **f)** $|-2{,}1| > |0{,}3|$

7. **a)** O inverso de $-\dfrac{2}{5}$ é $-\dfrac{5}{2}$. O seu oposto é $\dfrac{5}{2}$.

7. **b)** $\left|-\dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{5}{3}$ e o seu inverso é $\dfrac{3}{5}$.

7. **c)** $|-2{,}3| = 2{,}3 = \dfrac{23}{10}$. O oposto dessa fração é $-\dfrac{23}{10}$ e o inverso dessa última é $-\dfrac{10}{23}$.

8. Dois números com mesmo sinal, quando multiplicados ou divididos, resultam em um valor positivo (maior do que zero), enquanto dois números com sinais opostos, quando efetuadas essas operações, resultam em um valor negativo (menor do que zero). Analisando cada caso, utilizando as regras para resolver desigualdades:

I) $\dfrac{a}{5} > 0$, logo $a > 0$

II) $\dfrac{-b}{7a} > 0$ e $a > 0$. Logo, $b < 0$.

III) Como $a > 0$ e $b < 0$, então $a \cdot b < 0$. Pelo enunciado, $\dfrac{11}{abc} > 0$, então 11 e abc são maiores que 0. Como $ab < 0$, c deve ser menor que zero para que $abc > 0$.

IV) Como $\dfrac{-18}{abcd} > 0$, então –18 e $abcd$ têm o mesmo sinal, negativo. Como $abcd < 0$ e $abc > 0$, então $d < 0$.

9. Como $-\dfrac{13}{6} = -2{,}1\overline{6}$ e $-\dfrac{6}{4} = -1{,}5$, então:
$-\dfrac{13}{6} < -2 < -\dfrac{6}{4}$
Alternativa **c**.

10. **a)** Fazendo a decomposição conjunta dos fatores:

28, 42	2
14, 21	2
7, 21	7
1, 3	3
1, 1	

Então: mdc(28, 42) = 2 · 7 = 14 e mmc(28, 42) = = 2 · 2 · 7 · 3 = 4 · 21 = 84
mdc(28,42) · mmc(28, 42) = 14 · 84 = 1 176 e 28 · 42 = = 1 176, portanto são produtos iguais.

10. **b)** Fazendo a decomposição conjunta dos fatores:

63, 36	2
63, 18	2
63, 9	3
21, 3	3
7, 1	7
1, 1	

Dessa forma, mdc(63, 36) = 3 · 3 = 9 e mmc(63, 36) = = 2 · 2 · 3 · 3 · 7 = 4 · 9 · 7 = 252
mdc (63, 36) · mmc(63, 36) = 9 · 252 = = 2 268 e 63 · 36 = 2 268, são produtos iguais.

10. **c)** Fazendo a decomposição conjunta dos fatores:

21, 40	2
21, 20	2
21, 10	2
21, 5	5
21, 1	3
7, 1	7
1, 1	

Então mdc (21, 40) = 1 e mmc(21, 40) = = 2 · 2 · 2 · 5 · 3 · 7 = 840
mdc (21, 40) · mmc(21, 40) = 1 · 840 = 840 e 21 · 40 = 840; são produtos iguais.

10. **d)** Espera-se que os estudantes percebam que os produtos são iguais. Por exemplo, escolhendo dois números primos a e b:

a, b	a
1, b	b
1, 1	

Então $a \cdot b = ab$ e mdc(a, b) = 1; mmc(a, b) = $a \cdot b = ab$
mdc(a, b) · mmc(a, b) = 1 · ab = ab, os produtos continuam iguais.

10. **e)** Usando a relação testada nos itens anteriores: mdc(a, b) · mmc(a, b) = $a \cdot b$, portanto basta dividir ($a \cdot b$) por mmc(a, b) para obter mdc(a, b).

11. A quantidade de balas em cada pacote será o mdc dos valores:

336, 252	2
168, 126	2
84, 63	2
42, 63	2
21, 63	3
7, 21	3
7, 7	7
1, 1	

Então, mdc(336, 252) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$.

Portanto, são 84 balas por pacote. Então, a quantidade de pacotes será 7, pois: $(336 + 252) : 84 = 7$

12. Contando a partir do dia de encontro, os dias em que Joana vai ao cinema são os múltiplos de 18 e os dias em que Antônia vai são múltiplos de 24.

Portanto, elas se encontrarão novamente em 72 dias.

Pois mmc(18, 24) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

18, 24	2
9, 12	2
9, 6	2
9, 3	3
3, 1	3
1, 1	

Verificando

1. Dois números com mesmo sinal, quando multiplicados ou divididos, resultam em um valor positivo (maior do que zero), enquanto dois números com sinais opostos, quando efetuadas essas operações, resultam em um valor negativo (menor do que zero). Como $\frac{a}{b} = a : b$, se $a < 0$ e $b > 0$, então $a : b < 0$. Alternativa **b**.

2. Foram pagos 4 ingressos, então cada um deles custou R$ 15,70, pois $62{,}8 : 4 = 15{,}70$. Alternativa **c**.

3. O número –2,8 foi representado à esquerda do tracinho correspondente ao número –3. Alternativa **b**.

4. O oposto de 0,15 é –0,15, que pode ser escrito como:

$$-0{,}15 = -\frac{15}{100} = -\frac{3}{20}$$

Alternativa **b**.

5. Alternativa **d**. Analisando cada alternativa:

5. a) Falsa: $\frac{5}{8} > -\frac{1}{2}$

5. b) Falsa: $\frac{15}{7} > -\frac{11}{7}$

5. c) Falsa: pois $\frac{3}{5} = 0{,}4$ e $\frac{3}{2} = 1{,}5$, então: $\frac{3}{5} < \frac{3}{2}$

5. d) Verdadeira: $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $\frac{1}{4} = 0{,}25$, então $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$.

6. Como $-9{,}4 > -10{,}2 > -12{,}5 > -13{,}9$, então Camila estava mais perto da superfície. Alternativa **c**.

7. A quantidade de dias procurada é equivalente ao menor múltiplo comum entre os três valores.

12, 20, 18	2
6, 10, 9	2
3, 5, 9	3
1, 5, 3	3
1, 5, 1	5
1, 1, 1	

mmc(12, 20, 18) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$. Alternativa **c**.

8. Decompondo o número 924:

924	2
462	2
231	3
77	7
11	11
1	

Alternativa **d**.

9. Para encontrar o mmc desses números, devemos considerar os fatores de maior expoente:

$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Alternativa **c**.

10. A quantidade procurada é o mdc de 450 e 270:

450, 270	2
225, 135	3
75, 45	3
25, 15	3
25, 5	5
5, 1	5
1, 1	

Como mdc(450, 270) $= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$. Alternativa **b**.

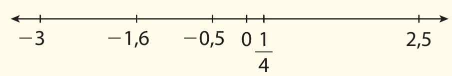
11. Calculando:

mdc(450, 270) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$. Alternativa **d**.

45, 15, 60	2
45, 15, 30	2
45, 15, 15	3
15, 5, 5	3
5, 5, 5	5
1, 1, 1	

Organizando

b)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo 3 – Operações com números racionais

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer a necessidade da existência dos números racionais e as situações que os descrevem.

- Adicionar, subtrair, multiplicar, dividir, com números racionais na forma decimal e na de fração.
- Calcular a potência de números racionais com expoente natural.
- Calcular o valor numérico de expressões com números racionais.
- Empregar as propriedades da adição, da multiplicação e da potenciação de números racionais.
- Resolver e elaborar problemas de situações do cotidiano que envolvam números racionais.
- Tomar ciência do Código de Defesa do Consumidor e agir criticamente embasado na defesa de seus direitos como cidadão.
- Efetuar cálculos sem e com o uso da calculadora.
- Reconhecer fluxograma como forma de representar passos usados na resolução de problemas.
- Reconhecer uma sequência recursiva e uma sequência não recursiva, numeral e figural.
- Interpretar e construir um gráfico de colunas duplas.

Explorando as ideias relacionadas ao conceito de número, conseguimos compreender não só a necessidade de existirem os números racionais, mas também a importância de sua aplicação efetiva na resolução de problemas envolvendo as diferentes operações. A criação dos números racionais na história da Matemática está relacionada com aplicações em situações cotidianas e na própria Matemática. Desse modo, ao desenvolver junto aos estudantes essa compreensão e as diferentes aplicações, contribuímos para o trabalho com as **competências específicas 2** e **6** e as **competências gerais 1** e **2**.

O trabalho com as propriedades das operações contribui para que os estudantes desenvolvam raciocínio lógico e estratégias de resolução de problemas e favorece o desenvolvimento da **competência específica 2** e da **competência geral 2**.

A aplicação do trabalho com números racionais em diferentes contextos está ligada à capacidade de resolver problemas envolvendo esses números. Quanto mais diversas forem as oportunidades de implementação e estudo dos números racionais em contextos variados, melhor se dará a compreensão por parte dos estudantes. Além disso, é na resolução de problemas que eles conseguem colocar em prática a compreensão das ideias e propriedades que envolvem os números racionais e as operações entre eles. Neste capítulo são apresentadas diversas situações que contribuem para o estudo e a aplicação dos números racionais na resolução de problemas que exploram diferentes linguagens e representações gráficas, além do uso de tecnologias como a calculadora, o que contribui para o desenvolvimento das **competências gerais 4** e **5** e da **competência específica 5**.

Na página de *Abertura* do capítulo, apresentamos aos estudantes um direito garantido pelo Código de Defesa do Consumidor, o que os leva a refletir sobre seus direitos garantidos por lei. Desse modo, contribuímos para o desenvolvimento da **competência geral 6** e da **competência específica 7**.

Na seção *Para saber mais*, apresentamos um estudo de sequências recursivas e não recursivas. Ao tomar contato com diferentes tipos de sequência, os estudantes conseguem elaborar leituras sobre diferentes situações e construir argumentos que permitem uma melhor análise quando a generalização é necessária. Nesta seção exploramos a relação da Matemática com a literatura, contribuindo para o trabalho com a **competência específica 3** e a **competência geral 3**.

Na seção *Trabalhando a informação*, exploramos a leitura de tabelas e a construção de gráficos de colunas duplas com o objetivo de desenvolver habilidades que possibilitam aos estudantes realizar análises criteriosas, seja em situações de cunho matemático, seja em outras áreas do conhecimento. Ainda nesta seção os estudantes são convidados a realizar uma pesquisa e, depois, a avaliar os dados obtidos com outros colegas. Desse modo, favorecemos o desenvolvimento das **competências específicas 4** e **8**.

Em momentos distintos, como o do exercício 4 da seção *Exercícios Complementares*, apresentamos situações em que os estudantes possam refletir, com base em fatos, sobre situações envolvendo a consciência socioambiental, o que contribui para o desenvolvimento da **competência geral 7**.

O trabalho com as **competências gerais 9** e **10** e a **competência específica 8** é favorecido com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.

A retomada, na Unidade Temática **Números**, das operações entre os números racionais amplia e dá continuidade ao que foi abordado no 6º ano (EF06MA11). É apresentada em situações contextualizadas e é consequência da inclusão da ideia da relatividade e da simetria em relação ao zero oriunda do conjunto dos números inteiros. Desse modo, contribui-se para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA11) e (EF07MA12).

O cálculo mental aliado à busca de padrões geométricos e numéricos é abordado de maneira interdisciplinar na seção *Para* *saber mais*, a partir da observação do padrão usado na construção de um soneto e do conceito de recursão, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA14). Ao utilizar simbologia algébrica e expressões equivalentes, favorecemos o trabalho com as habilidades (EF07MA15) e (EF07MA16).

Articulando as Unidades Temáticas **Números** e **Probabilidade e estatística**, são discutidas e propostas atividades de construção de gráfico de colunas duplas na seção *Trabalhando a informação*, que amplia o estudo realizado no 6º ano (EF06MA32). Ao propor aos estudantes a realização de uma pesquisa, com organização dos dados em gráficos, contribui-se para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA36).

Ao longo de todo o capítulo são apresentadas situações que contribuem para que os estudantes percebam que problemas com mesma estrutura são resolvidos utilizando o mesmo procedimento, conteúdo relacionado com a habilidade (EF07MA06). E, contribuindo com o desenvolvimento da habilidade (EF07MA07), é apresentado um fluxograma envolvendo uma situação de caráter prático.

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas*, que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1\. a) $\dfrac{-8}{10} - \dfrac{5}{10} = -\dfrac{13}{10}$

1\. b) $-\dfrac{20}{12} + \dfrac{9}{12} = \dfrac{-20+9}{12} = -\dfrac{11}{12}$

1\. c) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{25}{100} = \dfrac{75}{100} - \dfrac{25}{100} =$

$= \dfrac{75 - 25}{100} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$

1\. d) $-\dfrac{7}{15} + \dfrac{15}{15} = \dfrac{-7+15}{15} = \dfrac{8}{15}$

2\. a) $-0{,}25 - 0{,}75 = -1{,}0$

2\. b) $112{,}4 - 38{,}16 = 74{,}24$

2\. c) $-0{,}6 + 1{,}5 = 0{,}9$

2\. d) $\dfrac{12+1}{4} - \dfrac{2}{4} = \dfrac{12+1-2}{4} =$

$= \dfrac{11}{4} = 2{,}75$

3\. $A = -1{,}1 + 3{,}6 \Rightarrow A = 2{,}5$
$B = 3{,}6 - 4{,}1 \Rightarrow B = -0{,}5$
$C = -4{,}1 + 2 \Rightarrow C = -2{,}1$
$D = A + B \Rightarrow D = 2{,}5 + (-0{,}5) \Rightarrow D = 2$
$E = B + C \Rightarrow E = -0{,}5 + (-2{,}1) \Rightarrow E = -2{,}6$
$F = D + E \Rightarrow F = 2 + (-2{,}6) \Rightarrow F = -0{,}6$

4\. Para calcular quantos metros o submarino desceu ou subiu, devemos subtrair o valor final do valor inicial:
$-72{,}5 - (-95{,}4) = -72{,}5 + 95{,}4 = 22{,}9$.
Como o valor inicial é maior do que o valor final, o submarino desceu 22,9 metros.

6\. a) Déficit representa um prejuízo, isso pode ser indicado por um número negativo. Assim, o ano é 2014 e o déficit é de 9,9 bilhões de dólares, representado matematicamente por "–9,9 bilhões de dólares".

6\. b) Superávit representa um ganho, isso pode ser indicado por um número positivo. Assim, o ano é 2017 e o superávit é de 56,0 bilhões de dólares.

6\. c) 158,8 bilhões + 50,4 bilhões =
= 209,2 bilhões de dólares

6\. d) Não é possível afirmar nada sobre o valor exportado, pois os dados só permitem a comparação entre o saldo de cada ano.

7\. Saldo inicial: –365,40; saldo final: –65,40.
Como $-365{,}4 < -65{,}4$, Regina fez um depósito, pois o saldo dela aumentou (ficou menos negativo). Esse depósito foi de R$ 300,00, pois: $-65{,}4 - (-365{,}4) = 300$

8\. $-3{,}1 + (2{,}4 - 3{,}8) - (1{,}6 - 2) =$
$= -3{,}1 + (-1{,}4) - (-0{,}4) =$
$= -3{,}1 - 1{,}4 + 0{,}4 = -4{,}1$
O inteiro mais próximo é –4.

9\. Operando com os números em forma decimal:
$-4{,}5 + [-1 - (-0{,}625 + 0{,}25)] =$
$= -4{,}5 + [-1 - (-0{,}375)] =$
$= -4{,}5 + [-1 + 0{,}375] =$
$= -4{,}5 - 0{,}625 = -5{,}125$

10\. Simplificando a expressão, obtemos:

$\dfrac{7}{3} - \left[2 - \left(\dfrac{1}{3} - 1\right)\right] = \dfrac{7}{3} - \left[2 - \left(-\dfrac{2}{3}\right)\right] =$

$= \dfrac{7}{3} - \left[2 + \dfrac{2}{3}\right] = \dfrac{7}{3} - \dfrac{8}{3} = -\dfrac{1}{3} = -0{,}333...$

Então, o valor está entre –1 e 0.

11\. a) $\dfrac{1}{8} + \left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{4} =$

$= \dfrac{1}{8} - \dfrac{2}{8} = \dfrac{1-2}{8} =$

$= -\dfrac{1}{8} = -0{,}125$

11\. b) $\left(\dfrac{1}{8} - 1\right) : 4$

11\. • Resposta pessoal. Uma possível resposta é utilizar as teclas de memória $\boxed{MRC}$ e $\boxed{M-}$.
$\boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{4}\ \boxed{=}\ \boxed{M-}\ \boxed{AC}\ \boxed{1}\ \boxed{\div}\ \boxed{8}\ \boxed{=}\ \boxed{M+}\ \boxed{MRC}$

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

14\. a) $\dfrac{-3 \cdot (+14)}{5} = \dfrac{-42}{5} = -\dfrac{42}{5}$

14\. b) – 108

14\. c) 0,002

14\. d) $\dfrac{0{,}5 \cdot (-8)}{7} = \dfrac{-4}{7} = -\dfrac{4}{7}$

14\. e) $\dfrac{-2{,}3 \cdot (-5)}{2} = \dfrac{11{,}5}{2} =$

$= \dfrac{115}{10} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{23}{4}$

15. $A = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} = \frac{4}{12} - \frac{9}{12} =$

$= \frac{4-9}{12} = -\frac{5}{12}$

$B = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{4}{6} + \frac{3}{6} =$

$= \frac{-4+3}{6} = -\frac{1}{6}$

$A \cdot B = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{72}$

16. $A = \left(-\frac{15}{18} + \frac{5}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{15}{36} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{24}$

17. a) $0{,}5 \cdot 0{,}7 = 0{,}35$

17. b) $\frac{1}{2} - \frac{7}{8} + \frac{5}{32} = \frac{16}{32} - \frac{28}{32} +$

$+ \frac{5}{32} = -\frac{7}{32}$

17. c) $\left(\frac{9}{4} + \frac{14}{4}\right) + \left[-\frac{30}{16} - \frac{7}{2}\right] =$

$= \frac{23}{4} + \left[-\frac{30}{16} - \frac{56}{16}\right] =$

$= \frac{92}{16} - \frac{86}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

19. a) A sobra da compra pode ser calculada por *total* – *gasto*, ou seja, $540 - \frac{2}{3} \cdot 540$.

19. b) Resolvendo a expressão:

$540 - \frac{2}{3} \cdot 540 = 540 - \frac{1.080}{3} = 540 - 360 = 180$

Logo, R$ 180,00.

20. Robô A: 0,54 *m* por passo; distância do ponto inicial será: 6,48 m ($0{,}54 \cdot 12 = 6{,}48$)

Robô B: 0,62 *m* por passo; distância do ponto inicial será: 6,2 m ($0{,}62 \cdot 10 = 6{,}2$)

Então, a distância entre eles é 12,68 m, pois: $6{,}48 + 6{,}20 = 12{,}68$

21. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante procure uma situação em que haja um desconto ou uma perda de 10% do valor inicial, totalizando 120,30. A resposta esperada deve ser igual a 108,27.

24. a) tamanho do veado $= \frac{\textit{salto}}{\textit{medida do tamanho}} =$

$= \frac{9}{4{,}5}\ \text{m} = 2\ \text{m}$

24. b) tamanho do adulto =

$= \frac{\textit{salto}}{\textit{medida do salto}} = \frac{7{,}6}{4{,}5}\text{m} \simeq 1{,}69\ \text{m}$

25. a) Alface: R$ 1,00, pois $\frac{2 \cdot 2{,}50}{5} = 1$; chicória: R$ 0,69, pois $\frac{1 \cdot 2{,}76}{4} = 0{,}69$; tomate-cereja: R$ 2,43, pois $\frac{1 \cdot 7{,}29}{3} = 2{,}43$; queijo esférico: R$ 6,09, pois $\frac{1 \cdot 66{,}99}{11} = 6{,}09$; queijo branco: R$ 1,80, pois $\frac{0{,}5 \cdot 21{,}60}{6} = 1{,}8$.

25. b) $1 + 0{,}69 + 2{,}43 + 1{,}80 + 6{,}09 = 12{,}01$

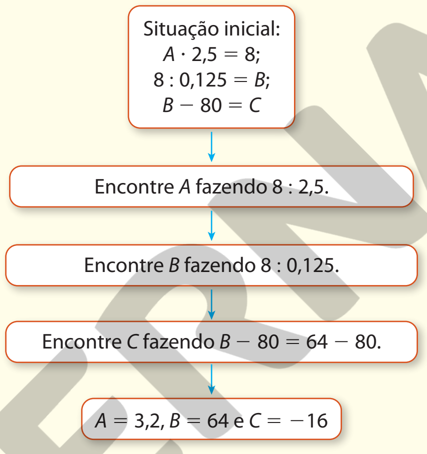
Logo, o custo de cada prato é R$ 12,01.

26. a) I) $A \cdot 2{,}5 = 9{,}5 \Rightarrow A = \frac{9{,}5}{2{,}5} = 3{,}8$

II) $9{,}5 : 0{,}125 = B \Rightarrow B = 9{,}5 : 0{,}125 = 76$

III) $76 - 80 = C \Rightarrow C = 76 - 80 = -4$

26. b)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

26. c) Resposta pessoal, dependerá do fluxograma criado pelo estudante.

27. a) Precisa de 8 litros de gasolina $\left(\frac{100}{12{,}5} = 8\right)$ e de 10 litros de etanol $\left(\frac{100}{10} = 10\right)$.

27. b) Gasto caso escolha gasolina: R$ 52,77, pois:
$6{,}596 \cdot 8 = 52{,}768$

Gasto caso escolha etanol: R$ 50,51, pois:
$5{,}051 \cdot 10 = 50{,}51$

O gasto seria menor com o etanol.

27. c) Como ela abasteceu 40 litros e gastou R$ 260,44, basta dividir este valor pelo preço de cada um dos combustíveis para verificar o preço que ela pagou, ou seja, $\frac{260{,}44}{40} = 6{,}511$, que é o preço da gasolina. Ela não fez a opção pelo combustível mais econômico, pois não abasteceu com etanol.

28. a) 1

28. b) $\frac{2}{7}$

28. c) $0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

28. d) $(-2{,}1) \cdot (-2{,}1) = 4{,}41$

28. e) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{25}$

28. f) $\left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{3^3}{5^3} = -\frac{27}{125}$

28. g) $(-0{,}4) \cdot (-0{,}4) \cdot (-0{,}4) = -(0{,}4^3) = -0{,}064$

28. h) $3{,}2 \cdot 3{,}2 = 10{,}24$

29. a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{4+2} = \left(-\frac{2}{3}\right)^6$

29. b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3+4+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$

29. c) $(0{,}5)^{2+1+1} = (0{,}5)^4$

29. d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

29. e) $(2{,}1)^{7-6} = 2{,}1^1 = 2{,}1$

29. f) $(-3{,}4)^{4-1} = (-3{,}4)^3$

29. g) $(0{,}4)^{3 \cdot 2} = (0{,}4)^6$

29. h) $\left(\frac{5}{7}\right)^{2 \cdot 2} = \left(\frac{5}{7}\right)^4$

30. a) $(-0{,}2)^{x+5} = (-0{,}2)^{12} \Rightarrow x + 5 = 12 \Rightarrow x = 7$

30. b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{6-x} = \left(\frac{2}{5}\right)^1 \Rightarrow 6 - x = 1 \Rightarrow x = 5$

30. c) $(-4)^{(x \cdot 4)} = (-4)^8 \Rightarrow x \cdot 4 = 8 \Rightarrow x = 2$

30. d) $x^7 = (-3)^7 \Rightarrow x = -3$

31. a) – 0 · 2 × = = = = → –0,00032

31. b) 2 ÷ 5 = × = = = = = → 0,004096

31. c) 0 · 9 × = = = = = → 0,531441

31. d) 0 · 1 5 × = = → 0,003375

31. e) 3 ÷ 4 = × = = = = = = → 0,1334838867

31. f) 0 · 8 6 × = = → 0,636056

Pense mais um pouco

Página 67

1. Os números possíveis são: 0,25; 0,52; 2,05; 2,50; 5,02; 5,20; 20,5; 25,0; 50,2; 52,0. Então, a diferença procurada é $0{,}25 - 52 = -51{,}75$.

2. Como a medida da massa total do *iceberg* é igual à medida da massa de dentro da água mais a medida da massa de fora da água, então a medida da massa de dentro da água é igual à medida da massa total menos a medida da massa fora da água.
Medida da massa dentro da água =
$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{10}{10} - \frac{1}{10} = \frac{10-1}{10} = \frac{9}{10}$

3. Suponha que o pote tenha x mL;
Gabriela tomou: $\frac{1}{5} \cdot x = \frac{x}{5}$
Sobraram: $x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}$
Eduardo tomou:
$\frac{1}{4} \cdot \frac{4x}{5} = \frac{1 \cdot \cancel{4} \cdot x}{\cancel{4} \cdot 5} = \frac{x}{5}$
Sobraram: $\frac{4x}{5} - \frac{x}{5} = \frac{3x}{5}$
Mauro tomou: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3x}{5} = \frac{3x}{10}$
Sobraram: $\frac{3x}{5} - \frac{3x}{10} = \frac{6x}{10} - \frac{3x}{10} = \frac{3x}{10}$
Isso equivale a 300 mL.
Então:
$\frac{3x}{10} = 300 \Rightarrow \cancel{10} \cdot \frac{3x}{\cancel{10}} = 300 \cdot 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = 3\,000 \Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{3\,000}{3} \Rightarrow x = 1\,000$
O pote, inicialmente, tinha 1 000 mL; o problema foi resolvido identificando a quantidade desconhecida como incógnita x e, depois, desenvolvendo as condições do problema com essa quantidade desconhecida nas expressões. A informação de que sobram 300 mL possibilita determinar o valor de x, pois é possível também escrever a sobra como $\frac{3}{10}x$, o que permite criar a igualdade: $\frac{3x}{10} = 300$

Página 74

- $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot A = \frac{8}{15} \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \left(-\frac{8}{15}\right) : \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow A = \left(-\frac{\cancel{8}^{\,2}}{\cancel{15}_{\,3}}\right) \cdot \left(\frac{\cancel{25}^{\,5}}{\cancel{4}}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow A = -\frac{10}{3}$

- $Q = \frac{1}{5} : \frac{3}{2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$

- $M - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{10} \Rightarrow M = \frac{3}{10} - \frac{1}{2} =$
$= \frac{3}{10} - \frac{5}{10} = \frac{3-5}{10} = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}$

- $Q + \frac{3}{10} = G \Rightarrow G = \frac{2}{15} + \frac{3}{10} =$
$= \frac{4}{30} + \frac{9}{30} = \frac{4+9}{30} = \frac{13}{30}$

- $R = -\frac{10}{15} : \frac{13}{30} = -\frac{20}{13}$

Para saber mais

a) Seguindo o padrão observado, temos:
123 456 789 · 36 = 4 444 444 404
123 456 789 · 45 = 5 555 555 505
123 456 789 · 54 = 6 666 666 606
123 456 789 · 63 = 7 777 777 707
123 456 789 · 72 = 8 888 888 808
123 456 789 · 81 = 9 999 999 909

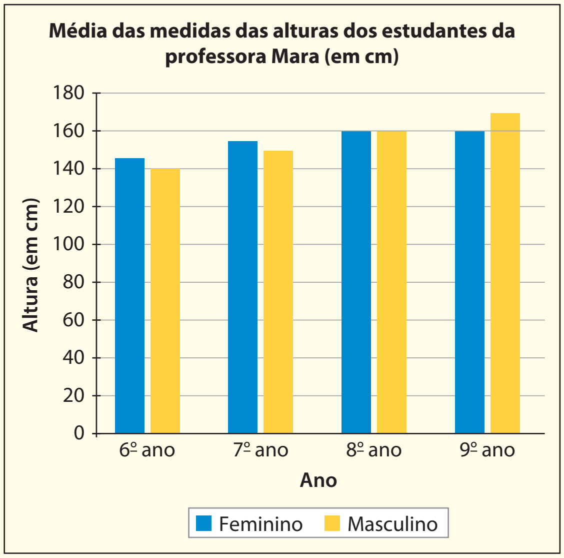
b) Resposta pessoal. Os estudantes devem realizar o cálculo usando uma calculadora.

c) O padrão observado é:
$123\,456\,789 \cdot 9n = n\,nnn\,nnn\,n0n$, com n um número natural de 1 até 9.

Trabalhando a informação

Página 78

2.



Dados obtidos pela professora Mara.

3. Respostas pessoais. Apesar de a amostra ter considerado 20 pessoas para todas as duplas, os gráficos obtidos poderão ser diferentes, uma vez que as pessoas entrevistadas terão gostos e preferências diferentes.

Exercícios Complementares

1. a) $12 - 5\cdot\left(-\frac{3}{4}\right) = 12 + \frac{15}{4} =$

$= \frac{48}{4} + \frac{15}{4} = \frac{63}{4}$

1. b) $\frac{3\cdot\overset{-1}{\cancel{(-7)}}}{\cancel{7}\cdot 5} - \frac{\cancel{5}}{8}\cdot\left(-\frac{2}{\cancel{5}}\right) =$

$= -\frac{3}{5} + \frac{2}{8} = -\frac{24}{40} + \frac{10}{40} =$

$= -\frac{14}{40} = -\frac{7}{20}$

1. c) $\left(-\frac{20}{45} + \frac{3}{45}\right) : \left(-\frac{15}{18} - \frac{2}{18}\right) =$

$= \left(-\frac{17}{45}\right) : \left(-\frac{17}{18}\right) = \frac{\cancel{17}}{\underbrace{\cancel{45}}_{5}} \cdot \frac{\overbrace{\cancel{18}}^{2}}{\cancel{17}} =$

$= \frac{2}{5}$

1. d) $\left(\frac{5}{2} - \frac{6}{2}\right) : \left(\frac{6}{6} + \frac{3}{6} - \frac{4}{6}\right) =$

$= -\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overbrace{\cancel{6}}^{3}}{5} = -\frac{3}{5}$

1. e) $\frac{8}{9} + \left(-\frac{5}{\cancel{3}}\right) \cdot \frac{\overbrace{\cancel{9}}^{3}}{2} =$

$= \frac{8}{9} + \left[-\frac{15}{2}\right] = \frac{16}{18} - \frac{135}{18} =$

$= -\frac{119}{18}$

2. Se $\frac{39}{100}$ representam aproximadamente 13 235 km², descobrir quantos km² são representados na fração $\frac{100}{100}$, que representa 100% da área de Porto Velho.
Assim, temos:
$\frac{13235}{39}\ \text{km}^2 \cdot 100 \simeq 33\,935\ \text{km}^2$

3. $A = \frac{1}{6} \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{24}$ $B = -\frac{5}{3} : \left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

Então: $A \cdot B = \frac{\cancel{7}}{24} \cdot \frac{5}{\cancel{7}} = \frac{5}{24}$

4. a) Para os anos 2020, espera-se uma resposta em torno de 2,1 milhões de quilogramas.

4. b) Aproximadamente 300 mil elefantes, pois:
$\frac{2\,100\,000}{7\,000} = 300\,000$

5. Supondo que $x = 0{,}5$ e $y = 0{,}6$, temos: $x \cdot y = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3$. Como 0,3 está entre o valor de x e 0, a resposta é: alternativa **b**.

6. a) $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{14}{5}$

O inverso desse resultado é $\frac{5}{14}$.

6. b) $\frac{\frac{7}{3}}{\frac{1}{6}} = 14$

O inverso desse resultado é $\frac{1}{14}$.

7. a) $7\frac{6}{9} = \frac{7\cdot 9}{9} + \frac{6}{9} = \frac{63}{9} + \frac{6}{9} =$

$= \frac{69}{9}$

$8\frac{7}{9} = \frac{8\cdot 9 + 7}{9} = \frac{79}{9}$

$9\frac{8}{9} = \frac{9\cdot 9 + 8}{9} = \frac{89}{9}$

$10\frac{9}{9} = \frac{10\cdot 9 + 9}{9} = \frac{99}{9}$

$11\frac{10}{9} = \frac{11\cdot 9 + 10}{9} = \frac{109}{9}$

$12\frac{11}{9} = \frac{12\cdot 9 + 11}{9} = \frac{119}{9}$

7. b) A fração tem denominador 9. Para obter o numerador da fração, multiplicamos por 10 o numerador da parte fracionária do número misto e, em seguida, adicionamos 9.

7. c) $32\frac{31}{9} = \frac{31 \cdot 10 + 9}{9} = \frac{319}{9}$

7. d) $-3\frac{2}{9} = -\left(\frac{3 \cdot 9}{9} + \frac{2}{9}\right) =$

$= -\left(\frac{27}{9} + \frac{2}{9}\right) = -\frac{29}{9}$

7. e) Sim.

$-3\frac{2}{9} = \frac{(-2) \cdot 10 - 9}{9} = -\frac{29}{9}$

7. f) Um número misto da forma $n\frac{n-1}{9}$ é equivalente a: $\frac{9 \cdot n}{9} + \frac{n-1}{9} = n + \frac{n-1}{9}$

$\frac{9 \cdot n}{9} + \frac{n-1}{9} =$

$= \frac{9n + n - 1}{9} = \frac{10n - 1}{9} =$

$= \frac{10n - 10 + 9}{9} =$

$= \frac{(n-1) \cdot 10 + 9}{9}$

Testando a resposta para o número $7\frac{6}{9}$ tem-se $n = 7$. Assim, substituindo na expressão $n + \frac{(n-1)}{9}$

$7 + \frac{(7-1)}{9} = 7 + \frac{6}{9} = \frac{63 + 6}{9} =$

$= \frac{69}{9}$

Verificando

1. Eles juntaram $\frac{19}{20}$ do valor do presente, pois:

$\frac{3}{10} + \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{19}{20}$

Faltou $\frac{1}{20}$ do valor, pois:

$\frac{20}{20} - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$

Alternativa **a**.

2. Das opções das alternativas, a única que se encaixa é comprar um sanduíche (R$ 5,69), um picolé (R$ 2,89) e um bolo (R$ 2,60), pois:

5,69 + 2,89 + 2,60 = 11,18

Alternativa **b**.

3. Ele obterá 7 tábuas de madeiras inteiras, pois:

$\frac{1,76}{0,25} = \frac{176}{25} = 7,04$

Alternativa **b**.

4. Para calcular 15% de 145,68, deve-se multiplicar 145,68 por 15 e dividir o resultado por 100. Então:

$145,68 \cdot \frac{15}{100} = \frac{2185,2}{100} = 21,852$

Alternativa **c**.

5. Segundo o enunciado, o desconto por dia será de $\frac{3}{5}$ de R$ 15,00 (valor de 1 hora de trabalho de Marcos), ou seja, R$ 9,00. Assim, em 6 dias, Marcos deixou de ganhar R$ 54,00. Portanto, seu salário neste mês foi de R$ 1 146,00, pois: 1 200 – 54 = 1 146

Alternativa **c**.

6. $\left(-\frac{6}{4}\right)^3 = \left(-\frac{6}{4}\right) \cdot \left(-\frac{6}{4}\right) \cdot \left(-\frac{6}{4}\right) = -\frac{216}{64} = -3,375$

Alternativa **a**.

7. A altura total é 38,25 m, pois:

9 · 4,25 = 38,25

Alternativa **b**.

8. Foram consumidas 21 fatias, pois:

$\frac{7}{9}$ de $27 = 27 \cdot \frac{7}{9} = \frac{\overset{3}{\cancel{27}} \cdot 7}{\cancel{9}}$

Portanto, sobraram 6 fatias, pois: 27 – 21 = 6

Alternativa **c**.

9. $\frac{15}{10} - \left[+\frac{4}{9} \cdot 0,06\right] =$

$= \frac{15}{10} - \left[\frac{4}{9} \cdot \frac{6}{100}\right] =$

$= \frac{15}{10} - \left[\frac{\cancel{4}}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{25}{\cancel{100}}}\right] =$

$= \frac{15}{10} - \frac{2}{75} = \frac{225}{150} - \frac{4}{150} =$

$= \frac{221}{150}$

Alternativa **d**.

Capítulo 4 – Ângulos

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer situações que envolvam a ideia de ângulo.
- Utilizar a linguagem adequada à descrição de ângulos.
- Reconhecer o grau e seus submúltiplos como unidade de medida de ângulo.
- Identificar e construir ângulos congruentes.
- Realizar operações que envolvam a medida de um ângulo em graus e seus submúltiplos.
- Identificar e construir a bissetriz de um ângulo.

- Identificar ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal e aplicar as relações entre as medidas desses ângulos.
- Interpretar gráficos de setores.

Verificar a presença de ângulos em diferentes contextos possibilita ao estudante dar sentido à Matemática estudada em sala de aula, relacionando-a com o próprio cotidiano. Além disso, mostra que a contextualização dos conhecimentos matemáticos não se dá somente no campo numérico. No decorrer dos estudos, os estudantes são levados a trabalhar com a linguagem simbólica para a indicação de ângulos e de outros elementos geométricos, o que contribui para o desenvolvimento das **competências específicas 2** e **6** e da **competência geral 4**.

Entender as unidades de medida relacionadas à medida de ângulo e saber operá-las possibilita ao estudante resolver problemas que envolvam processos de medição de ângulos. Saber lidar com a unidade de medida grau e seus submúltiplos contribui para que o estudante desenvolva repertório para a resolução de diferentes situações-problema, relacionadas, por exemplo, ao estudo de polígonos. Desse modo, os conteúdos trabalhados desenvolvem aspectos das **competências específicas 2**, **3** e **6** e da **competência geral 4**.

As construções geométricas apresentadas no capítulo permitem um estudo mais profundo sobre as propriedades das figuras geométricas, possibilitando aos estudantes perceber que as resoluções de um grupo de problemas, que têm a mesma estrutura, podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. Assim, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA06).

O trabalho com ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal servirá de apoio para o estudo de outros conceitos ao longo da vida escolar e favorece o desenvolvimento das **competências específicas 2** e **6** e da **competência geral 4**.

Ao longo dos estudos, em diferentes momentos indicamos a possibilidade de trabalhar com *softwares* de geometria dinâmica para construções geométricas, mobilizando aspectos da **competência geral 5** e da **competência específica 5**.

Na página de *abertura* do capítulo, apresentamos aos estudantes uma atividade esportiva, a ginástica rítmica. Nesse momento, eles devem refletir que o ângulo formado pelas fitas é importante para o movimento apresentado pelas atletas. Ao explorar essa temática, contribuímos para o desenvolvimento da **competência geral 3**.

Na seção *Trabalhando a informação*, exploramos a leitura de gráficos de setores com o objetivo de desenvolver habilidades que possibilitam aos estudantes realizar análises criteriosas, seja em situações de cunho matemático, seja em outras áreas do conhecimento. Desse modo, contribuímos para o desenvolvimento da **competência específica 6**.

No exercício 4 da seção *Exercícios Propostos* apresentamos uma situação em que os estudantes possam refletir sobre a acessibilidade para pessoas com deficiência, o que favorece o trabalho com a **competência geral 7**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes trabalhar diferentes habilidades socioemocionais ao lidarem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica.

(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

(EF07MA37) Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

Este capítulo trata essencialmente da Unidade Temática **Geometria**. O conceito de ângulo é retomado e aprofundado em relação ao que foi visto no 6º ano (EF06MA26), particularmente no que diz respeito às medidas e às operações entre elas, além da congruência de ângulos, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA29).

A construção com régua e compasso de ângulos congruentes será um pré-requisito para a construção e a verificação da existência de triângulos, da construção de outros polígonos e da validação da construção da bissetriz de um ângulo. Essas construções possibilitam aos estudantes estabelecer relações entre o exemplo dado e a possibilidade de construir outros ângulos, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA06).

A atividade 9 da seção *Exercícios Propostos* propõe aos estudantes que elaborem um fluxograma com os passos para a construção de ângulos congruentes, favorecendo o trabalho com a habilidade (EF07MA07).

A construção de retas paralelas com régua e esquadro propicia uma abordagem de constatação prática da congruência de ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal e, a partir daí, explora a congruência ou a condição de suplemento entre os demais pares de ângulos formados por essas retas, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA23).

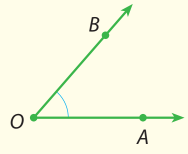
A Unidade Temática **Probabilidade e estatística** também tem espaço neste capítulo, com a interpretação e a análise de gráficos de setores que representam um conjunto de dados, na forma de porcentagem, de uma pesquisa, propiciando o desenvolvimento das habilidades (EF07MA37) e (EF07MA02).

• Comentários e resoluções

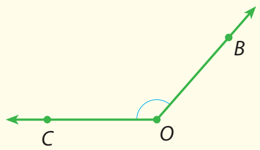
Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas*, que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. a) Os ângulos são $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$ conforme ilustrados separadamente a seguir.



$A\hat{O}B$



$B\hat{O}C$

$A\hat{O}C$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

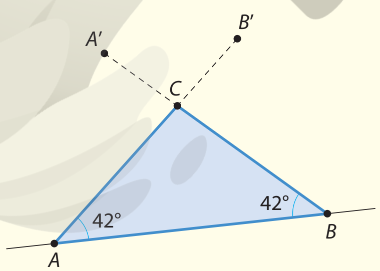
1. b) Nesse item, os estudantes devem usar o transferidor para medir os ângulos representados, e obter $m(A\hat{O}B) = 50°$, $m(B\hat{O}C) = 130°$ e $m(A\hat{O}C) = 180°$.

1. c) Um ângulo raso mede 180°; portanto, o ângulo procurado é o $A\hat{O}C$.

1. d) Nenhum dos ângulos mede 90°; portanto, não são retos. Um ângulo obtuso tem medida de abertura entre 90° e 180°; logo, o ângulo procurado é o $B\hat{O}C$. Um ângulo agudo tem medida de abertura entre 0° e 90°; assim, o ângulo procurado é o $B\hat{O}A$.

2. Não. Espera-se que os estudantes percebam que o movimento do olho humano não é suficiente para cobrir um ângulo de medida 180°.

3. Construindo conforme as instruções do enunciado.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

3. a) Triângulo.

3. b) Neste momento, é possível medir com a régua o comprimento dos três lados e concluir que ele tem 2 lados com a mesma medida. Como a medida com régua pode apresentar alguma imprecisão, comente com os estudantes que os ângulos congruentes garantem lados de medida congruente.

Logo, ele é um triângulo isósceles.

4. a) Apenas a situação B, pois o ângulo visual é menor que 30°.

4. b) Resposta pessoal. Espera-se que o estudante se lembre da necessidade de banheiro acessível, balcões de atendimento acessíveis (lanchonete e bilheteria), vaga de estacionamento, entre outras convenções.

8. $A\hat{O}B \cong M\hat{V}N$; $R\hat{S}T \cong C\hat{H}D$

9.

Considere um ângulo $A\hat{O}B$.

↓

Trace uma semirreta de origem E.

↓

Coloque a ponta-seca do compasso em E e, com a medida de abertura de medida OA, trace um arco obtendo o ponto D.

↓

Coloque a ponta-seca do compasso em D e, com a medida de abertura AB, marque F no arco traçado.

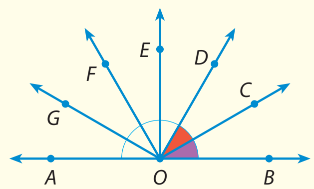
↓

Trace a semirreta $\overrightarrow{EF}$ para obter o ângulo $D\hat{E}F$.

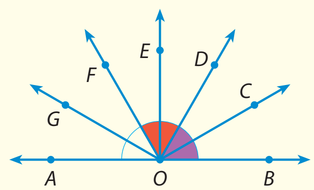
RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

10. Sugere-se perguntar aos estudantes qual é a medida de cada um dos seis ângulos congruentes. Como a figura forma um ângulo raso, 30° (180° : 6 = 30°) é a medida da abertura de cada uma das secções.

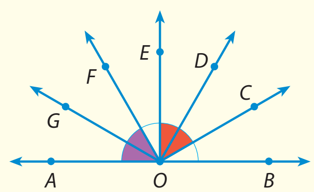
10. a) Verdadeira, observe os ângulos indicados na figura.



10. b) Verdadeira, observe os ângulos indicados na figura.

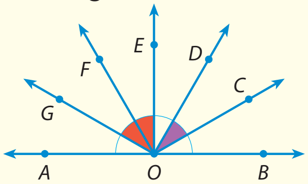


10. c) Verdadeira, observe os ângulos indicados na figura.

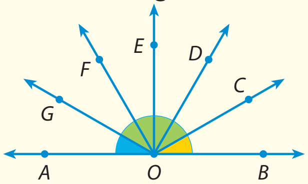


ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

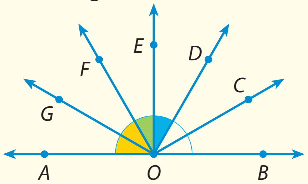
10. d) Falsa, observe os ângulos indicados na figura.



10. e) Verdadeira, observe os ângulos indicados na figura.



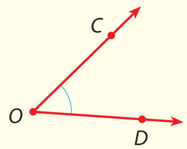
10. f) Falsa, observe os ângulos indicados na figura.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

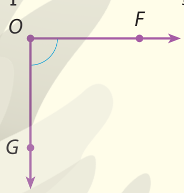
11. Seguindo os passos do fluxograma do exercício 9 é possível construir os ângulos congruentes pedidos em cada item.

11. a) Ângulo agudo, exemplo de construção: $C\hat{O}D$



11. b) Ângulo obtuso, exemplo de construção: $T\hat{U}V$

11. c) Ângulo reto, exemplo de construção: $F\hat{O}G$



12. a) $15° = 15 \cdot 60' = 900'$

12. b) $10°35' = (10 \cdot 60)' + 35' =$
$= 600' + 35' = 635'$

12. c) $420'' = (420 : 60)' = 7'$

12. d) $1\,020'' = (1\,020 : 60)' = 17'$

12. e) $4°240'' = (4 \cdot 60)' + (240 : 60)' = 240' + 4' = 244'$

12. f) $6°360'' = (6 \cdot 60)' + (360 : 60)' = 360' + 6' = 366'$

14. $2°10'30'' = (2 \cdot 60)' + (10 \cdot 60)'' + 30'' =$
$= 120' + 600'' + 30'' = (120 \cdot 60)'' +$
$+ 630'' = 7\,200'' + 630'' = 7\,830''$

15. Sabe-se que $60' = 1°$ e, realizando a operação mental $94 - 60 = 34$, pode-se concluir que: $94' = 1°34'$

16. a)

$$\begin{array}{rr} + & 25°\ 12' \\ & 40°\ 30' \\ \hline & 65°\ 42' \end{array}$$

16. b)

$$\begin{array}{rrl} + & 10°\ 45'\ 45'' & \\ & 20°\ 20'\ 45'' & \\ \hline + & 30°\ 65'\ \cancel{90''} & (90'' = 1'30'') \\ & 1'\ 30'' & \\ \hline + & 30°\ \cancel{66'}\ 30'' & (66' = 1°\ 6') \\ & 1°\ \ \ 6' & \\ \hline & 31°\ \ \ 6'\ 30'' & \end{array}$$

16. c)

$$\begin{array}{rr} - & 50°\ 40' \\ & 20\ 35' \\ \hline & 30°\ \ \ 5' \end{array}$$

16. d)

$$\begin{array}{rr} - & 45°\ 20'\ 25'' \\ & 30°\ 30'\ 30'' \\ \hline \end{array}$$

Da forma como está não é possível efetuar a subtração dos segundos e minutos, há necessidade de transformar as unidades.

1ª transformação: um grau em minutos para possibilitar a subtração dos minutos.

$45° = 44°\ 60'$

$44°\ 60' + 20'\ 25'' = 44°\ 80'\ 25''$

2ª transformação: um minuto em segundos para possibilitar a subtração dos segundos.

$80' = 79'\ 60''$

$44°\ 79'\ 60'' + 25'' = 44°\ 79'\ 85''$

$$\begin{array}{rr} - & 44°\ 79'\ 85'' \\ & 30°\ 30'\ 30'' \\ \hline & 14°\ 49'\ 55'' \end{array}$$

18. Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 90° são ângulos complementares. Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 180° são ângulos suplementares.

18. a) 73°, pois: $90 - 17 = 73$

18. b) 140°, pois: $180 - 40 = 140$

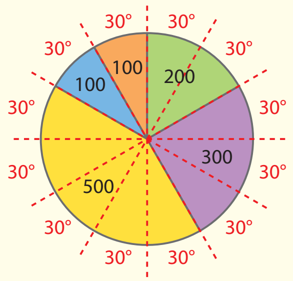
18. c) 69°, pois: o complementar é 21° ($90 - 69 = 21$) e seu complementar é 69° ($90 - 21 = 69$).

20. a) No gráfico, o maior grupo de entrevistados é de 500 estudantes, que dormem 8 horas diárias.

20. b) Sim, pois no gráfico as quantidades de entrevistados que dormem 8, 9 ou 10 horas são, respectivamente, 500, 300 e 200 estudantes, correspondendo ao total de 1 000 entrevistados ($500 + 300 + 200 = 1\,000$), mais da metade dos pesquisados ($1\,200 : 2 = 600$ e $1\,000 > 600$).

20. c) No gráfico, pode-se observar que o menor setor é de 100 entrevistados; portanto, ao dividir o número de entrevistados por 100, obtêm-se 12 partes iguais no gráfico. O gráfico representa o ângulo de uma volta, que, dividido em 12 partes, tem-se um ângulo de 30° para cada parte. Ao contar as partes em cada setor, temos o ângulo correspondente.
Setor verde (10 horas) – 2 partes: 60°; setor roxo (9 horas) – 3 partes: 90°; setor amarelo (8 horas) – 5

partes: 150°; setor azul (7 horas) – 1 parte: 30°; setor laranja (6 horas) – 1 parte: 30°.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

20. d) Setor verde (10 horas, 60°) ângulo agudo; setor roxo (9 horas, 90°) ângulo reto; setor amarelo (8 horas, 150°) ângulo obtuso; setor azul (7 horas, 30°) ângulo agudo; setor laranja (6 horas, 30°) ângulo agudo.

21. a)

$$\begin{array}{rl} & 22°\ 30' \\ \times & 2 \\ \hline & 44°\ \cancel{60'} \quad (60'' = 1°) \\ + & 1° \\ \hline & 45° \end{array}$$

21. b)

$$\begin{array}{rl} & 25°\ 12'\ 15'' \\ \times & 5 \\ \hline & 125°\ 60'\ \cancel{75''} \quad (75'' = 1'15'') \\ + & 1'15'' \\ \hline & 125°\ \cancel{61'}\ 15'' \quad (61' = 1°1') \\ + & 1°\ 1' \\ \hline & 126°\ 1'\ 15'' \end{array}$$

21. c) 15°20': 4 = 3° **50'**

$$\begin{array}{r|l} 15° & 4 \\ \cline{2-2} \cancel{3°} & 3° \end{array}$$

(3° = [3 · 60]' = 180')

20' + 180' = 200'

$$\begin{array}{r|l} 200' & 4 \\ \cline{2-2} 0 & \mathbf{50'} \end{array}$$

21. d) 15°10'24" : 4 = 3°47'36"

$$\begin{array}{r|l} 15° & 4 \\ \cline{2-2} \cancel{3°} & 3° \end{array}$$

(3° = [3 · 60]' = 180')

10' + 180' = 190'

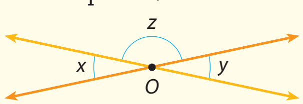
$$\begin{array}{r|l} 190' & 4 \\ \cline{2-2} \cancel{2'} & \mathbf{47'} \end{array}$$

(2' = 2 · 60" = 120")

24" + 120" = 144"

$$\begin{array}{r|l} 144' & 4 \\ \cline{2-2} 0 & \mathbf{36''} \end{array}$$

22. a) É possível escrever que x + z = 180° e z + y = 180°.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

22. b) São iguais, pois formam um ângulo raso.

22. c) São iguais, pois, como x + z = 180 e z + y = 180, x = y.

22. d) Pode-se concluir que as medidas sempre serão iguais.

23.

Dadas duas retas, que se cruzam em *A* e formam 4 ângulos (*x*, *y*, *w* e *z*), de vértice *A*.

↓

$x + y = 180°$, pois estão apoiados numa das retas.

↓

$z + y = 180°$, pois estão apoiados na outra reta.

↓

Então, $z = x$ e são chamados de opostos pelo vértice.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

24. a) $\frac{2}{3} \cdot 15° = (2 \cdot 15°) : 3 = 30° : 3 = 10°$

24. b) $\frac{3}{4} \cdot 90° = (3 \cdot 90°) : 4 = 270° : 4 = 67°30'$

$$\begin{array}{r|l} 270° & 4 \\ \cline{2-2} \cancel{2°} & \mathbf{67°} \end{array}$$

(2° = 2 · 60' = 120')

$$\begin{array}{r|l} 120' & 4 \\ \cline{2-2} 0 & \mathbf{30'} \end{array}$$

24. c) $\frac{2}{5} \cdot 48°30' = (2 \cdot 48°30') : 5 = 97° : 5 = 19°24'$

$$\begin{array}{rl} & 48°\ 30' \\ \times & 2 \\ \hline & 96°\ \cancel{60'} \quad (60' = 1°) \\ + & 1° \\ \hline & 97° \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 97° & 5 \\ \cline{2-2} \cancel{2°} & \mathbf{19°} \end{array}$$

(2° = 2 · 60' = 120')

$$\begin{array}{r|l} 120' & 5 \\ \cline{2-2} 0 & \mathbf{24'} \end{array}$$

24. d) $\frac{5}{6} \cdot 60°18'6'' = (5 \cdot 60°18'6'') : 6 = 301°30'30'' : 6 = 50°15'5''$

$$\begin{array}{rl} & 60°\ 18'\ 6'' \\ \times & 5 \\ \hline & 300°\ \cancel{90'}\ 30'' \quad (90'' = 1°30') \\ + & 1°\ 30' \\ \hline & 301°\ 30'\ 30'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 301° & 6 \\ \cline{2-2} \cancel{1°} & 50° \end{array}$$

(1° = 60')

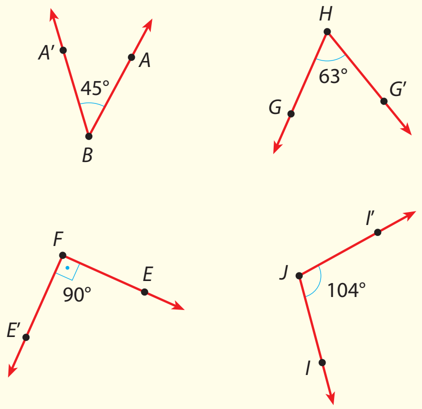
30' + 60' = 90'

$$\begin{array}{r|l} 90' & 6 \\ \cline{2-2} 0 & \mathbf{15'} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 30'' & 6 \\ \cline{2-2} 0 & 5'' \end{array}$$

25. Para construir o ângulo de medida 70°, Pedro juntou os moldes dos ângulos de medida 42° e 28°. Para construir o de 14°, ele subtraiu o molde de ângulo medindo 28° do molde de ângulo medindo 42°. Para construir o ângulo medindo 56°, Pedro usou duas vezes o molde do ângulo de medida 28°. Para construir o de medida 126°, usou três vezes o molde do ângulo de medida igual a 42°.

26. Nesse exercício, os estudantes devem usar o transferidor para a construção dos ângulos de medidas 45°, 90°, 63° e 104°, depois usar a régua e o compasso para construir os ângulos resultantes da adição ou da subtração dos ângulos construídos com o transferidor, conforme indicado a seguir.



26. a) Como 27 = 90 – 63, então devem subtrair o ângulo de medida 63° do de medida 90°.

26. b) Como 149 = 45 + 104, então devem adicionar o ângulo de medida 45° ao de medida 104°.

26. c) Como 108 = 45 + 63, devem adicionar o ângulo de medida 45° ao de medida 63°.

26. d) Como 135 = 45 + 90, devem adicionar o ângulo de medida 45° ao de medida 90°.

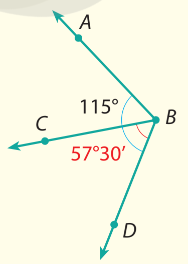
26. e) Como 14 = 104 – 90, então devem subtrair o ângulo de medida 90° do de medida 104°.

26. f) Como 77 = 104 + 63 – 90, então é necessário somar os ângulos de medida 104° e 63° e subtrair dessa soma o ângulo de medida 90°.

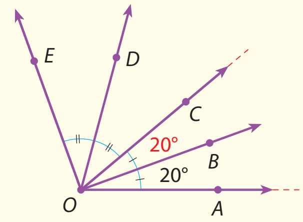
27. Os três ângulos formam uma volta completa, então a medida de cada ângulo é 120°, pois 360 : 3 = 120.

29. É a bissetriz, pois divide o ângulo em dois ângulos congruentes.

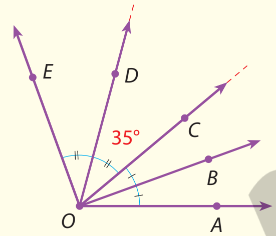
30. Nesse exercício, o estudante deve construir um ângulo de 115°, com a ajuda de um transferidor, e traçar uma semirreta com origem no vértice desse ângulo, dividindo-o em dois ângulos congruentes.



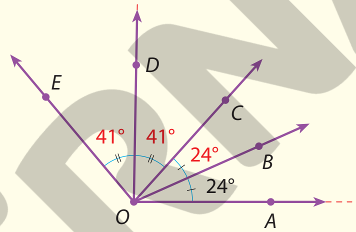
31. a) Como 20° + 20° = 40°, m(AÔC) = 40°.



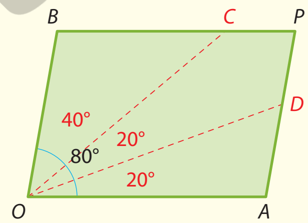
31. b) Como 70° : 2v = 35°, m(CÔD) = 35°.



31. c) Como 41° + 24° + 24° = 89°, m(AÔD) = 89°.



32. Com a dobra do papel é formado um vinco que é a bissetriz do ângulo formado pelos lados que se sobrepuseram. Então, é possível observar que m(AÔD) = 20°; m(AÔC) = 40°; m(BÔD) = 60°.



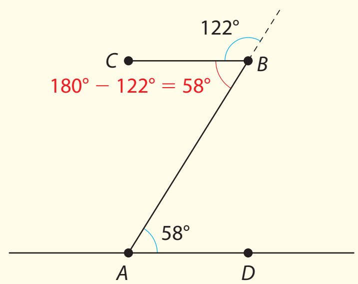
35. a) Sim, os ângulos são alternos externos.

35. b) São ângulos opostos pelo vértice. A relação é que são iguais.

35. c) Sim. A relação é que são iguais.

35. d) São iguais.

36. Representando:



(Representação esquemática sem escala.)

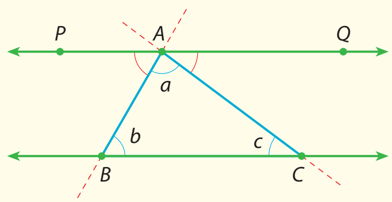
$\overline{BC}$ é paralelo à linha que representa a estrada principal, pois os ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ são ângulos alternos internos e congruentes.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

37. Pela ilustração, temos:
$4x = 60 \Rightarrow x = 60 : 4 \Rightarrow x = 15$
$60 + y = 180 \Rightarrow y = 180 - 60 \Rightarrow y = 120$
Então, x mede 15° e y mede 120°.

38. a) $P\hat{A}B = b$ (alternos internos), $Q\hat{A}C = c$ (alternos internos).



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

38. b) As medidas dos ângulos de vértice A citados são $a + b + c = 180°$; a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°.

38. c) Sim, é possível generalizar o resultado.

42. a) Falsa, pois os ângulos correspondentes são congruentes.

42. b) Verdadeira.

42. c) Falsa, pois os ângulos alternos externos são congruentes.

42. d) Verdadeira.

42. e) Falsa, pois os ângulos colaterais internos são suplementares.

43. a) $42 + x = 180 \Rightarrow x = 180 - 42 \Rightarrow x = 138$
$y = 42°$ (ângulos alternos internos)

b) $x = 30°$ (ângulos alternos internos); $y = 25°$ (ângulos alternos internos)

44. a) 60°, pois: $a = 23° + 37° = 60°$

44. b) 50°, pois: $x + 130° = 180° \Rightarrow x = 180° - 130° \Rightarrow x = 50°$ (ângulos correspondentes internos)
$y = 130°$ (ângulos alternos internos).

45. a) 38,5°, pois $A\hat{M}N$ é o ângulo correspondente ao $A\hat{B}C$.

45. b) 141,5°, pois o ângulo $B\hat{M}N$ é o suplementar do $A\hat{M}N$.

45. c) 64,5°, pois o ângulo $B\hat{C}A$ é o correspondente do $M\hat{N}A$.

Trabalhando a informação

1.

Página 104

Categoria	Porcentagem	Grau
Trilha sonora	10%	$\frac{10}{100} \cdot 360° = 36°$
Detalhes	18%	$\frac{18}{100} \cdot 360° = 64{,}8°$
Visual	41%	$\frac{41}{100} \cdot 360° = 147{,}6°$
Roteiro	19%	$\frac{19}{100} \cdot 360° = 68{,}4°$
Jogabilidade	12%	$\frac{12}{100} \cdot 360° = 43{,}2°$

3.

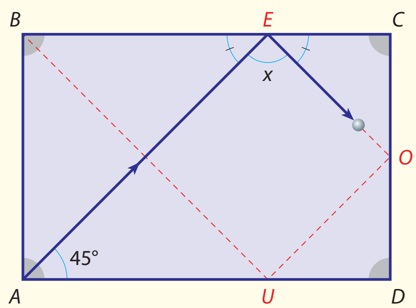
Cor de pele	Ano 2000	Grau
Branca	53,7%	$\frac{537}{1\,000} \cdot 360° \simeq 193°$
Parda	38,5%	$\frac{384}{1\,000} \cdot 360° \simeq 139°$
Preta	6,2%	$\frac{62}{1\,000} \cdot 360° \simeq 22°$
Amarela ou indígena	0,9%	$\frac{9}{1\,000} \cdot 360° \simeq 3°$
Não declarada	0,7%	$\frac{7}{1\,000} \cdot 360° \simeq 3°$
Total	**100%**	**360°**

Cor de pele	Ano 2019	Grau
Branca	42,7%	$\frac{427}{1\,000} \cdot 360° \simeq 153{,}7°$
Parda	46,8%	$\frac{468}{1\,000} \cdot 360° \simeq 168{,}5°$
Preta	9,4%	$\frac{94}{1\,000} \cdot 360° \simeq 33{,}8°$
Amarela ou indígena	1,1%	$\frac{11}{1\,000} \cdot 360° = 3{,}96° \simeq 4°$
Total	**100%**	**360°**

De 2000 a 2019 o percentual da população branca diminui, enquanto as demais populações aumentaram.

Pense mais um pouco

Página 104



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

$D\hat{A}E$ é alterno interno como $B\hat{E}A$; portanto, $B\hat{E}A$ mede 45°. Os pontos A, E e B formam um triângulo isósceles, no qual as medidas BA e BE correspondem a 2 unidades.

Se BE é igual a 2 unidades, EC é igual a 1 unidade, pois CB é igual a 3 unidades.

Seja O o ponto onde a bola toca $\overline{CD}$, temos $m(C\hat{E}O) = 45°$ e $m(C\hat{O}E) = 45°$, outro triângulo isósceles, em que CO é igual a 1 unidade.

Assim, temos $\overline{OD}$ igual a 1 unidade, pois CD é igual a 2 unidades e CO é igual a 1 unidade.

Seja U o ponto onde a bola vai bater em $\overline{AD}$, temos $m(D\hat{O}U) = 45°$ e $m(D\hat{U}O) = 45°$, outro triângulo isósceles, em que o lado $\overline{DU}$ mede 1 unidade. Se DU é igual a 1 unidade, então AU é igual a 2 unidades, visto que o lado $\overline{AD}$ mede 3 unidades.

A direção da bola após refletida em $\overline{AD}$ forma um ângulo de medida igual a 45°, logo a bola vai cair na caçapa B, pois formará outro triângulo isósceles com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AU}$ medindo 2 unidades.

Exercícios Complementares

1. Nesse exercício, os estudantes devem usar a régua e o transferidor para a construção do ângulo de 90°, traçar a bissetriz para identificar o ângulo de 45° e a bissetriz desse ângulo de 45° para identificar o ângulo de 22°30'.

2. a) Meia-volta seria girar em 180°. Se a cada giro são 60°, seriam necessários 3 movimentos, pois: $180° : 60° = 3$

2. b) Seria o dobro de movimentos do item **a**; portanto, 6 movimentos.

2. c) O ângulo interno mede 120° e o externo mede 60°, pois é suplementar ao interno.

3. Duas voltas e meia, pois: $900° : 360° = 2{,}5$

4. Ângela deverá girar 135° à esquerda para retornar ao ponto de partida em linha reta.

5. $5x - 15° = 4x + 5° \Rightarrow 5x - 4x = 5° + 15° \Rightarrow \mathbf{x = 20°}$

$5x - 15° + y = 180° \Rightarrow 5 \cdot 20° - 15° + y = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow 85° + y = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 180° - 85° \Rightarrow \mathbf{y = 95°}$

6. $x = 50°$ e $y = 75°$ (ângulos correspondentes)

7. a) $2x - 30° + x = 90° \Rightarrow 3x = 90° + 30° \Rightarrow 3x = 120° \Rightarrow \Rightarrow x = 40°$

7. b) $2x + 7x = 180° \Rightarrow 9x = 180° \Rightarrow x = 20°$

8. a) $b = 133°$ (ângulo alterno externo); $a = 180° - 133° = 47°$;

$c = 47°$ (ângulo correspondente); $d = 47°$ (o.p.v)

8. b) $y = 47°$ (ângulo correspondente); $x = 180° - 38° = 142°$

Verificando

1. $\hat{B}$ e $\hat{K}$, pois são alternos internos. Alternativa **b**.

2. Os pares de ângulos são opostos pelo vértice e alternos internos. Alternativa **b**.

3. $5° = (5 \cdot 60)' = 300' = (300 \cdot 60)'' = 18\,000''$
$48' = (48 \cdot 60)' = 2\,800''18\,000'' + 2\,800'' + 1'' = 20\,881''$
Alternativa **d.**

4.

$$\begin{array}{rr}
+ & 41°\ 20'\ \ 5'' \\
 & 15°\ 53'\ 58'' \\
\hline
 & 56°\ 73'\ \cancel{63''} \quad (63'' = 1'3'') \\
+ & 1'\ \ 3'' \\
\hline
 & 56°\ \cancel{74'}\ \ 3'' \quad (74'' = 1°14') \\
+ & 1°\ 14' \\
\hline
 & 57°\ 14'\ \ 3''
\end{array}$$

Alternativa **c**.

5. $\frac{1}{3} \cdot 56°28'15'' = 56°28'15'' : 3$

$$\begin{array}{r|l}
56° & 3 \\ \hline
\cancel{2°} & \mathbf{18°}
\end{array}$$

$(2° = 120')$

$28' + 120' = 148'$

$$\begin{array}{r|l}
148' & 3 \\ \hline
\cancel{1'} & \mathbf{49'}
\end{array}$$

$(1' = 60'')$
$15'' + 60'' = 75''$

$$\begin{array}{r|l}
75'' & 3 \\ \hline
0 & \mathbf{25''}
\end{array}$$

Alternativa **a**.

6. Alternativa **d**, conforme as características da bissetriz.

7. Para serem complementares, a soma das medidas dos ângulos deve ser 90°.
Alternativa **b**.

8. $90° = 89°60'$

$$\begin{array}{rr}
- & 89°\ 60' \\
 & 78°\ 22' \\
\hline
 & 11°\ 38'
\end{array}$$

$11°38' + 90° = 101°38'$
Alternativa **a**.

9. Conforme foi definido como ângulos opostos pelo vértice.
Alternativa **c**.

10. A bissetriz dividiu o ângulo de 9°24' em duas partes congruentes de medida $(9°24') : 2 = 4°42'$.
Alternativa **c**.

11. Dois ângulos colaterais externos formados por uma transversão são suplementares, ou seja, a soma das medidas deles é igual a 180°.
Alternativa **b**.

Capítulo 5 – Equações

Objetivos do capítulo e justificativas

- Utilizar a linguagem algébrica para descrever sentenças e equações.
- Reconhecer situações que podem ser resolvidas por meio de equações do 1º grau com uma incógnita.
- Aplicar as técnicas adequadas para resolver equações do 1º grau com uma incógnita.
- Compreender o conceito de média aritmética e aplicá-lo para fazer estimativas.

Existem muitos problemas que podem ser resolvidos com o uso da linguagem algébrica. Saber implementá-la e verificar a real necessidade dela é uma tarefa importante para a resolução de problemas no campo da Álgebra, que, pela BNCC, ganha força com a proposta de desenvolvimento do pensamento algébrico desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Assim, utilizar a linguagem algébrica está diretamente relacionado com o desenvolvimento das **competências específicas 2** e **3** e da **competência geral 4**.

A aplicação de conhecimentos adquiridos a partir da apropriação da linguagem algébrica é um passo importante para tornar significativo o aprendizado sobre equações do 1º grau. Ao longo do capítulo, apresentamos aos estudantes diversas situações relacionadas a diferentes temáticas, como a da *Abertura*, que contribuem para o desenvolvimento da **competência geral 3** e da **competência específica 6**.

Criar e aplicar estratégias de resolução de equações de 1º grau é um passo importante para assimilar as técnicas necessárias para identificar o valor da incógnita da equação. Assim, tal objetivo se justifica na medida em que favorece o desenvolvimento das **competências específicas 2** e **3** e das **competências gerais 2** e **4**.

As medidas de tendência central se constituem em conceitos importantes no estudo estatístico e podem ser aplicadas em diferentes contextos, relacionados não só à própria Matemática, mas também a outras áreas do conhecimento. A noção de estimativa que é prevista desde os Anos Iniciais é reforçada no estudo e no aprofundamento da ideia de média aritmética, evidenciando o caráter de retomada e aprofundamento dos conceitos estudados ao longo do Ensino Fundamental. Assim, esse objetivo se justifica porque pode favorecer o desenvolvimento das **competências específicas 1** e **4** e das **competências gerais 2** e **4**.

O trabalho apresentado sobre a História da Matemática, relacionando o desenvolvimento da Álgebra a diferentes civilizações, contribui para o desenvolvimento da **competência específica 1** e da **competência geral 1**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que tem a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF07MA35) Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.

Situar historicamente as criações humanas inéditas dá ao estudante a dimensão da construção dos objetos de conhecimento e o entendimento de que o compartilhamento de novas ideias assegura a manutenção da descoberta e a possibilidade de evolução cultural do ser humano. Essa é a abordagem inicial deste capítulo, que trabalha a ideia de variável, incógnita e equação, conceitos da Unidade Temática **Álgebra**, que será aprofundada no 8º ano (EF08MA06).

A aplicação da simbologia algébrica para comparar expressões matemáticas em situações-problema contextualizadas nos leva a sentenças matemáticas em que cada variável das expressões se transforma em incógnita na sentença, que pode representar uma igualdade (equação) ou uma desigualdade (inequação) e favorece o desenvolvimento da habilidade (EF07MA13).

A Matemática na história é complementada na seção *Para saber mais*, com a regra da falsa posição, fundamentada no pensamento de proporcionalidade. Ao resolver problemas que envolvem proporcionalidade, expressando a relação entre as grandezas por expressões algébricas, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA17).

Essa regra, que se apoia no conceito de proporcionalidade, constitui um método inicialmente empregado pelos egípcios, depois disseminado pelos árabes e assimilado, na Idade Média, pela Europa, para a resolução de uma equação de 1º grau com uma incógnita. Abordar esse tema pode ampliar a compreensão dos estudantes e possibilitar o desenvolvimento da habilidade (EF07MA18). No trabalho com equações, os estudantes deverão perceber que um mesmo problema pode ser resolvido por meio de diferentes algoritmos, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA05). E ao compreender o processo de resolução de uma equação do 1º grau, deverão compreender que esse processo permite resolver diferentes problemas com mesma estrutura, ação que está relacionada com a habilidade (EF07MA06).

O processo de determinação do(s) valor(es) numérico(s) que torna(m) verdadeiras tais sentenças é um poderoso instrumento de resolução de problemas nas mais diferentes áreas da atividade humana.

A proposta da atividade da seção *Pense mais um pouco...*, da página 112, propõe aos estudantes que expressem regularidades de sequências numéricas usando simbologia algébrica, o que favorece o trabalho com a habilidade (EF07MA15).

O fluxograma que sintetiza o procedimento da verificação da solução de uma equação contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA07).

A Unidade Temática **Probabilidade e estatística** é distribuída na seção *Trabalhando a informação*, que neste capítulo trata dos conceitos de média e de estimativa (EF07MA35), ampliando os conteúdos trabalhados no 6º ano (EF06MA32).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

c) O perímetro da tela mede 330 cm, pois:
$100 + 100 + 65 + 65 = 330$

Exercícios propostos

1. a) Escolhendo a letra x para representar o número, tem-se que "o triplo de x" é $3x$, então "o triplo de x mais 10" é $3x + 10$.

1. b) Escolhendo a letra a para representar o número, tem-se que esse número menos 4 é $a - 4$.

1. c) Escolhendo a letra b para representar o número, para obter o seu quádruplo deve-se multiplicá-lo por 4. Assim: $4b$.

1. d) Escolhendo a letra y para representar o número, para obter a sua terça parte deve-se multiplicá-lo por $\frac{1}{3}$ (ou dividi-lo por 3): $\frac{1}{3}y$ ou $\frac{y}{3}$.

1. e) Escolhendo a letra z para representar o número, para obter os três quartos desse número deve-se multiplicá-lo por 3 e dividi-lo por 4: $\frac{3z}{4}$.

2. O dobro do número de figurinhas é $2y$ e, como faltam 2 figurinhas para atingir esse valor, para obter o número de figurinhas do meu amigo deve-se subtrair 2; então, $2y - 2$.

3. a) A soma desses números pode ser representada por $a + b$ ou $b + a$, de modo que ambas as representações têm o mesmo valor.

3. b) Há duas opções para a representação da diferença desses números: $a - b$ ou $b - a$. Além disso, a não ser que a e b sejam o mesmo número, as representações não têm o mesmo valor.

3. c) Como o dobro de a é $2a$ e o triplo de b é $3b$, a expressão fica: $2a - 3b$.

3. d) Para obter o produto desses números é necessário multiplicar um pelo outro. Assim: $a \cdot b$.

4. I. O quadrado de x é x^2; o dobro do quadrado de x é $2x^2$, portanto a resposta correta é a letra **e**.

II. O dobro de x é $2x$; o quadrado do dobro de x é $(2x)^2$, portanto a resposta correta é a letra **c**.

III. O dobro de x é $2x$; a diferença entre o dobro de x e 3 é $2x - 3$, portanto a resposta correta é a letra **a**.

IV. A diferença entre x e 3 é $x - 3$; o dobro da diferença entre x e 3 é $2(x - 3)$, portanto a resposta correta é a letra **g**.

V. A soma de x com 3 é $x + 3$; a divisão da soma de x com 3 por 2 é $\frac{x+3}{2}$, portanto a resposta correta é a letra **f**.

5. O dobro de x é $2x$; adicionando 5, tem-se $2x + 5$. Multiplicando esse resultado por 3 tem-se: $3(2x + 5)$.

6. a) Como $\overline{AB}$ é composto de dois segmentos de reta consecutivos e colineares com medidas x e 2, tem-se:
$m(\overline{AB}) = x + 2$

6. b) Como $\overline{AB}$ é composto de três segmentos de reta consecutivos e colineares com medidas y, y e 5, tem-se:
$m(\overline{AB}) = y + y + 5 = 2y + 5$

6. c) Como $\overline{AB}$ é um dos segmentos de reta consecutivos e colineares que compõem o segmento de medida 8, e o outro segmento tem medida z, tem-se:
$m(\overline{AB}) = 8 - z$

7. Oriente os estudantes na elaboração das expressões e depois, na escrita em linguagem comum.

11. a) Como a medida do perímetro de um polígono é a soma das medidas de seus lados, tem-se que a medida do perímetro desse retângulo fica representada algebricamente por:
$6 + a + 6 + a = 12 + 2a$

11. b) Como a medida da área de um retângulo é o produto das medidas de suas 2 dimensões, tem-se que essa medida de área fica representada algebricamente por $6a$.

11. c) O bloco retangular tem 12 arestas, sendo 3 grupos de 4 com a mesma medida, portanto:
$4 \cdot 6 + 4 \cdot a + 4 \cdot b = 24 + 4a + 4b$

11. d) Como o volume de um bloco retangular é o produto de suas 3 dimensões, tem-se que esse volume fica representado algebricamente por: $6ab$.

12. a) Fazendo $x = 1\,000$, temos:
$C = 10\,000 + 2{,}5 \cdot 1\,000 = 10\,000 + 2\,500 = 12\,500$
Portanto, o custo será de R$ 12 500,00.

12. b) O valor arrecadado com a venda das camisetas foi de R$ 20 000,00, pois: $20 \cdot 1\,000 = 20\,000$
Portanto, o lucro foi de R$ 7 500,00, pois:
$20\,000 - 12\,500 = 7\,500$

13. a) Sendo x o número de *megabytes* excedentes, o valor cobrado em reais por eles é expresso algebricamente por $5x$. Então, com o custo dos 2 *gigabytes* do pacote de dados, o valor total V da conta será:
$V = 24{,}9 + 5 \cdot x$, V em reais.

13. b) Utilizando 1 *gigabyte*, como $1 < 2$, o valor da conta nesse caso é de apenas R$ 24,90, pois não ocorreu excesso.
Utilizando 5 *gigabytes*, ocorre um excesso de 3 *gigabytes* em relação ao plano contratado $(5 - 2 = 3)$, então, o valor da conta nesse caso é calculado fazendo $x = 3$:
$V = 24{,}9 + 5 \cdot 3 \Rightarrow V = 24{,}9 + 15 = 39{,}9$
Portanto, pagará R$ 39,90.

16. a) $-4x + 6y + 10x - 2y - x = (-4x + 10x - x) + (6y - 2y) =$
$= 5x + 4y$

16. b) $x + 7x + 10y - 3x = (x + 7x - 3x) + 10y = 5x + 10y$

16. c) $2x - 8y - 6y - y - 9x = (2x - 9x) + (-8y - 6y - y) =$
$= -7x - 15y$

16. d) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{3}x + 2y =$
$= \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{3}x\right) + \left(\frac{1}{4}y + 2y\right) =$
$= \frac{9-2}{6}x + \frac{1+8}{4}y = \frac{7}{6}x + \frac{9}{4}y$

17. a) $4(x - 1) + 3(x + 1) = 4 \cdot x - 4 \cdot 1 + 3 \cdot x + 3 \cdot 1 =$
$= (4x + 3x) + (-4 + 3) = 7x - 1$

17. b) $-2(2x - 4) + 5(-2x - 10) =$
$= -2 \cdot 2x - 2 \cdot (-4) + 5 \cdot (-2x) + 5 \cdot (-10) =$
$= (-4x - 10x) + (8 - 50) = -14x - 42$

17. c) $\frac{2}{5}(x - 0{,}2) - \frac{1}{2}\left(3x - \frac{4}{25}\right) =$
$= \frac{2}{5}x - \frac{2}{5} \cdot 0{,}2 - \frac{1}{2} \cdot 3x - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{25}\right) =$
$= \left[\frac{2}{5}x - \frac{3}{2}x\right] + \left[-\frac{0{,}4}{5} + \frac{4}{50}\right] =$
$= \frac{4 - 15}{10}x + \frac{-4 + 4}{50} = -\frac{11}{10}x$

18. a) Quadrilátero: $x + 3x + 2x + 4x = 10x$;
Triângulo: $z + z + w = 2z + w$.

18. b) Fazendo $x = 3{,}2 \Rightarrow 10x = 10 \cdot 3{,}2 = 32$.
O perímetro mede 32 cm.

18. c) Fazendo $z = 6$ e $w = 5 \Rightarrow 2 \cdot 6 + 5 = 12 + 5 = 17$.
O perímetro mede 17 cm.

19. a) De acordo com o texto, os lucros mensais foram:
- Janeiro: p
- Fevereiro – dobro do de janeiro: $2p$
- Março – igual ao de janeiro: p
- Abril – igual ao de fevereiro: $2p$
- Maio – triplo do de janeiro: $3p$
- Junho – janeiro + fevereiro: $p + 2p = 3p$

19. b) $p + 2p + p + 2p + 3p + 3p = 12p$

20. a) A série numérica gerada pela expressão $2n$ é:
$(2 \cdot 0, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6) =$
$= (0, 2, 4, 6, 8, 10, 12)$
Trata-se, então, da série dos primeiros números naturais pares.

20. b) A série numérica gerada pela expressão $2n + 1$ é:
$(2 \cdot 0 + 1, 2 \cdot 1 + 1, 2 \cdot 2 + 1, 2 \cdot 3 + 1, 2 \cdot 4 + 1, 2 \cdot 5 +$
$+ 1, 2 \cdot 6 + 1) = (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13)$
Trata-se, então, da série dos primeiros números naturais ímpares.

21. a) 1º e 2º termos: $a + a = 2a$
2º e 3º termos: $a + 2a = 3a$
3º e 4º termos: $2a + 3a = 5a$
4º e 5º termos: $3a + 5a = 8a$
É possível observar que a soma de dois termos consecutivos é igual ao termo seguinte.

21. b) $(a + a + 2a + 3a) + a = 7a + a = 8a$
$8a$ corresponde ao 6º termo da sequência.

21. c) Sim. Por exemplo, somando os 6 primeiros termos, tem-se:
$a + a + 2a + 3a + 5a + 8a = 20a$
Então, somando mais uma parcela de valor a, tem-se:
$20a + a = 21a$, que é igual ao 8º termo.

21. d) Substituindo a por 1, os dez primeiros termos são:
1º) $a = 1$; **2º)** $a = 1$; **3º)** $2a = 2 \cdot 1 = 2$; **4º)** $3a = 3 \cdot 1 = 3$; **5º)** $5a = 5 \cdot 1 = 5$; **6º)** $8a = 8 \cdot 1 = 8$; **7º)** $13a = 13 \cdot 1 = 13$; **8º)** $21a = 21 \cdot 1 = 21$; **9º)** $34a = 34 \cdot 1 = 34$; **10º)** $21a + 34a = 55a = 55 \cdot 1 = 55$.

22. a) Equação com incógnita x.

22. b) Equação com incógnita y.

22. c) Sentença matemática fechada.

22. d) Inequação com incógnita x.

22. e) Sentença matemática fechada.

22. f) Equação com incógnita y.

23. a) Igualando os dois membros, forma-se a equação $x^2 - 2x = 3x - 6$.
Com $x = 2$, tem-se que:
- o 1º membro vale: $x^2 - 2x = 2^2 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$
- o 2º membro vale: $3x - 6 = 3 \cdot 2 - 6 = 6 - 6 = 0$

Com $x = 3$, tem-se que:
- o 1º membro vale: $x^2 - 2x = 3^2 - 2 \cdot 3 = 9 - 6 = 3$
- o 2º membro vale: $3x - 6 = 3 \cdot 3 - 6 = 9 - 6 = 3$

Nos dois casos, ocorre igualdade entre o valor numérico dos dois membros.

23. b) Com $x = 4$, tem-se que:
- o 1º membro vale: $x^2 - 2x = 4^2 - 2 \cdot 4 = 16 - 8 = 8$
- o 2º membro vale: $3x - 6 = 3 \cdot 4 - 6 = 12 - 6 = 6$

Nesse caso, não ocorre igualdade.

24. 1º membro: $4y^2 - 5y + 3$; 2º membro: 0. Resposta possível: Não, pois uma igualdade sempre vale nos dois sentidos em que é lida.

25. Uma possível equação é $x + x + x + x + x = 500 + 100$, que também pode ser escrita, de maneira mais simples, como $5x = 600$.

26. Testando os valores das fichas, substituindo na equação para encontrar o que torna a igualdade verdadeira:
$y = -5 \Rightarrow 4 \cdot (-5) + 8 = (-5) + 17 \Rightarrow$
$\Rightarrow -20 + 8 = 12 \Rightarrow -12 = 12$ (falso)
$y = 3 \Rightarrow 4 \cdot 3 + 8 = 3 + 17 \Rightarrow 12 + 8 = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow 20 = 20$ (verdadeiro)
$y = 5 \Rightarrow 4 \cdot 5 + 8 = 5 + 17 \Rightarrow 20 + 8 = 22 \Rightarrow 28 = 22$ (falso)
Portanto, 3 é raiz.

27. a) $x^2 = 4 \Rightarrow 2^2 = 4$ (verdadeiro), portanto é raiz.

27. b) $-2x = 4 \Rightarrow -2 \cdot 2 = 4$ (falso), portanto não é raiz.

27. c) $2^x = 4 \Rightarrow 2^2 = 4$ (verdadeiro), portanto é raiz.

27. d) $x - 2 = 4 \Rightarrow 2 - 2 = 4$ (falso), portanto não é raiz.

27. e) $-x^2 + 2 = x \Rightarrow -(2)^2 + 2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -4 + 2 = 2 \Rightarrow -2 = 2$ (falso), portanto não é raiz.

28. a) $U = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$; $y = 6$

$$\frac{y}{2} = 3 \Rightarrow 2 \cdot \frac{y}{2} = 2 \cdot 3 \Rightarrow y = 6$$

28. b) $U = \mathbb{Z}$; $a = -3$ ou $a = 3$

$$|a| = 3 \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 \end{cases}$$

28. c) $U = \mathbb{N}$
A equação não tem solução em $\mathbb{N}$, pois:

$$\frac{x}{-2} = 3 \Rightarrow -2 \cdot \frac{x}{-2} = -2 \cdot 3 \Rightarrow x = -6$$

30. a) Sim, pois:
$x - 8 = 6 \Rightarrow x = 6 + 8 \Rightarrow x = 14$

30. b) Não, pois:
$2y - 1 = y \Rightarrow y = 1$
$3y = -6 \Rightarrow y = \frac{-6}{3} = -2$
$y + 2 = 5 \Rightarrow y = 5 - 2 = 3$
Todos os valores são diferentes.

30. c) Sim, pois a 2ª e a 3ª sentença fazem parte de um mesmo processo resolutivo da equação enunciada pela 1ª sentença:
$4z + 1 = z + 7$ (1ª sentença) $\Rightarrow$
$\Rightarrow 4z + 1 - 1 = z + 7 - 1 \Rightarrow 4z = z + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4z - z = z + 6 - z \Rightarrow 3z = 6$ (2ª sentença) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{3z}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow z = 2$ (3ª sentença)

30. d) Não, embora a 2ª sentença faça parte de um processo resolutivo da equação enunciada pela 1ª sentença, a 3ª sentença ($a = 3$) não confere o mesmo resultado:

$2a + a = 12$ (1ª sentença) $\Rightarrow 3a = 12$ (2ª sentença) $\Rightarrow$
$\Rightarrow a = \frac{12}{3} \Rightarrow a = 4$ (diferente da 3ª sentença)

31. a) Sim, pois se um bloco com valor x for retirado de cada prato da 1ª balança, ela ficará em situação idêntica à da 2ª balança. Assim, conclui-se que as equações associadas às duas balanças terão a mesma solução.

31. b) 1ª balança:
- Prato esquerdo: $x + x + x + 3 + 3 = 3x + 6$
- Prato direito: $x + x + 3 + 3 + 3 + 3 = 2x + 12$

Então, como há equilíbrio, tem-se a equação:
$3x + 6 = 2x + 12 \Rightarrow 3x + 6 - 2x = 2x + 12 - 2x \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 6 = 12 \Rightarrow x + 6 - 6 = 12 - 6 \Rightarrow x = 6$
2ª balança:
- Prato esquerdo: $x + x + 3 + 3 = 2x + 6$
- Prato direito: $x + 3 + 3 + 3 + 3 = x + 12$

Como há equilíbrio, tem-se a equação:
$2x + 6 = x + 12 \Rightarrow 2x + 6 - x = x + 12 - x \Rightarrow x + 6 = 12 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 6 - 6 = 12 - 6 \Rightarrow x = 6$
Portanto, as equações são equivalentes.

32. a) $x + x + x + x + 5 = x + x + x + 5 + 5 + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 5 = 3x + 15$

32. b) $4x - 3x + 5 - 5 = 3x - 3x + 15 - 5 \Rightarrow x = 10$

32. c) Como $x = 10$, a medida de massa de cada cubo é 10 g.

33. a) $y + 9 = 3 \Rightarrow y + 9 - 9 = 3 - 9 \Rightarrow y = -6$

33. b) $x - 12 = 15 \Rightarrow x - 12 + 12 = 15 + 12 \Rightarrow x = 27$

33. c) $y + 5 = -4 \Rightarrow y + 5 - 5 = -4 - 5 \Rightarrow y = -9$

33. d) $3x = -12 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{-12}{3} \Rightarrow x = -4$

33. e) $3x = 10 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{10}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

33. f) $5x = 90 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{90}{5} \Rightarrow x = 18$

34. Não, a equação do item **e** não teria solução, pois $\frac{10}{3}$ não é um número inteiro. Não, as equações dos itens **a**, **c**, **d** e **e** não teriam solução, pois -6, -9, -4 e $\frac{10}{3}$ não são números naturais.

37. a) Como Maria tem o dobro da idade de Lúcia, sua idade é $2y$.

37. b) Se Maria tivesse 8 anos a menos, sua idade seria $2y - 8$; se Lúcia tivesse 4 anos a mais, sua idade seria $y + 4$; portanto, a equação é: $2y - 8 = y + 4$.

37. c) Resolvendo a equação do item anterior:
$2y - 8 = y + 4 \Rightarrow 2y - y - 8 = y - y + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow y - 8 = 4 \Rightarrow y - 8 + 8 = 4 + 8 \Rightarrow y = 12$
Portanto, a idade de Lúcia é 12 anos.

37. d) A idade de Maria é 24 anos, pois: $2y = 2 \cdot 12 = 24$.

38. a) Se cada cadeira custa x reais, então, cada mesa deve custar $3x$ reais. Assim:
$2 \cdot 3x + 8 \cdot x = 226{,}8 \Rightarrow 6x + 8x = 226{,}8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 14x = 226{,}8 \Rightarrow \frac{14x}{14} = \frac{226{,}8}{14} \Rightarrow x = 16{,}2$
Portanto, cada cadeira custa R$ 16,20.

38. b) Cada mesa custa R$ 48,60, pois $3 \cdot 16{,}2 = 48{,}6$.

38. **c)** Custam R$ 567,00, pois:
$5 \cdot 48{,}6 + 20 \cdot 16{,}2 = 243 + 324 = 567$

39. Sendo x o número de meses que se passaram desde a fotografia, é possível escrever:
$(18 + x) + (20 + x) = 70 \Rightarrow x + x + 18 + 20 = 70 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 38 = 70 \Rightarrow 2x + 38 - 38 = 70 - 38 \Rightarrow 2x = 32 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{2x}{2} = \dfrac{32}{2} \Rightarrow x = 16$
Então, a fotografia foi tirada há 16 meses.

40. Sendo x o número de pontos marcados pela equipe vencedora, tem-se que o número de pontos marcados pela equipe perdedora é $x - 12$ e que é possível escrever:
$x + (x - 12) = 118 \Rightarrow 2x - 12 = 118 \Rightarrow 2x - 12 + 12 =$
$= 118 + 12 \Rightarrow 2x = 130 \Rightarrow \dfrac{2x}{2} = \dfrac{130}{2} \Rightarrow x = 65$
Portanto, a equipe vencedora marcou 65 pontos.

41. Sendo x o número de votos do 1º candidato, tem-se que os números de votos dos outros candidatos são respectivamente: $x - 22$, $x - 130$ e $x - 273$. Assim, o total de votos é:
$x + (x - 22) + (x - 130) + (x - 273) = 5\,219$
Resolvendo:
$x + x + x + x - 22 - 130 - 273 = 5\,219 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x - 425 = 5\,219 \Rightarrow 4x - 425 + 425 = 5\,219 + 425 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x = 5\,644 \Rightarrow \dfrac{4x}{4} = \dfrac{5\,644}{4} \Rightarrow x = 1\,411$
Então, o eleito recebeu 1 411 votos.

42. Sendo x a medida da massa, em kg, de Julinho, tem-se que a medida da massa de Ricardo é $x - 6$ e que
$x + (x - 6) = 80$.
Resolvendo: $2x - 6 = 80 \Rightarrow 2x - 6 + 6 = 80 + 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 86 \Rightarrow \dfrac{2x}{2} = \dfrac{86}{2} \Rightarrow x = 43$
Então, a medida de massa de Julinho é 43 kg.

46. **a)** A equação $(n + 10) \cdot 3 = 72$ é a correta, pois sem os parênteses apenas o número 10 estaria multiplicado por 3, e não a soma $n + 10$.

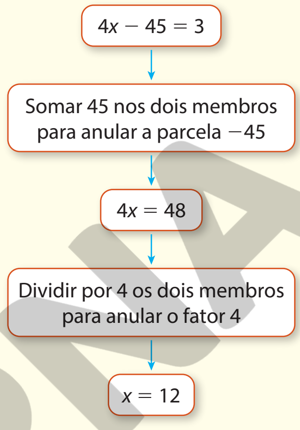
46. **b)** Resolvendo a equação:
$(n + 10) \cdot 3 = 72 \Rightarrow n \cdot 3 + 10 \cdot 3 = 72 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3n + 30 = 72 \Rightarrow 3n + 30 - 30 = 72 - 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3n = 42 \Rightarrow \dfrac{3n}{3} = \dfrac{42}{3} \Rightarrow n = 14$

47. **a)** Se o número de adultos é x, o quádruplo do número de adultos é representado por $4x$. Então, com 2 pessoas a menos, o número de jovens fica expresso por $4x - 2$.

47. **b)** Somando os números de jovens e adultos, tem-se a equação $x + 4x - 2 = 43$, que também pode ser escrita como $5x - 2 = 43$.

47. **c)** Resolvendo a equação do item anterior:
$x + (4x - 2) = 43 \Rightarrow 5x - 2 = 43 \Rightarrow 5x - 2 + 2 = 43 + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x = 45 \Rightarrow \dfrac{5x}{5} = \dfrac{45}{5} \Rightarrow x = 9$
Portanto, compareceram 9 adultos e 34 jovens, pois:
$4x - 2 = 4 \cdot 9 - 2 = 36 - 2 = 34$

48. Primeiro, resolvendo a equação para entender o processo:
$4x - 45 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x - 45 + 45 = 3 + 45 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x = 48 \Rightarrow \dfrac{4x}{4} = \dfrac{48}{4} \Rightarrow x = 12$
O fluxograma é uma resposta pessoal. Uma possibilidade seria:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

49. **a)** Como a medida do comprimento é o triplo da medida da largura, $3x$.

49. **b)** A medida do perímetro será:
$3x + x + 3x + x = 8x$

49. **c)** Como a medida do perímetro é 100 m, então, $8x = 100$.

49. **d)** Resolvendo a equação do item **c**:
$8x = 100 \Rightarrow \dfrac{8x}{8} = \dfrac{100}{8} \Rightarrow x = 12{,}5$
Portanto, a medida da largura é 12,5 m e a medida do comprimento é 37,5 m ($3 \cdot 12{,}5 = 37{,}5$).

49. **e)** A medida da área é 468,75 m², pois
$12{,}5 \cdot 37{,}5 = 468{,}75$.

52. **a)** $4(x + 3) = 20 \Rightarrow 4 \cdot x + 4 \cdot 3 = 20 \Rightarrow 4x + 12 = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 12 - 12 = 20 - 12 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow \dfrac{4x}{4} = \dfrac{8}{4} \Rightarrow x = 2$

52. **b)** $5(2x - 1) = 2(x + 4) \Rightarrow 5 \cdot 2x - 5 \cdot 1 = 2 \cdot x + 2 \cdot 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10x - 5 = 2x + 8 \Rightarrow 10x - 2x - 5 = 2x - 2x + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8x - 5 = 8 \Rightarrow 8x - 5 + 5 = 8 + 5 \Rightarrow 8x = 13 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{8x}{8} = \dfrac{13}{8} \Rightarrow x = \dfrac{13}{8}$

52. **c)** $10 - 2(x + 3) = 8 + 3(2x + 5) \Rightarrow$
$\Rightarrow 10 - 2 \cdot x - 2 \cdot 3 = 8 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10 - 2x - 6 = 8 + 6x + 15 \Rightarrow -2x + 4 = 6x + 23 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x + 4 - 6x = 6x + 23 - 6x \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 - 8x = 23 \Rightarrow 4 - 8x - 4 = 23 - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -8x = 19 \Rightarrow \dfrac{-8x}{8} = \dfrac{19}{8} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -\dfrac{19}{8}$

52. d) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{2} = x - \frac{2}{5} \Rightarrow 10 \cdot \frac{3x}{5} - 10 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 10 \cdot x - 10 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow 6x - 5 = 10x - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x - 5 + 5 = 10x - 4 + 5 \Rightarrow 6x = 10x + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x - 10x = 10x + 1 - 10x \Rightarrow -4x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{-4x}{-4} = \frac{1}{-4} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

52. e) $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2x}{6} - \frac{1}{3} \Rightarrow 12 \cdot \frac{x}{2} + 12 \cdot \frac{3}{4} =$

$= 12 \cdot \frac{2x}{6} - 12 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow 6x + 9 = 4x - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x + 9 - 9 = 4x - 4 - 9 \Rightarrow 6x = 4x - 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x - 4x = 4x - 13 - 4x \Rightarrow 2x = -13 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{-13}{2} \Rightarrow x = -\frac{13}{2}$

52. f) $\frac{3y}{2} - 1 = \frac{3}{4} - 2y \Rightarrow 4 \cdot \frac{3y}{2} - 4 \cdot 1 =$

$= 4 \cdot \frac{3}{4} - 4 \cdot 2y \Rightarrow 6y - 4 = 3 - 8y \Rightarrow 6y - 4 + 8y =$

$= 3 - 8y + 8y \Rightarrow 14y - 4 = 3 \Rightarrow 14y - 4 + 4 =$

$= 3 + 4 \Rightarrow 14y = 7 \Rightarrow \frac{14y}{14} = \frac{7}{14} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

54. Sendo x o número de crianças de cada gênero presentes, tem-se que: o número total de meninas da classe é $x + 5$; o número total de meninos é $x + 1$; o número total de estudantes é $(x + 5) + (x + 1) = x + x + 5 + 1 = 2x + 6$.

Então, da proporção de meninas entre os estudantes, tem-se a equação: $(x + 5) = \frac{5}{9}(2x + 6)$.

Resolvendo:

$9 \cdot (x + 5) = 9 \cdot \frac{5}{9}(2x + 6) \Rightarrow 9 \cdot x + 9 \cdot 5 = 5 \cdot 2x + 5 \cdot 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x + 45 = 10x + 30 \Rightarrow 9x + 45 - 30 = 10x + 30 - 30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x + 15 = 10x \Rightarrow 9x + 15 - 9x = 10x - 9x \Rightarrow 15 = x$

Portanto, o número de estudantes é 36, pois
$2 \cdot 15 + 6 = 30 + 6 = 36$.

55. Sendo x o número total de lótus, o enunciado do problema possibilita escrever:

$x = \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}x + 6$

Resolvendo:

$60 \cdot x = 60 \cdot \frac{1}{3}x + 60 \cdot \frac{1}{5}x + 60 \cdot \frac{1}{6}x +$

$+ 60 \cdot \frac{1}{4}x + 60 \cdot 6 \Rightarrow 60x = 20x + 12x + 10x + 15x + 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow 60x = 57x + 360 \Rightarrow 60x - 57x = 57x - 57x + 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 360 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{360}{3} \Rightarrow x = 120$

Portanto, há 120 lótus.

56. a) Sendo x a capacidade, em litro, do copo, tem-se que a capacidade da garrafa é $3x$; da capacidade do garrafão, tem-se a equação: $4 \cdot (3x) + x = 4 - 0{,}75$. Resolvendo:

$12x + x = 3{,}25 \Rightarrow 13x = 3{,}25 \Rightarrow \frac{13x}{13} = \frac{3{,}25}{13} \Rightarrow x = 0{,}25$

Então, a capacidade do copo é de 0,25 L.

56. b) A capacidade da garrafa é de 0,75 L, pois
$3 \cdot 0{,}25 = 0{,}75$.

Trabalhando a informação

1. a) Considerando os meses de janeiro, dezembro e novembro, a média é de 181 kWh, pois:

$\frac{169 + 186 + 188}{3} = \frac{543}{3} = 181$

1. b) Não é igual, a diferença é de 3 kWh, pois $181 - 178 = 3$.

1. c) Somando-se o consumo de todos os meses do ano, obtém-se 2040. Portanto, a média dos 12 meses é 170 kWh $\left(\frac{2040}{12} = 170\right)$.

2. O consumo médio diário no período foi de 12 kWh ($276 : 23 = 12$). Portanto, o consumo do mês pode ser estimado em 372 kWh ($12 \cdot 31 = 372$).

Exercícios complementares

1. O processo de montagem da expressão, partindo de x como sendo o número pensado por João, é:

I. Após Fernanda dizer "Dobre", a expressão fica: $2x$

II. Após Fernanda dizer "Adicione 8", a expressão fica: $2x + 8$

III. Após Fernanda dizer "Multiplique por 5", a expressão fica: $(2x + 8) \cdot 5$

IV. Após Fernanda dizer "Adicione 60", a expressão fica: $(2x + 8) \cdot 5 + 60$

V. Após Fernanda dizer "Subtraia 100", a expressão fica: $(2x + 8) \cdot 5 + 60 - 100$

Assim, a equação que expressa o resultado final é:
$(2x + 8) \cdot 5 + 60 - 100$

Simplificando:

$(2x + 8) \cdot 5 + 60 - 100 = 2x \cdot 5 + 8 \cdot 5 + 60 - 100 =$
$= 10x + 40 - 40 = 10x$

O valor de x nesse caso é a raiz de:

$10x = 10 \Rightarrow \frac{10x}{10} = \frac{10}{10} \Rightarrow x = 1$

1. a) João pensou no número 1.

1. b) $(2x + 8) \cdot 5 + 60 - 100 = y$

1. c) $y = 10x$

2. O equilíbrio da balança pode ser traduzido pela equação $6m + 10 = 4m + 50$. Resolvendo:

$6m - 4m + 10 = 4m - 4m + 50 \Rightarrow 2m + 10 = 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m + 10 - 10 = 50 - 10 \Rightarrow 2m = 40 \Rightarrow \frac{2m}{2} = \frac{40}{2} \Rightarrow m = 20$

Logo, $m = 20$ g.

3. Sendo x o preço da batedeira, como o liquidificador é 81 reais mais barato, tem-se:

$x + (x - 81) = 291 \Rightarrow 2x - 81 = 291 \Rightarrow 2x - 81 + 81 =$

$= 291 + 81 \Rightarrow 2x = 372 \Rightarrow \dfrac{2x}{2} = \dfrac{372}{2} \Rightarrow x = 186$

O preço é de 186 reais.

4. Sendo j o número procurado por Juliana, pela regra da falsa posição, é possível escrever:

$5j = 30 \Rightarrow \dfrac{5j}{5} = \dfrac{30}{5} \Rightarrow j = 6$

Portanto, a quantidade procurada é $x = 4 \cdot 6 = 24$.

5. Deve-se testar, em cada item, para verificar qual torna a equação verdadeira.

5. a) $5 \cdot 5 + 4 - 2 \cdot 5 = 26 - 3 \cdot 5 \Rightarrow 25 + 4 - 10 = 26 - 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow 19 = 9$ (falso)

5. b) $3 \cdot 5 - 4 = 11 \Rightarrow 15 - 4 = 11 \Rightarrow 11 = 11$ (verdadeiro)

5. c) $5 - (5 + 1) = 12 - (3 \cdot 5 - 2) \Rightarrow 5 - 6 = 12 - 13 \Rightarrow$
$\Rightarrow -1 = -1$ (verdadeiro)

5. d) $4 \cdot 5 + 9 = 3 \cdot 5 + 5 \Rightarrow 20 + 9 = 15 + 5 \Rightarrow 29 = 20$ (falso)

Então, os itens **b** e **c** têm raiz $x = 5$.

6. Resolvendo cada uma das equações:

I) $\dfrac{2y}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{y}{4} - \dfrac{3}{2} \Rightarrow 12 \cdot \dfrac{2y}{3} - 12 \cdot \dfrac{1}{2} =$

$= 12 \cdot \dfrac{y}{4} - 12 \cdot \dfrac{3}{2} \Rightarrow 8y - 6 = 3y - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8y - 6 + 6 = 3y - 18 + 6 \Rightarrow 8y = 3y - 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 8y - 3y = 3y - 12 - 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = -12 \Rightarrow \dfrac{5y}{5} = \dfrac{-12}{5} \Rightarrow y = -\dfrac{12}{5}$

II) $3x = \dfrac{5}{4} \Rightarrow 4 \cdot 3x = 4 \cdot \dfrac{5}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 12x = 5 \Rightarrow \dfrac{12x}{12} = \dfrac{5}{12} \Rightarrow x = \dfrac{5}{12}$

Portanto: $x \cdot y = \dfrac{5}{12} \cdot \left(-\dfrac{12}{5}\right) = -1$

7. a) $7(y - 1) = 2(3y + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 7 \cdot y - 7 \cdot 1 = 2 \cdot 3y + 2 \cdot 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 7y - 7 = 6y + 2 \Rightarrow 7y - 7 + 7 = 6y + 2 + 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 7y = 6y + 9 \Rightarrow 7y - 6y = 6y + 9 - 6y \Rightarrow y = 9$

7. b) $y + 4(y - 1) = 9 - 2(y + 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow y + 4 \cdot y - 4 \cdot 1 = 9 - 2 \cdot y - 2 \cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5y - 4 = 3 - 2y \Rightarrow 5y - 4 + 4 = 3 + 4 - 2y \Rightarrow$
$\Rightarrow 5y = 7 - 2y \Rightarrow 5y + 2y = 7 - 2y + 2y \Rightarrow$
$\Rightarrow 7y = 7 \Rightarrow \dfrac{7y}{7} = \dfrac{7}{7} \Rightarrow y = 1$

7. c) $4(y - 2) + 3(2y - 1) = 6(2y - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow 4 \cdot y - 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2y - 3 \cdot 1 = 6 \cdot 2y - 6 \cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4y - 8 + 6y - 3 = 12y - 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10y - 11 = 12y - 18 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10y - 11 + 11 = 12y - 18 + 11 \Rightarrow 10y = 12y - 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10y - 12y = 12y - 7 - 12y \Rightarrow$
$\Rightarrow -2y = -7 \Rightarrow \dfrac{-2y}{-2} = \dfrac{-7}{-2} \Rightarrow y = \dfrac{7}{2}$

7. d) $8(y + 2) - 5y + 7(2y - 3) = 15 + 5y \Rightarrow$
$\Rightarrow 8y + 16 - 5y + 14y - 21 = 15 + 5y \Rightarrow 17y - 5 = 15 + 5y \Rightarrow$
$\Rightarrow 17y - 5y = 15 + 5 \Rightarrow 12y = 20 \Rightarrow 3y = 5 \Rightarrow y = \dfrac{5}{3}$

8. Sendo x o número procurado, é possível escrever:

$x - 12 = \dfrac{3}{4}x$. Resolvendo:

$4 \cdot x - 4 \cdot 12 = 4 \cdot \dfrac{3}{4}x \Rightarrow 4x - 48 = 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x - 48 - 4x = 3x - 4x \Rightarrow -48 = -x \Rightarrow x = 48$

9. Sendo x o número que Eduardo deveria dividir, é possível escrever:

$3x = \dfrac{x}{3} + 120$. Resolvendo:

$3 \cdot 3x = 3 \cdot \dfrac{x}{3} + 3 \cdot 120 \Rightarrow 9x = x + 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x - x = x - x + 360 \Rightarrow 8x = 360 \Rightarrow \dfrac{8x}{8} = \dfrac{360}{8} \Rightarrow x = 45$

11. Sendo x o número de pessoas, igualando o valor total da despesa de acordo com as duas situações, é possível escrever:

$30x - 90 = 20x + 60$

Resolvendo:

$30x - 20x - 90 = 20x - 20x + 60 \Rightarrow 10x - 90 = 60 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10x - 90 + 90 = 60 + 90 \Rightarrow 10x = 150 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{10x}{10} = \dfrac{150}{10} \Rightarrow x = 15$

Desse modo, o número de pessoas no grupo é 15.

Alternativa **d**.

12. Desenvolvendo a equação:

$\dfrac{x - 4}{5} - \dfrac{x - 5}{2} = \dfrac{x + 2}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10 \cdot \dfrac{x - 4}{5} - 10 \cdot \dfrac{x - 5}{2} = 10 \cdot \dfrac{x + 2}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot (x - 4) - 5 \cdot (x - 5) = x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - 8 - 5x + 25 = x + 2 \Rightarrow -3x + 17 = x + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow -3x + 17 + 3x = x + 2 + 3x \Rightarrow$
$\Rightarrow 17 = 2 + 4x \Rightarrow 17 - 2 = 2 + 4x - 2 \Rightarrow 15 = 4x$

Alternativa **a**.

Verificando

1. O dobro da idade de Bruno é $2b$; o dobro da idade de Bruno mais 3 é $2b + 3$; portanto a equação fica $a = 2b + 3$.

Alternativa **b**.

2. A medida do perímetro, em metro, pode ser expressa algebricamente por $x + y + x + y$, que equivale às expressões $2x + 2y$ e $2(x + y)$.

Portanto, a medida p do perímetro é $p = 2(x + y)$. Substituindo os valores de x e y, obtemos:

$2(1{,}2 + 2) = 2 \cdot 3{,}2 = 6{,}4$

Já a medida A da área, em metro quadrado, pode ser expressa algebricamente por $A = x \cdot y$. Portanto, substituindo x e y pelos valores dados, obtemos:

$1{,}2 \cdot 2 = 2{,}4$

Alternativa **d**.

3. Alternativa **a**, pois:

$$-2ax + x + \frac{8 - 6a}{2} + \frac{1}{2}ax + \frac{7}{3}x - 2(a + x) =$$

$$= -2ax + x + \frac{8}{2} - \frac{6a}{2} + \frac{1}{2}ax + \frac{7}{3}x - 2a - 2x =$$

$$= \frac{1}{2}ax - 2ax + x + \frac{7}{3}x - 2x - \frac{6a}{2} - 2a + \frac{8}{2} =$$

$$= \frac{1 - 4}{2}ax + \frac{3 + 7 - 6}{3}x - 3a - 2a + 4 =$$

$$= -\frac{3}{2}ax + \frac{4}{3}x - 5a + 4$$

4. Alternativa **d**, pois:

4. **a)** Equação do 2º grau com duas incógnitas: a e b.

4. **b)** Inequação com uma incógnita: x.

4. **c)** Sentença matemática fechada.

4. **d)** Equação com uma incógnita: x.

5. Resolvendo:

$$\frac{20}{3}x + 5 = 15 \Rightarrow 3 \cdot \frac{20}{3}x + 3 \cdot 5 = 3 \cdot 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20x + 15 = 45 \Rightarrow 20x + 15 - 15 = 45 - 15 \Rightarrow 20x = 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{20x}{20} = \frac{30}{20} \Rightarrow x = 1{,}5$$

Alternativa **a**.

6. O conjunto U dos números naturais múltiplos de 3 é $U = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$.

Sendo x um elemento desse conjunto, pelas informações do enunciado, então: $2x^2 - 48 = 114$. Resolvendo:

$$2x^2 - 48 + 48 = 114 + 48 \Rightarrow 2x^2 = 162 \Rightarrow \frac{2x^2}{2} = \frac{162}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = 81$$

Então, como $9^2 = 9 \cdot 9 = 81$, conclui-se que $x = 9$.

Alternativa **c**.

7. Sendo x a distância percorrida, em km, a situação pode ser traduzida por $5{,}9 + 1{,}5x = 25{,}4$.

Resolvendo:

$$5{,}9 - 5{,}9 + 1{,}5x = 25{,}4 - 5{,}9 \Rightarrow 1{,}5x = 19{,}5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1{,}5x}{1{,}5} = \frac{19{,}5}{1{,}5} \Rightarrow x = 13$$

Alternativa **c**.

8. A situação pode ser descrita pela equação:

$x + 2x + 4x + 3 \cdot 5 = 106$

Resolvendo: $7x + 15 = 106 \Rightarrow 7x + 15 - 15 = 106 - 15 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 7x = 91 \Rightarrow \frac{7x}{7} = \frac{91}{7} \Rightarrow x = 13$$

Portanto, os vasos medem: 13 cm, 26 cm $(2 \cdot 13)$ e 52 cm $(4 \cdot 13)$.

Alternativa **c**.

Capítulo 6 – Inequações

Objetivos do capítulo e justificativas

- Compreender a ideia de inequação do 1º grau e reconhecer situações que podem ser resolvidas por meio de inequações do 1º grau com uma incógnita.
- Aplicar as técnicas adequadas para resolver inequações do 1º grau com uma incógnita.
- Ler e interpretar dados organizados na forma de gráficos e tabelas.
- Resolver problemas que envolvam inequações do 1º grau.

As relações de igualdade ganham completude quando há a oportunidade de estudar também as ideias relacionadas à desigualdade, como é o caso da inequação. Assim, há uma ampliação no que tange à compreensão algébrica, principalmente quando pensamos sobre as possibilidades de resposta envolvendo o campo numérico em que a situação-problema está inserida. Desse modo, ao trabalhar com inequações, contribuímos para o desenvolvimento das **competências específicas 2** e **6** e da **competência geral 2**.

A aplicação da ideia de inequação na resolução de problemas torna a compreensão sobre o tema significativa para o estudante que, ao enfrentar situações diversas usando o novo conhecimento, tem a oportunidade de criar estratégias e verificar a eficácia delas. Assim, esse objetivo se relaciona com as **competências específicas 2** e **6** e com as **competências gerais 2** e **4**.

Habilidades de leitura e interpretação dos dados representados tanto em gráficos quanto em tabelas estão diretamente ligadas à compreensão da vida em sociedade, à apresentação de informações de diversas áreas do conhecimento e ao combate às *fake news* presentes em diferentes meios digitais, como é o caso de algumas redes sociais, por exemplo, possibilitando uma leitura de mundo com discernimento. Assim, contribuímos para o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 3**, **4**, **6** e **7**.

Em diferentes contextos, a implementação de estratégias de resolução de problemas usando inequações do 1º grau proporciona um exercício de autonomia, em que o estudante pode escolher o caminho que entende ser o melhor para chegar à solução almejada. Dar esse tipo de oportunidade desenvolve as **competências específicas 2** e **6** e a **competência geral 2**.

A atividade 2, da seção *Trabalhando a informação*, propõe aos estudantes que façam uma pesquisa sobre mobilidade urbana, o que contribui para o desenvolvimento da **competência geral 7** e das **competências específicas 6** e **7**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.

Este capítulo trata das sentenças algébricas matemáticas que têm uma incógnita do 1º grau e expressam uma desigualdade, favorecendo a mobilização das habilidades (EF07MA10) e (EF07MA13).

Nele, para a resolução da inequação e a consequente obtenção do conjunto verdade, empregam-se os princípios aditivo e multiplicativo, agora considerando o sinal do fator para determinar a continuidade ou a inversão do sentido da desigualdade, o que favorece o desenvolvimento da habilidade (EF07MA06).

A Unidade Temática **Probabilidade e estatística** é abordada na seção *Trabalhando a informação*, na qual uma pesquisa veiculada pela mídia é analisada por meio de tabelas e gráficos, possibilitando aos estudantes desenvolver a habilidade (EF07MA36).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. As inequações estão nos itens **b**, **c**, **d**, **f**, **h**. Os primeiros membros estão antes do sinal de desigualdade (à esquerda) e são os seguintes: **b)** $7x$; **c)** $x - 5$; **d)** $2x - 5$; **f)** $3x - 2$; **h)** $5x - 3$.
Os segundos membros estão depois do sinal (à direita) e são: **b)** 10; **c)** 0,25; **d)** $x + 6$; **f)** $x + 4$; **h)** $x + 10$.

2. Respostas pessoais. Opções válidas seriam, por exemplo:

2. a) João tem menos de 30 anos e sabemos que sua idade é o dobro da idade de José mais 5. Qual pode ser a idade de José?

2. b) O triplo do número de bolas em uma caixa mais 12 é maior que o número dessas bolas menos 8. Qual pode ser a quantidade de bolas nessa caixa?

3. A inequação é $2x + 3 < x - 2$, e um número que torna a sentença verdadeira é -6, pois:
$2 \cdot (-6) + 3 < (-6) - 2 \Rightarrow -12 + 3 < -6 - 2 \Rightarrow -9 < -8$ (sentença verdadeira).
Mais adiante, os estudantes aprenderão a resolver inequações e a obter a solução para esta, que é $x < -5$.

4. c) Como $8 + 5 = 13$, para ser válida a inequação, o maior número inteiro é 12. No mesmo desenvolvimento, como $8 - 5 = 3$ e a soma das medidas dos dois menores lados tem de ser maior que a medida do terceiro, o menor lado inteiro é 4.

5. Vamos procurar números negativos que solucionam a inequação $2x + 3 \geqslant x - 1$.
O maior inteiro negativo é -1. Vamos atribuir alguns valores para x. Seja,
$x = -1$:
$2 \cdot (-1) + 3 \geqslant (-1) - 1 \Rightarrow -2 + 3 \geqslant -2 \Rightarrow 1 \geqslant -2$ (verdadeira)
$x = -2$:
$2 \cdot (-2) + 3 \geqslant (-2) - 1 \Rightarrow -4 + 3 \geqslant -3 \Rightarrow -1 \geqslant -3$ (verdadeira)
$x = -3$:
$2 \cdot (-3) + 3 \geqslant (-3) - 1 \Rightarrow -6 + 3 \geqslant -4 \Rightarrow -3 \geqslant -4$ (verdadeira)
$x = -4$:
$2 \cdot (-4) + 3 \geqslant (-4) - 1 \Rightarrow -8 + 3 \geqslant -5 \Rightarrow -5 \geqslant -5$ (verdadeira)
$x = -5$:
$2 \cdot (-5) + 3 \geqslant (-5) - 1 \Rightarrow -10 + 3 \geqslant -6 \Rightarrow -7 \geqslant -6$ (falsa)
Então, as soluções são -4, -3, -2 e -1.

7. São verdadeiras as sentenças dos itens **b** e **c**, conforme justificado a seguir.

7. a) Falsa. Dentro da sentença proposta, x não pode ser um número negativo, pois $x > 20$.

7. b) Verdadeira, pois x pode ser 21, que é um número inteiro.

7. c) Verdadeira, pois, se $x > 20$ e $x \leqslant 21$, então pode ser 20,1.

7. d) Falsa, pois $x \leqslant 21$, então não pode ser 21,1.

9. a) A quantidade x de produtos deve ser maior ou igual a 20, então $x \geqslant 20$, com x inteiro.

9. b) x deve ser menor ou igual a 30, então $x \leqslant 30$, com x inteiro.

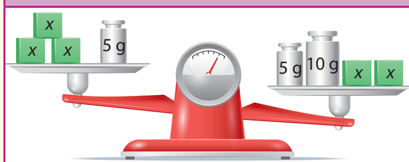
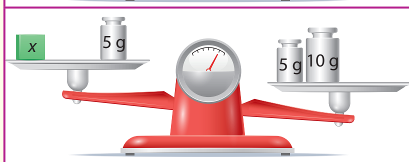
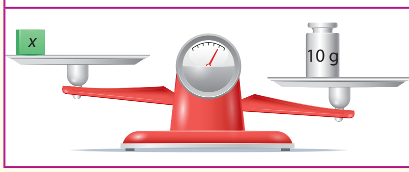
9. c) A capacidade x da caixa entre 20 e 30, então $20 \leqslant x \leqslant 30$, com x inteiro.

10. a) A venda do feirante (calculada no primeiro membro da inequação) precisa ser maior do que 500 (segundo membro), então $9x + 140 > 500$.

10. b) Considerando $x = 40$, temos:
$9 \cdot 40 + 140 > 500 \Rightarrow 360 + 140 > 500 \Rightarrow 500 > 500$
Que é falso, então 40 não é uma solução.
Considerando $x = 41$, temos:
$9 \cdot 41 + 140 > 500 \Rightarrow 369 + 140 > 500 \Rightarrow 509 > 500$
Que é verdadeiro, então 41 é uma solução.

10. c) Como é possível verificar pelos cálculos do item anterior, foram vendidos mais de 40 melões.

11. A balança inicial representa uma inequação, conforme o quadro a seguir, e sua resolução pode orientar-se pelos passos nele apresentados:

Representação na balança	Processo realizado	Inequação
	(situação inicial)	$3x + 5 < 15 + 2x$
	Retirar 2 blocos "x" de cada lado	$x + 5 < 15$
	Retirar 5 g de cada lado	$x < 10$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Então, o maior x inteiro tal que $x < 10$ será $x = 9$, ou seja, 9 gramas.

12. a) Verdadeira, pois foi adicionada a mesma quantidade dos dois lados.

12. b) Falsa; se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} \cdot 2 > 2 \cdot 2$.

12. c) Falsa; se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} - 2 > 2 - 2$.

12. d) Verdadeira, pois $-3 \cdot (-1) = 3$ e $-5 \cdot (-1) = 5$, e $3 < 5$.

12. e) Verdadeira, pois foi subtraído $\frac{5}{3}$ de cada membro.

15. a) $x + 5 < 12 \Rightarrow x + 5 - 5 < 12 - 5 \Rightarrow x < 7$, e, como x é um número natural, $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.

15. b) $2x - 3 > 12 \Rightarrow 2x - 3 + 3 > 12 + 3 \Rightarrow 2x > 15 \Rightarrow x > \frac{15}{2}$ e x é racional.

15. c) $3x - 4 > 5x - 10 \Rightarrow 3x - 4 + 4 > 5x - 10 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x > 5x - 6 \Rightarrow 3x - 5x > 5x - 6 - 5x \Rightarrow -2x > -6$
Ao multiplicar por -1, invertem-se todos os sinais, incluindo o sinal da desigualdade, então:
$-2x > -6 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < \frac{6}{2} \Rightarrow x < 3$
Assim, $x = ..., -2, -1, 0, 1$ e 2.

15. d) $4x + 3 < x - 18 \Rightarrow 4x + 3 - 3 - x < x - 18 - 3 - x \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x < -21 \Rightarrow x < \frac{-21}{3} \Rightarrow x < -7$
Assim, não tem solução para os números naturais.

16. a) $4(x + 3) > 2(x - 1) \Rightarrow 4x + 12 > 2x - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 12 - 2x > 2x - 2 - 2x \Rightarrow 2x + 12 > -2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 12 - 12 > -2 - 12 \Rightarrow 2x > -14 \Rightarrow$
$\Rightarrow x > \frac{-14}{2} \Rightarrow x > -7$

16. b) $3(x + 2) > 2(2x + 4) \Rightarrow 3x + 6 > 4x + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x + 6 - 4x > 4x + 8 - 4x \Rightarrow -x + 6 > 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x + 6 - 6 > 8 - 6 \Rightarrow -x > 2 \Rightarrow x < -2$

16. c) $5x - (x - 2) \leqslant 6 \Rightarrow 5x - x + 2 \leqslant 6 \Rightarrow 4x + 2 \leqslant 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 2 - 2 \leqslant 6 - 2 \Rightarrow 4x \leqslant 4 \Rightarrow x \leqslant \frac{4}{4} \Rightarrow x \leqslant 1$

16. d) $7(x - 2) < 2(3x + 4) \Rightarrow 7x - 14 < 6x + 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 7x - 14 - 6x < 6x + 8 - 6x \Rightarrow x - 14 < 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 14 + 14 < 8 + 14 \Rightarrow x < 22$

16. e) $x - 2(x - 3) \leqslant x + 5 \Rightarrow x - 2x + 6 \leqslant x + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow -x + 6 \leqslant x + 5 \Rightarrow -x + 6 - x \leqslant x + 5 - x \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x + 6 \leqslant 5 \Rightarrow -2x + 6 - 6 \leqslant 5 - 6 \Rightarrow -2x \leqslant -1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$

17. Nessa situação, como o perímetro é menor que 32, então $2x + 21 < 32$. Sabendo que $x > 4$ e que buscamos um valor inteiro, vamos começar substituindo x por 5; assim, temos:
$(2 \cdot 5) + 21 < 32 \Rightarrow 10 + 21 < 32 \Rightarrow 31 < 32$ (verdadeira).
Agora, vamos substituir x por 6:
$(2 \cdot 6) + 21 < 32 \Rightarrow 12 + 21 < 32 \Rightarrow 33 < 32$ (falsa).
Assim, apenas 5 é um valor inteiro possível para x.

18. a) $2(x + 3) \leqslant 4(x - 1) \Rightarrow 2x + 6 \leqslant 4x - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 6 - 4x \leqslant 4x - 4 - 4x \Rightarrow -2x + 6 \leqslant -4 \Rightarrow$
$\Rightarrow -2x + 6 - 6 \leqslant -4 - 6 \Rightarrow -2x \leqslant -10 \Rightarrow 2x \geqslant 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geqslant \frac{10}{2} \Rightarrow x \geqslant 5$
Assim, os números menores que 8 que solucionam a inequação são: 5, 6 e 7.

18. b) Se para solucionar a inequação o número precisa ser maior do que 5, o menor inteiro com três algarismos que é solução é 100.

19. Pode-se escrever a seguinte inequação para representar esse problema, sendo x a quantidade de copos:
$10 - 0{,}25 \cdot x > 3$.
Resolvendo: $0{,}25x + 3 < 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0{,}25x + 3 - 3 < 10 - 3 \Rightarrow 0{,}25x < 7 \Rightarrow x < \frac{7}{0{,}25} \Rightarrow x < 28$
Então, podem ser tirados 27 copos.

20. Pode-se escrever a seguinte inequação para representar esse problema, sendo x a quantidade inteira de litros:
$12x > 700 \Rightarrow x > \frac{700}{12} \Rightarrow x > 58$
Assim, é necessário ter no mínimo 59 litros completos.

21. Se a idade da pessoa é x, então a idade p do pai é $p = x + 25$, e existe a relação:
$3x + p > 65 \Rightarrow 3x + x + 25 > 65 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 25 - 25 > 65 - 25 \Rightarrow 4x > 40 \Rightarrow x > \frac{40}{4} \Rightarrow x > 10$
Buscando a idade mínima do pai, substituímos x por 10 e obtemos:
$3x + p > 65 \Rightarrow 3 \cdot 10 + p > 65 \Rightarrow 30 + p > 65 \Rightarrow$
$\Rightarrow 30 + p - 30 > 65 - 30 \Rightarrow p > 35$
Assim, a idade mínima do pai é 36 anos.

22. a) Em $x - \frac{1}{3} > \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, considerando $x = 2$, obtemos:
$2 - \frac{1}{3} > \frac{2}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{6}{3} - \frac{1}{3} > \frac{4}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{5}{3} > \frac{5}{4}$, que é verdadeira. Então, 2 é uma solução.

22. b) Resolvendo:
$x - \frac{1}{3} > \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow x - \frac{1}{3} - \frac{x}{2} > \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{x}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{2x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} > \frac{1}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{x}{2} > \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \Rightarrow \frac{x}{2} > \frac{7}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right) > \left(\frac{7}{12}\right) \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > \frac{7 \cdot 2}{12} \Rightarrow x > \frac{14}{12} \Rightarrow x > \frac{7}{6}$

Então, não há um número negativo que seja resposta, porque a condição é que x seja maior que $\frac{7}{6}$.

23. $12 \cdot 5 \cdot x > 1\,200 \Rightarrow 60x > 1\,200 \Rightarrow x > \frac{1200}{60} \Rightarrow x > 20$

Assim, o comprimento do outro bloco deve ter no mínimo 21 cm.

24. a) Resposta possível: Ela substituiu valores no lugar de x que fossem menores do que 10, por exemplo, 9, e verificou se obteve uma sentença verdadeira. Ressalte aos estudantes que a verificação por substituição de valores, no caso das inequações, pode não ser suficiente para obter todas as respostas possíveis.

24. b) O erro está na linha 3, que deveria ser $2x - 2 - 4 + x < 4$, devido à propriedade distributiva necessária na expressão $-(4 - x) = -4 - (-x) = -4 + x$.

24. c) Partindo da correção da linha 3:

$2x - 2 - 4 + x < 4 \Rightarrow 3x - 6 < 4 \Rightarrow 3x - 6 + 6 < 4 + 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x < 10 \Rightarrow x < \frac{10}{3}$

25. Resposta pessoal. A resolução da inequação é:

$5x + 2 \leqslant 3x - 15 \Rightarrow 5x + 2 - 3x \leqslant 3x - 15 - 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 2 \leqslant -15 \Rightarrow 2x + 2 - 2 \leqslant -15 - 2 \Rightarrow 2x \leqslant -17 \Rightarrow x \leqslant -\frac{17}{2}$

Exercícios complementares

1. Resolvendo a inequação:

$5x - 2 < 2x + 3 \Rightarrow 5x - 2 + 2 < 2x + 3 + 2 \Rightarrow 5x < 2x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x - 2x < 2x + 5 - 2x \Rightarrow 3x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$

Então, entre os números -3, 0 e 3, apenas -3 e 0 são soluções da inequação.

2. a) $4(x + 3) > 2(x - 1) \Rightarrow 4x + 12 > 2x - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x + 12 - 2x > 2x - 2 - 2x \Rightarrow 2x + 12 > -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 12 - 12 > -2 - 12 \Rightarrow 2x > -14 \Rightarrow x > -\frac{14}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x > -7$

2. b) $x - 2(x - 3) \leqslant x + 5 \Rightarrow x - 2x + 6 \leqslant x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2x + 6 - x \leqslant x + 5 - x \Rightarrow -2x + 6 \leqslant 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2x + 6 - 6 \leqslant 5 - 6 \Rightarrow -2x \leqslant -1 \Rightarrow 2x \geqslant 1 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$

2. c) $2 + 5(3x + 1) > 0 \Rightarrow 2 + 15x + 5 > 0 \Rightarrow 7 + 15x - 7 > -7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 15x > -7 \Rightarrow x > -\frac{7}{15}$

4. Esse problema pode ser resolvido utilizando-se a seguinte inequação, sendo x a medida do comprimento do menor barbante e um número inteiro:

$(x + 20) + x > 100$.

Resolvendo a inequação:

$2x + 20 > 100 \Rightarrow 2x + 20 - 20 > 100 - 20 \Rightarrow 2x > 80 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > \frac{80}{2} \Rightarrow x > 40$

Então, a medida mínima de comprimento é 41 cm.

5. a) A empresa pode embalar, no máximo, 3 000 produtos em embalagens do tipo A (pois $100 \cdot 30 = 3\,000$), e 2 000 em embalagens do tipo B (pois $100 \cdot 20 = 2\,000$), em um total de no máximo 5 000 (pois $3\,000 + 2\,000 = 5\,000$). Ela pode embalar no mínimo 2 000 produtos em embalagens do tipo A (pois $100 \cdot 20 = 2\,000$) e 1 500 em embalagens do tipo B (pois $100 \cdot 15 = 1\,500$), em um total de 3 500 unidades do produto no mínimo (pois $2\,000 + 1\,500 = 3\,500$).

5. b) Considerando as quantidades mínima e máxima, sendo x a quantidade de produtos, então: $3\,500 \leqslant x \leqslant 5\,000$.

5. c) Não poderá embalar 5 001, pois o máximo possível são 5 000 unidades. E poderá embalar 4 896, pois essa quantidade está entre 3 500 e 5 000.

6. Resolvendo a inequação igualando os denominadores:

$\frac{x - 2}{3} + 2x \geqslant \frac{5x}{2} \Rightarrow \frac{2 \cdot (x - 2)}{6} + \frac{6 \cdot 2x}{6} \geqslant \frac{3 \cdot 5x}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x - 4 + 12x \geqslant 15x \Rightarrow 2x - 4 + 12x + 4 \geqslant 15x + 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 14x \geqslant 15x + 4 \Rightarrow 14x - 15x \geqslant 15x + 4 - 15x \Rightarrow -x \geqslant 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leqslant -4$

Então, não existe número racional maior do que -4 como solução, pois todos os números que são solução são menores ou iguais a -4.

7. Resolvendo a inequação:

$5 - \frac{x}{2} \leqslant \frac{x}{3} + 1 \Rightarrow \frac{6 \cdot 5}{6} - \frac{3x}{6} \leqslant \frac{2x}{6} + \frac{6}{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow 30 - 3x \leqslant 2x + 6 \Rightarrow 30 - 3x - 2x \leqslant 2x + 6 - 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow 30 - 5x \leqslant 6 \Rightarrow 30 - 5x - 30 \leqslant 6 - 30 \Rightarrow -5x \leqslant -24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5x \geqslant 24 \Rightarrow x \geqslant \frac{24}{5} \Rightarrow x \geqslant 4{,}8$

Assim, os números inteiros menores que 10 que satisfazem a inequação são 5, 6, 7, 8 e 9.

8. Essa situação pode ser resolvida utilizando a seguinte inequação, sendo x a quantidade de garrafas:

$100 - 0{,}9 \cdot x > 10$. Resolvendo:

$100 - 0{,}9 \cdot x - 10 > 10 - 10 \Rightarrow 90 - 0{,}9 \cdot x > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 90 - 0{,}9 \cdot x - 90 > 0 - 90 \Rightarrow -0{,}9x > -90 \Rightarrow 0{,}9x < 90 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \frac{90}{0{,}9} \Rightarrow x < 100$

Como x precisa ser menor do que 100, é possível encher no máximo 99 garrafas.

9. Com as informações do problema, é possível elaborar a inequação a seguir, em que x é o número de meninos matriculados na turma: $x - 2 > 10$. Resolvendo:

$x - 2 > 10 \Rightarrow x - 2 + 2 > 10 + 2 \Rightarrow x > 12$

Como x é maior que 12, x é no mínimo 13. Sabendo que há, no mínimo, 10 meninas matriculadas, o menor número possível de estudantes é 23, pois $10 + 13 = 23$.

Verificando

1. A inequação é $12L > 500$. Alternativa **a**.
2. Para escrever essa inequação, o lado mais pesado da balança é de maior valor, então: $5x + 100 > 2x + 200$. Alternativa **c**.
3. Sendo x a quantidade de tempo, em minutos, uma inequação que resolve esse problema é $450x > 36\,000$.

   Resolvendo: $x > \dfrac{36\,000}{450} \Rightarrow x > 80$, ou seja, o tempo precisa ser maior do que 80 minutos, que equivale a 1 hora e 20 minutos. Alternativa **c**.
4. Resolvendo:

   $$-3x < 18 \Rightarrow 3x > -18 \Rightarrow x > \frac{-18}{3} \Rightarrow x > -6$$

   Alternativa **d**.
5. Resolvendo:

   $$\frac{x}{2} + \frac{5x}{4} > 3x + 2 \Rightarrow \frac{2x}{4} + \frac{5x}{4} > \frac{4 \cdot 3x}{4} + \frac{4 \cdot 2}{4} \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow 2x + 5x > 12x + 8 \Rightarrow 7x > 12x + 8 \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow 7x - 12x > 12x + 8 - 12x \Rightarrow -5x > 8 \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow 5x < -8 \Rightarrow x < -\frac{8}{5}$$

   Alternativa **a**.

Capítulo 7 – Sistemas de equações

Objetivos do capítulo e justificativas

- Localizar e representar pontos, retas e polígonos no sistema cartesiano.
- Relacionar equação do 1º grau com duas incógnitas e reta no sistema cartesiano.
- Reconhecer problemas que recaem em sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas.
- Compreender e aplicar as técnicas de resolução de sistemas de equações.
- Enumerar as possibilidades de ocorrência de um evento e representá-lo por meio de pares ordenados.
- Interpretar e construir um gráfico de linha.

Usar o sistema cartesiano como recurso para a representação de elementos geométricos possibilita aos estudantes estabelecer relações importantes entre **Álgebra** e **Geometria**, aprofundando o estudo no campo da chamada Geometria Analítica. Desse modo, este objetivo relaciona-se com as **competências específicas 2** e **3** e com as **competências gerais 2** e **4**.

Ao relacionar equações do 1º grau com a representação de retas no plano cartesiano, os estudantes terão a possibilidade de unir os conceitos algébricos e geométricos, verificando as características das coordenadas dos pontos de uma reta desenhada no sistema cartesiano e uma equação de 1º grau com duas incógnitas, tornando mais significativos os estudos no campo da Geometria Analítica, lembrando que isso pode ser feito também por meio de ferramentas digitais. Ao trabalharmos com esses conceitos, contribuímos para o desenvolvimento das **competências específicas 2**, **3** e **5** e das **competências gerais 2** e **4**.

Os diferentes contextos que envolvem problemas que podem ser resolvidos usando sistemas de equações do 1º grau abrangem diversas áreas do conhecimento. Além disso, é a partir desse reconhecimento que os estudantes conseguirão perceber a importância de saber resolver esse tipo de sistema de equações. A partir da experimentação e aplicação de diferentes estratégias, os estudantes conseguem decidir o melhor caminho para determinar a solução de um problema. Desse modo, é favorecido o trabalho com as **competências específicas 2**, **3** e **6** e as **competências gerais 2** e **4**.

Verificar a frequência de um evento e organizá-lo usando pares ordenados possibilita aos estudantes compreender a construção de uma tabela de frequências, passo fundamental para o cálculo de medidas de tendência central que envolvam situações com tais características, e ler informações em gráficos de linhas com discernimento possibilita aos estudantes trabalhar com informações de diversas áreas do conhecimento, além de apresentar dados pesquisados sobre situações que lhe são próximas e façam sentido para o contexto em que vivem. Esse trabalho foi desenvolvido na seção *Trabalhando a informação* com a temática desemprego, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 7** e das **competências específicas 6** e **7**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

Neste capítulo, sentenças matemáticas de 1º grau que expressam uma variável em função de outra são representadas no plano cartesiano por pontos alinhados, ou seja, por pontos de uma mesma reta, o que contribui para o trabalho com a habilidade (EF07MA10). Posteriormente, essas sentenças são consideradas como equações com duas incógnitas de 1º grau e o conjunto solução é formado por pares ordenados cuja representação gráfica também são pontos de uma mesma reta.

Da equação com duas incógnitas de 1º grau evolui-se para o sistema com duas incógnitas de 1º grau, que traduzem situações-problema em diversos contextos. Os estudantes têm contato com o método de resolução por substituição, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA13) e (EF07MA18). O estudo desse tipo de sistema de equações será retomado e aprofundado no 8º ano (EF08MA06 e EF08MA07), com a resolução pelo método da adição e com a resolução gráfica de pontos alinhados em duas retas cujas posições relativas indicam e classificam o sistema em possível e determinado, impossível ou possível e indeterminado.

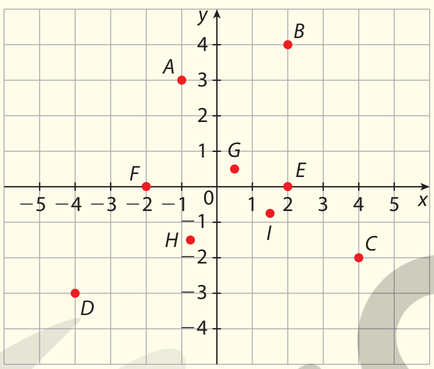
Na seção *Trabalhando a informação*, o conceito de probabilidade é distinguido do conceito de possibilidade e é exemplificado utilizando-se o conceito de par ordenado, desenvolvido no item que inicia o capítulo; assim, o trabalho neste tópico está relacionado com as habilidades (EF07MA02) e (EF07MA34). Esse conceito será ampliado no 8º ano (EF08MA22).

Comentários e resoluções

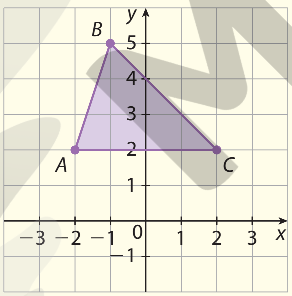
Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

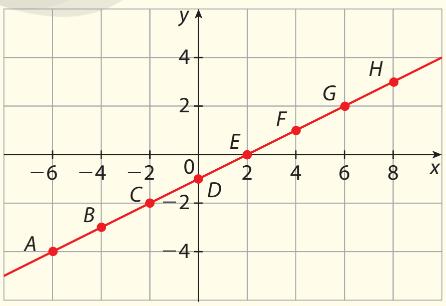
2.



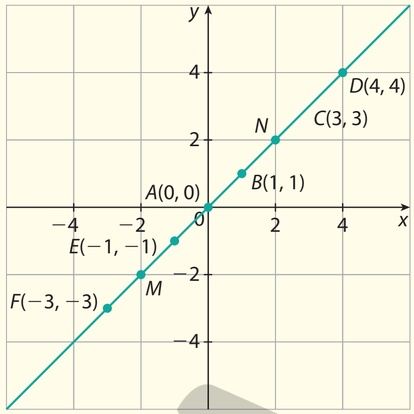
3.



6. a) Podem-se escolher quaisquer pontos da reta $y = 0{,}5x - 1$ representada no plano cartesiano:

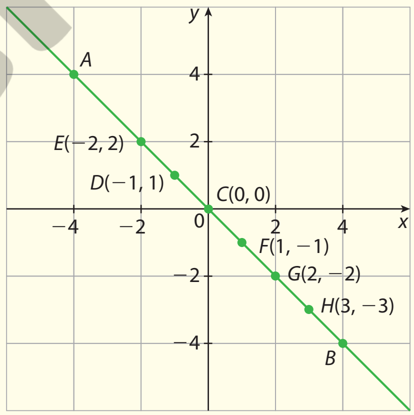


6. b) Assinalando os pontos M e N e traçando a reta:



Resposta pessoal. Exemplo de seis pontos dessa reta: $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(4, 4)$, $E(-1, -1)$ e $F(-3, -3)$. As coordenadas dos pontos observados sugerem a relação $x = y$. Como as coordenadas dos pontos $M(-2, -2)$ e $N(2, 2)$ são opostas, esses pontos são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano.

6. c) Assinalando os pontos A e B considerados, obtemos a reta:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Podem-se escolher quaisquer seis pontos dela, como os de coordenadas destacadas no plano cartesiano. Seis pontos dessa reta: $C(0, 0)$, $D(-1, 1)$, $E(-2, 2)$, $F(1, -1)$, $G(2, -2)$ e $H(3, -3)$.

As coordenadas dos pontos observados sugerem a relação $x = -y$ ou $x + y = 0$. Como as duas coordenadas dos pontos $A(4, -4)$ e $B(-4, 4)$ são opostas, esses pontos são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano.

9. a) Fazendo $y = 7$, obtemos:

$4x - 2 \cdot 7 = 6 \Rightarrow 4x - 14 = 6 \Rightarrow 4x = 6 + 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 20 \Rightarrow x = 5$

9. b) Considerando x por $\frac{1}{2}$, obtemos: $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) - 2y = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 - 2y = 6 \Rightarrow 2 - 2y - 2 = 6 - 2 \Rightarrow -2y = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y = -4 \Rightarrow \frac{2y}{2} = \frac{-4}{2} \Rightarrow y = -2$

9. c) Considerando $x = 1{,}5$, obtemos:

$4 \cdot (1{,}5) - 2y = 6 \Rightarrow 6 - 2y = 6 \Rightarrow 6 - 2y - 6 = 6 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow \frac{-2y}{-2} = \frac{0}{-2} \Rightarrow y = 0$

9. d) Considerando $y = -3$, obtemos:

$4x - 2 \cdot (-3) = 6 \Rightarrow 4x + 6 = 6 \Rightarrow 4x + 6 - 6 = 6 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow \frac{4x}{4} = \frac{0}{4} \Rightarrow x = 0$

10. a) Com $x = 9$, obtemos:

$9 + y = 4 \Rightarrow 9 + y - 9 = 4 - 9 \Rightarrow y = -5$

10. b) Com $x = -3$, obtemos:

$-3 + y = 4 \Rightarrow -3 + y + 3 = 4 + 3 \Rightarrow y = 7$

10. c) Com $x = 2{,}5$, obtemos:

$2{,}5 + y = 4 \Rightarrow 2{,}5 + y - 2{,}5 = 4{,}0 - 2{,}5 \Rightarrow y = 1{,}5$

11. Resposta pessoal. Por exemplo, se escolhermos o número 5, a equação fica: $5x + 5y = 20$.

Substituindo x por 9, obtemos:

$5 \cdot 9 + 5y = 20 \Rightarrow 45 + 5y = 20 \Rightarrow 45 + 5y - 45 = 20 - 45 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = -25 \Rightarrow \frac{5y}{5} = \frac{-25}{5} \Rightarrow y = -5$

Com $x = -3$, obtemos:

$5 \cdot (-3) + 5y = 20 \Rightarrow -15 + 5y = 20 \Rightarrow -15 + 5y + 15 =$

$= 20 + 15 \Rightarrow 5y = 35 \Rightarrow \frac{5y}{5} = \frac{35}{5} \Rightarrow y = 7$

Com $x = 1{,}5$, obtemos:

$5 \cdot 1{,}5 + 5y = 20 \Rightarrow 7{,}5 + 5y = 20 \Rightarrow 7{,}5 + 5y - 7{,}5 = 20 - 7{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 12{,}5 \Rightarrow \frac{5y}{5} = \frac{12{,}5}{5} \Rightarrow y = 1{,}5$

As respostas são as mesmas do exercício anterior.

14. Oriente os estudantes na elaboração dos problemas sobre equação do 1º grau.

15. Para verificar se o par (5, –3) é solução do sistema, vamos substituir x por 5 e y por –3 nas equações:

$x + y = 2 \Rightarrow 5 + (-3) = 2 \Rightarrow 2 = 2$ (verdadeiro)

$3x + 2y = 9 \Rightarrow 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) = 9 \Rightarrow 15 - 6 = 9 \Rightarrow 9 = 9$ (verdadeiro)

17. Sendo a o número de peixes pescados pelo avô e p o número de peixes pescados pelo pai, é possível escrever o sistema:

$$\begin{cases} a + p = 25 \\ a = 4p \end{cases}$$

Substituindo a por $4p$ na 1ª equação:

$(4p) + p = 25 \Rightarrow 5p = 25 \Rightarrow \frac{5p}{5} = 5$

Substituindo p por 5 na 2ª equação:

$a = 4 \cdot (5) \Rightarrow a = 20$

Como o par (20, 5) é a solução do sistema, conclui-se que o avô pescou 20 peixes e o pai, 5 peixes.

19. a) Substituindo x na 2ª equação por $5y$, obtemos:

$5y + y = 12 \Rightarrow 6y = 12 \Rightarrow y = 2$

Como $x = 5y$, temos que $x = 2 \cdot 5$, isto é, $x = 10$.

19. b) Isolando x na 1ª equação:

$x - y = 10 \Rightarrow x = 10 + y$

Substituindo x por $(10 + y)$ na 2ª equação:

$2(10 + y) + 3y = 10 \Rightarrow 20 + 2y + 3y = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y = 10 - 20 \Rightarrow 5y = -10 \Rightarrow \frac{5y}{5} = \frac{-10}{5} \Rightarrow y = -2$

Substituindo y por –2 na equação $x = 10 + y$, obtemos:

$x = 10 + (-2) \Rightarrow x = 8$

O par (8, –2) é a solução do sistema.

19. c) Isolando x na 1ª equação:

$x + y = 3 \Rightarrow x = 3 - y$

Substituindo x por $(3 - y)$ na 2ª equação:

$12(3 - y) - 9y = -20 \Rightarrow 36 - 12y - 9y = -20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 - 21y = -20 \Rightarrow 36 - 21y - 36 = -20 - 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow -21y = -56 \Rightarrow 21y = 56 \Rightarrow \frac{21y}{21} = \frac{56}{21} \Rightarrow y = \frac{8}{3}$

Substituindo y por $\frac{8}{3}$ na 1ª equação, obtemos:

$x = 3 - y = 3 - \frac{8}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

O par $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$ é a solução do sistema.

19. d) Isolando y na 1ª equação:

$2x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - 2x$.

Substituindo y por $(7 - 2x)$ na 2ª equação:

$5x - 2(7 - 2x) = -5 \Rightarrow 5x - 14 + 4x = -5 \Rightarrow 9x - 14 = -5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x - 14 + 14 = -5 + 14 \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow \frac{9x}{9} = \frac{9}{9} \Rightarrow x = 1$

Substituindo x por 1 na equação:

$y = 7 - 2x \Rightarrow y = 7 - 2 \cdot (1) \Rightarrow y = 7 - 2 = 5$

O par (1, 5) é a solução do sistema.

20. a) A partir da equação $x + y = 6$, temos: para $(1, a)$

$1 + a = 6 \Rightarrow 1 + a - 1 = 6 - 1 \Rightarrow a = 5$;

para $(3, b)$

$3 + b = 6 \Rightarrow 3 + b - 3 = 6 - 3 \Rightarrow b = 3$;

e para $(5, c)$

$5 + c = 6 \Rightarrow 5 + c - 5 = 6 - 5 \Rightarrow c = 1$

20. b) Na equação $x - y = 2$, temos: para $(1, \ell)$

$1 - \ell = 2 \Rightarrow 1 - \ell - 1 = 2 - 1 \Rightarrow -\ell = 1 \Rightarrow \ell = -1$;

para $(3, m)$

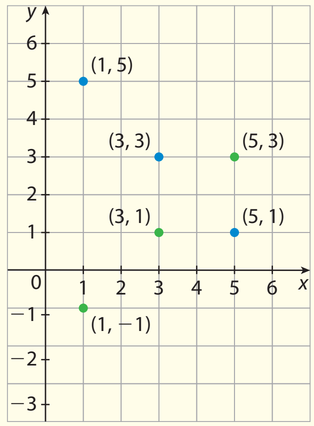
$3 - m = 2 \Rightarrow 3 - m - 3 = 2 - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -m = -1 \Rightarrow m = 1$;

para $(5, n)$

$5 - n = 2 \Rightarrow 5 - n - 5 = 2 - 5 \Rightarrow -n = -3 \Rightarrow n = 3$

20. c) Representando os pontos (1, 5), (3, 3) e (5, 1) do item **a** em azul e os pontos (1, –1), (3, 1) e (5, 3) do item **b** em verde,



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

20. d) Observando o traço dos gráficos, é possível estimar que a solução do sistema é o par (4, 2), pois é um ponto que pertence às duas retas formadas a partir dos pontos encontrados em cada item.

20. e) Resolvendo o sistema:

isolamos x na 2ª equação:

$x - y = 2 \Rightarrow x = 2 + y$

Substituindo x por $(2 + y)$ na 1ª equação:

$(2 + y) + y = 6 \Rightarrow 2 + 2y = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 + 2y - 2 = 6 - 2 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2y}{2} = \dfrac{4}{2} \Rightarrow y = 2$

Substituindo y por 2 na equação

$x = 2 + y \Rightarrow x = 2 + 2 \Rightarrow x = 4$

O par (4, 2) é a solução do sistema.

21. Sendo x o comprimento e y a largura do terreno, em metro, é possível escrever o sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 84 \\ x = 18 + y \end{cases}$$

Substituindo x por $(18 + y)$ na 1ª equação:

$2(18 + y) + 2y = 84 \Rightarrow 36 + 2y + 2y = 84 \Rightarrow 36 + 4y = 84 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 + 4y - 36 = 84 - 36 \Rightarrow 4y = 48 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{4y}{4} = \dfrac{48}{4} \Rightarrow y = 12$

Substituindo y por 12 na equação:

$x = 18 + y = 18 + 12 \Rightarrow x = 30$

Como o par (30, 12) é a solução do sistema, as dimensões do retângulo são 30 m × 12 m e sua área mede 360 m² $(30 \cdot 12 = 360)$.

22. a) Resposta pessoal. São soluções de $2x - 2y = 2$, por exemplo: (1, 0), pois $2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 2$; (2, 1), pois $2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2$; e (3, 2), pois $2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 2$.

22. b) Resposta pessoal.

São soluções de $x - y = 23$, por exemplo: (23, 0), pois $23 - 0 = 23$; (24, 1), pois $24 - 1 = 23$; e (25, 2), pois $25 - 2 = 23$.

22. d) Resolvendo o sistema: $\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 23 \end{cases}$

isolando x na 2ª equação, temos:

$x - y = 23 \Rightarrow x = 23 + y$

Substituindo x por $(23 + y)$ na 1ª equação:

$2(23 + y) - 2y = 2 \Rightarrow 46 + 2y - 2y = 2 \Rightarrow 46 = 2$ (falso)

Como a sentença obtida é falsa, o sistema não tem solução.

23. Sendo x o número de figurinhas de Mauro e y o de Laura, é possível escrever o sistema:

$$\begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ y + 5 = 2(x - 5) \end{cases}$$

Isolando y na 2ª equação:

$y + 5 = 2(x - 5) \Rightarrow y + 5 - 5 = 2x - 10 - 5 \Rightarrow y = 2x - 15$

Substituindo y por $(2x - 15)$ na 1ª equação:

$x + 3 = (2x - 15) - 3 \Rightarrow x + 3 = 2x - 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3 - 2x = 2x - 18 - 2x \Rightarrow -x + 3 = -18 \Rightarrow$

$\Rightarrow -x + 3 - 3 = -18 - 3 \Rightarrow -x = -21 \Rightarrow x = 21$

Substituindo x por 21 na equação:

$y = 2x - 15 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 2 \cdot 21 - 15 = 27$

Como o par (21, 27) é a solução do sistema, conclui-se que Mauro possui 21 figurinhas e Laura possui 27 figurinhas.

Pense mais um pouco

Página 167

2. Sendo t o número de taças e c o número de caixas, é possível escrever o seguinte sistema de equações para representar essa situação: $\begin{cases} t = 7c + 19 \\ t = 10c - 5 \end{cases}$

2. a) Resolvendo o sistema, substituindo t por $7c + 19$ na 2ª equação:

$7c + 19 = 10c - 5 \Rightarrow 7c + 19 - 19 = 10c - 5 - 19 \Rightarrow$

$\Rightarrow 7c = 10c - 24 \Rightarrow 7c - 10c = 10c - 24 - 10c \Rightarrow$

$\Rightarrow -3c = -24 \Rightarrow 3c = 24 \Rightarrow \dfrac{3c}{3} = \dfrac{24}{3} \Rightarrow c = 8$

Portanto, há 8 caixas.

2. b) Substituindo c por 8 na 1ª equação:

$t = 7 \cdot (8) + 19 \Rightarrow t = 56 + 19 \Rightarrow t = 75$

Portanto, há 75 taças.

Trabalhando a informação

a) Se x e y podem ser 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 e são tais que $x + y \geqslant 8$, então as opções são:

- (2, 6),
- (3, 5), (3, 6),
- (4, 4), (4, 5), (4, 6),
- (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
- (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5) e (6, 6).

O total de pares é 15 $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15)$. Portanto, a probabilidade é de: $\dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$; então, a probabilidade de ganhar aumenta.

b) Como a menor soma que se pode obter com x e y no conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} é 2 (1 + 1 = 2), para que Hugo tenha 100% de probabilidade de vencer a partida na próxima rodada, ele deve estar a no máximo duas casas do final do tabuleiro. Logo, ele precisaria andar uma ou duas casas.

Exercícios complementares

1. Testando cada par ordenado no primeiro membro da equação $6x + 3y = 33$.

1. a) Como o par (–2, 7) implica $6 \cdot (-2) + 3 \cdot 7 = -12 + 21 =$ $= 9$, ele não é solução da equação.

1. b) Como o par (7, –2) implica $6 \cdot 7 + 3 \cdot (-2) = 42 - 6 =$ $= 36$, ele não é solução da equação.

1. c) Como o par (2, 7) implica $6 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 12 + 21 = 33$, ele é solução da equação.

1. d) Como o par (5, 1) implica $6 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 30 + 3 = 33$, ele é solução da equação.

2. Resposta pessoal. Um exemplo de problema que pode ser elaborado é: Sejam x e y dados em metro; sabendo que o perímetro do triângulo é 4 m a mais do que o do retângulo e que x é 5 m a mais do que y, determine a área do retângulo.

Resolução:

Como $3x = 2x + 2y + 4$ e $x = y + 5$, obtemos:

$3x = 2x + 2y + 4 \Rightarrow 3x - 2x = 2y + 4 \Rightarrow x = 2y + 4$

Como $x = y + 5$ e $x = 2y + 4$, temos:

$y + 5 = 2y + 4 \Rightarrow 5 - 4 = 2y - y \Rightarrow y = 1$

Como $x = y + 5$, com $y = 1$, obtemos $x = 6$, pois $1 + 5 = 6$.

3. Sendo j o número de aulas de judô e n o número de aulas de natação, é possível escrever o sistema

$$\begin{cases} 15j + 20n = 200 \\ j + n = 12 \end{cases}$$

Isolando j na 2ª equação:

$j + n = 12 \Rightarrow j = 12 - n$

Substituindo j por $12 - n$ na 2ª equação:

$15(12 - n) + 20n = 200 \Rightarrow 180 - 15n + 20n = 200 \Rightarrow$

$\Rightarrow 180 + 5n - 180 = 200 - 180 \Rightarrow 5n = 20 \Rightarrow$

$$\frac{5n}{5} = \frac{20}{5} \Rightarrow n = 4$$

Então, substituindo n por 4 na equação:

$j = 12 - n \Rightarrow j = 12 - 4 \Rightarrow j = 8$.

Portanto, serão 4 aulas de natação e 8 de judô.

6. Sendo A e C os números de adultos e crianças, é possível escrever o sistema:

$$\begin{cases} A + C = 125 \\ 20A + 12C = 2\,140 \end{cases}$$

Resolvendo: isolando A na 1ª equação: $A + C = 125 \Rightarrow$ $\Rightarrow A = 125 - C$

Substituindo A por $125 - C$ na 2ª equação:

$20(125 - C) + 12C = 2\,140 \Rightarrow 2\,500 - 20C + 12C = 2\,140 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\,500 - 8C - 2\,500 = 2\,140 - 2\,500 \Rightarrow -8C = 2\,140 - 2\,500 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -8C = -360 \Rightarrow 8C = 360 \Rightarrow \frac{8C}{8} = \frac{360}{8} \Rightarrow C = 45$$

Portanto, 45 crianças assistiram à apresentação.

7. Sendo H e L os números de balas de hortelã e laranja, é possível escrever o sistema:

$$\begin{cases} H + L = 48 \\ \dfrac{2H}{3} = \dfrac{L}{2} + 4 \end{cases}$$

Resolvendo: isolando L na 1ª equação:

$H + L = 48 \Rightarrow L = 48 - H$

Substituindo L por $(48 - H)$ na 2ª equação:

$$\frac{2H}{3} = \frac{48 - H}{2} + 4 = 6 \cdot \frac{2H}{3} = 6\left(\frac{48 - H}{2} + 4\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4H = 3(48 - H) + 24 \Rightarrow 4H = 144 - 3H + 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4H + 3H = 144 - 3H + 24 + 3H \Rightarrow 7H = 168 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{7H}{7} = \frac{168}{7} \Rightarrow H = 24$$

Substituindo H por 24 na equação $L = 48 - H \Rightarrow$ $\Rightarrow L = 48 - 24 = 24$. Portanto, há igual número de balas dos dois tipos. Alternativa **d**.

8. Resolvendo o sistema: $\begin{cases} p + c = 16 \\ 2p + 4c = 56 \end{cases}$

Isolando c na 1ª equação: $p + c = 16 \Rightarrow c = 16 - p$.

Substituindo c por $(16 - p)$ na 2ª equação:

$2p + 4(16 - p) = 56 \Rightarrow 2p + 64 - 4p = 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2p + 64 - 64 = 56 - 64 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -2p = -8 \Rightarrow 2p = 8 \Rightarrow \frac{2p}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow p = 4$$

Substituindo p por 4 na equação $c = 16 - p = 16 - 4 =$ $= 12$. Portanto, a solução é a mesma encontrada anteriormente.

9. a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

Isolando y na 1ª equação: $2x + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 2x$.

Substituindo y por $5 - 2x$ na 2ª equação:

$3x - (5 - 2x) = 5 \Rightarrow 3x - 5 + 2x = 5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 5x - 5 + 5 = 5 + 5 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{10}{5} \Rightarrow x = 2$$

Substituindo x por 2 na equação com y isolado:

$y = 5 - 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 5 - 4 \Rightarrow y = 1$

Portanto, o par (2, 1) é a solução do sistema.

9. b) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases}$

Isolando x na 2ª equação: $4x - 5y = 0 \Rightarrow 4x = 5y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{4x}{4} = \frac{5y}{4} = x = \frac{5y}{4}$$

Substituindo x por $\dfrac{5y}{4}$ na 1ª equação:

$$-2\left(\frac{5y}{4}\right) + 3y = 1 \Rightarrow -\frac{5y}{2} + 3y = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(-\frac{5y}{2} + 3y\right) = 2 \cdot 1 \Rightarrow -5y + 6y = 2 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo y por 2 na equação:

$$x = \frac{5y}{4} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 2}{4} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

Portanto, o par $\left(\dfrac{5}{2}; 2\right)$ é a solução do sistema.

9. c) $\begin{cases} x = -2y \\ x - 3y = 17{,}5 \end{cases}$

Substituindo x por $(-2y)$ na 2ª equação:
$-2y - 3y = 17{,}5 \Rightarrow -5y = 17{,}5 \Rightarrow 5y = -17{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{5y}{5} = \dfrac{-17{,}5}{5} \Rightarrow y = -3{,}5$
Substituindo y por $-3{,}5$ na 1ª equação: $x = -2 \cdot (-3{,}5) =$ $= 7$. Portanto, o par $(7; -3{,}5)$ é a solução do sistema.

9. d) $\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ x = y \end{cases}$

Substituindo y por x na 1ª equação:
$2x + 5(x) = 14 \Rightarrow 7x = 14 \Rightarrow \dfrac{7x}{7} = \dfrac{14}{7} \Rightarrow x = 2$
Substituindo x por 2 na 2ª equação: $2 = y$. Portanto, o par $(2, 2)$ é a solução do sistema.

9. e) $\begin{cases} 2x = 3y \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

Substituindo y por $2x + 4$ na 1ª equação:
$2x = 3(2x + 4) \Rightarrow 2x = 6x + 12 \Rightarrow 2x - 6x = 6x + 12 - 6x \Rightarrow$
$\Rightarrow -4x = 12 \Rightarrow 4x = -12 \Rightarrow \dfrac{4x}{4} = \dfrac{-12}{4} \Rightarrow x = -3$
Substituindo x por -3 na 2ª equação:
$y = 2(-3) + 4 = -6 + 4 \Rightarrow y = -2$
Portanto, o par $(-3, -2)$ é a solução do sistema.

9. f) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$

Isolando x na 1ª equação: $x + 2y = 5 \Rightarrow x = 5 - 2y$
Substituindo x por $5 - 2y$ na 2ª equação:
$2(5 - 2y) + 3y = 7 \Rightarrow 10 - 4y + 3y = 7 \Rightarrow 10 - y = 7 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10 - y - 10 = 7 - 10 \Rightarrow -y = -3 \Rightarrow y = 3$
Substituindo y por 3 na equação: $x = 5 - 2y \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5 - 2 \cdot 3 = 5 - 6 \Rightarrow x = -1$
Portanto, o par $(-1, 3)$ é a solução do sistema.

10. Sendo x o número de taças de 150 mL e y o número de taças de 200 mL, é possível escrever o sistema de equações:
$\begin{cases} x + y = 72 \\ 150x + 200y = 12\,800 \end{cases}$
Resolvendo o sistema: isolando x na 1ª equação:
$x + y = 72 \Rightarrow x = 72 - y$
Substituindo x por $72 - y$ na 2ª equação:
$150(72 - y) + 200y = 12\,800 \Rightarrow 10\,800 - 150y + 200y =$
$= 12\,800 \Rightarrow 10\,800 + 50y = 12\,800 \Rightarrow$
$\Rightarrow 50y = 2\,000 \Rightarrow y = 40$
Portanto, foram servidas 40 taças de 200 mL.

11. Sendo x o número de cédulas de 50 reais e y o número de cédulas de 20 reais, é possível escrever o sistema
$\begin{cases} x + y = 11 \\ 50x + 20y = 370 \end{cases}$
Resolvendo: isolando x na 1ª equação:
$x + y = 11 \Rightarrow x = 11 - y$
Substituindo x por $(11 - y)$ na 2ª equação:
$50 \cdot (11 - y) + 20y = 370 \Rightarrow 550 - 50y + 20y = 370 \Rightarrow$
$\Rightarrow 550 - 30y = 370 \Rightarrow 550 - 30y - 550 = 370 - 550 \Rightarrow$
$\Rightarrow -30y = -180 \Rightarrow 30y = 180 \Rightarrow \dfrac{30y}{30} = \dfrac{180}{30} \Rightarrow y = 6$
Substituindo y por 6 na equação $x = 11 - y = 11 - 6 \Rightarrow x = 5$.
Portanto, foram usadas 5 cédulas de R$ 50,00 e 6 cédulas de R$ 20,00.

12. Sendo x o número de mesas ocupadas por 4 pessoas e y o número de mesas ocupadas por 3 pessoas, é possível escrever o sistema:
$\begin{cases} x + y = 60 \\ 4x + 3y = 195 \end{cases}$
Isolando y na 1ª equação: $x + y = 60 \Rightarrow y = 60 - x$
Substituindo y por $60 - x$ na 2ª equação:
$4x + 3(60 - x) = 195 \Rightarrow 4x + 180 - 3x = 195 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + 180 = 195 \Rightarrow x + 180 - 180 = 195 - 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 195 - 180 \Rightarrow x = 15$
Portanto, 15 mesas estão ocupadas por 4 pessoas.

13. Sendo B o número de brigadeiros e C o número de cocadas, é possível escrever o sistema: $\begin{cases} B + C = 2000 \\ 0{,}8B + 1C = 1\,700 \end{cases}$
Isolando C na 1ª equação: $B + C = 2\,000 \Rightarrow C = 2\,000 - B$.
Substituindo C por $2\,000 - B$ na 2ª equação:
$0{,}8B + 1 \cdot (2\,000 - B) = 1\,700 \Rightarrow 0{,}8B + 2\,000 - B = 1\,700 \Rightarrow$
$\Rightarrow -0{,}2B + 2\,000 = 1\,700 \Rightarrow -0{,}2B + 2\,000 - 2\,000 =$
$= 1\,700 - 2\,000 \Rightarrow -0{,}2B = -300 \Rightarrow 0{,}2B = 300 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{0{,}2B}{0{,}2} = \dfrac{300}{0{,}2} \Rightarrow B = 1\,500$
Substituindo B por 1 500 na equação com C isolado: $C = 2\,000 - 1\,500 \Rightarrow C = 500$
Portanto, são vendidos 1 500 brigadeiros e 500 cocadas em média por dia.

14. Sendo p o número de porcos e g o número de galinhas, é possível formar o sistema de equações $\begin{cases} p + g = 84 \\ 4p + 2g = 208 \end{cases}$
Isolando g na 1ª equação: $p + g = 84 \Rightarrow g = 84 - p$
Substituindo g por $84 - p$ na 2ª equação:
$4p + 2(84 - p) = 208 \Rightarrow 4p + 168 - 2p = 208 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2p + 168 = 208 \Rightarrow 2p + 168 - 168 = 208 - 168 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2p = 40 \Rightarrow \dfrac{2p}{2} = \dfrac{40}{2} \Rightarrow p = 20$
Portanto, há 20 porcos.

15. Sendo x e y os números de cubos com arestas de 5 cm e 8 cm, respectivamente, é possível escrever: $\begin{cases} x + y = 25 \\ 5x + 8y = 170 \end{cases}$
Isolando x na 1ª equação: $x + y = 25 \Rightarrow x = 25 - y$
Substituindo x por $25 - y$ na 2ª equação:
$5(25 - y) + 8y = 170 \Rightarrow 125 - 5y + 8y = 170 \Rightarrow$
$\Rightarrow 125 + 3y = 170 \Rightarrow 125 + 3y - 125 = 170 - 125 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3y = 45 \Rightarrow \dfrac{3y}{3} = \dfrac{45}{3} \Rightarrow y = 15$
Substituindo y por 15 na equação:
$x = 25 - y \Rightarrow x = 25 - 15 \Rightarrow x = 10$
Portanto, existem 10 cubos com 5 cm de aresta e 15 cubos com 8 cm de aresta.

Verificando

1. A abscissa do ponto B é dada por $x_B = -3 \cdot 10 = -30$. A ordenada do ponto B é $y_B = 1 \cdot 10 = 10$. Portanto, as coordenadas do ponto B são $(-30, 10)$. Alternativa **b**.

2. A alternativa **a** é a correta, pois, na alternativa **b** e na alternativa **c**, os pontos B e C não correspondem aos indicados no enunciado; na alternativa **d**, o ponto C não corresponde ao indicado no enunciado.

3. Verificando por substituição no primeiro membro da equação $3x + 5y = 18$:

3. **a)** $3 \cdot 0 + 5 \cdot 6 = 0 + 30 = 30 \neq 18$, portanto o par $(0, 6)$ não satisfaz a equação.

3. **b)** $3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 9 + 5 = 14 \neq 18$, portanto o par $(3, 1)$ não satisfaz a equação.

3. **c)** $3 \cdot (-11) + 5 \cdot 3 = -33 + 15 = -18 \neq 18$, portanto o par $(-11, 3)$ não satisfaz a equação.

3. **d)** $3 \cdot (-4) + 5 \cdot 6 = -12 + 30 = 18$, portanto o par $(-4, 6)$ satisfaz a equação. Alternativa **d.**

4. Do enunciado, é possível escrever a equação $3x + 2y =$ $= 113$. Substituindo y por 34:
$3x + 2 \cdot (34) = 113 \Rightarrow 3x + 68 = 113 \Rightarrow 3x + 68 - 68 =$
$= 113 - 68 \Rightarrow 3x = 45 \Rightarrow \dfrac{3x}{3} = \dfrac{45}{3} \Rightarrow x = 15$
Portanto é correta a alternativa **c**.

5. É possível elaborar a seguinte equação referente ao preço dos pães: $15i + 22s = 696$. Também, a equação referente às quantidades de pães vendidos é $i + s = 33$. Portanto é correta a alternativa **b**.

6. A equação referente aos preços das frutas é $m + 5c = 29$, enquanto a equação referente às quantidades das frutas é $m + c = 9$. Alternativa **d**.

7. Sendo x e y as quantidades de moedas de 25 e 10 centavos, respectivamente, é possível escrever o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}1y = 25 \\ x + y = 190 \end{cases}$
Isolando x na 2ª equação: $x + y = 190 \Rightarrow x = 190 - y$
Substituindo x por $190 - y$ na 1ª equação:
$0{,}25 \cdot (190 - y) + 0{,}1y = 25 \Rightarrow 47{,}5 - 0{,}25y + 0{,}10y = 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow 47{,}5 - 0{,}15y = 25 \Rightarrow 47{,}5 - 0{,}15y - 47{,}5 = 25 - 47{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow -0{,}15y = -22{,}5 \Rightarrow 0{,}15y = 22{,}5 \Rightarrow \dfrac{0{,}15y}{0{,}15} = \dfrac{22{,}5}{0{,}15} \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 150$
Substituindo y por 150 na equação com x isolado:
$x = 190 - y = 190 - 150 \Rightarrow x = 40$
Portanto, ela tem 40 moedas de 25 centavos e 150 moedas de 10 centavos.

8. Isolando x na 2ª equação: $x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y$
Substituindo x por $2 - y$ na 1ª equação:
$3(2 - y) - 2y = 6 \Rightarrow 6 - 3y - 2y = 6 \Rightarrow 6 - 5y = 6 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6 - 5y - 6 = 6 - 6 \Rightarrow -5y = 0 \Rightarrow 5y = 0 \Rightarrow \dfrac{5y}{5} = \dfrac{0}{5} \Rightarrow y = 0$
Substituindo y por 0 na equação:
$x = 2 - y \Rightarrow x = 2 - 0 \Rightarrow x = 2$
Portanto, o par $(2, 0)$ é a solução do sistema.

9. Com as informações do problema, é possível elaborar o sistema de equações:
$\begin{cases} x = 2y \\ 2x + 2y = 54 \end{cases}$
Substituindo x por $2y$ na 2ª equação:
$2 \cdot (2y) + 2y = 54 \Rightarrow 4y + 2y = 54 \Rightarrow 6y = 54 \Rightarrow$
$\Rightarrow \dfrac{6y}{6} = \dfrac{54}{6} \Rightarrow y = 9$
Substituindo y por 9 na equação:
$x = 2y \Rightarrow x = 2 \cdot 9 = 18$
Portanto, o par $(18, 9)$ é a solução do sistema.

Capítulo 8 – Simetria e ângulos

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer a ideia de simetria em relação a um eixo.
- Identificar o conceito de simetria nas Artes e na Arquitetura.
- Desenhar a simétrica de uma figura.
- Identificar as transformações geométricas: reflexão, translação e rotação.
- Aplicar as transformações geométricas no plano cartesiano.

De um espelho a desenhos em lados opostos de uma reta (eixo), a simetria, quando experimentada, possibilita aos estudantes estabelecer conexões entre os conceitos geométricos e outras situações cotidianas. Por isso, esse objetivo se aproxima das **competências específicas 3** e **6** e da **competência geral 4**.

A possibilidade de associar a simetria em elementos presentes em obras artísticas e em outros contextos sociais proporciona aos estudantes uma percepção mais apurada para o mundo em que ele vive. Desenvolver o pensamento geométrico é um dos pontos importantes quando aprendemos Matemática e seu desenvolvimento se aproxima da mobilização das **competências específicas 3** e **6** e das **competências gerais 3** e **4**.

Desenvolver estratégias para elaboração de formas simétricas umas às outras faz parte do desenvolvimento do pensamento geométrico do indivíduo. Nesse sentido, são trabalhadas propriedades de polígonos, pontos, retas, segmentos, o que possibilita uma melhor compreensão dos elementos geométricos já estudados.

A geometria das transformações é verificada em diferentes situações, incluindo o uso de recursos digitais e programação, trabalhando com construção de *softwares* de diferentes tipos. Porém o primeiro passo para que isso possa ser alcançado é a identificação dessas transformações e a diferenciação entre reflexão, translação e rotação. Esse objetivo está de acordo com as **competências específicas 5** e **6** e as **competências gerais 4** e **5**.

Ao aplicar as transformações geométricas, é possível discutir distâncias e deslocamentos entre pontos, além das propriedades do próprio plano cartesiano, fazendo com que o estudo dessas transformações proporcione experiências significativas no campo da Geometria Analítica.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem a diversidade de aprendizagens com os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.

(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.

(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

Este capítulo trata da Unidade Temática **Geometria** e percorre de maneira analítica os vários aspectos do conceito de simetria. Tem início com figuras que apresentam simetria com um ou mais eixos de simetria (EF07MA20), conceito empregado para definir um polígono regular.

Nas seções *Para saber mais*, há dois casos especiais que se relacionam com lugares geométricos no plano. Um deles é a bissetriz de um ângulo em que ela própria é um eixo de simetria do ângulo; outro é a circunferência que apresenta infinitos eixos de simetria (EF07MA22). Este último caso é retomado na seção *Diversificando*, na qual são analisadas as posições das cadeiras de uma roda-gigante.

O estudo segue com a evolução para as figuras simétricas de outras figuras em relação a uma reta (EF07MA20). Este caso também é visto no plano cartesiano, em que os eixos funcionam como eixos de simetria, reforçando a apropriação de conhecimentos abordados no 6º ano (EF06MA22 e EF06MA23). Subsidia os próximos itens, que tratam das transformações geométricas de figuras planas – translação, reflexão e rotação – e dessas transformações geométricas no plano cartesiano (EF07MA21 e EF07MA19).

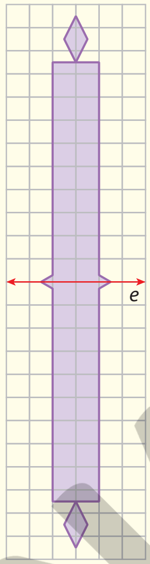
Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

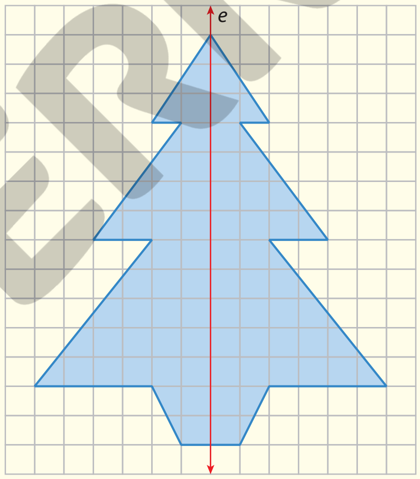
Exercícios propostos

5. Desenhando, de modo que *e* seja o eixo de simetria:

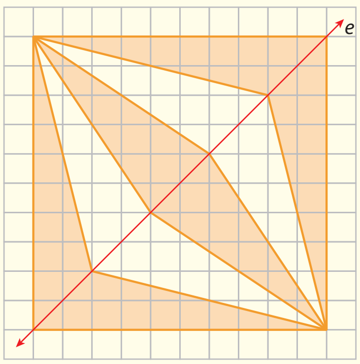
5. a)



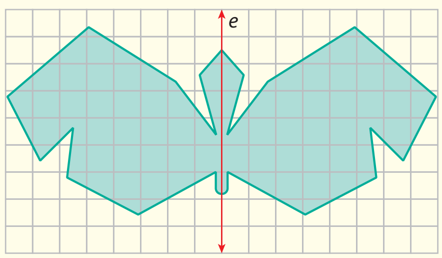
5. b)



5. c)

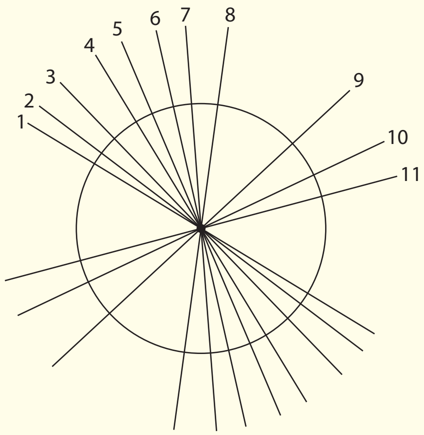


5. d)



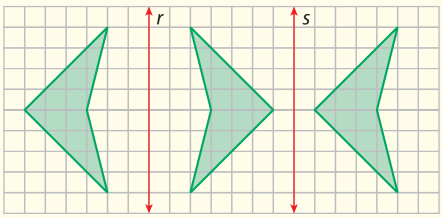
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

10. Pela propriedade do círculo, qualquer eixo que passe pelo seu centro determinará uma simetria.

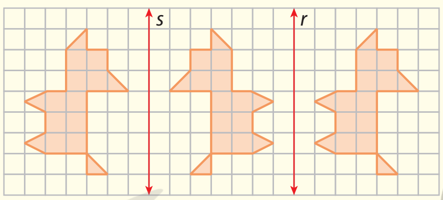


13. Construindo:

13. a)



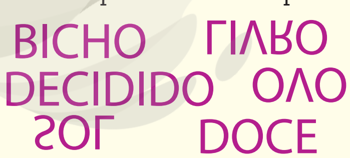
13. b)



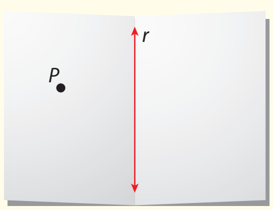
Nos itens **a** e **b**, a figura 3 corresponderá a uma translação horizontal da figura 1.

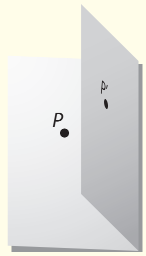
15. Espera-se que os estudantes desenhem todas as letras do alfabeto e tentem traçar um eixo de simetria horizontal até que concluam que são simétricas as letras *B*, *C*, *D*, *E*, *H*, *I*, *O* e X.

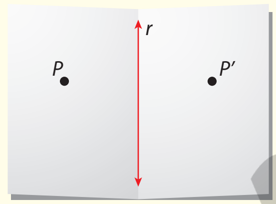
A seguir, ao escrever palavras no caderno, espera-se que os estudantes façam a reflexão delas a partir de um eixo de simetria para obter a resposta.



16. Construindo:

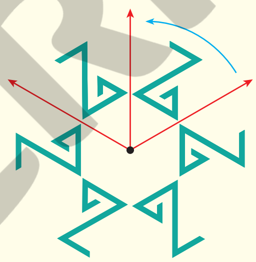






Por construção, a distância entre P' e a reta *r* é a mesma que entre o ponto *P* e a reta *r*. Portanto *P*' é simétrico a *P* em relação a *r*.

19. a) Rotação. Note, na figura, que é possível marcar um ponto como centro de rotação a partir do qual a rotação é feita.



20. a) Como os hexágonos são simétricos, as medidas dos lados do hexágono *ABCDEF* são iguais às medidas dos lados do hexágono *A'B'C'D'E'F'*, portanto a medida de $\overline{D'C'}$ é igual à medida do lado $\overline{DC}$, ou seja, 2 unidades.

20. b) Se a medida da distância de *F* até *r* é 4, então *F*' tem a mesma medida de distância até *r*, que é 4 unidades. Desse modo, a medida da distância de *F* a *F*' será 8 unidades.

20. c) A medida do segmento $\overline{EE'}$ é igual à medida da distância do ponto *E* até a reta *r* mais a medida da distância da reta *r* até *E*'. Como a medida da distância de *E* até *r* é igual à medida da distância de *E*' até *r*, então a medida da distância de *E* ao eixo *r* será a metade da medida de $\overline{EE'}$, ou seja, 4,5 unidades. Pelo mesmo motivo, a medida da distância de *E*' ao eixo *r* será 4,5 unidades.

20. d) Como os hexágonos são simétricos, o segmento $\overline{AD}$ terá a mesma medida do segmento $\overline{A'D'}$. Da mesma forma, a medida de $\overline{DF}$ é igual à medida de $\overline{D'F'}$. Como a medida de $\overline{AF}$ também é igual à de $\overline{A'F'}$, o ângulo $A\hat{D}F$ terá a mesma medida do ângulo $A'\widehat{D'}F'$, pois os triângulos ADF e A'D'F' são congruentes.

20. e) Sim, pois as medidas dos segmentos de reta mantêm-se iguais quando há simetria.

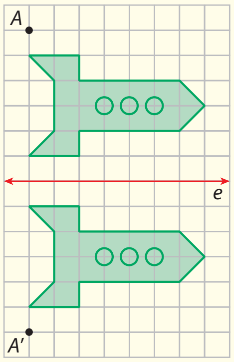
20. f) Sim, a medida do perímetro dos dois hexágonos também será a mesma, pois as medidas dos segmentos se mantêm.

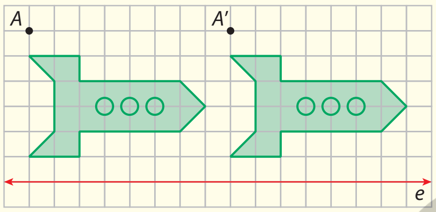
20. g) Não, pois, novamente, como as medidas das distâncias se mantêm, a área precisa ser a mesma.

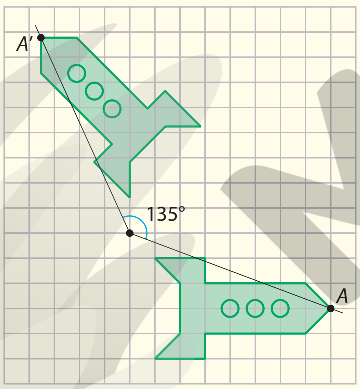
21. a) Por se tratar de um espelho, a imagem é refletida, então a mão esquerda segura a orelha direita.

21. b) Resposta possível: Se eu me abaixo, a imagem se abaixa também; se eu movo o braço direito para o lado esquerdo, a imagem move o braço esquerdo para o lado direito.

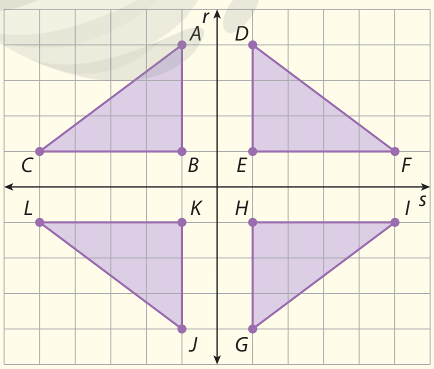
22. Fazendo conforme descrito, as figuras que se observam são como representadas a seguir:







23. b) Construindo conforme as instruções:



23. c) *JKL* é simétrico ao *ABC* em relação à reta *s*.

24. a) Na reflexão em torno do eixo *y*, as ordenadas são mantidas e as abscissas são multiplicadas por –1, portanto os vértices serão *A*’(–3, 4), *B*’(–4, 3), *C*’(–3, 1), *D*’(–1, 1) e *E*’(–1, 3).

24. b) Na reflexão em torno do eixo *x*, as abscissas são mantidas e as ordenadas são multiplicadas por –1, portanto os vértices serão *A*”(3, –4), *B*”(4, –3), *C*”(3, –1), *D*”(1, –1) e *E*”(1, –3).

24. c) Pode-se considerar que a rotação de 180° é dada por duas sucessivas rotações de 90°; dessa forma, usando a generalização apresentada, os vértices serão *A*’”(–3, –4), *B*’”(–4, –3), *C*’”(–3, –1), *D*’”(–1, –1) e *E*’”(–1, –3).

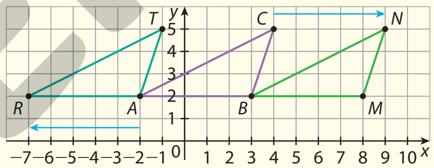
25. Pode-se observar que a figura 2 é dada por reflexão da figura 1 em relação ao eixo *y*; a figura 3 é dada a partir da figura 1 por uma rotação de 180° no sentido anti-horário; a figura 4 é dada por reflexão da figura 1 em relação ao eixo *x*. Portanto, para completar as lacunas, temos:

25. a) figura 3.

25. b) figura 4.

25. c) figura 2.

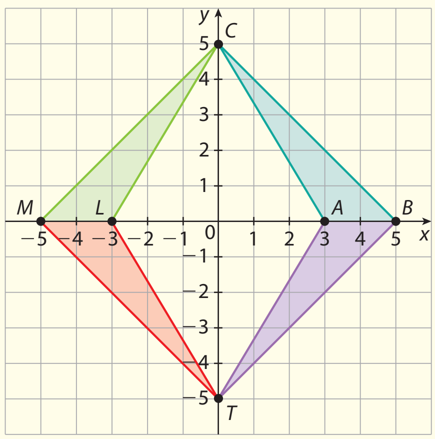
26. Construindo conforme indicado e sabendo que *A* e *S* são coincidentes, assim como *B* e *L*:



26. a) Ao transladar horizontalmente 5 unidades para a direita, as ordenadas permanecem as mesmas e as abscissas se deslocam +5 unidades. As novas coordenadas dos vértices serão *L*(3, 2), *M*(8, 2) e *C*(9, 5).

26. b) Ao transladar 5 unidades horizontalmente para a esquerda, as ordenadas permanecem as mesmas e as abscissas se deslocam –5 unidades. As novas coordenadas dos vértices serão *R*(–7, 2), *S*(–2, 2) e *T*(–1, 5).

27. Desenhando conforme solicitado e considerando que são coincidentes os pontos de cada par de pontos: *A* e *R*; *B* e *S*; *C* e *N*; *L* e *U*; *M* e *V*; *T* e *W*; obtemos a figura a seguir:

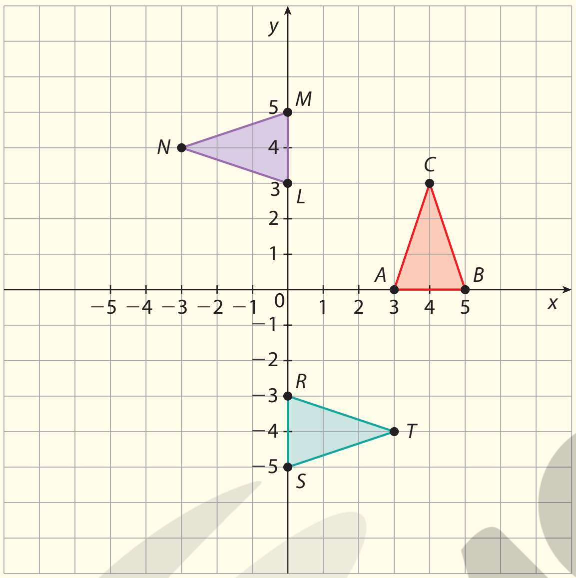


27. a) Na reflexão em torno do eixo x, as abscissas são multiplicadas por -1 e as ordenadas permanecem as mesmas. As novas coordenadas dos vértices serão $L(-3, 0)$, $M(-5, 0)$ e $N(0, 5)$.

27. b) Na reflexão em torno do eixo x, as ordenadas são multiplicadas por -1 e as abscissas permanecem as mesmas. As novas coordenadas dos vértices serão $R(3, 0)$, $S(5, 0)$ e $T(0, -5)$.

27. c) Na reflexão de LMN em torno do eixo x, as abscissas são multiplicadas por -1 e as ordenadas permanecem as mesmas. As novas coordenadas dos vértices serão $U(-3, 0)$, $V(-5, 0)$ e $W(0, -5)$.

28. Construindo conforme solicitado:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

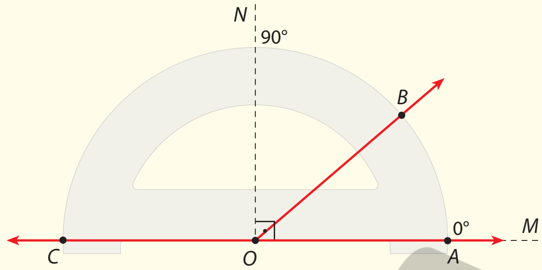
28. a) Na rotação de 90° no sentido anti-horário, a abscissa do ponto M será a ordenada do ponto B multiplicada por -1, e a ordenada do ponto M será a abscissa do ponto B. Da mesma forma, a abscissa do ponto L será a ordenada do ponto A multiplicada por -1, e a ordenada do ponto L será a abscissa do ponto A. A ordenada do ponto N será a abscissa do ponto C, e a abscissa do ponto N será a ordenada do ponto C multiplicada por -1. Então, as novas coordenadas dos vértices serão $L(0, 3)$, $M(0, 5)$ e $N(-3, 4)$.

28. b) Na rotação de 90° no sentido horário, as ordenadas dos pontos R, S e T serão as abscissas dos pontos A, B e C multiplicadas por -1 (ficam com o sinal trocado), e as abscissas dos pontos R, S e T serão as ordenadas dos pontos A, B e C. Então, as novas coordenadas dos vértices serão $R(0, -3)$, $S(0, -5)$ e $T(3, -4)$.

Para saber mais

Página 183

1. Dobrar o papel de maneira que um lado do ângulo coincida com o outro e vincar. A bissetriz é coincidente com o vinco realizado.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

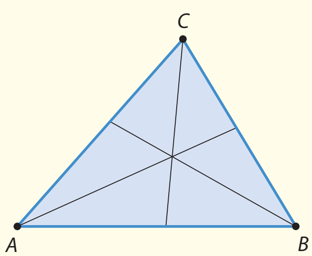
1. a) Ao posicionar o transferidor, o estudante perceberá que o ângulo formado pelas bissetrizes é de 90°.

1. b) Em todos os casos dos colegas da turma, o ângulo entre as bissetrizes de dois ângulos suplementares deve ser de 90°.

1. c) $m(A\hat{O}B) = 2x$ e $m(B\hat{O}C) = 2y$, então $m(M\hat{O}B) = x$ (pois a bissetriz é um eixo de simetria entre $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$); $m(B\hat{O}N) = y$ (pois a bissetriz é um eixo de simetria entre $\overline{OB}$ e $\overline{ON}$); logo, $m(M\hat{O}N) = x + y$ (pois é a soma das medidas dos ângulos $M\hat{O}B$ e $B\hat{O}N$).

Além disso, $2x + 2y$ é a soma dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, que são suplementares. Ou seja, $2x + 2y =$ $= 180$ (I). Colocando 2 em evidência, $2(x + y) = 180 \Rightarrow$ $\Rightarrow x + y = 90$. Então, $m(M\hat{O}N) = 90°$.

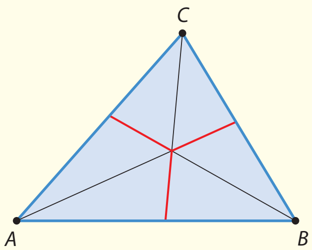
2. a) Depois de desenhar o triângulo ABC em uma folha de papel, dobrá-la fazendo coincidir as retas que contêm $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ a partir do ponto A. Depois, dobrá-la fazendo coincidir as retas que contêm $\overline{BC}$ e $\overline{BA}$ a partir do ponto B. Depois, dobrá-la novamente, fazendo coincidir as retas que contêm $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ a partir do ponto C. Espera-se que seja obtida uma figura como esta:



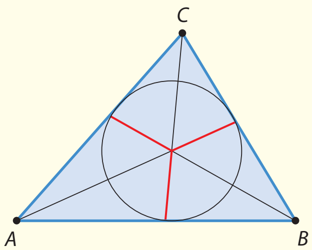
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

2. b) É possível observar que as três bissetrizes se cruzam no mesmo ponto.

2. c) As distâncias, conforme pode ser observado empiricamente pela medição com régua, são iguais.



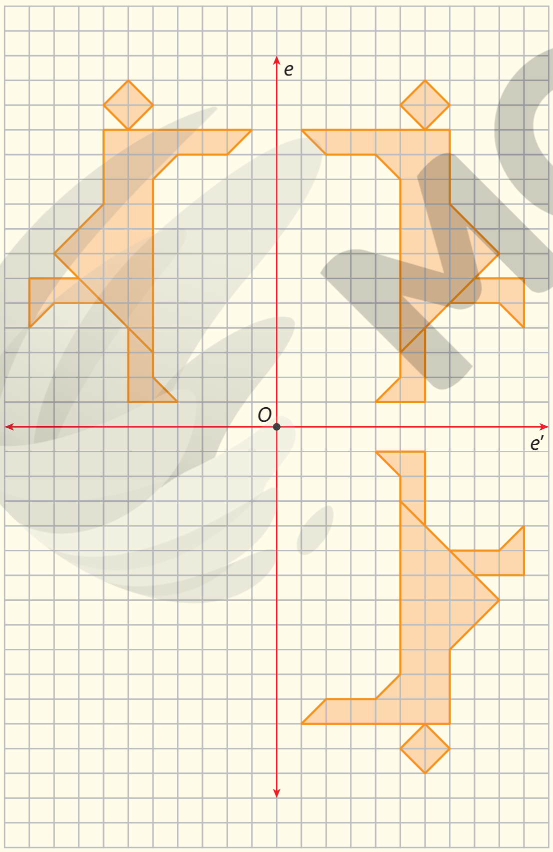
2. d) Ao traçar conforme descrito, é possível observar que a circunferência toca cada um dos três lados do triângulo em um único ponto.



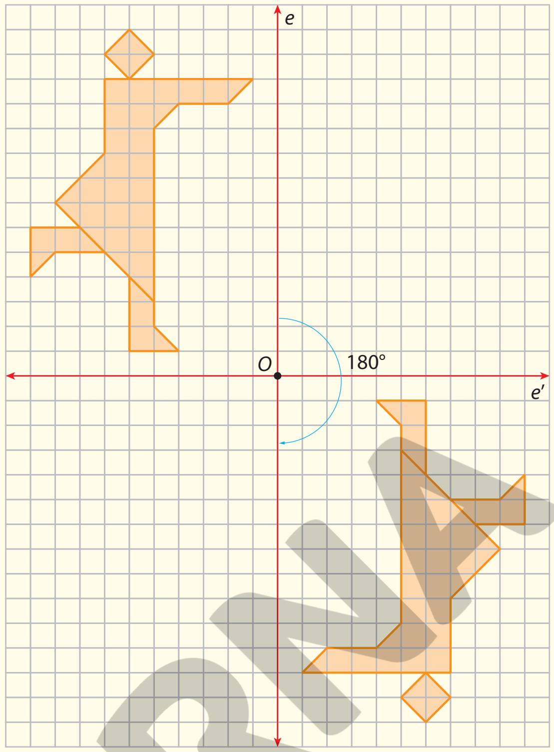
Pense mais um pouco

Página 186

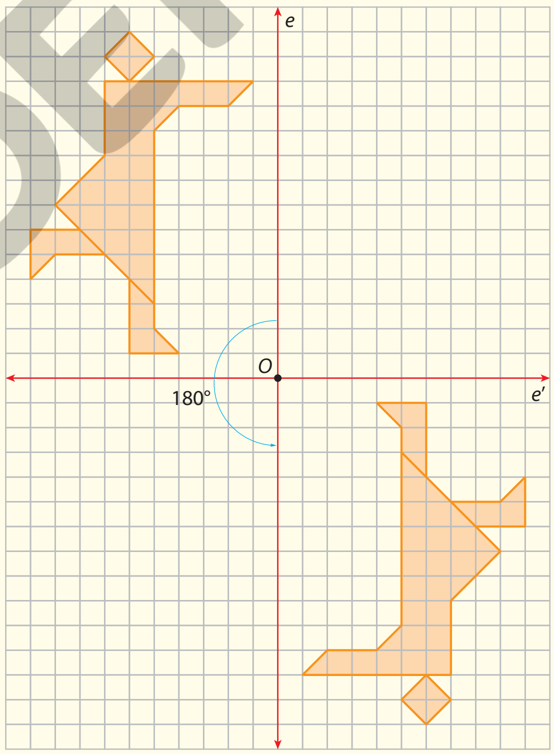
Fazendo conforme descrito, observam-se as seguintes construções:



Colega 1



Colega 2



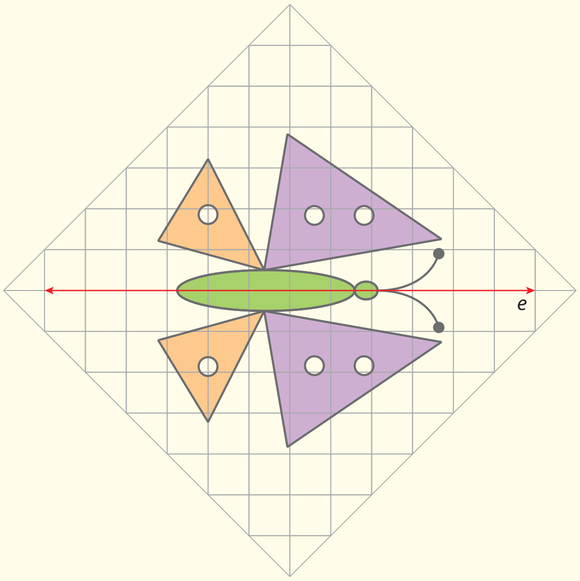
Colega 3

A partir da observação das construções, é possível concluir que duas reflexões sucessivas em relação a dois eixos perpendiculares equivalem a uma rotação de 180° em qualquer um dos sentidos em torno do ponto de intersecção dessas retas (centro de rotação); também, uma rotação de 180° em sentido horário em torno de um ponto equivale a uma rotação de 180° em sentido anti-horário em torno do mesmo ponto.

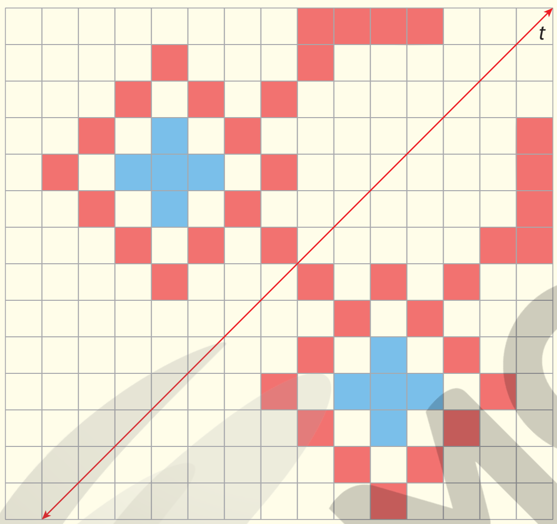
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios complementares

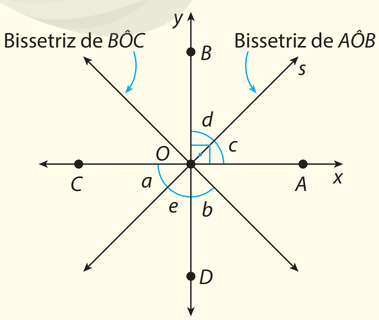
1. Sendo e o eixo de simetria, a figura será:



3. Construindo:

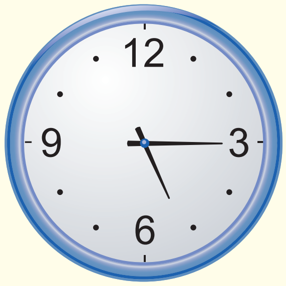


4. Como a reta s é bissetriz de $A\hat{O}B$, então o ângulo c e o ângulo d têm medida de 45°. Como c é oposto pelo vértice ao ângulo a, então $m(a) = 45°$. Como $A\hat{O}B$ tem medida de 90°, então o ângulo $C\hat{O}D$ também tem medida de 90°, de modo que a reta s também é bissetriz de $C\hat{O}D$, e a bissetriz de $B\hat{O}C$ também será bissetriz de $A\hat{O}D$. Pelo que foi desenvolvido anteriormente, o ângulo entre as bissetrizes é 90°, portanto $b = 90°$.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

5. O relógio da ilustração está refletido no espelho do retrovisor. Do lado "direito", o relógio é conforme reproduzido a seguir. Portanto, são 5 horas e 15 minutos. Alternativa **a**.



Verificando

2. Observando a figura e considerando o centro dela como o ponto O e duas extremidades consecutivas (representadas por duas "pontas" consecutivas, das seis que a figura apresenta) como os pontos A e B, percebemos que a figura é composta de 6 partes simétricas, obtidas por meio de rotações sucessivas em relação ao ponto O da figura delimitada pelo triângulo AOB. Alternativa **b**.

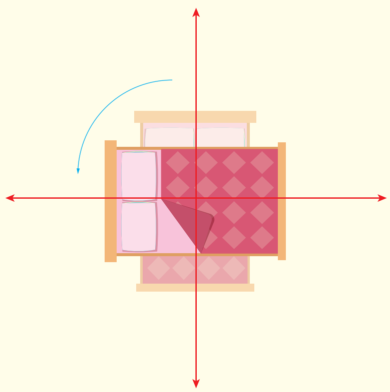
3. Refletindo a figura em torno de seu eixo y:

Portanto, é correta a alternativa **d**.

4. A transformação feita por Amanda foi a translação para a direita, a uma distância de 3 unidades. Alternativa **c**.

5. Ao ser transladado em 4 unidades verticalmente para cima, sua abscissa permanecerá a mesma e sua ordenada aumentará em 4 unidades, ficando (–3, 1). Depois, ao sofrer reflexão em torno do eixo x, sua abscissa permanecerá a mesma e sua ordenada será multiplicada por –1, ficando então (–3, –1). Alternativa **c**.

6. Rotacionando a cama 90°, com centro de rotação no centro da cama.



Alternativa **a**.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

7. Note que a figura está refletida e os pontos de I têm a mesma distância do eixo y que os pontos de II. Alternativa **c**.

Capítulo 9 – Razões, proporções e porcentagem

Objetivos do capítulo e justificativas

- Determinar a razão entre duas grandezas de mesma espécie e de espécies diferentes.
- Resolver problemas envolvendo o conceito de razões.
- Conceituar proporções.
- Resolver problemas aplicando a propriedade fundamental das proporções.
- Resolver problemas que envolvam cálculos com porcentagem.
- Interpretar e construir gráfico de setores.

O conceito de razão é complexo e vai amadurecendo ao longo do trabalho no campo dos Números, bem como nas relações entre Grandezas e Medidas. Assim, esse objetivo se torna muito importante para a construção dessas ideias por parte dos estudantes, contribuindo para o desenvolvimento das **competências específicas 2** e **3** e da **competência geral 2**.

A resolução de problemas permite ao estudante dar significado ao que se estuda. Isso não é diferente no caso das razões, que poderão ser exploradas em contextos e situações diversas, inclusive relacionando os estudos matemáticos com outras áreas de conhecimento. Assim, esse objetivo se aproxima das **competências específicas 3** e **6** e da **competência geral 2**.

Ampliando o leque de estratégias e aplicações dos números racionais, as ideias envolvendo porcentagens se relacionam diretamente com o conceito de proporção, contribuindo para o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e das **competências específicas 2**, **3** e **4**.

O uso de calculadora como ferramenta de cálculo de porcentagem favorece o trabalho com a **competência específica 5** e a **competência geral 5**.

A interpretação dos dados e a transformação deles em gráficos de setores permitem aos estudantes conhecer a real necessidade de aplicação desse tipo de gráfico, identificando quais contextos estão mais propícios a ele ou não. O uso desse tipo de gráfico pode ser feito em diferentes áreas de conhecimento. Sendo assim, esse objetivo está ligado tanto com as **competências específicas 2**, **3**, **4** e **6** quanto com as **competências gerais 2** e **4**.

O trabalho com a História da Matemática apresentado na seção *Para saber mais* favorece o desenvolvimento da **competência geral 1** e da **competência específica 1**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois permitem aos estudantes que exercitem diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação às atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.

(EF07MA37) Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

Situações contextualizadas exemplificam e fazem emergir o conceito de razão entre grandezas de mesma natureza. Um caso especial tratado neste capítulo é o de escala, aplicada em mapas, maquetes, miniaturas e plantas de imóveis. A abordagem do conceito de proporção é semelhante à de razão, assim como o conceito da propriedade fundamental das proporções, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA08), (EF07MA09) e (EF07MA17). Atividades da seção *Pense mais um pouco*, com uma sequência orientada de itens, levam o estudante a concluir por si mesmo algumas propriedades das proporções. São apresentadas situações-problema de diversas temáticas e suas resoluções fornecem elementos para estruturar o cálculo mental e a prática com a calculadora para porcentagens, de acréscimos e de decréscimos, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA02), (EF07MA05) e (EF07MA06).

A Unidade Temática **Probabilidade e estatística** é desenvolvida por meio da construção de gráficos de setores, retomando o estudo feito no 6º ano (EF06MA31), que será aprofundado no 8º ano (EF08MA23). Desse modo, favorecemos o trabalho com as habilidades (EF07MA36) e (EF07MA37).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam desta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. a) Como 400 − 160 = 240, então 240 pessoas não realizam atividades físicas regularmente. E a razão procurada será: $\frac{240}{400} = \frac{3}{5}$

1. b) 0,6, pois: $\frac{3}{5} = 0{,}6$

1. c) 60%, pois: $0{,}6 = \frac{6}{10} = \frac{60}{100} = 60\%$

1. d) Espera-se que o estudante entenda que, a cada 5 pessoas pesquisadas, 3 não praticam atividades físicas regularmente, e que isso equivale a 60% das pessoas pesquisadas.

2. a) I. $\frac{\text{número de meninas}}{\text{número de meninos}} = \frac{350}{210} = \frac{5}{3}$

II. $\frac{\text{número de meninos}}{\text{número de meninas}} = \frac{210}{350} = \frac{3}{5}$

III. Como 350 + 210 = 560, há 560 estudantes no total, então:

$$\frac{\text{número de meninas}}{\text{total de estudantes}} = \frac{350}{560} = \frac{5}{8}$$

IV. $\frac{\text{número de meninos}}{\text{total de estudantes}} = \frac{210}{560} = \frac{3}{8}$

4. a) No total, há 20 meninas, pois 12 + 5 + 2 + 1 = 20, então:

$$\frac{\text{meninas que preferem futebol}}{\text{total}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

4. b) $\frac{\text{meninas que preferem vôlei}}{\text{meninas que preferem futebol}} = \frac{5}{12}$

4. c) $\frac{\text{meninas que preferem tênis}}{\text{meninas que preferem basquete}} = \frac{1}{2}$

4. d) $\frac{\text{meninas que preferem basquete}}{\text{meninas que preferem vôlei}} = \frac{2}{5}$

4. e) Número de meninas = número de meninos = 20, então: $\frac{\text{número de meninas}}{\text{número de meninos}} = \frac{20}{20} = 1$

4. f) Há um total de 40 estudantes (pois são 20 meninas e 20 meninos, 20 + 20 = 40), então:

$$\frac{\text{meninas que preferem futebol}}{\text{total de estudantes}} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$

5. a) $\frac{\text{número de habitantes de Fortaleza}}{\text{número de habitantes do Rio de Janeiro}} =$

$= \frac{2\,703\,391}{6\,775\,561} = 0{,}3989... \simeq 0{,}4 = 40\%$

5. b) $\frac{\text{número de habitantes de Vitória}}{\text{número de habitantes de Curitiba}} = \frac{369534}{1963726} =$

$= 0{,}18818... \simeq 0{,}19 = 19\%$

7. Considerando as medidas dadas em centímetro:

7. a) Como $AB = 4$ e $BC = 6$, temos: $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

7. b) Como $AB = 4$ e $AC = 10$, temos: $\frac{AB}{AC} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

7. c) Como $BC = 6$ e $AC = 10$, temos: $\frac{BC}{AC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

7. d) Como $BC = 6$ e $AB = 4$, temos: $\frac{BC}{AB} = \frac{6}{4}$

8. Como 2 L = 2000 mL, temos a razão: $\frac{350}{2000} = \frac{35}{200} = \frac{7}{40}$

17. A construção de figura é pessoal. Cada 1 cm no desenho deve representar 75 cm na realidade.

18. Ao utilizar a régua, observamos que a figura tem 4 cm. Temos que 4,8 m = (4,8 · 100) cm = 480 cm. Dessa forma, a escala será $\frac{4}{480} = \frac{1}{120}$.

19. A escala é de $\frac{1}{150}$, conforme a informação escrita na imagem. Ou seja, cada 1 cm da planta equivale a 150 cm na realidade.

19. a) As dimensões da cozinha na planta são 2 cm × 1,4 cm. Assim, as dimensões reais são 3 m × 2,1 m, pois 2 · 150 = 300 e 300 cm = 3 m; 1,4 · 150 = 210 e 210 cm = = 2,1 m.

19. b) As dimensões reais da sala são 4,5 m × 3 m, pois 3 · 150 = 450 e 450 cm = 4,5 m; 2 · 150 = 300 e 300 cm = = 3 m. Então, a área da sala é 13,5 m², pois 4,5 · 3 = 13,5.

20. A distância, medida no mapa com a régua, entre os extremos leste e oeste, é de aproximadamente 6,9 cm. Como a distância real apontada no mapa é de 4 319 km, que equivale a (4 319 · 100 000) cm, ou seja, 431 900 000 cm, então a escala é: $\frac{6{,}9}{431\,900\,000} = \frac{6{,}9 : 6{,}9}{431\,900\,000 : 6{,}9} \simeq$

$\simeq \frac{1}{66\,400\,000}$, isto é, 1 : 66 400 000.

24. As dimensões, em centímetro, dos retângulos são: vermelho 2 × 1,5; azul 3,2 × 2,4.

24. a) $\frac{\text{medida do comprim. do retângulo menor}}{\text{medida do comprim. do retângulo maior}} = \frac{2}{3{,}2}$

24. b) $\frac{\text{medida da largura do retângulo menor}}{\text{medida da largura do retângulo maior}} = \frac{1{,}5}{2{,}4}$

24. c) A proporção é uma igualdade de razões e, como são de fato iguais, $\frac{2}{3,2} = \frac{1,5}{2,4}$.

Incentive os estudantes a registrar essas frações com números na forma decimal como frações entre inteiros, obtendo para os itens **a** e **b** a fração $\frac{5}{8}$.

38. Como $\frac{x}{y} = \frac{8}{3}$ e $x + y = 132 - y \Rightarrow x = 132 - y$.

Substituindo x na equação:

$\frac{132 - y}{y} = \frac{8}{3} \Rightarrow 8y = 3 \cdot (132 - y) \Rightarrow 8y = 396 - 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow 11y = 396 \Rightarrow y = 36$

Substituímos o valor de y para encontrar o valor de x:

$x = 132 - y = 132 - 36 \Rightarrow x = 96$

39. Sejam x e y as medidas de cada pedaço, então:

$x + y = 14 \Rightarrow x = 14 - y$

Sendo a razão $\frac{3}{4}$, então $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$.

Resolvendo:

$\frac{14 - y}{y} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 \cdot (14 - y) = 3y \Rightarrow 56 - 4y = 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow 56 = 7y \Rightarrow y = 8$

Então, a medida do pedaço maior é 8 cm.

40. a) Uma equação do sistema se refere à proporção entre as partes do prêmio, enquanto a outra equação se refere ao total distribuído aos campeões:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \\ x + y = 10\,000 \end{cases}$$

40. b) Resolvendo o sistema:

$\frac{x}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{3x}{5}$

Substituindo na outra equação:

$x + y = 10\,000 \Rightarrow x + \frac{3x}{5} = 10\,000 \Rightarrow 5x + 3x = 50\,000$

$8x = 50\,000 \Rightarrow x = 6\,250$

Então: $x + y = 10\,000 \Rightarrow y = 10\,000 - 6\,250 \Rightarrow y = 3\,750$

Portanto, os prêmios são de R$ 6 250,00 e R$ 3 750,00.

42. A primeira casa tem medida 4 cm e a segunda casa tem medida 3 cm. Seja x a medida da terceira casa, em centímetro: como as casas diminuem seguindo uma mesma proporção, $\frac{4}{3} = \frac{3}{x} \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$. Sendo y a medida da quarta casa, em centímetro, então:

$$\frac{3}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{9}{4}}{y} \Rightarrow 3y = \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} \Rightarrow y = \frac{27}{16} \simeq 1,69$$

Então, a largura da quarta casa tem medida aproximada de 1,69 cm.

43. Uma forma de resolver mentalmente é:

43. a) 10% de $850 = \frac{10}{100} \cdot 850 = \frac{8\,500}{100} = 85$

43. b) 20% de $500 = \frac{20}{100} \cdot 500 = 20 \cdot 5 = 100$

43. c) 50% de $75 = \frac{50}{100} \cdot 75 = \frac{375}{10} = 37,5$

43. d) 1% de $520 = \frac{1}{100} \cdot 520 = \frac{52}{10} = 5,2$

43. e) 100% de $125 = 1 \cdot 125 = 125$

43. f) 25% de $200 = \frac{25}{100} \cdot 200 = 25 \cdot 2 = 50$

43. g) 30% de $120 = \frac{30}{100} \cdot 120 = 3 \cdot 12 = 36$

43. h) 15% de $80 = \frac{15}{100} \cdot 80 = \frac{15 \cdot 8}{10} = \frac{120}{10} = 12$

44. a) $\frac{40}{100} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 40$. Então 40%.

44. b) $\frac{5}{50} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 10$. Então 10%.

44. c) 2,5 é metade de 5. Logo, 2,5 representa 50% de 5.

44. d) 10 é um quarto de 40, e como $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, 10 representa 25% de 40.

44. e) $\frac{x}{100} = \frac{10}{80} \Rightarrow x = \frac{1}{8} \cdot 100 = 0,125 \cdot 100 = 12,5$. Então, 12,5%.

45. a) 10% de 420 reias é R$ 42,00, pois: $\frac{10}{100} \cdot 420 =$

$= 0,1 \cdot 420 = 42$

45. b) O valor pago foi de R$ 378,00, pois: $420 - 42 = 378$

46. a) Navegar na internet, pois representa a maior porcentagem do total de pesquisados.

46. b) 12,5% de $960 = \frac{12,5}{100} \cdot 960 = \frac{12,5 \cdot 96}{10} = \frac{1200}{10} =$

$= 120$, então foram 120 internautas.

46. c) Como $25 + 12,5 = 37,5$, ocorreria empate, pois "restaurante" e "internet" representariam, cada um, 37,5% dos internautas pesquisados.

47. a) 20% de $960 = \frac{20}{100} \cdot 960 = 2 \cdot 96 = 192$, portanto, 192 quilowatts-hora.

47. b) $960 - 192 = 768$, 768 quilowatts-hora é o novo gasto de energia elétrica. Como $768 \cdot 0,3 = 230,4$, então, 230,4 quilowatts-hora é o gasto do chuveiro.

48. O aumento pode ser calculado como:

$$\frac{\text{diferença populacional}}{\text{população anterior}} = \frac{68250 - 54600}{54600} = \frac{13650}{54600} =$$

$= 0,25 = 25\%$. O aumento foi de 25%.

49. A taxa pode ser calculada por $\frac{\text{valor do ICMS}}{\text{valor da nota}} = \frac{17,66}{98,08} =$ $= 0,18005 \simeq 18\%$. O imposto é cerca de 18% sobre o total da nota fiscal.

50. $\frac{\text{quantidade de água liberada pelo sistema}}{\text{quantidade total de água}} = \frac{33}{65} =$ $= 0,5076... \simeq 51\%$. Esse sistema representa 51% da quantidade total de água.

51. a) Se pagar parcelado, Douglas pagará R$ 350,00, pois $10 \cdot 35 = 350$. Douglas pagará cerca de 22,8% a mais caso opte por pagar parcelado, pois a porcentagem é calculada por $\frac{\text{valor pago a mais}}{\text{valor caso o pagamento seja à vista}}$, ou seja: $\frac{350 - 285}{285} = \frac{65}{285} = 0,2280... \simeq 0,228$.

52. O novo salário pode ser calculado por $(100\% + 9\%) \cdot 1400 = 1,09 \cdot 1400 = 1526$. Então o novo salário de José é de R$ 1 526,00.

53. a) À vista, o desconto é de R$ 48,00, pois $4\% \cdot 1200$ é dado por: $\frac{4}{100} \cdot 1200 = 4 \cdot 12 = 48$

53. b) À vista, o celular custa R$ 1 152 $(1200 - 48 = 1152)$

53. c) Em 10 parcelas, o celular custa R$ 1 344,00, pois $1200 \cdot (100\% + 12\%) = 1200 \cdot 1,12 = 1344$.

53. d) A diferença é de R$ 192,00, pois $1344 - 1152 = 192$.

53. e) Resposta pessoal. Espera-se que o estudante reflita sobre sua realidade financeira e crie suposições para estimar quanto tempo ele levará para juntar esse dinheiro, pensando inclusive em quais gastos ele pode cortar para alcançar esse objetivo.

54. Comprando o produto por R$ 72,50, o valor de venda será R$ 89,90, pois $(100\% + 24\%) \cdot 72,5 = 1,24 \cdot 72,5 = 89,9$. Com um desconto de 20%, o preço passa a ser R$ 71,92, pois $89,9 \cdot (1 - 0,2) = 89,9 \cdot 0,8 = 71,92$, gerando prejuízo.

55. a) As novas dimensões serão 42 cm × 40,5 cm, pois para o comprimento, $48 \cdot (1 - 0,125) = 48 \cdot 0,875 = 42$, e para a largura, $36 \cdot (1 + 0,125) = 36 \cdot 1,125 = 40,5$.

55. b) A medida da área será 1701 cm², pois $42 \cdot 40,5 = 1701$.

55. c) A área original do retângulo tem medida 1728 cm², pois $48 \cdot 36 = 1728$. Assim, ocorre uma redução de 1,6%, pois a porcentagem de redução é calculada por:

$$\frac{\text{redução na medida da área}}{\text{área original}} = \frac{1728 - 1701}{1728} = \frac{27}{1728} =$$

$= 0,015625 \cong 1,6\%$, então diminuiu aproximadamente 1,6%.

56. O valor, em reais, do desconto é de R$ 18,00 (pois $45 - 27 = 18$), e o percentual é de 40%, pois:

$$\frac{\text{desconto}}{\text{valor original}} = \frac{18}{45} = 0,4 = 40\%$$

57. Dar um desconto de 10% significa cobrar 90% do valor total. Logo, custa R$ 486,00 à vista, pois $540 \cdot 0,9 = 486$.

58. a) Um desconto de 7,5% equivale a cobrar 92,5% do preço total, pois $100 - 7,5 = 92,5$. Logo, o cliente pagou R$ 1 542,90, pois $1668 \cdot 0,925 = 1542,9$.

58. b) A porcentagem de economia é de 25,7%, pois:

$$\frac{\text{valor economizado}}{\text{valor a prazo}} = \frac{2077,4 - 1542,9}{2077,4} = \frac{534,5}{2077,4} =$$

$= 0,257292... \simeq 25,7\%$

59. a) Como 12,83% da população mundial residirá nas Américas, isso representa 1 090 550 000 habitantes, pois 12,83% de 8,5 bilhões são dados por: $0,1283 \cdot (8,5 \text{ bilhões}) = (0,1283 \cdot 8,5) \text{ bilhões} = 1,09055$ bilhões = 1 090 550 000

59. b) Como 215 milhões equivalem a 215 000 000, então a porcentagem será aproximadamente de 19,71%, pois:

$$\frac{\text{quantidade de habitantes do Brasil}}{\text{quantidade de habitantes das Américas}} =$$

$$= \frac{215000000}{1090550000} = 0,1971482... \simeq 19,71\%$$

Para saber mais

Página 207

2. a) É possível escrever a relação $\frac{1}{6} = \frac{40}{240}$, então 40 pessoas estavam nas quadras. Se 1 a cada 2 pessoas estava nas piscinas, havia 120 pessoas nas piscinas, pois 120 é metade de 240. Se 1 a cada 3 pessoas estava no restaurante, havia 80 pessoas no restaurante, pois $\frac{1}{3}$ de 240 é 80.

2. b) Como $2800 : 7 = 400$, então cada parte do total representa 400 torcedores. Assim, 1 600 torciam para o time A (pois $4 \cdot 400 = 1600$) e 1 200 torciam para o time B (pois $3 \cdot 400 = 1200$).

2. c) Em 3 horas temos 6 blocos de 30 minutos. Dividindo 51 por 6, temos 8,5, ou seja, a cada 30 minutos João percorria 8,5 km. Logo, em 2 h 30 min, ele percorrerá 42,5 km $(5 \cdot 8,5 = 42,5)$.

2. d) A escala é calculada pela relação:

$\frac{7 \text{ cm}}{2,1 \text{ m}} = \frac{7 \text{cm}}{210 \text{ cm}} = \frac{1}{30}$. A escala usada foi de 1 : 30.

2. e) É possível escrever a relação $\frac{1}{5} = \frac{2500}{x} \Rightarrow x = 12500$, então a medida da distância é de 12 500 m, ou seja, 12,5 km.

Exercícios complementares

1. a) $\frac{\text{medida do lado menor}}{\text{medida do lado maior}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$

1. b) $\frac{\text{medida do perímetro menor}}{\text{medida do perímetro maior}} = \frac{4 \cdot 12}{4 \cdot 15} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5}$

1. c) $\frac{\text{medida da área menor}}{\text{medida da área maior}} = \frac{4 \cdot 4}{5 \cdot 5} = \frac{16}{25}$

2. $\dfrac{\text{rapazes}}{\text{total de pessoas}} = \dfrac{12}{25} = 0{,}48 = 48\%$

Alternativa **d**.

3. Como a escala do mapa se mantém, é possível escrever:

$$\frac{4\text{ cm}}{12\text{ km}} = \frac{10\text{ cm}}{x\text{ km}} \Rightarrow 4 \cdot x = 12 \cdot 10 \Rightarrow x = \frac{120}{4} = 30$$

Então, representará 30 km.

4. a) $\dfrac{\text{medida da massa de prata}}{\text{medida da massa de ouro}} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$. A razão é de $\dfrac{1}{3}$.

4. b) Como a proporção se mantém, a quantidade x de prata necessária é tal que:

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{4{,}5} \Rightarrow x = \frac{1 \cdot 4{,}5}{3} = 1{,}5$$

Então, será 1,5 g.

5. Em uma escala de 5 : 2 500 000, chamando a medida real x, então:

$$\frac{5}{2500000} = \frac{25}{x} \Rightarrow x = 25 \cdot \frac{2500000}{5} = 5 \cdot 2500000 - 1250000$$

Portanto, a medida será 12 5000 000 cm, que equivale a 125 km. Alternativa **b**.

6. Em uma escala 1 : 50, sendo as medidas na planta 12 cm × 14 cm, as dimensões reais (em cm) são x e y tais que:

$$\frac{1}{50} = \frac{12}{x} \Rightarrow x = 50 \cdot 12 = 600$$

$$\frac{1}{50} = \frac{14}{y} \Rightarrow y = 50 \cdot 14 = 700$$

Como 600 cm = 6 m e 700 cm = 7 m, a medida da área é de 42 m² (7 · 6 = 42). Alternativa **d**.

7. Para verificar, testar se a relação de proporção é verdadeira, ou seja:

7. a) $\dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{6} \Rightarrow 3 \cdot 6 = 2 \cdot 9 \Rightarrow 18 = 18$ (verdadeira), formam uma proporção.

7. b) $\dfrac{4}{3} = \dfrac{3}{8} \Rightarrow 4 \cdot 8 = 3 \cdot 3 \Rightarrow 32 = 9$ (falsa), não formam uma proporção.

8. Como as medidas formam uma proporção, então, sendo x a medida da altura do prédio:

$$\frac{5{,}4}{1{,}8} = \frac{x}{14} \Rightarrow 14 \cdot 5{,}4 = 1{,}8 \cdot x \Rightarrow x = \frac{75{,}6}{1{,}8} = 42$$

Então, a altura do prédio é de 42 m.

9. $4x = 80 \Rightarrow x = 20$

Verificando

5. Como 3 cm representam 9 km, que equivalem a 900 000 cm, a escala é $\dfrac{3}{900000} = \dfrac{1}{300000}$. Então, sendo x a medida da distância, em centímetros:

$$\frac{1}{300000} = \frac{15}{x} \Rightarrow x = 15 \cdot 300000 = 4500000$$

Como 4 500 000 cm = 45 km, alternativa **c**.

6. À vista, o carrinho custa 88% do valor a prazo, pois 100 − 12 = 88, ou seja, R$ 316,80, pois 88% de 360 =

$$= \frac{88}{100} \cdot 360 = \frac{88 \cdot 36}{10} = \frac{3168}{10} = 316{,}8.$$ Alternativa **c**.

7. A proporção é: $\dfrac{\text{medida de capacidade em litros}}{\text{preço em reais}}$

E equivale a $\dfrac{0{,}275}{3}$ para a garrafa menor e $\dfrac{1{,}5}{5}$ para a garrafa maior. A alternativa correta é a **d**, pois $\dfrac{0{,}275}{3} = 0{,}091\overline{6}$ e $\dfrac{1{,}5}{5} = 0{,}5$ não é proporcional.

8. $\dfrac{2x+3}{4} = \dfrac{5x}{9} \Rightarrow 9 \cdot (2x+3) = 4 \cdot 5x \Rightarrow 18x + 27 = 20x \Rightarrow$

$\Rightarrow 27 = 2x \Rightarrow x = \dfrac{27}{2} = 13{,}5$. Alternativa **c**.

9. Foram 78 membros, pois: 65% de 120 = 0,65 · 120 = 78. Alternativa **a**.

10. O novo salário é de R$ 1 947,00, pois (100% + 18%) · 1 650 = = 1,18 · 1 650 = 1 947. Alternativa **b**.

11. O valor pago foi de R$ 200,00, pois (100% − 20%) · 250 = $= \dfrac{80}{100} \cdot 250 = 8 \cdot 25 = 200$. Alternativa **d**.

Capítulo 10 – Estudos dos polígonos

Objetivos do capítulo e justificativas

- Definir polígonos e polígonos regulares e identificar os elementos de um polígono.
- Calcular o número de diagonais de um polígono qualquer.
- Calcular a soma das medidas dos ângulos internos e a dos ângulos externos de um polígono.
- Definir, identificar e aplicar congruência de polígonos.

Há uma relação importante entre Álgebra e Geometria quando analisamos as propriedades geométricas possibilitando a elaboração de uma fórmula, uma generalização, estruturada algebricamente. Quando há conexão entre áreas da própria Matemática, mais significativa se torna a compreensão por parte dos estudantes. Assim, esse objetivo está ligado às **competências específicas 2**, **3** e **6** e às **competências gerais 2** e **4**.

Usando propriedades geométricas e estabelecendo relações com conceitos já estudados, os estudantes serão capazes de calcular a soma das medidas dos ângulos internos e externos de polígonos, podendo, inclusive, generalizar e formalizar tal generalização de maneira algébrica. Desse modo, contribuímos com o desenvolvimento das **competências específicas 2** e **3** e da **competência geral 2**.

A ideia de congruência passa a ganhar mais propriedade quando é possível defini-la conceitualmente e, consequentemente, aplicá-la em situações na Matemática ou em outra área de conhecimento, como na Arte ou Arquitetura.

A temática abordada na página de *Abertura* permite aos estudantes refletir sobre a aplicação da Matemática em elementos de arquitetura, o que contribui para o desenvolvimento das **competências gerais 1**, **3** e **6** e da **competência específica 6**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois permitem aos estudantes que exercitem diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação às atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.

(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.

(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

Este capítulo trata da Unidade Temática **Geometria**. A retomada do estudo dos polígonos, realizado no 6º ano (EF06MA18), aprofunda e amplia esse tópico. Por meio do traçado das diagonais que partem de um único vértice é feito o cálculo do número de diagonais de um polígono qualquer.

Retoma-se e amplia-se também o estudo dos triângulos, de seus elementos, suas classificações, construção e condições de existência (EF06MA19). Esse estudo terá continuidade no 8º ano (EF08MA14). A seção *Para saber mais* trabalha a rigidez do triângulo e a não rigidez dos demais polígonos. A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo, antes calculada de modo empírico, agora é demonstrada com a aplicação das propriedades dos ângulos formados por duas retas paralelas e por uma transversal. Com a triangulação dos polígonos pelo traçado das diagonais de um só vértice e com a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, obtém-se a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer polígono, favorecendo o desenvolvimento das habilidades (EF07MA24) e (EF07MA25).

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer tem duas abordagens: uma intuitiva, pelo recorte de um polígono construído em papel e posterior composição das partes relativas aos ângulos externos; outra, por demonstração, utilizando-se a soma das medidas dos ângulos internos, já estudada, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA27).

Dois itens importantes são trabalhados no capítulo: polígonos regulares (com uma nova definição e um fluxograma de construção de polígonos regulares) e congruência de polígonos, propiciando o trabalho com as habilidades (EF07MA26) e (EF07MA28).

Na seção *Diversificando*, os estudantes devem calcular a probabilidade de o jogador tirar em um dado uma face favorável a um momento de jogo, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA34).

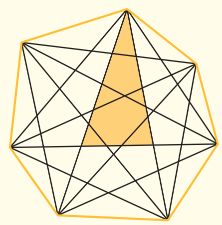
Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

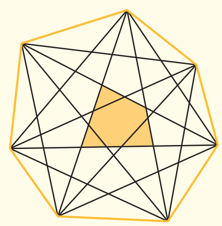
Exercícios propostos

3. Respostas pessoais. Exemplos:

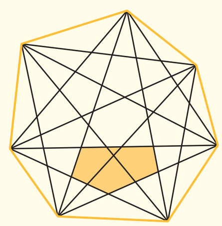
3. a)



3. b)

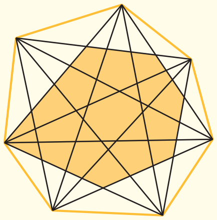


3. c)

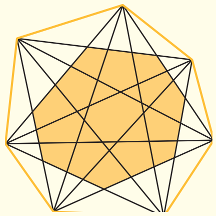


ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

3. d)



3. e)



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

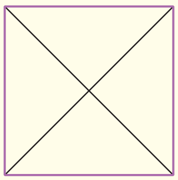
4. O perímetro do heptágono mede 17,5 cm ($7 \cdot 2{,}5 = 17{,}5$); o perímetro do octógono mede 16 cm ($8 \cdot 2 = 16$); o perímetro do eneágono mede 16,2 cm ($9 \cdot 1{,}8 = 16{,}2$); portanto, o heptágono tem o perímetro de maior medida.

5. O número de diagonais traçadas por um de seus vértices é igual ao número de lados menos 3:

5. a) 3 diagonais, pois: $6 - 3 = 3$

5. b) Nenhuma diagonal, pois: $3 - 3 = 0$

6. Desenhando:



RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

6. a) 2 diagonais.

6. b) Medindo, é possível inferir que as diagonais têm a mesma medida.

7. Como $n - 3 = 4$, temos: $n = 4 + 3 = 7$; o polígono é o heptágono.

8. Utilizando a relação: $d = \dfrac{n(n-3)}{2}$

8. a) $n = 20 \Rightarrow d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{20(20-3)}{2} = 10 \cdot 17 = 170$

8. b) $n = 16 \Rightarrow d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{16(16-3)}{2} = 8 \cdot 13 = 104$

8. c) $n = 24 \Rightarrow d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{24(24-3)}{2} = 12 \cdot 21 = 252$

10. É formado um triângulo a mais do que o número de diagonais, portanto

10. a) 2 triângulos, pois: $4 - 2 = 2$

10. b) 3 triângulos, pois: $5 - 2 = 3$

10. c) 4 triângulos, pois: $6 - 2 = 4$

10. d) 5 triângulos, pois: $7 - 2 = 5$

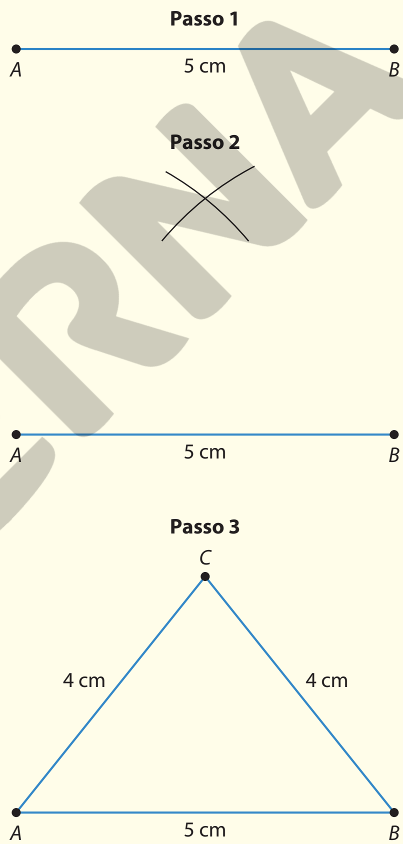
10. e) 8 triângulos, pois: $10 - 2 = 8$

10. f) $(n - 2)$ triângulos, pois: $(n - 3) + 1 = n - 2$

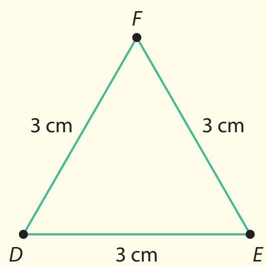
11 Em geral, deve-se representar um segmento $\overline{AB}$ de medida x igual à medida do lado $\overline{AB}$; com a ponta-seca do compasso no ponto **A**, traça-se um arco de raio cuja medida é y, igual à medida do 2º lado do triângulo; por fim, com a ponta-seca do compasso em B, traça-se um arco de raio medindo z, igual à medida do último lado do triângulo e que intercepte o arco traçado anteriormente, determinando o ponto C.

O triângulo ABC terá lados medindo x, y e z.

11. a) Exemplo de construção, fazendo $x = 5$ e $y = z = 4$ e seguindo os passos indicados anteriormente.

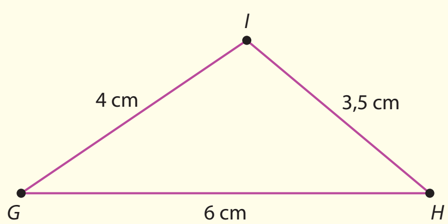


11. b)

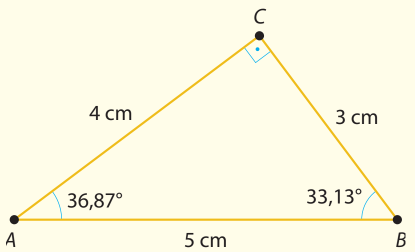


ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

11. c)



13. Quanto aos lados, o triângulo é escaleno e, quanto aos ângulos, é retângulo. A construção e as medidas dos ângulos estão expressas na figura a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

14. Pode-se representar um quadrado e uma de suas diagonais. Dessa maneira, dois lados consecutivos do quadrado e a diagonal que não parta do vértice em comum determinam um triângulo retângulo isósceles. Por medição, pode-se aferir que o ângulo agudo mede 45°.

15. Impossível, pois o triângulo equilátero é acutângulo, uma vez que todos os ângulos têm medida 60°.

16. Não é possível ter dois ângulos externos retos, pois se 2 retas formarem ângulos retos com as extremidades de um mesmo segmento, então estas retas serão paralelas e não formam triângulo. É possível ter dois ângulos externos obtusos, pois todo triângulo tem pelo menos 2 ângulos externos obtusos, uma vez que em todo triângulo há pelo menos dois ângulos internos agudos.

17. Por meio da desigualdade triangular, pode-se perceber que apenas os triângulos dos itens **c**, **d** e **e** não formam triângulo, pois:

17. c) $8 = 4 + 4$

17. d) $8 > 3 + 4$

17. e) $7 = 3 + 4$

20. A soma (S) das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a $(n - 2) \cdot 180$. Com o $n = 4$, tem-se:

$S = (n - 2) \cdot 180 = (4 - 2) \cdot 180 = 2 \cdot 180 = 360.$

Então: $x + y + x + y = 360 \Rightarrow 2x + 2y = 360.$

Substituindo y por $2x$ nesta última equação:

$2x + 2(2x) = 360 \Rightarrow 2x + 4x = 360 \Rightarrow 6x = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{6x}{6} = \dfrac{360}{6} \Rightarrow x = 60$

Então, substituindo x por 60° na equação $y = 2x$, tem-se:

$y = 2x = 2 \cdot 60 \Rightarrow y = 120$

Os ângulos medem 60° e 120°.

21. Seja S a soma dos ângulos internos do polígono. Com $n = 4$, tem-se:

$S = (n - 2) \cdot 180 = (4 - 2) \cdot 180 = 2 \cdot 180 = 360.$

Então, sendo x a medida do ângulo destacado:

$(180 - 120) + 90 + x + 90 = 360 \Rightarrow 60 + x + 180 = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 240 = 360 \Rightarrow x + 240 - 240 = 360 - 240 \Rightarrow x = 120°$

22. a) Sendo n o número de lados do polígono e S a soma da medida de seus ângulos internos, temos que:

$S = 1\,260 \Rightarrow (n - 2) \cdot 180 = 1\,260 \Rightarrow 180n - 360 = 1\,260 \Rightarrow$

$\Rightarrow 180n - 360 + 360 = 1\,260 + 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow 180n = 1\,620 \Rightarrow \dfrac{180n}{180} = \dfrac{1620}{180} \Rightarrow n = 9$

Portanto, o polígono é o eneágono.

22. b) $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{9(9-3)}{2} = \dfrac{9 \cdot 6}{2} = 9 \cdot 3 = 27$

23. Seja S a soma das medidas dos ângulos internos do polígono. Com $n = 5$, tem-se:

$S = (5 - 2) \cdot 180 = (5 - 2) \cdot 180 = 3 \cdot 180 = 540.$

Então:

$x - 20 + 143 + x + 143 + 90 = 540 \Rightarrow 2x + 356 = 540 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 356 - 356 = 540 - 356 \Rightarrow 2x = 184 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2x}{2} = \dfrac{184}{2} \Rightarrow x = 92$

Então, o ângulo mede 92°.

24. Sendo S a soma das medidas dos ângulos internos do polígono, $S = (n - 2) \cdot 180$, então a diferença será

$(10 - 2) \cdot 180 - (8 - 2) \cdot 180 \Rightarrow$

$\Rightarrow [10 - 2 - 8 + 2] \cdot 180 = [10 - 8] \cdot 180$

Então, basta calcular a diferença da quantidade de lados e multiplicar por 180°, portanto, é 360°, pois $(10 - 8) \cdot 180 = 360$.

25. Em torno do centro da figura há 6 ângulos congruentes com medida x, portanto, $x = \dfrac{360°}{6} = 60°$. Então: $y = 2x = 2 \cdot 60° = 120°$. Em torno do vértice do ângulo z, pode-se escrever $z + y + y = 360°$. Substituindo y por 120° nesta equação:

$z + 120 + 120 = 360 \Rightarrow z + 240 = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow z + 240 - 240 = 360 - 240 \Rightarrow z = 120°$

26. a) Não, pois:

$S_i(14) = (14 - 2) \cdot 180 = 12 \cdot 180 = 2\,160$

$S_i(7) = (7 - 2) \cdot 180 = 5 \cdot 180 = 900$

Então, $S_i(14) = 2\,160°$ e $S_i(7) = 900°$

26. b) Não, pois:

$S_e(14) = 360°$ e $S_e(7) = 360°$

26. c) Sim, pois:

$S_i(14) + S_e(14) = 12 \cdot 180 + 360 = 14 \cdot 180 = 2\,520$

$S_i(7) + S_e(7) = 5 \cdot 180 + 360 = 7 \cdot 180 = 1\,260$, daí $2\,520 =$
$= 1\,260 \cdot 2$

28. • 1ª maneira: com $n = 10$, tem-se:

$S_i = (n - 2) \cdot 180 = (10 - 2) \cdot 180 = 8 \cdot 180 = 1\,440.$

Então: $a_i = \dfrac{S_i}{n} = \dfrac{1440}{10} = 144$, logo $a_i = 144°$

E a equação $a_e + a_i = 180°$ fica:

$a_e + 144 = 180 \Rightarrow a_e = 180 - 144 \Rightarrow a_e = 36$

• 2ª maneira: em todos os casos:

$S_e = 360°$, então:

$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{10} = 36°$

E a equação $a_e + a_i = 180°$ fica:

$36 + a_i = 180 \Rightarrow 36 + a_i - 36 = 180 - 36 \Rightarrow a_i = 144$

29. a) $n = 15 = 5 + 10 \Rightarrow$ (penta) + (deca) $\Rightarrow$ Pentadecágono.

29. b) $S_i = (n - 2) \cdot 180 = (15 - 2) \cdot 180 = 13 \cdot 180 = 2\,340°$

29. c) $S_e = 360°$ em qualquer polígono convexo.

29. d) $a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{2340}{15} = 156°$

29. e) $a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360}{15} = 24°$

30. Com $n = 20$, tem-se:

$S_i = (n - 2) \cdot 180 = (20 - 2) \cdot 180 = 18 \cdot 180 = 3\,240$

Então: $a_i = \frac{S_i}{20} = \frac{3240}{20} = 162°$

31. Com $n = 8$, tem-se: $S_i = (n - 2) \cdot 180 = (8 - 2) \cdot 180 = 6 \cdot 180 = 1\,080°$ Então: $a_i = \frac{S_i}{8} = \frac{1080}{8} = 135°$

Como $a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360}{8} = 45°$, a diferença entre os ângulos é 90°, pois 135 – 45 = 90.

32. a) Com $S_i = 3\,960°$, tem-se:

$(n - 2) \cdot 180 = 3\,960 \Rightarrow 180n - 360 = 3\,960 \Rightarrow$

$\Rightarrow 180n - 360 + 360 = 3\,960 + 360 \Rightarrow 180n = 43\,200 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{43\,200}{180} \Rightarrow n = 24$

O polígono tem 24 lados.

32. b) $a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{3\,960}{24} = 165°$

O ângulo interno mede 165°.

32. c) Com $a_i = 165°$, a relação $a_e + a_i = 180°$ fica:

$a_e + 165 = 180 \Rightarrow a_e + 165 - 165 = 180 - 165 \Rightarrow a_e = 15$

Então, o ângulo externo mede 15°.

32. d) Como $S_e = n \cdot a_e$, tem-se:

$S_e = 24 \cdot 15 = 360°$

33. a) Com $a_e = 12°$, da equação $a_e = \frac{S_e}{n}$, tem-se:

$12 = \frac{360}{n} \Rightarrow 12n = 360 \Rightarrow n = \frac{360}{12} \Rightarrow n = 30$

Então, o polígono tem 30 lados.

33. b) Da equação $a_e + a_i = 180°$, tem-se:

$12 + a_i = 180 \Rightarrow 12 + a_i - 12 = 180 - 12 \Rightarrow a_i = 168°$

34. Nesse exercício, basta citar um exemplo para responder. No caso do exemplo, hexágono tem 6 lados e 9 diagonais, pois:

$n = 6 \Rightarrow d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Demonstrando para todos os casos: se o número de lados é $n = 2k$, então a quantidade de diagonais será:

$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{2k \cdot (2k-3)}{2} = k \cdot (2k - 3) = 2k^2 - 3k$

O termo $2k^2$ sempre será par, o termo $3k$ pode ser par ou ímpar (por exemplo se $k = 1 \Rightarrow 3k = 3$ e se $k = 2 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3k = 3 \cdot 2 = 6$).

Portanto, para $d = 2k^2 - 3k$, a quantidade de diagonais pode ser par ou ímpar.

35. a) Triângulos equiláteros ($n = 3$), quadrados ($n = 4$) e hexágonos regulares ($n = 6$) e dodecágonos regulares ($n = 12$).

35. b) Observando os polígonos de mesma cor na figura, pode-se perceber que cada hexágono está cercado por 6 quadrados e 6 triângulos equiláteros, formando grandes dodecágonos regulares.

35. c) Com $n = 12$, tem-se:

$S_i = (n - 2) \cdot 180 = (12 - 2) \cdot 180 = 10 \cdot 180 = 1\,800$

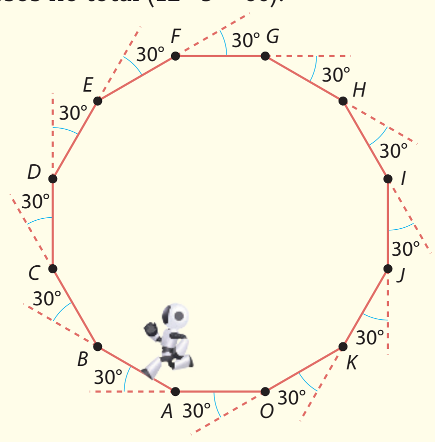
Então: $a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{1800}{12} = 150$

36. Como $a_e = 30°$, da equação $a_e = \frac{S_e}{n}$, temos:

$30 = \frac{360}{n} \Rightarrow 30 \cdot n = \left(\frac{360}{n}\right) \cdot n \Rightarrow 30n = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{30n}{30} = \frac{360}{30} \Rightarrow n = 12$

Então, o polígono desenhado tem 12 lados, e, como em cada lado do desenho o robô deu 5 passos, foram 60 passos no total ($12 \cdot 5 = 60$).



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

37. Com $a_e = 40°$, a equação $a_e = \frac{S_e}{n}$ fica:

$40 = \frac{360}{n} \Rightarrow 40 \cdot n = \left(\frac{360}{n}\right) \cdot n \Rightarrow 40n = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{40n}{40} = \frac{360}{40} \Rightarrow n = 9$

A toalha de mesa tem formato de um polígono de 9 lados.

37. a) Foram utilizados 2,7 m de faixa, pois $9 \cdot 30 = 270$ e $270 \text{ cm} = 2{,}7 \text{ m}$

37. b) $S_i = (n - 2) \cdot 180 = (9 - 2) \cdot 180 = 7 \cdot 180 = 1\,260°$

39. De $a_i = \frac{7}{2} a_e$, tem-se:

$$\frac{S_i}{n} = \frac{7}{2} \cdot \frac{S_e}{n} \Rightarrow \left(\frac{S_i}{n}\right) \cdot n =$$
$$= \left(\frac{7}{2} \cdot \frac{S_e}{n}\right) \cdot n \Rightarrow S_i = \frac{7}{2} \cdot S_e \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_i \cdot 2 = \left(\frac{7}{2} \cdot S_e\right) \cdot 2 \Rightarrow 2 \cdot S_i = 7 \cdot S_e$$

Reescrevendo, nos dois membros, pelas expressões das somas:

$$2 \cdot (n - 2) \cdot 180 = 7 \cdot 360 \Rightarrow 360 \cdot (n - 2) = 7 \cdot 360 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{360 \cdot (n-2)}{360} = \frac{7 \cdot 360}{360} \Rightarrow n - 2 = 7 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n - 2 + 2 = 7 + 2 \Rightarrow n = 9$$

Portanto, o polígono regular é o eneágono. Alternativa **d**.

40. Observando que a composição foi feita com um quadrado (que tem $a_i = 90°$) e um triângulo equilátero (que tem $a_i = 60°$); sendo x a medida do ângulo em destaque, então $x = 60 + 90 = 150$. Alternativa **d**.

44. Na figura os pontos correspondentes são: A e Q; B e P; C e O; D e N; E e M. Portanto:

44. a) $m\left(\overline{AB}\right) = m\left(\overline{QP}\right) = 2 \text{ cm}$

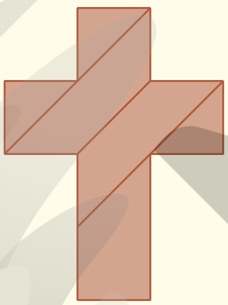
44. b) $AB + BC + CD + DE + AE = QP + PO + ON + 3 + 1 = 2 + 2{,}5 + 2{,}8 + 4 = 11{,}3$. Então, o perímetro tem medida 11,3 cm.

44. c) $m(O\hat{P}Q) = m(C\hat{B}A) = 100°$

Pense mais um pouco

Página 222

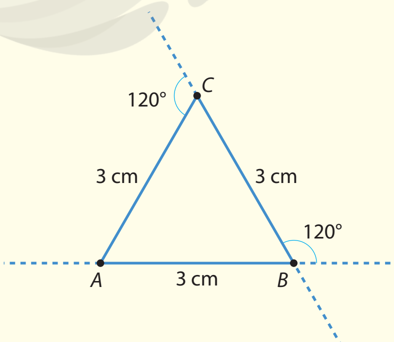
Pode-se obter a figura por meio da composição:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Página 229

1. A figura construída terá um triângulo com dois lados de medida 3 cm e dois ângulos externos de medida 120°.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

1. a) Se a figura for construída de forma precisa, o estudante deve encontrar $m\left(\overline{AC}\right) = 3$ cm.

1. b) Como a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é sempre igual a 360°, o ângulo externo do vértice $\hat{A}$ deve medir 120°, pois $360 - 2 \cdot 120 - 360 - 240 = 120$. Portanto, o ângulo interno do vértice $\hat{A}$ deve medir 60°, pois $180 - 120 = 60$.

1. c) Como os três ângulos externos têm a mesma medida, o triângulo deve ser equilátero.

2. Sendo x um número inteiro positivo e considerando $15x$ a medida em centímetros do terceiro lado do triângulo, há duas condições pela condição de existência dos triângulos:

$$\begin{cases} 20 + 15x > 30 \\ 15x < 20 + 30 \end{cases}$$

Da primeira condição:

$$20 + 15x > 30 \Rightarrow 20 + 15x - 20 > 30 - 20 \Rightarrow 15x > 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x > \frac{10}{15} \Rightarrow x > 0{,}\overline{6}$$

Mas como x é inteiro positivo, tem-se $x \in \{1, 2, 3, 4, ...\}$.

Da segunda condição:

$$15x < 20 + 30 \Rightarrow 15x < 50 \Rightarrow x < \frac{50}{15} \Rightarrow x < 3{,}\overline{3}$$

Mas como x é inteiro positivo, tem-se $x \in \{1, 2, 3\}$.

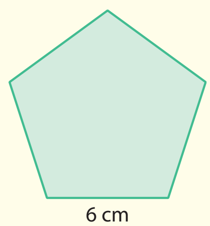
2. a) Como há apenas 3 opções para o valor de x, conclui-se que Renato pode construir até 3 triângulos não congruentes entre si.

2. b) Com $x \in \{1, 2, 3\}$, as 3 possíveis medidas para o terceiro lado do triângulo são 15 cm, 30 cm e 45 cm, pois temos que $15x$ é, para:

$x = 1 \Rightarrow 15 \cdot 1 = 15$; $x = 2 \Rightarrow 15 \cdot 2 = 30$; $x = 3 \Rightarrow 15 \cdot 3 = 45$

Para saber mais

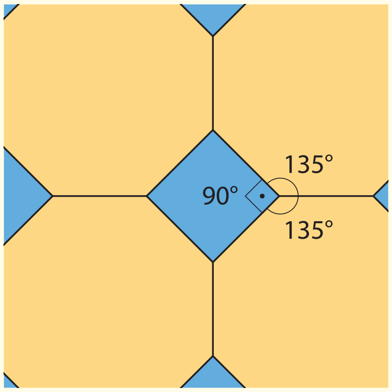
Página 235



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Página 237

Os ângulos internos do octógono medem 135° e os ângulos internos do quadrado medem 90°. Assim, com dois octógonos e um quadrado em torno de um mesmo vértice, tem-se um ângulo de volta completa ($2 \cdot 135 + 90 = 270 + 90 = 360$).



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios complementares

3. a) Com $a_e = 24°$, a equação $a_e = \frac{S_e}{n}$ fica:

$$24 = \frac{360}{n} \Rightarrow 24 \cdot n = \left(\frac{360}{n}\right) \cdot n = 24n = 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{360}{24} \Rightarrow n = 15$$

Então, o polígono tem 15 lados.

3. b) Da equação $a_e + a_i = 180°$, tem-se:

$24 + a_i = 180 \Rightarrow 24 + a_i - 24 = 180 - 24 \Rightarrow a_i = 156°$

4. Para o hexágono, com $n = 6$, tem-se: $S_i = (n - 2) \cdot 180 = (6 - 2) \cdot 180 = 4 \cdot 180 = 720$. Assim, o ângulo interno do hexágono mede: $a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{720}{6} = 120°$. Sabendo que os ângulos internos de um quadrado medem 90°, tem-se que a diferença entre esses ângulos é 30° (pois $120 - 90 = 30$). Se um polígono tem $a_e = 30°$, a equação $a_e = \frac{S_e}{n}$ fica:

$$30 = \frac{360}{n} \Rightarrow 30 \cdot n = \left(\frac{360}{n}\right) \cdot n \Rightarrow 30n = 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{360}{30} \Rightarrow n = 12$$

Portanto, o polígono é o dodecágono.

5. a) Com $d = 3n$ e $n \neq 0$, tem-se:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 3n \Rightarrow n^2 - 3n = 6n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 - 3n}{n} = \frac{6n}{n} \Rightarrow \frac{n^2}{n} - \frac{3n}{n} = \frac{6n}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 3 = 6 \Rightarrow n - 3 + 3 = 6 + 3 \Rightarrow n = 9$$

O polígono tem 9 lados.

5. b) $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{9(9-3)}{2} = 27$

São 27 diagonais.

5. c) $S_i = (n - 2) \cdot 180 = (9 - 2) \cdot 180 = 7 \cdot 180 = 1\,260°$

5. d) $a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360}{9} = 40°$

6. O personagem caminha por um formato de polígono regular de forma que $a_e = 45°$, então a equação:

$$a_e = \frac{S_e}{n} \Rightarrow 45 = \frac{360}{n} \Rightarrow 45 \cdot n = \left(\frac{360}{n}\right) \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45n = 360 \Rightarrow n = \frac{360}{45} \Rightarrow n = 8$$

Portanto, o polígono é o octógono regular.

Alternativa **c**.

7. Com $a_i = a_e$, tem-se:

$$\frac{S_i}{n} = \frac{S_e}{n} \Rightarrow \left(\frac{S_i}{n}\right) \cdot n = \left(\frac{S_e}{n}\right) \cdot n \Rightarrow S_i = S_e$$

Então:

$$(n - 2) \cdot 180 = 360 \Rightarrow 180 \cdot n - 360 = 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 180n - 360 + 360 = 360 + 360 \Rightarrow 180n = 720 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{720}{180} \Rightarrow n = 4$$

Portanto, o polígono é o quadrado.

9. Com $a_i = 135°$, a equação $a_e + a_i = 180°$ fica:

$a_e + 135 = 180 \Rightarrow a_e + 135 - 135 = 180 - 135 \Rightarrow a_e = 45°$

E a equação: $a_e = \frac{S_e}{n}$ fica:

$$45\ n = \frac{360}{n} \Rightarrow 45 \cdot n = \left(\frac{360}{n}\right) \cdot n \Rightarrow 45n = 360 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{360}{45} \Rightarrow n = 8$$

Portanto:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = 20$$

O polígono tem 20 diagonais.

10. Com $d = 6n$ e $n \neq 0$, a equação $d = \frac{n(n-3)}{2}$ fica:

$$\frac{n(n-3)}{2} = 6n \Rightarrow n^2 - 3n = 12n \Rightarrow \frac{n^2 - 3n}{n} = \frac{12n}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 3 = 12 \Rightarrow n - 3 + 3 = 12 + 3 \Rightarrow n = 15$$

Portanto: $a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{15} = 24°$

12. a) Com $a_i = 135°$, a equação $a_e + a_i = 180°$ fica:

$a_e + 135 = 180 \Rightarrow a_e + 135 - 135 = 180 - 135 \Rightarrow a_e = 45°$

12. b) Com $a_e = 45°$, a equação $a_e = \frac{S_e}{n}$ fica:

$$45 = \frac{360}{n} \Rightarrow 45 \cdot n = \left(\frac{360}{n}\right) \cdot n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 45n = 360 \Rightarrow n = \frac{360}{45} \Rightarrow n = 8$$

Então, o polígono tem 8 lados.

12. c) A medida do perímetro é 27,2 cm, pois: $8 \cdot 3{,}4 = 27{,}2$

12. d) $d = n - 3 = 8 - 3 = 5$

13. Como a 1ª figura tem 5 lados e perímetro de medida 5 cm, conclui-se que cada lado das figuras mede 1 cm. A série dos números de lados das figuras é: (5, 8, 11, 14, ...). Observando que cada termo dessa série é 3 unidades a mais em relação ao termo anterior, pode-se concluir que a medida do perímetro da figura n da sucessão é dada, em centímetro, pela relação: $5 + (n - 1) \cdot 3 = 5 + 3n - 3 = 2 + 3n$, em que n também é o número de pentágonos presentes na figura. Então:
$2 + 3n = 1736 \Rightarrow 2 + 3n - 2 = 1736 - 2 \Rightarrow 3n = 1734 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = \dfrac{1734}{3} \Rightarrow n = 578$
Alternativa **e**.

Verificando

1. Cada lado mede 4 cm $\left(\dfrac{12}{3} = 4\right)$ e cada ângulo interno mede 60° $\left(\dfrac{180}{3} = 60\right)$. Alternativa **c**.
2. Com $n = 10$, tem-se: $d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{10(10-3)}{2} =$
$= 5 \cdot 7 = 35$
Alternativa **b**.
3. Com $n = 18$, tem-se que são 15 diagonais, pois $18 - 3 = 15$. Alternativa **d**.
4. O triângulo I tem apenas 2 lados congruentes, portanto é isósceles. O triângulo II tem os 3 lados com diferentes medidas, portanto é escaleno. O triângulo III tem os 3 lados congruentes, portanto é equilátero.
Alternativa **b**.
5. Quando um dos ângulos internos de um triângulo é obtuso (mede mais do que 90º), o triângulo é denominado obtusângulo.
Alternativa **c**.
6. Não é possível construir um triângulo de lados 20 cm, 12 cm e 7 cm, pois $20 > 12 + 7$. Alternativa **a**.
7. Com $n = 13$, tem-se: $S_i = (n - 2) \cdot 180 = (13 - 2) \cdot 180 =$ $= 11 \cdot 180 = 1\,980°$
Alternativa **d**.
8. $e = 180 - 135 = 45°$. Alternativa **a**.

Diversificando

1. Há três faces que o favorecem, são aquelas que contêm os números 18 ou maiores (18, 19 e 20). Assim, o número de faces que não o favorecem é 17, pois $20 - 3 = 17$.
2. Por terem faces triangulares ($n = 3$), o número de diagonais em cada face do tetraedro, do octaedro e do icosaedro é 0 (zero), pois:
$d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{3(3-3)}{2} = \dfrac{3 \cdot 0}{2} = 0$
Por ter faces quadrangulares ($n = 4$), o número de diagonais em cada face do hexaedro é 2, pois:
$d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{4(4-3)}{2} = \dfrac{4 \cdot 1}{2} = 2$
Por ter faces pentagonais ($n = 5$), o número de diagonais em cada face do dodecaedro é 5, pois:
$d = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{5(5-3)}{2} = \dfrac{5 \cdot 2}{2} = 5$
3. Por ter faces triangulares ($n = 3$), a soma das medidas dos ângulos internos em cada face do tetraedro é 180°, pois:
$S_i = (n - 2) \cdot 180 = (3 - 2) \cdot 180 = 1 \cdot 180 = 180°$
Por ter faces quadrangulares ($n = 4$), a soma das medidas dos ângulos internos em cada face do cubo é 360°, pois:
$S_i = (n - 2) \cdot 180 = (4 - 2) \cdot 180 = 2 \cdot 180 = 360°$
Por ter faces pentagonais ($n = 5$), a soma das medidas dos ângulos internos em cada face do dodecaedro é 540°, pois:
$S_i = (n - 2) \cdot 180 = (5 - 2) \cdot 180 = 3 \cdot 180 = 540°$

Capítulo 11 – Sobre áreas e volumes

Objetivos do capítulo e justificativas

- Compreender e aplicar os conceitos de área e volume.
- Resolver problemas que envolvem estimativas.
- Identificar figuras equivalentes.
- Identificar unidades adequadas (padronizadas ou não) para medir superfície e espaço, fazendo uso de terminologia própria.
- Obter medidas por meio de estimativas e aproximações.
- Converter unidades de medida usuais para área e volume na resolução de situações-problema.

Por serem conceitos estudados gradativamente desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, esses objetivos visam aprofundar a compreensão sobre os conceitos de área e volume.

O trabalho com estimativas é estruturado desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental e deve ser aprofundado ao longo dos estudos. Criar diferentes estratégias de resolução e de estimativas permite ao estudante encarar problemas em diversas situações, tanto na Matemática quanto em outras áreas de conhecimento. Assim, este objetivo se aproxima das **competências específicas 2**, **3** e **6**, e das **competências gerais 2** e **4**.

O trabalho com figuras geométricas equivalentes desenvolve o senso crítico e possibilita ao estudante análises geométricas com foco em outras propriedades.

O uso de instrumentos para construção de polígonos equivalentes permite o estudo das propriedades que envolvem essa construção de maneira prática, dando significado ao que está sendo estudado. Desse modo, favorecemos o desenvolvimento das **competências específicas 5** e **6** e da **competência geral 4**.

O desenvolvimento da linguagem matemática específica é um dos pontos de trabalho cruciais para que a comunicação entre pares e com a sociedade de modo geral possa ser alcançada de maneira clara e objetiva. As medidas de espaço e superfície precisam dessas referências para que os estudantes compreendam inclusive a necessidade de padronização delas.

Além de compreender as relações entre as unidades de medida padronizadas, o trabalho com estimativas e aproximações torna mais significativo o estudo de área e volume. Ao propor esse trabalho, favorecemos o desenvolvimento das **competências específicas 2** e **4**.

Na *Abertura* do capítulo, apresentamos uma obra de arte que utiliza figuras geométricas e uma variação na tonalidade azul para dar a ideia de profundidade. Ao propor uma análise dessa obra, propiciamos o desenvolvimento da **competência geral 3**.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** é favorecido com as diferentes propostas de atividades a serem realizadas em grupos, pois permitem aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com colegas que podem ou não ter dificuldades ou facilidades em relação às atividades propostas.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).

(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

(EF07MA37) Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

A Unidade Temática predominantemente tratada neste capítulo é **Grandezas e medidas**, porém articulada com **Números** e **Geometria**.

O conceito de área é retomado aqui sem fazer uso de uma unidade de medida padronizada, diferentemente de sua abordagem no 6º ano (EF06MA24). A unidade de medida para obter a área de uma peça ou de uma composição de peças do tangram é a área de uma das peças do próprio tangram. Outro recurso que se faz presente é o papel quadriculado, em que a unidade de medida de área é a área de uma quadrícula. Por exemplo, em atividade interdisciplinar com História, cujo objetivo é obter a área da superfície do território brasileiro definido no Tratado de Tordesilhas, a unidade de medida é a área da quadrícula da ilustração dada. Do mesmo modo, na seção *Trabalhando a informação*, quando da descrição do procedimento de cálculo da área de um sítio arqueológico, a quadrícula é a unidade de medida.

Também a equivalência de figuras, via de regra, é feita ora com peças do tangram, ora com figuras no papel quadriculado; desse modo, contribuímos para o trabalho com as habilidades (EF07MA29), (EF07MA31) e (EF07MA32).

Para o estudo do cálculo de volume de paralelepípedo de faces retangulares, a retomada abrange não só uma unidade cúbica genérica, mas trabalha também com o metro cúbico, seus múltiplos e submúltiplos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF07MA30). O tema será retomado e ampliado no 8º ano (EF08MA21).

A habilidade (EF07MA37) é explorada na seção *Para saber mais*, em que os estudantes irão analisar os dados em um gráfico e fazer estimativas.

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. a) No estudo feito na página anterior obtivemos:
$T_m = P = Q = 2t$ e $T_g = 4t$
Sendo x a área de todo o tangram, tem-se:
$x = t + t + T_m + P + Q + T_g + T_g =$
$= t + t + 2t + 2t + 2t + 4t + 4t = 16\,t$
Portanto:
- $x = 16t = 8 \cdot (2t) = 8P$
- $x = 16t = 4 \cdot (4t) = 4T_g$
- $x = 16t = 8 \cdot (2t) = 8Q$

Sendo possível dispor os resultados como a seguir.

Unidade de área	Paralelogramo	Triângulo grande	Quadrado
Área do tangram	**8**	**4**	**8**

5. a) Como na região *ABCD* cabem 8 triângulos congruentes ao da figura 1, a fração pedida é:
$$\frac{\text{região triangular}}{\text{maior região}} = \frac{1}{8}$$

5. b) Como a parte azul do quadrado é ocupada por 4 triângulos, a fração é: $\frac{4}{8} = \frac{4 : 4}{8 : 4} = \frac{1}{2}$

5. c) Mede 60 cm², pois $120 : 2 = 60$.

6. a) A área da figura I equivale a $\frac{1}{2}$ cm² = 0,5 cm², pois a região laranja é metade do quadradinho de área 1 cm².

A área da figura II equivale a $\frac{1}{2}$ cm² = 0,5 cm², pois:
$1 : 2 = 0{,}5$

A área da figura III equivale a $\frac{1}{4}$ cm² = 0,25 cm², pois:
$1 : 4 = 0{,}25$

A área da figura IV equivale a $\frac{1}{8}$ cm² = 1 cm², pois:
$1 : 8 = 0{,}125$

A área da figura V equivale a $\frac{3}{8}$ cm² = 0,375 cm²,
pois: $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

6. b) Observando que o tangram todo tem 36 cm² e usando as informações da tabela construída no **exercício 1**, então:
- Os triângulos menores têm 2,25 cm², pois $36 : 16 = 2{,}25$.

- O triângulo médio, o quadrado e o paralelogramo têm 4,5 cm^2, pois 36 : 8 = 4,5.
- Os triângulos maiores têm 9 cm^2, pois 36 : 4 = 9.

6. d) 25%, pois o triângulo grande é $\frac{1}{4}$ do quebra-cabeças montado e 100 : 4 = 25.

6. e) Não, pois a proporção de $\frac{1}{4}$ entre as áreas continuaria a mesma.

11. Resposta pessoal, em que as figuras construídas devem ocupar 12 quadradinhos equivalentes aos da malha, pois $8 \cdot 0{,}5 + 8 = 4 + 8 = 12$.

14. Considerando que cada quadradinho da malha tem lados medindo 0,5 cm, as medidas das áreas das figuras, em cm^2, serão dadas por:

14. a) $2{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}75$

14. b) $1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$

14. c) $2{,}5 \cdot 1 = 2{,}5$

14. d) $3 \cdot 1{,}5 = 4{,}5$

15. Uma possibilidade de resposta é representar, com medidas de comprimento em cm, um:
- quadrado cujos lados medem 2 cm.
- retângulo cujo comprimento mede 4 cm e altura, 1 cm.
- paralelogramo cujo comprimento mede 4 cm e altura, 1 cm e com ângulos internos que não sejam retos (para que não seja, também, retângulo).
- triângulo com base medindo 4 cm e altura medindo 2 cm.

16. a) Pode-se compor um triângulo cuja medida da base seja o dobro da medida do comprimento do retângulo e a medida da altura seja igual à medida da altura do retângulo.

16. b) Pode-se compor um triângulo cuja medida da base seja o dobro da medida do comprimento do paralelogramo e a medida da altura seja igual à medida da altura do paralelogramo.

16. c) Pode-se compor um triângulo cuja medida da base seja igual à soma da medida da base maior adicionada à medida da base menor do trapézio e cuja medida da altura seja igual à medida da altura do trapézio.

19. a) A porcentagem de água doce no planeta é de 2,5%, pois 100 − 97,5 = 2,5%. Então, o volume dessa água é de 2,5 de 1,4 bilhão, ou seja, $\frac{2{,}5 \cdot (1400 \text{ milhões})}{100} =$ = 35 milhões. Portanto, o volume é de 35 milhões de km^3, ou 35 000 000 km^3.

19. b)
- Água atmosférica e de superfície: 140 000 km^3, pois $\frac{0{,}4 \cdot 35000000}{100} = 140000$;
- *Permafrost*: 280 000 km^3, pois $\frac{0{,}8 \cdot 35000000}{100} =$ $= 280000$;
- Subterrânea: 10 535 000 km^3, pois $\frac{30{,}1 \cdot 35000000}{100} = 10535000$;
- Geleiras: 24 045 000 km^3, pois $\frac{68{,}7 \cdot 35000000}{100} =$ $= 24045000$;
- Disponível para o uso humano: 10 675 000 km^3, pois 10 535 000 + 140 000 = = 10 675 000;
- Uso doméstico: 1 067 500 km^3, pois $\frac{10 \cdot 10675000}{100} = 1067500$;
- Uso industrial: 2 241 750 km^3, pois $\frac{21 \cdot 10675000}{100} = 2241750$;
- Uso na agricultura: 7 365 750 km^3, pois $\frac{69 \cdot 10675000}{100} = 7365750$

20. 0,0088 km^3, pois 8 800 000 m^3 = = (8 800 000 : 1 000 000 000) km^3 = 0,0088 km^3

21. Como a vasilha tem medida de volume 2 000 cm^3, pois 2 dm^3 = (2 · 1 000) cm^3 = 2 000 cm^3, são necessários 8 copos, porque 2 000 : 250 = 8.

22. Como o volume do *freezer* tem medida 1 170 cm^3, pois 1,17 m^3 = (1,17 · 1 000) dm^3 = 1 170 dm^3 = 1 170 cm^3, cabem 650 potes, pois 1 170 : 1,8 = 650.

23. Convertendo a medida de volume da goiabada:
5,4 dm^3 = 5,4 · 1 000 cm^3 = 5 400 cm^3

23. a) 18 cm^3, pois 5 400 : 300 = 18

23. b) Irá receber R$ 180,00, pois: 300 · 0,6 = 180

23. c) Cada tablete precisa de 0,018 dm^3, pois:
18 cm^3 = (18 : 1000) dm^3 = 0,018 dm^3
Então, 500 tabletes precisam de 9 dm^3, pois:
0,018 · 500 = 9

30. a) Como 1 m = 1 000 mm, seria necessário 1 bilhão de cubinhos, pois 1 000 · 1 000 · 1 000 = = 1 000 000 000 = 1 bilhão.

30. b) A pilha terá 1 milhão de metros de medida de altura, pois 1 000 000 000 mm = (1 000 000 000 : 1 000) m = = 1 000 000 m = 1 milhão de metros.

31. b) As medidas dos volumes são:
bloco 1
66,5 cm^3, pois 3,5 · 3,8 · 5 = 66,5;
bloco 2
28,5 cm^3, pois 1,5 · 3,8 · 5 = 28,5;
bloco 3
21 cm^3, pois 3,5 · 1,2 · 5 = 21;
bloco 4
9 cm^3, pois 1,5 · 1,2 · 5 = 9

31. c) A medida do volume inicial é 125 cm^3, pois $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$

34. A medida do volume é 38,267525764 m^3, pois 6,058 · 2,438 · 2,591 = 38,267525764

Trabalhando a informação

a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que os arqueólogos são responsáveis por pesquisas sobre culturas e sociedades humanas, podem trabalhar em campo fazendo observações ou estudando e que devem ser formados em graduação específica, ou com mestrado ou doutorado no tema.

b) Estimando que a área do sítio ocupe 37 quadradinhos na figura, a área total do sítio fica próxima de 600 m², pois $37 \cdot 16 = 592 \simeq 600$.

c) Sendo x a população, fazendo uma proporção entre a medida da área e a quantidade de esqueletos:

$$\frac{x}{600} = \frac{12}{16} \Rightarrow 16 \cdot x = 600 \cdot 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x = 7\,200 \Rightarrow x = \frac{7\,200}{16} \Rightarrow x = 450$$

d) 90 casas, pois $450 : 5 = 90$.

Pense mais um pouco

Página 262

1. Observando que, acrescentando-se 6 pequenos paralelepípedos de dimensões $1 \times 1 \times 2$ ao sólido da direita, este poderia assumir a forma de um grande paralelepípedo de dimensões $6 \times 5 \times 6$, seu volume teria medida 180 (pois $6 \cdot 5 \cdot 6 = 180$). Como cada pequeno paralelepípedo que compõe o sólido tem volume 2 (pois $1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$), o número desses pequenos paralelepípedos que caberiam no grande seria 90 ($180 : 2 = 90$). Então, descontando-se os 6 pequenos paralelepípedos que foram incluídos para completar o grande e permitir esse raciocínio, conclui-se que o sólido, como está na figura à direita, é formado por 84 pequenos paralelepípedos (pois $90 - 6 = 84$).

2. Um cubo de aresta 5 precisaria de 125 cubos de aresta 1 para ser construído, pois $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$. O número de cubos de aresta 1 no sólido desenhado é 35 (pois $5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 25 + 9 + 1 = 35$). Portanto, ainda faltam 90 cubos ($125 - 35 = 90$) de aresta 1 para transformar em um cubo de aresta 5.

Para saber mais

1. Resposta pessoal. Para elaborar essa resposta, é interessante que os estudantes reconheçam o significado da palavra sazonal como algo que não é constante e varia conforme a época.

2. A soma é 100%, pois $49{,}8\% + 24{,}3\% + 9{,}7\% + 8{,}4\% + 4{,}5\% + 1{,}7\% + 1{,}6\% = 100\%$

3. 32,37 trilhões de litros, pois 49,8% de 65 trilhões $= \frac{49{,}8 \cdot 65}{100}$ trilhões = 32,37 trilhões.

4. O percentual urbano mais o rural é 25,9% (pois $24{,}3 + 1{,}6 = 25{,}9$). A diferença desse percentual para o do uso animal é 17,5% (pois $25{,}9 - 8{,}4 = 17{,}5$). Portanto, o volume excedente é de 11,375 trilhões de litros, pois 17,5% de $65 = \frac{17{,}5 \cdot 65}{100} = 11{,}375$.

5. A indústria consumiu 6,79%, pois:

$$9{,}7\% \text{ de } 70\% = \frac{9{,}7}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{679}{10\,000} = \frac{6{,}79}{100} = 6{,}79$$

Exercícios complementares

5. O volume do aquário mede 24 000 cm³, pois $40 \cdot 30 \cdot 20 = 24\,000$, então a medida do volume de água no aquário é de 16 000 cm³, porque $\frac{2}{3} \cdot 24\,000 = \frac{2 \cdot 24\,000}{3} = 16\,000$.
Portanto, o objeto deve ter 3 600 cm³, pois $19\,600 - 16\,000 = 3\,600$. Alternativa **c**.

6. O volume da peça mede 7 560 cm³, pois $6 \cdot 28 \cdot 45 = 7\,560$.
Portanto, sua massa é de 20,412 kg, pois:
$7\,560 \cdot 2{,}7 = 20\,412$ e $20\,412$ g $= (20\,412 : 1\,000)$ kg $= 20{,}412$ kg

7. 25 mL, pois: 2,5 cL = $(2{,}5 \cdot 10)$ mL = 25 mL

Verificando

1. Como há 12 triângulos cinzas na figura, a medida da área de todos eles é 12 cm² ($12 \cdot 1 = 12$). Alternativa **c**.

2. Sendo $x > 0$ a medida, em centímetro, do lado de cada quadradinho tal que $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$. A área total da região mede 84 cm², pois $42 \cdot 2 = 84$. Alternativa **d**.

3. Considerando o pássaro, é possível escrever a relação $1u + 2u + x + x + 1u + 2u + 2u = 48 \Rightarrow 8u + 2x = 48$.
Como $x = 4u$, tem-se que $8u + 2 \cdot 4u = 48 \Rightarrow 16u = 48 \Rightarrow$
$\Rightarrow u = \frac{48}{16} = 3$ e, portanto, $x = 4u = 4 \cdot 3 \Rightarrow x = 12$.
Então, alternativa **b**.

4. Como os triângulos têm a mesma base e têm alturas de mesma medida, conclui-se que suas áreas também têm medidas iguais. Portanto, eles são equivalentes. Alternativa **a**.

5. O triângulo BCP tem altura de medida BP, que é de 10 cm. A medida de sua base é BC, que corresponde a $AD - AB - CD$, logo: 11 cm − 2 cm − 5 cm = 4 cm.
Portanto, a medida da área do triângulo BCP é: (4 cm · 10 cm) : 2 = 20 cm²
Alternativa **b**.

6. A medida do volume será 90 cm³, pois $3 \cdot 6 \cdot 5 = 90$.
Alternativa **a**.

7. As medidas dos volumes são 16 m³ (pois $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$) e 12 m³ (pois $1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$), portanto, a diferença das medidas será 4 m³ (pois $16 - 12 = 4$).
Alternativa **c**.

Capítulo 12 – Estudo da circunferência e do círculo

Objetivos do capítulo e justificativas

- Identificar circunferência e círculo e seus elementos.
- Calcular o comprimento da circunferência e de arcos de circunferência.
- Reconhecer as posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências, e aplicá-las em atividades.
- Aplicar a propriedade dos segmentos tangentes a uma circunferência.
- Reconhecer e aplicar as propriedades dos triângulos e dos quadriláteros circunscritos em uma circunferência.

- Calcular a medida angular de arcos de circunferência, a medida de ângulos centrais, de ângulos inscritos na circunferência e de ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência.
- Planejar e realizar pesquisa amostral, interpretar e representar os dados em tabela, em gráfico de colunas e em relatório.

Neste capítulo, ampliamos a compreensão sobre o conceito de círculo, circunferência e os arcos de circunferência, apresentamos o cálculo da medida de comprimento de arco e circunferência, e propomos a resolução de diferentes problemas envolvendo esses conceitos, contribuindo para o desenvolvimento das **competências específicas 2, 3** e **6** e das **competências gerais 2** e **4**.

Na seção *Trabalhando a informação*, apresentamos uma proposta de reflexão sobre a temática limites do corpo humano, propondo aos estudantes que realizem uma pesquisa, organizem e comparem os dados pesquisados entre os grupos, aproximando os estudos estatísticos de outras áreas de conhecimento. Desse modo, contribuímos para o desenvolvimento das **competências específicas 4**, **5**, **7** e **8** e das **competências gerais 8**, **9** e **10**.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.

No último capítulo, a Unidade Temática predominante é **Geometria**, com conexões importantes com **Grandezas e medidas** e com **Números**. A característica de lugar geométrico da circunferência fica implícita em sua definição. O cálculo do seu comprimento reúne as três Unidades Temáticas referidas no primeiro parágrafo, com um destaque para o número não racional "pi". É o primeiro contato do estudante com um número irracional. Em consonância com a BNCC, o conjunto dos números reais é objeto de conhecimento do 9º ano (EF09MA02). Assim, favorecemos o trabalho com as habilidades (EF07MA22), (EF07MA29) e (EF07MA33).

A Unidade Temática **Probabilidade e estatística** é desenvolvida novamente na seção *Trabalhando a informação*, de maneira interdisciplinar com Biologia, contemplando a habilidade (EF07MA36).

Outro conceito que reúne intrinsecamente Unidades Temáticas **Geometria**, **Grandezas e medidas**, **Números** e **Álgebra** é a posição relativa entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre circunferência e circunferência. O estudo dos segmentos tangentes a uma circunferência subsidia o estudo dos polígonos inscritos, enquanto os conceitos de arcos e de ângulo central dão suporte à relação entre as medidas do ângulo central e do ângulo inscrito.

Há ainda a demonstração das relações entre as medidas dos ângulos com vértice fora da circunferência como sendo a semissoma ou a semidiferença das medidas dos arcos que os seus lados determinam na circunferência.

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. Observar as definições de corda, raio e diâmetro:
   - raio: segmento cujos extremos são o centro e um ponto qualquer da circunferência;
   - corda: segmento cujos extremos são dois pontos quaisquer de uma circunferência;
   - diâmetro: corda que passa pelo centro de uma circunferência.

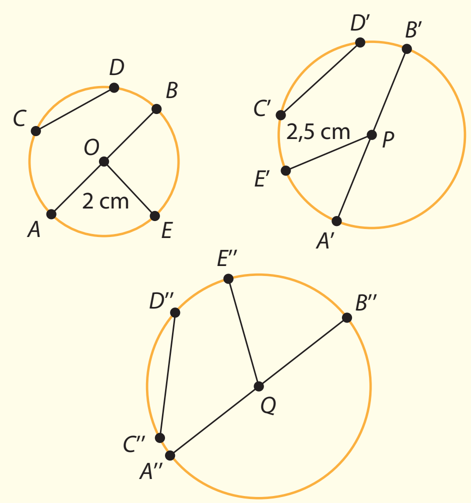
2. a) $\overline{OM}$ é raio da circunferência e $\overline{AB}$ é diâmetro, portanto $m(\overline{AB}) = 2 \cdot m(\overline{OM}) = 6$, ou seja, a medida do segmento $\overline{AB}$ é 6 cm.

2. b) $\overline{MN}$ é diâmetro da circunferência e $\overline{OC}$ é raio, então $m(\overline{OC}) = \dfrac{m(\overline{MN})}{2} = 4$; a medida de $\overline{MN}$ é 4 cm.

2. c) Tanto $\overline{OC}$ quanto $\overline{OB}$ são raios da circunferência, então $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ têm a mesma medida, ou seja, x cm.

2. d) $\overline{OA}$ é raio e $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência, então $\overline{AB}$ mede o dobro de $\overline{OA}$, ou seja, 2y.

3. Construção de figuras livre. Em qualquer uma delas as respostas dos itens abaixo serão as mesmas. Exemplo de construção:

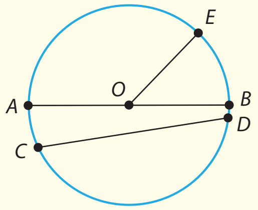


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

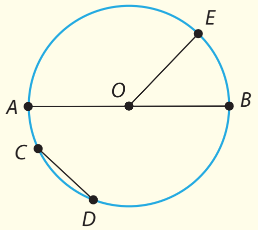
3. a) $\overline{CD}$ não pode ser maior que $\overline{AB}$, pois $\overline{AB}$ é diâmetro, e o diâmetro é a maior corda possível.

3. b) $\overline{AB}$ é sempre a maior corda da circunferência, portanto, é sempre maior que $\overline{CD}$.

3. c) Sim, basta tomar $\overline{CD}$ da seguinte maneira:



3. d) Sim, basta tomar $\overline{CD}$ da seguinte maneira:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

3. e) Sim, pois $\overline{OE}$ representa o raio e $\overline{AB}$ representa o diâmetro da circunferência.

4. a) Como as expressões representam raios, elas são todas iguais.

4. b) Resolvendo o sistema linear com duas incógnitas por substituição:

$$\begin{cases} x + y = 11\,(I) \Rightarrow x = 11 - y\,(II) \\ 2x - 2y = -6\,(III) \end{cases}$$

substituindo (*III*) em (*II*):

$2(11 - y) - 2y = -6 \Rightarrow (11 - y) - y = -3 \Rightarrow 11 - 2y = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 11 - 2y - 11 = -3 - 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2y = -14 \Rightarrow 2y = 14 \Rightarrow y = 7$

Substituindo $y = 7$ em (*I*), teremos:

$x + y = 7 \Rightarrow x + 7 = 11 \Rightarrow x + 7 - 7 = 11 - 7 \Rightarrow x = 4$

Usando $x = 4$ no raio representado por $2x + 3$, teremos: raio = 11 *u* e diâmetro = 22 *u*.

5. O diâmetro da cratera é 1 300 000 m, pois 1 300 km = = (1 300 · 1 000)m = 1 300 000 m. O raio corresponde à metade do diâmetro, logo, mede 650 000 m, pois 1 300 000 : 2 = 650 000.

9. Os estudantes deverão medir a ilustração com a régua, obtendo as medidas, em mm, aproximadamente:

$r = OQ = OR = 14{,}2$

$OT = 6{,}3$

$OU = 10{,}65$

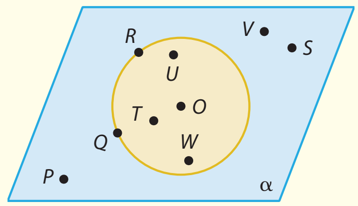
$OP = 27{,}8$

9. a) O raio *r* é igual à medida da distância da circunferência até o ponto *O*.

O raio *r* é menor que a distância do ponto *O* a qualquer ponto pertencente à área externa à circunferência.

O raio *r* é maior que a distância do ponto *O* a qualquer ponto pertencente ao interior da circunferência.

9. b) O ponto *V* deve estar na área externa à circunferência, pois a distância de *V* até *O* é maior que *r*, e *W* está na área interna da circunferência, pois a distância de *W* até *O* é menor que *r*. Resposta possível:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

10. Como $C = 2\pi r$, então:

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 40 = 251{,}2$

A circunferência mede 251,2 cm.

12. b) Considerando o raio *R* da praça, a medida do comprimento da circunferência externa é $C_1 = 2\pi R = 2\pi \cdot 50$, e sendo D_m a medida da distância percorrida por Marina, $D_m = \frac{C_1}{2} = \pi R = 3{,}14 \cdot 50 = 157$, então a distância percorrida por Marina tem medida 157 m. Além disso, C_2 é a medida do comprimento da circunferência interna com diâmetro igual ao raio *R*. Essa circunferência interna tem raio de medida *r* tal que $r = \frac{R}{2} = 25$, então $C_2 = 2\pi R = 2\pi \frac{R}{2} = 2\pi \cdot 25$, a medida da distância percorrida por Paula, D_p, é o traçado vermelho formado por dois semicírculos internos com raio 25 m, então $D_p = 2 = C_2 = 2\pi \cdot 25 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 25 = 157$, assim, a medida da distância percorrida por Paula é de 157 m, portanto, as duas percorreram distâncias de mesmo comprimento.

12. c) Resposta pessoal. Pelo item anterior, pode-se supor que o traçado verde tenha a mesma medida das outras distâncias já calculadas.

12. d) D_a é a distância percorrida por Andrea (traço verde). Espera-se que os estudantes notem que o trajeto de Andrea é dado por quatro semicírculos de raio *r'* medindo 12,5 m $\left(r' = \frac{r}{2} = 12{,}5\right)$.

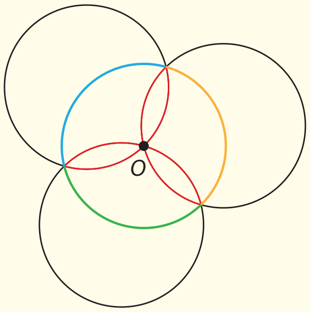
Portanto:

$D_a = 4 \cdot \pi r' = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 12{,}5 = 157$

Logo, Andrea andou aproximadamente 157 m, mesma distância das outras pessoas.

13. a) O raio da moeda de 1 real é de 13,5 mm, então o comprimento *C* da circunferência do contorno dela será $C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 13{,}5 = 84{,}78$; a medida do comprimento é de 84,78 mm, ou aproximadamente 8 cm.

13. b) Considerando uma circunferência inicial, tracejada em cinza na imagem do livro, com centro *O*.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

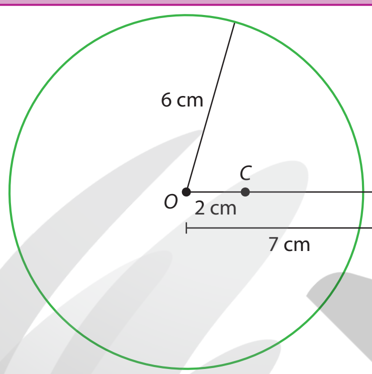
Outras três circunferências, de mesma medida de raio, construídas de modo que o ponto O pertença a essas circunferências determinam três regiões de comprimentos iguais, ou seja, o comprimento de circunferência inicial é dividido em três partes. A região traçada em vermelho é construída por 6 terças partes de circunferência, ou seja, $\frac{6}{3}$ do comprimento da circunferência, que é 8 cm, conforme a conclusão do item anterior. Logo, o comprimento do traçado vermelho é 16 cm, pois: $\frac{6}{3} \cdot 8 = 2 \cdot 8 = 16$

17. Sendo M e N pertencentes à circunferência, então ambos distam r (raio) do centro O. Logo, $m(\overline{OM}) = m(\overline{ON})$ e MON é um triângulo isósceles.

18. a) Pelas propriedades apresentadas, Cristina está na região interna à circunferência e Rosana, na externa.

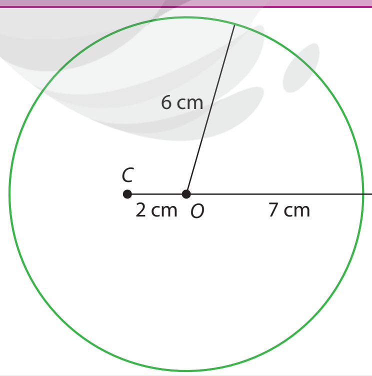
18. b) Nessas condições, há duas possibilidades:

1ª possibilidade



Então a distância é de 5 m, pois 7 – 2 = 5.

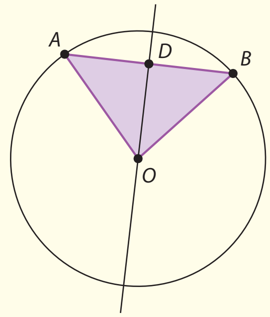
2ª possibilidade



Então a distância é de 9 m, pois 7 + 2 = 9.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

19. Construindo conforme a descrição:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

19. a) Como $O\hat{B}A$ e $O\hat{A}B$ estão em lados (semiplanos) opostos pela bissetriz, e a bissetriz é um eixo de simetria, então $O\hat{B}A$ e $O\hat{A}B$ têm medidas iguais.

19. b) Pelo mesmo motivo que no item anterior, $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$ têm medidas iguais.

19. c) Sejam $m(A\hat{O}D) = m(D\hat{O}B) = \alpha$,

então:

$m(A\hat{O}B) = 2\,\alpha$ e $m(O\hat{A}D) = m(O\hat{B}D) = \beta$

Tomando o triângulo AOB, então:

$m(A\hat{O}B) + m(O\hat{A}B) + m(O\hat{B}A) = 180 \Rightarrow$

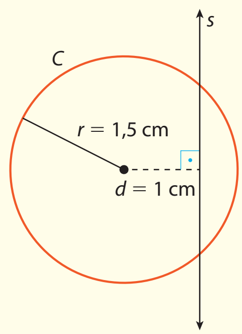
$\Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180 \Rightarrow \alpha + \beta = 90$

No triângulo ODA, o ângulo desconhecido é tal que $\alpha + \beta + x = 180 \Rightarrow 90 + x = 180 \Rightarrow 90 + x - 90 =$
$= 180 - 90 \Rightarrow x = 90$

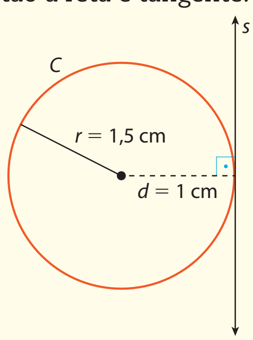
Então, ODB e ODA são triângulos retângulos, pois têm um ângulo reto.

20. Por observação, considerando as definições: a reta é secante quando tem dois pontos em comum com a circunferência; tangente quando a reta tem só um ponto em comum com a circunferência; exterior (ou externa) quando a reta não tem ponto em comum com a circunferência.

21. a) Como $r > d$, então a reta é secante:

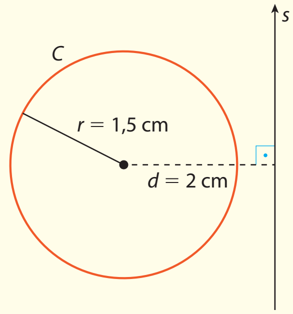


21. b) Como $r = d$, então a reta é tangente:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

21. c) Como $r < d$, então a reta é exterior:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

25. a) A distância mede 30 cm, pois: $18 + 12 = 30$

25. b) A distância mede 9 cm, pois: $17 - 8 = 9$

25. c) A distância mede $\frac{9x}{2}$ cm, pois: $x + \frac{3x}{2} + 2x = 3x + \frac{3x}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{9x}{2}$

26. a) $d = r_1 + r_2$, então são tangentes exteriores.

26. b) $d > r_1 + r_2$, então são externas.

26. c) $d = r_1 - r_2$, então são tangentes interiores.

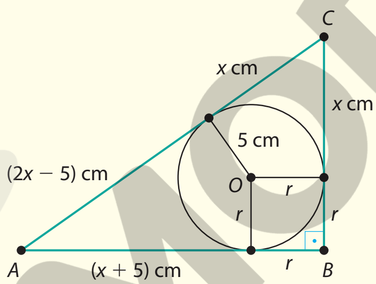
26. d) $d < r_1 + r_2$ e $d > r_1 - r_2$, então são secantes.

26. e) $d < r_1 - r_2$, então são internas.

26. f) $d = 0$, então são concêntricas.

29. Considerando as relações de igualdade entre as medidas dos segmentos apontados no desenho a seguir, o perímetro tem medida $5x + 2r$, pois $2x - 5 + x + 5 + r + r + x + x = 5x + 2r$, e como $2x - 5 = x + 5$, então $2x - 5 - x = x + 5 - x \Rightarrow x - 5 = 5 \Rightarrow x - 5 + 5 = 5 + 5 \Rightarrow x = 10$.

O perímetro tem medida 60 cm, pois: $5x + 2r = 5 \cdot 10 + 2 \cdot 5 = 50 + 10 = 60$



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

32. a) Se as somas das medidas dos lados opostos de um quadrilátero são iguais, então ele é circunscrito a uma circunferência. Assim: $13 + x = 17 + 12 \Rightarrow 13 + x - 13 = 29 - 13 \Rightarrow x = 16$

32. b) $(x + 6) + x = (x + 2) + (2x - 6) \Rightarrow 2x + 6 = 3x - 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x + 6 - 2x = 3x - 4 - 2x \Rightarrow 6 = x - 4 \Rightarrow 6 + 4 = x - 4 + 4 \Rightarrow x = 10$

34. Como o quadrilátero é circunscrito, é possível escrever a relação $(x + 7) + 12 = (2x + 1) + 9$. Resolvendo: $x + 19 = 2x + 10 \Rightarrow x + 19 - x = 2x + 10 - x \Rightarrow 19 = x + 10 \Rightarrow 19 - 10 = x + 10 - 10 \Rightarrow x = 9$. Então $m(\overline{AB}) = 2x + 1 = 2 \cdot 9 + 1 = 18 + 1 = 19$ e $m(\overline{BC}) = x + 7 = 9 + 7 = 16$.

Por isso o perímetro de $ABCD$ é 56 cm ($12 + 9 + 19 + 16 = 56$).

35. A medida angular de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.

35. a) $\overset{\frown}{CD}$ tem mesma medida de $C\hat{O}D$, então $m(\overset{\frown}{CD}) = 180°$

35. b) $m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{CED}) = 360 \Rightarrow 180 + m(\overset{\frown}{CED}) = 360 \Rightarrow$
$\Rightarrow m(\overset{\frown}{CED}) = 180°$

35. c) $m(\overset{\frown}{HGF}) = m(F\hat{O}G) + m(G\hat{O}H) = 100 + 90 = 190°$

35. d) $m(\overset{\frown}{FIH}) = 360 - m(\overset{\frown}{FGH}) = 360 - 190 = 170°$

36. a) $y = 58^\circ$ e $x = 360 - 58 \Rightarrow x = 302^\circ$

36. b) $y = 50^\circ$ e $x = 360 - (y + 34) \Rightarrow x = 360 - 50 - 34 \Rightarrow x = 276^\circ$

38. A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida angular (em grau) do arco compreendido por seus lados.

38. a) $x = m\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{m\left(\overset{\frown}{AC}\right)}{2} \Rightarrow m\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{120}{2} \Rightarrow x = 60^\circ$

38. b) $x = m\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{m\left(\overset{\frown}{AC}\right)}{2} \Rightarrow 50 = \dfrac{x}{2} \Rightarrow x = 100^\circ$

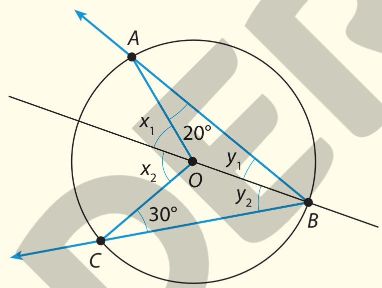
38. c) $x = m\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{m\left(\overset{\frown}{AC}\right)}{2} \Rightarrow x = \dfrac{90}{2} = 45^\circ$

38. d) $m\left(\overset{\frown}{AC}\right) = 360 - (85 + 125) = 360 - 210 = 150^\circ$ e

$x = m\left(A\hat{B}C\right) = \dfrac{m\left(\overset{\frown}{AC}\right)}{2} \Rightarrow x = \dfrac{150}{2} \Rightarrow x = 75^\circ$

38. e) $m\left(\overset{\frown}{AC}\right) = m\left(A\hat{O}C\right) = 180^\circ$ e $x = \dfrac{m\left(\overset{\frown}{AC}\right)}{2} \Rightarrow x = 90^\circ$

38. f) Traçando a reta $\overleftrightarrow{OB}$, ocorre a divisão de x em dois ângulos (x_1 e x_2) e do ângulo no vértice B em dois ângulos (y_1 e y_2):



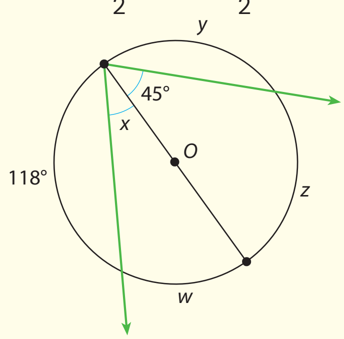
No triângulo ABO: $x_1 = 20 + y_1$ (*I*) e no triângulo CBO: $x_2 = 30 + y_2$ (*II*). Adicionando as duas equações, $x_1 + x_2 = 50 + y_1 + y_2$, e como $x_1 + x_2 = x$ e $y_1 + y_2 = m\left(A\hat{B}C\right) \Rightarrow x = 50 + m\left(A\hat{B}C\right)$. Como $x = 2 \cdot m\left(A\hat{B}C\right)$, substituindo: $2 \cdot m\left(A\hat{B}C\right) = 50 + m\left(A\hat{B}C\right)$ $m\left(A\hat{B}C\right) = 50^\circ$, então: $x = 2 \cdot 50 = 100^\circ$

39. a) $x = 60^\circ$ e $y = 2 \cdot 60 \Rightarrow y = 120^\circ$

39. b) $y = 88^\circ$ e $x = \dfrac{88}{2} \Rightarrow x = 44^\circ$

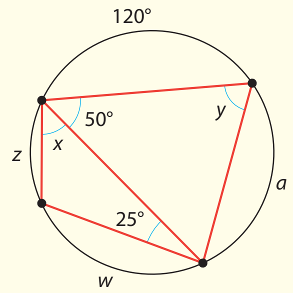
39. c) $y = 110^\circ$ e $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{110}{2} \Rightarrow x = 55^\circ$

39. d) Observe a ilustração a seguir. Como z é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito de medida 45°, $z = 2 \cdot 45 = 90^\circ$. Como $y + z = 180 \Rightarrow y + 90 = 180 \Rightarrow y + 90 - 90 = 180 - 90 \Rightarrow y = 90^\circ$. Como w é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito x, então $w + 118 = 180 \Rightarrow w = 62^\circ$ e $x = \dfrac{w}{2} \Rightarrow x = \dfrac{62}{2} \Rightarrow x = 31^\circ$.



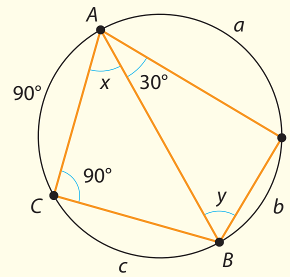
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

39. e) Observe o esquema:



Como z é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito 25°, então $z = 2 \cdot 25 = 50°$. Como a é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito 50°, então $a = 2 \cdot 50 = 100°$. Portanto, $z + w + a + 120 = 360 \Rightarrow 50 + w + 100 + 120 = 360 \Rightarrow w = 90$. Como x é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito x, então $x = \dfrac{w}{2} = \dfrac{90}{2} = 45°$. E como $z + w$ é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito y, então $y = \dfrac{50 + 90}{2} = \dfrac{140}{2} = 70°$.

39. f) Observe o esquema:



Como c é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito x; b é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito ao ângulo de 30°; então $b = 2 \cdot 30 = 60°$ (*i*); $a + b$ é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito de 90°, então $a + b = 90 \cdot 2 = 180°$. De (*i*), temos $a + 60 = 180 \Rightarrow a + 60 - 60 = 180 - 60 \Rightarrow a = 120°$. Como a é a medida angular compreendida pelo ângulo inscrito y, então $y = \dfrac{a}{2} = \dfrac{120}{2} = 60°$.
Além disso, $m\left(A\hat{B}C\right) = 45°$, pois é o ângulo inscrito à medida angular $m\left(\overparen{AC}\right) = 90°$; então $x = 180 - (90 + 45) = 180 - 135 = 45°$

40. a) $x = \dfrac{100 - 50}{2} = \dfrac{50}{2} = 25 \Rightarrow x = 25°$

40. b) $20 = \dfrac{70 - x}{2} \Rightarrow 40 = \left(\dfrac{70 - x}{2}\right) \cdot 2 \Rightarrow 40 = 70 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow 40 + (x - 40) = 70 - x + (x - 40) \Rightarrow x = 30°$

40. c) Note que tanto os lados que compreendem o ângulo de medida 18° quanto os lados que compreendem o ângulo indicado por x determinam o mesmo arco na circunferência. Considerando $\overparen{AB}$ a medida angular do arco compreendido pelos ângulos de medida 18° e de x, então: $18 = \dfrac{\overparen{AB} - 56}{2} \Rightarrow 36 = \overparen{AB} - 56 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overparen{AB} = 92°$. Por isso: $x = \dfrac{\overparen{AB}}{2} = \dfrac{92}{2} \Rightarrow x = 46°$

41. a) $x = \dfrac{70 + 32}{2} = \dfrac{102}{2} \Rightarrow x = 51°$

41. b) Considerando $\overparen{AB}$ a medida angular do arco compreendido pelas retas que também formam o ângulo de 14°30', então $\overparen{AB} = 2 \cdot (14°30') \Rightarrow \overparen{AB} = 29°$; portanto: $x = \dfrac{29 + 31}{2} \Rightarrow x = 30°$

41. c) É possível escrever a equação: $100 = \dfrac{50 + x}{2}$. Resolvendo-a: $200 = 50 + x \Rightarrow 200 - 50 = = 50 + x \Rightarrow x = 150°$

41. d) Considerando y o ângulo suplementar de x, então $y = \dfrac{35 + 95}{2} = \dfrac{130}{2} = 65°$. E como $x + y = 180°$, temos: $x + 65 = 180 \Rightarrow x + 65 - 65 = 180 - 65 \Rightarrow x = 115°$

42. Como $m(\overset{\frown}{AB}) + m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{DE}) + m(\overset{\frown}{EA}) = 360°$, substituindo as medidas fornecidas no enunciado: $20 + 124 + 36 + 90 + m(\overset{\frown}{EA}) = 360 \Rightarrow 270 + m(\overset{\frown}{EA}) = 360 \Rightarrow$ $\Rightarrow m(\overset{\frown}{EA}) = 90°$. Dado na circunferência que $m(\overset{\frown}{EB}) + m(\overset{\frown}{EA}) + m(\overset{\frown}{AB}) \Rightarrow m(\overset{\frown}{EB}) = 110°$. Pela propriedade dos ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência, $x = \dfrac{m(\overset{\frown}{EB}) - m(\overset{\frown}{CD})}{2}$, substituindo $m(\overset{\frown}{EB}) = 110°$, temos: $x = \dfrac{110 - 36}{2} = \dfrac{74}{2} \Rightarrow x = 37°$

Alternativa **c**.

43. $m(\overset{\frown}{BE}) = 50°$ (pois $25 \cdot 2 = 50$ e $m(\overset{\frown}{BE})$ é a medida do arco da circunferência compreendido pelo ângulo 25°). Pela propriedade dos ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência:

$$40 = \frac{m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{DE})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{CD}) - 50}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 40 \cdot 2 = \left(\frac{m(\overset{\frown}{CD}) - 50}{2}\right) \cdot 2 \Rightarrow 80 = m(\overset{\frown}{CD}) - 50 \Rightarrow$$

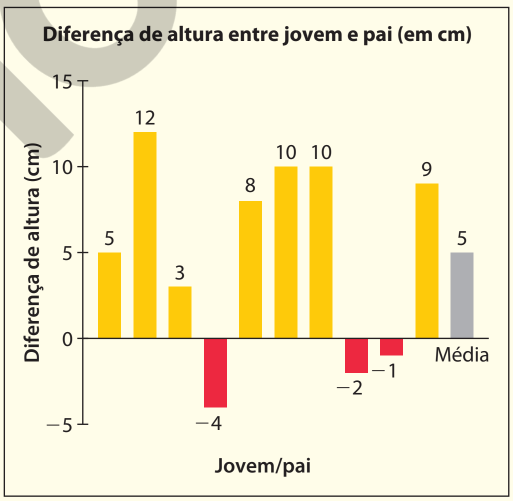
$$\Rightarrow 80 + 50 = m(\overset{\frown}{CD}) - 50 + 50 \Rightarrow 130° = m(\overset{\frown}{CD}). \text{ Então: } x = \frac{m(\overset{\frown}{CD}) + m(\overset{\frown}{BE})}{2} =$$

$$= \frac{130 + 50}{2} = \frac{180}{2} \Rightarrow x = 90°$$

Trabalhando a informação

Página 275

1.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pelos estudantes de Adelson.

Exercícios complementares

4. a) $O_1O_2 = r_1 - r_2$, então C_1 e C_2 são tangentes interiores.

4. b) $O_1O_2 = r_1 + r_2$, então C_1 e C_2 são tangentes exteriores.

4. c) $O_1O_2 < r_1 + r_2$ e $O_1O_2 > r_1 - r_2$, então C_1 e C_2 são secantes.

4. d) $O_1O_2 > r_1 + r_2$, então C_1 e C_2 são externas.

4. **e)** $O_1O_2 < r_1 - r_2$, então C_1 e C_2 são internas.

6. Pela figura, $m(A\hat{O}B) = 100°$. Como o triângulo AOB é isósceles, $m(O\hat{A}B) = m(O\hat{B}A) = x$. Pela soma dos ângulos internos do triângulo, $m(A\hat{O}B) + m(O\hat{A}B) + m(O\hat{B}A) = 180°$, então $100 + x + x = 180 \Rightarrow x = 40$. Então, $m(O\hat{A}B) = 40°$. Alternativa **d**.

7. Pela figura, $m(\overset{\frown}{DA}) = 2 \cdot m(D\hat{C}A) = 2 \cdot 30 = 60°$.

   Então, $x = \dfrac{m(\overset{\frown}{DA})}{2} = \dfrac{60}{2} = 30°$. Alternativa **a**.

8. **a)** $y = 2 \cdot m(B\hat{A}C) = 2 \cdot 50 \Rightarrow y = 100°$. No triângulo BOC, o ângulo $B\hat{O}C$ mede $y = 100°$. Como BOC é isósceles, $m(B\hat{C}O) = x$. Pela propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo, $m(O\hat{B}C) + m(B\hat{O}C) + m(C\hat{O}B) = 180° \Rightarrow x + x + 100 = 180 \Rightarrow 2x + 100 = 180 \Rightarrow$
   $\Rightarrow 2x + 100 - 100 = 180 - 100 \Rightarrow 2x = 80 \Rightarrow x = 40°$

8. **b)** $m(A\hat{C}B) = \dfrac{126}{2} = 63°$ e $m(A\hat{B}C) = \dfrac{142}{2} = 71°$. Pela propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo, $m(B\hat{A}C) + m(A\hat{C}B) + m(A\hat{B}C) = 180° \Rightarrow x + 63 + 71 = 180 \Rightarrow x + 134 =$ $= 180 \Rightarrow x + 134 - 134 = 180 - 134 \Rightarrow x = 46°$. Como y representa a medida angular do arco compreendido pelas retas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, que também compreendem o ângulo x, $y = 2x = 2 \cdot 46 = 92°$.

8. **c)** $y = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC})}{2} = \dfrac{80}{2} = 40°$. Como y e x são ângulos complementares, pois a reta é tangente em B, então $y + x = 90 \Rightarrow x + 40 = 90 \Rightarrow x = 50°$.

8. **d)** $m(\overset{\frown}{BD}) = 56°$ (pois $B\hat{O}D$ é ângulo central) $\Rightarrow y = 56°$ e $m(\overset{\frown}{DC}) = 28°$ (pois $D\hat{O}C$ é ângulo central). Também:

   $$x = \frac{m(\overset{\frown}{BC})}{2} = \frac{m(\overset{\frown}{BD}) + m(\overset{\frown}{DC})}{2} \Rightarrow x = \frac{56 + 28}{2} = \frac{84}{2} \Rightarrow x = 42°$$

Verificando

1. $m(\overline{EF}) = 3 \cdot m(\overline{AB}) = 3 \cdot 2 = 6$

   Como $\overline{EO}$ é o raio, $m(\overline{EO}) = \dfrac{m(\overline{EF})}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$. Alternativa **a**.

2. Resolvendo a inequação:

   $2 < \dfrac{6x + 2}{2} < 13 \Rightarrow 4 < 6x + 2 < 26 \Rightarrow 4 - 2 < 6x + 2 - 2 < 26 - 2 \Rightarrow$

   $\Rightarrow 2 < 6x < 24 \Rightarrow \dfrac{2}{6} < \dfrac{6x}{6} < \dfrac{24}{6} \Rightarrow \dfrac{1}{3} < x < 4.$

   Alternativa **c**.

3. $C = d\pi \Rightarrow C = 7 \cdot 3{,}14 \Rightarrow C = 21{,}98$. A medida do comprimento é aproximadamente 21,98 cm. Alternativa **b**.

4. Se o raio tem medida 6 cm e $m(\overline{OP}) = 6$ cm, então P pertence à circunferência. Como $m(\overline{OQ}) =$ $= 8$ cm, Q é externo à circunferência, e como $m(\overline{OR}) = 3$ cm, R é interno.
   Alternativa **d**.

5. Em relação à circunferência, uma reta é secante quando tem dois pontos em comum com a circunferência; tangente quando a reta tem só um ponto em comum com a circunferência; exterior (ou externa) quando a reta não tem ponto em comum com a circunferência. Alternativa **a**.

6. Temos que $O_1O_2 = 4$ e $r_1 - r_2 = 12 - 8 = 4$
Então, $O_1O_2 = r_1 - r_2$ e C_1 e C_2 são tangentes interiores. Alternativa **c**.

7. Pela propriedade dos quadriláteros circunscritos, $9{,}5 + 7 = 6{,}5 + x \Rightarrow 16{,}5 = 6{,}5 + x \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 10$, a medida x do lado desconhecido é 10 cm. Então:
$m(\overline{PQ}) = x - 3{,}5 = 10 - 3{,}5 = 6{,}5$
$Área_{POQ} = \dfrac{OQ \cdot QP}{2}$, pois $\overleftrightarrow{PQ}$ é tangente à circunferência.
Pela figura, $m(\overline{OQ}) = r = 4$ cm. Substituindo na expressão da área de POQ:
$Área_{POQ} = \dfrac{4 \cdot 6{,}5}{2} = \dfrac{26}{2} = 13$. A área tem medida 13 cm².
Alternativa **b.**

Sugestão de avaliação diagnóstica

Atividade 1

(EF06MA01) Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica.

Clara é jornalista e quer noticiar uma recente pesquisa que indica que a população de sua cidade ultrapassou quatro vírgula cinco milhões de habitantes. Escreva o número aproximado de habitantes da cidade de Clara, com todos os seus algarismos, no sistema de numeração indo-arábico.

Resposta: 4 500 000

Resolução e comentários

Esta atividade permite avaliar a habilidade dos estudantes em reconhecer o valor posicional dos algarismos em números da ordem da unidade de milhão. Um modo que os estudantes podem utilizar para resolver a atividade é identificar a parte inteira 4, que indica 4 000 000 (4 milhões); depois, reconhecer que o algarismo 5, a parte decimal, corresponde à ordem seguinte, centena de milhar; são 5 centenas de milhar, ou seja, 500 000. Assim, o número é 4 500 000.

Outra abordagem é montar um quadro com a ordem dos algarismos e começar a preenchê-lo com o algarismo da parte inteira, o algarismo 4, cuja ordem é unidade de milhão. Depois, com o algarismo da ordem seguinte, centena de milhar, o algarismo 5.

Unidade de milhão	Centena de milhar	Dezena de milhar	Unidade de milhar	Centena	Dezena	Unidade
4	5					

Em seguida, deve-se completar as demais ordens do quadro com algarismos zero, obtendo o número 4 500 000.

Unidade de milhão	Centena de milhar	Dezena de milhar	Unidade de milhar	Centena	Dezena	Unidade
4	5	0	0	0	0	0

Avalie se os estudantes associam corretamente os algarismos e as respectivas ordens do sistema de numeração decimal, e se eles compreendem a relação entre as ordens estudadas, que 10 unidades de uma ordem formam 1 unidade de ordem imediatamente superior.

Atividade 2

(EF06MA02) Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.

Observe dois números escritos em dois sistemas de numeração diferentes: no sistema romano de numeração e no sistema de numeração indo-arábico, também chamado sistema de numeração decimal.

MDCCCXXX: 1 830

CLXXXIII: 183

Com relação a esses números, indique a única alternativa correta.

a) O algarismo 3 apresenta diferentes valores conforme a posição que ele ocupa em cada número, assim como os símbolos que o identificam no sistema de numeração romano.

b) O sistema de numeração romano tem um símbolo específico para representar a ideia de zero.

c) No sistema de numeração decimal, para representar um número natural que é multiplicado por dez, acrescenta-se um algarismo 0 à sua direita.

d) No sistema de numeração romano, para representar um número que é multiplicado por dez, basta deslocar os mesmos símbolos que representam esse número para a esquerda e acrescentar o símbolo que representa o número zero logo em seguida.

Resposta: Alternativa **c**.

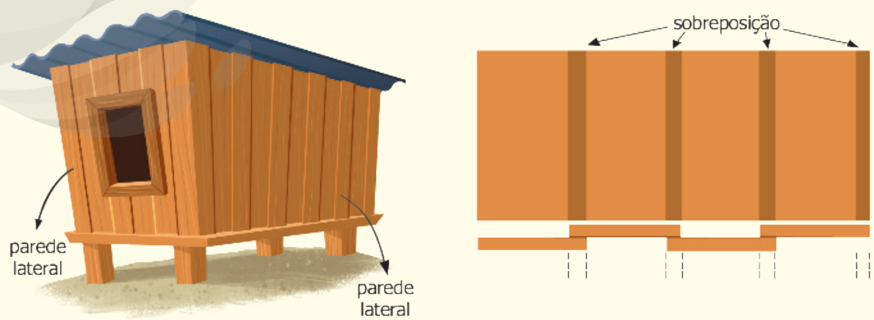
Resolução e comentários

Para responder a esta atividade, os estudantes precisam conhecer as características dos dois sistemas de numeração para que possam identificar as diferenças entre eles. A alternativa **a** apresenta uma afirmação verdadeira sobre o sistema de numeração decimal; o valor posicional dos algarismos, conforme um algarismo é deslocado uma, duas ou três casas para a esquerda em um número, é multiplicado por 10, 100 ou 1 000. Entretanto, isso não ocorre no sistema de numeração romano. É importante notar que o número 3 e o número 30 não são representados por símbolos relacionados no sistema de numeração romano. O número 3 é representado por III, ou seja, três vezes o número um (I); o número 30 é representado por XXX, ou seja, três vezes o número dez (X). A alternativa **b** evidencia uma diferença fundamental entre os dois sistemas de numeração: no sistema de numeração romano, não existe um símbolo que representa a ideia de zero, já no sistema de numeração decimal, um sistema posicional, existe um símbolo para representar o zero e ele é de fundamental importância. No sistema de numeração romano, esse símbolo não é necessário, pois esse é um sistema em que os valores são apenas adicionados (ou subtraídos), sem qualquer referência à posição que o símbolo ocupa na escrita. A alternativa **c** mostra uma das grandes vantagens do sistema de numeração posicional: para representar um número natural que é multiplicado por dez basta acrescentar um algarismo 0 à sua direita. Já no sistema de numeração romano, para representar um número natural que é multiplicado por dez é necessário inserir novos símbolos ou até reescrever a representação desse número. Por exemplo, ao multiplicar o número 183 (CLXXXIII) por 10 para a representação do número 1 830 (MDCCCXXX) resultante é necessário acrescentar os símbolos M e D, excluir os símbolos L e I, e acrescentar mais dois C, ou seja, são necessárias novas combinações, novos cálculos para saber como fazer essa representação, enquanto no sistema de numeração decimal basta acrescentar o algarismo zero. Como não há símbolo para zero no sistema de numeração romano, a alternativa **d** está incorreta.

Atividade 3

(EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.

Cada uma das paredes laterais de um galinheiro foi construída com 11 tábuas de madeira sobrepostas, medindo 25 centímetros de largura cada uma. Considerando que cada uma das paredes laterais mede 225 centímetros de largura, quanto mede a sobreposição de duas tábuas de madeira, em centímetro?



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Exemplo de sobreposição das 4 primeiras madeiras de uma das paredes laterais.

Resposta: 5 cm.

Resolução e comentários

Nesta atividade os estudantes são avaliados quanto à sua habilidade de resolução de problemas envolvendo o uso das quatro operações aritméticas fundamentais. Eles devem analisar o problema e reconhecer que, se as tábuas não fossem sobrepostas, cada uma das paredes laterais mediria 275 centímetros ($25 \cdot 11 = 275$). Portanto, a diferença entre esse valor e aquele informado no enunciado, 225 centímetros, corresponde à medida total das sobreposições, 50 centímetros ($275 - 225 = 50$). Em seguida, eles devem reconhecer que o número de sobreposições é sempre 1 unidade a menos do que o total de peças, ou seja, com apenas duas peças há 1 sobreposição, com três peças há 2 sobreposições, e assim por diante; logo, com 11 peças haverá 10 sobreposições. Assim, os 50 centímetros que correspondem à medida total das sobreposições estão distribuídos em 10 sobreposições. Portanto, cada sobreposição mede 5 centímetros ($50 : 10 = 5$). Um dos erros mais comuns durante a resolução é considerar que o número de sobreposições é igual ao número de tábuas e fazer a divisão $50 : 11 \simeq 4{,}5$.

Atividades como esta são importantes para que os estudantes reconheçam que nem sempre a resposta provém da aplicação imediata de uma operação aritmética com os valores dados no problema. Além disso, permitem a ampliação do repertório de resolução de problemas, uma vez que o princípio aplicado nesta resolução é aplicado também em outros problemas similares, como para obter a medida da distância entre dois postes em um grupo de *n* postes dispostos em linha reta e igualmente espaçados, sabendo-se a medida da distância total entre o primeiro e o último poste.

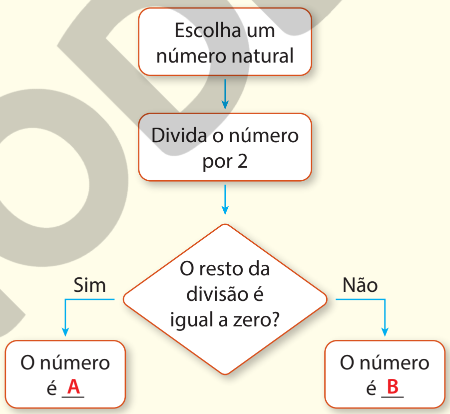
Atividade 4

(EF06MA04) Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par).

a) Construa um algoritmo, em linguagem natural, para determinar se um número natural qualquer é par ou ímpar.

b) Observe o fluxograma.

Fluxograma para determinar se um número natural é par ou ímpar



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Preencha corretamente as lacunas indicadas por A e B com as palavras **par** ou **ímpar**.

Respostas:

a) Escolha um número natural. Divida o número por 2. O resto da divisão é igual a zero? Se sim, o número é par, se não, é ímpar.

b) A: par; B: ímpar.

Resolução e comentários

Com esta atividade é possível avaliar as habilidades dos estudantes na construção de algoritmos em linguagem natural para a resolução de um problema simples e também suas habilidades em representar esse algoritmo por meio de um fluxograma. Para a resolução do item **b**, os estudantes devem acompanhar a sequência de passos indicada no fluxograma e determinar o resto da divisão de alguns números naturais por 2, associando os resultados obtidos (igual a zero ou diferente de zero) a números pares ou ímpares. É esperado que os estudantes consigam associar sem grandes dificuldades o resto da divisão de um número natural ao fato de ele ser par ou ímpar, já que as representações figurativas dos números pares como grupos de bolinhas lado a lado são bastante exploradas desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. É possível que alguns estudantes façam uma verificação experimental, usando um ou mais números, dividindo-os por 2 e observando os restos das divisões para obter a resposta correta.

A fim de obter informações sobre como eles compreendem a paridade de um número, é importante discutir com eles as respostas dadas, pois, por vezes, os estudantes podem apenas usar a regra de que o número é par se o algarismo das unidades for par, sem, necessariamente, ter compreensão do seu significado. A observação dessas respostas permite planejar possíveis encaminhamentos futuros, a fim de assegurar que os estudantes compreendam o conceito.

Atividade 5

(EF06MA05) Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1 000.

Célio está construindo uma parede com tijolos que medem 20 cm de comprimento. Se a parede tem comprimento total de 340 cm, pode-se concluir que Célio:

a) não conseguirá usar um número inteiro de tijolos porque 340 não é múltiplo de 20.

b) conseguirá usar um número inteiro de tijolos porque 20 é um divisor de 340.

c) não conseguirá usar um número inteiro de tijolos porque 20 não é fator de 340.

d) conseguirá usar um número inteiro de tijolos porque 340 é divisor de 20.

Resposta: Alternativa **b**.

Resolução e comentários

Para responder à atividade corretamente, os estudantes precisam realizar a divisão 340 : 20 para determinar se é exata; depois devem identificar o termo mais adequado para expressar a relação entre os números 340 e 20. Um dos erros que podem ser cometidos pode estar relacionado à dificuldade na realização do cálculo por meio do algoritmo usual da divisão ou pelo uso de estimativas. Os estudantes também podem cometer erros por ainda não terem se apropriado dos termos utilizados para expressar as relações envolvendo a divisibilidade de um número por outro. É esperado que eles se familiarizem com esses termos por meio de associações com outros termos ou com situações conhecidas. Observe alguns exemplos.

- Palavras como "divisível", que têm final "vel", indicam algo que é passível de ou agente de. Ou seja, dizer que um número é divisível por outro significa que o número em questão pode ser dividido por outro. Apresentar outras palavras como exemplo pode ajudar os estudantes a entender essa ideia; palavras como: inflamável (que se pode inflamar), reciclável (que se pode reciclar), inegável (que não se pode negar), visível (que pode ser visto), durável (que dura).
- A palavra "fator" é conhecida pelos estudantes quando estudam os termos de uma multiplicação e a propriedade comutativa expressa por "a ordem dos fatores não altera o produto", ou seja, o "fator" é um dos termos envolvidos na multiplicação, e não o resultado (produto).
- De forma similar, o termo "divisor" também é conhecido com o estudo da divisão: o divisor é o número "dentro da chave", ou seja, é o número pelo qual outro número, o dividendo, deve ser dividido.

Ao discutir e retomar o conceito de divisibilidade com os estudantes, essas e outras associações podem ajudá-los a se familiarizarem com a linguagem empregada nessas situações.

Atividade 6

(EF06MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.

Um mural retangular da sala de Biologia de uma escola foi decorado pelos estudantes com fotografias de diferentes espécies da fauna e da flora brasileira, todas de formato quadrado e com o mesmo tamanho. Após decorar o mural, os estudantes perceberam que foram usadas 182 fotografias diferentes e que o mural tinha 1 unidade a mais de fileiras verticais de fotografias em relação ao número de fileiras horizontais. De quantas fileiras verticais é composto o mural? E de quantas fileiras horizontais?

Resposta: 14 fileiras verticais e 13 fileiras horizontais.

Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar se os estudantes reconhecem a ideia de divisibilidade em uma disposição retangular de elementos. Para avaliar o conhecimento dos estudantes sobre divisibilidade e verificar se eles dominam os conceitos de múltiplo e divisor, é interessante observar os cálculos realizados por eles durante a resolução e também observar suas estratégias pessoais para resolver o problema.

É possível que os estudantes escolham um número qualquer e o multipliquem pelo seu sucessor para verificar se o resultado é 182 e, então, façam ajustes gradativos aos números escolhidos até obter a resposta. Caso eles tenham usado essa estratégia, observe se a escolha dos números foi aleatória ou se obedeceu a algum critério. Por exemplo, eles podem ter escolhido dois números que multiplicados um pelo outro têm como produto um número cujo algarismo das unidades é igual a 2, como: $1 \cdot 2 = 2$; $8 \cdot 9 = 72$; $3 \cdot 4 = 12$ ou $6 \cdot 7 = 42$. Assim, eles continuariam efetuando multiplicações até chegar à resposta correta, $13 \cdot 14 = 182$.

Outra possibilidade de resolução é fazer a decomposição do número 182 em fatores primos, ou fatoração: $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$. Como o objetivo é obter dois números consecutivos cujo produto é 182, eles podem perceber que $2 \cdot 7 = 14$, logo, $182 = 13 \cdot 14$. Portanto, é possível concluir que o mural é composto de 14 fileiras verticais e 13 fileiras horizontais.

Atividade 7

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

Letícia e Vítor praticaram arremessos com bolas de basquete. Letícia acertou $\frac{7}{12}$ dos seus arremessos e Vítor acertou $\frac{5}{9}$ dos seus. Qual deles obteve melhor aproveitamento nos arremessos?

Resposta: Letícia.

Resolução e comentários

Com esta atividade é possível avaliar as habilidades dos estudantes em associar frações à ideia de partes de inteiros e em comparar e ordenar essas frações, identificando frações equivalentes. Verifique se algum dos estudantes adicionou, de maneira equivocada, um mesmo número natural diferente de zero aos dois termos da fração que representa o número de acertos de Vítor para obter uma fração equivalente e compará-la com a fração que representa o número de acertos de Letícia, $\frac{5+3}{9+3} = \frac{8}{12}$, concluindo que Vítor obteve melhor aproveitamento nos arremessos do que Letícia.

É possível também que algum estudante tenha resolvido o problema desenhando figuras, com base na ideia de proporcionalidade, ao comparar as duas frações considerando as partes pintadas de um mesmo inteiro. Por exemplo, desenhando grupos com 12 bolinhas em que 7 estão pintadas e grupos com 9 bolinhas em que 5 estão pintadas, até obter o mesmo total de bolinhas para os dois agrupamentos, 36, que representa o denominador comum das duas frações, que agora podem ser comparadas.

$$\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{21}{36} \text{ e } \frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{20}{36}$$

Como $\frac{21}{36} > \frac{20}{36}$, temos: $\frac{7}{12} > \frac{5}{9}$

Portanto, Letícia obteve melhor aproveitamento nos arremessos do que Vítor.

Atividade 8

(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

Osvaldo fez uma compra no supermercado e, ao analisar a nota fiscal, notou que 1 real de cada 5 reais pagos correspondia ao valor cobrado de impostos, ou seja, $\frac{1}{5}$ do valor total de sua compra corresponde a impostos. Considerando que $\frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 0{,}20$, Osvaldo concluiu que para calcular o valor total pago de impostos basta multiplicar o valor pago pela compra por 0,20.

Se na compra de outros produtos em uma loja de materiais para construção 1 real de cada 4 reais pagos corresponde ao valor cobrado de impostos, por quanto Osvaldo deverá multiplicar o valor total de sua compra para determinar o valor total pago de impostos nessa loja?

a) 0,20
b) 0,25
c) 0,40
d) 0,50
e) 0,60

Resposta: Alternativa **b**.

Resolução e comentários

Nesta atividade são avaliados a interpretação do enunciado e o reconhecimento de números racionais positivos em suas representações fracionária e decimal. Para resolver esta atividade, os estudantes podem recorrer ao conceito de proporcionalidade para representar um número fracionário na forma decimal.

Como o total corresponde a $\frac{100}{100}$, 1 inteiro, então um quinto $\left(\frac{1}{5}\right)$ desse valor corresponde a $\frac{20}{100}$ ou 0,20. De modo análogo, um quarto $\left(\frac{1}{4}\right)$ de $\frac{100}{100}$ corresponde a $\frac{25}{100}$ ou 0,25.

Outro modo de resolver o problema é recorrer à ideia de fração como divisão, ou seja, $1 : 4 = 0{,}25$.

Também é possível que alguns estudantes se baseiem no procedimento mostrado no enunciado e determinem que, para que o denominador da fração $\frac{1}{4}$ seja igual a 100, ele deve ser multiplicado por 25, então: $\frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100} = 0{,}25$.

Se considerar conveniente, comente com os estudantes que esse procedimento permite o cálculo da porcentagem de um dado valor. Multiplicar um valor por 0,20, por exemplo, equivale a obter 20% desse valor, e multiplicar um valor por 0,25 equivale a obter 25% dele.

Atividade 9

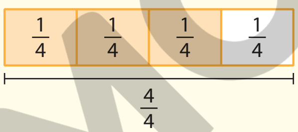
(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

Um automóvel foi abastecido e o mostrador de combustível em seu painel passou a indicar que o tanque de 60 litros estava com $\frac{3}{4}$ da sua capacidade preenchida. Nessa situação, quantos litros de combustível há no tanque do automóvel?

Resposta: 45 litros.

Resolução e comentários

Ao realizar a correção desta atividade, observe os cálculos efetuados pelos estudantes para identificar os conceitos e métodos aplicados por eles. É esperado que estudantes do 7º ano deixem de utilizar esquemas visuais para representar situações-problema, tendendo a realizar apenas os cálculos escritos, o que pode fazer com que erros na resolução sejam mais comuns. Nesse caso, se achar conveniente, apresente durante a correção um esquema para representar a situação descrita.



RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

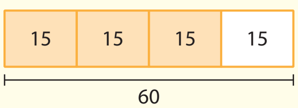
Com base nessa representação, é possível reconhecer que cada parte do tanque corresponde a $\frac{1}{4}$ da sua capacidade, ou seja:

$$\begin{array}{ccc} \frac{4}{4} & \longrightarrow & 60 \text{ litros} \\ \downarrow :4 & & \downarrow :4 \\ \frac{1}{4} & \longrightarrow & 15 \text{ litros} \end{array}$$

Então, $\frac{3}{4}$ serão o triplo desse valor: $\frac{1}{4}$ do tanque equivale a 15 L.

E como $3 \cdot \frac{1}{4} = 3 \cdot 15$, temos que: $\frac{3}{4}$ do tanque equivalem a 45 L.

Portanto, no tanque do automóvel há 45 litros de combustível.



A representação visual favorece a atribuição de significado a regras práticas.

Atividade 10

(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.

Um quarto de uma estrada de 4 quilômetros de extensão foi construído em 6 meses e dois terços foram finalizados nos 9 meses seguintes. Quantos quilômetros da estrada ainda faltam ser construídos?

Resposta: Faltam ser construídos 20 quilômetros.

Resolução e comentários

Com esta atividade é possível avaliar como os estudantes interpretam enunciados para a resolução de problemas. Verifique se eles percebem que as informações sobre a duração da construção de cada trecho da estrada são dados desnecessários para a resolução do problema. A habilidade de selecionar os dados relevantes para a resolução de um problema é um componente importante a ser desenvolvido pelos estudantes. É comum que eles julguem que devem utilizar todos os dados fornecidos no enunciado.

Como foi construído $\frac{1}{4}$ e, depois, $\frac{2}{3}$ da estrada, foram construídos $\frac{11}{12}$ da estrada, pois:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3}{12} + \frac{8}{12} = \frac{11}{12}$$

Como $\frac{11}{12}$ de 240 equivalem a 220, obtemos que faltam ser construídos 20 quilômetros da estrada ($240 - 220 = 20$).

Atividade 11

(EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.

Gilberto foi a um restaurante em que o preço do quilograma é R$ 30,00. Ao colocar seu prato na balança ela indicou 450 gramas. Gilberto então pagou por sua refeição com uma cédula de R$ 20,00. Quantos reais ele recebeu de troco?

Resposta: R$ 6,50.

Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar a habilidade dos estudantes em resolver problemas com números racionais positivos na representação decimal por meio de estratégias diversas, aplicando as operações aritméticas fundamentais, com e sem uso de calculadora, e fazendo estimativas para verificar a razoabilidade de respostas. Analisando os dados apresentados, é possível estimar que Gilberto pagou pouco menos de R$ 15,00 por sua refeição, já que ele colocou em seu prato quase 500 gramas de comida, ou seja, meio quilograma, portanto, deve ter recebido de troco pouco mais do que R$ 5,00.

Para determinar o troco exato, os estudantes podem realizar os seguintes cálculos. Determinar o valor de cada 100 gramas de comida, R$ 3,00 $\left(\frac{30 \cdot 100}{1000} = \frac{30}{10} = 3\right)$; lembrando que 1 quilograma equivale a 1 000 gramas. Depois, determinar o preço de 450 gramas de comida, R$ 13,50; observando que $4{,}5 \cdot 100 = 450$ e, portanto, $4{,}5 \cdot 3 = 13{,}5$. Por fim, se Gilberto pagou R$ 13,50 pela refeição com uma cédula de R$ 20,00, ele recebeu R$ 6,50 de troco (R$ 20,00 – R$ 13,50 = R$ 6,50).

Atividade 12

(EF06MA12) Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.

Em cada item, indique a potência de 10 mais próxima para cada um dos números destacados.

a) A distância média da Terra à Lua é de aproximadamente **384 400** quilômetros.

b) O lobo-guará, conhecido como símbolo do Cerrado brasileiro, mede até **115** centímetros de altura e **33** quilogramas de massa.

c) Ana gasta mensalmente R$ **1 100,00** com o aluguel de sua casa.

d) A população estimada da cidade de Riachuelo (SE), em 2021, era de **10 354** habitantes.

Respostas:

a) 10^5; **b)** 10^2; 10^1; **c)** 10^3; **d)** 10^4.

Resolução e comentários

Nesta atividade avalia-se a compreensão dos estudantes a respeito de potências de base 10 e do arredondamento de um número para a potência de 10 mais próxima. É possível que eles tenham dificuldade em compreender o arredondamento para a potência de dez mais próxima. Por exemplo, o número 384 400 está entre 100 000 (10^5) e 1 000 000 (10^6), mas, considerando como valor médio 500 000, percebe-se que 384 400 está mais próximo de 10^5 do que de 10^6. Assim como 115 está mais próximo de 100 (10^2) do que de 1 000 (10^3); 33 está mais próximo de 10 (10^1) do que de 100 (10^2); 1 110 está mais próximo de 1 000 (10^3) do que de 10 000 (10^4); 10 354 está mais próximo de 10 000 (10^4) do que de 100 000 (10^5).

Outra maneira de resolver é escrevendo a aproximação de cada um dos números na forma de potência de base 10, lembrando que arredondamos um número "para cima" se o algarismo à direita do algarismo da ordem que vai ser arredondada é 5, 6, 7, 8 ou 9. Arredondamos "para baixo" se o algarismo à direita do algarismo da ordem que vai ser arredondada é 0, 1, 2, 3 ou 4.

$384\,400 \simeq 3{,}8 \cdot 10^5$

$115 \simeq 1{,}2 \cdot 10^2$

$33 = 3{,}3 \cdot 10^1$

$1\,100 = 1{,}1 \cdot 10^3$

$10\,354 \simeq 1{,}0 \cdot 10^4$

Ao discutir as resoluções com os estudantes, a reta numérica pode ser um recurso visual útil e pode fazer com que o arredondamento seja executado mais facilmente.

Atividade 13

(EF06MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Observe a liquidação realizada por uma loja de calçados.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

De acordo com o cartaz, qual é o novo preço do calçado com desconto?

Resposta: R$ 91,00.

Resolução e comentários

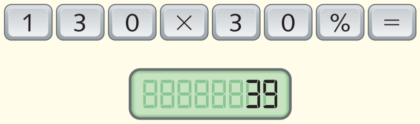
Nesta atividade avalia-se a habilidade do estudante em obter a porcentagem de um valor por meio de estratégias diversas. Para resolver o problema, ele deve compreender que 30% correspondem a dividir o total em 100 partes iguais e tomar 30 dessas partes. Esse cálculo pode ser realizado de diversas maneiras.

Como 10% equivale a dividir 100% em 10 partes iguais, 10% do valor corresponde a 130 : 10 = 13. Como 30% é o triplo de 10%, basta fazer 3 · 13 = 39.

Como 1% equivale a dividir 100% em 100 partes iguais, então, 1% do valor corresponde a 130 : 100 = = 1,30. Em seguida, para obter o valor correspondente a 30%, basta multiplicar 1,30 por 30, assim, 30 · 1,30 = 39.

30% é o mesmo que 30 centésimos, ou 0,30. Assim, calcular 30% de um valor equivale a multiplicar o valor por 0,30. Nesse caso: 0,30 · 130 = 39.

Se os estudantes optarem por utilizar uma calculadora, o cálculo de 30% de 130 pode ser feito assim:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, se o calçado de R$ 130,00 é vendido com um desconto de R$ 39,00, o novo preço do calçado com desconto é R$ 91,00 (130 – 39 = 91).

Atividade 14

(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.

Guilherme quer fazer a seguinte operação matemática: 197 + 619, mas a tecla 9 de sua calculadora não está funcionando. Como ele pode realizar esse cálculo mesmo com a tecla quebrada?

Resposta possível: Fazendo a adição de 200 com 620 e depois subtraindo 4, resultando em 816.

Resolução e comentários

Com esta atividade é possível avaliar como os estudantes mobilizam seus conhecimentos sobre os princípios da igualdade para resolver o problema. Acompanhe:

Soma = 197 + 619

Como a tecla 9 não pode ser acionada, uma das possibilidades é substituir o número 619 por outro número próximo, 620, por exemplo. Entretanto, é importante lembrar que, ao fazer isso, a soma está sendo acrescida de 1 unidade.

Soma + 1 = 197 + 620

De modo similar, também é possível substituir 197 por 200, por exemplo. Ao fazer isso, a soma agora será acrescida de 3 unidades.

Soma + 1 + 3 = 200 + 620

Soma + 4 = 820

Observe que o valor 820 corresponde a 4 unidades a mais do que a soma desejada, então deve-se subtrair 4 unidades desse valor para obter a resposta correta.

Soma = 4 – 4 = 820 – 4

Soma = 816

Se achar conveniente, comente com os estudantes que estratégias com base nesse princípio da igualdade são frequentemente utilizadas para a realização do cálculo mental.

Atividade 15

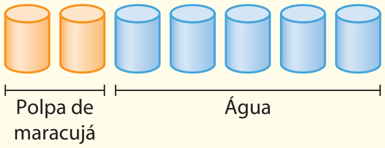
(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Fabiana fez um refresco cuja receita pede 2 partes de polpa de maracujá para cada 5 partes de água. Se ela fez 14 litros de refresco para uma festa, quantos litros de polpa de maracujá ela utilizou?

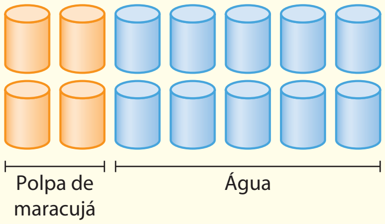
Resposta: 4 litros.

Resolução e comentários

Os estudantes podem resolver esta atividade de diferentes modos, aplicando relações aditivas e multiplicativas, bem como os conceitos de razão entre as partes e de razão entre uma das partes e o todo. A resolução também pode ser feita com base em esquemas que representam a situação descrita.



Ao juntar 2 partes de polpa de maracujá com 5 partes de água obtêm-se $2 + 5 = 7$ partes de refresco. Ao dizer 7 partes de refresco, espera-se que os estudantes compreendam que podem ser 7 copos, 7 jarras ou 7 litros de refresco. Considerando que cada parte corresponde a 1 litro, para fazer 14 litros de refresco são necessários 4 litros de polpa de maracujá e 10 litros de água.



Outro modo de resolver, que evidencia a compreensão dos conceitos de razão entre as partes e de razão entre uma das partes e o todo, seria observar que, para 2 partes de polpa de maracujá e 5 partes de água, a razão entre a quantidade de polpa de maracujá e a quantidade total de refresco é igual a $\frac{2}{7}$.
Assim, essa fração do total de refresco (14 litros) equivale a 4 litros, pois:

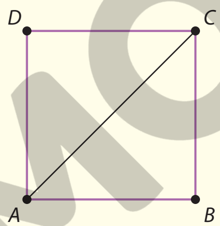
$$\frac{2}{7} \cdot 14 = \frac{28}{7} = 4$$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

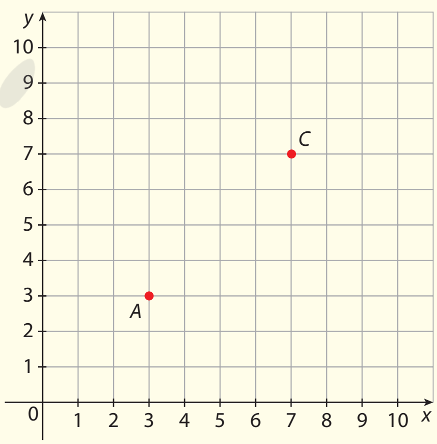
Atividade 16

(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

A diagonal de um quadrado *ABCD* é um segmento de reta que une dois vértices opostos, como mostra a figura.



Para representar esse quadrado em um sistema de coordenadas no plano cartesiano, foram determinados pares ordenados associados aos pontos nos vértices do quadrado. A figura a seguir mostra a posição dos pontos *A* e *C*.



Qual das alternativas indica as coordenadas corretas dos pontos *B* e *D* nos outros dois vértices do quadrado?

a) $B = (7, 3)$ e $D = (3, 7)$

b) $B = (5, 3)$ e $D = (2, 6)$

c) $B = (3, 7)$ e $D = (7, 2)$

d) $B = (6, 6)$ e $D = (2, 2)$

Resposta: Alternativa **a**.

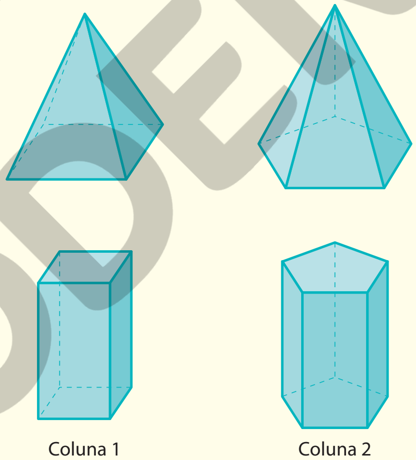
Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar se os estudantes reconhecem as características de um quadrado e as convenções relacionadas à localização de um ponto no plano cartesiano. Um erro possível na resolução é inverter a abcissa e a ordenada na representação das coordenadas, por desatenção ou por desconsiderar as convenções adotadas para a designação das coordenadas de um ponto no plano cartesiano. Apesar disso, espera-se que a maior parte dos estudantes reconheça que o vértice *B* deve situar-se sobre uma mesma reta horizontal que passa pelo ponto *A* e sobre uma mesma reta vertical que passa pelo ponto *C*, no ponto de coordenadas *B*(7, 3). Com a localização do vértice *B*, a identificação do vértice *D* torna-se mais fácil, pois ele encontra-se no ponto simétrico de *B* em relação à outra diagonal do quadrado, o ponto de coordenadas *D*(3, 7). Raciocínio similar pode ser utilizado caso o estudante comece localizando o vértice *D*, para depois localizar o vértice *B*.

Atividade 17

(EF06MA17) Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.

Observe nas figuras a seguir que a pirâmide e o prisma à esquerda têm base quadrada e a pirâmide e o prisma à direita têm base pentagonal.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Se um prisma e uma pirâmide tiverem base octogonal (uma figura plana de 8 lados), é correto afirmar que:

a) o número de arestas do prisma será o dobro do número de arestas da pirâmide.

b) o prisma terá 8 vértices a mais do que a pirâmide.

c) a pirâmide terá 1 face a menos do que o prisma.

d) o prisma e a pirâmide terão as mesmas quantidades de vértices, arestas e faces.

Resposta: Alternativa **c**.

Resolução e comentários

Esta atividade avalia se os estudantes reconhecem os elementos de um poliedro e suas habilidades em observar as regularidades existentes entre as relações dos elementos dele, identificando assim a alternativa correta. Espera-se que eles observem as seguintes relações entre os elementos das pirâmides e dos prismas.

- Arestas: Em cada coluna da figura, prismas e pirâmides têm número de arestas da base e de arestas laterais. No caso da base octogonal, 8 arestas da base e 8 arestas laterais. Entretanto, a pirâmide não tem outras arestas além dessas e o prisma tem outras 8 arestas na face superior, totalizando $(8 + 8 + 8 = 24$ arestas), que não corresponde ao dobro de 16, o número total de arestas da pirâmide. Logo, a alternativa **a** está incorreta.
- Vértices: como a base é octogonal para ambos, a quantidade de vértices da base é a mesma para a

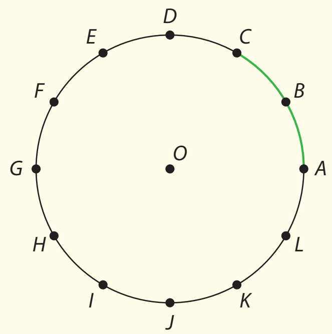
pirâmide e para o prisma. Ao analisar a pirâmide, nota-se que sempre há somente 1 vértice oposto à base, enquanto o prisma tem na face superior o mesmo número de vértices do polígono da base; então, a diferença entre o número de vértices do prisma e da pirâmide é 8 – 1 = 7. Logo, a alternativa **b** está incorreta.

- Faces: a pirâmide e o prisma têm 1 face na base e o mesmo número de faces laterais; neste caso, 8. A pirâmide não tem outras faces além dessas, enquanto o prisma tem 1 face superior. Logo, a alternativa **c** está correta.

Atividade 18

(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros.

Observe a circunferência marcada com 12 pontos igualmente espaçados.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Ao conectar os pontos de 2 em 2, a partir do ponto A, obteríamos o segmento com extremidades em *A* e em *C*. Dos modos descritos a seguir para conectar os pontos da circunferência, em qual deles se obtém um polígono regular?

a) Conectar os pontos da circunferência de 2 em 2 e de 5 em 5.

b) Conectar os pontos da circunferência de 3 em 3 ou de 4 em 4.

c) Conectar os pontos da circunferência de 4 em 4 e de 6 em 6.

d) Conectar os pontos da circunferência de 5 em 5 e de 6 em 6.

Resposta: Alternativa **b**.

Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar se os estudantes conhecem as características dos polígonos regulares e dos não regulares. Ao conectar os pontos de n em n, espera-se que os estudantes reconheçam que os lados dos polígonos serão congruentes, assim como seus ângulos internos, de modo que, se a figura for fechada, o polígono será regular. Portanto, é necessário verificar se n "cabe" um número inteiro de vezes em 12, ou seja, se 12 é divisível por n e se o número de lados resultante é maior ou igual a 3, pois o polígono com menor número de lados é o triângulo, com 3 lados. Como os divisores de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12, temos:

- Para $n = 1$, 12 : 1 = 12, portanto, ao conectar os pontos de 1 em 1, obtém-se o dodecágono regular, mas a opção de conectar os pontos de 1 em 1 não aparece entre as alternativas apresentadas.
- Para $n = 2$, 12 : 2 = 6, portanto, ao conectar os pontos de 2 em 2, obtém-se o hexágono regular.
- Para $n = 3$, 12 : 3 = 4, portanto, ao conectar os pontos de 3 em 3, obtém-se um quadrado.
- Para $n = 4$, 12 : 4 = 3, portanto, ao conectar os pontos de 4 em 4, obtém-se um triângulo equilátero.
- Para $n = 6$, 12 : 6 = 2, portanto, não se obtém um polígono regular.
- Para $n = 12$, 12 : 12 = 1, portanto, não se obtém um polígono regular.

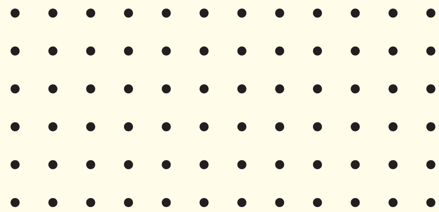
Assim, a única alternativa correta é a **b**.

Atividade 19

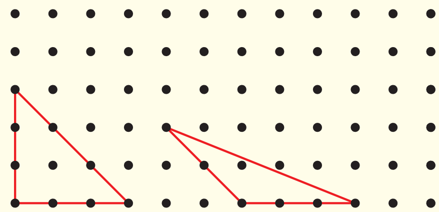
(EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.

Reproduza a malha pontilhada em seu caderno e construa sobre ela um triângulo retângulo isósceles e um triângulo obtusângulo escaleno.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Resposta: Há várias possibilidades, por exemplo, as indicadas na figura:



Resolução e comentários

Esta atividade permite avaliar se os estudantes compreendem que os triângulos podem ser classificados em relação às medidas de seus ângulos e também em relação às medidas de seus lados. Para construir sobre a malha um triângulo retângulo isósceles, eles devem traçar dois segmentos de reta de mesma medida (para atender à especificação de ser isósceles) partindo de um mesmo ponto, um segmento de reta horizontal e o outro vertical, para formar o ângulo reto que determina um triângulo retângulo. Em seguida, o terceiro lado, a hipotenusa, é construído unindo-se as extremidades dos dois segmentos de reta já traçados. A representação de um ângulo obtuso, para a construção do triângulo obtusângulo escaleno, exige que os estudantes saibam que a sua abertura é maior do que a de um ângulo reto, para que, em seguida, representem, com medidas de comprimento distintas, dois segmentos de reta que sejam lados de um ângulo obtuso e, por fim, unam as extremidades desses segmentos de modo que formem um triângulo em que todos os lados têm medidas de comprimento diferentes.

Atividade 20

(EF06MA20) Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.

Leia as seguintes definições.

- O paralelogramo é um quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.
- O losango é um paralelogramo que tem quatro lados congruentes.
- Um retângulo é um paralelogramo que tem os quatro ângulos internos retos.

Com base nessas definições, indique a única alternativa **incorreta**.

a) Um quadrilátero que tem os lados opostos paralelos é um retângulo.

b) Nem todo paralelogramo é um retângulo.

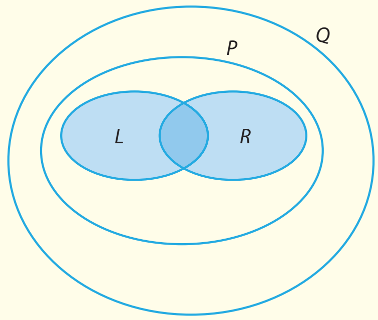
c) Todo losango é um quadrilátero.

d) Pode existir losango que é retângulo.

Resposta: Alternativa **a**.

Resolução e comentários

Esta atividade tem por objetivo avaliar se os estudantes conseguem estabelecer a relação entre os diversos quadriláteros. Essa relação pode ser mais bem compreendida por meio de representações visuais, utilizando um diagrama de Venn-Euler, por exemplo. Para construir esse diagrama, começa-se com o conjunto de todos os quadriláteros (Q); como todo paralelogramo (P) é um quadrilátero, faz-se a inclusão de classes, $P \subset Q$. Losangos (L) e retângulos (R) são paralelogramos, cada qual com sua característica específica, logo, $L \subset P$ e $R \subset P$. Além disso, há alguns losangos que são retângulos, os quadrados representados pela intersecção de L e R.



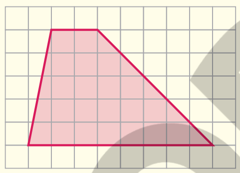
RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

A alternativa **a** apresenta a definição de paralelogramo como sendo a de retângulo, mas nem todo paralelogramo é um retângulo, como pode-se perceber pelo diagrama. Portanto, a alternativa **a** é incorreta. A alternativa **b** pode ter sua validade verificada observando o diagrama; note que os losangos são paralelogramos, ou seja, nem todo paralelogramo é um retângulo. A alternativa **c** é evidentemente correta; quanto à alternativa **d**, um losango que é um retângulo deve ter lados congruentes e os 4 ângulos retos, ou seja, é um quadrado, confirmando a validade da afirmação.

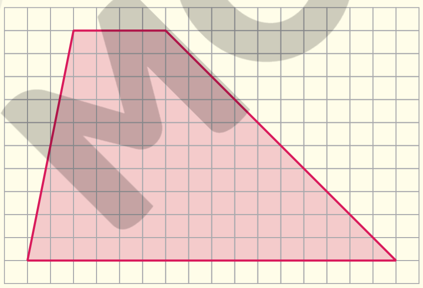
Atividade 21

(EF06MA21) Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.

Observe o polígono e construa sua ampliação no caderno, de modo que as medidas dos lados da figura ampliada sejam o dobro das medidas dos lados da figura original.



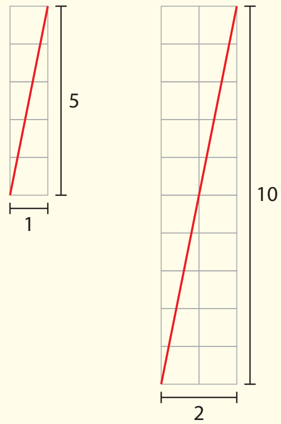
Resposta:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução e comentários

Espera-se que os estudantes não apresentem dificuldades na construção dos segmentos horizontais; eles poderão perceber que a base maior do trapézio tem medida igual a 8 unidades de comprimento, portanto a figura ampliada deve ter base maior medindo 16 unidades. A medida da base menor passará de 2 unidades para 4 unidades. A construção dos segmentos inclinados, no entanto, exige que os estudantes analisem tanto o deslocamento horizontal quanto o deslocamento vertical do segmento; espera-se que eles observem que o segmento inclinado à esquerda na figura original parte do vértice da base e desloca-se 1 unidade para a direita e 5 unidades para cima. Assim, para que a ampliação seja feita, basta dobrar cada uma dessas medidas, obtendo-se 2 unidades para a direita e 10 unidades para cima.

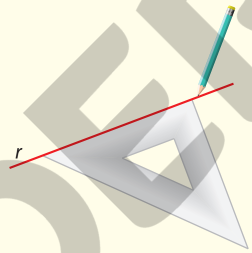


Raciocínio similar pode ser aplicado para a construção do segmento inclinado à direita. Na figura original, partindo do vértice à direita da base maior, avançam-se 5 unidades para a esquerda e 5 unidades para cima, de modo que na figura ampliada basta avançar 10 unidades para a esquerda e 10 unidades para cima.

Atividade 22

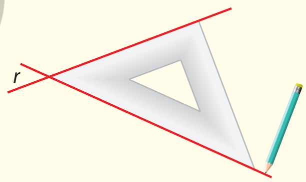
(EF06MA22) Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros.

Com um esquadro, uma representação da reta *r* foi traçada, como mostra a figura:

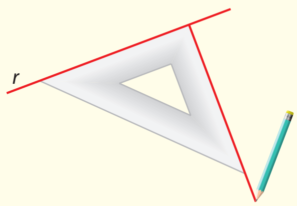


Indique a alternativa que descreve corretamente a ação a ser executada para se obter uma reta paralela à reta *r*.

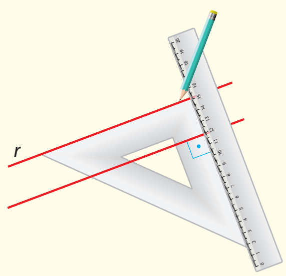
a)



b)

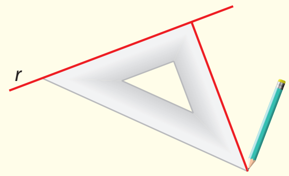


c)



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

d)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: Alternativa **c**.

Resolução e comentários

Esta atividade avalia se os estudantes compreendem como representar retas paralelas e perpendiculares utilizando instrumentos como régua e esquadro.

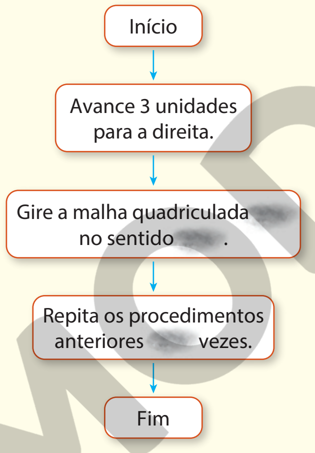
Para realizar a construção desejada, os estudantes precisam saber o que caracteriza um par de retas paralelas. Como retas paralelas mantêm a mesma distância entre si, torna-se fácil reconhecer que o deslocamento do esquadro ao longo da régua, como mostra a alternativa **c**, permite obter uma reta paralela a *r*.

Atividade 23

(EF06MA23) Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Em uma folha de papel, Marcela escreveu um algoritmo, representado por um fluxograma, para a construção de um quadrado com lados medindo 3 unidades de comprimento, a partir de um ponto *A*, sobre uma malha quadriculada.

Entretanto, após terminá-lo, ela derrubou água sobre a folha e manchou algumas de suas partes.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Indique a alternativa com a sequência que completa corretamente o fluxograma de Marcela.

a) 45º; anti-horário; 4

b) 90º; anti-horário; 4

c) 45º; horário; 3

d) 90º; horário; 3

Resposta: Alternativa **d**.

Resolução e comentários

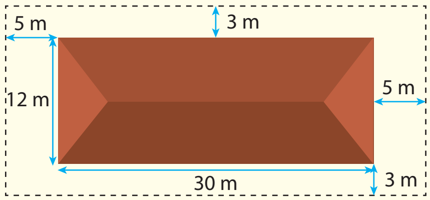
A primeira instrução do algoritmo permite construir um lado do quadrado, com medida de 3 unidades de comprimento. Espera-se que os estudantes sigam essa instrução e construam o primeiro lado do quadrado. Para construir o segundo lado do quadrado, do lado direito da figura, é preciso girar a malha quadriculada 90° no sentido horário e repetir as duas primeiras instruções. Como ainda faltam 2 lados do quadrado, é necessário repetir outras 2 vezes as duas primeiras instruções para que o quadrado seja construído, retornando ao ponto *A*.

É possível que alguns estudantes não conheçam o significado de "sentido anti-horário" e "sentido horário" e escrevam palavras diferentes, mas com o significado esperado. Pode acontecer também de alguns estudantes não reconhecerem a necessidade dessa instrução relacionada ao giro da malha quadriculada, pois, ao construir um quadrado com régua e lápis, eles não realizam esse giro, apenas reposicionam os instrumentos na posição correta.

Atividade 24

(EF06MA24) Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas a outras áreas do conhecimento.

A vista aérea da casa de Gabriela tem formato retangular, medindo 30 m de comprimento e 12 m de largura. Ela está em um terreno cercado, como mostra a figura.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a área do terreno em que se encontra a casa de Gabriela?

Resposta: 720 m^2.

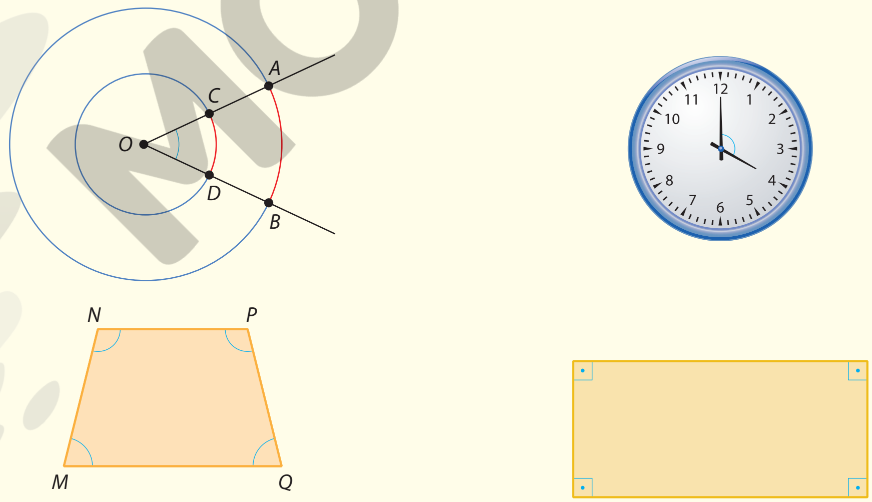
Resolução e comentários

Para resolver esta atividade os estudantes precisam determinar as medidas corretas do terreno e compreender a definição de metro quadrado. Um erro que pode acontecer no cálculo das medidas do comprimento e da largura do terreno é considerar cada um dos acréscimos em apenas um dos lados da casa, obtendo 35 m para a medida do comprimento do terreno (30 + 5 = 35) e 15 m para a medida da largura do terreno (12 + 3 = 15). Espera-se que os estudantes obtenham 40 m para a medida do comprimento (30 + 5 + 5 = 40) e 18 m para a medida da largura (12 + 3 + 3 = 18). Para o cálculo da área, eles devem reconhecer que a medida 1 metro cabe 40 vezes no sentido do comprimento do terreno, formando uma primeira fileira com 40 quadrados. No sentido da largura cabem 18 quadrados de lados medindo 1 metro, então, para preencher a área total do terreno, são necessárias 18 fileiras com 40 quadrados cada uma, totalizando 720 quadrados (18 · 40 = 720). Assim, a área do terreno é igual a 720 m^2.

Atividade 25

(EF06MA25) Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas.

Observe as figuras a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Analisando os ângulos identificados nas figuras, indique a afirmação **incorreta**.

a) O ângulo formado pelos ponteiros do relógio corresponde ao giro que o ponteiro maior tem que dar até se sobrepor ao ponteiro menor.

b) O quadrilátero *MNPQ* tem 4 ângulos internos.

c) A medida do ângulo $A\hat{O}B$ é maior do que medida do ângulo $C\hat{O}D$.

d) Em um retângulo, os ângulos internos têm sempre a mesma medida.

Resposta: Alternativa **c**.

Resolução e comentários

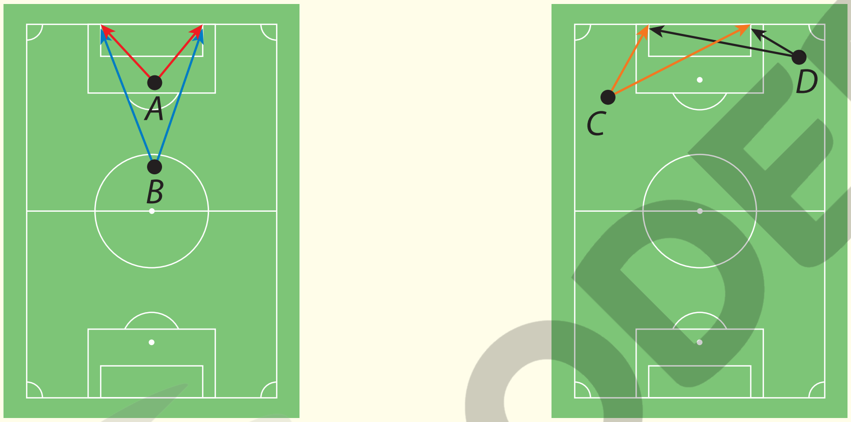
Para avaliar a correção da afirmação da alternativa **a**, os estudantes precisam considerar que os ponteiros de um relógio se movimentam no sentido horário e reconhecer que o giro pode ser associado à ideia de ângulo.

A afirmação da alternativa **b** considera o caso particular em que um polígono de *n* lados tem *n* ângulos internos, pois cada par de lados consecutivos assinala uma abertura. A alternativa **d** também apresenta uma afirmação verdadeira, que pode ser facilmente verificada pelos estudantes por meio da figura apresentada ou da observação dos cantos de uma folha de papel sulfite. A afirmação da alternativa **b** tem por objetivo avaliar se os estudantes reconhecem que, apesar de o arco indicativo do ângulo *AÔB* ser maior do que o *CÔD*, os ângulos têm a mesma medida. Um modo de explicar esse fato é pedindo aos estudantes que imaginem que uma pessoa está no ponto *O* com o braço estendido apontando para o ponto *D*, que está na mesma direção do ponto *B*. O giro que essa pessoa terá de fazer para apontar para o ponto *C* será o mesmo do que para apontar para o ponto *A*, pois esses dois pontos estão alinhados. Assim, como o giro é o mesmo e ele corresponde à abertura de ambos os ângulos, suas medidas são iguais.

Atividade 26

(EF06MA26) Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão.

Os esquemas a seguir mostram o ângulo de visão que uma jogadora de futebol tem no instante do chute, de diferentes pontos do campo. Em qual desses pontos a jogadora tem a visão ampla das traves?



Resposta: ponto *A*.

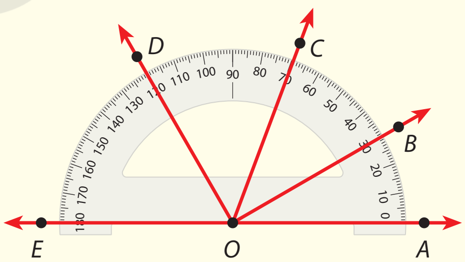
Resolução e comentários

É esperado que os estudantes tenham facilidade em resolver a atividade por meio da comparação visual da abertura dos ângulos em cada ponto do campo. É possível que, sendo essa uma situação comum a muitos estudantes, alguns deles percebam que, em pontos como *C* ou *D*, a jogadora opte por cruzar a bola em vez de chutar diretamente ao gol, pois o ângulo de visão é pequeno e não favorece esse tipo de jogada. Em casos como esse é comum que o cruzamento seja feito em direção a outra jogadora posicionada mais ao centro, como no ponto *A*, a partir do qual o ângulo de visão é maior.

Atividade 27

(EF06MA27) Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.

Observe a figura a seguir e determine a medida, em grau, da adição de *DÔE* com *BÔC*.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: 100°

Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar como os estudantes realizam a leitura da medida de um ângulo com o uso de um transferidor. O fato de que nenhum dos lados dos ângulos cujas medidas devem ser determinadas estão sobre a linha de referência 0° pode dificultar a resolução, pois os estudantes devem efetuar a subtração dos valores indicados em cada um dos pares de lados para obter as medidas dos ângulos $D\hat{O}E$ e $B\hat{O}C$.

$m(D\hat{O}E) = 180° - 120° = 60°$

$m(B\hat{O}C) = 70° - 30° = 40°$

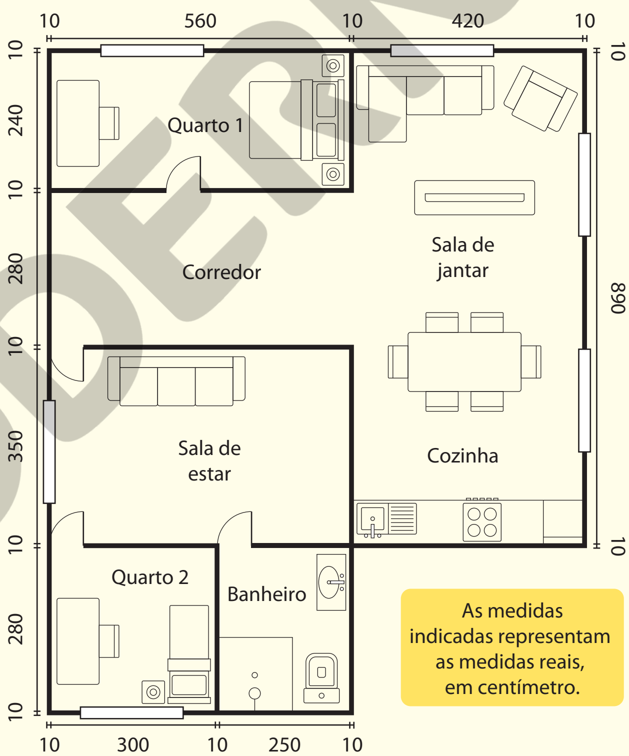
$m(D\hat{O}E) + m(B\hat{O}C) = 60° + 40° = 100°$

É importante observar se eles compreendem que a medida de um ângulo indica quantas vezes a unidade 1° cabe entre os dois lados do ângulo, e que para facilitar a medição de um ângulo deve-se posicionar o transferidor de modo que o 0 (zero) fique situado em um dos seus lados, assim, o outro lado do ângulo estará diretamente sobre a marca do transferidor que indica a sua medida. Entretanto, nada impede que ambos os lados estejam sobre quaisquer outras marcas do transferidor diferentes de 0. Nesse caso, para determinar a medida do ângulo basta subtrair os valores indicados pelos dois lados.

Atividade 28

(EF06MA28) Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas.

A figura a seguir mostra a planta baixa de uma casa.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

O que se pode afirmar com base na figura?

a) A medida da área da sala de estar é menor do que as medidas das áreas do quarto 2 e do banheiro juntas.

b) A medida do comprimento do corredor que fica ao lado da sala de jantar é igual ao dobro da medida de sua largura.

c) A medida da área do corredor é menor do que a medida da área do quarto 1.

d) O cômodo dessa casa com a área de maior medida é a sala de jantar.

Resposta: Alternativa **b**.

Resolução e comentários

Com esta atividade é possível avaliar as habilidades dos estudantes na interpretação e descrição de plantas baixas simples de residências. Para analisar a alternativa **a**, eles não precisam realizar nenhum cálculo, pois como o quarto 2 e o banheiro têm, juntos, a mesma medida de comprimento da sala de estar, mas a medida de sua largura é menor do que a dela, é possível concluir que as medidas da área do quarto 2 e do banheiro juntas é menor do que a medida da área da sala de estar. A alternativa **b** exige que os estudantes reconheçam que a medida dos lados opostos de um retângulo são iguais e, assim, concluam que as medidas do corredor são 560 cm de comprimento por 280 cm de largura. Como $560 = 2 \cdot 280$, conclui-se que a afirmação é verdadeira. A afirmação da alternativa **c** está incorreta porque os dois cômodos têm a mesma medida de comprimento, mas o corredor é mais largo do que o quarto. Quanto à alternativa **d**, não é possível fazer afirmações sobre a medida da área da sala de jantar, pois ela é integrada à cozinha e a um espaço da casa similar a uma sala de TV.

Atividade 29

(EF06MA29) Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

Em uma folha de papel quadriculado, desenhe um quadrado de lados medindo 3 cm e, depois, desenhe outro quadrado cujos lados tenham o dobro da medida dos lados do primeiro quadrado. Em seguida, com base nos desenhos, indique a alternativa que expressa corretamente o que ocorreu com as medidas do perímetro e da área do quadrado quando as medidas de seus lados foram multiplicadas por 2.

a) A medida do perímetro do quadrado dobrou de valor, e a medida de sua área também.

b) A medida da área do quadrado dobrou de valor, mas a medida do perímetro não.

c) A medida do perímetro dobrou de valor, mas a medida da área não.

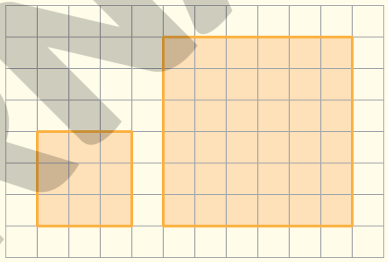
d) Nem a medida do perímetro nem a medida da área dobraram de valor.

Resposta: Alternativa **c**.

Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar o conhecimento dos estudantes sobre o perímetro e a área de figuras planas, e sobre o conceito de proporcionalidade.

Espera-se que eles compreendam que a medida do perímetro corresponde à medida do comprimento do contorno da figura e, nesse caso, é uma medida dada em centímetro (cm). A medida da área corresponde à medida da superfície ocupada pela figura e, nesse caso, sua unidade de medida é o centímetro quadrado (cm^2). Com base nas figuras desenhadas na folha de papel quadriculado, os estudantes podem verificar que a medida do perímetro passou de 12 cm para 24 cm, ou seja, seu valor dobrou. Já a medida da área passou de 9 cm^2 ($3^2 = 9$) para 36 cm^2 ($6^2 = 36$), ou seja, seu valor quadruplicou. Note que a medida da área foi multiplicada pelo quadrado do fator de ampliação 2 ($2^2 = 4$). Apesar de o termo "proporcionalidade" não ser mencionado nas alternativas, esse é o conceito trabalhado para verificar as relações entre as medidas dos lados, do perímetro e da área das duas figuras.

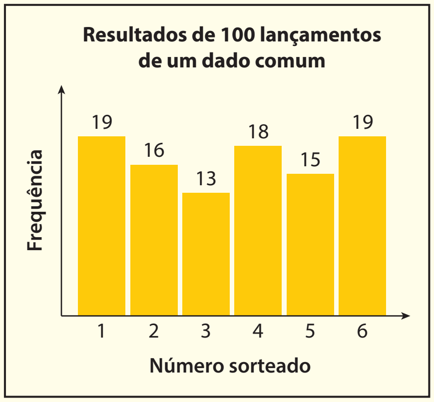


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade 30

(EF06MA30) Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.

O gráfico de colunas a seguir foi construído com as informações de 100 lançamentos de um dado comum.



Dados fictícios.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a) Considerando que todas as faces do dado têm a mesma probabilidade de serem sorteadas, ao lançar esse dado 100 vezes, qual é, aproximadamente, o número esperado de vezes que cada face seja sorteada?

b) De quanto é a diferença entre o valor da resposta encontrada no item anterior e o maior valor registrado no gráfico?

Respostas:

a) Aproximadamente 17 vezes.

b) Aproximadamente 2.

Resolução e comentários

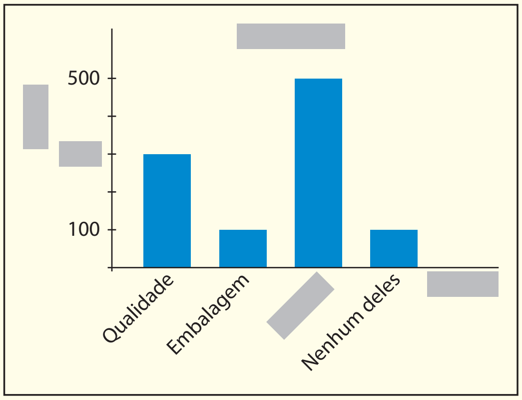
Como é esperado que os números tenham a mesma probabilidade de serem sorteados, a probabilidade de em um sorteio sair determinada face é igual a $\frac{1}{6}$. Assim, para saber quantas vezes cada face deve sair em 100 lançamentos, basta calcular $\frac{1}{6}$ de 100, ou seja, fazer $100 : 6 \simeq 17$. Portanto, o número esperado de vezes que cada face seja sorteada é de aproximadamente 17 vezes.

O item **b** propõe a comparação entre o valor esperado teórico ($\simeq 17$) e o valor máximo obtido por meio do experimento real (19). É interessante observar se os estudantes indagam o motivo de haver diferença entre o valor calculado e aquele verificado no experimento real. Caso isso ocorra, pode-se dizer a eles que à medida que o número de lançamentos aumenta (milhares, milhões, bilhões etc.), a diferença percentual entre o valor esperado teórico e o valor obtido por meio do experimento real se aproxima de zero.

Atividade 31

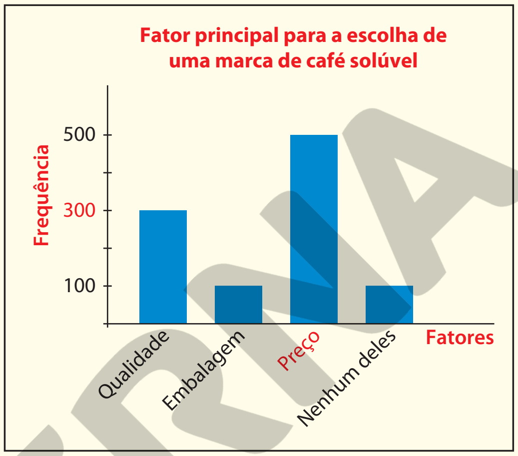
(EF06MA31) Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico.

Uma pequena empresa produtora de café solúvel fez uma pesquisa com 1 000 clientes de supermercados de sua cidade para saber qual dos fatores (qualidade, embalagem ou preço) é o mais importante para a escolha de uma marca de café solúvel. Os resultados foram organizados no gráfico a seguir, mas algumas informações estão faltando. Reproduza esse gráfico em seu caderno, dê um título a ele e preencha as informações que deveriam aparecer nos locais indicados em cinza.



Dados fictícios.

Resposta:



Dados fictícios.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar se os estudantes compreendem como as informações são estruturadas e apresentadas em um gráfico. Todo gráfico deve ter um título que informa qual é o assunto sobre o qual ele se refere. No eixo horizontal são indicados os "fatores" que mais influenciam na compra do produto; portanto, é necessário identificar quais fatores foram mencionados no texto e indicar o fator que ainda não foi indicado no eixo horizontal, o "preço". O eixo vertical deve ser identificado por "frequência", "quantidade", "número de elementos" ou outra palavra que expresse o mesmo significado. Finalmente, para completar o número que falta no eixo vertical, os estudantes devem compreender que a escala desse eixo varia de 100 em 100, de modo que o valor correto a ser preenchido é 300.

Atividade 32

(EF06MA32) Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.

Em uma grande cidade circulam em suas ruas e avenidas centenas de milhares de automóveis todos os dias. Em 2022 foi realizada nessa cidade uma pesquisa sobre segurança no trânsito com 20 000 pessoas. Essa pesquisa apresentou os seguintes dados:

Segurança no trânsito	
Sempre usam o cinto de segurança?	**Pessoas que já sofreram ferimentos graves em acidentes de trânsito**
Sim (90%)	1 017
Não (10%)	1 004

Dados do Instituto de Pesquisa da Cidade.

Um jornal publicou uma reportagem sobre o assunto com o seguinte título: "Em 2022, pessoas que usavam cinto de segurança tiveram o mesmo número de acidentes com ferimentos graves do que aquelas que não usavam cinto".

Com base na tabela organizada pelo Instituto de Pesquisa Cidade, pode-se afirmar que:

a) O título é adequado, pois os dados mostram que o número de acidentados com ferimentos graves não depende do uso do cinto de segurança.

b) O título é adequado porque 9 em cada 10 acidentados tiveram ferimentos graves, apesar de usarem o cinto de segurança.

c) O título não é adequado, porque somente 1 em cada 10 pessoas sofreram acidentes graves.

d) O título não é adequado, pois considerando que apenas 1 em cada 10 pessoas não usava cinto de segurança, o número de acidentados com ferimentos graves que não usavam cinto de segurança é maior do que o número de acidentados com ferimentos graves que usavam cinto.

Resposta: Alternativa **d**.

Resolução e comentários

Para a resolução desta atividade é importante que os estudantes apliquem noções de proporcionalidade para que façam as comparações corretas. Os dois grupos apresentaram números muito próximos de acidentados com ferimentos graves, mas é importante notar que o número de pessoas que usam o cinto de segurança é 9 vezes maior do que o número de pessoas que não usam, portanto é possível concluir que, das 18 000 pessoas entrevistadas que sempre usam cinto de segurança, apenas cerca de 1 000 já sofreram ferimentos graves em acidentes de trânsito. Das 2 000 pessoas entrevistadas que não usam cinto de segurança sempre, cerca de 1 000 já sofreram ferimentos graves em acidentes de trânsito, ou seja, metade delas. Esta atividade destaca a importância de os estudantes compreenderem a necessidade de avaliar com cuidado os dados apresentados em pesquisas, considerando seu contexto real, pois, em casos como este, a frequência absoluta do número de acidentados com ferimentos graves não traz toda a informação para a obtenção da conclusão correta.

Atividade 33

(EF06MA33) Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.

De acordo com o último Censo, realizado em 2010 pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), existem no Brasil 897 mil indígenas de 305 etnias. De acordo com essa pesquisa, 43% dos indígenas brasileiros falam pelo menos uma das 274 línguas indígenas e 77% deles falam a língua portuguesa.

a) Que tipo de gráfico pode ser construído com os dados dessa pesquisa relacionados ao número de indígenas brasileiros que falam uma das línguas indígenas?

b) Que tipo de gráfico pode ser construído para representar o número de indígenas brasileiros que falam línguas indígenas, não falam línguas indígenas, falam a língua portuguesa e não falam a língua portuguesa? Existe outra representação gráfica que representaria da mesma maneira os dados da pesquisa?

Respostas: a) Gráfico de setores.

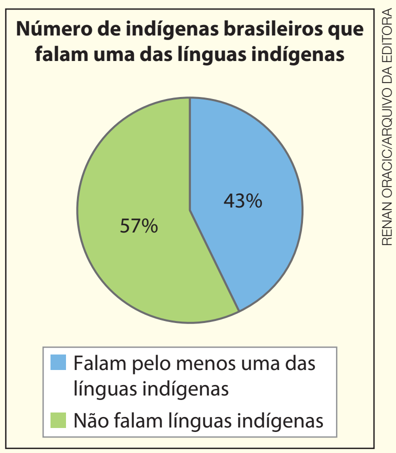
b) Gráfico de colunas e gráfico de barras.

Resolução e comentários

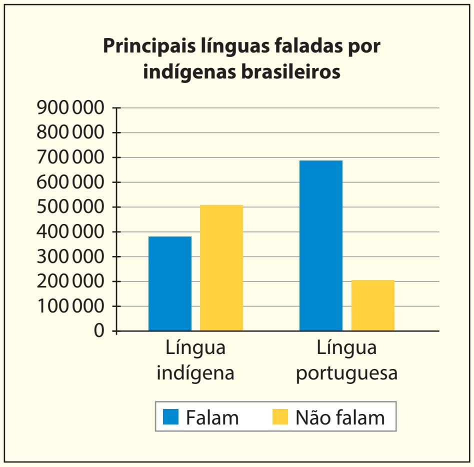
O objetivo desta atividade é avaliar se os estudantes compreendem as diferentes representações gráficas e se eles têm domínio sobre as formas de representação e sobre a interpretação dos dados de uma pesquisa. Discuta com eles quais seriam as opções para a representação dos dados dessa pesquisa do IBGE, em variados tipos de gráfico, além de tabelas. Discuta também a importância da escolha do tipo de gráfico para a representação adequada e correta dos dados, destacando as principais características, e o que há de comum ou de diferente entre gráficos de colunas, de barras, de setores e de linhas.

No item **a**, espera-se que os estudantes concluam que um gráfico de setores seria o mais adequado para a representação dos dados relacionados ao número de indígenas brasileiros que falam uma das 274 línguas indígenas.

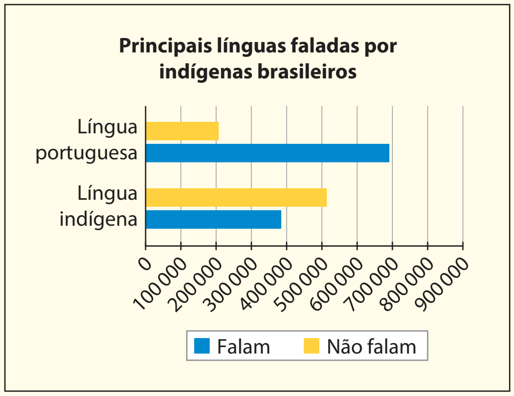
No item **b**, espera-se que os estudantes concluam que gráficos de colunas e de barras seriam os mais adequados para a representação do número de indígenas brasileiros que falam línguas indígenas, não falam línguas indígenas, falam a língua portuguesa e não falam a língua portuguesa.



Dados obtidos em: IBGE. *Censo 2010*.



Dados obtidos em: IBGE. *Censo 2010*.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

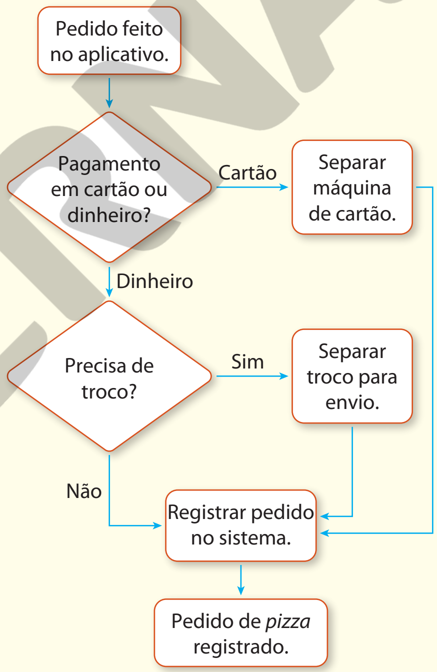
Dados obtidos em: IBGE. *Censo 2010*.

Atividade 34

(EF06MA34) Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).

O fluxograma a seguir é usado por uma pizzaria para registrar os pedidos feitos no aplicativo para entrega.

Analise o fluxograma e indique a alternativa que o descreve corretamente.



a) O fluxograma mostra a sequência de etapas para registrar o tipo de pagamento escolhido pelo cliente, registrar o pedido no sistema e finalizar o pedido da *pizza*.

b) Se o pagamento escolhido for em dinheiro, o passo seguinte é separar o troco para envio.

c) O sistema não registra o pedido se não for necessário separar o troco.

d) É possível receber troco quando o pagamento escolhido for cartão.

Resposta: Alternativa **a**.

Resolução e comentários

Como o próprio nome indica, um fluxograma consiste em um conjunto de símbolos utilizado para representar e organizar o fluxo de atividades em um processo, bastando, para isso, seguir o caminho indicado pelas setas. Apesar de a leitura de um fluxograma ser relativamente simples e intuitiva, é possível que alguns estudantes se confundam ao tentar interpretar o símbolo de tomada de decisão, no qual o fluxo pode seguir em dois caminhos distintos, de acordo com a resposta dada à pergunta feita. No caso do fluxograma da atividade, o primeiro símbolo de tomada de decisão pergunta qual é a forma de pagamento utilizada pelo cliente: se for cartão, ele encaminha o processo indicando que a máquina de leitura de cartão deve ser separada para que seja levada ao cliente junto com o pedido, depois é registrado o pedido e ele é finalizado. No caso em que o pagamento é feito com dinheiro, pode haver necessidade de separar o troco para ser entregue ao cliente. Se o cliente indicar que não precisa de troco, o fluxo é direcionado para o registro do pedido e, em seguida, o pedido é finalizado.

Se considerar conveniente, comente com os estudantes que os fluxogramas são usados em ambientes corporativos, pois podem ajudar a resolver problemas como a falta de padronização no desenvolvimento de atividades, ajudar a evitar o esquecimento de etapas em um processo, contribuir para evitar atrasos e retrabalhos, além de facilitar a identificação da função que cada componente de uma equipe deve desempenhar em uma cadeia de atividades.

Edwaldo Bianchini
Licenciado em Ciências pela Faculdade de Educação de Ribeirão Preto, da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP). Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo, no Ensino Fundamental e Médio, por 25 anos.

MATEMÁTICA BIANCHINI

7º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

10ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Maria Cecília da Silva Veridiano
Edição de texto: Dario Martins de Oliveira, Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Livia Santa Clara
Assistência editorial: Daniel Pontes, Mayra Marum, Roberta Stoppe
Preparação de texto: Adriana Bairrada, Geuid Dib Jardim
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Tatiane Porusselli
Capa: Douglas Rodrigues José, Tatiane Porusselli, Apis Design, Fábio Luna
Imagem da capa: Detalhe da estrutura do telhado de: Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Xylem Pavilion, 2019, Montana, EUA.
© Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Foto: Iwan Baan.
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Cesar G. Sacramento, Daniela Uemura, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Maura Loria, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Vanessa Trindade, Junior Rozzo
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bianchini, Edwaldo
Matemática Bianchini : 7º ano / Edwaldo Bianchini. -- 10. ed. -- São Paulo : Moderna, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-16-13566-9

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

22-115273 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Xilema, o pavilhão de encontros do *Tippet Rise Art Center*, em Montana (EUA), foi projetado pelo arquiteto Diébédo Francis Kéré como um abrigo silencioso e protetor para os visitantes do rancho. Nomeado de forma a evocar as vitais camadas internas da estrutura de uma árvore, Xilema é um lugar onde os visitantes podem se reunir para conversar, contemplar as vistas da margem do riacho Grove, ou sentar e meditar individualmente.

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Este livro foi pensado, escrito e organizado com o objetivo de facilitar sua aprendizagem.

Para tornar mais simples o entendimento, a teoria é apresentada por meio de situações cotidianas. Assim, você vai notar quanto a Matemática faz parte do nosso dia a dia e nos possibilita compreender melhor o mundo que nos rodeia.

Por isso, aproveite ao máximo todo o conhecimento que este livro pode lhe oferecer. Afinal, ele foi feito especialmente para você!

Faça dele um parceiro em sua vida escolar!

O autor

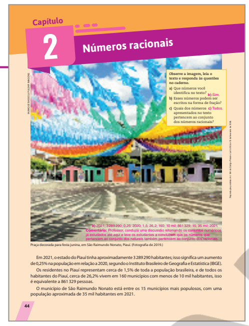

AFRICA STUDIO/SHUTTERSTOCK

CONHEÇA SEU LIVRO

Seu livro está organizado em 12 capítulos. A estrutura de cada capítulo é muito simples e possibilita localizar com facilidade os assuntos estudados, os exercícios e as seções enriquecedoras. Acompanhe.

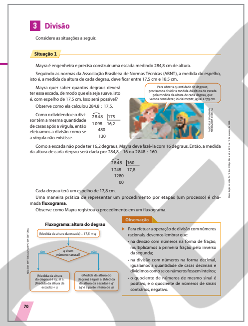
Página de abertura

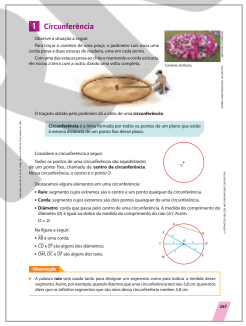
O tema do capítulo é introduzido por meio de uma imagem motivadora e um breve texto.



Apresentação dos conteúdos

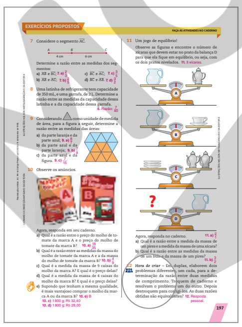
Os conteúdos são apresentados em linguagem clara e acompanhados de exemplos e ilustrações cuidadosamente elaborados.

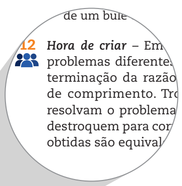




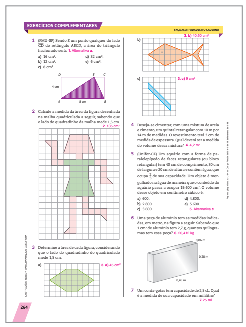
Exercícios

O livro traz exercícios variados, organizados após os conteúdos na seção **Exercícios Propostos** e, ao final de cada capítulo, na seção **Exercícios Complementares**.



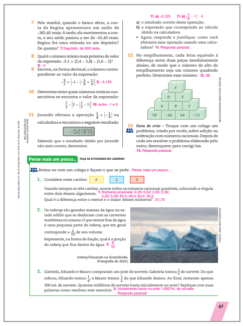


Hora de criar – Atividades em que você elabora um problema com base no assunto estudado.



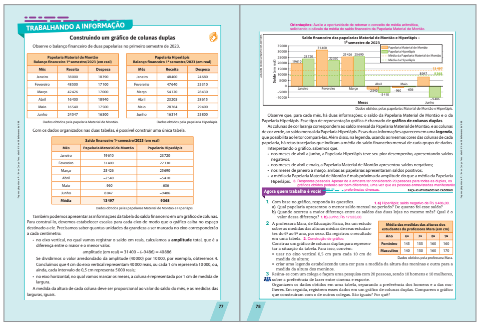
Pense mais um pouco...

Propõe atividades desafiadoras que possibilitam aprofundar conteúdos ao longo do capítulo.



Trabalhando a informação

Esta seção possibilita que você trabalhe com informações apresentadas em diferentes linguagens.

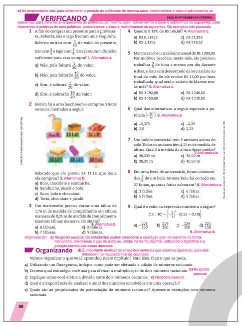


Para saber mais

É uma seção que traz textos sobre Geometria e História da Matemática para enriquecer e explorar diversos conteúdos matemáticos estudados.

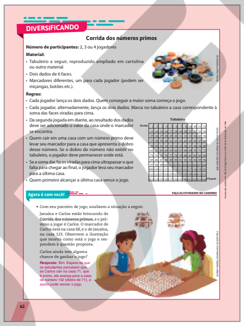
Verificando

Nesta seção, você poderá avaliar seu aprendizado e organizar seu conhecimento sobre o que foi estudado em cada capítulo.



Diversificando

Esta seção oferece a você a oportunidade de entrar em contato com temas variados, em diferentes contextos e áreas do saber.



Macroáreas temáticas dos Temas Contemporâneos Transversais na BNCC


Meio ambiente


Economia


Saúde


Cidadania e civismo


Multiculturalismo


Ciência e Tecnologia

Ícones da coleção


Atividade oral


Atividade em dupla ou em grupo


Cálculo mental


Calculadora

SUMÁRIO

Capítulo 1 Números inteiros

ALEXANDER INGERMAN/SHUTTERSTOCK

a) Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes debatam a respeito do assunto e sugiram a representação à esquerda do ponto associado à medida 0 m.
c) Altitude é a distância vertical medida a partir do nível médio dos mares. Espera-se que os estudantes consigam relacionar o conceito com o tema da abertura.

Leia o texto, observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) Você já tinha ouvido falar no mar Morto e nas suas características peculiares?
b) Como você indicaria, em uma reta numérica, a profundidade do mar Morto, em relação ao nível do mar?
c) Você sabe o que é altitude? Pesquise esse conceito e compartilhe com o professor e os colegas.

Amanhecer na costa israelense do mar Morto, Israel. (Fotografia de 2021.)

O mar Morto não é um mar, mas um imenso lago com dimensão de 82 quilômetros de comprimento por 18 quilômetros de largura. Ele está situado a 400 metros abaixo do nível do mar Mediterrâneo, o ponto mais baixo da Terra.

Sugestão de leitura

Para enriquecer o trabalho, sugerimos o material:

FLINT, Guila. Desaparecimento gradual do Mar Morto é 'corrigido' com solução polêmica. **BBC News Brasil**, 28 mar. 2014. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/03/140328_mar_morto_polemica_pai_gf. Acesso em: 13 maio 2022.

A notícia aborda a situação do mar Morto em razão do uso excessivo de suas águas e uma possível solução para o problema.

Capítulo 1 – Números inteiros

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, abordamos os números inteiros e as operações a que estão sujeitos, apresentando situações cotidianas verossímeis nas quais haja quantificação e simetria em relação ao zero.

A reta numérica é um bom recurso para a correta obtenção e interpretação dos resultados das operações que envolvem os números inteiros, assim como situações contextualizadas: variações de temperatura, movimentação financeira, altitude, saldo de gols etc.

O tema de abertura pode ser aproveitado para um estudo interdisciplinar com a área de Geografia.

Proponha um estudo não só da localização geográfica do mar Morto, mas também, e principalmente, da situação de risco iminente de sua extinção. Um estudo assim envolve as consequências do aquecimento global e do uso predatório desse enorme lago para a vida dos povos do seu entorno. Assim, tratamos do Tema Contemporâneo Transversal **educação ambiental** e contribuímos para a tomada de consciência em busca da preservação do planeta, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 7**.

1. A necessidade de outros números

Habilidade da BNCC: **EF07MA03**.

Neste tópico, desenvolvemos um trabalho com a habilidade (EF07MA03) ao propor situações diversas de comparação e ordenação, acessíveis à compreensão do estudante desta etapa escolar, nas quais a ideia de número supera a dimensão da quantificação e atende a demandas de qualificação em relação ao referencial zero.

Introduzimos um conceito totalmente novo para o estudante, em que o número ganha um significado caracterizado por um sinal que determina condições não apenas diferentes, mas contrárias, e tendo como referência o zero.

O uso de **números inteiros negativos** desenvolveu-se historicamente da necessidade de atribuir significado a expressões numéricas do tipo 2 – 7, as quais passaram a ser legitimadas com a diversificação das práticas sociais, como a presença das transações bancárias e contábeis, entre outras. Diferentemente dos números na forma fracionária, que eram aceitos desde a Antiguidade, os números negativos foram incorporados plenamente à Matemática ocidental apenas por volta do século XVII.

Para entender a **situação 1**, é necessário ter claro o conceito de altitude. Uma prática didática conveniente é a pesquisa do vocabulário no texto com o uso de dicionário, cuja definição para altitude pode ser: elevação vertical de um ponto qualquer da superfície terrestre em relação ao nível zero ou nível dos oceanos.

A **situação 2** é bem mais próxima do cotidiano dos estudantes e remete à observação de medida com a qual eles, em geral, estão bem familiarizados.

1 A necessidade de outros números

Você já aprendeu que, a partir do momento em que surgiu a necessidade de contar e registrar quantidades, o ser humano começou a criar símbolos para representar essas quantidades, o que levou ao surgimento dos **números naturais**.

Você já estudou também que os números naturais não são suficientes para representar todas as situações do cotidiano e que, em alguns momentos, usamos os números representados na **forma de fração** e na **forma decimal**.

Neste capítulo, vamos estudar outros tipos de número, que nos possibilitam efetuar subtrações como 5 – 9, além de nos auxiliar em algumas situações do dia a dia.

- Como você indicaria uma temperatura com medida abaixo de 0 °C e o saldo de gols de um time que sofreu 10 gols e fez 5 gols? **Orientações:** Dê um tempo aos estudantes para que reflitam sobre a necessidade de uso do número negativo antes de apresentar as situações a seguir.

Situação 1

Considera-se zero a altitude ao nível do mar.

- O Everest é o monte de maior altitude da Terra. Seu pico atinge aproximadamente 8 849 m acima do nível do mar. Podemos indicar a medida dessa altitude por +8 849 m.
- Alguns bairros da cidade de Haia (Holanda) estão 1 m abaixo do nível do mar. Podemos indicar a medida dessa altitude por –1 m.

IMAGO IMAGES/EASYPIX BRASIL

O monte Everest fica na cordilheira do Himalaia, na fronteira entre o Nepal e a China. (Fotografia de 2021.)

JOLANDA AALBERS/ALAMY/FOTOARENA

Edifícios em Haia, Holanda, ao longo do canal Hofvijver. (Fotografia de 2022.)

Situação 2

Um termômetro pode registrar temperaturas com medidas "acima de 0 °C" (positivas) e temperaturas com medidas "abaixo de 0 °C" (negativas).

Por exemplo, quando a temperatura em uma cidade mede 20 graus Celsius acima de zero, registramos essa medida por +20 °C ou 20 °C; quando a temperatura mede 20 graus Celsius abaixo de zero, indicamos essa medida por –20 °C.

TOMAS RAGINA/SHUTTERSTOCK

Sugestão de leitura

Para enriquecer o trabalho, sugerimos o livro:

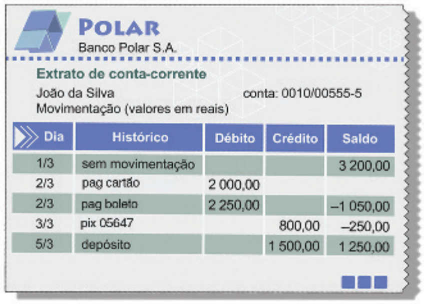
RIPOLL, C.; RANGEL, L.; GIRALDO, V. **Livro do Professor de Matemática da Educação Básica – Volume 2 – Números Inteiros**. Rio de janeiro: SBM, 2016.

O livro trata da origem dos números inteiros, das relações de equivalência, da construção de números inteiros e estruturas algébricas e das operações envolvendo números negativos.

Situação 3

Os extratos bancários das contas-correntes registram todos os movimentos de créditos e de débitos.

Observe, no extrato, que, nos dias 2 e 3 de março, o saldo dessa conta era negativo e, no dia 5 de março, voltou a ficar positivo.



POLAR
Banco Polar S.A.

Extrato de conta-corrente
João da Silva conta: 0010/00555-5
Movimentação (valores em reais)

Dia	Histórico	Débito	Crédito	Saldo
1/3	sem movimentação			3 200,00
2/3	pag cartão	2 000,00		
2/3	pag boleto	2 250,00		–1 050,00
3/3	pix 05647		800,00	–250,00
5/3	depósito		1 500,00	1 250,00

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 4

A tabela apresenta parte da classificação geral ao fim do Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino de 2021. (P indica os pontos ganhos.)

Observe que o saldo de gols (SG) pode ser positivo ou negativo. Por exemplo, o Atlético Mineiro ficou com saldo positivo de +33, porque fez 67 gols pró (GP) e sofreu 34 gols contra (GC). O Grêmio, por sua vez, ficou com saldo negativo de –7, porque marcou 44 gols e sofreu 51.

Classificação final no Campeonato Brasileiro de Futebol Masculino de 2021 – Série A

Classificação		P	GP	GC	SG
1º	Atlético Mineiro – MG	84	67	34	+33
2º	Flamengo – RJ	71	69	36	+33
3º	Palmeiras – SP	66	58	43	+15
4º	Fortaleza – CE	58	44	45	–1
17º	Grêmio – RS	43	44	51	–7
18º	Bahia – BA	43	42	51	–9
19º	Sport – PE	38	24	37	–13
20º	Chapecoense – SC	15	27	67	–40

Dados obtidos em: CAMPEONATO Brasileiro 2021 – Série A – Classificação. **Folha de S.Paulo**. Disponível em: https://www1.folha.uol.com.br/esporte/campeonato-brasileiro/2021/serie-a/tabela.shtml. Acesso em: 16 maio 2022.

As situações apresentadas mostram números precedidos do sinal de menos. Eles são exemplos de **números inteiros negativos**.

Para cada número inteiro positivo, existe um número inteiro negativo correspondente. Observe.

+1 “mais um” ou “um positivo”	+2 “mais dois” ou “dois positivo”	+3 “mais três” ou “três positivo”	+4 “mais quatro” ou “quatro positivo”	...
–1 “menos um” ou “um negativo”	–2 “menos dois” ou “dois negativo”	–3 “menos três” ou “três negativo”	–4 “menos quatro” ou “quatro negativo”	...

E cada número inteiro positivo é associado a um número natural diferente de zero.

$$+1 = 1,\ +2 = 2,\ +3 = 3,\ \dots$$

Todos os números naturais, quando reunidos com os números inteiros negativos, formam o **conjunto dos números inteiros**, cuja notação é:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

A necessidade de outros números

A **situação 3** nos leva a situações concretas em que, dado um conjunto com determinado número de objetos, devemos retirar dele uma quantidade maior do que esse número. Por exemplo, tirar 6 laranjas de uma sacola que contenha 4 laranjas. Os estudantes devem perceber que os números naturais não respondem a esse tipo de questão. Uma resposta possível seria “tiro 4 e fica faltando tirar duas”. Converse com a turma sobre como representar o número “faltam 2”.

Outro exemplo pode ser uma situação hipotética entre dois estudantes que vão a um mercado comprar chocolate. Um deles tem 5 reais para a compra; o outro tem 3 reais. Supondo que o chocolate custe 4 reais, questione:

- Alguém ficou devedor? Quem? De quanto era a dívida? Como representar essa dívida?
- Alguém ficou credor? Quem? De quanto era o crédito? Como representar esse crédito?

Trabalhe a **situação 4** considerando a circunstância de algum time hipotético com 5 gols pró e 8 gols contra. Escreva na lousa uma linha com 5 “P” e, pareando, outra linha com 8 “C”. Risque aos pares um “P” e um “C”. Pergunte se sobraram, e quantos, “P” ou “C”. No caso, fica evidente a sobra de 3 “C”, com base na qual se conclui que o saldo é –3.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 1** a **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

O **exercício 4** pode ser complementado com a seguinte atividade em grupo: os estudantes imaginam quatro equipes (A, B, C e D) e, por meio do lançamento de dados de seis faces, realizam seis partidas entre elas, registrando os resultados em uma tabela. Suponhamos que, ao jogar o dado referente à equipe A, obtenha-se a face de número 3, e que, ao jogar o dado referente à equipe B, obtenha-se a face de número 2. O placar do jogo será, então, 3 × 2 para a equipe A. Após a realização das seis partidas, os estudantes devem calcular o saldo de pontos de cada equipe.

Essa atividade possibilita:

- registrar, organizar e interpretar os resultados obtidos, estabelecendo conexão com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística**;
- aplicar os conceitos referentes a números inteiros;
- trabalhar de forma não sistemática a adição de números inteiros, estabelecendo vínculos com o estudo posterior do tema.

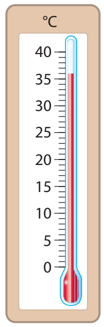
O **exercício 5** pode ser ampliado quanto ao limite territorial. Na pesquisa em jornais, revistas, livros ou na internet, peça aos estudantes que colham dados sobre recordes de temperaturas máximas e mínimas nos seis continentes (considerando a Antártica) e os organizem em uma tabela.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

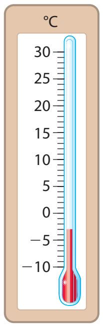
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Junte-se a um colega para responderem à pergunta: O número natural zero é positivo ou negativo? **1.** O número natural zero não é positivo nem negativo.

2 Indique a medida de temperatura que cada termômetro está registrando.

a)


2. a) 36 °C

b)


2. b) −3 °C

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

3 Expresse a medida de cada altitude usando um número positivo ou negativo.

a) O pico Aconcágua, no Chile, encontra-se a 6 961 m acima do nível do mar. **3. a)** +6 961 m

b) A fossa das Marianas, no oceano Pacífico, está 10 924 m abaixo do nível do mar.

c) O mar Morto fica entre Israel e a Jordânia e é um dos lagos mais salgados do mundo. Suas margens, a 400 m abaixo do nível do mar, são o ponto mais baixo da superfície terrestre.

3. b) −10 924 m **3. c)** −400 m

4 A tabela a seguir mostra os resultados do Campeonato de Futebol de um município. Copie a tabela no caderno e complete-a com uma coluna indicando o saldo de gols (SG) de cada time.

4.

SG	Times	Gols pró	Gols contra
+13	Perna de Pau F. C.	28	15
−6	E. C. Canela de Ferro	15	21
0	S. C. Fazenda do Toco	20	20
−1	S. E. Bananeiras	18	19

Campeonato Municipal de Futebol

Dados obtidos pela Secretaria de Esportes.

5. Resposta pessoal.

5 Na região Sul do Brasil, no inverno é comum se registrarem temperaturas com medidas abaixo de zero, acompanhadas de geada e até de neve em alguns municípios. Você conhece alguns desses lugares?

a) Faça uma pesquisa em jornais, revistas, livros ou internet e descubra que fatores podem influenciar o clima da região, provocando temperaturas de medidas negativas.

b) Verifique se no município onde você mora é possível o registro de temperaturas com medidas negativas. Troque informações com os colegas. **5. b)** Resposta pessoal.

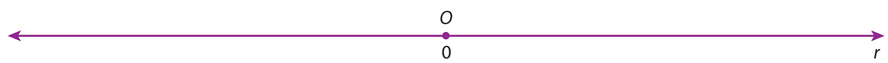
5. a) Na região Sul, alguns municípios, como São Joaquim, em Santa Catarina, e São José dos Ausentes, no Rio Grande do Sul, comumente registram temperaturas de medidas negativas. Entre os fatores que influenciam o registro de medidas baixas, os estudantes poderão citar a altitude, a latitude, as correntes marítimas, as massas de ar.

2 Representação na reta numérica e módulo

Você se lembra de como representamos os números naturais em uma reta numérica?

ARTUR FUJITA/ ARQUIVO DA EDITORA

Assim como os números naturais, os números inteiros podem ser representados em uma reta numérica. Para isso, desenhamos uma reta *r* e sobre ela marcamos o ponto *O*, chamado de **origem**, que corresponde ao número **0** (zero).



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

12

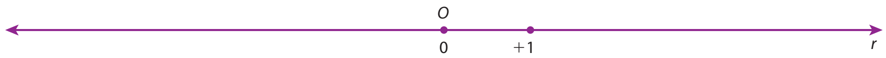
2. Representação na reta numérica e módulo

- Habilidade da BNCC: **EF07MA03**.

A exigência das atividades de comparar e ordenar números inteiros propicia aos estudantes o desenvolvimento da habilidade (EF07MA03).

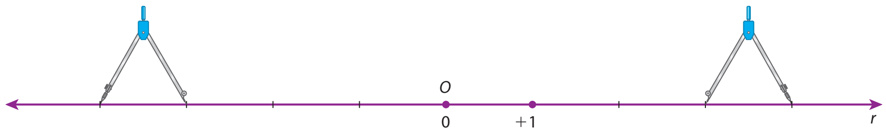
Tratamos da reta numérica, conceito que reúne ideias fundamentais do pensamento humano, como: a associação entre número e ponto de uma reta com orientação, ou seja, um eixo; a concepção de unidade de medida; a ideia de simetria em relação ao ponto de origem (associado ao zero); a ideia de módulo como medida de distância do ponto (imagem do número) à origem (imagem do zero).

Em seguida, marcamos outro ponto da reta a uma distância qualquer do ponto *O* e associamos a esse ponto o número +1. Dessa maneira, estabelecemos a **unidade de medida** e o **sentido positivo** dessa reta numérica.



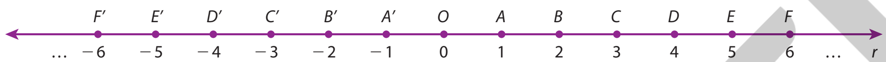
Em geral, desenhamos a reta *r* paralela às linhas do caderno e o sentido positivo da esquerda para a direita.

Usando um compasso ou a escala de uma régua, marcamos, à direita e à esquerda do ponto *O*, segmentos de medida iguais à unidade de medida adotada.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

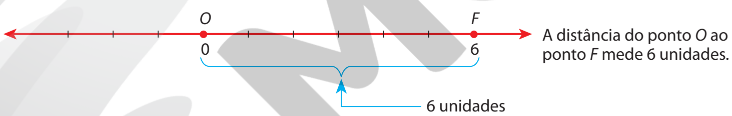
Nos extremos desses segmentos marcamos, por exemplo, os pontos *A*, *A′*, *B*, *B′*, *C*, *C′*, *D*, *D′*, *E*, *E′*, *F*, *F′*, conforme a representação a seguir. A cada ponto à direita de *O*, fazemos corresponder os **números inteiros positivos**, e a cada ponto à esquerda, os **números inteiros negativos**.



Cada número inteiro pode ser associado a um ponto da reta numérica. O número associado ao ponto de uma reta numérica é chamado de **abscissa** desse ponto. Por exemplo, 1 é a abscissa do ponto *A*, e −3, a abscissa do ponto *C′*.

Em uma reta numérica, é possível determinar a distância do ponto de abscissa zero (origem) a outro ponto qualquer da reta. Observe o exemplo.

ARTUR FUJITA/ ARQUIVO DA EDITORA



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

A medida da distância de um ponto à origem é chamada de **valor absoluto** (ou **módulo**) do número que corresponde a esse ponto.

Representação na reta numérica e módulo

Apresente aos estudantes uma linha do tempo, tendo por base o calendário gregoriano, e pontue nela datas de acontecimentos importantes para a humanidade (efemérides). Solicite a eles que pesquisem as datas de nascimento e morte de grandes filósofos e matemáticos, dentre os quais Tales, Pitágoras, Euclides de Alexandria, Ptolomeu, Bhaskara, Fibonacci, Euler, Descartes, Gauss e Isaac Newton, e as insiram na linha do tempo apresentada a eles. Se julgar conveniente, proponha também a elaboração de um quadro biográfico resumido dessas personalidades.

O calendário gregoriano, o qual utilizamos atualmente, adota o ano do nascimento de Cristo como ano 1. Os anos anteriores ao nascimento de Cristo são indicados por a.C., e os depois do nascimento, por d.C. Como exemplo, o ano 35 antes de Cristo é indicado por 35 a.C., e o ano 35 depois de Cristo, por 35 d.C.

É importante explicar aos estudantes que o calendário gregoriano, apesar de guardar algumas similaridades com o conjunto dos números inteiros, apresenta uma diferença significativa: não contém o ano zero.

Sugestão de leitura

Para enriquecer o trabalho, sugerimos o artigo:

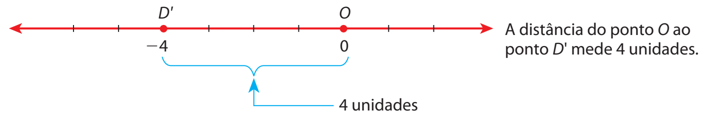
O calendário gregoriano e os dez dias que nunca existiram. **El País**, Madri, 4 out. 2016. Disponível em: https://brasil.elpais.com/brasil/2016/10/04/actualidad/1475532151_621324.html. Acesso em: 13 maio 2022.

O texto do fato de os dias 5 a 14 de outubro de 1582 não terem existido devido à substituição do calendário juliano pelo calendário gregoriano.

No exemplo anterior, o valor absoluto de 6 (abscissa do ponto *F*) é 6 (medida da distância do ponto à origem).

Acompanhe outro exemplo.

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA



O valor absoluto de –4 (abscissa do ponto *D'*) é 4 (medida da distância do ponto *D'* à origem).

Indica-se o valor absoluto (ou módulo) de um número colocando-se esse número entre duas barras. Assim, por exemplo, o módulo de –3 é indicado por |–3|.

Acompanhe mais exemplos.

a) |+10| = 10 **b)** |–8| = 8 **c)** |0| = 0

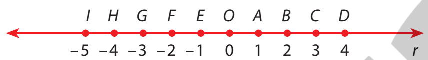
8. b) –5 é a abscissa do ponto *S*; –2 é a abscissa do ponto *M*; –1 é a abscissa do ponto *E*; 1 é a abscissa do ponto *T*.

8. c) –4 é a abscissa do ponto *M*; –2 é a abscissa do ponto *T*; 0 é a abscissa do ponto *O*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

6 Observe a reta numérica e responda às questões no caderno.



a) Qual é a abscissa do ponto *B*? **6. a)** 2

b) Qual é a abscissa do ponto *F*? **6. b)** –2

c) O número –4 é abscissa de qual ponto? **6. c)** *H*

d) Qual é o ponto cuja abscissa é 3? **6. d)** *C*

7 No caderno, construa uma reta numérica e localize os pontos: **7.** Construção de figura.

a) *P*, de abscissa +4;

b) *Q*, de abscissa –4;

c) *R*, de abscissa +2;

d) *S*, de abscissa –2.

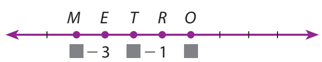
8. a) –3 é a abscissa do ponto *N*; –1 é a abscissa do ponto *M*; 3 é a abscissa do ponto *O*.

8 Copie as retas numéricas a seguir e determine a abscissa dos pontos destacados.

a)

b)

c)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

9. a) Respostas possíveis: 1, 2, 3 e 4. **9. b)** Respostas possíveis: –1, –2, –3, –4 e –5.

9 Encontre o número inteiro em cada caso.

a) Na reta numérica, o número está à direita do zero e à esquerda do 5.

b) O número está à esquerda do zero e à direita do –6 na reta numérica.

c) Na reta numérica, o número está à direita do zero e à esquerda do –2.

9. c) Esse número não existe.

10 Considere os pontos indicados na reta numérica:

Escreva no caderno o módulo do número associado a cada ponto.

a) *A* **10. a)** 4 c) *C* **10. c)** 3 e) *D* **10. e)** 7
b) *B* **10. b)** 2 d) *O* **10. d)** 0 f) *E* **10. f)** 8

11 Determine os números cujo valor absoluto é:

a) 8; **11. a)** –8 e 8 b) 13; **11. b)** –13 e 13 c) 10; **11. c)** –10 e 10 d) 2. **11. d)** –2 e 2

12 Dê o valor de:

a) |–15| **12. a)** 15 d) |–30| **12. d)** 30 g) |0| **12. g)** 0
b) |+100| **12. b)** 100 e) |+90| **12. e)** 90 h) |–35| **12. h)** 35
c) |–25| **12. c)** 25 f) |–121| **12. f)** 121 i) |+279| **12. i)** 279

13 Entre as opções a seguir, escreva qual é o número de maior valor absoluto.

a) –9 ou 5? **13. a)** –9 c) –8 ou –2? **13. c)** –8
b) 0 ou –6? **13. b)** –6 d) 10 ou –4? **13. d)** 10

14

Representação na reta numérica e módulo

Como proposta complementar, distribua a 13 estudantes uma ficha com um número inteiro de –6 a +6, uma por estudante. A seguir, peça a eles que se posicionem próximo à lousa, em linha reta, de modo que representem um trecho da reta numérica.

Essa configuração pode ser abordada de diversas maneiras, com a participação dos demais estudantes. Por exemplo:

- pergunte se o posicionamento dos estudantes enfileirados está correto;
- pergunte se eles devem estar igualmente espaçados;
- proponha aos estudantes que não receberam ficha que escolham dois colegas enfileirados, os quais estejam à mesma distância do zero, e peça-lhes que digam qual é o módulo dos números dos dois escolhidos;
- solicite a eles que comparem os números das fichas desses dois estudantes escolhidos dizendo o que eles têm de igual (módulo) e o que eles têm de diferente (sinal);
- peça-lhes que caracterizem esses dois números como números inteiros opostos ou simétricos;
- peça-lhes que identifiquem os estudantes com o número de maior módulo e com o de menor módulo.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 8**, **10**, **12** e **13** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

No **exercício 7**, verifique se os estudantes localizam corretamente os números indicados. Espera-se que eles considerem por exemplo, que estabelecida a origem *O* (o ponto de abscissa 0), o ponto *P* e o ponto *Q* estarão à mesma distância de *O*, mas em sentidos opostos. Além disso, o ponto *R* estará no ponto médio do segmento $\overline{OP}$ e o ponto *S*, no ponto médio do segmento $\overline{OQ}$.

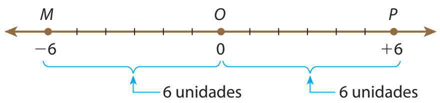
O **exercício 9** exige uma compreensão maior da reta numérica. Antes de iniciá-lo, desenhe na lousa uma reta numérica, com indicações de –5 a 5, e proponha:

- Indique um número inteiro que esteja entre –5 e 5 e à esquerda de zero. (–4, –3, –2 ou –1)
- Dê um número inteiro que esteja entre –5 e 5 e à direita de 3. (4)
- Diga um número inteiro entre 1 e 2. (Não há.)

No **item a**, os estudantes devem perceber que existe mais de uma possibilidade (1, 2, 3, 4 e 5), assim como no **item b** (–1, –2, –3, –4 e –5), enquanto nas condições indicadas no **item c** não existe número inteiro.

3 Números inteiros opostos ou simétricos

Considere a reta numérica representada a seguir.



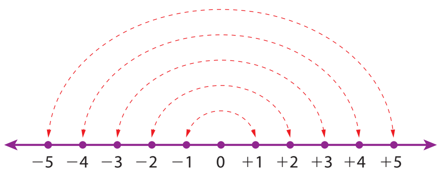
Repare que a medida da distância *OM* é igual à medida da distância *OP*. Isso significa que o módulo de –6 é igual ao módulo de +6. Por isso, dizemos que –6 e +6 são números opostos ou simétricos.

Números que têm sinais diferentes e têm o mesmo módulo são **opostos** ou **simétricos**.

O zero é oposto do próprio zero.

Acompanhe outros exemplos.

a) O oposto de +1 é –1. **b)** O oposto de –4 é 4. **c)** O oposto de –2 é 2.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

- Indica-se o oposto de um número colocando o sinal de menos (–) à sua esquerda. Exemplos:
  a) O oposto de +9 é –9 e é indicado por –(+9), ou seja, –(+9) = –9.
  b) O oposto de –20 é +20 e é indicado por –(–20), ou seja, –(–20) = +20.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

14 Determine no caderno:

a) o oposto de –2; **14. a)** 2
b) o oposto de –64; **14. b)** 64
c) o oposto do oposto de –9; **14. c)** –9
d) o oposto do oposto de 15; **14. d)** 15
e) o oposto de |–10|; **14. e)** –10
f) o módulo do oposto de –5. **14. f)** 5

15. Construção de figura.

15 Construa uma reta numérica e indique os pontos A, de abscissa –4; C, de abscissa 2; B, simétrico de A em relação à origem; e D, simétrico de C em relação à origem. Em seguida, determine as medidas dos segmentos:

a) $\overline{AB}$; **15. a)** 8 unidades.
b) $\overline{AD}$; **15. b)** 2 unidades.
c) $\overline{CD}$; **15. c)** 4 unidades.
d) $\overline{BD}$. **15. d)** 6 unidades.

15

3. Números inteiros opostos ou simétricos

Habilidade da BNCC: **EF07MA03**.

Mostre aos estudantes a imagem de uma régua encostada perpendicularmente à superfície de um espelho plano e proponha a eles que observem que as imagens dos números no espelho representam, respectivamente, os simétricos dos números da régua.

Ao trabalhar a representação de números inteiros em uma reta numérica contribuímos para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA03).

Exercícios propostos

Este bloco de exercícios, que enfatiza o conceito de número oposto, pode ser enriquecido propondo-se aos estudantes que desenhem uma reta numérica no caderno e marquem nela dois pontos *A* e *B*, distintos, com abscissas positivas. Depois, eles devem identificar na reta os pontos *A'* e *B'*, respectivamente simétricos de *A* e *B*, determinando as suas abscissas. A seguir, peça a eles que calculem e comparem as medidas das distâncias de *A* a *B* e de *A'* a *B'*.

Repita a atividade, agora com os dois pontos tendo abscissas negativas.

Novamente repita a atividade, agora com um dos dois pontos tendo abscissa negativa e o outro com abscissa positiva. Discuta os resultados dessas comparações. Os estudantes devem concluir que as duas distâncias sempre serão iguais.

As resoluções dos **exercícios 14** e **15** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

4. Comparação entre números inteiros

Habilidade da BNCC: **EF07MA03**.

O termômetro graduado na escala Celsius é um objeto concreto com as características da reta numérica no qual a ordem do conjunto dos números inteiros se apresenta explicitamente. Isso facilita muito a comparação entre esses números, contribuindo para o trabalho com a habilidade (EF07MA03). Nos termômetros, a maior temperatura está associada a um número inteiro maior; a menor temperatura está associada a um número inteiro menor.

Explore o uso de um termômetro com escala Celsius e faça a conexão entre ele e a reta numérica.

Solicite aos estudantes uma pesquisa a respeito das medidas de temperatura consideradas normais para os humanos e para diversos outros animais. Eles devem registrar os dados dessa pesquisa em uma tabela e apresentá-la para a turma.

Se considerar adequado, com o professor de Geografia, proponha aos estudantes que realizem uma pesquisa sobre os municípios que aparecem nas fotografias, sua localização e o que justifica a diferença de temperatura nesses municípios em um mesmo dia. Além disso, pergunte em que período esse registro pode ter ocorrido.

4 Comparação entre números inteiros

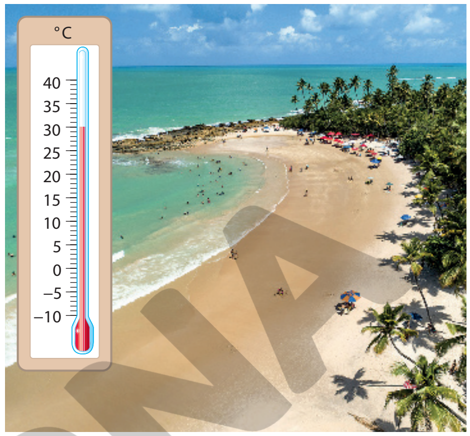
Vamos supor que, em certo dia, os termômetros registrem –4 °C em Urupema (SC), 30 °C em Conde (PB) e 13 °C em Goiás (GO).

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

MARILIA SUTIL/FUTURA PRESS

Urupema, Santa Catarina. (Fotografia de 2021.)

TALES AZZI/PULSAR IMAGENS



Vista de *drone* da Praia de Coqueirinho, Conde, Paraíba. (Fotografia de 2021.)

ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

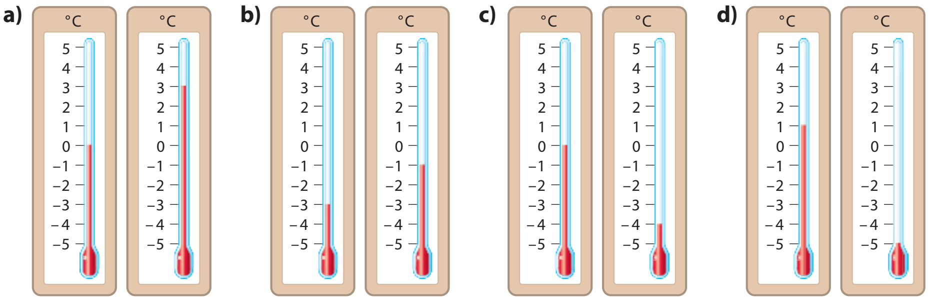
Centro histórico de Goiás, município **homônimo** do estado de Goiás. (Fotografia de 2021.)

Homônimo: pessoa, coisa ou lugar que tem o mesmo nome de outra.

Podemos estabelecer uma relação de desigualdade entre as medidas das temperaturas desses municípios. Fazendo isso, estamos realizando uma comparação entre números inteiros.

- A medida da temperatura em Conde é maior que a medida da temperatura em Goiás ($30 > 13$).
- A medida da temperatura em Urupema é menor que a medida da temperatura em Goiás ($-4 < 13$).

Acompanhe mais algumas comparações entre as medidas de temperaturas registradas em dois termômetros.



a) $0 < 3$ b) $-3 < -1$ c) $0 > -4$ d) $1 > -5$

Também podemos recorrer à reta numérica para comparar números inteiros.

De acordo com a reta, obtemos:

- $0 < 3$, e na reta numérica 0 está à esquerda de 3;
- $-3 < -1$, e na reta numérica -3 está à esquerda de -1;
- $0 > -4$, e na reta numérica 0 está à direita de -4;
- $1 > -5$, e na reta numérica 1 está à direita de -5.

> Dados dois números inteiros diferentes, na reta numérica o menor deles é o que está à esquerda do outro.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

16 Determine: **16. a)** 1, 2 e 3

a) os três menores números inteiros positivos;
b) os três menores números inteiros não negativos; **16. b)** 0, 1 e 2 **16. c)** −1, −2 e −3
c) os três maiores números inteiros negativos;
d) os três maiores números inteiros não positivos. **16. d)** 0, −1 e −2

17 Escreva: **17. a)** −1, 0 e 1 **17. b)** −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2 e 3

a) os números inteiros entre −2 e 2;
b) os números inteiros de −4 a 3;
c) os números inteiros entre −3 e −1; **17. c)** −2
d) os números naturais entre −2 e 2. **17. d)** 0 e 1

18 Observe os pontos da reta numérica a seguir e considere os números inteiros, que são suas respectivas abscissas.

18. a) Quaisquer pontos à direita de *R*.

a) Dê os nomes de dois pontos cujas abscissas sejam maiores que a do ponto *R*.
b) Dê os nomes de dois pontos cujas abscissas sejam menores que a abscissa do ponto *T*.
c) Que ponto tem abscissa com módulo igual ao módulo da abscissa de *X*? **18. c)** *Q*
d) Que ponto tem abscissa igual ao oposto da abscissa de *Q*? **18. d)** *X*

18. b) Quaisquer pontos à esquerda de *T*.

19 Coloque os números em ordem crescente, usando o sinal < entre eles.

19. a) $-8 < -4 < -3 < 0 < +1 < +2$

a) −8, −4, +2, −3, 0, +1
b) +2, −9, 0, +1, +6, −10

19. b) $-10 < -9 < 0 < +1 < +2 < +6$

20 Em determinado dia, o saldo bancário de Flávia era −2 000 reais, e o de Luiz Antônio, −350 reais. Qual deles estava devendo mais ao banco? Justifique sua resposta.

20. Flávia, pois 2 000 reais é um valor maior que 350 reais.

Comparação entre números inteiros

Uma maneira de trabalhar a comparação de números inteiros é apresentar uma tabela de campeonato de futebol com gols a favor, gols contra e saldo de gols, listando os times pela ordem alfabética de seus nomes.

Em seguida, peça aos estudantes que reconstruam a tabela classificando os times pelo saldo de gols, dado que maior saldo de gols significa melhor colocação no campeonato.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 16**, **17** e **20** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

No **exercício 18**, observe que questões envolvendo igualdade têm, em geral, resposta única, caso dos itens **c** e **d**. As relações de desigualdade (maior que, menor que) frequentemente têm várias respostas, caso dos itens **a** e **b**, podendo ter até infinitas respostas quando o enunciado não restringe os pontos. A desigualdade pode ter também resposta única. Por exemplo, no **item a**, é válida a resposta "Quaisquer pontos à esquerda de *R*" e, no **item b**, "Quaisquer pontos à direita de *T*".

Com base na ilustração desse problema, desafie os estudantes a elaborar um exemplo de questão que tenha desigualdade com resposta única. Um exemplo: "Indique os pontos cuja abscissa seja negativa e maior do que a do ponto *S*". (Resposta: apenas o ponto *T*.)

Ainda com base na ilustração desse problema, proponha aos estudantes que criem uma questão com desigualdade que não tenha resposta. Um exemplo de questão nesse caso: "Dê o nome de pontos cuja abscissa seja negativa e maior do que a do ponto *T*".

Exercícios propostos

No **exercício 21** os estudantes devem comparar o par de números dado em cada item. Caso tenham dificuldades, utilize uma reta numérica como suporte para comparação.

No **exercício 22**, há diversas formas de correção das sentenças falsas. No **item b**, por exemplo, a sentença pode ser alterada para:

- O zero é menor que qualquer número positivo.
- O zero é maior que qualquer número negativo.

Faça uma rodada de verificação solicitando a alguns estudantes que falem as suas respostas e, posteriormente, verificando se ainda há alguma diferente das faladas.

No **exercício 23**, os estudantes encontram uma situação contextualizada, na qual são levados, de maneira intuitiva, a efetuar adições com números inteiros. Dessa forma, eles dão o primeiro passo na construção desse conceito e antecipam-se à apresentação formal que vem no item seguinte do capítulo.

A antecipação do emprego de conceitos ainda não formalizados é uma estratégia didática que, bem dosada por uma situação contextualizada, promove no estudante o encorajamento de desvendar tutoriais e arriscar caminhos de pesquisa.

A resolução do **exercício 23** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

5. Adição

Habilidades da BNCC:
EF07MA03, **EF07MA04**, **EF07MA05** e **EF07MA06**.

Ao apresentar aos estudantes a resolução de problemas com números inteiros com o apoio da reta numérica, contribui-se para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA03) e (EF07MA04).

Na adição de dois números inteiros, use a reta numérica como suporte. A partir do zero, ande tantas unidades quantas a primeira parcela indicar (no sentido crescente, se for positivo, e decrescente, se for negativo). Depois, faça o mesmo do ponto em que chegar. Em caso de mais parcelas, repita o procedimento, a partir do último ponto ao qual chegou. Esse recurso foi utilizado na resolução de diferentes situações com o objetivo de fazer com que os estudantes percebam que problemas com a mesma estrutura podem ser resolvidos por meio de um mesmo procedimento, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA06).

A **situação 1** trabalha de maneira adequada, passo a passo, por meio de esquema na reta numérica, a obtenção das somas.

---

21 Escreva qual é o número maior em cada item.

a) 20 ou 18 **21. a)** 20
b) –20 ou –18 **21. b)** –18
c) 0 ou –20 **21. c)** 0
d) 0 ou 18 **21. d)** 18
e) –15 ou –40 **21. e)** –15
f) –8 ou 20 **21. f)** 20

22 Entre as sentenças a seguir, corrija as falsas.

a) O zero é maior que qualquer número negativo. **22. a)** Verdadeira.
b) O zero é maior que qualquer número positivo.
c) Qualquer número negativo é maior que qualquer número positivo.
d) Qualquer número positivo é maior que qualquer número negativo. **22. d)** Verdadeira.
e) Se dois números forem positivos, o maior será aquele que tiver o menor módulo.
f) Se dois números forem negativos, o maior será aquele que tiver o menor módulo.

22. f) Verdadeira.

23 Junte-se a um colega. Associem o andar térreo de um edifício com o zero. Usando números inteiros positivos ou negativos, escrevam o andar onde está um elevador quando:

a) partindo do andar térreo, subir 6 andares e, em seguida, subir mais 2 andares; **23. a)** +8
b) partindo do primeiro andar, descer 3 andares; **23. b)** –2
c) partindo do terceiro andar, subir 4 andares e, em seguida, descer 7 andares; **23. c)** 0
d) partindo do andar térreo, descer 3 andares e, em seguida, subir 1 andar. **23. d)** –2

22. b) Falsa; o zero é menor que qualquer número positivo.
22. c) Falsa; qualquer número negativo é menor que qualquer número positivo.
22. e) Falsa; se dois números forem positivos, o maior será aquele que tiver maior módulo.

5 Adição

Acompanhe como podemos adicionar números inteiros usando uma reta numérica.

Partindo do zero, em primeiro lugar, andamos as unidades indicadas na primeira parcela e, em seguida, andamos as indicadas na segunda parcela. Chegamos, então, a um ponto cuja abscissa é a soma dos números dados.

Vamos estabelecer que o deslocamento será:

- para a direita, se o número for positivo;
- para a esquerda, se o número for negativo.

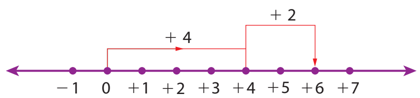
Acompanhe algumas situações que apresentam adição de números inteiros.

Situação 1

Na aula de laboratório, Silvana aqueceu certa quantidade de água que estava a 0 °C. Notou que, no primeiro minuto, a medida da temperatura subiu 4 °C e que, no minuto seguinte, a medida da temperatura subiu outros 2 °C. Qual era a medida da temperatura dessa água ao fim do segundo minuto?

Pelo enunciado, temos: (+4) + (+2).

Partindo do zero, andamos 4 unidades para a direita e, em seguida, mais 2 unidades também para a direita. Chegamos, assim, ao número +6, ou seja, 6.



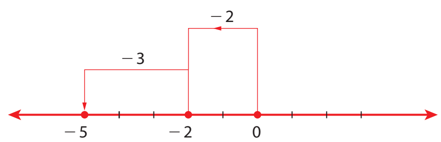
Logo, (+4) + (+2) = 6.

Acompanhe mais exemplos de adição de números inteiros de **mesmo sinal**.

a) (–2) + (–3)

Partindo do zero, andamos 2 unidades para a esquerda e, em seguida, mais 3 unidades também para a esquerda. Chegamos, assim, ao número –5.

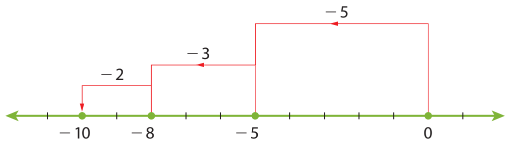
Logo, (–2) + (–3) = –5.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

b) (–5) + (–3) + (–2)

Partindo do zero, andamos 5 unidades para a esquerda; em seguida, andamos 3 unidades também para a esquerda e, finalmente, 2 unidades novamente para a esquerda. Chegamos, assim, ao número –10.



Logo, (–5) + (–3) + (–2) = –10.

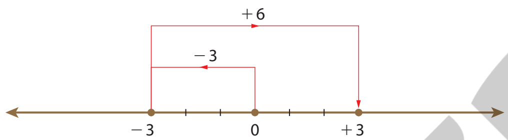
A soma de dois ou mais números inteiros de mesmo sinal é obtida adicionando-se seus valores absolutos e conservando o sinal comum.

Situação 2

Em casa, Fernando havia congelado um suco de uva, o que fez a medida da temperatura do suco ir de 0 °C para –3 °C. Para o lanche da tarde, colocou o suco no micro-ondas e elevou a medida da temperatura em 6 °C. Quantos graus Celsius passou a medir a temperatura do suco?

Obtemos: (–3) + (+6).

Partindo do zero, andamos 3 unidades para a esquerda e, em seguida, 6 unidades para a direita. Chegamos, assim, ao número +3, ou seja, 3.

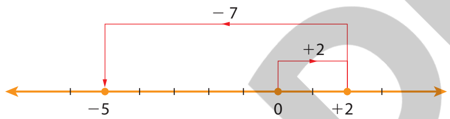


Logo, (–3) + (+6) = 3.

Observe outros exemplos de adição de números inteiros de **sinais diferentes**.

a) (+2) + (–7)

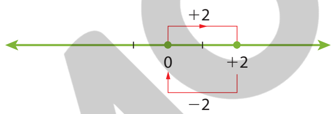
Partindo do zero, andamos 2 unidades para a direita e, em seguida, 7 unidades para a esquerda. Chegamos, assim, ao número –5.



Logo, (+2) + (–7) = –5.

b) (+2) + (–2)

Partindo do zero, andamos 2 unidades para a direita e, em seguida, 2 unidades para a esquerda. Voltamos, assim, ao número zero.



Logo, (+2) + (–2) = 0.

A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é obtida subtraindo-se seus valores absolutos e dando ao resultado o sinal do número de maior valor absoluto. Caso esses números sejam opostos, a soma será igual a zero.

Observe que, para esse grupo de problemas que pede a soma de números inteiros, sempre podemos proceder do mesmo modo: utilizando uma reta numérica.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Adição

A **situação 2** complementa a anterior abordando, com ela, todos os casos possíveis de adição quanto ao sinal das parcelas: parcelas com mesmo sinal (números positivos ou números negativos) e parcelas com sinais diferentes. A abordagem de todos esses casos com situações contextualizadas facilita a compreensão do estudante e dá significado à operação.

Verifique se houve entendimento da analogia feita entre os sinais das parcelas e os sentidos de percurso.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 24**, **25**, **27** e **28** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Para complementar o **exercício 26**, proponha questões como:

- Se a soma de dois números inteiros de sinais diferentes é um número positivo, qual deve ser o sinal do número de maior valor absoluto? (O sinal do número de maior valor absoluto deve ser positivo.)
- Qual deve ser o sinal da soma de dois números de mesmo sinal? (O mesmo sinal dos números das parcelas.)

Solicite ainda aos estudantes que deem exemplos para confirmar as respostas.

Os **exercícios 29** e **30** propõem o uso de calculadora simples. Se não houver calculadoras em número suficiente, organize a turma em grupos, de modo que cada estudante tenha ao menos uma oportunidade de usar o instrumento. Nesse tipo de atividade, convém estar atento ao fato de que pode haver calculadoras com programação diferente daquela que consideramos. Isso pode constituir um novo desafio a ser trabalhado pelos estudantes nas discussões em grupo.

No **exercício 30**, espera-se que os estudantes percebam que foram realizadas 3 subtrações sucessivas: 0 – 369 – 369 – 369. Eles também podem comentar que foi realizada uma multiplicação de –123 por 3. Após resolverem esse exercício, sugira aos estudantes que digitem na calculadora as sequências de teclas a seguir e peça a eles que escrevam a operação realizada.

+ 1 2 = = =

=

– 8 = = = =

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Após essa sequência, o visor da calculadora deve mostrar o número 16.

O **exercício 31** propõe aos estudantes o desafio de antecipar de maneira lúdica a relação entre adição e subtração. A resolução desse exercício está no início desse *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Também podemos efetuar adições com números inteiros usando uma calculadora. Acompanhe alguns exemplos.

a) Para efetuar a adição (+9) + (–2), apertamos as seguintes teclas:

9 + – 2 = → 7

b) Para efetuar a adição (–8) + (–2), apertamos as seguintes teclas:

– 8 + – 2 = → –10

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

30. Espera-se que os estudantes percebam que, ao apertar essa sequência de teclas, Camila efetuou a seguinte operação: 0 + (–123) + (–123) + (–123) = –369

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

24. a) +8 **24. b)** –8 **24. c)** +7 **24. d)** –4 **24. e)** +4 **24. f)** –1

24 Desenhe uma reta numérica. Partindo do zero, determine o número da chegada quando andamos: **24.** Construção de figura.

a) +2, depois, +6;
b) –2, depois, –6;
c) +3, depois, +4;
d) +2, depois, –6;
e) –2, depois, +6;
f) +3, depois, –4.

- Que operação pode ser associada a cada item? **24. Resposta:** Adição.

25 Calcule no caderno.

a) (+5) + (+20) **25. a)** +25
b) (+2) + (–12) **25. b)** –10
c) (–15) + (+9) **25. c)** –6
d) (–6) + 0 **25. d)** –6
e) (–8) + (–10) **25. e)** –18
f) (–9) + (+9) **25. f)** 0
g) (+15) + (–15) **25. g)** 0
h) 0 + (+20) **25. h)** +20

26 A soma de dois números inteiros de sinais diferentes é um número negativo. Nesse caso, qual é o sinal do número de maior valor absoluto? **26.** Negativo.

27 Qual é a soma de dois números inteiros opostos? **27.** Zero.

28 Lucas e Rafaela estão brincando com um jogo que tem as seguintes regras:

Sorteia-se uma carta com 6 perguntas. O jogador escolhe 3 perguntas às quais o adversário deve responder. A cada resposta correta, o adversário adiciona 3 pontos, e a cada resposta incorreta, adiciona –2 pontos.

Lucas acertou 4 perguntas e errou 5. Rafaela acertou 5 e errou 4. Quantos pontos Rafaela fez a mais que Lucas? **28.** 5 pontos.

29 Nas adições a seguir, determine as teclas da calculadora que devemos apertar para efetuar cada operação.

a) (–24) + (–32) **29.** –56; –8; –37; –388
b) (–132) + (+124)
c) (+987) + (–1 024)
d) (+235) + (–623)

- Qual é o resultado obtido em cada operação?

29. a) – 2 4 + – 3 2 =
29. b) – 1 3 2 + + 1 2 4 =
29. c) 9 8 7 + – 1 0 2 4 =
29. d) 2 3 5 + – 6 2 3 =

30 Reúna-se com um colega para resolverem o problema a seguir.

Camila estava manipulando uma calculadora e apertou algumas teclas nesta sequência:

– 1 2 3 = = =

Ela obteve o seguinte resultado:

–369

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Ao apertar essa sequência de teclas, que operação Camila efetuou? Justifiquem sua resposta.

31 Junte-se a um colega. Copiem o esquema a seguir e preencham com números inteiros as quadrículas pintadas de azul de modo que se obtenham sentenças verdadeiras nas linhas horizontais e verticais.

31. A resposta desta atividade está neste *Manual*.

	+56		–9	
–7	+		=	–17
	+18		–21	
	=		+	+9

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

32 *Hora de criar* – Com um colega, criem, cada um, um esquema semelhante ao do exercício anterior, troquem os cadernos para resolvê-lo e destroquem-nos para corrigi-lo. **32.** Resposta pessoal.

33 *Hora de criar* – Com um colega, elaborem, cada um, um problema sobre o percurso de um personagem (um estagiário entregando correspondências, por exemplo), no elevador de um edifício, desde a sua entrada no térreo (andar zero), percorrendo alguns andares, até sua saída, também no térreo. Esse percurso deve ser registrado por uma expressão com adições de números inteiros e com a soma. Depois troquem os problemas elaborados por vocês e cada um resolve o problema elaborado pelo outro e destroquem para corrigi-los. **33.** Resposta pessoal. A soma é zero.

Contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA04), atividades que solicitam a elaboração de questões, como os **exercícios 32** e **33**, colocam os estudantes como protagonistas de seu aprendizado. Discuta com eles a similaridade do percurso do estagiário no elevador com o percurso que se faz para a resolução da expressão numérica na reta numérica. O início e o término da andança no andar térreo implicam soma igual a zero.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Analisando tabelas

Luciano é dono de dois quiosques de sorvete localizados em dois parques. Para analisar a movimentação financeira no 1º quadrimestre de 2023 com a venda dos sorvetes, ele construiu uma tabela que mostra os lucros ou os prejuízos registrados em cada mês.

Venda de sorvetes (1º quadrimestre de 2023)		
Mês	**Lucro ou prejuízo com as vendas do quiosque 1 (em reais)**	**Lucro ou prejuízo com as vendas do quiosque 2 (em reais)**
Janeiro	22 450	15 632
Fevereiro	15 235	10 452
Março	7 230	8 259
Abril	–1 462	–1 174

Dados obtidos por Luciano.

Analisando essa tabela, Luciano pôde fazer algumas deduções. Por exemplo, ele percebeu que:

- os lucros nos quiosques foram maiores no mês de janeiro, seguidos pelo mês de fevereiro;
- o pior mês para o quiosque 1 foi abril;
- no mês de abril, as vendas caíram, e houve prejuízos em ambos os quiosques.

Também é possível determinar o valor acumulado, correspondente às movimentações dos dois quiosques, em cada mês.

- No mês de janeiro, houve o maior lucro, 38 082 reais, pois $22\,450 + 15\,632 = 38\,082$.
- No mês de abril, houve um prejuízo de 2 636 reais, pois $-1\,462 + (-1\,174) = -2\,636$.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Com base na tabela construída por Luciano, responda às questões.

a) Qual foi o lucro no mês de fevereiro? E no mês de março? **1. a)** 25 687 reais; 15 489 reais.

b) Qual foi o lucro, no período indicado, de cada quiosque? Qual dos dois quiosques teve o maior lucro? **1. b)** Quiosque 1: 43 453 reais e quiosque 2: 33 169 reais; quiosque 1.

c) Quanto Luciano lucrou no total ao final do 1º quadrimestre de 2023 nos dois quiosques? **1. c)** 76 622 reais.

d) A que pode ser atribuído o prejuízo obtido no mês de abril? **1. d)** Resposta pessoal.

2 No dia 4 de fevereiro de 2022, as medidas de temperaturas em algumas localidades do mundo variaram de acordo com a tabela.

Medidas de temperaturas registradas em algumas cidades do mundo no dia 4 de fevereiro de 2022		
Localidade	**Mínima registrada (°C)**	**Máxima registrada (°C)**
Cairo (Egito)	9	16
Pequim (China)	–6	1
Campo Grande (Brasil)	23	29
Quebec (Canadá)	–13	–11

Dados obtidos em: https://www.accuweather.com/. Acesso em: 4 fev. 2022.

a) Em qual dessas localidades foi registrada a menor medida de temperatura? E a maior? **2. a)** Quebec; Campo Grande.

b) Qual foi a variação da medida de temperatura em Quebec? **2. b)** 2 °C

c) Em quais dessas localidades ocorreu a maior variação nas medidas de temperatura registradas? **2. c)** Pequim e Cairo.

d) Escolha três cidades diferentes de qualquer lugar do mundo. Pesquise as medidas de temperaturas mínimas e as máximas registradas em um mesmo dia. Organize as informações em uma tabela e compartilhe o resultado com os colegas. **2. d)** Resposta pessoal.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF07MA04**.

Para complementar o trabalho proposto, sugira aos estudantes que, em grupos, selecionem dados de seu cotidiano que possibilitem o uso de números negativos. Depois, peça a eles que organizem esses dados em uma tabela e criem questões para serem resolvidas pelo outro grupo.

Por exemplo, os estudantes podem pesquisar, em estabelecimentos comerciais do bairro, o valor de 5 kg de arroz e registrar a variação em relação a um valor médio a ser determinado após a pesquisa. Quando o valor de 5 kg ultrapassar o preço médio, registra-se a diferença por meio de um número positivo (por exemplo, 3 reais seriam indicados por +3). Se o valor de 5 kg for inferior ao preço médio, registra-se a diferença com um número negativo (por exemplo, 5 reais seriam indicados por –5). Suponha que um grupo de estudantes tenha visitado seis estabelecimentos e registrado os seguintes dados:

Bela Mercearia (+6), Pérola (+1), Doçura (–4), Pingado (+3), Popular (0) e Grão de Ouro (–5).

Assim, eles poderiam propor questões do tipo:

- Qual mercearia apresentou o pacote de 5 kg de arroz com a maior variação em relação ao preço médio? (Bela Mercearia.)
- Com base na amostra de um único pacote de 5 kg de arroz, podemos afirmar que a Bela Mercearia é a que sempre vende o pacote de arroz com maior preço? (Não.)

Atividades de pesquisa como a proposta e a análise dos dados da situação apresentada contribuem para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

Para a resolução da **atividade 1** do **Agora quem trabalha é você!** os estudantes deverão compreender o conceito de lucro e prejuízo. No caso de Luciano, para obter os valores pedidos devem considerar a movimentação financeira dos dois quiosques.

As resoluções das **atividades 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Propriedades da adição

Contextualizar uma situação que represente a propriedade comutativa da adição implica a escolha de ações reversíveis. Por exemplo, propor problemas do tipo: "Uma pessoa viaja de automóvel da cidade A para a cidade B por certa estrada. Na ida, paga 9 reais no 1º pedágio e 13 reais no 2º pedágio. Na volta, pela mesma estrada, ela paga 13 reais no 1º pedágio e 9 reais no 2º. Essa pessoa pagou mais de pedágio para ir ou para voltar?" (Pagou o mesmo valor na ida e na volta.)

A propriedade do fechamento não foi considerada aqui porque não estamos realizando um estudo axiomático de teoria dos conjuntos.

Também para a propriedade associativa da adição, a contextualização pode ser feita de maneira simples e de fácil entendimento. Por exemplo, é possível apresentar uma situação em que um peso com medida da massa conhecida de 50 gramas é colocado em uma balança. Depois, acrescenta-se à balança outro peso de medida da massa 42 gramas e, em seguida, um terceiro peso de massa medindo 75 gramas. Verifica-se, então, que a soma das medidas das massas colocadas, nessa ordem, é igual a 167 gramas e anota-se: 50 + 42 + 75 = 167.

Os pesos são retirados da balança e recolocados em outra ordem para verificar que a soma se mantém. Anotam-se, então, as seis possibilidades:

50 + 42 + 75 = 167;
42 + 75 + 50 = 167;
75 + 50 + 42 = 167;
50 + 75 + 42 = 167;
42 + 50 + 75 = 167;
75 + 42 + 50 = 167.

Proponha à turma uma reflexão sobre a pergunta: que modificação a inclusão de um hipotético peso com massa medindo 0 grama faria no mostrador de uma balança? Eles devem chegar à conclusão de que "peso 0 não pesa na balança", não provocando, portanto, mudança na sua medição, ou seja, é um elemento neutro.

O estudo das propriedades da adição permite que os estudantes percebam diferentes modos de resolver um mesmo problema, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA05).

3 Analise a tabela, referente à movimentação financeira de duas lojas de brinquedos, no período de setembro a dezembro de determinado ano. Em seguida, responda às questões.

Lucro ou prejuízo com as vendas nas lojas de brinquedo (em reais)

Mês	Loja 1	Loja 2
Setembro	–5 800	–8 450
Outubro	29 135	2 225
Novembro	–4 230	–3 500
Dezembro	41 200	26 450

Dados obtidos pelo proprietário.

a) Em qual loja foi obtido o melhor desempenho no período observado? De quanto foi o lucro? **3. a)** Loja 1; 60 305 reais.

b) Em qual mês ocorreu o pior desempenho das duas lojas? De quanto foi o prejuízo total? **3. b)** Setembro; 14 250 reais.

c) Em qual loja houve maior queda no saldo de um mês para outro no período observado? De quanto foi essa queda? **3. c)** Loja 1; 33 365 reais.

d) Se você fosse o proprietário dessas lojas e tivesse de tomar uma decisão, qual das medidas a seguir você executaria? Justifique sua resposta. **3. d)** Resposta pessoal.
- Fechar a loja 2 para investir mais na loja 1; ou
- Permanecer com as duas lojas, fazendo um investimento maior na loja 2.

Propriedades da adição

Ao estudar a adição de números naturais, vimos que essa operação é comutativa e associativa e que o 0 (zero) é seu elemento neutro. Essas propriedades também são válidas para a adição de números inteiros.

Em uma adição de dois números inteiros, a ordem das parcelas não altera a soma.

Observe esta adição: (–20) + (+5) = (–15)
Trocando a ordem das parcelas, obtemos: (+5) + (–20) = (–15)
Portanto, (–20) + (+5) = (+5) + (–20).

Em uma adição de três ou mais números inteiros, podemos associá-los de modos diferentes sem alterar a soma.

Vamos calcular: (+3) + (–7) + (–2)

- Associamos as duas primeiras parcelas e adicionamos a terceira ao resultado:
  [(+3) + (–7)] + (–2) = (–4) + (–2) = (–6)
- Ou, então, associamos as duas últimas parcelas e adicionamos a primeira ao resultado:
  (+3) + [(–7) + (–2)] = (+3) + (–9) = (–6)

O número 0 (zero) é o **elemento neutro** da adição de números inteiros.

Acompanhe dois exemplos.

a) (+3) + 0 = 0 + (+3) = +3

b) (–10) + 0 = 0 + (–10) = –10

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

34 Empregando as propriedades da adição de números inteiros, resolva os itens a seguir.

a) Sabendo que (–185) + (+306) = 121, quanto vale (+306) + (–185)? **34. a)** 121

b) Sendo (–10) + (–8) + (+15) = –3, calcule (–8) + (+15) + (–10). **34. b)** –3

c) Considerando (+23) + [(–9) + (–4)] = 10, calcule [23 + (–9)] + (–4). **34. c)** 10

35 Resolva mentalmente e registre os resultados no caderno.

Determine o número que deve ser colocado no lugar de cada quadradinho.

a) (–16) + ■ = 0 **35. a)** +16 b) (–5) + (+12) + ■ = +12 **35. b)** +5 c) (–8) + (+5) + ■ = 0 **35. c)** +3

36 Observe como Jean e Laura calcularam o valor desta expressão:

$$\boxed{(+8) + (-2) + (-7) + (-8) + (+5) + (+7) + (+2) + (-3)}$$

Jean

$$(+8) + (-2) + (-7) + (-8) + (+5) + (+7) + (+2) + (-3) =$$

$$= \underbrace{(+8) + (-8)}_{0} + \underbrace{(-2) + (+2)}_{0} + \underbrace{(-7) + (+7)}_{0} + (+5) + (-3) =$$

$$= (+5) + (-3) = +2$$

Laura

$$\underbrace{(+8) + (-2)}_{(+6)} + \underbrace{(-7) + (-8)}_{(-15)} + \underbrace{(+5) + (+7)}_{(+12)} + \underbrace{(+2) + (-3)}_{(-1)} =$$

$$= \underbrace{(+6) + (-15)}_{(-9)} + \underbrace{(+12) + (-1)}_{(+11)} =$$

$$= (-9) + (+11) = +2$$

Agora, responda:

36. b) Jean: associativa e existência do elemento neutro; Laura: associativa.

a) Mesmo adotando estratégias diferentes, eles fizeram os cálculos corretamente? **36. a)** Sim.

b) Que propriedades da adição de números inteiros foram usadas por Jean e Laura?

c) Na sua opinião, quem fez os cálculos de modo mais prático? Justifique sua resposta. **36. c)** Resposta pessoal.

d) Existe outra maneira de fazer esses cálculos? Justifique sua resposta.

36. d) Sim. Justificativa possível: efetuar as operações da esquerda para a direita, na ordem em que elas aparecem.

37 Descubra os erros cometidos ao calcular o valor da expressão a seguir.

(+13) + (–4) + (–7) + (–2) + (+15) + (+2) + (–16) =

= (+9) + (–7) + (–2) + (+15) + (+2) + (–16) =

= (+2) + (+13) + (–18) = +3

37. Há dois erros: um na adição (+2) + (–16) = (–18), que é (–14); outro na adição (+2) + (+13) + (–18) = +3, que é –3.

Exercícios propostos

Observe aos estudantes que, nos **exercícios 34** e **35**, o que importa é identificar se há aplicação, e qual, de propriedade relativa à adição de números inteiros nas expressões dadas.

O **exercício 36** requer que os estudantes observem as resoluções e tirem as próprias conclusões. Esse é um momento de tomada de decisão, em que eles podem escolher o que consideram a melhor maneira de resolver, adquirindo autonomia.

Após a resolução desse exercício, converse com a turma sobre as diversidades de estratégias para atingir objetivos. É interessante que os estudantes observem que podem, em um primeiro momento, elaborar a resolução de um problema de mais de uma maneira válida. Contudo, devem procurar avançar na qualidade do procedimento de resolução reavaliando as suas escolhas.

Por apresentar diferentes maneiras de resolver um mesmo problema, esse exercício contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA05).

Outra oportunidade da busca de autonomia é a resolução do **exercício 37**, em que os estudantes precisam identificar erros. O cálculo correto da expressão é:

$(+13) + (-4) + (-7) + (-2) +$
$+ (+15) + (+2) + (-16) = \cancel{(+9)} +$
$+ \cancel{(-9)} + (+17) + (-16) = +1$

Esse tipo de atividade pode ser reaplicado em duplas ou trios de estudantes. Cada um elabora uma expressão numérica com adições de números inteiros, incluindo ou não um erro na respectiva resolução, e passa para um colega do grupo avaliar e, se necessário, corrigir.

38 Em determinado dia, a medida da temperatura em São Joaquim (SC) era de 3 °C negativos durante a madrugada. Pela manhã, subiu 2 graus e, à tarde, subiu mais 4 graus. **38. a)** Resposta possível: (–3) + (+2) + (+4)

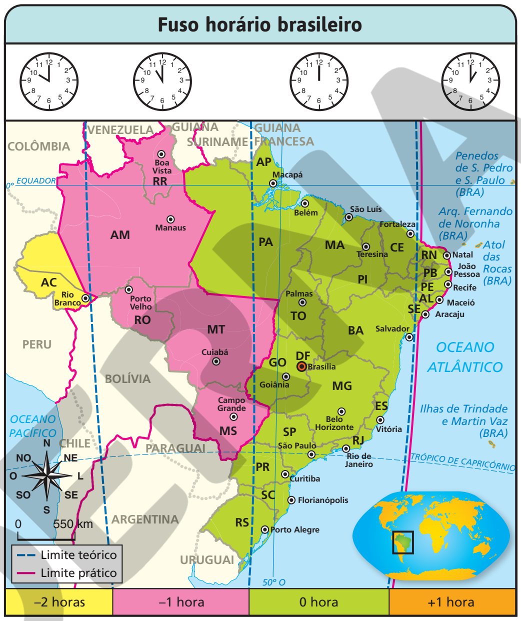
a) Escreva no caderno uma expressão que represente essa situação.

b) Resolva essa expressão e dê a medida de temperatura ao final do período apresentado. **38. b)** +3 °C

PARA SABER MAIS

Entendendo o fuso horário

Com o desenvolvimento das ferrovias, no século XIX, e a maior rapidez das viagens entre lugares distantes, tornou-se necessário o estabelecimento de um sistema mundial de hora legal. Para isso, foram criados, em 1884, os **fusos horários**, isto é, faixas imaginárias longitudinais (de um polo a outro da Terra), dividindo o mundo em 24 regiões. Em cada um dos fusos, todos os locais têm a mesma hora.



Elaborado com base em: Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Disponível em: http://7a12.ibge.gov.br/images/7a12/mapas/Brasil/brasil_fusos_horarios.pdf. Acesso em: 8 fev. 2022.

O Brasil é atravessado por quatro fusos, distinguidos nesse mapa por diferentes cores (amarela, rosa, verde e laranja). No alto do mapa, os relógios mostram os horários em cada faixa quando são 12 horas em Brasília. Na parte inferior, aparecem as diferenças em relação ao fuso que atravessa Brasília.

Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Para saber mais: **Respostas: a)** 11 h; 12 h; **b)** 17 h; **c)** Recife: 12 horas; Cuiabá: 11 horas; Boa Vista: 11 horas.

Reúna-se com um colega e façam o que se pede em cada item.

a) Quando são 10 horas em Manaus, que horas são em Recife? E em Fernando de Noronha?

b) Quando são 20 horas em Fernando de Noronha, que horas são em Rio Branco, no Acre?

c) Que horas serão em Recife e em Cuiabá quando forem 12 horas em Florianópolis? E em Boa Vista?

d) O município onde vocês moram pertence a que região? Quando são 10 horas em Fernando de Noronha, qual é o horário na região onde moram? **d)** Resposta pessoal.

24

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 38** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Para saber mais

Na seção são explicados os fusos horários que vigoram no Brasil. Explore-a fazendo mais perguntas sobre o horário em pontos variados do país. Se houver possibilidade, mostre o mapa-múndi com todos os fusos horários. Além de uma abordagem interdisciplinar com Geografia, História e Ciências, essa atividade possibilita estabelecer conexões entre as Unidades Temáticas **Números** e **Geometria**.

Solicite uma pesquisa, por exemplo, sobre os motivos políticos pelos quais o meridiano tomado como referência para a determinação do horário em outros países foi o de Greenwich, na Inglaterra.

É interessante também chamar a atenção para a história da determinação das longitudes e sua importância para a navegação e o comércio marítimo seguro, entre outros aspectos do contexto na época.

Comente com os estudantes que, por convenção cartográfica, todos os mapas devem apresentar orientação, como a rosa dos ventos ou o símbolo de norte, e escala, para fornecer a dimensão do que eles representam.

Proponha uma reflexão sobre o porquê de o fuso horário ter relação com os meridianos, e não com os paralelos latitudinais, e sobre a relação dessa opção com o movimento de rotação da Terra em torno do seu eixo imaginário, que passa pelos polos.

Para responder às atividades do **Agora é com você!**, verifique se os estudantes compreendem como fazer a leitura e interpretação do mapa que apresenta os fusos horários brasileiros. Se necessário, proponha-lhes que identifiquem cada estado e sua capital e discutam o significado das cores com as quais as regiões estão destacadas nesse mapa. Espera-se que eles identifiquem que há 4 fusos horários brasileiros e que o fuso horário indicado como “0 hora” corresponde ao fuso horário oficial brasileiro, que tem como base o horário em Brasília, DF. No **item a**, quando são 10 h em Manaus, são 11 h em Recife, pois 10 + 1 = 11, e em Fernando de Noronha, 2 fusos horários anteriores, são 12 h, pois 10 + 2 = 12. No **item b**, como Manaus está 3 fusos horários depois do fuso de Fernando de Noronha, deve-se efetuar 20 – 3 para obter o horário em Manaus, isto é, quando em Fernando de Noronha são 20 h, em Manaus são 17 h. No **item c**, como Florianópolis e Recife estão no mesmo fuso horário, as horas coincidem; logo, se em Florianópolis são 12 h, no Recife também são 12 h; Cuiabá e Boa Vista estão 1 fuso horário após o de Florianópolis; assim, nessas capitais serão 11 h quando em Florianópolis forem 12 h.

Para o **item d**, verifique se os estudantes conseguem indicar corretamente no mapa o fuso horário em que está localizado o município onde residem.

6 Subtração

Em determinado dia, a medida de temperatura em Londres era –3 °C e, em Magdeburgo, –12 °C. Nesse dia, um turista viajou de Londres para Magdeburgo e percebeu a mudança de temperatura.

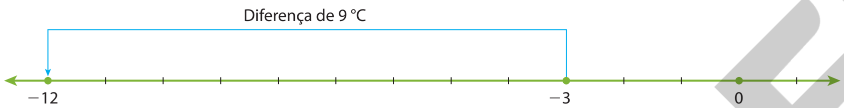
BJANKA KADIC/ALAMY/FOTOARENA

Passagem de pedestres ao lado do rio Tâmisa, em Londres, Inglaterra. (Fotografia de 2021.)

STEPHAN SCHULZ/PICTURE ALLIANCE/GETTY IMAGES

Praça da catedral com o edifício do Parlamento da cidade de Magdeburgo, Alemanha. (Fotografia de 2021.)

Observe como podemos representar a diferença entre as medidas de temperatura registrada em Magdeburgo (–12 °C) e a registrada em Londres (–3 °C) na reta numérica.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Analisando a reta numérica, concluímos que, na viagem de Londres para Magdeburgo, a medida de temperatura diminuiu 9 °C.

A operação que representa essa situação é a subtração: (–12) – (–3) = –9.

Agora, vamos ver como efetuar a subtração de dois números inteiros. Para isso, vamos considerar a subtração (+3) – (+2).

Note que –(+2) é o oposto de +2 e vale –2. Então, podemos dizer que (+3) – (+2) é o mesmo que (+3) + (–2). Logo, podemos efetuar essa subtração da seguinte maneira:

$$(+3) - (+2) = (+3) + (-2) = +1 = 1$$

Observe que adicionamos o primeiro número ao oposto do segundo.

Conferindo o cálculo da diferença das temperaturas:
(–12) – (–3) = (–12) + (+3) = –9

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Observe mais alguns exemplos.

a) $(+5) - (-4) = (+5) + (+4) = +9 = 9$

b) $(-7) - (+4) = (-7) + (-4) = -11$

A subtração de dois números inteiros é calculada adicionando-se o primeiro número ao oposto do segundo.

6. Subtração

Habilidades da BNCC: **EF07MA03** e **EF07MA04**.

Na abordagem de uma operação com números inteiros, agora com a subtração, novamente a reta numérica se faz presente como um instrumento facilitador da compreensão, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA03) e (EF07MA04).

É nessa operação, quando o subtraendo é maior do que o minuendo, que a existência do sinal no número ganha significado. Aqui entra em cena a ideia do credor/devedor. Para exemplificar, simule situações de movimentação financeira com saldos credores/devedores.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 39** e **41** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

O **exercício 40** apresenta uma situação contextualizada em que é preciso calcular a diferença entre as posições dos automóveis após os deslocamentos citados.

$90 - (-50) = 90 + 50 = 140$

A medida da distância entre eles é 140 km.

Caso proponha problemas semelhantes ao do **exercício 41**, sobre tempo de vida de personagens da história que nasceram antes de Cristo e morreram depois de Cristo, usando o calendário gregoriano, lembre-se de que esse calendário não tem o ano zero. Portanto, o tempo de vida de alguém que nasceu no ano –30 (30 a.C.) e morreu no ano +20 (20 d.C.) foi de 49 anos, e não de 50 anos.

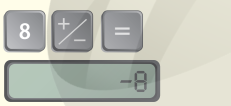
No **exercício 42**, a sequência das teclas leva a um resultado incorreto. Espera-se que os estudantes percebam que essa sequência levou a calculadora a efetuar o seguinte cálculo:

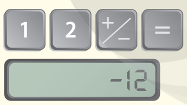
$(-8) + (-24) = -42$

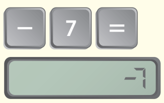
O **exercício 43** exige uma calculadora que tenha a tecla [+/–].

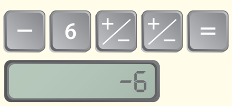
Explique aos estudantes que essa tecla muda o sinal do número que foi digitado antes, ou seja, pede o oposto do número que está no visor. Porém, vale observar que, dependendo da calculadora, o procedimento pode ser diferente.

Peça a eles que digitem na calculadora as seguintes teclas e analisem o resultado:

a) 

b) 

c) 

d) 

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

42. Não, pois o resultado correto seria 6. Espera-se que os estudantes percebam que a calculadora efetuou a seguinte operação: (–18) + (–24) = –42.

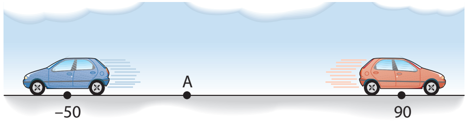
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

39 Efetue as subtrações a seguir. **39. e)** –98

a) (–15) – (–9) **39. a)** –6
b) (+12) – (–8) **39. b)** 20
c) (+14) – (+21) **39. c)** –7
d) (–18) – (–24) **39. d)** 6
e) (–48) – (+50)
f) (–106) – (–32) **39. f)** –74

40 Dois automóveis partem de uma mesma cidade A, mas em sentidos opostos. O primeiro percorre 50 km à esquerda de A, e o segundo, 90 km à direita de A. A que medida de distância um automóvel está do outro? **40.** A 140 km.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

41 Arquimedes, famoso matemático e inventor grego, nasceu em –287 (287 a.C.) e morreu em –212 (212 a.C.). Quantos anos ele viveu? **41.** 75 anos.

Retrato de Arquimedes, matemático grego.

HULTON-DEUTSCH COLLECTION/CORBIS/GETTY IMAGES

42 Você já aprendeu que podemos efetuar a adição de números inteiros usando uma calculadora. Realizando o mesmo procedimento, Felipe efetuou esta subtração:

(–18) – (–24)

Para isso, ele apertou esta sequência de teclas:

e obteve o seguinte resultado:

O resultado que Felipe obteve está correto? Se não, o que aconteceu?

43 Na calculadora de Júlia, há a tecla [+/–]. Usando essa tecla, Júlia efetuou a seguinte subtração:

(–18) – (–24)

Para isso, ela apertou estas teclas:

e obteve o seguinte resultado:

O resultado de Júlia está correto? Por que ela obteve um resultado diferente do de Felipe? **44.** Resposta pessoal.

43. Sim. Espera-se que os estudantes percebam que, ao apertar a tecla [+/–], Júlia atribuiu ao número o valor negativo. Desse modo, ao apertar [1] [8] [+/–], a calculadora registrou o número –18. Assim, quando Júlia apertou a sequência de teclas, a calculadora efetuou corretamente a operação, ou seja, (–18) – (–24) = 6.

44 ***Hora de criar*** – Com um colega, elaborem, cada um, um problema sobre subtração de números inteiros. Depois troquem os problemas elaborados por vocês e cada um resolve o problema elaborado pelo outro; destroquem para corrigi-los.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

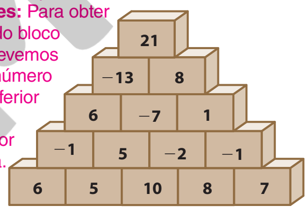
Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Junte-se a um colega para resolverem este problema.

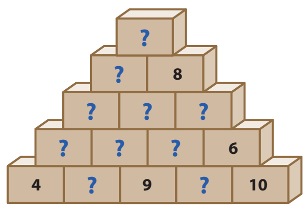
O empilhamento a seguir foi montado com fileiras de blocos numerados. Para formar as fileiras, há um segredo. Descubram qual é.

Pense mais um pouco...: **Orientações:** Para obter o número do bloco superior, devemos subtrair o número do bloco inferior à direita do bloco inferior à esquerda.



A resposta desta atividade está neste *Manual*.

Sabendo que o empilhamento a seguir tem o mesmo segredo, descubram o número correspondente a cada bloco.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

26

Atividades, como o **exercício 44**, que solicitam a elaboração de questões, conduzem os estudantes a serem protagonistas do próprio aprendizado e contribuem para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA04).

Pense mais um pouco...

Para trabalhar essa seção, organize os estudantes em duplas e peça a eles que construam duas "pilhas", criando um "segredo". A primeira pilha terá todos os números, e a segunda será incompleta. Cada dupla deverá trocar sua proposta com a de outra dupla para descobrir o segredo e, assim, completar a segunda pilha. A resolução dessa atividade está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

7 Adição algébrica

Observe esta expressão: $(+5) + (-10) - (-2) - (+4) + (-6)$.

Ela é formada apenas por adições e subtrações de números inteiros.

Para facilitar o cálculo de adições algébricas, podemos eliminar os parênteses. Para isso, adotamos os seguintes critérios:

- quando o sinal que precede os parênteses for **mais**, conservamos os sinais dos números que estão no interior dos parênteses, como nestes exemplos:

  a) $+(+9) = +9$ **b)** $+(-12) = -12$

- quando o sinal que precede os parênteses for **menos**, trocamos os sinais dos números que estão no interior dos parênteses, como nestes exemplos:

  a) $\underbrace{-(+9)}_{\text{oposto de } +9} = -9$ **b)** $\underbrace{-(-12)}_{\text{oposto de } -12} = +12$

Vamos calcular a adição algébrica vista anteriormente. Começamos eliminando os parênteses.

$(+5) + (-10) - (-2) - (+4) + (-6) = +5 - 10 + 2 - 4 - 6$

Agora, juntamos os números positivos e os números negativos.

$$\underbrace{+5 + 2}_{+7} \underbrace{- 10 - 4 - 6}_{-20} =$$

$$= +7 \quad -20$$

Para finalizar, podemos imaginar o número positivo como "pontos ganhos" e o número negativo como "pontos perdidos" e calcular o "saldo de pontos".

Então, $+7 - 20$ indica 7 pontos ganhos e 20 perdidos. Logo, o saldo de pontos é negativo e igual a -13, ou seja, $+7 - 20 = -13$.

Acompanhe outros exemplos de adição algébrica.

a) $(-12) + (-4) = -12 - 4 = -16$

b) $(-5) + (+5) = -5 + 5 = 0$

c) $(-5) + (+8) - (+1) = -5 + 8 - 1 = -6 + 8 = +2 = 2$

d) $(-2) - (-6) + (+3) = -2 + 6 + 3 = -2 + 9 = +7 = 7$

Observação

▶ Quando as parcelas de uma adição algébrica forem números opostos (simétricos), elas poderão ser canceladas, pois a soma de dois números opostos é igual a zero, e o zero é o elemento neutro da adição. Observe um exemplo.

$-15 + \cancel{54} + 16 - \cancel{54} - 120 =$

$= -15 + 16 - 120 =$

$= 16 - 135 =$

$= -119$

ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

7. Adição algébrica

Habilidade da BNCC: **EF07MA04**.

Para a eliminação de parênteses nas adições algébricas, uma analogia pode ser feita entre sentenças numéricas com sinais de números e frases. Por exemplo, considerando que o sinal "+" corresponde ao "lado direito" de uma blusa e o sinal "–" corresponde ao "lado avesso" de uma blusa, temos:

- "O avesso do avesso é o lado direito" $-(-8) = +8$.
- "O avesso do direito é o lado avesso" $-(+8) = -8$.
- "O direito do avesso é o lado avesso" $+(-8) = -8$.
- "O direito do direito é o lado direito" $+(+8) = +8$.

Proponha aos estudantes que experimentem dramatizar essa analogia substituindo a blusa por, por exemplo, um saquinho de papel que apresente diferença entre o lado interno e o externo. Solicite a eles que manipulem o saquinho expondo um lado de cada vez: interno/externo.

Há outras tantas experiências semelhantes, como a de virar e desvirar uma moeda dada com a cara para cima. Ao virar uma vez seguida de outra, tem-se a cara novamente para cima. Idem para a coroa (reverso da moeda).

Assim é fácil concluir que "o oposto do oposto de um número inteiro é o próprio número".

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 45**, **46**, **47**, **48**, **50**, **52** e **53** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

O **exercício 47** pede aos estudantes que formem pares em um grupo de quatro elementos, o que, ao todo, resultará em seis pares distintos. Pergunte a eles: "Quantas adições seriam feitas se fossem cinco cartões? Como fariam essa conta?".

Trabalhar a formação de duplas em um grupo de elementos é um bom desenvolvimento intuitivo da **análise combinatória**. Uma variação interessante desse exercício é apresentar previamente os resultados desejados e pedir a expressão algébrica que os forneça. Por exemplo:

Dados os números inteiros (-2), (-1), $(+4)$ e $(+3)$, obtenha o resultado indicado realizando a adição de três desses números em cada caso:

a) 0 **b)** +6 **c)** +1 **d)** +5

Respostas possíveis:

a) $(-2) + (-1) + (+3)$

b) $(-1) + (+4) + (+3)$

c) $(-2) + (-1) + (+4)$

d) $(-2) + (+4) + (+3)$

O **exercício 48** traz uma formulação invertida aos enunciados convencionais, o que remete à obtenção de um elemento desconhecido, uma incógnita, e se aproxima da linguagem algébrica.

Pode ser interessante abordar o **exercício 49** propondo aos estudantes que mantenham o contexto das situações e troquem apenas os dados numéricos de um item para o outro. Espera-se que percebam que as operações, salvo restrições de contextos, podem transitar em situações diversas.

O **exercício 50** traz uma sequência de números inteiros, que é uma progressão aritmética de razão igual a -5. Nele, mesmo sem o conhecimento formal sobre progressões aritméticas, os estudantes podem observar a lei de formação e, possivelmente, que a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma destes. O exercício pode ser ampliado solicitando aos estudantes que obtenham um termo anterior a 17 e um termo posterior a -18. Depois, eles devem calcular a soma dos termos obtidos.

49. a) $+25 - 19 = 6$; ganhou 6 pontos.
49. b) $-230 + 150 = -80$; deve 80 reais.
49. c) $10 - 15 = -5$; medida de temperatura é -5 °C.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

45 Efetue as adições algébricas.

a) $(+3) - (+5) - (-10)$ **45. a)** 8
b) $(+2) + (-6) - (+5) + (+2)$ **45. b)** -7
c) $(-5) - (-8) + (-7) - (-9) + (-3)$ **45. c)** 2
d) $(-2) - (-4) - (+7) - (-2) + (-12)$ **45. d)** -15

46 Efetue mentalmente as adições algébricas.

a) $-6 + 8 + 6 - 4 + 4 + 1$ **46. a)** 9
b) $4 - 9 + 2 - 1 + 9 - 2$ **46. b)** 3
c) $5 + 6 - 7 + 1 + 7 - 10$ **46. c)** 2
d) $12 - 6 + 5 - 5 + 6 - 12$ **46. d)** zero

47 Adicionamos dois a dois, de todos os modos possíveis, os números indicados nos cartões:

-15	9	-8	-2

Quais são os resultados obtidos?
47. -6, -23, -17, 1, 7, -10

48 Qual é o número que devemos adicionar a:

a) -10 para obter $+3$? **48. a)** 13
b) -12 para obter -2? **48. b)** 10
c) $+6$ para obter -9? **48. c)** -15
d) -5 para obter -10? **48. d)** -5

49 Para cada situação a seguir, crie uma operação usando números inteiros. Interprete o resultado de acordo com a situação.

a) Em um jogo, Carlos ganhou 25 pontos e, depois, perdeu 19.
b) Cristiano devia 230 reais para seu primo. Já pagou 150 reais.
c) Ontem a medida da temperatura era 10 °C e caiu 15 °C durante a madrugada.
d) Antes de depositar 360 reais em sua conta, Ana verificou que o saldo estava negativo em 135 reais. **49. d)** $360 - 135 = 225$; saldo de 225 reais.

50 Observe a sequência numérica e responda às questões. **50. a)** Subtraindo-se 5 unidades de cada termo a partir do primeiro.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

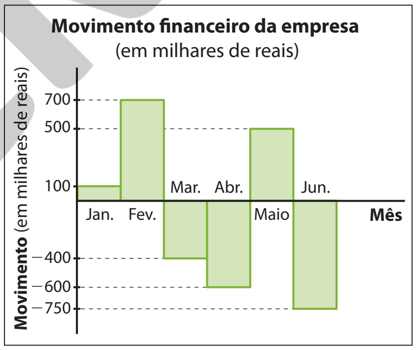
a) Como essa sequência foi formada?
b) Adicione os números que estão nas figuras de cores iguais. Que resultado você obteve?
50. b) -1

51 Os bancos oferecem a seus clientes um serviço denominado cheque especial. Com ele, o cliente pode retirar mais dinheiro do que tem na conta, pois o banco oferece como empréstimo a quantia retirada a mais cobrando algumas taxas. Mas atenção: cheque especial só deve ser utilizado como um último recurso, pois as taxas pagas costumam ser altas. Sabendo que João é um cliente que tem cheque especial e que hoje tem no banco 5 000 reais, responda às questões.

51. b) -750 reais.

a) Ao pagar uma conta de 2 720 reais, João ficou com que quantia na conta? **51. a)** 2 280 reais.
b) Depois de alguns dias, ele pagou mais três contas, no valor de 1 500 reais, 850 reais e 680 reais. Qual é o novo saldo?
c) Se o limite do cheque especial de João é de 2 000 reais, podemos dizer que ele ultrapassou o limite? Se não, quanto sobrou do seu limite? **51. c)** Não; 1 250 reais.
d) Como João utilizou uma parte do seu limite no cheque especial, ele deverá pagar uma quantia, em real, ao banco. Se o banco cobrar, por mês, 150 reais de taxa, quanto ele deverá depositar em sua conta, dentro de um mês, para pagar a dívida com o banco?
51. d) 900 reais.

52 Um empresário registrou no gráfico a seguir o movimento financeiro de sua empresa, no 1º semestre do ano.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pelo empresário.

52. a) Fevereiro. **52. b)** Junho.

Responda às questões de acordo com o gráfico.

a) Em que mês a empresa obteve maior lucro?
b) Em que mês ela sofreu maior prejuízo?
c) Ao final do semestre, a empresa registrava lucro ou prejuízo? De quanto?
52. c) Prejuízo; de 450 mil reais.

53 ***Hora de criar*** – Com um colega, elaborem, cada um, um problema que envolva adição algébrica de números inteiros. Depois troquem os problemas elaborados por vocês e cada um resolve o problema elaborado pelo outro; destroquem para corrigi-los.
53. Resposta pessoal.

No **exercício 51** é abordada a explicação de **cheque especial**. Como atividade extra, organize os estudantes em grupos para criar uma situação-problema com dados hipotéticos da conta bancária de uma pessoa e depois resolvê-la. Cada grupo pode apresentar seu trabalho para toda a turma.

Em seguida, encaminhe uma discussão sobre os gastos de uma família e o momento ideal para o uso do cheque especial. Podem ser abordados tópicos como o exagerado consumismo que permeia as sociedades atuais e a importância de saber economizar. Ao conversar sobre essa realidade, contribui-se para o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

Pense mais um pouco... FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Recorte nove fichas quadradas (de mesmo tamanho) de papel. Escreva nelas os números inteiros –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2 e 3. Use um número para cada ficha.

Acomode as fichas formando um quadrado, de modo que a soma algébrica nas verticais, nas horizontais e nas diagonais seja sempre –3.

Esse é um **quadrado mágico**.

2 Recorte novas fichas quadradas, adicionando a cada número dado na atividade **1** outro número, a sua escolha, e forme um novo quadrado mágico.

(Use tesoura com ponta arredondada e a manuseie com cuidado!)

Pense mais um pouco...: **1.** Resposta possível:

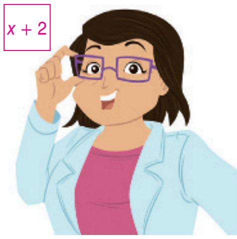
–4	1	0
3	–1	–5
–2	–3	2

2.

$x - 4$	$x + 1$	$x + 0$
$x + 3$	$x - 1$	$x - 5$
$x - 2$	$x - 3$	$x + 2$

8 Multiplicação

Para avançar no conhecimento da Matemática, em geral recorremos ao que já conhecemos. É como construir uma parede: assentam-se os novos tijolos sobre aqueles que já estão assentados. Para estudar a multiplicação entre números inteiros, vamos recordar essa operação com números naturais.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Quando estudamos os números naturais, vimos que a multiplicação equivale à adição de parcelas iguais. Por exemplo:

$$5 \cdot 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20$$

Ao estudar os números inteiros, no decorrer deste capítulo, vimos que:

- o oposto de um número positivo é um número negativo (exemplo: $-(+3) = -3$);
- o oposto de um número negativo é um número positivo (exemplo: $-(-3) = 3$).

Agora, observe estas multiplicações.

a) $(+2) \cdot (+4) = 2 \cdot (+4) = (+4) + (+4) = +8 = 8$

Portanto, $(+2) \cdot (+4) = 8$.

Multiplicamos dois números positivos, e o resultado foi um número positivo.

b) $(+2) \cdot (-4) = 2 \cdot (-4) = (-4) + (-4) = -8$

Portanto, $(+2) \cdot (-4) = -8$.

Multiplicamos um número positivo por um número negativo, e o resultado foi um número negativo.

c) O produto $(-2) \cdot (+4)$ pode ser representado por $-(+2) \cdot (+4)$.

Como $(+2) \cdot (+4) = 8$, obtemos: $-[(+2) \cdot (+4)] = -8$.

Portanto, $(-2) \cdot (+4) = -8$.

Multiplicamos um número negativo por um número positivo, e o resultado foi um número negativo.

Pense mais um pouco...

Na **atividade 2**, há um procedimento para a construção de um quadrado mágico com base em outro já conhecido. Trata-se de uma aplicação do Princípio Aditivo da Igualdade. Observe que na **atividade 1** temos a possibilidade de construir um quadrado mágico de soma –3; por exemplo:

$2 + (-1) + (-4) =$
$= (-2) + (-1) + 0$

Na **atividade 2**, temos:

$(x + 2) + [x + (-1)] + [x + (-4)] =$
$= [x + (-2)] + [x + (-1)] + (x + 0)$,

ou seja, da igualdade da **atividade 1** para a da **atividade 2** houve uma adição de $3x$ em ambos os membros.

8. Multiplicação

Habilidades da BNCC: **EF07MA03**, **EF07MA04** e **EF07MA05**.

Ao resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, para subsidiar a abordagem da multiplicação dos números inteiros, o estudante amplia o desenvolvimento das habilidades (EF07MA03) e (EF07MA04).

Ao ampliar o conjunto de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, algumas operações efetuadas tornam-se abstratas e podem se distanciar de uma representação concreta de quantidades. Ao introduzir o estudo da multiplicação de números inteiros, fique atento às dificuldades que os estudantes apresentam em decorrência do uso mecânico das regras de sinais da multiplicação em situações de adição e vice-versa.

É importante sempre manter a compreensão das operações, mesmo que se faça uso das regras de sinais.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 56**, **57** e **58** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Uma variação para o **exercício 55** é pedir aos estudantes que determinem todas as multiplicações de dois números inteiros cujo resultado seja igual a (–16):

- (+1) · (–16)
- (–1) · (+16)
- (+2) · (–8)
- (–2) · (+8)
- (–4) · (+4)

Após determinarem as possibilidades, identificarão a resposta para o problema proposto:

(+2) + (-8) = –6

(+2) · (-8) = –16

Assim, o estudante antecipa de maneira intuitiva a decomposição de um número inteiro em fatores.

Outra antecipação, compatível com o acúmulo de conteúdo do estudante deste ano – a resolução de equação do 1º grau com uma incógnita –, é oferecida pelo **exercício 56**.

O **exercício 57** diversifica na linguagem de fluxograma o cálculo do valor de uma expressão numérica com números inteiros.

No **exercício 58**, analise as diferentes estratégias de resolução possíveis para o **item a**, ampliando o repertório de estratégias de resolução dos estudantes. Um modo de resolvê-lo consiste em começar com uma tentativa (considerando o acerto total das 20 questões e totalizando 60 pontos) e depois completar as linhas de uma tabela cujas colunas tenham os títulos: Questões corretas, Questões erradas, Pontos obtidos com questões corretas, Pontos obtidos com questões erradas e Pontuação final.

Seguindo essa ordem de colunas, as três primeiras linhas terão os seguintes dados:

- 1ª linha: 20, 0, 60, 0 e 60
- 2ª linha: 19, 1, 57, 2 e 55
- 3ª linha: 18, 2, 54, 4 e 50

Os estudantes devem completar a tabela proposta e observar que, para cada duas questões erradas, a pontuação diminui 10 pontos. Assim, para chegar à pontuação desejada (30), Henrique deve ter acertado 14 questões e errado 6 delas. De fato, 14 · (+3) – 2 · (6) = 42 – 12 = 30.

d) O produto (–2) · (–4) pode ser representado por (+2) · (–4).

Como (+2) · (–4) = –8, obtemos: –[(+2) · (–4)] = –(–8) = +8 = 8.

Portanto, (–2) · (–4) = 8.

Multiplicamos dois números negativos, e o resultado foi um número positivo.

> Em qualquer multiplicação de números inteiros diferentes de zero, temos:
> - o produto de dois números de **mesmo sinal** é um **número positivo**;
> - o produto de dois números de **sinais diferentes** é um **número negativo**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

54 Determine os produtos e escreva a resposta no caderno.

a) (–5) · (+6) **54. a)** –30
b) (–5) · (–6) **54. b)** 30
c) (–6) · (–8) **54. c)** 48
d) (–2) · (–1) **54. d)** 2
e) (+3) · (+7) **54. e)** 21
f) (–9) · (+2) **54. f)** –18
g) 0 · (–4) **54. g)** 0
h) (–34) · (+2) **54. h)** –68

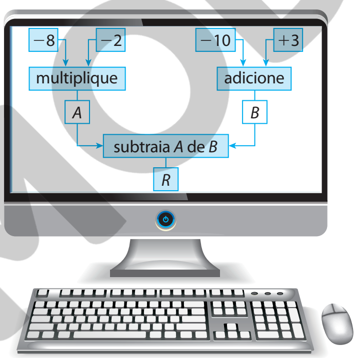
55 Descubra dois números cuja soma seja –6 e cujo produto seja –16. **55.** +2 e –8

56 Determine mentalmente o valor do fator desconhecido, representado por uma letra, nos casos a seguir. **56. a)** 1 **56. b)** –1

a) (–8) · *x* = (–8)
b) (–4) · *y* = (+4)
c) (–5) · *z* = 0 **56. c)** 0
d) (+9) · *t* = (+9) **56. d)** 1
e) (+6) · *n* = 0 **56. e)** 0
f) 0 · *m* = 0

56. f) *m* é qualquer número inteiro.

57 Siga as instruções do fluxograma para obter o valor de *R*.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

57. *R* = –23

58 Em determinado jogo, cada participante deve responder a 20 questões. A cada resposta correta, ganham-se 3 pontos e, a cada resposta incorreta, perdem-se 2 pontos.

a) Quantas questões Henrique acertou se ele marcou 30 pontos? **58. a)** 14 questões.
b) É possível que alguém termine esse jogo com zero ponto? Quantas questões essa pessoa teria acertado? **58. b)** Sim; 8 questões.
c) Quantas questões uma pessoa pode ter acertado se ela marcou –15 pontos?
d) Juliano disse que marcou –4 pontos. Ele está correto? Por quê? **58. d)** Não, pois não é possível marcar –4 pontos nesse jogo.

58. c) 5 questões.

59 Usando uma calculadora com a tecla [+/–], podemos efetuar multiplicações com números inteiros. Acompanhe alguns exemplos.

(–8) · (+2)

[8] [+/–] [×] [2] [=] –16

(+5) · (–6)

[5] [×] [6] [+/–] [=] –30

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Que teclas devem ser apertadas para efetuar as multiplicações a seguir? E qual será o resultado dessas operações?

a) (+5) · (+6)
b) (–4) · (–9)
c) (+3) · (–8) · (–6)
d) (–7) · (–5) · (–6)

59. a) [5] [×] [6] [=]; 30
59. b) [4] [+/–] [×] [9] [+/–] [=]; 36
59. c) [3] [×] [8] [+/–] [×] [6] [+/–] [=]; 144
59. d) [7] [+/–] [×] [5] [+/–] [×] [+/–] [6] [=]; –210

O **exercício 59** sugere o uso de calculadora e, mais uma vez, da tecla [+/–]. Verifique se os estudantes compreenderam de fato seu significado. Convém observar que, dependendo da calculadora, o procedimento pode ser diferente.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

Reúna-se com um colega para resolverem este problema.

b) Não. Como um dos fatores está entre –7 e –1, o 2º jogador sabe que esse fator é negativo. Sobre o outro fator nada pode ser afirmado.

Bruna e Carlos estão jogando conforme as seguintes regras:

- O 1º jogador (o desafiante) escolhe um número inteiro entre –50 e 50 e o decompõe em dois fatores. Deve escrever o número e os fatores em um papel e guardá-lo.
- Obrigatoriamente, pelo menos um dos fatores deve ser negativo.
- O 2º jogador deve encontrar o produto e os fatores, registrando as tentativas.
- Para cada tentativa, o desafiante indica os acertos e dá dicas sobre os demais valores: diz se o produto e cada fator são maiores ou menores que os escolhidos.
- Com as dicas, o 2º jogador deve fazer tentativas até encontrar os fatores escolhidos.
- Em seguida, invertem-se as posições.
- Vence o jogo aquele que descobrir os fatores no menor número de tentativas.

Pensando na estrutura do jogo, respondam: **Respostas: a)** O outro fator tem de ser negativo e pode ser qualquer número inteiro maior que –50 e menor que zero.

a) O 2º jogador sabe que um dos fatores é zero. O que ele pode afirmar sobre o outro fator?

b) O 2º jogador sabe que um dos fatores está entre –7 e –1. Ele pode afirmar que o produto é negativo?

c) O 2º jogador sabe que o produto não é negativo. O que pode afirmar sobre os fatores?

d) O 2º jogador diz corretamente os dois fatores, em determinada ordem. Se ele tivesse dito os mesmos fatores na ordem inversa, teria errado? **d)** Não.

c) Como pelo menos um dos fatores deve ser negativo, ou os dois fatores são negativos (produto positivo), ou um dos fatores é zero (produto zero).

Propriedades da multiplicação

Ao estudar a multiplicação de números naturais, vimos que essa operação é comutativa e associativa e que o número 1 é seu elemento neutro. Essas propriedades também são válidas para a multiplicação de números inteiros.

> Em uma multiplicação de dois números inteiros, a ordem dos fatores não altera o produto.

Observe esta multiplicação: $(-20) \cdot (+5) = -100$.

Trocando a ordem dos fatores, obtemos $(+5) \cdot (-20) = -100$.

Portanto, $(-20) \cdot (+5) = (+5) \cdot (-20)$.

> Em uma multiplicação de três ou mais números inteiros, podemos associá-los de modos diferentes sem alterar o produto.

Vamos calcular $(+3) \cdot (-7) \cdot (-2)$.

- Associamos os dois primeiros fatores e, pelo resultado, multiplicamos o terceiro:

$$\underbrace{[(+3) \cdot (-7)]} \cdot (-2) =$$
$$= [-21] \cdot (-2) =$$
$$= +42$$

- Ou, então, associamos os dois últimos fatores e multiplicamos o primeiro pelo resultado:

$$(+3) \cdot \underbrace{[(-7) \cdot (-2)]} =$$
$$= (+3) \cdot [+14] =$$
$$= +42$$

Pense mais um pouco...

Esta atividade propõe de maneira lúdica, por meio de um jogo, o trabalho com composição e decomposição de números inteiros.

Avalie a possibilidade de colocar em prática na sala de aula duplas de estudantes praticando esse jogo, com a aplicação de uma amplitude maior dos números considerados (–50 a +50).

Propriedades da multiplicação

A propriedade do fechamento não foi considerada aqui porque não estamos realizando um estudo axiomático de teoria dos conjuntos.

É importante explicar aos estudantes que, dependendo da maneira como associamos os fatores, os cálculos com números inteiros tornam-se mais simples. Essa propriedade é útil quando realizamos cálculos mentais envolvendo a multiplicação. É conveniente associarmos fatores cujo produto seja um múltiplo de 10, pois na continuidade da resolução o fator que é potência de 10 facilita o cálculo mental.

O estudo das propriedades das operações permite aos estudantes perceberem que um mesmo problema possa ser resolvido de diferentes maneiras, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA05).

Propriedades da multiplicação

Proponha à turma, para reflexão, a questão: Por que o número –1 não é considerado elemento neutro da multiplicação no conjunto dos números inteiros?

Espera-se que os estudantes percebam que, embora o número –1, como fator, não modifique no aspecto quantitativo o produto em relação ao outro fator, ele modifica o sinal, ou seja, faz com que o produto tenha sinal contrário ao do outro fator.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 60** e **64** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Acompanhe a resolução do **exercício 61** com o objetivo de identificar se os estudantes compreenderam as propriedades aplicadas em cada item. Caso tenham dificuldades em identificá-las, apresente alguns exemplos na lousa propondo que diferentes estudantes identifiquem a propriedade aplicada.

No **exercício 62**, eles usarão a calculadora para resolver as multiplicações. Convém observar que, dependendo da calculadora, o procedimento pode ser diferente.

O **exercício 63** proporciona aos estudantes a análise das resoluções das operações e a posterior seleção da melhor estratégia. Essa tomada de decisão será trabalhada no **exercício 64**, promovendo, assim, a autonomia dos estudantes.

Para o **item b** do **exercício 63** os estudantes poderão apresentar diferentes justificativas. É importante que utilizem argumentos válidos para as mesmas.

O número 1 é o **elemento neutro** da multiplicação de números inteiros.

Observe dois exemplos.

a) $(+5) \cdot 1 = 1 \cdot (+5) = +5 = 5$

b) $(-4) \cdot 1 = 1 \cdot (-4) = -4$

Para a multiplicação de números inteiros, também vale a propriedade distributiva em relação à adição algébrica.

Na multiplicação de um número inteiro por uma adição algébrica, podemos multiplicar esse inteiro pelos termos da adição algébrica e, depois, adicionar os resultados.

Observe alguns exemplos.

a) $4 \cdot (7 - 10) =$
$= 4 \cdot 7 + 4 \cdot (-10) =$
$= 28 - 40 =$
$= -12$

b) $-5 \cdot (-9 + 2) =$
$= -5 \cdot (-9) - 5 \cdot (+2) =$
$= 45 - 10 =$
$= 35$

c) $-2 \cdot (-5 - 6) =$
$= -2 \cdot (-5) - 2 \cdot (-6) =$
$= 10 + 12 =$
$= 22$

63. a) Resposta possível: Pedro usou a propriedade distributiva para fazer os cálculos. Daniela efetuou inicialmente a operação entre parênteses e, depois, a multiplicação.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

60 Calcule mentalmente.

a) Sabendo que $(-80) \cdot (+62) = -4960$, quanto vale $(+62) \cdot (-80)$? **60. a)** –4 960

b) Sendo $(-10) \cdot [(-8) \cdot (+15)] = 1200$, calcule $[(-10) \cdot (-8)] \cdot (+15)$. **60. b)** 1 200

61 Identifique as propriedades empregadas na resolução das multiplicações a seguir.

a) $-2 \cdot (-7 - 8) =$ **61. a)** Distributiva.
$= -2 \cdot (-7) - 2 \cdot (-8) =$
$= 14 + 16 = 30$

b) $(-10) \cdot (-5) \cdot (-2) =$ **61. b)** Associativa.
$= (-10) \cdot (+10) = -100$

c) $(-4) \cdot (-1) \cdot (-8) \cdot (+1) =$ **61. c)** Elemento neutro e associativa.
$= (-4) \cdot (-1) \cdot (-8) =$
$= (-4) \cdot (+8) = -32$

62 Acompanhe como Márcio efetuou a multiplicação $(-9) \cdot (+5) \cdot (-1)$ usando uma calculadora.

9 +/– × 5 +/– = 45

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

62. Associativa, ao calcular mentalmente $(+5) \cdot (-1) = -5$.

Nesse cálculo, ele usou uma propriedade da multiplicação. Que propriedade é essa?

63 Observe como Pedro e Daniela efetuaram a mesma operação.

• Pedro

$(-7) \cdot (-4 + 2) =$
$= -7 \cdot (-4) - 7 \cdot (+2) =$
$= 28 - 14 = 14$

• Daniela

$(-7) \cdot (-4 + 2) =$
$= -7 \cdot (-2) = 14$

ILUSTRAÇÕES: LIGIA DUQUE/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, resolva.

a) Descreva os procedimentos usados por Pedro e por Daniela.

b) Em sua opinião, quem fez o cálculo do modo mais prático? Justifique sua resposta.

63. b) Resposta pessoal.

64 Usando o método de Pedro ou o de Daniela, efetue as multiplicações no caderno.

a) $(-9) \cdot (-6 + 5)$ **64. a)** 9

b) $(-25) \cdot (-10 - 1)$

c) $(-34) \cdot (5 + 2)$

d) $(+25) \cdot (-12 + 2)$

e) $(+10) \cdot (-23 + 54)$

f) $0 \cdot (+9 - 1)$ **64. f)** 0

64. b) 275 **64. c)** –238 **64. d)** –250 **64. e)** 310

9 Divisão

Considerando que a divisão é a operação inversa da multiplicação, sabemos, por exemplo, que:

$$18 : 3 = 6, \text{ porque } 6 \cdot 3 = 18$$

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Em uma divisão entre dois números inteiros diferentes de zero, temos:

- quociente **positivo** quando esses números (dividendo e divisor) são de **mesmo sinal**;
- quociente **negativo** quando esses números (dividendo e divisor) são de **sinais diferentes**.

Observe outros exemplos.

a) $(+60) : (-15) = -4$, porque $(-4) \cdot (-15) = +60$.

b) $(-30) : (+10) = -3$, porque $(-3) \cdot (+10) = -30$.

c) $(+80) : (+20) = +4$, porque $(+4) \cdot (+20) = +80$.

d) $(-65) : (-13) = +5$, porque $(+5) \cdot (-13) = -65$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

68. *U*: $(-5) + 2 = -3$; *O*: $24 : 4 = 6$; *Z*: $(-5) - (-4) = -1$; *A*: $(-3) : (-3) = 1$; *D*: $(-1) \cdot (-4) = 4$; *R*: $(-6) : 3 = -2$; *L*: $(-6) : (-2) = 3$; O nome do colega de Carla é Urzaldo.

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

65 Efetue as divisões.

a) $(+9) : (-9)$ **65. a)** -1
b) $(-8) : (-8)$ **65. b)** 1
c) $0 : (+7)$ **65. c)** 0
d) $(-48) : (+12)$ **65. d)** -4
e) $(-50) : (-5)$ **65. e)** 10
f) $(+112) : (-56)$ **65. f)** -2
g) $(-108) : (+27)$ **65. g)** -4
h) $(+35) : (+7)$ **65. h)** 5
i) $(+72) : (+36)$ **65. i)** 2
j) $(-90) : (-10)$ **65. j)** 9

66 Determine o valor do termo desconhecido, representado pela letra, em cada caso.

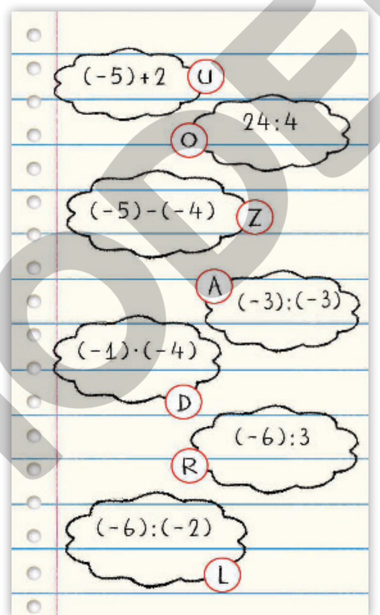
a) $x : (-8) = -6$ **66. a)** 48
b) $y : 9 = -7$ **66. b)** -63
c) $t : (-3) = -24$ **66. c)** 72
d) $z : (-13) = 12$ **66. d)** -156

67 Determine o quociente entre dois números não nulos:

a) quando esses números são iguais; **67. a)** 1
b) quando esses números são opostos. **67. b)** -1

68 Carla e Joana são duas amigas que adoram decifrar códigos. Carla conheceu um garoto com um nome bastante diferente e propôs a Joana um desafio para descobrir o nome dele.

Determine o resultado de cada operação que está ligada a uma letra. No caderno, coloque esses resultados em ordem crescente e troque pela letra correspondente.



LIGIA DUQUE/ARQUIVO DA EDITORA

- Qual é o nome do colega de Carla?

9. Divisão

Habilidades da BNCC: **EF07MA03** e **EF07MA04**.

Ao resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, para subsidiar a abordagem da multiplicação dos números inteiros o estudante amplia, para o campo dos números inteiros, o desenvolvimento das habilidades EF07MA03 e EF07MA04.

Como nas operações anteriores, tome como ponto de partida a divisão estudada no conjunto dos números naturais e acrescente os significados dos sinais, se possível com uma situação contextualizada que seja verossímil.

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 66** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Amplie o **exercício 67** pedindo aos estudantes que obtenham todos os resultados possíveis da divisão de $(|x|)$ por (x), em que x representa um número inteiro não nulo. Um modo de abordar a questão é escolher um valor inteiro para x e analisar as possibilidades decorrentes dessa escolha; por exemplo:

- $x = -2$; nesse caso, $|-2| = 2$, e a divisão torna-se $2 : (-2) = -1$;
- $x = 2$; nesse caso, $|2| = 2$, e a divisão torna-se $2 : 2 = 1$.

Portanto, os resultados possíveis são -1 e 1.

Para trabalhar o **exercício 68**, organize os estudantes em duplas ou grupos e crie um código para todo o alfabeto. Depois, cada dupla ou grupo escreve uma frase (ou uma palavra) com esse código. Escreva as frases na lousa para a turma tentar adivinhar seu significado.

10. Expressões numéricas

Habilidades da BNCC:
EF07MA03 e **EF07MA04**.

Escreva na lousa, com o apoio dos estudantes, algumas **expressões numéricas**. Comece com um estudante escrevendo um número inteiro, seguido de outro estudante que escreve, por exemplo, uma adição cuja soma seja o número escrito anteriormente. Siga com outros estudantes, cada um reescrevendo a expressão anterior e acrescentando, com sinais de agrupamento (parênteses, colchetes e chaves), outro cálculo ou substituindo um dos números por uma operação cujo resultado seja o número substituído, até onde achar conveniente.

Depois, outro estudante é convidado a iniciar a resolução, seguido de outros que, passo a passo, continuam a resolução até chegar ao número inicial.

Distribua fichas com expressões numéricas para que, em duplas, os estudantes elaborem situações-problema cuja resolução ocorra pela expressão dada em cada ficha.

10 Expressões numéricas

Já aprendemos que, para resolver uma expressão numérica, eliminamos os sinais de associação respeitando a seguinte ordem: parênteses, colchetes e chaves. Devemos nos lembrar também de obedecer aos procedimentos relativos aos símbolos + ou – que precedem os parênteses, colchetes e chaves.

Como exemplo, vamos resolver algumas expressões.

a) $10 - [-8 + (-18 + 6)] =$

$= 10 - [-8 + (-12)] =$

$= 10 - [-8 - 12] =$

$= 10 - [-20] =$

$= 10 + 20 =$

$= 30$

Resolvemos o que está entre parênteses: $-18 + 6 = -12$.

Eliminamos os parênteses.

Resolvemos o que está entre colchetes: $-8 - 12 = -20$.

Eliminamos os colchetes.

b) $-4 + \{5 - [3 - (-7 + 9)]\} =$

$= -4 + \{5 - [3 - (+2)]\} =$

$= -4 + \{5 - [3 - 2]\} =$

$= -4 + \{5 - [+1]\} =$

$= -4 + \{5 - 1\} =$

$= -4 + \{4\} =$

$= -4 + 4 = 0$

Resolvemos o que está entre parênteses: $-7 + 9 = 2$.

Eliminamos os parênteses.

Resolvemos o que está entre colchetes: $3 - 2 = 1$.

Eliminamos os colchetes.

Resolvemos o que está entre chaves: $5 - 1 = 4$.

Eliminamos as chaves.

c) $2 + (-12) : (-3) - (-5) \cdot (+1) =$

$= 2 + (+4) - (-10) =$

$= 2 + 4 + 10 =$

$= 16$

Efetuamos a divisão e a multiplicação.

Eliminamos os parênteses.

d) $-12 + [(-7 - 3) : (-2)] =$

$= -12 + [(-10) : (-2)] =$

$= -12 + [(+5)] =$

$= -12 + 5 =$

$= -7$

Efetuamos a operação entre parênteses.

Efetuamos a operação entre colchetes.

Eliminamos os colchetes.

ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

69 Resolva as seguintes expressões.

a) 14 – (–10 + 5 + 3) **69. a)** 16

b) –15 + [–4 – (–5 + 20)] **69. b)** –34

c) 20 – {–10 + [+20 – (–20 + 10)]} **69. c)** 0

d) –12 + (–6) – [(–8 – 5)] **69. d)** –5

70 Efetue cada operação a seguir.

a) (–1) · (–1) · (–1) · (–1) · (–1) **70. a)** –1

b) –5 + (–3) · (+8) **70. b)** –29

c) (–6) · (+5) – (–4) · (+3) **70. c)** –18

d) (–5 + 1) · (–8 + 2) **70. d)** 24

e) 6 – (–6 + 4) · (–5 + 9) **70. e)** 14

f) –3 – 3 · (–3) **70. f)** 6

71 Roberto lançou 15 vezes uma moeda e obteve os resultados que estão no quadro.

Cara	10
Coroa	5

Para cada cara, Roberto ganha 7 pontos e, para cada coroa, perde 9 pontos.

a) Represente com um número positivo e um número negativo o total de pontos ganhos e o total de pontos perdidos. **71. a)** +70 e –45

b) Crie uma expressão que forneça o saldo de pontos obtidos por Roberto.

c) Qual foi o saldo de pontos obtidos por Roberto nessa jogada? **71. c)** +25

d) Qual é a pontuação máxima que Roberto poderia conseguir? E a mínima? **71. d)** +105 e –135

71. b) Resposta possível: 10 · (+7) + 5 · (–9)

72 João, Ricardo e Cristina participaram de um campeonato de *videogame*. Para fazer uma brincadeira com os colegas, apresentaram os pontos obtidos por meio do valor das seguintes expressões:

Ricardo	–5 – 2 · (–3) + (–2) · (–5) + 7
Cristina	[(–2) · 1 + (–6)] · (–1)
João	(–3) · 2 + (–2) · (–5) + (–3) · (–1)

O quadro a seguir registra a quantidade de pontos dos seis primeiros colocados.

Classificação	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Número de pontos	18	17	8	7	5	4

• Qual foi a classificação de cada um?

72. Ricardo ficou em 1º lugar, Cristina, em 3º, e João, em 4º.

73 Calcule as expressões a seguir.

a) (–4 + 20) : (–8) **73. a)** –2

b) (–6 – 14) : (–6 + 1) **73. b)** 4

c) (–8) · (+3) – (–15) : (+3) **73. c)** –19

d) [–8 + (–4) · (–3)] : (–1 – 1) **73. d)** –2

e) (–6 – 2 + 3) : [–3 · (–2 + 3) + 8] **73. e)** –1

74 Junte-se a um colega para resolverem este problema.

Utilizando uma calculadora, Luana precisa efetuar a operação (–1 500) : (–20), mas as teclas 1 e 2 estão quebradas.

Como Luana pode fazer esse cálculo sem usar essas teclas?

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

75 *Hora de criar* – Com um colega, elaborem, cada um, um problema que envolva expressão numérica de números inteiros. Depois troquem os problemas elaborados por vocês, cada um resolve o problema elaborado pelo outro e destroquem para corrigi-los.

75. Resposta pessoal.

74. Resposta possível: Ela pode transformar essa operação na seguinte expressão: [(–500 · 3) : (–4)] : 5

11 Potenciação

Quando trabalhamos com números naturais, vimos que, ao efetuar um produto de fatores iguais, realizamos uma operação chamada de **potenciação**.

Também podemos efetuar a potenciação com números inteiros.

Vamos ver alguns exemplos com expoente positivo.

a) $(+5)^2 = (+5) \cdot (+5) = +25$

b) $(+7)^3 = (+7) \cdot (+7) \cdot (+7) = +343$

c) $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$

d) $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$

e) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 69, 70, 72, 73** e **74** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Para trabalhar a multiplicação de números inteiros, proponha o jogo de lançamento de uma moeda, como no **exercício 71**, e depois peça aos estudantes que adicionem os pontos (ganhará quem tiver mais pontos).

Segue a resolução do **exercício 71**.

Exercício 71:

a) Pontos positivos:
$10 \cdot (+7) = +70$;
pontos negativos:
$5 \cdot (-9) = -45$.

b) Para x: cara; y: coroa;
P: saldo de pontos, temos:
$P = x \cdot (+7) + y \cdot (-9)$
$P = 10 \cdot (+7) + 5 \cdot (-9)$

c) $P = x \cdot (+7) + y \cdot (-9)$
$P = 10 \cdot (+7) + 5 \cdot (-9)$
$P = +70 - 45$
$P = +25$ (25 pontos)

d) A sua pontuação seria máxima se Roberto tivesse obtido cara em todos os lançamentos, ou seja, 15 vezes cara. Desse modo, o total de pontos seria:
$P = 15 \cdot (+7) + 0 \cdot (-9)$
$P = +105 + 0$
$P = +105$ (105 pontos)
Se Roberto tivesse obtido coroa em todos os lançamentos, ele teria a pontuação mínima, dada por:
$P = 0 \cdot (+7) + 15 \cdot (-9)$
$P = 0 - 135$
$P = -135$ (–135 pontos)

Aproveite a temática de *videogame* apresentada no **exercício 72** para conversar com os estudantes sobre o uso desse recurso para lazer e também como aprendizado. Diferentes jogos eletrônicos contribuem para o desenvolvimento do raciocínio lógico, emocional e social, mas é preciso usar esse recurso de modo adequado para que não se torne prejudicial à saúde dos estudantes.

Ao trabalhar essa temática, contribui-se para o desenvolvimento da **competência geral 8**.

Para pautar essa conversa, sugerimos a leitura do artigo:

ALVES, L. *et al*. Videogame: suas implicações para aprendizagem, atenção e saúde de crianças e adolescentes. **RMMG**, Belo Horizonte, v. 19, n. 1. Disponível em: http://www.rmmg.org/artigo/detalhes/483. Acesso em: 17 jun. 2022.

Para a resolução do **exercício 74**, é necessário o uso de uma calculadora. A ideia de não poder usar as teclas é justamente para que os estudantes descubram outras possibilidades de resolução.

O **exercício 75** solicita a elaboração de problema e, assim, conduz os estudantes a serem protagonistas do próprio aprendizado, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA04).

11. Potenciação

Habilidade da BNCC: **EF07MA04**.

Como vimos, ao ampliar o conjunto de $\mathbb{N}$ para $\mathbb{Z}$, algumas operações efetuadas tornam-se abstratas e podem se distanciar de uma representação concreta de quantidades.

Ao introduzir o estudo da potenciação de números inteiros, fique atento às dificuldades que os estudantes apresentam em decorrência do uso mecânico das regras de sinais.

Os estudantes devem ser levados a concluir que o cálculo de potências com números inteiros difere do cálculo de potências com números naturais apenas pela inclusão dos sinais "+" e "–".

Potência de expoente 1 ou zero

Observe possíveis questionamentos dos estudantes quanto à construção de certos conceitos matemáticos nos quais, muitas vezes, é imprescindível a inclusão de definições específicas para que não haja conflito com uma "teoria maior" que os englobe. Esse é o caso das definições específicas de potências com expoentes 1 ou zero, as quais contemplam e dão coerência às propriedades operatórias da potenciação a serem estudadas logo a seguir.

Na **potenciação de números inteiros**, ao sistematizar os resultados envolvendo potências com expoente ímpar, é importante comentar com os estudantes que a análise do sinal do resultado obtido só é feita para os casos em que a base é negativa. No caso de base positiva, o sinal do resultado é sempre positivo. Analise com eles algumas situações, como:

- Registre os valores obtidos para a potência $(-1)^n$, em que n assume os valores: 0, 1, 2, 3, 4, ... (1, –1, 1, –1, 1, –1, ...)
- Qual será o sinal da potência $(-17)^{482}$? (Como o expoente é par e a base é negativa, a potência será positiva.)

Em potenciação cuja base é um número inteiro e o expoente é um número positivo, temos:

- a potência de base positiva é um número positivo;
- a potência de base negativa é positiva quando o expoente é par e negativa quando o expoente é ímpar.

Potência de expoente 1 ou zero

De modo geral, convencionamos que:

- Para toda potência cuja base é um número inteiro e o expoente é 1, a potência é igual à própria base.
- Para toda potência cuja base é um número inteiro não nulo e o expoente é zero, a potência é igual a 1.

Observe alguns exemplos.

a) $3^1 = 3$

b) $(-2)^1 = -2$

c) $(-5)^1 = -5$

d) $2^0 = 1$

e) $(-1)^0 = 1$

f) $(-7)^0 = 1$

Observação

Sempre colocamos as bases negativas entre parênteses. Observe.

$$(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = +25 = 25$$

Se não colocarmos as bases negativas entre parênteses, o sinal negativo será do resultado da potenciação. Observe.

$$-5^2 = -5 \cdot 5 = -25$$

Assim, $(-5)^2$ é diferente de -5^2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

77. a) $(-9)^0 = (+31)^0$ **77. b)** $(-9)^1 < (-1)^6$ **77. c)** $(-2)^8 > (+3)^3$ **77. d)** $(+2)^5 > (-2)^5$

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

76 Calcule as potências.

a) $(+3)^2$ **76. a)** 9
b) $(+5)^3$ **76. b)** 125
c) $(+7)^2$ **76. c)** 49
d) $(-11)^2$ **76. d)** 121
e) $(-5)^3$ **76. e)** –125
f) $(-3)^4$ **76. f)** 81
g) $(-1)^6$ **76. g)** 1
h) $(+6)^1$ **76. h)** 6
i) $(+329)^0$ **76. i)** 1

77 Compare as potências usando >, < ou =.

a) $(-9)^0$ e $(+31)^0$
b) $(-9)^1$ e $(-1)^6$
c) $(-2)^8$ e $(+3)^3$
d) $(+2)^5$ e $(-2)^5$

78 Quais números inteiros entre $(-3)^3$ e $(+3)^3$ são divisíveis por 10?

78. –20, –10, 0, 10 e 20

79 O número –15 é menor que –3. E $(-15)^2$ é menor que $(-3)^2$? Por quê?

79. Não, pois quando efetuamos as potências obtemos 225 > 9.

80 Uma potência é negativa e seu expoente é ímpar. Sua base é um número positivo ou negativo? **80.** Negativo.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 76** a **80** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

81 Mônica apresentou o seguinte desafio para Carlos:

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

- Ajude Carlos a obter a resposta correta para esse desafio. **81.** Positivo.

82 Com uma calculadora, podemos determinar potências de bases negativas. A potência $(-2)^4$ pode ser calculada teclando-se a sequência:

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Que sequência de teclas deve ser apertada para calcular as potências a seguir?

a) $(-2)^6$
b) $(-3)^5$
c) $(-4)^3$
d) $(-3)^4$
e) $(-2)^7$
f) $(-5)^2$

- Que valor foi encontrado em cada item?

82. a) $\boxed{2}\boxed{+/-}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$; 64
82. b) $\boxed{3}\boxed{+/-}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$; –243
82. c) $\boxed{4}\boxed{+/-}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}$; –64
82. d) $\boxed{3}\boxed{+/-}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$; 81
82. e) $\boxed{2}\boxed{+/-}\boxed{\times}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}\boxed{=}$; –128
82. f) $\boxed{5}\boxed{+/-}\boxed{\times}\boxed{=}$; 25

Propriedades da potenciação

A seguir, vamos estudar algumas propriedades da potenciação, válidas para toda potência cuja base é um número inteiro e o expoente é um número natural.

Produto de potências de mesma base

Vamos calcular $(-4)^3 \cdot (-4)^2$.

$$\underbrace{(-4)^3}\cdot\underbrace{(-4)^2} = \underbrace{(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)}\cdot\underbrace{(-4)\cdot(-4)} = (-4)^5$$

Observe que o expoente 5 é a soma dos expoentes dos fatores, ou seja:

$$(-4)^3 \cdot (-4)^2 = (-4)^{3+2} = (-4)^5$$

> Para reduzir um produto de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e adicionamos os expoentes.

Quociente de potências de mesma base

Vamos calcular $(-2)^5 : (-2)^2$.

Devemos procurar uma potência que multiplicada por $(-2)^2$ resulte em $(-2)^5$. Essa potência é $(-2)^3$, pois $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^5$. Então:

$$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^3$$

Observe que o expoente 3 é a diferença entre os expoentes do dividendo e do divisor, ou seja:

$$(-2)^5 : (-2)^2 = (-2)^{5-2} = (-2)^3$$

> Para reduzir um quociente de potências de mesma base a uma só potência, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

Exercícios propostos

Proponha aos estudantes que resolvam o **exercício 81** sem o auxílio de uma calculadora e, no momento da correção, confiram na calculadora a escolha das teclas.

Para a resolução desse exercício os estudantes deverão considerar que o dobro de um número ímpar é par, pois todo número múltiplo de 2 é par. Logo, todo número negativo elevado a um expoente par é positivo.

No **exercício 82**, convém comentar com os estudantes que, dependendo da calculadora, o procedimento pode ser diferente.

Verifique se há divergências nos resultados. Em caso afirmativo, promova uma discussão com a turma para entender qual é o procedimento destoante dessa(s) calculadora(s).

Propriedades da potenciação

Reforce com os estudantes que as propriedades operatórias, em princípio, refletem sínteses de procedimentos de cálculo com base nas definições dessas operações. Nesse sentido, em geral, podem ser aplicadas aos cálculos de maneira que os tornem mais simples e imediatos, poupando tempo e evitando erros.

Propriedades da potenciação

Vale a orientação da página anterior de que os estudantes devem perceber que, em geral, as propriedades operatórias, quando aplicadas aos cálculos, tornam esses cálculos mais simples e imediatos, poupando tempo e evitando erros.

Algumas propriedades da potenciação também podem ser lembradas por frases marcantes. Por exemplo:

- A potência de um produto é igual ao produto das potências.
- A potência de um quociente é igual ao quociente das potências.

Expressões numéricas com potenciação

Observe aos estudantes que as expressões numéricas trabalhadas aqui seguem os mesmos passos para a obtenção de seu valor que as expressões estudadas em itens anteriores. A diferença em relação àquelas deve-se apenas ao acréscimo da operação potenciação.

Potência de uma potência

Vamos calcular o cubo de $(-3)^2$, ou seja, $[(-3)^2]^3$.

Observe que o número que está elevado à terceira potência é $(-3)^2$. Portanto:

$$[(-3)^2]^3 = (-3)^2 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^2 = (-3)^{2+2+2} = (-3)^{3 \cdot 2} = (-3)^6$$

Note que o resultado pode ser obtido conservando-se a base e multiplicando-se os expoentes.

> Para reduzir uma potência de potência a uma potência de um só expoente, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

Potência de um produto

Vamos calcular o quadrado do produto $(-5) \cdot (+2)$, ou seja, $[(-5) \cdot (+2)]^2$.

Observe que a base da potência é o produto $(-5) \cdot (+2)$, ou seja:

$$[(-5) \cdot (+2)]^2 = [(-5) \cdot (+2)] \cdot [(-5) \cdot (+2)] = (-5) \cdot (+2) \cdot (-5) \cdot (+2) =$$
$$= (-5) \cdot (-5) \cdot (+2) \cdot (+2) = (-5)^2 \cdot (+2)^2$$

Note que o resultado pode ser obtido elevando-se cada fator ao quadrado.

> Para elevar um produto a um expoente, elevamos cada fator a esse expoente.

Expressões numéricas com potenciação

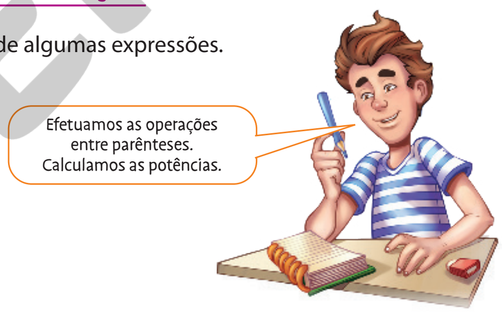
Acompanhe, a seguir, o cálculo do valor de algumas expressões.

a) $(-3 + 7)^3 : (-5 + 3)^2 =$

$= (+4)^3 : (-2)^2 =$

$= (+64) : (+4) =$

$= 16$



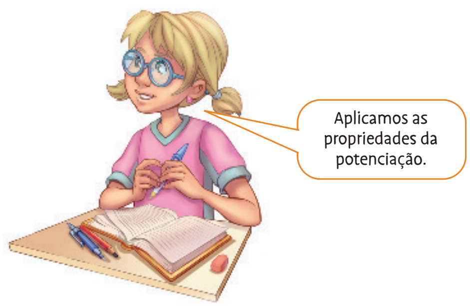
b) $[(-2)^2 \cdot (-2)^3]^6 : [(-2)^4]^5 =$

$= [(-2)^5]^6 : (-2)^{20} =$

$= (-2)^{30} : (-2)^{20} =$

$= (-2)^{10} =$

$= 1\,024$



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

83 Reduza a uma só potência.

a) $(+4)^2 \cdot (+4)^3$ **83. a)** 4^5

b) $(-10)^3 \cdot (-10)^4 \cdot (-10)^2$ **83. b)** $(-10)^9$

c) $(-12) \cdot (-12) \cdot (-12)^2$ **83. c)** $(-12)^4$

d) $(-6)^8 : (-6)^2$ **83. d)** $(-6)^6$

e) $(+9)^3 : (+9)$ **83. e)** 9^2

f) $(-21)^4 : (-21)^3$ **83. f)** -21

84 Aplique as propriedades de potência.

a) $(+2^5)^3$ **84. a)** 2^{15}

b) $[(-2)^3]^4$ **84. b)** $(-2)^{12}$

c) $[(-7)^2]^5$ **84. c)** $(-7)^{10}$

d) $[(-3) \cdot (-5)]^3$ **84. d)** $(-3)^3 \cdot (-5)^3$

e) $[(+2) \cdot (-7)]^2$ **84. e)** $(+2)^2 \cdot (-7)^2$

f) $[(-2) \cdot (+11) \cdot (-3)]^2$ **84. f)** $(-2)^2 \cdot (+11)^2 \cdot (-3)^2$

85 Resolva as expressões a seguir.

a) $(-2)^3 : (-8)$ **85. a)** 1

b) $(-5)^2 : (-4 - 1)$ **85. b)** -5

c) $(-5 + 1)^2 + (+4)^2 - (-1)^5$ **85. c)** 33

d) $(-2)^3 \cdot (-3)^2 - (-5)^2 \cdot (-1)^4$ **85. d)** -97

e) $(5 - 10)^2 - (-3)^2 + (12)^0$ **85. e)** 17

f) $(-3)^3 \cdot (-2)^2 + (-10)^1 \cdot (-1)^5$ **85. f)** -98

86 Reduza a uma só potência.

a) $(2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^4) : (2^7 \cdot 2^3)$ **86. a)** 2^5

b) $(3^4 : 3^3) \cdot (3^5 : 3^3)$ **86. b)** 3^3

c) $[(-5)^2 \cdot (-5)^4] : [(-5) \cdot (-5)^3]$ **86. c)** $(-5)^2$

d) $[(-7)^2]^4 \cdot [(-7)^5 : (-7)^3]$ **86. d)** $(-7)^{10}$

e) $(2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^5) : (2^{-2+5})$ **86. e)** 2^7

f) $(-1 - 1 - 1)^2 \cdot (-3)^{1+2}$ **86. f)** $(-3)^5$

12 Raiz quadrada

Já vimos que, para determinar $\sqrt{36}$, por exemplo, precisamos determinar um número que elevado ao quadrado resulte em 36. Então, $\sqrt{36} = 6$, pois $6^2 = 36$.

No entanto, $(-6)^2$ também é igual a 36. Porém, como o resultado de uma operação deve ser único, foi convencionado pelos matemáticos que a raiz quadrada de um número inteiro, quando existir, é um número não negativo.

Acompanhe os exemplos.

a) Os números inteiros cujo quadrado é 81 são 9 e –9, pois $9^2 = 81$ e $(-9)^2 = 81$.
Porém, $\sqrt{81} = 9$.

b) Os números inteiros cujo quadrado é 144 são 12 e –12, pois $12^2 = 144$ e $(-12^2) = 144$.
Porém, $\sqrt{144} = 12$.

Note que, ao procurar os números inteiros que elevados ao quadrado resultam em –81, constatamos que não é possível encontrá-los, pois o produto de um positivo por um positivo é um número positivo, assim como o produto de um negativo por um negativo também é um positivo. Portanto, nenhum número inteiro elevado ao quadrado resulta em um número negativo.

Observação

- Além do zero, somente os números inteiros positivos e quadrados perfeitos têm como raiz quadrada um número inteiro. Assim, por exemplo:
  - não existe nenhum número inteiro que seja raiz quadrada do número 5;
  - não existe nenhum número inteiro que seja raiz quadrada de –9.

Exercícios propostos

Para a resolução dos **exercícios 83** a **86**, oriente os estudantes a identificar a possibilidade de aplicar corretamente as propriedades da potenciação, além de seguir as regras já estabelecidas para os cálculos de valor das expressões numéricas: iniciar o cálculo das partes da expressão que estejam agrupadas por parênteses, colchetes e chaves – nessa ordem –, e respeitar a ordem das operações: potenciação, multiplicação e divisão, finalizando com adição e subtração.

As resoluções dos **exercícios 83** a **86** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

12. Raiz quadrada

Habilidade da BNCC:
EF07MA04.

Neste nível de escolaridade, por entender que seja prematuro, não tratamos da operação radiciação, mas sim do conceito raiz quadrada. No entanto, mesmo com essa redução do estudo desse campo, é preciso garantir a característica da unicidade da operação, bem como as condições de existência. Foi com esse cuidado que abordamos o assunto.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 87** a **91** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Após a resolução, o **exercício 90** pode ser ampliado com uma pergunta aos estudantes: "Qual é a raiz quadrada de 900?". Nesse momento, eles precisam empregar corretamente a definição de raiz quadrada e optar pela resposta +30.

No **exercício 91**, alerte os estudantes para que a resolução seja ampla e contemple todas as possibilidades.

Exercícios complementares

Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de retomar os principais conceitos estudados no capítulo e recorrer aos conhecimentos construídos.

Verifique se ainda apresentam dificuldade em algum deles e, se for o caso, sugira-lhes que refaçam algumas atividades referentes a tais assuntos.

Observe aos estudantes que, no **exercício 1**, João e Luiz têm uma trajetória na mesma reta. Portanto, para a resolução, eles devem considerar a reta numérica.

Para trabalhar o **exercício 4**, após a resolução, troque os dados de lugar e repita as questões.

No **exercício 5**, a repetição dos módulos dos números envolvidos nas subtrações é proposital para o estudante avaliar o seu entendimento do conceito subtração.

As resoluções dos **exercícios 1** a **5** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

87 Determine:

a) $\sqrt{1}$ **87. a)** 1
b) $\sqrt{49}$ **87. b)** 7
c) $-(\sqrt{100})$ **87. c)** –10
d) $-(\sqrt{16})$ **87. d)** –4
e) $\sqrt{196}$ **87. e)** 14
f) $-(\sqrt{256})$ **87. f)** –16

88 Quais são os números compreendidos entre –10 e 10 cuja raiz quadrada é um número inteiro? **88.** 0, 1, 4 e 9

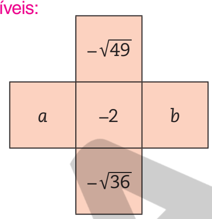
89 Alguns dos números a seguir têm como raiz quadrada um número inteiro. Quais são eles? Justifique sua resposta. **89.** Alternativas **b**, **d**, **e**; **b)** 2^2; **d)** 10^2; **e)** 12^2.

a) 18
b) 4
c) –36
d) 100
e) 144
f) –225

90 Quais são os números inteiros que elevados ao quadrado resultam em 900? **90.** –30 e 30

91 No esquema, o produto dos números que estão na vertical é igual ao produto dos números que estão na horizontal.

91. Respostas possíveis:
$a = -7$ e $b = -6$;
$a = -14$ e $b = -3$;
$a = -21$ e $b = -2$;
$a = -42$ e $b = -1$;
$a = 6$ e $b = 7$;
$a = 3$ e $b = 14$;
$a = 2$ e $b = 21$;
$a = 1$ e $b = 42$.



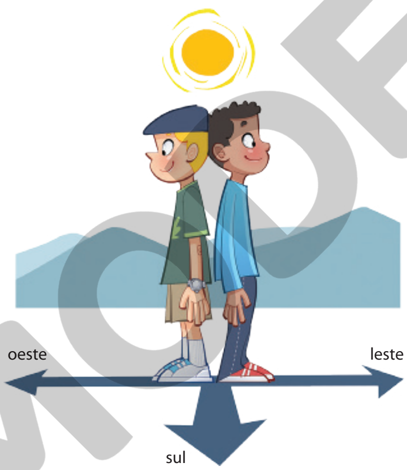
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

• Descubra os valores de a e b, sabendo que a é menor que b.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 João e Luiz se posicionam um de costas para o outro. João anda 20 m na direção leste, e Luiz, 18 m na direção oeste.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Representando por +20 a posição em que João se encontra em relação ao ponto de partida, responda:

a) Como podemos representar a posição em que Luiz se encontra? **1. a)** –18
b) Quantos metros separam João de Luiz? **1. b)** 38 metros.

2 Compare os números a seguir e escreva sentenças usando os símbolos > ou <.

a) –75 e 42 **2. a)** –75 < 42
b) –300 e –10 **2. b)** –300 < –10
c) 2 e –20 **2. c)** 2 > –20
d) –5 e –30 **2. d)** –5 > –30

3 Considerando os números 9, –10, –15, 8, –21, –5 e 12, escreva:

a) os números maiores que –10; **3. a)** –5, 8, 9 e 12
b) os números maiores que –15 e menores que 9; **3. b)** –10, –5 e 8
c) os números cujo módulo é maior que 10; **3. c)** –21, –15 e 12
d) os números cujo módulo é menor que o módulo de 12. **3. d)** –10, –5, 8 e 9

4 Um submarino encontra-se a 228 m de medida de profundidade (–228 m). Depois de algum tempo, está a –184 m.

a) Ele subiu ou desceu? **4. a)** Subiu.
b) Quantos metros? **4. b)** 44 metros.
c) Escreva uma adição algébrica que represente a posição atual do submarino. **4. c)** –228 + 44 = –184

5 Resolva mentalmente.

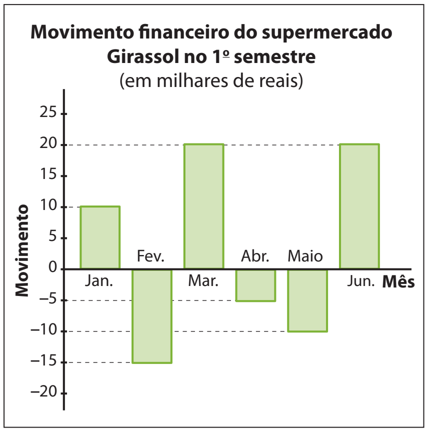
Quais destas subtrações têm como resultado um número negativo? **5.** Alternativas **a** e **b**.

a) (–10) – (+6)
b) (–10) – (–6)
c) (+10) – (+6)
d) (+10) – (–6)

13. Comentário: Espera-se que o estudante observe que a soma das raízes é diferente da raiz da soma e que o produto das raízes é igual à raiz do produto, assim como o quociente das raízes é igual à raiz do quociente.

6 Observe o gráfico sobre a movimentação financeira do supermercado Girassol ao longo de seis meses. Neste gráfico, o lucro é representado por números positivos, e o prejuízo, por números negativos.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos pelo gerente do supermercado.

6. a) Março e junho. **6. b)** Março e junho.

Agora, responda: **6. c)** Fevereiro, abril e maio.

a) Em quais meses o lucro foi de 20 mil reais?
b) Em quais meses ocorreu maior lucro?
c) Em quais meses houve prejuízo?
d) Em que mês o prejuízo foi maior? **6. d)** Fevereiro.
e) É correto afirmar que o lucro desse supermercado aumentou ao longo de todo o semestre? Justifique sua resposta.

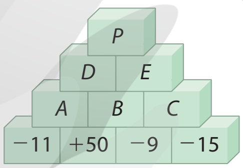
6. e) Não, pois lucro e prejuízo se alternam no gráfico.

7 Em janeiro de determinado ano, uma empresa teve um prejuízo de 5 200 reais, mas em fevereiro do mesmo ano recuperou-se e obteve um lucro de 12 560 reais. **7. a)** −5 200 + 12 560

a) Escreva, usando números inteiros, uma expressão que represente a situação da empresa ao final de fevereiro.
b) Qual foi o lucro dessa empresa nesse bimestre? **7. b)** 7 360 reais.

8 No esquema a seguir, cada letra equivale à soma dos números dos dois blocos imediatamente abaixo. Determine o número que está no alto da pilha. **8.** 97

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



9 Resolva cada expressão a seguir.

a) 5 + (2 − 6) **9. a)** 1
b) −15 − (−23 + 12) **9. b)** −4
c) (9 − 15) + (12 − 20) **9. c)** −14
d) (−9 + 5) − (−6 − 8 − 4) **9. d)** 14
e) −(−2) + (−3) − {−2 + [−1 − (−2 + 1)] + 5} **9. e)** −4
f) 20 − {−10 − [−8 + (5 − 12)] − 20} **9. f)** 35

10 Calcule o valor das expressões numéricas.

a) 15 + (−8) · (+3) **10. a)** −9
b) (−30) : (−5) − (−4) **10. b)** 10
c) 21 − (−14) : (+2) **10. c)** 28
d) (−4) · (−6) − (−6) **10. d)** 30
e) 3 · (−8) − 4 · (−5) **10. e)** −4
f) (−5) · (+4) + (−15) : (−5) **10. f)** −17
g) (−6) · (+3) + (−5) · (−4) **10. g)** 2

11 Um produto com quatro fatores negativos é positivo ou negativo? **11.** Positivo.

12 Determine o valor das expressões a seguir.

a) $(-6)^2 - 12$ **12. a)** 24
b) $(-5)\cdot(+6) - (-3)^2$ **12. b)** −39
c) $(-8)^2 : (-16) + 5$ **12. c)** 1
d) $(-6)^0 + (-3)^2 + (-2)^3 \cdot (-1)$ **12. d)** 18
e) $3^2 - 4^2 - (-2)\cdot(-4)$ **12. e)** −15
f) $(-7)^2 - (-7)\cdot(-6)$ **12. f)** 7

13 Efetue:

a) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$ e $\sqrt{16+9}$ **13. a)** 7 e 5
b) $\sqrt{225} - \sqrt{81}$ e $\sqrt{225-81}$ **13. b)** 6 e 12
c) $\sqrt{121} \cdot \sqrt{9}$ e $\sqrt{121 \cdot 9}$ **13. c)** 33 e 33
d) $\sqrt{324} : \sqrt{81}$ e $\sqrt{324 : 81}$ **13. d)** 2 e 2

- Compare os resultados obtidos em cada item. O que você observa? **13.** Resposta pessoal.

14 Considere estas expressões:

I. $(-2+4)^2 - 3\cdot(\sqrt{16}+\sqrt{4})$ **14. I.** −14
II. $-\sqrt{64} + \sqrt{3^2+4^2}$ **14. II.** −3
III. $(\sqrt{25}-\sqrt{49})^2 \cdot (-3+5)$ **14. III.** 8
IV. $\sqrt{10^2 - 8 - 8 \cdot 7} - 2 \cdot 14$ **14. IV.** −22

Determine o valor de cada expressão. Entre esses valores, descubra dois cuja soma seja igual a −36 e dois cuja diferença seja igual a −11.
14. −14 e −22; −14 e −3, −3 e 8

Exercícios complementares

No **exercício 6**, faça **a leitura e a interpretação do gráfico** propostas, para diagnosticar eventuais dificuldades dos estudantes com relação a essas habilidades. A organização de dados na forma de gráficos de colunas é usual nos textos de imprensa e em livros didáticos, mas, em geral, não é usada com frequência por estudantes dessa faixa etária em suas práticas sociais, de modo que a compreensão exige intervenção quanto:

- à observação do título do gráfico;
- ao significado das grandezas representadas no eixo horizontal e no eixo vertical;
- à escala empregada nos eixos;
- a outras convenções porventura usadas, como cores, sinais gráficos e símbolos.

As respostas dos **itens a** e **b** são as mesmas, pois os meses em que o lucro foi de 20 mil reais são os mesmos meses de maior lucro: março e junho. Para responder ao **item c** os estudantes devem considerar as barras que estão associadas a números negativos; logo, os meses correspondentes são fevereiro, abril e maio. O maior prejuízo corresponde à barra associada ao número negativo de maior valor absoluto; logo, o mês correspondente à resposta ao **item d** é fevereiro. Para o **item e**, os estudantes devem considerar que não é possível fazer tal afirmação, pois houve variação entre lucro e prejuízo no período indicado.

Nos exercícios com expressões numéricas cujos valores devem ser calculados, verifique se os estudantes empregam as propriedades operatórias.

No **exercício 13**, **item a**, mostre que $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$ e $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$; portanto, $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$

No **item b**, mostre que $\sqrt{225} - \sqrt{81} \neq \sqrt{225-81}$

Já nos **itens c** e **d** o resultado obtido nas duas operações de cada item foi o mesmo. Espera-se que os estudantes percebam que essa igualdade só vale para as operações de multiplicação e divisão, como estudado nas propriedades de potenciação.

As resoluções dos **exercícios 7** a **14** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Verificando

Nesta seção apresentamos questões que abrangem todo o capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado.

Caso eles apresentem dúvidas em relação a alguma das atividades propostas, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

As resoluções dos **testes 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Organizando

a) Resposta pessoal. Incentive os estudantes a citar pelo menos uma situação diferente das já citadas no desenvolvimento do conceito.

b) Oriente os estudantes a registrar, entre um número e o seu antecessor ou o seu sucessor, espaçamentos iguais.

c) Espera-se que considerem o módulo de um número inteiro como o número natural que o gerou.

d) Resposta pessoal. Incentive-os a escrever sobre as estratégias que mais consideram oportunas para o cálculo mental, exemplificando-as.

e) Solicite aos estudantes que, além de citar as propriedades, apresentem exemplos.

f) Resposta pessoal. Espera-se que sintetizem concluindo que, tanto na multiplicação como na divisão, números de mesmo sinal produzem resultados positivos; números com sinais contrários produzem resultados negativos.

g) Solicite aos estudantes que, além de citar as propriedades, apresentem exemplos.

h) Espera-se que concluam que, para expoente par, a potência resulte positiva ou nula; para expoente ímpar, a potência é negativa ou nula. Solicite aos estudantes que apresentem exemplos.

VERIFICANDO

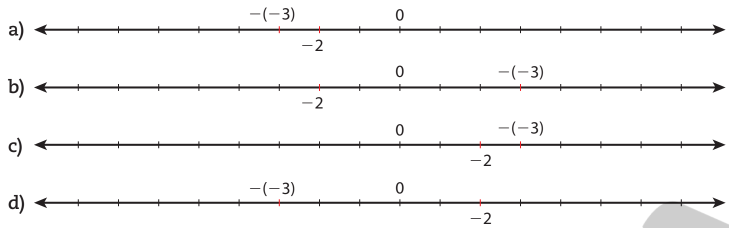
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Entre as perguntas a seguir, qual pode ser respondida com o uso de um número negativo? **1.** Alternativa **c**.

a) Quantos anos tem determinada pessoa?
b) Quantos livros há na estante?
c) Qual é o saldo bancário de determinada pessoa?
d) Qual é a medida da capacidade dessa garrafa de água?

2 A reta numérica que apresenta a localização correta do número –(–3) e do número –2 é: **2.** Alternativa **b**.

ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

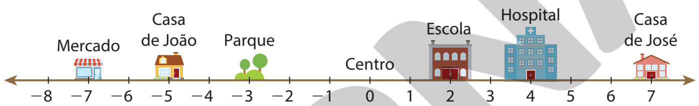


3 O número que está localizado 10 unidades à esquerda do número 3 na reta numérica é o número: **3.** Alternativa **b**.

a) –10. **b)** –7. **c)** 7. **d)** 13.

4 João fez um esquema que indica a distância de alguns pontos da cidade ao centro.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Quais pontos da cidade correspondem a pontos simétricos no esquema? **4.** Alternativa **d**.

a) Parque e escola.
b) Parque e hospital.
c) Casa de João e hospital.
d) Mercado e casa de José.

5 Nas alternativas a seguir estão as menores medidas de temperaturas já registradas em determinada cidade. Qual foi a menor medida registrada? **5.** Alternativa **a**.

a) –6 °C **b)** –1 °C **c)** 0 °C **d)** 2 °C

6 Qual é o resultado da expressão numérica a seguir? **6.** Alternativa **a**.

$$3 - [(1 + 3 \cdot 7) : (-2)] \cdot (-1)$$

a) –8 **b)** –3 **c)** 11 **d)** 14

7 Mariana multiplicou o número –15 por 120 e, em seguida, dividiu o resultado pelo oposto de –15. Qual é a expressão numérica que representa essa situação? **7.** Alternativa **d**.

a) $(-15 \cdot 120) : (-15) = 120$
b) $(-15 \cdot 120) : (-15) = -120$
c) $(-15 \cdot 120) : [-(-15)] = 120$
d) $(-15 \cdot 120) : [-(-15)] = -120$

8 Qual das igualdades a seguir é verdadeira? **8.** Alternativa **a**.

a) $\sqrt{16} = (-2)^2$
b) $\sqrt{16} = -2^3$
c) $\sqrt{81} = -9^2$
d) $\sqrt{9} = (-3)^2$

Organizando

Organizando: A resposta desta seção está neste *Manual*.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Cite três exemplos de situações em que podemos utilizar números negativos.
b) Desenhe uma reta numérica e localize os números de –10 a 10.
c) Como você definiria o módulo de um número? E números simétricos?
d) Escreva a estratégia que você usa para adicionar ou subtrair números inteiros.
e) Quais são as propriedades da adição de números inteiros?
f) De que maneira você explicaria para um colega como determinar o sinal do resultado de uma multiplicação ou de uma divisão entre dois números inteiros?
g) Quais são as propriedades da multiplicação de números inteiros?
h) O que acontece se elevarmos um número negativo a um expoente par? E a um expoente ímpar?

DIVERSIFICANDO

Brincando um pouco

Bruna inventou um jogo muito interessante, o *Menos mil*. Ela construiu um alvo e marcou alguns valores.

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Na brincadeira, cada jogador inicia o jogo com 1 000 pontos. O objetivo é chegar primeiro que o adversário ao número –1 000 lançando bolinhas de gude até o alvo.

A cada rodada, o jogador lança apenas uma bolinha a uma distância de cinco passos do alvo, e o valor obtido é adicionado à sua pontuação inicial. Por exemplo, se a bolinha parar no número –100, o jogador efetuará esta operação: 1 000 + (–100). Portanto, ficará com 900 pontos.

Outra regra: não se pode ultrapassar o número –1 000. A pontuação deve ser exata! Por exemplo: se um jogador estava com –900 pontos e acertou o número –200, ele não conseguiu chegar ao número –1 000 exatamente (ao efetuar a operação, obtém-se o número –1 100). Desse modo, o jogador não contabiliza o resultado, voltando a ter –900 pontos. É como se ele tivesse errado sua jogada.

5. Espera-se que os estudantes percebam que, se multiplicarem os valores, nunca conseguirão obter o valor –1 000, pois, como o valor inicial é 1 000, só conseguiriam vencer o jogo se em um dos círculos houvesse o valor –1. Desse modo, eles chegariam ao número –1 000.

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. O que acontecerá com o jogador que está com –800 pontos se a bolinha parar no número –200?
   1. Ele vencerá o jogo, pois com esse valor chegará ao número –1 000.
2. Qual é o número mínimo de jogadas para que um jogador vença o jogo? Justifique sua resposta.
   2. Dez, porque, acertando o número –200 todas as vezes, o jogador conseguirá chegar, ao final de todas as jogadas, ao número –1 000.
3. Um jogador pode obter 350 pontos? Explique sua resposta.
   3. Resposta possível: Sim, basta que ele acerte três vezes no número –200 e uma vez no número –50.
4. Em uma das jogadas, Bruna disse: "Oba, eu estava com 800 e acertei o número –200! Acabei de ganhar o jogo!". Isso faz sentido? Justifique sua resposta.
   4. A afirmação é falsa, pois, ao efetuar 800 + (–200), a resposta será 600, não –1 000.
5. Joaquim, amigo de Bruna, resolveu mudar as regras do jogo. Em vez de adicionar os valores, ele passou a multiplicá-los para o jogo terminar mais depressa. A mudança de Joaquim é verdadeira? Por quê?

Diversificando

Uma versão de tabuleiro do jogo **Menos mil** pode ser construída pelos estudantes com tampa de caixa de *pizza*, na qual sejam desenhadas as faixas de pontuação –50, –100 e –200.

Se possível, reserve uma parte da aula para jogos em duplas. Todos os lances deverão ser registrados no caderno.

Sugestão de leitura

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problema**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

Os autores apresentam seu modo de trabalhar, os princípios teóricos que animam sua prática e sua convicção de que jogos e situações-problema podem ser recursos úteis para uma aprendizagem diferenciada e significativa.

Capítulo 2 – Números racionais

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Antes de trabalhar a abertura do capítulo com os estudantes, pergunte a eles o que sabem sobre os números racionais. Em seguida, peça-lhes que observem a imagem da praça, leiam o texto e respondam às questões.

Peça aos estudantes que digam em voz alta os números que identificaram no texto e anote-os na lousa. Discuta com eles os conjuntos numéricos estudados até aqui, levando-os a concluir que todos os números apresentados são racionais.

Além de questões relativas à compreensão das relações entre os diversos conjuntos numéricos, o assunto pode gerar discussões interdisciplinares envolvendo outras áreas, como Geografia.

Um modo de abordar o tema de abertura é orientar os estudantes para o levantamento de dados sobre densidade demográfica, a serem organizados em tabelas e representados em gráficos.

Informações sobre a densidade demográfica de cidades e estados podem ser obtidas no *site* do IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados. Acesso em: 11 maio 2022.

Aproveite o contexto da fotografia apresentada nesta abertura e explore o Tema Contemporâneo Transversal **diversidade cultural**. Incentive os estudantes a pesquisar informações sobre festas típicas que ocorrem na região onde residem ou festas tradicionais de outras regiões brasileiras. Esse trabalho contribui para o desenvolvimento da **competência geral 3**, pois os estudantes podem fruir diferentes manifestações artísticas próprias dessas festividades.

Capítulo 2 Números racionais

MUNIQUE BASSOLI/PULSAR IMAGENS

Observe a imagem, leia o texto e responda às questões no caderno.

a) Que números você identifica no texto?

b) Esses números podem ser escritos na forma de fração? **b)** Sim.

c) Quais dos números apresentados no texto pertencem ao conjunto dos números racionais? **c)** Todos.

a) 2021; 3 289 290; 0,25; 2020; 1,5; 26,2; 160; 10 mil; 861 329; 15; 35 mil; 2021.
Comentário: Professor, conduza uma discussão retomando os conjuntos numéricos já estudados até aqui e leve os estudantes a concluírem que os números que pertencem ao conjunto dos naturais também pertencem ao conjunto dos racionais.

Praça decorada para festa junina, em São Raimundo Nonato, Piauí. (Fotografia de 2019.)

Em 2021, o estado do Piauí tinha aproximadamente 3 289 290 habitantes; isso significa um aumento de 0,25% na população em relação a 2020, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Os residentes no Piauí representam cerca de 1,5% de toda a população brasileira, e de todos os habitantes do Piauí, cerca de 26,2% vivem em 160 municípios com menos de 10 mil habitantes, isso é equivalente a 861 329 pessoas.

O município de São Raimundo Nonato está entre os 15 municípios mais populosos, com uma população aproximada de 35 mil habitantes em 2021.

1 Conhecendo um pouco mais os números racionais

No texto de abertura, que apresenta dados sobre o estado do Piauí, aparecem números como: 2021, 3 289 290, 0,25 e 10 mil.

Você já aprendeu que esses números são exemplos de **números racionais**, pois também podem ser escritos na forma de fração.

Neste capítulo, vamos estudar um pouco mais os números racionais e observar que números como –4 700, –314, 5 e –33 000 também são exemplos de números racionais. Considere a situação a seguir.

A tia de Ana pagou 180 reais pelo uniforme de basquete das 5 craques do time. Sabendo que o valor pago pela tia de Ana será dividido igualmente entre as 5 jogadoras, vamos descobrir quanto cada uma estava devendo, efetuando a divisão a seguir.

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

$(-180) : (+5) = -36$, pois $(-36) \cdot (+5) = -180$

números inteiros

Cada uma delas estava devendo 36 reais para a tia de Ana.

Vemos que, nesse caso, o quociente de $(-180) : (+5)$ é um número inteiro negativo, uma vez que estamos dividindo números de sinais opostos, e pode ser expresso por uma fração, por exemplo: $\frac{-180}{+5} = -\frac{36}{1}$.

Mais tarde, Ana lembrou que deviam também a inscrição no campeonato, o que elevou a dívida para 207 reais.

Então, Ana efetuou uma nova divisão $(-207) : (+5)$.

Ana observou que não existe nenhum número inteiro que multiplicado por +5 resulte em –207.

$$(-207) : (+5) = \text{quociente}$$

números inteiros **número não inteiro**

Ela sabe que o quociente de $(-207) : (+5)$ é um número não inteiro que pode ser expresso por uma fração, por exemplo, $-\frac{207}{5}$, por um número misto, $-41\frac{2}{5}$, ou, ainda, na forma decimal: $-\frac{207}{5} = -\frac{414}{10} = -41{,}4$.

Então, as meninas descobriram que cada uma delas devia R$ 41,40 para a tia de Ana.

Todo número que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros, com $b \neq 0$, é um **número racional**.

1. Conhecendo um pouco mais os números racionais

Habilidade da BNCC: **EF07MA09**.

Utilizando uma situação contextualizada e próxima da realidade dos estudantes, introduzimos o conceito de número racional, nas suas diversas formas, em um sentido mais amplo do que o de número racional até então conhecido por eles, isto é, agora considerando também os símbolos "+" ou "–".

Para explorar a situação-problema abordada, suponha que a tia de Ana, por ter pagado os uniformes à vista, teve um bônus de R$ 18,00, que repassará às 5 atletas. O bônus que cada menina receberá será obtido efetuando-se:

$(+18) : (+5) = +3{,}6$, pois $(+3{,}6) \cdot (+5) = +18$

Esse bônus também pode ser representado pela fração $+\frac{18}{5}$ ou pelo número misto $+3\frac{3}{5}$.

No caso de transformar um número racional representado por uma fração em seu correspondente na forma decimal, é solicitado "dividir o numerador pelo denominador". Com isso, dizemos que devemos aplicar o algoritmo das divisões euclidianas sucessivas entre os números inteiros que determinam a fração, assim como foi feito no livro do 6º ano.

Na situação apresentada as grandezas dívida referente ao valor do uniforme e quantidade de jogadoras são associadas à fração $-\frac{180}{5}$, que representa uma razão entre essas grandezas. Essas associações serão exploradas ao longo do estudo sobre números racionais, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA09).

Conhecendo um pouco mais os números racionais

Enfatize para os estudantes que os exemplos apresentados indicam que os números racionais escritos na forma decimal com quantidade finita de casas decimais podem ser representados por uma fração decimal. Mostre a eles que a recíproca também vale, ou seja: das frações decimais obtemos, pela divisão do numerador pelo denominador, números na forma decimal com quantidade de casas decimais finita.

Peça aos estudantes que escrevam frações cujos denominadores sejam múltiplos de 3 ou de 7, mas os numeradores não. Comente com eles que essas frações não têm equivalentes que sejam frações decimais, pois 3 e 7 não são fatores de 10, 100, 1000 etc.

Depois, proponha aos estudantes que obtenham os quocientes de cada numerador pelo respectivo denominador. Reforce que esses quocientes são dízimas periódicas e que, nesse caso, a recíproca não é válida, isto é, ao escrever frações equivalentes com base nas dízimas periódicas, não obtemos frações decimais.

Exercícios propostos

Esta seção de exercícios contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA01) ao retomar as noções de divisor e de múltiplo.

Acompanhe a resolução do **exercício 1**:

a) I: $-\frac{7}{4}$; II: $-\frac{5}{9}$; III: $-\frac{12}{2}$.

b) I: –1,75; II: –0,555...; III: –6,0.

c) Os números –1,75 e –0,555... são não inteiros, e o número –6 é inteiro.

No **exercício 2**, os estudantes devem efetuar a divisão dos números para verificar se o resultado é uma dízima periódica ou não. Os **itens a** e **c** podem ser representados por frações decimais: 2,75 e 4,5, respectivamente. Já os **itens b** e **d** não podem: $-1,\overline{6}$ e $-1,4\overline{6}$, respectivamente.

A resolução do **exercício 3** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Acompanhe exemplos de números racionais.

a) –5

b) $\frac{9}{2}$

c) –0,75

d) $-\frac{1}{3}$

e) 3,2

f) $-\frac{20}{5}$

Alguns desses números já estão representados por frações: $\frac{9}{2}$, $-\frac{1}{3}$ e $-\frac{20}{5}$. Também podemos escrever os demais na forma de fração. Observe.

$-5 = -\frac{5}{1}$ $\quad -0,75 = -\frac{75}{100}$ $\quad 3,2 = \frac{32}{10}$

Além disso, todos esses números podem ser escritos na forma decimal. Alguns já estão nessa forma: –0,75 e 3,2. Vamos transformar os outros.

No caso das frações, basta dividir o numerador pelo denominador.

$-5 = -5,0$ $\quad \frac{9}{2} = 4,5$ $\quad -\frac{1}{3} = -0,333...$ $\quad -\frac{20}{5} = -4 = -4,0$

Os números –5; 4,5; –0,75; 3,2 e –4 podem ser representados por uma fração cujo denominador é uma potência de 10 $\left(-5 = -\frac{50}{10};\ 4,5 = \frac{45}{10};\ -0,75 = -\frac{75}{100};\ 3,2 = \frac{32}{10} \text{ e } -4 = -\frac{400}{100}\right)$.

No caso do número –0,333..., que é uma **dízima periódica**, a forma de fração é $-\frac{1}{3}$. Ele não pode ser transformado em uma fração decimal.

Observação

- Já vimos que podemos indicar uma dízima periódica por um traço sobre o período. Desse modo, o número –0,333... pode ser indicado por $-0,\overline{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Considere os quocientes de: **1. a)** I: $-\frac{7}{4}$, II: $-\frac{5}{9}$ e III: $-\frac{12}{2}$

I. (–7) : (+ 4);
II. 5 : (–9);
III. (–12) : (+ 2).

1. b) I: –1,75, II: –0,555... e III: –6,0
1. c) Inteiro: III, não inteiro: I e II.

a) Escreva cada um desses quocientes na forma de fração.
b) Qual é a forma decimal desses quocientes?
c) Classifique cada quociente como número inteiro ou número não inteiro.

2 Determine a forma decimal do número que representa o quociente de cada divisão. Desses números, quais não podem ser representados por frações decimais? **2.** $-1,\overline{6}$ e $-1,4\overline{6}$

a) 11 : 4 **2. a)** 2,75
b) (–5) : 3 **2. b)** $-1,\overline{6}$
c) (–9) : (–2) **2. c)** 4,5
d) 22 : (–15) **2. d)** $-1,4\overline{6}$

3 Associe cada número a uma das letras A, B, C ou D para mostrar em que local do quadro você os colocaria.

	Número racional inteiro	Número racional não inteiro
Forma de fração	A	B
Forma decimal	C	D

a) 3,51 **3. a)** D
b) 351,0 **3. b)** C
c) $-\frac{18}{2}$ **3. c)** A
d) 4,111 **3. d)** D
e) 4,111... **3. e)** D
f) $\frac{4}{5}$ **3. f)** B
g) –0,5 **3. g)** D
h) –2,0 **3. h)** C
i) $-\frac{412}{5}$ **3. i)** B

4 Dados os números racionais 2,3; $-\frac{3}{7}$; –8,0; $\frac{1}{6}$; 2,555...; 4,0; –1,6 e 0,222..., copie no caderno:

a) os números inteiros; **4. a)** –8,0 e 4,0

b) os números racionais na forma de fração; **4. b)** $-\frac{3}{7}$ e $\frac{1}{6}$

c) os números racionais na forma decimal; **4. c)** 2,3; –8,0; –1,6; 2,555...; 4,0 e 0,222...

d) as dízimas periódicas. **4. d)** 2,555... e 0,222...

5 Escreva um exemplo de número: **5.** Respostas possíveis:

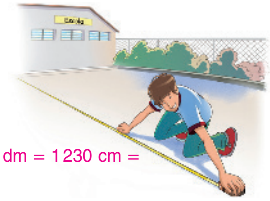
a) racional inteiro; **5. a)** –5

b) racional natural; **5. b)** 10

c) racional não inteiro; **5. c)** 0,65

d) natural não racional. **5. d)** Não existe.

6 João calculou a medida do comprimento, em metro, do pátio da escola e a expressou da seguinte maneira: 12,3 m. Para indicar essa medida por um número inteiro, João fará uma transformação de unidade de medida de comprimento. Como ele poderá fazer isso?



CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

6. 12,3 m = 123 dm = 1 230 cm = = 12 300 mm

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

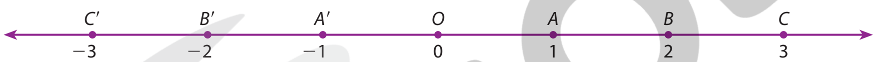
Considere uma fração cujo numerador é múltiplo do denominador, ambos números naturais. Essa fração representa um número racional inteiro ou um número racional não inteiro? Justifique sua resposta. *Pense mais um pouco...*: Um número racional inteiro, pois o numerador é divisível pelo denominador.

2 Representação na reta numérica

Você se lembra de como representamos os números racionais positivos na reta numérica? E como representamos os números inteiros na reta numérica? Da mesma forma, podemos representar os números racionais.

SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

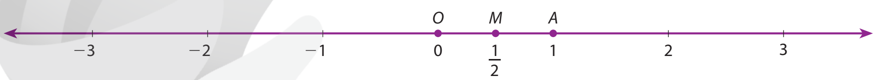
Já sabemos que os números positivos ficam à direita do zero, e os negativos ficam à esquerda. Além disso, a medida da distância entre dois pontos que correspondem a números inteiros consecutivos é sempre a mesma (na reta a seguir, por exemplo, essa medida é 2 cm).



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

A seguir, vamos representar alguns números racionais na reta numérica.

Vamos marcar nessa reta o ponto que corresponde ao número $\frac{1}{2}$. Como esse número é positivo, o ponto correspondente a ele deve estar à direita da origem (ponto *O*, que corresponde ao número zero). Assim, devemos dividir o segmento $\overline{OA}$ em duas partes iguais. O ponto *M* corresponde ao número $\frac{1}{2}$.



Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 4**, **5** e **6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 6**, comente com os estudantes que os números que expressam medidas possibilitam tal transformação. Contudo, a nova unidade na qual a medida será expressa poderá ser pouco usual, como 123 decímetros.

Destaque ainda que medidas expressas na forma fracionária, apesar de muito usadas em diversas áreas industriais, são menos flexíveis em relação à conversão de unidades. Nesses casos, na prática, a conversão usual é entre as unidades de medida "polegada" e "milímetro".

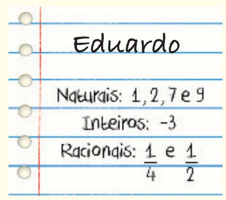
Por exemplo, o diâmetro de um parafuso expresso como $\frac{1}{8}$ de polegada pode ter sua medida em milímetro calculada aproximadamente por: $\frac{1}{8}$ de polegada $= \frac{1}{8}$ de 25,4 milímetros $\simeq$ 3,2 milímetros.

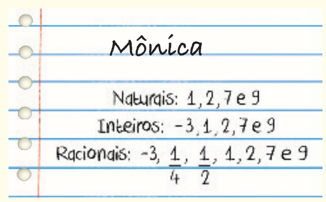
Pense mais um pouco

Espera-se que os estudantes percebam que, quando o numerador da fração é múltiplo do numerador, a fração representa um número racional inteiro.

Para complementar e avaliar o entendimento sobre o conjunto dos números racionais, proponha, após a seção **Pense mais um pouco...**, a seguinte questão:

"O professor escreveu na lousa algumas informações. Em seguida, ele pediu aos estudantes que destacassem todos os números encontrados e os classificassem como naturais, inteiros ou racionais. Acompanhe a classificação de dois estudantes.





ILUSTRAÇÕES: LIGIA DUQUE/ARQUIVO DA EDITORA

Existem algumas diferenças entre essas classificações. Qual delas está incompleta? Justifique".

Espera-se que os estudantes percebam que a classificação feita por Eduardo está incompleta, pois todos os números naturais também são inteiros e todos os números inteiros também são racionais.

2. Representação na reta numérica

Habilidade da BNCC: **EF07MA10**.

Assim como no capítulo anterior, fazemos a associação entre número e ponto da reta numérica considerando três escolhas arbitrárias: a de um ponto de origem associado ao zero, a de uma unidade de medida e a de um sentido crescente (em geral, com a reta na horizontal, da esquerda para a direita). Desse modo, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA10).

Discuta com os estudantes a diferença fundamental entre a reta numérica dos números inteiros e a dos racionais: a infinidade de pontos associados a números racionais existentes entre quaisquer dois de seus pontos. Mostre, por exemplo, que entre os pontos de abscissas –1 e 0 não há nenhum outro ponto que possa ser associado a um número inteiro, mas há infinitos pontos que podem ser associados a números racionais.

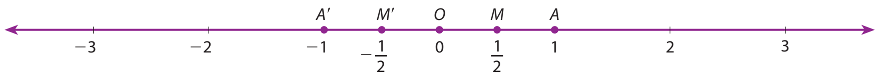
Cite o paradoxo de Zenão sobre Aquiles e a tartaruga. Zenão, discípulo de Parmênides (510-470 a.C.), nasceu em 488 a.C., na cidade de Eleia, atual Vélia, na Itália. Defendeu a filosofia de seu mestre sobre os estudos do ser, da razão e da lógica.

Aquiles, na mitologia grega, foi um herói muito veloz. No entanto, no paradoxo de Zenão, ele perderia a corrida para uma tartaruga, caso desse a ela uma vantagem inicial. No intervalo de tempo em que Aquiles cobrisse a distância inicial entre ele e a tartaruga, esta teria também andado um tanto, que seria uma nova vantagem. Quando Aquiles cobrisse a distância dessa nova vantagem, a tartaruga teria andado outro tanto e ainda estaria à frente.

Imagine em uma reta numérica os pontos de Aquiles e da tartaruga nos momentos citados. Entre a partida e a chegada da corrida, destacaríamos infinitos pontos para cada um deles, com os pontos de Aquiles sempre atrás dos da tartaruga!

O paradoxo supõe que a soma de infinitos intervalos de tempo é infinita. Assim, seria necessário um tempo infinito até Aquiles alcançar a tartaruga. Porém, esses infinitos intervalos de tempo formam uma Progressão Geométrica cuja soma converge para um valor finito: Aquiles alcança a tartaruga.

Para representar o número $-\frac{1}{2}$ nessa mesma reta, procedemos de modo semelhante, levando em conta, no entanto, que $-\frac{1}{2}$ é negativo. Então, $-\frac{1}{2}$ deverá corresponder a um ponto da reta que fica à esquerda da origem. Assim, devemos dividir o segmento $\overline{OA'}$ em duas partes iguais. O ponto M' corresponde ao número $-\frac{1}{2}$.



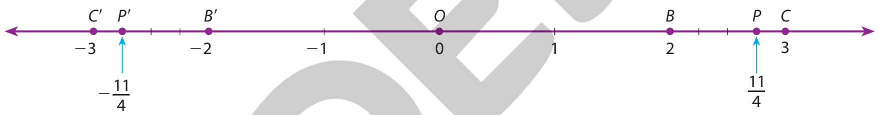
O número $\frac{1}{2}$ é a abscissa do ponto M, e o número $-\frac{1}{2}$, a abscissa do ponto M'.

Os pontos M e M' são chamados de **pontos simétricos em relação a *O***, pois estão à mesma distância de O; porém um está à direita, e o outro, à esquerda. Dizemos que as abscissas $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ são opostas.

Agora, vamos marcar os pontos P e P' de abscissas $\frac{11}{4}$ e $-\frac{11}{4}$, respectivamente. Como $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$, então $\frac{11}{4}$ é um número que está entre 2 e 3. De modo semelhante, podemos concluir que $-\frac{11}{4}$ está entre –3 e –2, pois: $-\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4} = -2 + \left(-\frac{3}{4}\right)$.

Vamos dividir os segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ em quatro partes iguais. Ao ponto P corresponde o número $\frac{11}{4}$, e ao ponto P', o número $-\frac{11}{4}$. Os pontos P e P' são simétricos em relação a O.

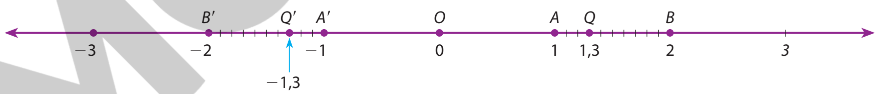
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



Marquemos, ainda, os pontos de abscissas 1,3 e –1,3, ou seja, $\frac{13}{10}$ e $-\frac{13}{10}$.

Observe que 1,3 é maior que 1 e menor que 2, e –1,3 é menor que –1 e maior que –2.

Então, basta dividir os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ em dez partes iguais para marcar os pontos em questão. Na reta, eles estão representados pelos pontos Q e Q'.



Observações

- Todo número racional pode ser associado a um ponto da reta numérica.
- Na reta numérica, dois pontos simétricos em relação à origem O serão chamados apenas de **pontos simétricos** para simplificar a notação.

Para saber mais

Habilidades da BNCC:
EF07MA06 e **EF07MA07**.

Nesta seção, estabelecemos uma conexão entre as Unidades Temáticas **Números** e **Geometria**, por meio do procedimento de desenho geométrico com o auxílio de régua, compasso e esquadro, empregado na divisão de um segmento de reta em n partes iguais. Esse procedimento poderá ser justificado no 9º ano, quando será estudado o Teorema de Tales.

Após a resolução da atividade proposta no **Agora é com você!**, peça aos estudantes que dividam por 6 a medida do segmento desenhado por eles e que confirmem, com a escala da régua, a medida de cada parte em que o segmento inicial foi dividido. Oriente-os no uso do compasso para que tomem cuidado com a ponta seca.

Ao apresentar ao estudantes o fluxograma com os passos executados e solicitar, na **questão b**, uma generalização para n segmentos consecutivos, contribui-se para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA06) e (EF07MA07).

PARA SABER MAIS

Divisão de um segmento em partes iguais

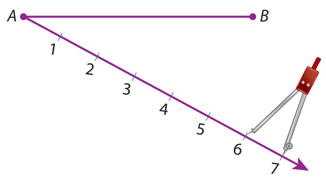
Para dividir um segmento qualquer em determinado número de partes iguais (segmentos congruentes), podemos dividir sua medida por esse número de partes e, utilizando a escala da régua, marcar os pontos de divisão.

Também podemos dividir um segmento por meio de uma construção com régua e compasso. Essa construção geométrica é uma aplicação prática do Teorema de Tales, que será estudado no 9º ano.

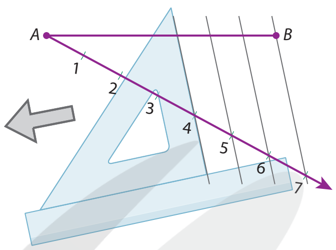
Vamos dividir o segmento $\overline{AB}$ em sete partes de mesma medida.

Acompanhe os passos.

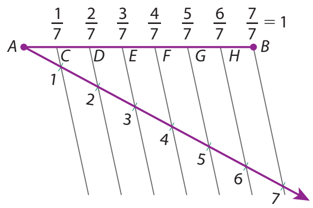
1º Inicialmente, traçamos uma semirreta com origem A, conforme a figura a seguir. Nessa semirreta, a partir de A e com uma mesma abertura do compasso, marcamos sete segmentos consecutivos.



2º Depois, traçamos a reta $\overleftrightarrow{B7}$ e as retas paralelas a ela, que passam pelos pontos 1 a 6. Essas paralelas podem ser traçadas fazendo o esquadro deslizar junto à régua. Observe a figura.



3º Os pontos C, D, E, F, G e H dividem o segmento $\overline{AB}$ em sete partes de mesma medida.



Fluxograma com os passos executados

Trace um segmento $\overline{AB}$.

↓

Trace uma semirreta com origem em A, não contida na reta $\overleftrightarrow{AB}$.

↓

A partir da origem, construa, na semirreta, 7 segmentos consecutivos congruentes.

↓

Pelos pontos 1 a 6, trace retas paralelas a $\overline{B7}$, dividindo $\overline{AB}$ em 7 partes iguais.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

a) Usando régua, compasso e esquadro, trace um segmento qualquer e divida-o em seis partes iguais. **a)** Construção de figura.

b) É possível modificar o fluxograma da divisão de um segmento em partes iguais de modo que os passos sirvam para a divisão de qualquer segmento em um número natural n ($n > 1$) de partes iguais? Converse com o professor e os colegas. **b)** Sim, basta substituir o número 7 por n.

Exercícios propostos

No **exercício 7**, as abscissas dos pontos *A*, *M*, *D*, *E* e *C* são, respectivamente, 0,25, 2, –1, –1,5 e $\frac{3}{2}$.

A resolução do **exercício 8** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Complemente esse exercício propondo aos estudantes a obtenção de números racionais que estejam entre dois outros. Por exemplo, peça a eles que determinem um número racional entre os pontos *A* e *E* ou um número racional e inteiro entre *B* e *F*. Mostre que expressar todos os números racionais em uma única forma (fracionária ou decimal) possibilita obter as respostas mais facilmente.

No **exercício 9**:

a) O ponto *A* está à esquerda do ponto *B*, porque $A = -1{,}5$ e $B = \frac{7}{5} = 1{,}4$.

b) O ponto *A* não coincide com o ponto *C*, pois $-1{,}5 \neq -\frac{1}{5}$.

c) Os pontos *D* e *E* são simétricos, porque estão à mesma distância do zero, um à esquerda e outro à direita.

d) O ponto *B* não está à direita dos demais pontos, porque $\frac{7}{5}$, que é igual a 1,4, não é maior que 5,7.

3. Módulo de um número racional

Habilidade da BNCC: **EF07MA10**.

Pergunte aos estudantes se eles se lembram da definição de módulo de um número. Ao ouvir as respostas, se necessário, corrija-as ou complemente-as.

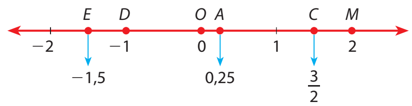
O conceito de módulo de um número *x*, que aqui é definido como a distância do ponto de abscissa *x* à origem, é aplicado em diversos problemas e campos de estudo da Matemática, como na Unidade Temática **Álgebra**, quando da definição genérica de raiz com índice par $\left(\sqrt{x^2} = |x|\right)$.

Se necessário, dê mais alguns exemplos na lousa.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

7 Observe a reta numérica.



Determine as abscissas dos pontos *A*, *M*, *D*, *E* e *C*. **7.** *A*: 0,25; *M*: 2; *D*: –1; *E*: –1,5; *C*: $\frac{3}{2}$

8 Desenhe uma reta numérica e represente sobre ela os pontos: **8.** Construção de figura.

- *A*, *B*, *C* e *D* de abscissas $\frac{2}{5}$; $-\frac{7}{2}$; $\frac{5}{2}$ e $-\frac{5}{4}$, respectivamente;
- *E*, *F*, *G* e *H* de abscissas –2,5; 1,25; 3,5 e –0,4, respectivamente.

Descubra quais são os pares de pontos simétricos. **8.** *A* e *H*; *B* e *G*; *C* e *E*; *D* e *F*.

9 Em uma reta numérica, foram assinalados os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, que representam os números –1,5; $\frac{7}{5}$; $-\frac{1}{5}$; +5,7 e –5,7, nessa ordem.

Assim, é possível concluir que:

a) *A* está à direita de *B*? Por quê?

b) *A* e *C* coincidem? Por quê?

c) *D* e *E* são simétricos? Por quê?

d) *B* está à direita dos demais pontos? Por quê?

9. a) Não, porque qualquer número negativo fica à esquerda de qualquer número positivo.

b) Não, porque: $-1{,}5 = -\frac{15}{10} = -\frac{3}{2} \neq -\frac{1}{5}$.

c) Sim, porque estão à mesma distância do zero, um à esquerda e outro à direita.

9. d) Não, porque $\frac{7}{5}$, que é igual a 1,4, não é maior que +5,7.

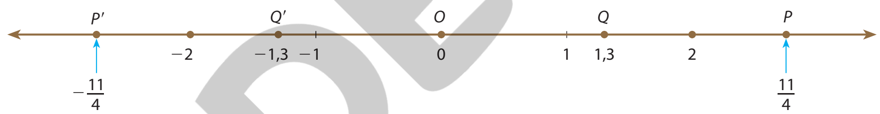
3 Módulo de um número racional

Sabemos que, em uma reta numérica, é possível determinar a medida da distância do ponto de abscissa zero (origem) a outro ponto qualquer da reta.

A medida da distância de um ponto da reta numérica à origem é o **módulo** do número que corresponde a esse ponto.

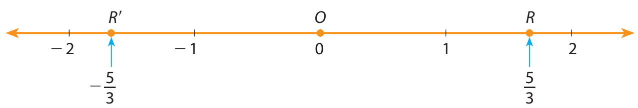
Observe os exemplos a seguir.

a)



- O módulo de $-\frac{11}{4}$ (abscissa do ponto *P'*) é $\frac{11}{4}$ (medida da distância do ponto *P'* à origem).
  Então, como o módulo de $-\frac{11}{4}$ é indicado por $\left|-\frac{11}{4}\right|$, podemos escrever $\left|-\frac{11}{4}\right| = \frac{11}{4}$.
- O módulo de 1,3 (abscissa do ponto *Q*) é 1,3 (medida da distância do ponto *Q* à origem). Então, $|1{,}3| = 1{,}3$.
- O módulo de –1,3 (abscissa do ponto *Q'*) é 1,3 (medida da distância do ponto *Q'* à origem). Então, $|-1{,}3| = 1{,}3$.

b) Se $\frac{5}{3}$ representa a medida da distância de *O* a um ponto na reta numérica, então a abscissa desse ponto pode ser $-\frac{5}{3}$ ou $\frac{5}{3}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Pergunte aos estudantes se eles se recordam de números opostos ou simétricos. Depois, explique que números que têm o mesmo módulo, porém sinais diferentes, são chamados de opostos ou simétricos.

Para complementar, na lousa, represente uma reta numérica com alguns números simétricos e peça aos estudantes que os identifiquem.

Números que têm o mesmo módulo, porém sinais diferentes, são **opostos** ou **simétricos**. Observe alguns números opostos:

- $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$;
- $-0,4$ e $0,4$;
- $-2\frac{1}{4}$ e $2\frac{1}{4}$;
- 3,717171... e –3,717171...

Podemos concluir que, se um número *a* é oposto de um número *b*, então *b* é oposto de *a*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

10 Leia, pense e responda no caderno.

a) Qual é o módulo de $-\frac{3}{5}$? **10. a)** $\frac{3}{5}$

b) Quanto vale $|-14,3|$? **10. b)** 14,3

c) Se $|-8|$ representa a medida da distância da origem *O* a *T* na reta numérica, qual é a abscissa do ponto *T*? **10. c)** –8 ou +8

d) Se $|a| = \frac{2}{3}$, quais são os possíveis valores de *a*? **10. d)** $-\frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{3}$

e) Se $|x| = 1,5$, qual é a medida da distância do ponto de abscissa *x* até a origem? **10. e)** 1,5

11 Determine no caderno:

a) o oposto de $\frac{7}{9}$; **11. a)** $-\frac{7}{9}$

b) o oposto de $-\frac{7}{9}$; **11. b)** $\frac{7}{9}$

c) o oposto de 5,4238; **11. c)** –5,4238

d) o oposto do oposto de –6,72; **11. d)** –6,72

e) o oposto de $|-1,555...|$; **11. e)** –1,555...

f) o oposto do oposto de $\left|-\frac{6}{5}\right|$. **11. f)** $\frac{6}{5}$

4 Comparação de números racionais

Já vimos como comparar números inteiros em uma reta numérica. Dados dois números inteiros diferentes, o menor é aquele que, na reta numérica, está à esquerda do outro.

Observe alguns exemplos.

a) $6 > 3$

b) $2 > -5$

c) $-4 < -1$

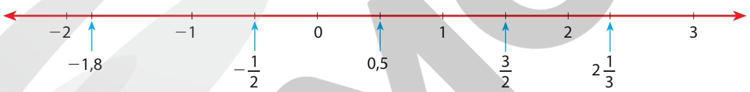
d) $-2 < 2$

e) $0 > -8$

f) $9 > 0$

Agora, vamos aprender a comparar números racionais em uma reta numérica.

Dados dois números racionais diferentes, o menor é aquele que está à esquerda do outro na reta numérica.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe os exemplos.

a) $-1,8 < -\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2} > -2$

c) $\frac{3}{2} < 2\frac{1}{3}$

d) $-1,8 < 0$

A seguir, veremos como comparar números racionais sem a reta numérica.

Exercícios propostos

O contexto do **exercício 10** auxilia na apresentação de questões como:

- Que número está à distância de 3,2 unidades de 25 e à distância de 4,2 unidades de 24? (28,2)
- Que número está à mesma distância de 22,4 e 3,8? (13,1)

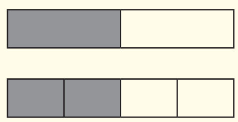
As resoluções dos **exercícios 10** e **11** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

4. Comparação de números racionais

Habilidades da BNCC: **EF07MA08**, **EF07MA09** e **EF07MA10**.

Neste tópico exploramos a comparação de números racionais na forma de fração e na forma decimal, explorando diferentes recursos, o que contribui para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA08) e (EF07MA09).

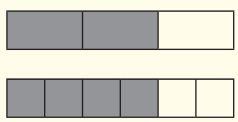
No caso da comparação entre dois números racionais escritos na forma de fração, se necessário, retome o conceito de frações equivalentes, preferencialmente, associando-o a uma representação visual, como retângulos congruentes, mas divididos em partes de tamanhos diferentes. Acompanhe os exemplos:



$\frac{1}{2}$

$\frac{2}{4}$

As frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ são equivalentes.



$\frac{2}{3}$

$\frac{4}{6}$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

As frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ são equivalentes.

Ao comparar números racionais na forma decimal, é comum os estudantes questionarem por que, por exemplo, $1,34 > 1,278$, uma vez que 1,278 tem mais casas decimais que 1,34. Caso isso ocorra, retome com eles o significado das casas decimais, considerando que no número 1,34 a parte decimal 0,34 corresponde a $\frac{34}{100}$ na forma fracionária, e $\frac{34}{100} = \frac{340}{1\,000}$; assim, 1,34 é o mesmo que 1 inteiro e 340 milésimos, que é maior que 1,278 (1 inteiro e 278 milésimos).

Em outras palavras, para facilitar a comparação entre números com quantidades diferentes de casas decimais, podemos acrescentar zeros à direita da parte decimal sem alterar o valor do número: $1,34 = 1,340$.

Comparando números racionais escritos na forma de fração

Na situação apresentada são comparadas razões escritas na forma de fração, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA08) e (EF07MA09).

Os estudantes devem perceber que a comparação de números racionais é útil na resolução de diversos problemas. Acompanhe um exemplo.

Uma pesquisa feita em dois restaurantes diferentes a respeito da satisfação dos clientes com o atendimento revelou que: no restaurante A, de 40 pessoas entrevistadas, 30 disseram estar satisfeitas; no restaurante B, 24 dos 30 entrevistados responderam estar satisfeitos.

Em qual dos dois restaurantes a satisfação com o atendimento foi maior?

Esse problema pode ser resolvido por meio da comparação entre as frações $\frac{30}{40}$ e $\frac{24}{30}$:

- restaurante A: $\frac{30}{40} = \frac{90}{120}$;
- restaurante B: $\frac{24}{30} = \frac{96}{120}$.

Assim, conclui-se que a satisfação com o atendimento foi maior no restaurante B.

Comparando números racionais escritos na forma decimal

Escritos na forma decimal, os números racionais podem ser comparados considerando, além do sinal, as suas características no quadro de ordens dos racionais absolutos. Iniciamos pela comparação das partes inteiras e depois, em caso de igualdade, pela comparação da parte decimal.

Comparando números racionais escritos na forma de fração

Éverton e Lucas pegaram algumas laranjas do pomar e as usaram para fazer suco.

Para fazer o suco, Éverton espremeu 3 metades de uma laranja, e Lucas espremeu 5 metades.

Quem usou mais laranjas?

Quando os denominadores são iguais, basta comparar os numeradores. Como exemplo, vamos comparar os números $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{2}$.

Como $3 < 5$, ou seja, três metades são menores do que cinco metades, temos: $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$.

Portanto, Lucas usou mais laranjas do que Éverton.

Quando os denominadores são diferentes, reduzimos as frações ao mesmo denominador comum e então comparamos os numeradores, como no caso anterior.

Vamos comparar as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

Reduzindo-as ao mesmo denominador, obtemos:

$\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ e $\frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

Como $8 < 9$, então $\frac{8}{12} < \frac{9}{12}$ e, portanto, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$.

Do mesmo modo, comparamos números racionais negativos escritos na forma de fração.

Acompanhe os exemplos.

a) $-\frac{1}{3} > -\frac{5}{3}$, pois $-1 > -5$.

b) $-\frac{2}{3} < -\frac{3}{5}$, pois $-\frac{10}{15} < -\frac{9}{15}$.

Comparando números racionais escritos na forma decimal

Inicialmente, consideramos os sinais dos números dados: se eles forem diferentes, já sabemos que um número positivo é sempre maior que um número negativo; se os sinais forem iguais, comparamos a parte inteira. E se as partes inteiras forem iguais, comparamos a parte decimal.

Observe os exemplos.

a) $2{,}35 > -5{,}827$

O primeiro número (2,35) é positivo, e o segundo (–5,827) é negativo.

b) $2{,}35 < 2{,}6$

A parte inteira é igual, mas o segundo número tem 6 décimos, enquanto o primeiro tem 3 décimos; portanto, 3 décimos < 6 décimos.

c) $-2{,}35 > -2{,}6$

A parte inteira é igual, mas o primeiro número tem 3 décimos negativos, e o segundo tem 6 décimos negativos; portanto, 3 décimos negativos > 6 décimos negativos.

15. a) $|-0,6| > \left|-\frac{1}{5}\right|$; b) $\left|-\frac{5}{6}\right| = |0,8\overline{3}|$; c) $\left|-\frac{1}{2}\right| < \left|-\frac{5}{3}\right|$; d) $\left|\frac{5}{4}\right| < |-3,2|$; e) $\left|-\frac{3}{8}\right| > |0|$; f) $|-0,\overline{6}| > |-0,6|$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

12 Qual é maior, qual é menor? Responda usando os sinais > ou <.

a) $-\frac{5}{3}$ e $\frac{2}{9}$ **12. a)** $-\frac{5}{3} < \frac{2}{9}$

b) $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{7}$ **12. b)** $\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$

c) $-\frac{1}{4}$ e $-\frac{5}{6}$ **12. c)** $-\frac{1}{4} > -\frac{5}{6}$

d) $-\frac{1}{8}$ e $-\frac{1}{2}$ **12. d)** $-\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$

e) $-\frac{5}{6}$ e $-\frac{2}{5}$ **12. e)** $-\frac{5}{6} < -\frac{2}{5}$

f) $1\frac{1}{4}$ e $3\frac{1}{5}$ **12. f)** $1\frac{1}{4} < 3\frac{1}{5}$

13 Identifique o maior número racional em cada caso.

a) –3,2 ou –5,4 **13. a)** –3,2

b) –7,12 ou –7,10 **13. b)** –7,10

c) 1,2 ou –10,6 **13. c)** 1,2

d) –4,52 ou –4,5204 **13. d)** –4,52

14 Papai fez o bolo preferido da família para a sobremesa de domingo. Para servi-lo, repartiu-o em 24 pedaços iguais. Eu comi $\frac{1}{12}$ do bolo, minha irmã e papai comeram $\frac{1}{8}$ do bolo cada um, e mamãe comeu $\frac{1}{6}$ do bolo. Quem comeu mais bolo? **14.** A mãe.

15 Em cada item, compare os números racionais usando os sinais <, = ou >.

a) $|-0,6|$ e $\left|-\frac{1}{5}\right|$

b) $\left|-\frac{5}{6}\right|$ e $|0,8\overline{3}|$

c) $\left|-\frac{1}{2}\right|$ e $\left|-\frac{5}{3}\right|$

d) $\left|\frac{5}{4}\right|$ e $|-3,2|$

e) $\left|-\frac{3}{8}\right|$ e $|0|$

f) $|-0,\overline{6}|$ e $|-0,6|$

16 Escreva os números de cada item em ordem crescente. **16. a)** 0,65; $\frac{5}{3}$; 2,1; $\frac{9}{2}$

a) $\frac{9}{2}$; 2,1; 0,65; $\frac{5}{3}$ **16. b)** $-\frac{11}{2}$; –0,1222...; 0,1; $\frac{1}{6}$

b) $-\frac{11}{2}$; $\frac{1}{6}$; –0,122...; 0,1

c) $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{3}$; $\left|-\frac{9}{4}\right|$; $|-2,34|$ **16. c)** $\frac{5}{8}$; $\left|-\frac{9}{4}\right|$; $\frac{7}{3}$; $|-2,34|$

17 Marina e Carolina foram mergulhar em Fernando de Noronha (PE). Em determinado momento, Marina se encontrava a –13,5 metros em relação ao nível do mar, e Carolina, por sua vez, estava a –11,6 metros.

a) Qual delas estava mais próxima da superfície? **17. a)** Carolina.

b) Represente na forma de fração a medida da profundidade em que cada uma se encontrava. **17. b)** Resposta possível: $-\frac{135}{10}$ e $-\frac{116}{10}$.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Gráficos e porcentagens

Queda em taxas de vacinação deve 'ressuscitar' doenças erradicadas do país

O índice de vacinação brasileiro regrediu, no ano passado [2020], a taxas de cobertura similares às dos anos 1980. A pandemia é apenas um dos fatores que explicam o fenômeno, já que a cobertura vacinal cai há pelo menos seis anos.

"Sem dúvida, a desinformação é a principal causa da queda da cobertura vacinal. As pessoas – incluindo aí vários profissionais de saúde – desconhecem os calendários vacinais para adolescentes, gestantes, adultos, idosos e imunodeprimidos. Some-se a isso o desserviço prestado pelas *fake news* e eis o resultado desastroso que estamos vendo", analisa Rosana Richtmann, infectologista e diretora do Comitê de Imunização da SBI (Sociedade Brasileira de Infectologia). [...]

PREFEITURA MUNICIPAL DE SÃO RAIMUNDO NONATO (PI)

53

Fernando de Noronha é formado por 21 ilhas e ilhotas, e ocupa uma área de 26 km^2. A ilha principal tem 17 km^2 e fica a 545 km de Recife e a 360 km de Natal.

Após uma campanha liderada pelo ambientalista gaúcho José Truda Palazzo Jr., em 1988, a maior parte do arquipélago foi declarada Parque Nacional para a proteção das espécies endêmicas lá existentes. Este pode ser um bom momento para a discussão sobre as diferentes unidades de conservação instituídas no Brasil, como reservas biológicas, reservas ecológicas, estações ecológicas, parques nacionais, estaduais e municipais, florestas nacionais, estaduais e municipais, áreas de proteção ambiental, áreas de relevante interesse ecológico e reservas extrativistas, entre outras definidas pelo poder público. Os professores de Ciências e Geografia podem fornecer orientações pertinentes a essa discussão.

Exercícios propostos

No **exercício 12**, não deixe que os estudantes usem uma calculadora para comparar os números. Peça a eles que reduzam as frações ao mesmo denominador comum.

a) $-\frac{5}{3}$ é negativo.

Como $\frac{2}{9}$ é positivo, temos

$-\frac{5}{3} < \frac{2}{9}$.

b) Reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$\frac{2}{3} = \frac{14}{21}$ e $\frac{2}{7} = \frac{6}{21}$

Logo, $\frac{2}{3} > \frac{2}{7}$.

c) Reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$-\frac{1}{4} = -\frac{3}{12}$ e $-\frac{5}{6} = -\frac{10}{12}$

Logo, $-\frac{1}{4} > -\frac{5}{6}$.

d) Reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$-\frac{1}{8}$ e $-\frac{1}{2} = -\frac{4}{8}$

Logo, $-\frac{1}{8} > -\frac{1}{2}$.

e) Reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$-\frac{5}{6} = -\frac{25}{30}$ e

$-\frac{2}{5} = -\frac{12}{30}$

Logo, $-\frac{5}{6} < -\frac{2}{5}$.

f) $1\frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{4+1}{4} = \frac{5}{4}$

$3\frac{1}{5} = 3 + \frac{1}{5} = \frac{15+1}{5} = \frac{16}{5}$

Reduzindo ao mesmo denominador, temos:

$\frac{5}{4} = \frac{25}{20}$ e $\frac{16}{5} = \frac{64}{20}$

Logo, $1\frac{1}{4} < 3\frac{1}{5}$.

Neste caso, em que os números mistos têm o mesmo sinal e partes inteiras diferentes, basta comparar as partes inteiras.

As resoluções dos **exercícios 13** a **17** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

O **exercício 17** cita Fernando de Noronha, um arquipélago situado no oceano Atlântico, a leste do estado do Rio Grande do Norte e pertencente ao estado de Pernambuco.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF07MA36**.

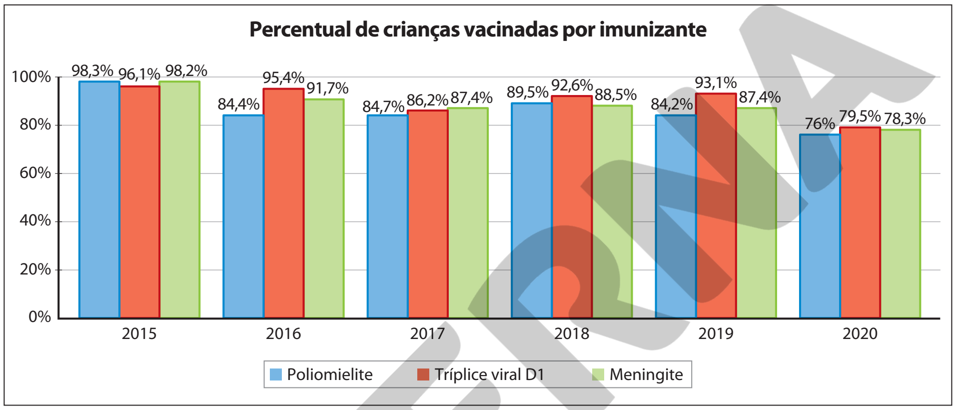
Solicite aos estudantes que façam a leitura do texto. Questione se eles têm dúvidas e as esclareça. Depois, comente que, para uma população atingir o nível ótimo de imunização contra uma doença infectocontagiosa, é preciso que 95% do público-alvo esteja vacinado, ou seja, que de cada 100 crianças 95 estejam vacinadas. Mas não é essa a situação do Brasil quando analisamos os índices de vacinação, que só vêm caindo. Em 2019, o Brasil perdeu o certificado de país livre do sarampo. Depois de passar quase duas décadas registrando alguns poucos casos importados da doença, o país contabilizou, em 2020, mais de 8 mil casos confirmados, com a ocorrência de óbitos. Outra doença que apresenta alto risco de volta é a poliomielite, visto que a porcentagem de crianças vacinadas está abaixo de 80%, como mostra o gráfico. Essas doenças são transmitidas facilmente de um indivíduo para outro através do contato direto. Isso significa que um estudante doente em uma sala de aula pode contaminar muitos outros, numa escalada perigosa para todos. Uma das razões da volta do sarampo, e da provável volta de outras doenças graves, segundo especialistas, é a desinformação dos pais, que têm dado crédito a *fake news* que acusam as vacinas de serem perigosas para a saúde dos filhos. Outra razão pode ser o excesso de confiança das famílias, que supõem erroneamente que essas doenças não voltarão. Infelizmente, não é esse o cenário que estamos visualizando. Após comentar o texto e as informações com os estudantes, questione: "Vocês sabem qual é a importância das vacinas para a saúde?"; "Vocês sabem se estão com as vacinas em dia?"; "Qual foi a última vacina que vocês tomaram?"; "Vocês verificam sua caderneta de vacinação para acompanhar as vacinas indicadas para sua idade?". Aproveite esse momento para enfatizar aos estudantes que as vacinas vêm salvando milhões de vidas ao longo dos anos; por isso, é tão importante seguir o calendário de vacinas da Secretaria da Saúde do Estado e do Ministério da Saúde e mantê-las em dia.

O melhor exemplo disso ocorreu com o retorno do sarampo, que reapareceu após anos de erradicação. "Ele voltou por causa das baixas coberturas vacinais", afirma Renato Kfouri, diretor da SBIm (Sociedade Brasileira de Imunizações).

A proteção contra a doença está inclusa na vacina tríplice viral, que protege também contra caxumba e rubéola. Ela é dada de forma gratuita em duas doses pelo SUS (Sistema Único de Saúde) nos postos de saúde.

Fonte: MADEIRO, C. Queda em taxas de vacinação deve 'ressuscitar' doenças erradicadas do país. **Portal VivaBem UOL**, 29 set. 2021. Disponível em: https://www.uol.com.br/vivabem/noticias/redacao/2021/09/29/queda-em-taxas-de-vacinacao-deve-ressuscitar-doencas-erradicadas-do-pais.htm. Acesso em: 17 maio 2022.

Observe no gráfico o percentual de crianças vacinadas em cada ano, por imunizante:



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: MADEIRO, C. Queda em taxas de vacinação deve 'ressuscitar' doenças erradicadas do país. Portal **VivaBem UOL**, 7 out. 2021. Disponível em: https://www.uol.com.br/vivabem/noticias/redacao/2021/09/29/queda-em-taxas-de-vacinacao-deve-ressuscitar-doencas-erradicadas-do-pais.htm. Acesso em: 17 maio 2022.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. b) Resposta possível: promover campanhas de conscientização entre a população adulta.

1 Considerando a informação apresentada, responda às questões.

a) Qual é a importância da vacinação infantil? **1. a)** A vacinação protege a população infantil de diferentes doenças.

b) Que ações podem ser tomadas por agentes de saúde para ampliar a cobertura vacinal infantil?

c) Qual foi a variação percentual da população vacinada em 2015 e em 2020 pelo imunizante da poliomielite? **1. c)** –22,3%

d) E dos demais imunizantes, no mesmo período? **1. d)** Tríplice viral D1: –16,6% e meningite: –19,9%.

2 Faça uma pesquisa com seus colegas para saber qual foi a última vacina que eles tomaram e com quantos anos isso ocorreu. **2.** Respostas pessoais.

- Para fazer sua pesquisa, estipule a quantidade de colegas que serão entrevistados.
- Elabore um questionário para que os colegas possam responder à sua pesquisa. Nesse questionário, você pode solicitar-lhes somente as informações necessárias à sua pesquisa.
- Após a coleta dos dados, organize as informações em uma tabela ou em um gráfico.
- Apresente o resultado obtido ao professor e aos colegas de turma.

54

Ao tratar da importância da vacinação, contribui-se para uma reflexão sobre os Temas Contemporâneos Transversais **saúde** e **direitos da criança e do adolescente**.

Agora quem trabalha é você!

O texto e a discussão sobre o tema darão embasamento aos estudantes para responder à **atividade 1**.

Para a **atividade 2**, peça a eles que façam a pesquisa de maneira organizada. Ao final da atividade, pode-se construir, na lousa, um gráfico com as informações de toda a turma. Ao apresentar uma proposta de pesquisa, essa atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA36) e das **competências gerais 2**, **4** e **8**.

5 O máximo divisor comum (mdc)

Livros encomendados	
Livraria	**Número de livros**
A	96
B	108
C	132

Dados obtidos nas livrarias.

A tabela mostra o número de livros encomendados pelas livrarias A, B e C a determinada editora.

O encarregado de preparar as encomendas recebeu orientação de colocar o maior número possível de livros em cada pacote, de modo que todos os pacotes tivessem a mesma quantidade de livros.

Acompanhe o que o encarregado fez para determinar a quantidade de livros que deveria colocar em cada pacote.

Inicialmente, determinou os divisores naturais de cada um dos números da tabela:

- divisores de 96: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 8, **12**, 16, 24, 32, 48, 96;
- divisores de 108: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 9, **12**, 18, 27, 36, 54, 108;
- divisores de 132: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, 11, **12**, 22, 33, 44, 66, 132.

Note que os números 1, 2, 3, 4, 6 e 12 são divisores de 96, de 108 e de 132, ou seja, eles são **divisores comuns** de 96, 108 e 132.

Assim, para que os pacotes tivessem a mesma quantidade de livros, o encarregado poderia colocar 1, 2, 3, 4, 6 ou 12 livros em cada pacote. Como foi determinado que cada pacote deveria ter o maior número possível de livros, então cada pacote deveria conter 12 livros.

O que o encarregado fez foi encontrar o maior divisor comum dos números 96, 108 e 132.

O maior divisor comum de dois ou mais números é chamado de **máximo divisor comum** e representado pelas iniciais **mdc**.

Na situação descrita, o máximo divisor comum de 96, 108 e 132 é 12, que se indica por:

$$\text{mdc}(96, 108, 132) = 12$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

18. 60 centímetros.

18 Um marceneiro tem duas ripas de madeira, uma de 120 centímetros de medida de comprimento e outra de 180 centímetros, e deve cortá-las em pedaços iguais para montar uma pequena estante. Sabendo que os pedaços devem ser do maior tamanho possível, qual deve ser a medida do comprimento de cada pedaço?

MARCIO GUERRA/ARQUIVO DA EDITORA

19 Determine: **19. a)** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

a) os divisores de 60; **19. b)** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

b) os divisores de 72;

c) os divisores comuns de 60 e 72;

d) o maior desses divisores comuns. **19. d)** 12

19. c) 1, 2, 3, 4, 6, 12

20 Determine: **20. c)** 3 **20. d)** 8

a) mdc(8, 10) **20. a)** 2

b) mdc(40, 50) **20. b)** 10

c) mdc(9, 12, 15)

d) mdc(16, 56, 80)

21 Em uma classe há 28 meninos e 21 meninas. A professora quer formar grupos só de meninas ou só de meninos, com a mesma quantidade de estudantes e com a maior quantidade possível.

a) Quantos estudantes terá cada um desses grupos? **21. a)** 7 estudantes.

b) Quantos grupos de meninas podem ser formados? **21. b)** 3 grupos.

c) E quantos grupos de meninos? **21. c)** 4 grupos.

22 *Hora de criar* – Elabore um problema envolvendo divisores comuns de 150 e 275. Troque de caderno com um colega para um resolver o problema do outro. Depois, destroquem para corrigi-los. **22.** Resposta pessoal.

55

5. O máximo divisor comum (mdc)

Habilidade da BNCC: **EF07MA01**.

Neste tópico, abordamos o conceito de máximo divisor comum por meio de uma situação contextualizada de fácil entendimento aos estudantes. O cálculo feito sem recorrer a algoritmos ou fórmulas é mais acessível. Convém avaliar se há necessidade de recordar com a turma os critérios de divisibilidade.

Elabore com os estudantes situações-problema em que a resolução exija o cálculo do mdc de um conjunto de números naturais. Com base no que for elencado nessas situações, proponha-lhes que, em duplas, formulem problemas um para o outro e procedam à resolução e à verificação.

Exercícios propostos

Os **exercícios 18** e **21** tratam de grandezas de naturezas diferentes – a do primeiro é uma grandeza contínua, e a do segundo é uma grandeza discreta –, embora sejam similares quanto à estrutura matemática em relação ao que é dado e ao que é pedido. Portanto, ambos os exercícios têm um mesmo caminho de resolução, no caso, o mdc.

Em situações-problema que podem ser resolvidas pelo cálculo do máximo divisor comum, como a apresentada no **exercício 21**, é preciso ficar atento às respostas dos estudantes. Mesmo quando eles efetuam o cálculo adequadamente, nem sempre conseguem responder às questões propostas. Os **itens a** e **b**, por exemplo, só poderão ser respondidos corretamente se os estudantes interpretarem de maneira adequada o mdc obtido no **item a**.

As resoluções dos **exercícios 18** a **22** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Encontrando o mdc pela decomposição em fatores primos

Uma vez estabelecida a compreensão do conceito de mdc, pode-se avançar no emprego de métodos mais práticos de obtenção do mdc e que facilitam trabalhar com números maiores e problemas mais complexos.

Convém lembrar que todos os números naturais, exceção feita ao 0 e ao 1, são números primos ou números compostos (produtos de números primos).

O mdc de um conjunto de números naturais pode ser igual a 1, ou ser um número primo, ou, então, um número composto. Ele é obtido pela decomposição individual em fatores primos dos números desse conjunto, no qual são selecionados apenas os fatores comuns e na quantidade em que se repetem em todas essas decomposições.

Exercícios propostos

No **exercício 23**:

a) $mdc(a, b) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

b) $mdc(a, c) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

c) $mdc(b, c) =$
$= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 =$
$= 4 \cdot 9 \cdot 7 = 36 \cdot 7 = 252$

d) $mdc(a, b, c) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

No **exercício 24**:

Avalie a conveniência de apresentar para a turma a resolução pelo método prático.

a) Vamos utilizar o método prático para obter o mdc entre 32 e 48:

$$\begin{array}{r|l} 32,\ 48 & \mathbf{2} \\ 16,\ 24 & \mathbf{2} \\ 8,\ 12 & \mathbf{2} \\ 4,\ \ 6 & \mathbf{2} \\ 2,\ \ 3 & 2 \\ 1,\ \ 3 & 3 \\ \hline 1,\ \ 1 & \end{array}$$

$mdc(32, 48) = 2^4 = 16$

b) Vamos utilizar o método prático para obter o mdc entre 60 e 72:

$$\begin{array}{r|l} 60,\ 72 & \mathbf{2} \\ 30,\ 36 & \mathbf{2} \\ 15,\ 18 & 2 \\ 15,\ \ 9 & \mathbf{3} \\ 5,\ \ 3 & 3 \\ 5,\ \ 1 & 5 \\ \hline 1,\ \ 1 & \end{array}$$

$mdc(60, 72) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$

Encontrando o mdc pela decomposição em fatores primos

Vimos como calcular o mdc de dois ou mais números naturais conhecendo seus divisores. Agora, vamos estudar como aplicar o processo da decomposição em fatores primos para o cálculo do mdc de um número.

Como exemplo, vamos calcular o mdc dos números 280 e 300. Inicialmente, decompomos cada número em fatores primos:

DANIEL ZEPPO/ARQUIVO DA EDITORA

$$\begin{array}{r|l} 280 & \mathbf{2} \\ 140 & \mathbf{2} \\ 70 & 2 \\ 35 & \mathbf{5} \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 300 & \mathbf{2} \\ 150 & \mathbf{2} \\ 75 & 3 \\ 25 & \mathbf{5} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$280 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{5} \cdot 7$ $\qquad$ $300 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{2} \cdot 3 \cdot \mathbf{5} \cdot 5$

$280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ $\qquad$ $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$

Os fatores primos comuns, destacados no exemplo, são $2 \cdot 2$ e 5, ou seja, 2^2 e 5 (é preciso considerar os fatores comuns que apresentem o menor expoente para que eles sejam divisores dos dois números). Multiplicando esses fatores, obtemos o mdc desses dois números. Então:

$$mdc(280, 300) = 2^2 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$$

Ainda como exemplo, vamos calcular o mdc dos números 120, 252 e 150.

$$\begin{array}{r|l} 120 & \mathbf{2} \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & \mathbf{3} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 252 & \mathbf{2} \\ 126 & 2 \\ 63 & \mathbf{3} \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 150 & \mathbf{2} \\ 75 & \mathbf{3} \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

$mdc(120, 252, 150) = 2 \cdot 3 = 6$

Observação

- Dois ou mais números que têm o máximo divisor comum igual a 1 são chamados de **números primos entre si**.

  Por exemplo, 8 e 15 são primos entre si, pois o $mdc(8, 15) = 1$. Observe:

  • divisores de 8: **1**, 2, 4, 8

  • divisores de 15: **1**, 3, 5, 15

  Note que o único divisor comum desses números é o 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

23 Considerando $a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, $b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ e $c = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$, calcule:

a) $mdc(a, b)$ **23. a)** 12

b) $mdc(a, c)$ **23. b)** 24

c) $mdc(b, c)$ **23. c)** 252

d) $mdc(a, b, c)$ **23. d)** 12

24 Aplicando a decomposição em fatores primos, determine o mdc entre os números de cada item a seguir.

a) 32 e 48; **24. a)** 16

b) 60 e 72; **24. b)** 12

c) 75 e 125; **24. c)** 25

d) 70, 90 e 120; **24. d)** 10

e) 28, 70 e 84. **24. e)** 14

56

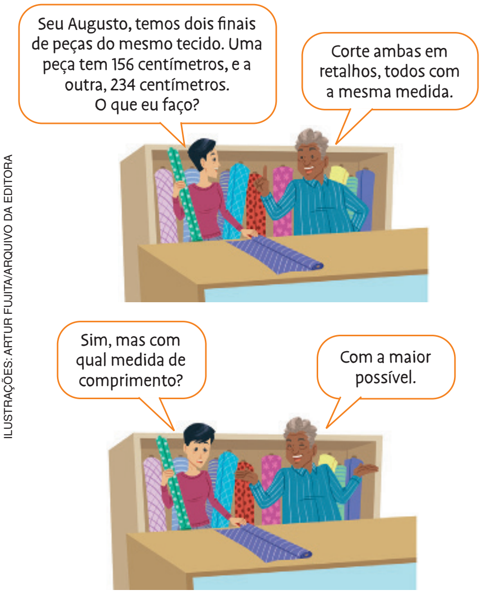
c) Vamos utilizar o método prático para obter o mdc entre 75 e 125:

$$\begin{array}{r|l} 75,\ 125 & \mathbf{5} \\ 15,\ \ 25 & \mathbf{5} \\ 3,\ \ \ 5 & 5 \\ 3,\ \ \ 1 & 3 \\ \hline 1,\ \ \ 1 & \end{array}$$

$mdc(75, 125) = 5 \cdot 5 = 25$

As resoluções dos **itens d** e **e** do **exercício 24** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

25 Em uma loja de tecidos, a balconista Carla conversa com o gerente Augusto:



ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Carla pensou e, em seguida, calculou com exatidão a medida do comprimento de cada retalho. Determine essa medida. **25.** 78 centímetros.

26 Verifique se em cada caso os números são primos entre si. Justifique sua resposta.

a) 25 e 30 **26. a)** Não são, pois pelo menos o 5 também é divisor comum de 25 e 30.
b) 40 e 21 **26. b)** São, pois o mdc(40, 21) = 1.
c) 7 e 11 **26. c)** São, pois o único divisor comum entre eles é o 1.
d) 28 e 35 **26. d)** Não são, pois mdc(28, 35) = 7, que é diferente de 1.

27 Alexandre é o irmão mais velho de Regina e de Guilherme. Regina tem 12 anos, e Guilherme, 10. As idades dos três irmãos são números primos entre si. Determine a idade de Alexandre, sabendo que é um número múltiplo de 7 e menor que 25. **27.** 21 anos.

28 Junte-se a um colega e façam o que se pede.

Cada um de vocês escolhe alguns números primos, repetidos ou não, e, multiplicando-os, obtém três números compostos. A seguir, deve calcular o mdc das três duplas de números compostos possíveis de formar com os números que o colega elaborou.

28. As respostas dependem dos números escolhidos.

6 O mínimo múltiplo comum (mmc)

FÁBIO EUGÊNIO/ARQUIVO DA EDITORA

Considere a seguinte situação.

Um feirante sempre leva para a feira a mesma quantidade de ovos de galinha para vender. Ele sabe que, colocando os ovos em embalagens para 12 ou para 18 ovos, não sobra nem falta ovo. Vamos calcular qual é o menor número de ovos que satisfaz essas condições.

Inicialmente, determinamos os múltiplos de cada um desses números:

- múltiplos de 12: **0**, 12, 24, **36**, 48, 60, **72**, 84, 96, 108, 120, 132, ...
- múltiplos de 18: **0**, 18, **36**, 54, **72**, 90, 108, 126, ...

Os números que são múltiplos de 12 e, também, de 18 são chamados de **múltiplos comuns** de 12 e 18. São eles: 0, 36, 72, ...

Dos múltiplos comuns, diferentes de zero, o menor número é o 36. Assim, o menor número de ovos é 36.

O menor múltiplo comum de dois ou mais números, diferente de zero, é chamado de **mínimo múltiplo comum** e representado pelas iniciais **mmc**.

Na situação apresentada, vimos que o mínimo múltiplo comum de 12 e 18 é 36, que se indica por:

$$\text{mmc}(12, 18) = 36$$

Exercícios propostos

Para trabalhar o **exercício 25**, solicite a dois estudantes que exponham na lousa uma resolução. Peça a um terceiro estudante que comente e compare as explicações apresentadas. A intenção não é eleger a melhor explicação, mas incentivá-los a comunicar suas ideias matemáticas, a descobrir fatos e estratégias e a aprender com as trocas entre colegas, contribuindo para o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10**.

Uma boa prática pedagógica é propor aos estudantes a elaboração de problemas.

As resoluções dos **exercícios 25** e **27** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 28**, a estratégia é os estudantes partirem da resposta para a elaboração da questão. Por meio desse caminho "inverso", há uma desconstrução do caminho da resolução padronizada.

6. O mínimo múltiplo comum (mmc)

Habilidades da BNCC: **EF07MA01** e **EF07MA05**.

Assim como na introdução do conceito de máximo divisor comum, neste tópico abordamos o conceito de mínimo múltiplo comum por meio de uma situação contextualizada de fácil entendimento aos estudantes. O cálculo feito sem recurso a algoritmos ou fórmulas torna-se mais acessível.

Elabore com eles situações-problema nas quais a resolução exija o cálculo do mmc de um conjunto de números naturais. Com base no que for elencado nessas situações, os estudantes devem, em duplas, formular problemas um para o outro e proceder à resolução e à verificação.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 29** a **32** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 29**, peça aos estudantes que pesquisem quanto tempo dura o mandato dos ocupantes de cargos políticos no Brasil. Esse tema pode ser trabalhado em conjunto com o professor de História.

O **exercício 32** envolve a ideia de proporcionalidade, fundamental para as mais diversas situações, escolares e não escolares. Não é preciso usar "regra de três", mas a relação existente entre os números quando se afirma que:

- a cada 3 pessoas, uma usava alguma peça de roupa branca;
- a cada 5 pessoas, uma usava óculos;
- a cada 4 pessoas, uma segurava um saquinho de pipoca.

Para estimular o raciocínio dos estudantes e beneficiar a interpretação dessa e de outras situações, peça a eles que, antes de realizar qualquer cálculo, respondam às seguintes questões:

- Há mais pessoas com alguma peça de roupa branca ou segurando saquinho de pipoca? Explique sem fazer cálculos.
- Há mais pessoas com óculos ou segurando saquinho de pipoca? Explique sem fazer cálculos.

Encontrando o mmc pela decomposição em fatores primos

Uma vez estabelecida a compreensão do conceito de mmc, podemos avançar no emprego de métodos mais práticos de obtenção do mmc e que facilitam trabalhar com números maiores e problemas mais complexos.

Aqui ele é obtido pela decomposição individual em fatores primos dos números desse conjunto, no qual são considerados todos os fatores comuns e não comuns na maior quantidade em que se repetem nessas decomposições.

O mmc também é obtido pela decomposição simultânea em fatores primos dos números desse conjunto, no qual são considerados todos os fatores comuns e não comuns na maior quantidade em que se repetem nessas decomposições.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

29 Em certo país, as eleições para presidente ocorrem a cada 4 anos, e para senador, a cada 8 anos. Em 2022, essas eleições coincidiram. Determine os anos das quatro próximas vezes em que as eleições voltarão a coincidir. **29.** 2030, 2038, 2046 e 2054

30 Determine:

a) os múltiplos do número 6; **30. a)** 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...
b) os múltiplos do número 9; **30. b)** 0, 9, 18, 27, 36, 45, ...
c) os múltiplos comuns dos números 6 e 9; **30. c)** 0, 18, 36, ...
d) o menor desses múltiplos comuns, diferente de zero. **30. d)** 18

31 O dono da cantina da escola gosta de complicar as coisas. Quando lhe perguntaram sua idade, ele respondeu:

"Tenho mais de 40 anos, menos de 60 e minha idade é um múltiplo de 3 e de 8". Qual é a idade dele? **31.** 48 anos.

32 Na fila em que entrei para comprar ingresso para assistir a um filme, havia 33 pessoas na minha frente. Notei que, a cada 3 pessoas, uma usava alguma peça de roupa branca; a cada 5 pessoas, uma usava óculos; e a cada 4, uma estava com um saquinho de pipoca nas mãos. Determine quantas pessoas dessa fila:

a) estavam com uma peça de roupa branca e usavam óculos. **32. a)** 2 pessoas.
b) estavam com uma peça de roupa branca e seguravam um saquinho de pipoca. **32. b)** 2 pessoas.
c) seguravam um saquinho de pipoca e usavam óculos. **32. c)** 1 pessoa.
d) estavam com uma peça de roupa branca, usavam óculos e seguravam um saquinho de pipoca. **32. d)** Nenhuma.

Encontrando o mmc pela decomposição em fatores primos

Vimos como calcular o mmc de dois ou mais números naturais conhecendo os múltiplos de cada um desses números. Existem, porém, outros processos que possibilitam calcular o mmc entre dois ou mais números naturais. Vamos conhecer dois desses processos.

1º) Decompondo cada número separadamente

Esse processo consiste em decompor cada número em fatores primos.

Como exemplo, vamos determinar o mmc dos números 280 e 300. Inicialmente, decompomos cada número em fatores primos:

280	**2**		300	2
140	**2**		150	2
70	**2**		75	**3**
35	5		25	**5**
7	**7**		5	**5**
1			1	

$280 = \mathbf{2^3} \cdot 5 \cdot \mathbf{7}$ $\quad$ $300 = 2^2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{5^2}$

Multiplicamos os fatores primos comuns e não comuns e, entre os fatores de bases iguais, escolhemos aquele que apresenta maior expoente, pois procuramos o múltiplo de 280 e 300 ao mesmo tempo. Então: $\text{mmc}(280, 300) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 8 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 7 = 4\,200$.

2º) Decomposição simultânea

Esse processo consiste em decompor simultaneamente os números em fatores primos.

Vamos determinar o mmc dos números 280 e 300. Primeiro, decompomos simultaneamente os números em fatores primos:

Ao apresentar aos estudantes esses dois modos de obter o mmc, contribuímos para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA05).

280, 300	2	
140, 150	2	
70, 75	2	← 75 não é divisível por 2: deve ser repetido.
35, 75	3	← 35 não é divisível por 3: deve ser repetido.
35, 25	5	
7, 5	5	← 7 não é divisível por 5: deve ser repetido.
7, 1	7	← 1 não é divisível por 7: deve ser repetido.
1, 1		← linha de 1: fim da decomposição.

Em seguida, basta efetuar a multiplicação dos fatores obtidos.

Então, $\text{mmc}(280, 300) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4\,200$.

Ainda como exemplo, vamos decompor simultaneamente os números 120, 252 e 300 em fatores primos:

120, 252, 300	2	
60, 126, 150	2	
30, 63, 75	2	← 63 e 75 não são divisíveis por 2: devem ser repetidos.
15, 63, 75	3	
5, 21, 25	3	← 5 e 25 não são divisíveis por 3: devem ser repetidos.
5, 7, 25	5	← 7 não é divisível por 5: deve ser repetido.
1, 7, 5	5	← 1 e 7 não são divisíveis por 5: devem ser repetidos.
1, 7, 1	7	← 1 não é divisível por 7: deve ser repetido.
1, 1, 1		← linha de 1: fim da decomposição.

Em seguida, basta efetuar a multiplicação dos fatores obtidos. Assim:

$$\text{mmc}(120, 252, 300) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 12\,600$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

33 Juliana dá uma volta em uma pista de atletismo em 4 minutos, e Marina em 5 minutos. Em determinado momento, após dar algumas voltas, as duas estarão correndo lado a lado. Depois de quantos minutos elas voltarão a se encontrar? **33.** 20 minutos.

34 Considerando $a = 2^3 \cdot 3^2$, $b = 2^2 \cdot 5$ e $c = 2 \cdot 3^3$, calcule:

a) $\text{mmc}(a, b)$ **34. a)** 360
b) $\text{mmc}(a, c)$ **34. b)** 216
c) $\text{mmc}(b, c)$ **34. c)** 540
d) $\text{mmc}(a, b, c)$ **34. d)** 1 080

35 Calcule pelo processo da decomposição em fatores primos o mínimo múltiplo comum dos números:

a) 25 e 30; **35. a)** 150
b) 22 e 99; **35. b)** 198
c) 36 e 48; **35. c)** 144
d) 150, 60 e 75. **35. d)** 300

36 Sônia trouxe de sua chácara uma cesta de laranjas para as irmãs Flávia e Fabiana. Flávia contou as laranjas de 6 em 6 e não sobrou nenhuma, e Fabiana as contou de 8 em 8 e, também, não sobrou nenhuma. Quantas laranjas continha a cesta, sabendo que o número delas era maior que 90 e menor que 100? **36.** 96 laranjas.

37 Usando o processo da decomposição simultânea em fatores primos, determine o mínimo múltiplo comum dos números:

a) 40 e 60; **37. a)** 120
b) 45 e 120; **37. b)** 360
c) 72, 45 e 54; **37. c)** 1 080
d) 15, 20 e 25. **37. d)** 300

38 De uma rodoviária, partem ônibus para João Pessoa (PB) a cada 3 horas, para Natal (RN) a cada 6 horas e para Recife (PE) a cada 8 horas. Em determinado dia, às 7 horas da manhã, partiram, ao mesmo tempo, ônibus para essas três cidades. Após quantas horas essa coincidência voltou a ocorrer? **38.** 24 horas.

39 Em um sítio, há uma rua de laranjeiras e, ao seu lado, uma rua de limoeiros. Os pés de laranja são plantados a cada 4 metros, e os pés de limão, a cada 6 metros. No início das ruas, foi plantado um pé de laranja na frente de um pé de limão. De quantos em quantos metros isso acontece? **39.** 12 metros.

Exercícios propostos

Os exercícios dessa seção contextualizam situações que podem ser resolvidas com base no cálculo do mínimo múltiplo comum (mmc).

No **exercício 33**:

Juliana → 1 volta em 4 minutos

Mariana → 1 volta em 5 minutos

Para determinar quando elas se encontrarão novamente devemos calcular o mmc(4, 5):

4, 5	2
2, 5	2
1, 5	5
1, 1	

$\text{mmc}(4, 5) = 2 \cdot 2 \cdot 5 =$
$= 4 \cdot 5 = 20$

Logo, após 20 minutos elas voltarão a se encontrar.

No enunciado do **exercício 34** são dados os fatores dos números. Nesse caso, os estudantes não precisam fazer a fatoração. Acompanhe a resolução desse exercício:

a) $\text{mmc}(a, b) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$
b) $\text{mmc}(a, c) = 2^3 \cdot 3^3 = 216$
c) $\text{mmc}(b, c) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = 540$
d) $\text{mmc}(a, b, c) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 = 1.080$

No **exercício 36**, antes de os estudantes fazerem os cálculos, converse com eles sobre as conclusões obtidas por meio de uma leitura atenta do enunciado do problema:

- o número é múltiplo de 6 e de 8 ao mesmo tempo;
- o número não pode ser 90 nem 100.

As resoluções dos **exercícios 35** a **39** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Exercícios complementares

Nesta seção, são oferecidas novas oportunidades para os estudantes retomarem a Unidade Temática **Números** estudada no capítulo. Espera-se que eles recorram aos conhecimentos construídos, percebendo se ainda têm alguma dificuldade e superando-a.

No **exercício 1**, as representações decimais dos números $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$ são, respectivamente, 0,75 e 1,333... .

Nenhum dos números do **exercício 2** pode indicar quantos irmãos uma pessoa tem, pois nenhum deles é natural.

Acompanhe a resolução do **exercício 3**:

a) Números inteiros: $\frac{12}{3} = 4$ e 3

b) Números racionais não inteiros: $3{,}5; -\frac{2}{3}$; 4,333... e −4,5

c) Números escritos na forma decimal: 3; 3,5; 4,333... e −4,5

d) Dízimas periódicas: 4,333... e $-\frac{2}{3} = -0{,}666...$

Resolução do **exercício 4**:

Observando a reta numérica, obtemos:

$M = -3{,}2$; $N = -\frac{31}{10}$ e $Q = -2{,}9$.

Com isso, os **itens a**, **b** e **c** já foram respondidos; falta o item **d**.

Como o ponto P divide o segmento $\overline{NQ}$ em duas partes iguais, $N = -3{,}1$ e $Q = -2{,}9$, obtemos $P = -3{,}0$.

As resoluções dos **exercícios 5** a **12** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 7**, é interessante ampliar os itens:

a) invertendo a ordem dos atributos do número pedido e perguntando qual é o inverso do oposto de $-\frac{2}{5}$ $\left(\text{resposta: } \frac{5}{2}\right)$;

b) perguntando qual é o módulo do inverso de $-\frac{5}{3}$ $\left(\text{resposta: } \frac{3}{5}\right)$;

c) perguntando qual é o oposto do inverso de $|-2{,}3|$ na forma de fração $\left(\text{resposta: } -\frac{10}{23}\right)$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Escreva a representação decimal dos números $\frac{3}{4}$ e $\frac{4}{3}$. **1.** 0,75 e 1,333...

2 Dos números a seguir, qual deles pode indicar quantos irmãos uma pessoa tem? Por quê?

a) $-\frac{10}{2}$ b) $\frac{7}{9}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $-\frac{5}{1}$ e) $-1\frac{3}{4}$

2. Nenhum, pois não são números naturais.

3 Entre os números racionais 3,5; $-\frac{2}{3}$; 4,333...; $\frac{12}{3}$; 3 e −4,5, escreva:

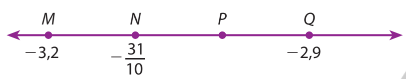
a) os números racionais inteiros; **3. a)** $\frac{12}{3}$ e 3

b) os números racionais não inteiros; **3. b)** 3,5; $-\frac{2}{3}$; 4,333... e −4,5

c) os números que estão na forma decimal; **3. c)** 3; 3,5; 4,333... e −4,5

d) as dízimas periódicas. **3. d)** 4,333... e $-\frac{2}{3}$

4 Observe a reta numérica a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Determine:

a) a abscissa do ponto M; **4. a)** −3,2

b) a abscissa do ponto N; **4. b)** $-\frac{31}{10}$

c) a abscissa do ponto Q; **4. c)** −2,9

d) a abscissa do ponto P que divide o segmento $\overline{NQ}$ em duas partes iguais. **4. d)** −3,0

5 Responda.

a) Qual é o módulo de $-\frac{1}{5}$? **5. a)** $\frac{1}{5}$

b) Se $|m| = 0{,}8$, quais são os possíveis valores de m? **5. b)** −0,8 e 0,8

6 Em cada item, compare os números racionais usando os sinais >, < ou =.

a) $|-2{,}5|$ e 2,5 **6. a)** $|-2{,}5| = 2{,}5$

b) 3,426 e 3,4181 **6. b)** $3{,}426 > 3{,}4181$

c) −11,3 e −2,51 **6. c)** $-11{,}3 < -2{,}51$

d) $-\frac{3}{8}$ e $-\frac{1}{2}$ **6. d)** $-\frac{3}{8} > -\frac{1}{2}$

e) 0,12 e $\frac{1}{5}$ **6. e)** $0{,}12 < \frac{1}{5}$

f) $|-2{,}1|$ e $|0{,}3|$ **6. f)** $|-2{,}1| > |0{,}3|$

7 Responda.

a) Qual é o oposto do inverso de $-\frac{2}{5}$? **7. a)** $\frac{5}{2}$

b) Qual é o inverso do módulo de $-\frac{5}{3}$? **7. b)** $\frac{3}{5}$

c) Qual é o inverso do oposto de $|-2{,}3|$ na forma de fração? **7. c)** $-\frac{10}{23}$

8 Todos os quocientes a seguir são positivos, e os números a, b, c e d são diferentes de zero.

$\frac{a}{5}$ $\frac{-b}{7a}$ $\frac{11}{abc}$ $\frac{-18}{abcd}$

Descubra os sinais de a, b, c e d. **8.** *a* positivo; *b*, *c* e *d* negativos.

9 O número inteiro que pode ser colocado entre os pontos assinalados na reta numérica é:

a) 0. b) −1. c) −2. d) −3. **9.** Alternativa **c**.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

10 Reúna-se com um colega e respondam ao que se pede.

a) Qual produto é maior: (28 · 42) ou mdc(28, 42) · mmc(28, 42)? **10. a)** São iguais a 1 176.

b) Qual produto é menor: (63 · 36) ou mdc(63, 36) · mmc(63, 36)? **10. b)** São iguais a 2 268.

c) Comparem os produtos: (21 · 40) e mdc(21, 40) · mmc(21, 40). **10. c)** São iguais a 840.

d) Escolham dois números naturais a e b não nulos e calculem os produtos: $(a \cdot b)$ e mdc(a, b) · mmc(a, b). O que se pode concluir sobre esses produtos? **10. d)** Espera-se que os estudantes percebam que os produtos são iguais.

e) Como vocês fariam para obter o mdc(a, b), com a e b não nulos, conhecendo os valores de mmc(a, b) e $(a \cdot b)$? **10. e)** Basta dividir $(a \cdot b)$ por mmc(a, b).

11 Fiz 336 balas de coco e 252 balas de mel. Quero separá-las em pacotes, colocando em cada pacote o mesmo tipo e a mesma quantidade de balas. Qual é o maior número possível de balas em cada pacote? Quantos pacotes de bala obterei? **11.** 84 balas; 7 pacotes.

12 Hoje, Joana e Antônia se encontraram no cinema que costumam frequentar. Joana vai a cada 18 dias, e Antônia, a cada 24 dias. Daqui a quantos dias as duas amigas se encontrarão novamente nesse cinema? **12.** 72 dias.

MARCIO GUERRA/ARQUIVO DA EDITORA

Há ainda espaço para questões exploratórias, como no **exercício 10**, no qual os estudantes, em duplas, são induzidos, item por item, a generalizar a conclusão de que o produto de dois números naturais não nulos é igual ao produto do mdc e do mmc deles. É importante alertá-los para o fato de que as verificações feitas por eles nos **itens a**, **b** e **c** não constituem uma demonstração, mas uma conjectura. No entanto, desafie os estudantes a encontrar um contraexemplo em que a conclusão não seja válida.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Seja um número racional na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros. Se a for um número negativo, e b for positivo, então: **1.** Alternativa **b**.

a) $\frac{a}{b}$ é positivo.

b) $\frac{a}{b}$ é negativo.

c) $\frac{a}{b}$ não é positivo nem negativo.

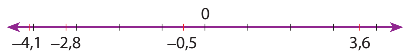
d) não podemos afirmar nada sobre $\frac{a}{b}$.

2 A mãe de Ana levou a filha e três amigos ao cinema. O valor total dos ingressos das crianças foi de R$ 62,80. Qual foi o valor pago por ingresso, sabendo que todos tinham o mesmo preço?

a) R$ 15,00 c) R$ 15,70
b) R$ 15,50 d) R$ 15,80

2. Alternativa **c**.

3 Márcia representou alguns números na reta numérica, mas errou em uma dessas representações. Qual foi o número representado de modo **incorreto**? **3.** Alternativa **b**.



WLAMIR MIASIRO

a) –4,1 b) –2,8 c) –0,5 d) 3,6

4 Que número corresponde ao oposto de 0,15? **4.** Alternativa **b**.

a) $\frac{15}{10}$ c) $-\frac{3}{5}$

b) $-\frac{3}{20}$ d) 0,015

5 Qual das desigualdades a seguir é verdadeira?

a) $\frac{5}{8} < -\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{5} > \frac{3}{2}$

b) $-\frac{11}{7} > \frac{15}{7}$ d) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{4}$

5. Alternativa **d**.

6 Amanda, Bruno, Camila e Denis foram mergulhar. Em certo momento, Amanda estava a –12,5 m do nível do mar, Bruno estava a –10,2 m, Camila, a –9,4 m e Denis, a –13,9 m. Quem estava mais próximo da superfície? **6.** Alternativa **c**.

a) Amanda c) Camila
b) Bruno d) Denis

7 Rosa mora sozinha em uma cidade a 200 quilômetros de seus sobrinhos Roberto, Mário e Rosana. Para evitar que a tia Rosa fique muito tempo só, seus sobrinhos combinaram de visitá-la da seguinte forma: Roberto costuma visitá-la a cada 12 dias, Mário, a cada 20 dias, e Rosana, a cada 18 dias. Supondo que eles se encontraram hoje na casa da tia Rosa, daqui a quantos dias será o próximo encontro dos três sobrinhos? **7.** Alternativa **c**.

a) 120 dias c) 180 dias
b) 150 dias d) 200 dias

8 Quais são os fatores primos obtidos ao decompor o número 924? **8.** Alternativa **d**.

a) 2, 3, 5 e 13 c) 3, 7 e 19
b) 3, 5, 7 e 11 d) 2, 3, 7 e 11

9 Dois números decompostos em fatores primos são expressos da seguinte maneira:

$$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \text{ e } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Qual é o produto de fatores primos que representa o mínimo múltiplo comum desses números? **9.** Alternativa **c**.

a) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ c) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
b) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ d) $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

10 Uma confeiteira tem 450 g de chocolate ao leite e 270 g de chocolate branco para fazer um doce. Qual é a quantidade máxima de doces que ela pode fazer, utilizando a mesma quantidade dos dois chocolates em cada doce? **10.** Alternativa **b**.

a) 15 b) 90 c) 30 d) 270

11 Qual é o mínimo múltiplo comum entre os números 45, 15 e 60? **11.** Alternativa **d**.

a) 5 b) 90 c) 15 d) 180

Organizando

Organizando:
a) Todo número que pode ser representado por uma fração $\frac{a}{b}$, em que a e b são números inteiros, com $b \neq 0$, é um número racional. Exemplos: $\frac{3}{2}$, 0,56, –8 e –1,888...

c) Dois números racionais são opostos quando distam um mesmo valor de zero na reta numérica. Portanto, eles têm em comum o módulo (valor absoluto).

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir:

a) O que é um número racional? Dê 4 exemplos.

b) Construa uma reta numérica e represente os números: –3; –1,6; –0,5; 0; $\frac{1}{4}$ e 2,5. **b)** Construção de figura.

c) Quando dois números racionais são opostos ou simétricos? O que há em comum entre eles?

d) Como você compara números racionais? **d)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem a reta numérica ou a análise do número com base em ordens e classes.

e) Qual estratégia você utiliza para calcular o mdc entre dois números? E o mmc? Você pode descrever passo a passo sua estratégia ou por meio de um fluxograma. **e)** Resposta pessoal. Os estudantes podem considerar a decomposição em fatores primos.

Verificando

Esses exercícios são mais uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo. Instrua-os a retomar as páginas anteriores caso alguma dúvida persista.

As resoluções dos **testes 1** a **11** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Organizando

Incentive os estudantes a organizar seu aprendizado no caderno, fazendo resumos e mapas conceituais ou aplicando destaques para conceitos importantes. As questões propostas têm como objetivo fazer com que eles retomem os conteúdos aprendidos no capítulo e reflitam sobre algumas temáticas. Após sua correção, é importante pedir a eles que compartilhem suas respostas. Essa estratégia favorecerá o compartilhamento de dúvidas e percepções, contribuindo para o aprendizado de todos.

Diversificando

Habilidade da BNCC: **EF07MA11**.

Oriente os estudantes a, em duplas, construírem um tabuleiro como o apresentado na seção. Programe com eles uma aula na qual um período (de 15 a 20 minutos) seja dedicado ao jogo.

Com o intuito de exercitar os conceitos matemáticos, promover a sociabilidade entre os estudantes e propiciar a descoberta do lúdico na Matemática, incentive-os a brincar com esse jogo fora do período escolar.

A atividade do **Agora é com você!** é para ser feita em dupla. A troca de experiências e a necessidade de expor o que se pensa favorecem o aprendizado e promovem uma ampliação do repertório dos estudantes acerca do assunto.

Dessa maneira, os estudantes têm uma boa oportunidade para o desenvolvimento da **competência geral 9** e da **competência específica 8**.

DIVERSIFICANDO

Corrida dos números primos

Número de participantes: 2, 3 ou 4 jogadores

Material:

- Tabuleiro a seguir, reproduzido ampliado em cartolina ou outro material.
- Dois dados de 6 faces.
- Marcadores diferentes, um para cada jogador (podem ser miçangas, botões etc.).

IRYNA1/SHUTTERSTOCK

Regras:

- Cada jogador lança os dois dados. Quem conseguir a maior soma começa o jogo.
- Cada jogador, alternadamente, lança os dois dados. Marca no tabuleiro a casa correspondente à soma das faces viradas para cima.
- Da segunda jogada em diante, ao resultado dos dados deve ser adicionado o valor da casa onde o marcador se encontra.
- Quem cair em uma casa com um número primo deve levar seu marcador para a casa que apresenta o dobro desse número. Se o dobro do número não existir no tabuleiro, o jogador deve permanecer onde está.
- Se a soma das faces viradas para cima ultrapassar o que falta para chegar ao final, o jogador leva seu marcador para a última casa.
- Quem primeiro alcançar a última casa vence o jogo.

Tabuleiro

Partida

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108
109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132
133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144

Chegada

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

- Com seu parceiro de jogo, analisem a situação a seguir.

Janaína e Carlos estão brincando de **Corrida dos números primos**, e o próximo a jogar é Carlos. O marcador de Carlos está na casa 68, e o de Janaína, na casa 123. Observem a ilustração que mostra como está o jogo e respondam à questão proposta.

Carlos ainda tem alguma chance de ganhar o jogo?

Resposta: Sim. Espera-se que os estudantes percebam que, se Carlos cair na casa 71, que é primo, ele avança para a casa de número 142 (dobro de 71), e assim pode vencer o jogo.

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo

3 Operações com números racionais

IGOR-KARDASOV/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) Ao comprar produtos em um estabelecimento comercial, você costuma analisar os anúncios promocionais? **a)** Resposta pessoal.

b) Observe a propaganda da ilustração. Ela está de acordo com o Código de Defesa do Consumidor? Justifique sua resposta.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

c) Qual é o preço por litro desse produto? **c)** R$ 4,98

Consumidor escolhendo detergente líquido em um supermercado.

b) Espera-se que os estudantes mencionem que as letras e os algarismos com tamanho diferentes podem induzir o consumidor ao erro.

Segundo o artigo 37 do Código de Defesa do Consumidor, é proibida toda publicidade enganosa ou abusiva. Publicidade enganosa é aquela que mente sobre produtos ou serviços ou deixa de dar informações básicas ao consumidor, levando-o ao erro.

Embora muitas propagandas não apresentem mentiras explícitas ou não sejam omissas, dissimulam informações, induzindo o consumidor a avaliar a propaganda de maneira desfavorável a ele. Algarismos ou textos em tamanho menor do que outros, por exemplo, dificultam cálculos e estimativas.

63

Capítulo 3 – Operações com números racionais

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Peça aos estudantes que observem o cartaz de propaganda para responder às questões.

Após a leitura do texto, informe-os de que o Código de Defesa do Consumidor (Lei nº 8 078, de 11 de setembro de 1990) estabelece que **consumidor** é toda pessoa (física ou jurídica) que adquire ou utiliza produto ou serviço como destinatário final. Preceitua ainda que **produto** é qualquer bem, móvel ou imóvel, material ou imaterial, e que **serviço** é qualquer atividade fornecida no mercado de consumo mediante remuneração.

A lei esclarece que a Política Nacional das Relações de Consumo tem por objetivo o atendimento das necessidades dos consumidores, o respeito à sua dignidade, à sua saúde e à sua segurança, a proteção de seus interesses econômicos, a melhoria da sua qualidade de vida, bem como a transparência e a harmonia das relações de consumo.

Por sua vez, o consumidor deve observar as condições do produto, a inviolabilidade da embalagem, a data de validade, as advertências do fabricante etc. Também deve estar sempre atento às propagandas enganosas e, quando necessário, fazer valer os seus direitos.

Como sugestão de atividade complementar, proponha aos estudantes que, em grupo, façam uma pesquisa sobre propagandas, verificando se elas atendem o Código de Defesa do Consumidor, e elaborem um painel com algumas delas. Esse tipo de pesquisa trabalha o Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

Neste capítulo, ampliamos a compreensão dos números racionais absolutos estudados no 6º ano com a introdução dos símbolos “+” e “–” para números racionais positivos e negativos, respectivamente, em situações contextualizadas com maior diversidade.

Comente com os estudantes que essa ampliação mantém contempladas as propriedades operatórias estudadas no conjunto dos números inteiros. Esclareça-lhes que essa é uma mostra da característica ímpar da Matemática que, via de regra, evolui assimilando os conceitos já construídos. Em outras palavras, a Matemática evolui considerando inclusões coerentes com o seu corpo de conhecimentos, ou seja, o novo incorpora, não toma o lugar do anterior, mantendo o que está demonstrado.

1. Adição e subtração

Habilidade da BNCC: **EF07MA12**.

O estudo da adição e da subtração com números racionais é introduzido por meio de uma situação de compra contextualizada, o que facilita a assimilação desses conceitos e contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA12).

Na situação abordada, sugira aos estudantes que considerem a possibilidade de, além das cédulas de 100 reais e de 50 reais, Jorge dar uma cédula de 5 reais para facilitar o troco. Quanto ele receberia de troco? (R$ 46,45) Para receber 50 reais de troco, quanto Jorge deveria dar, além da cédula de 100 reais? (R$ 3,55)

Proponha outras situações hipotéticas de compra e venda.

Este conteúdo é propício para articular as Unidades Temáticas **Números** e **Grandezas e medidas** com situações-problema de adição e de subtração que envolvem unidades de medida estudadas no ano anterior, como comprimento, área, capacidade ou massa.

Para os números racionais, recorremos ao conhecimento anterior e aplicamos os mesmos procedimentos usados para obter o valor numérico das expressões com os números inteiros.

Explique aos estudantes que, historicamente, a adição de frações foi usada com frequência no Egito Antigo, pois quaisquer frações eram representadas por meio da adição de duas ou mais **frações unitárias**, ou seja, por frações cujo numerador fosse igual a 1 $\left(\text{exceção feita à fração } \frac{2}{3}\right)$. Por exemplo:

- $\frac{5}{12} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$
- $\frac{5}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}$

1 Adição e subtração

Em muitos momentos, temos necessidade de operar com números racionais. Acompanhe a seguir uma situação que demonstra isso.

Jorge foi a uma loja de esportes para montar um projeto com as crianças de seu bairro.

Ele se interessou por uma corda de pular que custava R$ 29,90, por uma bola de vôlei de R$ 55,30 e por um par de luvas de goleiro por R$ 78,65. Acabou comprando a corda e o par de luvas.

Ao efetuar o pagamento, Jorge deu duas cédulas: uma de R$ 100,00 e outra de R$ 50,00. Qual foi o troco recebido por ele? Se ele quisesse levar também a bola de vôlei, receberia troco ou faltaria dinheiro? Quantos reais?


KATSIUBA VOLHA/SHUTTERSTOCK

Pessoas em loja de material esportivo.

Para responder à primeira pergunta, vamos efetuar:

$(100 + 50) - (29{,}90 + 78{,}65) =$
$= 150 - 108{,}55 =$
$= 41{,}45$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 100{,}00 \\ +\ 50{,}00 \\ \hline 150{,}00 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 29{,}90 \\ +\ 78{,}65 \\ \hline 108{,}55 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 150{,}00 \\ -\ 108{,}55 \\ \hline 41{,}45 \end{array}$$

Jorge recebeu R$ 41,45 de troco.

Para responder à segunda pergunta, vamos efetuar:

$(+41{,}45) - (+55{,}30) =$
$= 41{,}45 + (-55{,}30) =$
$= 41{,}45 - 55{,}30 =$
$= -13{,}85$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r} 55{,}30 \\ -\ 41{,}45 \\ \hline 13{,}85 \end{array}$$

Se Jorge quisesse levar também a bola de vôlei, faltariam R$ 13,85.

Sugestão de leitura

Para enriquecer o trabalho com os números racionais, sugerimos o livro:

MEIER, W. M. B.; SZYMANSKI, M. L. S. **O ensino e a aprendizagem dos números racionais**: superando obstáculos didáticos na perspectiva histórico-crítica. Curitiba: Appris, 2021.

O autor aborda a práxis pedagógica do professor de Matemática, tratando especificamente do ensino dos números racionais, conteúdo essencial para a apropriação de outros conceitos que se inter-relacionam. O livro ainda apresenta uma pesquisa de campo que analisa aspectos da docência e possíveis obstáculos nesse processo.

Acompanhe mais alguns exemplos.

a) $\left(+\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) = +\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10}{15} - \frac{9}{15} = \frac{1}{15}$

Eliminamos os parênteses.

Reduzimos as frações ao mesmo denominador, mmc(3, 5) = 15.

Efetuamos a operação.

b) $(-2{,}84) + (-3{,}7) = -2{,}84 - 3{,}7 = -6{,}54$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{2}{5}\right) = (-0{,}5) - (-0{,}4) = -0{,}5 + 0{,}4 = -0{,}1$

d) $\left(-\frac{5}{6}\right) - (-0{,}3) = -\frac{5}{6} - \left(-\frac{3}{10}\right) = -\frac{5}{6} + \frac{3}{10} = -\frac{25}{30} + \frac{9}{30} = -\frac{16}{30} = -\frac{8}{15}$

Reduzimos ao mesmo denominador, mmc(6, 10) = 30.

e) $-\frac{5}{12} - \left[-\frac{3}{4} + \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{9}\right)\right] = -\frac{5}{12} - \left[-\frac{3}{4} + \left(\frac{15}{18} - \frac{4}{18}\right)\right] =$

Reduzimos ao mesmo denominador, mmc(6, 9) = 18.

$= -\frac{5}{12} - \left[-\frac{3}{4} + \frac{11}{18}\right] = -\frac{5}{12} - \left[-\frac{27}{36} + \frac{22}{36}\right] = -\frac{5}{12} - \left[-\frac{5}{36}\right] =$

Reduzimos ao mesmo denominador, mmc(4, 18) = 36.

$= -\frac{5}{12} + \frac{5}{36} = -\frac{15}{36} + \frac{5}{36} = -\frac{10}{36} = -\frac{5}{18}$

Reduzimos ao mesmo denominador, mmc(12, 36) = 36.

ILUSTRAÇÕES: SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Calcule e dê o resultado na forma de fração.

a) $\left(-\frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)$ **1. a)** $-\frac{13}{10}$ b) $\left(-\frac{5}{3}\right) - \left(-\frac{3}{4}\right)$ **1. b)** $-\frac{11}{12}$ c) $\frac{3}{4} - 0{,}25$ **1. c)** $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{7}{15} + 1$ **1. d)** $\frac{8}{15}$

2 Escreva, no caderno, o resultado das operações na forma decimal.

a) $-0{,}25 + (-0{,}75)$ **2. a)** $-1{,}0$ b) $112{,}4 - 38{,}16$ **2. b)** 74,24 c) $-0{,}6 + \frac{15}{10}$ **2. c)** 0,9 d) $3\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$ **2. d)** 2,75

Adição e subtração

Faça com os estudantes a construção e a "desconstrução" de uma sentença matemática com várias operações. Peça a um deles que escreva na lousa uma fração e a outro que escreva na linha de baixo uma adição (ou uma subtração) com frações cuja soma (ou diferença) seja igual à fração anterior. Peça a outro estudante que reescreva a expressão anterior, mas substitua uma das frações pela soma (ou diferença) de outras duas, e assim por diante. Permita que a expressão cresça em quantidade de elementos (números racionais) e de operações enquanto considerar conveniente.

Depois, outro estudante começa (pela última operação escrita) a resolver a expressão e passa a outro, que continua a resolvê-la (pela penúltima operação escrita), até chegar à primeira fração escrita.

Refaça a atividade, agora só com números racionais escritos na forma decimal. Depois, com números racionais nas duas formas.

As expressões também podem ter elementos substituídos por expressões entre parênteses, colchetes ou chaves.

A propriedade do fechamento não foi mencionada aqui porque não estamos realizando um estudo axiomático da teoria dos conjuntos.

Exercícios propostos

Comente com os estudantes que, em geral, podemos resolver questões matemáticas de mais de uma maneira. Ao resolver o mesmo problema de diferentes maneiras, os estudantes desenvolvem a habilidade (EF07MA05).

Os **exercícios 1** e **2** apresentam adições e subtrações com números racionais. As resoluções desses exercícios estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 3**, **4** e **6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

No **exercício 5**, sugira aos estudantes que comparem o resultado encontrado por meio do cálculo da representação da fração $\frac{5}{6}$ na forma decimal: 0,83333... A diferença obtida deve-se ao fato de não ser possível usar todas as infinitas casas decimais da dízima periódica 0,8333... Por esse motivo, se desejamos um resultado sem aproximações, é conveniente fazer o cálculo usando a representação fracionária, como fez Manuela.

O **exercício 6** oferece oportunidade para discutir noções básicas da Economia. Ao trabalhar com essas noções, contribui-se para uma reflexão relacionada ao Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

Acompanhe duas questões envolvendo esses conceitos:

- Como as exportações e as importações de um país participam da composição de sua balança comercial?
- O que são déficit e superávit na economia de uma nação?

Os bens e serviços produzidos no exterior e adquiridos por um país constituem as importações. Da mesma maneira, as exportações são constituídas pelos bens e serviços produzidos em um país e vendidos e enviados a pessoas de outros países.

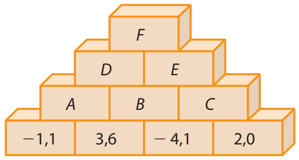
Balança comercial é a diferença entre o total de exportações e importações realizadas por um país. Quando essa diferença é positiva, ou seja, quando as exportações superam as importações, há o fenômeno chamado superávit comercial. Quando o saldo é negativo, ou seja, quando as importações são maiores que as exportações, temos um déficit comercial.

Quando o montante referente às exportações é igual ao montante das importações, dizemos que há um equilíbrio comercial.

Para um país, é sempre vantajoso ter superávit comercial, pois isso significa que mais recursos estão entrando no país por meio dos ganhos das exportações do que os recursos pagos pelas importações.

3 No empilhamento, cada letra equivale à soma dos números das duas peças imediatamente abaixo. Determine o número que está no alto do empilhamento. **3.** –0,6

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



4 Um submarino estava a –72,5 m. Alguns minutos depois, estava a –95,4 m. O submarino desceu ou subiu? Quantos metros? **4.** Desceu; 22,9 m.

JEFF WHYTE/SHUTTERSTOCK

Submarino próximo a Honolulu, Havaí. (Fotografia de 2019.)

5 Manuela e Luciano efetuaram a operação $\frac{1}{3} + 0{,}5$ de maneiras diferentes.

Reúna-se com um colega para analisarem as duas resoluções e respondam à questão: Manuela e Luciano encontraram o mesmo resultado? Se não, o que aconteceu? Justifiquem a resposta.

$\frac{1}{3} + 0{,}5 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

5. Não. Espera-se que os estudantes percebam que, ao considerar 0,333 o valor aproximado de $\frac{1}{3}$, Luciano encontrou um valor aproximado para a operação, e Manuela encontrou o valor exato.

Como a representação decimal de $\frac{1}{3}$ é 0,333..., vou considerar que $\frac{1}{3}$ é aproximadamente 0,333 para fazer os cálculos. Assim, obtenho:

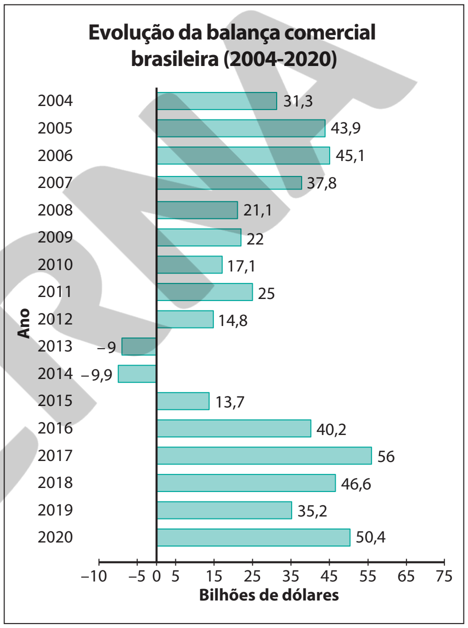
$\frac{1}{3} + 0{,}5 = 0{,}333 + 0{,}5 = 0{,}833 = \frac{833}{1000}$

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

6 Leia o texto a seguir.

Em Economia, o saldo da **balança comercial** é a diferença entre o valor apresentado pelas exportações de um país (produtos vendidos a outros países) e o valor apresentado pelas importações (produtos comprados de outros países). Dizemos que há **superávit** quando o país exporta mais do que importa. Quando ocorre o contrário, há **déficit**.

Observe no gráfico a seguir a evolução da balança comercial brasileira no período de 2004 a 2020, com valores indicados em bilhões de dólares. Depois, responda às questões.



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: GOVERNO do Brasil. Disponível em: https://balanca.economia.gov.br/balanca/publicacoes_dados_consolidados/pg.html. Acesso em: 8 jun. 2022.

a) Em qual desses anos o déficit brasileiro foi maior? Qual foi o índice? **6. a)** 2014; –9,9 bilhões de dólares.

b) Em que ano o superávit foi maior? Com qual índice? **6. b)** 2017; 56 bilhões de dólares.

c) Em 2020, o valor apresentado pelas importações foi de aproximadamente 158,8 bilhões de dólares. Determine o valor aproximado que foi apresentado pelas exportações nesse ano. **6. c)** 209,2 bilhões de dólares.

d) Com base nos dados do gráfico, é possível afirmar que o valor exportado em 2020 foi maior que em 2019? Justifique sua resposta.

6. d) Espera-se que os estudantes percebam que não é possível afirmar nada sobre o valor exportado, pois os dados só permitem a comparação entre o saldo de cada ano.

7 Pela manhã, quando o banco abriu, a conta de Regina apresentava um saldo de –365,40 reais. À tarde, ela movimentou a conta, e seu saldo passou a ser de –65,40 reais. Regina fez uma retirada ou um depósito? De quanto? **7.** Depósito; de 300 reais.

8 Qual é o número inteiro mais próximo do valor da expressão –3,1 + (2,4 – 3,8) – (1,6 – 2)? **8.** –4

9 Escreva, na forma decimal, o número correspondente ao valor da expressão:

$$-\frac{9}{2} + \left[-1 - \left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{4}\right)\right]$$ **9.** –5,125

10 Determine entre quais números inteiros consecutivos se encontra o valor da expressão:

$$\frac{7}{3} - \left[2 - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right]$$ **10.** Entre –1 e 0.

11 Jurandir efetuou a operação $\frac{1}{8} + \left(-\frac{1}{4}\right)$ na calculadora e encontrou o seguinte resultado:

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que o resultado obtido por Jurandir não está correto, determine:

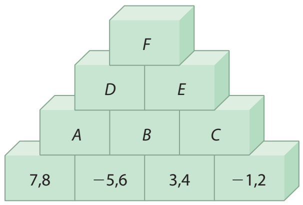
11. a) –0,125 **11. b)** $\left(\frac{1}{8} - 1\right) : 4$

a) o resultado correto desta operação;

b) a expressão que corresponde ao cálculo obtido na calculadora.

- Agora, responda e justifique: como você efetuaria essa operação usando uma calculadora? **11.** Resposta pessoal.

12 No empilhamento, cada letra equivale à diferença entre duas peças imediatamente abaixo, de modo que o número do alto do empilhamento seja um número quadrado perfeito. Determine esse número. **12.** 36



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

13 *Hora de criar* – Troque com um colega um problema, criado por vocês, sobre adição ou subtração com números racionais. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **13.** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Reúna-se com um colega e façam o que se pede. *Pense mais um pouco...:*

1. Considere estes cartões: 0 2 5

Usando sempre os três cartões, monte todos os números racionais possíveis, colocando a vírgula entre dois desses algarismos. **1.** Números possíveis: 0,25; 0,52; 2,05; 2,50; 5,02; 5,20; 20,5; 25,0; 50,2; 52,0

Qual é a diferença entre o menor e o maior desses números? –51,75

2. Os *icebergs* são grandes massas de água no estado sólido que se deslocam com as correntes marítimas no oceano. O que vemos fora da água é uma pequena parte do *iceberg*, que em geral corresponde a $\frac{1}{10}$ de seu volume.

Represente, na forma de fração, qual é a porção do *iceberg* que fica dentro da água. **2.** $\frac{9}{10}$

PASCAL UEHLI/SHUTTERSTOCK

Iceberg flutuando na Groenlândia. (Fotografia de 2020.)

3. Gabriela, Eduardo e Mauro compraram um pote de sorvete. Gabriela tomou $\frac{1}{5}$ do sorvete. Do que sobrou, Eduardo tomou $\frac{1}{4}$, e Mauro tomou $\frac{1}{2}$ do que Eduardo deixou. Ao final, restaram apenas 300 mL de sorvete. Quantos mililitros de sorvete havia inicialmente no pote? Explique com suas palavras como resolveu este exercício. **3.** Inicialmente havia no pote 1 000 mL de sorvete. Resposta pessoal.

elaborar um problema e compará-lo com o de outros colegas, os estudantes poderão perceber que problemas que têm a mesma estrutura podem ser resolvidos pelo mesmo procedimento.

Pense mais um pouco...

As resoluções dos **exercícios 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 7** a **11** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Aproveite o **exercício 11** para discutir com os estudantes como fazer uma adição ou uma subtração de frações com o auxílio de calculadora.

Digamos que se queira saber o resultado de $\frac{7}{8} + \frac{1}{5}$. Para isso, é possível calcular o resultado da primeira divisão 7 : 8 = 0,875, registrá-lo em papel, calcular o resultado de 1 : 5 = 0,2 e, depois, adicionar 0,875 a esse valor, obtendo 1,075.

Se julgar oportuno, ensine os estudantes a usar a tecla de memória. Com ela, o registro do resultado parcial da primeira divisão não será necessário, o que proporciona mais agilidade no cálculo.

Efetuamos a primeira divisão 7 : 8 = 0,875 – e apertamos a tecla M+. Assim, a calculadora armazena o resultado 0,875 na memória. Depois, limpamos o visor e realizamos a segunda divisão 1 : 5 = 0,2 – apertando a tecla M+, para 0,2 ser adicionado ao resultado anterior: 0,875. Finalmente, apertamos a tecla MR, que mostrará o total armazenado na memória: 1,075.

No **exercício 12**, temos:

$A = 7{,}8 - (-5{,}6) = 13{,}4$

$B = -5{,}6 - (3{,}4) = -9$

$C = 3{,}4 - (-1{,}2) = 4{,}6$

$D = A - B = 13{,}4 - (-9) = 22{,}4$

$E = B - C = -9 - 4{,}6 = -13{,}6$

$F = D - E = 22{,}4 - (-13{,}6) = 36$

Logo, o número no alto da pilha é o 36.

Esse número é quadrado perfeito: $6^2 = 36$.

O **exercício 13** tem como objetivo fazer com que os estudantes reflitam sobre o que aprenderam e consigam elaborar uma situação-problema que apresente dados suficientes para responder a uma pergunta proposta. Como sugestão a auxiliar aqueles que tiverem mais dificuldade com o conteúdo estudado, pode-se propor-lhes que juntem os problemas elaborados e os resolvam em grupos. Esse exercício favorece o desenvolvimento da habilidade EF07MA06, pois, ao

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2. Multiplicação

Habilidades da BNCC: **EF07MA06** e **EF07MA12**.

A multiplicação é abordada por meio de uma situação contextualizada de fácil entendimento e envolve números racionais nas formas de fração, decimal e percentual.

Além dos exemplos, o balão de fala do professor recorda e anuncia que se mantêm válidas as propriedades operatórias estudadas na multiplicação dos números inteiros.

A propriedade do fechamento não foi mencionada aqui porque não estamos realizando um estudo axiomático de teoria dos conjuntos.

Se julgar necessário, apresente outros exemplos de multiplicação, na lousa, seguindo as indicações dos estudantes.

2 Multiplicação

Do mesmo modo que necessitamos adicionar ou subtrair números racionais para resolver problemas, também precisamos multiplicá-los.

Acompanhe a situação a seguir.

CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Paulo contratou serviços de jardinagem para fazer um canteiro em um terreno com área medindo 900 m². O jardineiro construiu um canteiro que ocupou 20% da metade desse terreno.

Como a empresa de jardinagem cobrou R$ 78,50 por metro quadrado de canteiro construído, quanto Paulo gastou?

Para descobrir a quantia, observe a expressão a seguir.

$$\underbrace{\overbrace{20\% \cdot \frac{1}{2} \cdot 900}^{\text{medida da área do canteiro em metro quadrado}} \cdot 78{,}50}_{\text{despesa com a construção do canteiro}}$$

Agora, vamos calcular o valor dessa expressão.

$$20\% \cdot \frac{1}{2} \cdot 900 \cdot 78{,}50 = \quad \leftarrow \text{Escrevemos 20\% na forma de fração.}$$

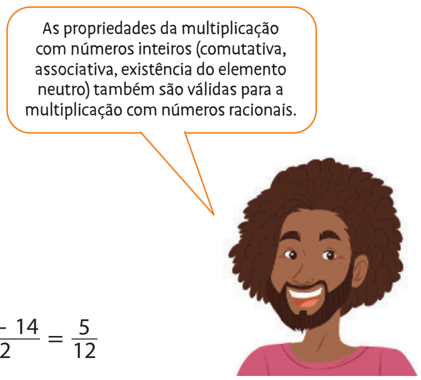
$$= \frac{\overset{10}{\cancel{20}}}{\underset{1}{\cancel{100}}} \cdot \frac{1}{\underset{1}{\cancel{2}}} \cdot \overset{9}{\cancel{900}} \cdot 78{,}50 = \quad \leftarrow \text{Simplificamos os números e efetuamos as multiplicações dos três primeiros fatores.}$$

$$= 90 \cdot 78{,}50 = \quad \leftarrow \text{Efetuamos a multiplicação.}$$

$$= 7\,065{,}00$$

Portanto, Paulo gastou R$ 7 065,00.

Acompanhe outros exemplos.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

a) $(-0{,}3) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right)$

Lembrando que $-0{,}3 = -\frac{3}{10}$, temos:

$$(-0{,}3) \cdot \left(-\frac{5}{8}\right) = \left(-\frac{3}{\underset{2}{\cancel{10}}}\right) \cdot \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{8}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{16}$$

b) $-\frac{3}{4} - \left(-\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{6}\right) \cdot \left(+\frac{7}{\underset{1}{\cancel{5}}}\right) = -\frac{3}{4} - \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{7}{6} = \frac{-9+14}{12} = \frac{5}{12}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

14 Registre no caderno os produtos de cada multiplicação.

a) $(-3) \cdot \left(+\frac{14}{5}\right)$ **14. a)** $-\frac{42}{5}$

b) $5{,}4 \cdot (-20)$ **14. b)** -108

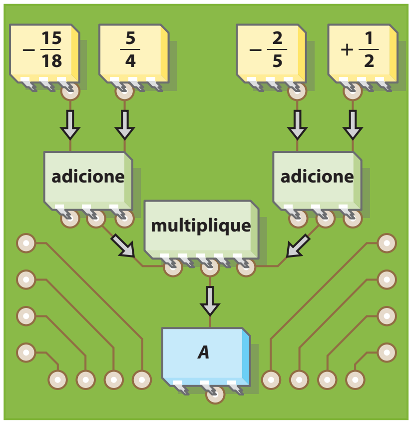
c) $(-0{,}2) \cdot (-0{,}01)$ **14. c)** $0{,}002$

d) $0{,}5 \cdot \left(-\frac{8}{7}\right)$ **14. d)** $-\frac{4}{7}$

e) $(-2{,}3) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)$ **14. e)** $\frac{23}{4}$

15 Sabendo que $A = \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$ e $B = -\frac{2}{3} + \frac{1}{2}$, calcule $A \cdot B$. **15.** $\frac{5}{72}$

16 Determine o valor de A de acordo com as operações indicadas no esquema. **16.** $A = \frac{1}{24}$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

17 Calcule o valor de cada expressão.

a) $(0{,}5) \cdot (-1{,}4 + 2{,}1)$ **17. a)** 0,35

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) - \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)$ **17. b)** $-\frac{7}{32}$

c) $\left(\frac{9}{4} + \frac{7}{2}\right) + \left[\frac{3}{16} \cdot (-10) - \frac{7}{2}\right]$ **17. c)** $\frac{3}{8}$

18 O salário de Beatriz é calculado de acordo com as horas trabalhadas. Em maio, ela trabalhou 176 horas e 24 minutos. Qual deve ser seu salário nesse mês, considerando que ela recebe R$ 13,55 por hora? **18.** R$ 2 390,22.

19 Leia o problema a seguir.

Dos 540 reais que Maria havia economizado, ela retirou $\frac{2}{3}$ para comprar um par de tênis. Com quantos reais ela ficou? **19. a)** $540 - \frac{2}{3} \cdot 540$

a) Escreva uma expressão numérica que determine a solução desse problema.

b) Resolva a expressão, obtendo a resposta do problema. **19. b)** 180 reais.

20 Dois robôs, A e B, partem de um mesmo ponto e caminham em sentidos opostos. Cada passo de A mede 0,54 m, e cada passo de B, 0,62 m. Qual será a medida da distância entre eles, após o robô A dar 12 passos, e o robô B dar 10 passos? **20.** 12,68 m

21 *Hora de criar* – Elabore um problema cuja solução possa ser representada pela expressão:

$$120{,}30 - 10\% \cdot 120{,}30$$ **21.** Resposta pessoal.

Em seguida, proponha a um colega que resolva o problema que você elaborou e resolva o dele.

21. A solução será 108,27.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

Descubra como fazer o cálculo de 144,26 · 3,7 em uma calculadora na qual as teclas 4, 6 e . estão quebradas.

Resposta possível:

7 2 1 3 × 2 ÷ 1 0 0 × 3 7 ÷ 1 0

VOVAN/SHUTTERSTOCK

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 14 a 17** e do **exercício 20** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

O **exercício 16** apresenta uma expressão numérica na forma de esquema. Essa linguagem se assemelha, na forma, a um fluxograma, representação de um algoritmo.

No **exercício 18**, explique aos estudantes que o período de 176 horas e 24 minutos não pode ser representado por 176,24 horas, pois o sistema de medida de tempo não é decimal. Para saber a que fração de 1 hora o período de 24 minutos corresponde, podemos fazer: $\frac{24}{60} = 0{,}4$. Portanto, Beatriz trabalhou 176,4 horas. Multiplicando essa quantidade pelo valor de cada hora de trabalho (R$ 13,55), obtém-se 2 390,22.

Nesse mês, Beatriz deve receber R$ 2 390,22 de salário.

Para ampliar esse exercício, peça aos estudantes que pesquisem a jornada de trabalho definida pela Consolidação das Leis do Trabalho (CLT), instituída pelo Decreto-lei nº 5.452, que estabelece a duração de até 8 horas diárias e 44 horas semanais. Considerando essa jornada, solicite a eles que calculem quanto Beatriz receberia por dia de trabalho e por semana. Assim, a atividade proposta contribui para o desenvolvimento da **competência geral 6** e do Tema Contemporâneo Transversal **trabalho**.

O **exercício 21** pode ser ampliado da seguinte maneira: considerando que, para resolver a expressão 120,30 – 10% · 120,30 com uma calculadora, uma pessoa apertou as teclas a seguir, na mesma ordem em que aparecem na expressão:

1 2 0 . 3 0
– 1 0 % × 1
2 0 . 3 0 =

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

- Que resultado foi obtido? (Resposta: 13 024,881)
- Qual seria o resultado correto da expressão? (Resposta: 108,27)
- Qual é o motivo da diferença? (Resposta: Ao se apertarem as teclas na sequência da expressão, a calculadora obteve 90% de 120,30 e multiplicou esse resultado por 120,30, o que está errado.)

Nesse tipo de atividade, fique atento ao fato de que pode haver calculadoras com programação diferente daquela que consideramos. Dessa forma, a ordem de digitação das teclas pode variar entre elas, assim como o resultado.

Pense mais um pouco...

Aproveite para trabalhar a estimativa do resultado dessa multiplicação. Para isso, peça aos estudantes que calculem o produto de fatores aproximados desses, mas inferiores a ambos, como 140 · 3 = 420. Proponha, em seguida, o mesmo cálculo com fatores aproximados, mas superiores a ambos, como 150 · 4 = 600. Assim, poderão concluir que o produto 144,26 · 3,7 está entre 420 e 600.

3. Divisão

Habilidades da BNCC: **EF07MA06**, **EF07MA07** e **EF07MA12**.

A divisão é abordada por meio de situações contextualizadas de fácil entendimento dos estudantes.

A **situação 1** aborda um problema recorrente de engenharia: a construção de uma escada. Comente com os estudantes que, embora a resolução do problema passe pela divisão entre números racionais não inteiros, buscamos obter um número natural, pois esse é o tipo de número que representa a quantidade da grandeza discreta número de degraus de uma escada.

Nessa situação-problema, a resolução é sistematizada por um fluxograma, além de ser discutida e desenvolvida pelas divisões.

O trabalho com fluxogramas, além de desenvolver o pensamento computacional, contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA07).

Amplie a abordagem do contexto solicitando aos estudantes, em grupos, uma pesquisa da parte das normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) que regulamenta a construção de uma escada. Essa pesquisa pode ser discutida em sala de aula, e seus resultados, apresentados para os colegas em forma de texto ou por meio de cartazes, possibilitando o desenvolvimento da **competência geral 4**, pois os estudantes utilizam diferentes linguagens para se expressar e partilhar informações.

3 Divisão

Considere as situações a seguir.

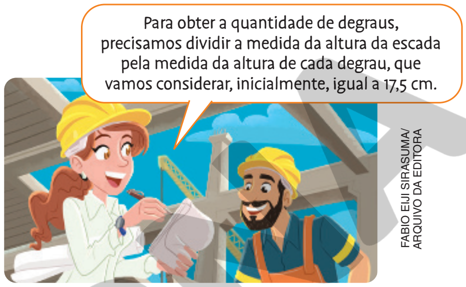
Situação 1

Mayra é engenheira e precisa construir uma escada medindo 284,8 cm de altura.

Seguindo as normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), a medida do espelho, isto é, a medida da altura de cada degrau, deve ficar entre 17,5 cm e 18,5 cm.

Mayra quer saber quantos degraus deverá ter essa escada, de modo que ela seja suave, isto é, com espelho de 17,5 cm. Isso será possível?

Observe como ela calculou 284,8 : 17,5.



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Como o dividendo e o divisor têm a mesma quantidade de casas após a vírgula, então efetuamos a divisão como se a vírgula não existisse.

```
2848 |175
1098  16,2
 480
 130
```

Como a escada não pode ter 16,2 degraus, Mayra deve fazê-la com 16 degraus. Então, a medida da altura de cada degrau será dada por 284,8 : 16 ou 2848 : 160.

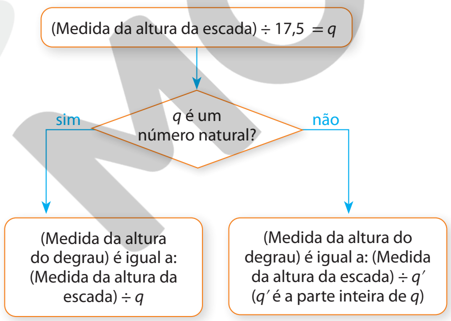
```
2848 |160
1248  17,8
 1280
   00
```

Cada degrau terá um espelho de 17,8 cm.

Uma maneira prática de representar um procedimento por etapas (um processo) é chamada **fluxograma**.

Observe como Mayra registrou o procedimento em um fluxograma.

Fluxograma: altura do degrau



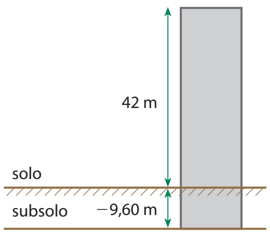
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

- Para efetuar a operação de divisão com números racionais, devemos lembrar que:
  - na divisão com números na forma de fração, multiplicamos a primeira fração pelo inverso da segunda;
  - na divisão com números na forma decimal, igualamos a quantidade de casas decimais e dividimos como se os números fossem inteiros;
  - o quociente de números de mesmo sinal é positivo, e o quociente de números de sinais contrários, negativo.

Situação 2

Um edifício foi projetado de tal modo que alguns andares ficam no subsolo. A medida da altura do edifício, acima do solo, é 42 m, e a medida da profundidade dele, abaixo do solo, é –9,60 m. A medida da altura de cada andar do subsolo pode ser representada por –3,20 m, e a de cada andar acima do solo, por +3,50 m. Quantos andares tem esse edifício?



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

- número de andares no subsolo ⟶ (–9,60) : (–3,20) = 3
- número de andares acima do solo ⟶ (+42) : (+3,50) = 12
- total de andares ⟶ 3 + 12 = 15

Portanto, esse edifício tem 15 andares.

Acompanhe mais exemplos nos quais é preciso efetuar a divisão entre números racionais.

a) Observe como efetuamos a divisão.

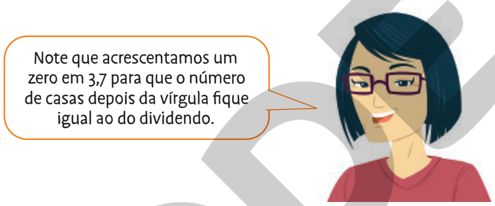
$$\left(-\frac{3}{5}\right) : \left(-\frac{8}{5}\right) = \left(-\frac{3}{\cancel{5}_{1}}\right) \cdot \left(-\frac{\cancel{5}^{1}}{8}\right) = (-3) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}$$

b) Vamos calcular o quociente (–19,24) : (3,7).

Como são números de sinais diferentes, o quociente será negativo. Então, basta efetuar 19,24 : 3,7, cujo quociente é o mesmo que o de 1 924 : 370.

Assim:

1924	370
0740	5,2
000	



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, (–19,24) : (3,7) = –5,2.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

23. Não, pois 284,8 : 15 ≃ 19,0 e 284,8 : 17 ≃ 16,8, e esses números não estão entre 17,5 cm e 18,5 cm.

22 Registre o cálculo das divisões e seus respectivos quocientes.

a) $\left(\frac{3}{5}\right) : \left(\frac{3}{4}\right)$ **22. a)** $\frac{4}{5}$

b) (–65,72) : (–12,4) **22. b)** 5,3

c) $\left(-\frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{1}{4}\right)$ **22. c)** $\frac{10}{3}$

d) 0,3 : (–0,2) **22. d)** –1,5

23 Voltando ao problema da engenheira Mayra, segundo as normas da ABNT, a escada poderia ter 15 degraus? E 17 degraus? Justifique.

24 O veado-de-cauda-branca, animal que habita a região de Minnesota, nos Estados Unidos, chega a saltar uma distância de 9 metros de medida, o que corresponde a aproximadamente 4,5 vezes a medida de seu tamanho.

a) Qual é a medida do comprimento aproximado do veado-de-cauda-branca? **24. a)** 2 m

b) Se um adulto pudesse saltar uma distância de 7,6 m de medida, correspondente a 4,5 vezes sua altura, qual seria a altura desse adulto? **24. b)** Aproximadamente 1,69 m.

No **exercício 23**, a escada não poderia ter 15 degraus, pois o resultado da divisão de 284,8 cm (altura da escada) por 15 é, aproximadamente, 19 cm, que não está entre 17,5 cm e 18,5 cm. O mesmo acontece com 17 degraus: 284,8 cm : 17 ≃ 16,8

A resolução do **exercício 24** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Divisão

A **situação 2** aborda uma situação contextualizada que envolve divisão com números racionais positivos e também com números racionais negativos. Ainda nesse contexto, buscamos um número natural que representa outra grandeza discreta: o número de andares de um edifício.

Reproduza o **exemplo a** na lousa e resolva-o passo a passo.

No **exemplo b**, destaque aos estudantes que a divisão euclidiana é feita sem os sinais do dividendo e do divisor, que serão levados em conta e atribuídos posteriormente ao quociente por meio da regra de sinais. Também cabe observar que, para efetuar a divisão euclidiana, dividendo e divisor devem estar escritos com a mesma quantidade de casas decimais, o que justifica o acréscimo de um zero no divisor. Esse procedimento já foi apresentado aos estudantes em anos anteriores.

Caso eles ainda tenham dúvidas em relação à regra de sinais, retome a divisão com números inteiros.

Exercícios propostos

Os exercícios deste bloco apresentam contextos variados, reforçando a ampla aplicação do conceito estudado.

No **exercício 22** é trabalhada a divisão com números racionais. Acompanhe uma sugestão de resolução:

a) $\frac{3}{5} : \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$

b) (–65,72) : (–12,4)

Como são números de mesmo sinal, o quociente será positivo. Então, basta efetuar 65,72 : 12,4, cujo quociente é o mesmo que o de 6 572 : 1 240.

6 572	1 240
3720	5,3

Logo,
(–65,72) : (–12,4) = 5,3

c) $-\frac{5}{6} : -\frac{1}{4} = -\frac{5}{6} \cdot -\frac{4}{1} = \frac{10}{3}$

d) 0,3 : (–0,2)

Como são números de sinais diferentes, o quociente será negativo. Então, basta efetuar 0,3 : 0,2, cujo quociente é o mesmo que o de 3 : 2.

Logo, 0,3 : (–0,2) = –1,5

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 25** a **27** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Na resolução do **exercício 25**, se necessário, alerte os estudantes para o fato de que há ingredientes (caso do queijo branco) para os quais é preciso efetuar duas divisões para obter seu valor na composição do prato.

O **exercício 26** articula as Unidades Temáticas **Números** e **Álgebra**. Fique atento para a possível necessidade de orientar os estudantes a executar um passo de cada vez.

No **exercício 27**, oriente os estudantes a seguir a ordem dos itens, pois a resolução do **item b** passa pela resolução do **item a**. Amplie a discussão que esse exercício propicia, questionando-os sobre quanto por cento o automóvel de Marilu percorre a mais com gasolina em relação ao etanol. Esse percentual aplicado ao preço do litro do etanol determina a equivalência do preço *x* do litro da gasolina, ou seja, se o preço do litro da gasolina for maior do que *x*, a opção mais econômica é o etanol. Depois de resolver esse exercício em sala de aula, peça aos estudantes que apresentem e debatam essa questão com um adulto que tenha automóvel.

Essa atividade contribui para uma reflexão sobre o Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

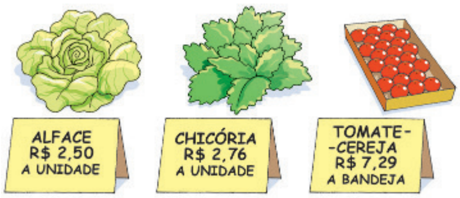
Pense mais um pouco...

Na atividade proposta dessa seção, a linha em que o produto é diferente é: (−4) · (−0,15) · 16. Deve-se trocar −0,15 por −0,125.

Incentive os estudantes a criar outros esquemas como o dessa atividade, considerando multiplicações de números racionais que tenham o mesmo produto.

25 Célia quer montar um novo prato de salada para acrescentar no cardápio de seu restaurante. Esse novo prato terá alface, chicória, tomate-cereja, queijo esférico e queijo branco.

Para saber o preço que vai cobrar, Célia tem de descobrir o custo de cada prato de salada. No mercado, ela encontrou os seguintes preços para os ingredientes:



ILUSTRAÇÕES: CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

25. a) Alface: R$ 1,00; chicória: R$ 0,69; tomate-cereja: R$ 2,43; queijo esférico: R$ 6,09; queijo branco: R$ 1,80.

Célia sabe que esses ingredientes são usados nas quantidades a seguir.

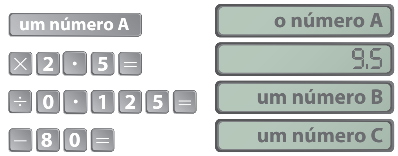
- 2 pés de alface fazem 5 pratos de salada;
- 1 pé de chicória faz 4 pratos de salada;
- 1 bandeja de tomate-cereja faz 3 pratos de salada;
- 500 g de queijo branco fazem 6 pratos de salada;
- 1 kg de queijo esférico faz 11 pratos de salada.

a) Qual será o valor correspondente a cada ingrediente para preparar um prato de salada?

b) Qual será o custo de cada prato de salada? **25. b)** R$ 12,01.

26. a) $A = 3,8$; $B = 76$ e $C = -4$.

26 Bruna efetuou algumas operações com a calculadora. Observe como ela fez.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Descubra quais são os números *A*, *B* e *C*. Depois, use uma calculadora para confirmar sua resposta e refaça os passos de Bruna.

b) Construa um fluxograma com os passos necessários para encontrar os números *A*, *B* e *C*, substituindo o número 9,5 por 8.

c) É possível substituir o número 8 por outro número qualquer no fluxograma que você construiu? Caso não seja possível, com o professor e os colegas, façam as alterações necessárias para que essa condição seja atendida. **26.** As respostas dos itens **b** e **c** estão neste *Manual*.

27 Marilu está viajando com seu carro de motor bicombustível. Ao parar no primeiro posto para abastecer seu veículo, ela ficou em dúvida se abastecia com gasolina ou etanol. O preço do litro da gasolina nesse posto era de R$ 6,596, e o do litro do etanol, R$ 5,051.

a) Sabendo que o carro de Marilu percorre 12,5 km com 1 litro de gasolina e 10 km com 1 litro de etanol, quantos litros de cada combustível ela usaria para rodar por 100 km?

b) Com qual combustível ela economizará mais abastecendo nesse posto? Justifique sua resposta.

c) Em um segundo posto de combustível, o preço do litro da gasolina era de R$ 6,511, e o do litro do etanol, R$ 5,135. Se Marilu gastou R$ 260,44 para abastecer seu carro com 40 litros de combustível, ela fez a opção pelo combustível mais econômico? Justifique sua resposta. **27. c)** Não, pois ela devia ter abastecido com etanol.

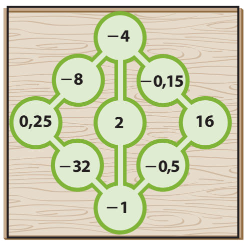
27. a) Gasolina: 8 litros; etanol: 10 litros.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

No esquema, exceto para uma linha, o produto entre os números de cada linha resulta no mesmo valor.

Descubra qual é a linha em que o produto é diferente. Mude um dos números dessa linha para que o produto deles seja o mesmo dos números das outras linhas.

Pense mais um pouco...:
A linha é a que apresenta os números −4, −0,15 e 16.
O número −0,15 deve ser trocado pelo número −0,125.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

27. b) Economizará mais abastecendo com etanol. Se Marilu percorrer 100 km com etanol, gastará R$ 50,51; e, com gasolina, R$ 52,77.

4 Potenciação

Você já estudou a potenciação com números inteiros com expoentes naturais, assim como a potenciação com números racionais positivos com expoentes naturais.

Considerando o que aprendeu, vamos calcular agora potências que tenham como base um número racional qualquer (positivo, negativo ou nulo) e como expoente um número natural.

Toda potência com expoente natural maior que 1 é igual a um produto em que o número de fatores é igual ao expoente da potência e todos os fatores são iguais à base.

Exemplos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}$

b) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = +\frac{1}{81}$

c) $(-0{,}2)^3 = (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) \cdot (-0{,}2) = -0{,}008$

Para os números racionais, mantemos as convenções que tínhamos adotado para os números inteiros.

- Toda potência com expoente zero e base diferente de zero é igual a 1.
- Toda potência com expoente 1 é igual à própria base.

Exemplos:

a) $\left(+\frac{2}{5}\right)^0 = 1$

b) $\left(\frac{3}{7}\right)^1 = \frac{3}{7}$

c) $\left(-\frac{3}{8}\right)^0 = 1$

d) $\left(-\frac{9}{4}\right)^1 = -\frac{9}{4}$

e) $(0{,}2)^0 = 1$

f) $(0{,}5)^1 = 0{,}5$

g) $(-0{,}222\ldots)^0 = 1$

h) $0^1 = 0$

Propriedades da potenciação

As propriedades da potenciação estudadas para os números inteiros também são válidas para os números racionais. Acompanhe.

a) $\left(-\frac{3}{8}\right)^3 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right)^2 = \left(-\frac{3}{8}\right)^{3+2} = \left(-\frac{3}{8}\right)^5$ Para determinar o produto de potências de mesma base, conservamos a base e adicionamos os expoentes.

b) $\left(\frac{5}{6}\right)^6 : \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^{6-2} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$ Para determinar o quociente de potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

c) $[(-0{,}3)^2]^5 = (-0{,}3)^{2 \cdot 5} = (-0{,}3)^{10}$ Para determinar a potência de uma potência, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

4. Potenciação

Habilidade da BNCC: **EF07MA12**.

Observe aos estudantes que, exceto pela aplicação dos símbolos "+" e "–" da base da potência, o cálculo da potência com os números racionais em nada difere do que já estudaram sobre essa operação com números racionais absolutos.

Na potenciação de números racionais, trabalhe potenciação com expoente positivo considerando números maiores que 1 e, depois, considerando números entre 0 e 1, pedindo aos estudantes que observem os resultados e verifiquem se as potências aumentam ou diminuem em cada caso. Espera-se que eles notem que, no primeiro caso, as potências aumentam e que, no segundo caso, diminuem.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 28** a **31** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Nos **exercícios 29** e **30**, oriente os estudantes a utilizar as propriedades operatórias da potenciação.

A abordagem das propriedades da potenciação pode ser ampliada por meio de exemplos particulares, a validade ou não de igualdades como $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ e $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, em que a e b são números racionais. Acompanhe os exemplos para os valores $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{4}$ e depois $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{5}$.

Obtemos:

$(a + b)^2$
$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$
$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \frac{121}{225}$

$a^2 + b^2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$
$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4}{25} = \frac{61}{225}$

Pelos cálculos anteriores, notamos que a igualdade $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ **não** será válida se a ou b não forem nulos.

$(a \cdot b)^2$
$\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$
$\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{2}{15}\right)^2 = \frac{4}{225}$

$a^2 \cdot b^2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{64}$
$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{25} = \frac{4}{225}$

A igualdade observada para esses valores particulares não constitui prova, mas sugere a validade da igualdade. Atividades exploratórias possibilitam oferecer aos estudantes oportunidades de elaborar hipóteses, refutá-las por meio de contraexemplos ou observar regularidades que devem ser provadas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

28 Calcule as potências.

a) $\left(\frac{2}{7}\right)^0$ **28. a)** 1

b) $\left(\frac{2}{7}\right)^1$ **28. b)** $\frac{2}{7}$

c) $(0,3)^2$ **28. c)** 0,09

d) $(-2,1)^2$ **28. d)** 4,41

e) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$ **28. e)** $\frac{9}{25}$

f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ **28. f)** $-\frac{27}{125}$

g) $(-0,4)^3$ **28. g)** $-0,064$

h) $(3,2)^2$ **28. h)** 10,24

29 Reduza a uma só potência.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^2$ **29. a)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^6$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$ **29. b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^8$

c) $(0,5)^2 \cdot (0,5) \cdot (0,5)$ **29. c)** $(0,5)^4$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^5 : \left(\frac{1}{5}\right)^2$ **29. d)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3$

e) $(2,1)^7 : (2,1)^6$ **29. e)** 2,1

f) $(-3,4)^4 : (-3,4)$ **29. f)** $(-3,4)^3$

g) $[(0,4)^2]^3$ **29. g)** $(0,4)^6$

h) $\left[\left(\frac{5}{7}\right)^2\right]^2$ **29. h)** $\left(\frac{5}{7}\right)^4$

30 Descubra o valor de x em cada sentença.

a) $(-0,2)^x \cdot (-0,2)^5 = (-0,2)^{12}$ **30. a)** $x = 7$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^6 : \left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{2}{5}$ **30. b)** $x = 5$

c) $[(-4)^x]^4 = (-4)^8$ **30. c)** $x = 2$

d) $(x)^5 \cdot (x)^2 = (-3)^7$ **30. d)** $x = -3$

31 Usando uma calculadora simples, podemos calcular a potência 2^8 apertando a sequência de teclas:

2 × = = = = = = = 256

Agora, usando uma calculadora, calcule cada potência.

a) $(-0,2)^5$ **31. a)** $-0,00032$

b) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ **31. b)** 0,004096

c) $(0,9)^6$ **31. c)** 0,531441

d) $(0,15)^3$ **31. d)** 0,003375

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^7$ **31. e)** 0,1334838867

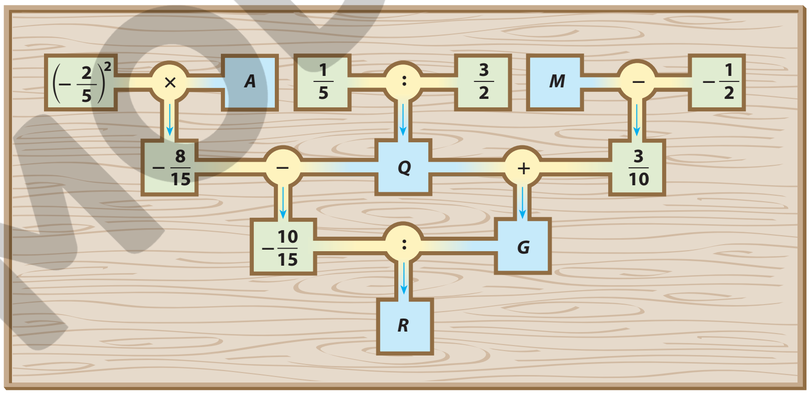
f) $(0,86)^3$ **31. f)** 0,636056

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Determine o valor de cada letra do esquema.

Pense mais um pouco...: $A = -\frac{10}{3}$, $M = -\frac{1}{5}$, $Q = \frac{2}{15}$, $G = \frac{13}{30}$ e $R = -\frac{20}{13}$



Pense mais um pouco...

A questão, que apresenta uma expressão numérica na forma de esquema, articula as Unidades Temáticas **Números** e **Álgebra**. Oriente os estudantes a aplicar, passo a passo, as relações entre multiplicação e divisão e entre adição e subtração.

A resolução da atividade proposta está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

PARA SABER MAIS

Buscando padrões

A Matemática, a Literatura, a Física e outros ramos do conhecimento vivem à procura de padrões, de regularidades. Vamos analisar isso com base em um **soneto**.

Felicidade

Guilherme de Almeida

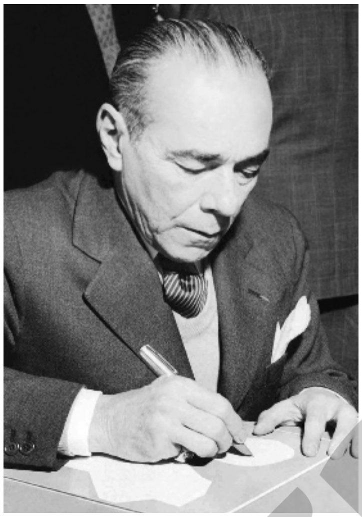
Ela veio bater à minha porta
e falou-me, a sorrir, subindo a escada:
"Bom dia, árvore velha e desfolhada!"
E eu respondi: "Bom dia, folha morta!" } quarteto

Entrou: e nunca mais me disse nada...
Até que um dia (quando, pouco importa!)
houve canções na ramaria torta
e houve bandos de noivos pela estrada... } quarteto

Então, chamou-me e disse: "Vou-me embora!
Sou a Felicidade! Vive agora
da lembrança do muito que te fiz!" } terceto

E foi assim que, em plena primavera,
só quando ela partiu, contou quem era...
E nunca mais eu me senti feliz! } terceto

Fonte: VOGT, C. (org.). **Guilherme de Almeida**. São Paulo: Global, 2015. (Coleção Melhores Poemas).



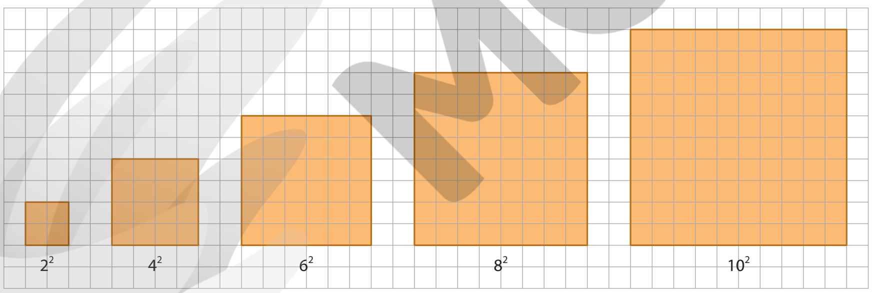
ACERVO UH/FOLHAPRESS

Guilherme de Almeida (1890-1969) foi tradutor, crítico e poeta brasileiro. Ao todo, tem mais de setenta livros publicados. (Fotografia de 1956.)

Os poetas gregos já buscavam métricas e rimas perfeitas, regulares. Embora tenha surgido muitos séculos depois, o **soneto**, por exemplo, deve apresentar a mesma estrutura, com 14 versos poéticos. Esses 14 versos são sempre divididos em duas estrofes de quatro versos, chamadas de **quartetos**, mais duas estrofes de três versos, chamadas de **tercetos**. Essa é a regularidade do soneto.

Os matemáticos, por sua vez, também vivem pesquisando padrões de comportamento nas figuras geométricas, nos números e em todos os seus objetos de estudo.

Vamos conferir isso por meio da sequência de quadrados de números pares.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Para saber mais

Habilidades da BNCC: **EF07MA14, EF07MA15** e **EF07MA16**.

Esta seção oferece oportunidade para um trabalho interdisciplinar com Língua Portuguesa, mas pode ser estendida a outros componentes curriculares, pois nas ciências geralmente a construção de conhecimentos está assentada na busca de padrões e regularidades, contribuindo para o desenvolvimento das **competências gerais 3** e **4**.

Veja alguns padrões humanos apresentados por Keith Devlin:

> Aristóteles usou a Matemática para tentar "ver" os padrões invisíveis do som que reconhecemos como música.
>
> Aristóteles também usou a Matemática para tentar descrever a estrutura invisível de uma cena de teatro.
>
> Na década de 1950, o linguista Noam Chomsky usou a Matemática para "ver" os padrões invisíveis, abstratos, das palavras que nós reconhecemos como pertencendo a uma sentença gramatical. Ele assim transformou a Linguística de um obscuro ramo da Antropologia em uma pujante ciência matemática.

(DEVLIN, K. **O gene da Matemática**. Rio de Janeiro: Record, 2004. p. 97-98.)

Pergunte aos estudantes se eles sabem o que é um soneto e se conhecem outros. Soneto é um poema de forma fixa que se apresenta com 14 versos e quatro estrofes, sendo dois quartetos e dois tercetos.

Para saber mais

Explique aos estudantes que o exercício de busca de padrões e regularidades começa com casos mais simples, como a determinação de padrões em uma sequência de quadrados ou de produtos de números que apresentam regularidades, como nos exemplos apresentados.

Discuta com eles expressões algébricas que possam representar a sequência numérica e figural dos quadrados de cor laranja mais acentuada apresentada como exemplo. A conclusão deve chegar a expressões como:

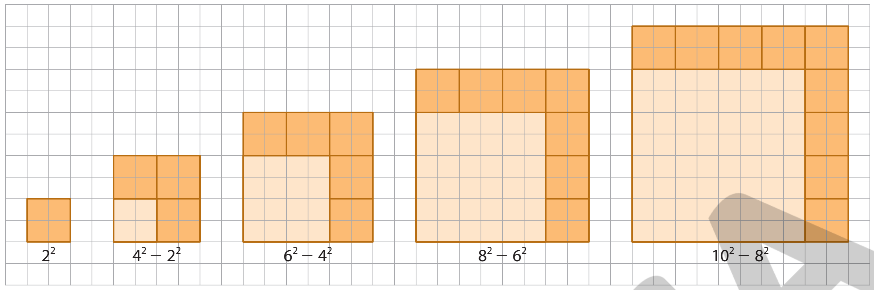
$(2n)^2 - (2n - 2)^2$ e $4(2n - 1)$ para $n = 1, 2, 3, 4, ...$

A resolução da atividade do **Agora é com você!** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Agora, vamos calcular a diferença entre dois quadrados de números pares consecutivos.

- $4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$
- $6^2 - 4^2 = 36 - 16 = 20$
- $8^2 - 6^2 = 64 - 36 = 28$
- $10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$

Que padrão ou regularidade é possível observar nessas diferenças? Observe.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A partir do segundo quadrado, observamos que:

- $4^2 - 2^2 \longrightarrow$ 3 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $3 \cdot 4$;
- $6^2 - 4^2 \longrightarrow$ 5 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $5 \cdot 4$;
- $8^2 - 6^2 \longrightarrow$ 7 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $7 \cdot 4$;
- $10^2 - 8^2 \longrightarrow$ 9 quadrados formados por 4 quadradinhos menores, ou seja, $9 \cdot 4$.

Todas essas diferenças são múltiplas de 4.

Uma sequência como essa, em que podemos obter qualquer elemento recorrendo a uma relação com o(s) elemento(s) anterior(es) por meio de uma regra, chamamos de **sequência recursiva**. Se for possível definir uma regra de formação que não dependa dos valores anteriores da sequência, dizemos que ela é **não recursiva**.

Observe que, se a_n é o enésimo elemento, isto é, o elemento da posição n dessa sequência, então os números do tipo $[(2n)^2 - (2n - 2)^2]$ também podem ser obtidos de maneira não recursiva pela **regra** ou **lei de formação**: $a_n = (2n - 1) \cdot 4$. Por exemplo:

$a_1 = (2 \cdot 1 - 1) \cdot 4 = 4$; $a_2 = (2 \cdot 2 - 1) \cdot 4 = 12$; $a_3 = (2 \cdot 3 - 1) \cdot 4 = 20$ etc.

Dizemos que as expressões $(2n)^2 - (2n - 2)^2$ e $(2n - 1) \cdot 4$ são **equivalentes**.

Respostas: a) $123456789 \cdot 36 = 4444444404$; $123456789 \cdot 45 = 5555555505$; $123456789 \cdot 54 = 6666666606$; $123456789 \cdot 63 = 7777777707$; $123456789 \cdot 72 = 8888888808$; $123456789 \cdot 81 = 9999999909$

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Com um colega, considerem os produtos representados no quadro.

A resposta do item **b** está neste *Manual*.

$123456789 \cdot 9 = 1111111101$
$123456789 \cdot 18 = 2222222202$
$123456789 \cdot 27 = 3333333303$
$123456789 \cdot ? = ?$

a) Sem efetuar cálculos, copiem no caderno o quadro e completem-no, deduzindo os fatores e os produtos até sua nona linha.

b) Confiram os resultados utilizando uma calculadora.

c) Escrevam uma regra que dê os elementos de 1 a 9 dessa sequência de maneira não recursiva.

c) $a_n = 123456789 \cdot 9n = nnnnnnnn0n$, com n, natural, de 1 a 9.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Construindo um gráfico de colunas duplas

Observe o balanço financeiro de duas papelarias no primeiro semestre de 2023.

Papelaria Material de Montão Balanço financeiro 1º semestre/2023 (em real)		
Mês	**Receita**	**Despesa**
Janeiro	38000	18390
Fevereiro	48500	17100
Março	42426	17000
Abril	16400	18940
Maio	16540	17500
Junho	24547	16500

Dados obtidos pela papelaria Material de Montão.

Papelaria Hiperlápis Balanço financeiro 1º semestre/2023 (em real)		
Mês	**Receita**	**Despesa**
Janeiro	48400	24680
Fevereiro	47640	25310
Março	54120	28430
Abril	23205	28615
Maio	28764	29400
Junho	16314	25800

Dados obtidos pela papelaria Hiperlápis.

Com os dados organizados nas duas tabelas, é possível construir uma única tabela.

Saldo financeiro 1º semestre/2023 (em real)		
Mês	**Papelaria Material de Montão**	**Papelaria Hiperlápis**
Janeiro	19610	23720
Fevereiro	31400	22330
Março	25426	25690
Abril	–2540	–5410
Maio	–960	–636
Junho	8047	–9486
Média	**13497**	**9368**

Dados obtidos pelas papelarias Material de Montão e Hiperlápis.

Também podemos apresentar as informações da tabela do saldo financeiro em um gráfico de colunas. Para construí-lo, devemos estabelecer escalas para cada eixo de modo que o gráfico caiba no espaço destinado a ele. Precisamos saber quantas unidades da grandeza a ser marcada no eixo corresponderão a cada centímetro:

- no eixo vertical, no qual vamos registrar o saldo em reais, calculamos a **amplitude** total, que é a diferença entre o maior e o menor valor.

  $$\text{amplitude (em real)} = 31\,400 - (-9\,486) = 40\,886$$

  Se dividirmos o valor arredondado da amplitude (40000) por 10000, por exemplo, obteremos 4. Concluímos que 4 cm do eixo vertical representam 40000 reais, ou cada 1 cm representa 10000, ou, ainda, cada intervalo de 0,5 cm representa 5000 reais;
- no eixo horizontal, no qual vamos marcar os meses, a coluna é representada por 1 cm de medida de largura.

A medida da altura de cada coluna deve ser proporcional ao valor do saldo do mês, e as medidas das larguras, iguais.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF07MA36**.

A seção proporciona oportunidade para uma discussão interdisciplinar de temas diversos, desde situações fictícias, como a do balanço financeiro das duas papelarias, até temas de interesse social, econômico, histórico etc.

Ao trabalhar com balanço financeiro, contribui-se para uma reflexão sobre o Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

Oriente os estudantes a avaliar o conjunto de dados de cada variável para calcular a amplitude e usar uma escala adequada nos eixos.

Sugerimos aprofundar o trabalho simulando outras situações envolvendo amplitude, com o apoio de recursos como planilhas eletrônicas.

Agora quem trabalha é você!

Para responder à **atividade 1**, os estudantes devem observar o gráfico que apresenta o saldo financeiro das papelarias. A papelaria Hiperlápis apresentou saldo menor, no valor de R$ 9486,00 negativos (**item a**). A maior diferença entre os saldos das duas lojas ocorreu em junho, no valor de R$ 17533,00 (8047 + 9486).

A resolução da **atividade 2** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

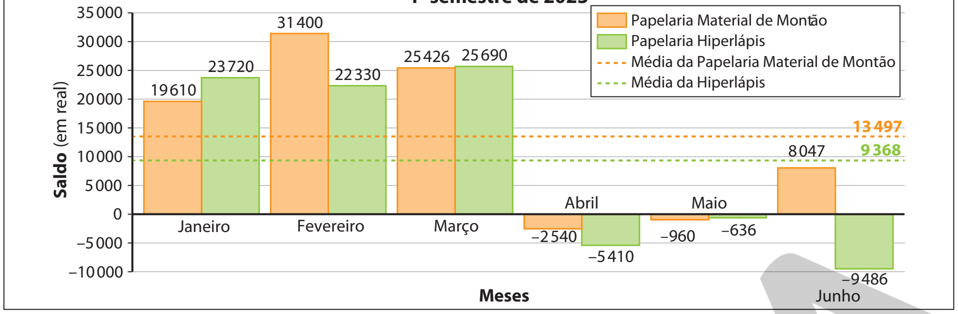
A **atividade 2** é um exemplo que pode se tornar uma atividade interdisciplinar com Educação Física. Ela pode ser enriquecida propondo aos estudantes uma coleta de dados de outras variáveis, como medida da massa corporal, idade, dobra cutânea e IMC. Trabalhando com os estudantes, esses dados devem ser organizados em tabelas e representados por meio de gráficos de colunas duplas, triplas etc.

Na resolução da **atividade 3**, avalie se convém mudar a organização dos estudantes para trios, aumentando a quantidade de pessoas pesquisadas e, assim, obtendo conclusões mais confiáveis. Essa atividade possibilita desenvolver a habilidade (EF07MA36), pois os estudantes precisam planejar e realizar a pesquisa e, depois, compartilhar com os colegas os dados obtidos.

Orientações: Avalie a oportunidade de retomar o conceito de média aritmética, solicitando o cálculo da média do saldo financeiro da Papelaria Material de Montão.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Saldo financeiro das papelarias Material de Montão e Hiperlápis – 1º semestre de 2023



Dados obtidos pelas papelarias Material de Montão e Hiperlápis.

Observe que, para cada mês, há duas informações: o saldo da Papelaria Material de Montão e o da Papelaria Hiperlápis. Esse tipo de representação gráfica é chamado de **gráfico de colunas duplas**.

As colunas de cor laranja correspondem ao saldo mensal da Papelaria Material de Montão, e as colunas de cor verde, ao saldo mensal da Papelaria Hiperlápis. Essas duas informações aparecem em uma **legenda**, que possibilita ao leitor compará-las. Além disso, na legenda, usando as mesmas cores das colunas de cada papelaria, há retas tracejadas que indicam a média do saldo financeiro mensal de cada grupo de dados.

Interpretando o gráfico, sabemos que:

- nos meses de abril a junho, a Papelaria Hiperlápis teve seu pior desempenho, apresentando saldos negativos;
- nos meses de abril e maio, a Papelaria Material de Montão apresentou saldos negativos;
- nos meses de janeiro a março, ambas as papelarias apresentaram saldos positivos;
- a média da Papelaria Material de Montão é mais próxima da amplitude do que a média da Papelaria Hiperlápis.

3. Respostas pessoais. Apesar de a amostra ter considerado 20 pessoas para todas as duplas, os gráficos obtidos poderão ser bem diferentes, uma vez que as pessoas entrevistadas manifestarão preferências diversas.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Com base no gráfico, responda às questões. **1. a)** Hiperlápis; saldo negativo de R$ 9486,00.

a) Qual papelaria apresentou o menor saldo mensal no período? De quanto foi esse saldo?

b) Quando ocorreu a maior diferença entre os saldos das duas lojas no mesmo mês? Qual é o valor dessa diferença? **1. b)** Junho; R$ 17533,00.

2 A professora Mara, de Educação Física, fez um estudo sobre as medidas das alturas médias de seus estudantes do 6º ao 9º ano, por sexo. Ela registrou o resultado em uma tabela. **2.** Construção de gráfico.

Construa um gráfico de colunas duplas para representar a situação da tabela. Para isso, convém:

- usar no eixo vertical 0,5 cm para cada 10 cm de medida de altura;
- criar uma legenda estabelecendo uma cor para a medida da altura das meninas e outra para a medida da altura dos meninos.

Média das medidas das alturas dos estudantes da professora Mara (em cm)

Ano	6º	7º	8º	9º
Feminino	145	155	160	160
Masculino	140	150	160	170

Dados obtidos pela professora Mara.

3 Reúna-se com um colega e façam uma pesquisa com 20 pessoas, sendo 10 homens e 10 mulheres, sobre a preferência de lazer entre cinema e esporte.

Organizem os dados obtidos em uma tabela, separando a preferência dos homens e a das mulheres. Em seguida, registrem esses dados em um gráfico de colunas duplas. Comparem o gráfico que construíram com o de outros colegas. São iguais? Por quê?

7. b) A fração tem denominador 9. Para obter o numerador da fração, multiplicamos por 10 o numerador da parte fracionária do número misto e, em seguida, adicionamos 9.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Calcule o valor das expressões.

a) $12 - 5 : \left(-\frac{4}{3}\right)$ **1. a)** $\frac{63}{4}$

b) $\frac{3}{7} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) - \frac{5}{8} : \left(-\frac{5}{2}\right)$ **1. b)** $-\frac{7}{20}$

c) $\left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{15}\right) : \left(-\frac{5}{6} - \frac{1}{9}\right)$ **1. c)** $\frac{2}{5}$

d) $\left(\frac{5}{2} - 3\right) : \left(1\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)$ **1. d)** $-\frac{3}{5}$

e) $4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{5}{3}\right) : \left(\frac{2}{9}\right)$ **1. e)** $-\frac{119}{18}$

2 Segundo o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe), entre 1º de agosto de 2020 e 31 de julho de 2021, a Floresta Amazônica perdeu uma área medindo 13 235 km², que representa aproximadamente $\frac{39}{100}$ da medida da área de Porto Velho, Rondônia.

Com esses dados, calcule a medida da área aproximada da cidade de Porto Velho. **2.** 33 935,9 km²

3 Considere as expressões:

$A = \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(2 - \frac{1}{4}\right)$

$B = \left(-2 + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{2}{3} - 3\right)$

Calcule o valor de $A \cdot B$. **3.** $\frac{5}{24}$

4 Fones de ouvido, pilhas, celulares, eletrodomésticos. Todos esses utensílios, quando deixam de funcionar e não são mais aproveitados, viram lixo eletrônico. O Brasil é o quinto maior gerador desse lixo no mundo. Em 2019, um brasileiro produziu, em média, 9,5 kg de lixo eletrônico, segundo relatório desenvolvido pela Universidade das Nações Unidas.

a) Faça uma pesquisa na internet, em livros, revistas ou jornais sobre a população brasileira atual e calcule, supondo que essa média seja mantida, a quantidade aproximada de lixo eletrônico, em quilograma, que essa população produzirá em 1 ano.

b) Usando a resposta ao item **a**, quantos elefantes, de cerca de 7 000 kg, seriam necessários para apresentarem juntos a mesma medida de massa do lixo produzido em 1 ano?

4. b) Aproximadamente 300 mil elefantes.

5 Observe a reta numérica a seguir. Nela representamos os números racionais 0, x, y e 1.

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Calculando o produto xy, que posição ele ocupará na reta? **5.** Alternativa **b**.

a) À esquerda de 0.
b) Entre 0 e x.
c) Entre x e y.
d) Entre y e 1.
e) À direita de 1.

6 Obtenha o inverso do valor de cada expressão.

a) $\dfrac{2\frac{1}{3}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$ **6. a)** $\frac{5}{14}$

b) $\left| -\dfrac{2 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} \right|$ **6. b)** $\frac{1}{14}$

7 Faça o que se pede. **7. a)** $\frac{69}{9}, \frac{79}{9}, \frac{89}{9}, \frac{99}{9}, \frac{109}{9}, \frac{119}{9}$

a) Escreva a fração correspondente a cada número misto a seguir.

$7\frac{6}{9}, 8\frac{7}{9}, 9\frac{8}{9}, 10\frac{9}{9}, 11\frac{10}{9}, 12\frac{11}{9}$

b) Que padrão pode ser observado na sequência de frações obtidas no item **a**?

c) Usando o padrão que é resposta do item **b**, determine a fração correspondente ao número misto $32\frac{31}{9}$. **7. c)** $\frac{31 \cdot 10 + 9}{9} = \frac{319}{9}$

d) Calcule a fração correspondente ao número misto $-3\frac{2}{9}$. **7. d)** $-\frac{29}{9}$

e) A fração que é resposta ao item **d** poderia ser obtida usando o padrão determinado no item **b**? **7. e)** Sim.

f) Os números mistos do item **a** são representados por $n \cdot \frac{n-1}{9}$. Verifique que suas frações correspondentes podem ser obtidas pelo padrão do item **b**, isto é, por $\frac{(n-1) \cdot 10 + 9}{9}$ e, também, pela expressão $n + \frac{(n-1)}{9}$, que, portanto, são expressões algébricas equivalentes.

7. b) A resposta do **item f** do **exercício 7** está neste *Manual*.

8. As *Matrioskas* são bonecas russas, de formato semelhante e feitas de madeira, que ficam guardadas uma dentro da outra.

8. A ideia de recursividade se dá pelo fato de que, quando abrimos uma boneca, há outra menor e de formato semelhante em seu interior.

ALF RIBEIRO/SHUTTERSTOCK

Podemos dizer que a ideia de recursividade está presente na confecção dessas bonecas? Justifique sua resposta.

4. a) Para os anos 2020, espera-se uma resposta em torno de 2,1 milhões de quilogramas.

Exercícios complementares

Nesta seção, são oferecidas novas oportunidades para os estudantes retomarem as operações com números racionais estudadas no capítulo. Espera-se que eles coloquem em prática os conhecimentos construídos e verifiquem se ainda há alguma dificuldade.

As resoluções dos **exercícios 1** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Aproveite a situação apresentada no **exercício 4** para conversar com os estudantes sobre o consumismo brasileiro e o avanço da tecnologia de telecomunicações. É importante que eles percebam o consumismo e o avanço da tecnologia como as principais causas da produção de lixo eletrônico. Aproveite para propor aos estudantes que reflitam sobre as consequências da geração de lixo eletrônico, apontando ações que reduzam a quantidade produzida. Deste modo, contribui-se para o desenvolvimento da **competência geral 7**.

Uma maneira de ampliar o **exercício 5** é pedir aos estudantes que considerem os simétricos de x e de y em relação ao zero na reta numérica e respondam novamente, considerando esses números, à pergunta formulada.

Para um reforço na aplicação dos conceitos apreendidos, faça com eles a construção e a desconstrução de uma sentença matemática com várias operações. Peça a um deles que escreva na lousa uma fração. Peça a outro que escreva na linha de baixo uma adição (ou uma subtração) com frações cuja soma (ou diferença) seja igual à fração anterior. Peça a outro que reescreva a expressão anterior, mas substitua uma das frações pelo produto ou pelo quociente de outras duas e assim por diante.

A expressão cresce em quantidade de elementos (números racionais) e de operações de acordo com o que o professor considerar conveniente. Em seguida, outro estudante começa a resolver a expressão e passa a outro, que continua a resolver até chegar à primeira fração escrita. Refaça a atividade só com números racionais escritos na forma decimal e, depois, com números racionais nas duas formas.

As expressões também podem ter elementos (fracionários ou decimais) substituídos por expressões entre parênteses, colchetes ou chaves.

O **exercício 8** é mais uma oportunidade para os estudantes refletirem sobre a ideia de recursividade, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA14).

Verificando

Esses exercícios são mais uma oportunidade para cada estudante validar o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo. Instrua-os a retomar as páginas anteriores caso alguma dúvida persista.

As resoluções dos **testes 1** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Organizando

Incentive os estudantes a organizar seu aprendizado no caderno, fazendo resumos e mapas conceituais ou aplicando destaques para conceitos importantes. As questões propostas têm como objetivo fazer com que eles retomem os conteúdos aprendidos no capítulo e que reflitam sobre algumas temáticas. Após sua correção é importante pedir-lhes que compartilhem suas respostas. Essa estratégia possibilitará o compartilhamento de dúvidas e percepções, contribuindo para o aprendizado de todos.

Oriente os estudantes a refletir sobre os questionamentos do **Organizando** e a elaborar respostas as mais amplas possíveis, considerando, por exemplo, as várias formas de representação dos números racionais (fracionários, decimais, mistos, percentuais, positivos, negativos, nulo) e a diversidade de procedimentos possíveis (por algoritmos, por fluxogramas, por textos, por tentativas, por analogias etc.) nas resoluções de problemas.

e) As propriedades são: para determinar o produto de potências de mesma base, conservamos a base e adicionamos os expoentes; para determinar o quociente de potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes; para determinar a potência de uma potência, conservamos a base e multiplicamos os expoentes. Os exemplos são pessoais.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A fim de comprar um presente para a professora, Roberta, Isis e Iago fizeram uma vaquinha. Roberta entrou com $\frac{3}{10}$ do valor do presente, Isis com $\frac{2}{5}$ e Iago com $\frac{1}{4}$. Eles juntaram dinheiro suficiente para essa compra? **1.** Alternativa **a**.

a) Não, pois faltará $\frac{1}{20}$ do valor.
b) Não, pois faltarão $\frac{19}{20}$ do valor.
c) Sim, e sobrará $\frac{1}{20}$ do valor.
d) Sim, e sobrarão $\frac{19}{20}$ do valor.

2 Jéssica foi a uma lanchonete e comprou 3 itens entre os ilustrados a seguir.

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Sabendo que ela gastou R$ 11,18, que itens ela comprou? **2.** Alternativa **b**.

a) Bolo, chocolate e sanduíche.
b) Sanduíche, picolé e bolo.
c) Suco, bolo e chocolate.
d) Torta, chocolate e picolé.

3 Um marceneiro precisa cortar uma tábua de 1,76 m de medida de comprimento em tábuas menores de 0,25 m de medida de comprimento. Quantas tábuas menores ele obterá? **3.** Alternativa **b**.

a) 6 tábuas. **c)** 8 tábuas.
b) 7 tábuas. **d)** 9 tábuas.

4 Quanto é 15% de R$ 145,68? **4.** Alternativa **c**.

a) R$ 0,21852 **c)** R$ 21,852
b) R$ 2,1852 **d)** R$ 218,52

5 Marcos recebe um salário mensal de R$ 1 200,00. Por motivos pessoais, neste mês, ele precisou trabalhar $\frac{3}{5}$ de hora a menos por dia durante 6 dias, e isso será descontado de seu salário ao final do mês. Se ele recebe R$ 15,00 por hora trabalhada, qual será o salário de Marcos nesse mês? **5.** Alternativa **c**.

a) R$ 1 192,00 **c)** R$ 1 146,00
b) R$ 1 150,00 **d)** R$ 1 110,00

6 Qual das alternativas a seguir equivale à potência $\left(-\frac{6}{4}\right)^3$? **6.** Alternativa **a**.

a) –3,375 **c)** –2,25
b) 1,5 **d)** 2,25

7 Um prédio comercial tem 9 andares acima do solo. Todos os andares têm 4,25 m de medida de altura. Qual é a medida da altura desse prédio? **7.** Alternativa **b**.

a) 36,225 m **c)** 38,50 m
b) 38,25 m **d)** 40,50 m

8 Em uma festa de aniversário, foram consumidos $\frac{7}{9}$ de um bolo. Se esse bolo foi cortado em 27 fatias, quantas fatias sobraram? **8.** Alternativa **c**.

a) 3 fatias. **c)** 6 fatias.
b) 5 fatias. **d)** 9 fatias.

9 Qual é o valor da expressão numérica a seguir?

$$(15 : 10) - \left|\left(-\frac{2}{3}\right)^2 \cdot (0{,}25 - 0{,}19)\right|$$

a) $-\frac{221}{150}$ **b)** $\frac{229}{150}$ **c)** $-\frac{229}{150}$ **d)** $\frac{221}{150}$

9. Alternativa **d**.

Organizando: **a)** Resposta pessoal. Os estudantes podem considerar a operação com os números na forma fracionária, envolvendo o uso do mmc ou, ainda, na forma decimal, utilizando o algoritmo e a posição correta das casas decimais.

Organizando

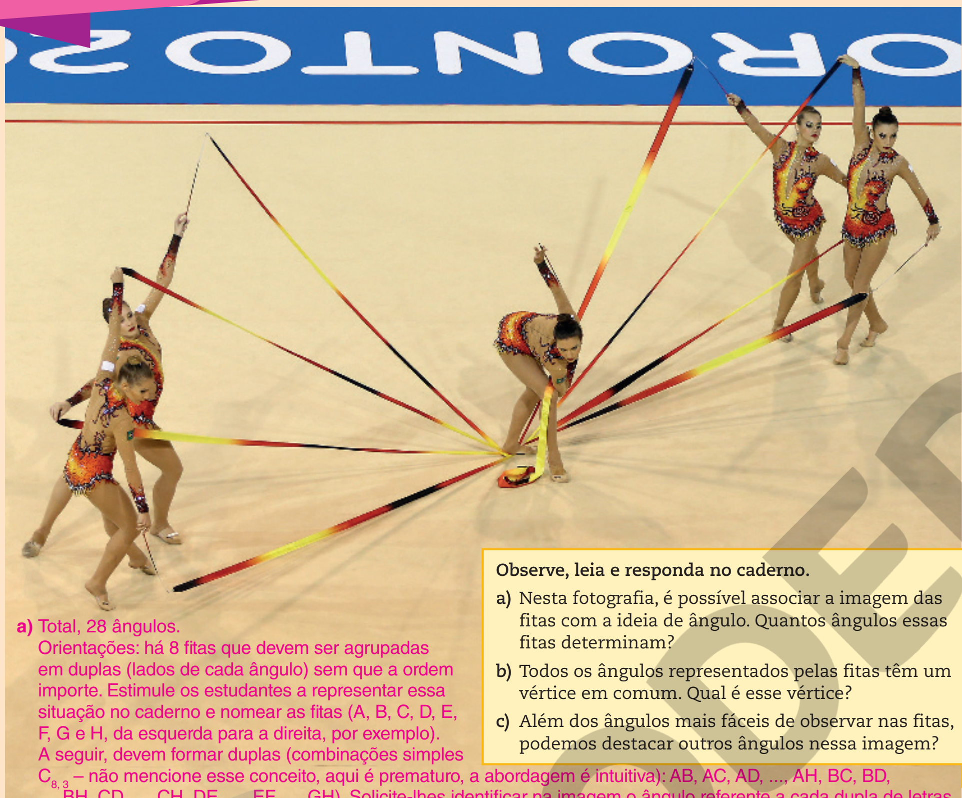
d) É importante analisar os sinais dos números que estamos operando, pois eles interferem no resultado final da operação.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, faça o que se pede.

a) Utilizando um fluxograma, indique como pode ser efetuada a adição de números racionais.
b) Escreva qual estratégia você usa para efetuar a multiplicação de dois números racionais. **b)** Resposta pessoal.
c) Explique como você efetua a divisão entre dois números decimais. **c)** Resposta pessoal.
d) Qual é a importância de analisar o sinal dos números envolvidos em uma operação?
e) Quais são as propriedades da potenciação de números racionais? Apresente exemplos com números racionais.

Capítulo 4

Ângulos



RODOLFO BUHRER/LA IMAGEM/FOTOARENA

Observe, leia e responda no caderno.

a) Nesta fotografia, é possível associar a imagem das fitas com a ideia de ângulo. Quantos ângulos essas fitas determinam?

b) Todos os ângulos representados pelas fitas têm um vértice em comum. Qual é esse vértice?

c) Além dos ângulos mais fáceis de observar nas fitas, podemos destacar outros ângulos nessa imagem?

a) Total, 28 ângulos.
Orientações: há 8 fitas que devem ser agrupadas em duplas (lados de cada ângulo) sem que a ordem importe. Estimule os estudantes a representar essa situação no caderno e nomear as fitas (A, B, C, D, E, F, G e H, da esquerda para a direita, por exemplo).
A seguir, devem formar duplas (combinações simples $C_{8,3}$ – não mencione esse conceito, aqui é prematuro, a abordagem é intuitiva): AB, AC, AD, ..., AH, BC, BD, ..., BH, CD, ..., CH, DE, ..., EF, ..., GH). Solicite-lhes identificar na imagem o ângulo referente a cada dupla de letras.

Equipe feminina do Brasil conquista a medalha de ouro na ginástica rítmica com fitas durante os Jogos Pan-Americanos de 2015, realizados em Toronto (Canadá). (Fotografia de 2015.)

b) Sob o pé esquerdo da atleta que está no centro.

c) Espera-se que os estudantes percebam a ideia de ângulo também nas flexões de braços e de pernas de cada atleta.

Na fotografia é possível analisar uma das coreografias realizada pelas atletas com a fita, em que podemos identificar a ideia de ângulo.

> A fita é um aparelho composto por uma vareta presa a uma fita de seda ou material semelhante. [...]
>
> Vista como o aparelho mais plástico da ginástica rítmica, a fita é usada para criar uma ampla gama de figuras no espaço durante os exercícios, como serpentinas, espirais e figuras em oito. [...]

Fonte: DICIONÁRIO Olímpico. Disponível em: https://www.dicionarioolimpico.com.br/ginastica-ritmica/cenario/fita. Acesso em: 9 jun. 2022.

Mais do que aparecer nas fitas em um belo final de coreografia, ângulo é um conceito matemático de grande importância, empregado em exercícios obrigatórios da ginástica rítmica.

Capítulo 4 – Ângulos

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Aproveite o contexto de abertura para discutir com os estudantes questões como:

- Em que outras situações podemos reconhecer a ideia de ângulo?
- Na linguagem cotidiana, a palavra "ângulo" pode ser usada em um sentido um pouco diferente do conceito matemático apresentado. Por exemplo, nas frases a seguir, qual é o significado dessa palavra? O jogador chutou a bola, que entrou no ângulo esquerdo do goleiro. (Resposta: Aqui, "ângulo" representa apenas a região próxima do encontro entre a trave superior e uma das traves laterais.) Você está vendo o problema do ângulo errado. (Resposta: Nesse caso, "ângulo" tem o sentido de "ponto de vista".)

Represente na lousa um ângulo e seus elementos, como vértice, lados, região interna e região externa, e incentive os estudantes a relacionar esses elementos com aspectos da fotografia apresentada nesta abertura. Por exemplo, eles podem associar o ponto em que o pé da bailarina está fixado ao vértice de um ângulo determinado pela abertura entre duas semirretas, associando cada fita a um segmento de reta que determina uma semirreta.

Comente com os estudantes que a precisão dos ângulos formados pelas fitas faz parte dos movimentos apresentados pelas atletas, que se não for bem executado pode resultar em notas mais baixas.

Aproveite a temática da abertura para conversar com os estudantes sobre a prática esportiva. Pergunte a eles se já assistiram a alguma apresentação de ginástica rítmica e o que conhecem dessa modalidade. Se considerar adequado, em interação com o professor de Educação Física, solicite aos estudantes que façam uma pesquisa sobre a prática de ginástica rítmica e sobre os instrumentos utilizados para a apresentação.

Comente que, entre, outros, segundo o Estatuto da Criança e do Adolescente, eles têm direito ao esporte. A prática esportiva traz benefícios para o corpo e para a mente. Portanto, é ideal que aconteça desde cedo e com regularidade.

Ao conversar sobre essas temáticas, contribuímos para o desenvolvimento da **competência geral 8** e dos Temas Contemporâneos Transversais **saúde** e **direitos da criança e do adolescente**.

1. Ângulos e seus elementos

Inicie uma conversa com os estudantes pedindo a eles que observem o ambiente da sala de aula e descubram objetos nos quais podemos identificar ângulos. Solicite a eles que indiquem nesses objetos os elementos de um ângulo: vértice, lados, abertura, região interna e região externa. Retome situações em que a ideia de ângulo possa ser trabalhada questionando os estudantes, por exemplo, sobre o ângulo de abertura de uma porta, ou sobre o ângulo formado pelos ponteiros de um relógio em determinados horários do dia.

Sugestão de leitura

Para os trabalhos referentes a ângulos, sugerimos o artigo:

VIANNA, C. R.; CURY, H. N. Ângulos: uma "História" escolar. **Revista História & Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 23-37, 2001. Disponível em: http://www.professores.im-uff.mat.br/hjbortol/disciplinas/2010.2/gma00116/arquivos/vianna-cury-artigo.pdf. Acesso em: 20 jun. 2022.

Esse artigo apresenta uma abordagem do conceito de ângulo de uma perspectiva histórica.

1 Ângulos e seus elementos

Inúmeras situações do dia a dia nos remetem à ideia de ângulo: quando viramos uma esquina, quando montamos uma tábua de passar roupas, quando olhamos as horas em um relógio de ponteiros ou quando observamos a inclinação do telhado de uma casa.

Nas fotografias a seguir, os destaques dão a ideia de ângulo.


ALFRED SONSALLA/SHUTTERSTOCK

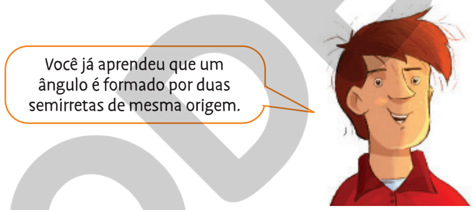
Casa localizada na Califórnia, Estados Unidos. (Fotografia de 2017.)


ERNESTO REGHRAN/PULSAR IMAGENS

Vista aérea de algumas ruas de Jataizinho, Paraná. (Fotografia de 2015.)

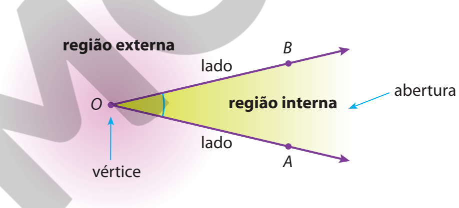

CHICO FERREIRA/PULSAR IMAGENS

Relógio da Praça Siqueira Campos, em Belém, Pará. (Fotografia de 2017.)

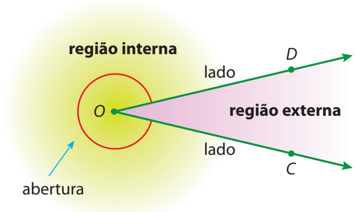


SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

Observe os exemplos.



Ângulo $A\hat{O}B$ de vértice O e lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$.



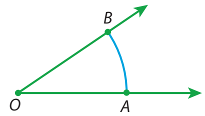
Ângulo $C\hat{O}D$ de vértice O e lados $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$.

ILUSTRAÇÕES: REINALDO VIGNATI/ ARQUIVO DA EDITORA

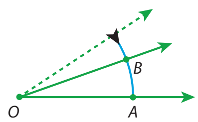
Note que a **região interna** é a região delimitada por semirretas, que contém a indicação de sua abertura. A outra região é a **região externa**.

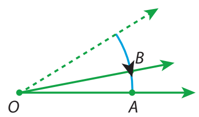
Ângulo nulo, ângulo de uma volta e ângulo raso

Considere o ângulo $A\hat{O}B$.



Imagine o ponto B se deslocando sobre o arco $\overset{\frown}{AB}$ no sentido dos ponteiros do relógio (sentido horário). Ele se aproxima mais e mais do ponto A, até coincidir com o ponto A.

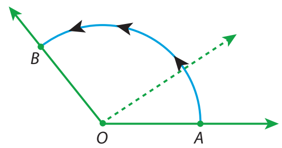


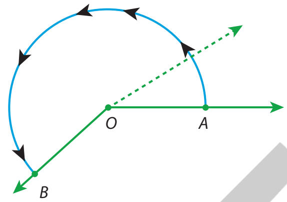


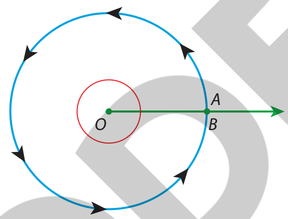
As duas semirretas têm todos os pontos em comum, ou seja, são coincidentes. Elas formam um ângulo nulo.

O **ângulo nulo** é formado por duas semirretas coincidentes.

Imagine o ponto B se deslocando sobre o arco $\overset{\frown}{AB}$ no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio (sentido anti-horário). Ele se move mais e mais até dar uma volta completa e coincidir com o ponto A.

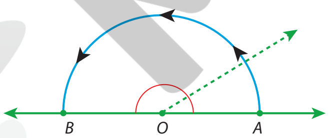






Quando $\overrightarrow{OB}$ coincidir com $\overrightarrow{OA}$, obteremos um **ângulo de uma volta**. Para diferenciá-lo do ângulo nulo, assinalamos a abertura com um arco.

Observe o ângulo $A\hat{O}B$ a seguir.



O **ângulo raso** ou **ângulo de meia-volta** formado por duas semirretas opostas.

Ângulo nulo, ângulo de uma volta e ângulo raso

Para abordar a ideia de ângulo, pode-se utilizar a abertura de uma porta (que possui dobradiças verticais e é fixada em um batente) e compor marcações com fita adesiva no chão, de maneira que cada marcação indique a posição em que a porta precisa estar aberta para determinar certo ângulo. Por exemplo, pode-se considerar que a porta fechada indica o ângulo nulo e que a porta aberta por completo determina certo ângulo, geralmente maior ou igual a um ângulo reto e menor do que um ângulo raso. Oriente os estudantes de maneira que compreendam que, ao tratar do ângulo de abertura da porta nesse exemplo, estamos imaginando que o ponto da porta que encosta no batente e no chão pode ser associado ao vértice de um ângulo e, ainda, que esse ângulo é determinado por duas semirretas, sendo:

- uma semirreta determinada pelo vértice e pelo ponto associado à extremidade da porta que toca o chão, mas não o batente;
- uma semirreta determinada pelo vértice e pelo ponto associado à extremidade do batente que toca o chão, e não toca a porta.

Após trabalhar essa associação, pode-se propor aos estudantes que representem, com régua e compasso, alguns ângulos em uma folha de papel sulfite: ângulos rasos, ângulos de uma volta, ângulos de meia-volta, ângulos de um quarto de volta etc.

83

2. Medida de um ângulo

Habilidade da BNCC:
EF07MA29.

Trabalhe com os estudantes a classificação de um ângulo e questione-os sobre as situações nas quais se reconhecem ângulos agudos, retos ou obtusos. Podem surgir respostas como:

- Ângulos retos: cantos de uma folha de papel, cantos de uma porta retangular, paredes de uma casa em relação ao solo etc.
- Ângulos agudos: inclinação de telhados, rampas etc.
- Ângulos obtusos: encostos de cadeiras reclináveis etc.

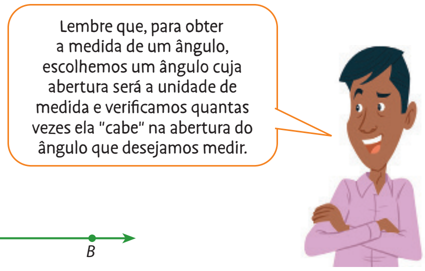
Incentive os estudantes a classificar ângulos com base na medida do ângulo de um canto de uma folha de papel: se a abertura do ângulo for menor que a abertura do canto da folha, o ângulo será agudo; se for maior, o ângulo será obtuso; se for igual, o ângulo será reto.

Proponha atividades em que os estudantes utilizem régua para representar alguns ângulos. Depois, com o transferidor, eles podem determinar a medida dos ângulos representados. Isso favorece a familiaridade com o uso dos instrumentos de desenho geométrico. É importante, ainda, propor-lhes que representem determinados ângulos, dada a medida deles. Por exemplo, proponha-lhes que representem um ângulo de 15°, um de 50°, um de 90° e um de 130°. Cada estudante, com régua e transferidor, pode traçar os ângulos e colorir a região interna deles para, depois, comparar suas representações com as dos demais colegas. Nessa atividade, ao comparar diferentes representações de um mesmo ângulo, eles poderão perceber que o ângulo tem a ver com a região entre duas semirretas, e não com o comprimento dos segmentos utilizados para representar os lados do ângulo.

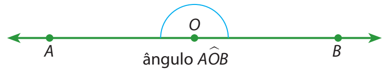
2 Medida de um ângulo

Sabemos que um ângulo pode ser medido e que o **grau**, representado pelo símbolo **°**, é uma unidade de medida de ângulos.

Observe novamente a representação de um ângulo raso.

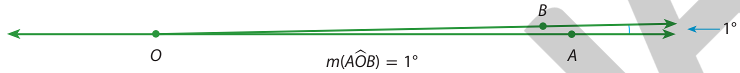


ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

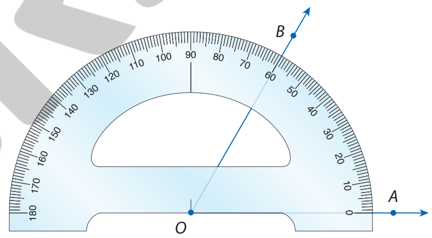
O ângulo $A\hat{O}B$ tem medida igual a 180°. Se dividirmos esse ângulo em 180 ângulos menores de mesma medida, cada ângulo obtido terá medida igual a 1°.



Também vimos que o transferidor pode ser usado para medir ângulos e que ele está dividido em medidas de 1°.

Vamos relembrar como proceder para medir ângulos usando um transferidor.

- O centro do transferidor deve ser disposto sobre o vértice do ângulo.
- Uma das semirretas (na figura, $\overrightarrow{OA}$) que formam o ângulo deve ficar alinhada com o ponto central e com a indicação do ângulo de 0° do transferidor.
- A outra semirreta (na figura, $\overrightarrow{OB}$) estará sob a marca do transferidor que indica a medida do ângulo.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A medida do ângulo $B\hat{O}A$ é 60°, que indicamos da seguinte maneira: $m(B\hat{O}A) = 60°$.

Os submúltiplos do grau são o **minuto** e o **segundo**. Indicamos 1 minuto por 1′ e 1 segundo por 1″.

Observe a relação entre o grau e seus submúltiplos:

- $1° = 60'$, ou seja, 1 minuto equivale a $\frac{1}{60}$ do grau;
- $1' = 60''$, ou seja, 1 segundo equivale a $\frac{1}{60}$ do minuto.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

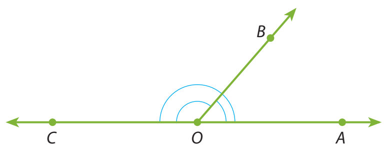
Observação

- Lembre-se de que, quanto à sua medida, um ângulo pode ser **reto** (medida igual a 90°), **agudo** (medida entre 0° e 90°) ou **obtuso** (medida entre 90° e 180°).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Nesta figura, podemos observar três ângulos.



1. b) m($A\hat{O}B$) = 50°, m($B\hat{O}C$) = 130°, m($A\hat{O}C$) = 180°

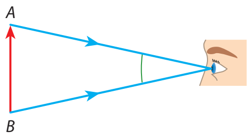
a) Quais são esses ângulos? **1. a)** $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$

b) Com um transferidor, meça os ângulos da figura.

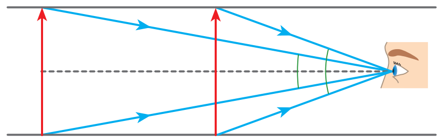
c) Qual deles é ângulo raso? **1. c)** $A\hat{O}C$

d) Qual deles é ângulo reto? Qual é obtuso? E qual é agudo? **1. d)** Nenhum; $B\hat{O}C$; $B\hat{O}A$.

2 O ângulo segundo o qual uma pessoa vê um objeto é chamado **ângulo visual**. Esse ângulo depende do tamanho do objeto e de sua distância em relação ao observador.



ângulo visual
(objeto *AB*)



Dado um objeto, quanto maior for a distância do observador em relação a esse objeto, menor será o ângulo visual.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

O ângulo visual pode ser um ângulo raso? Justifique sua resposta. **2.** Espera-se que os estudantes percebam que o movimento do olho humano não é suficiente para cobrir um ângulo dessa medida.

3 Trace uma reta e marque sobre ela dois pontos distintos, A e B. Use um transferidor para construir um ângulo de 42° com vértice em A, com um dos lados sendo a semirreta $\overrightarrow{AB}$, e outro ângulo de 42° com vértice em B, com um dos lados sendo a semirreta $\overrightarrow{BA}$, de modo que obtenha um polígono.

a) Que polígono você obteve? **3. a)** Triângulo.

b) Como é classificado esse polígono quanto aos lados? **3. b)** Triângulo isósceles.

4 Segundo a Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT), os cinemas devem reservar lugares para pessoas usuárias de cadeira de rodas de acordo com a regra a seguir:

Pessoas em Cadeira de Rodas (PCR) precisam de previsão de espaços onde possam estacionar convenientemente e acompanhar com conforto os eventos do auditório. Para tanto, os espaços devem atender à seguinte regra:

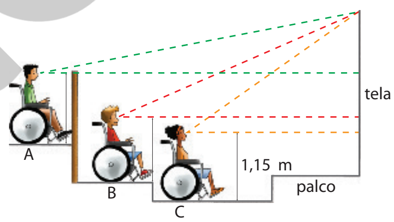
A localização dos espaços deve ser calculada traçando-se um ângulo visual de 30° a partir do limite superior da boca de cena até a linha do horizonte visual (L.H.), com a altura de 1,15 m do piso.

Quando existir anteparo em frente aos espaços para P.C.R., sua altura e distância não podem bloquear o ângulo visual de 30°, medido a partir da linha visual padrão, com altura de 1,15 m do piso até o limite inferior da tela ou local do palco onde a atividade é desenvolvida.

Fonte: ABNT NBR 9050. Acessibilidade a edificações, mobiliário, espaços e equipamentos urbanos. Disponível em: https://www.caurn.gov.br/wp-content/uploads/2020/08/ABNT-NBR-9050-15-Acessibilidade-emenda-1_-03-08-2020.pdf. Acesso em: 19 maio 2022.

a) Entre as ilustrações A, B e C, qual delas está de acordo com essa regra? Justifique sua resposta.

b) Além da regra citada, há outras que os cinemas devem seguir para facilitar o acesso de pessoas em cadeira de rodas, como a instalação de rampas e a garantia de rotas de fuga acessíveis. Converse com os colegas de turma sobre o que mais é importante haver nos cinemas para facilitar o acesso das pessoas nessa condição. **4. b)** Resposta pessoal.



VICENTE MENDONÇA/ARQUIVO DA EDITORA

c) Você costuma ir ao cinema? Em caso afirmativo, observe se essas regras são respeitadas. Depois, escreva um relato com suas observações. **4. c)** Resposta pessoal.

4. a) Apenas a situação B, pois o ângulo visual é menor que 30°. A situação C está errada porque o ângulo visual é maior que 30°, e a situação A está errada porque há um anteparo à frente que atrapalha o ângulo visual.

85

O **exercício 4** traz um contexto para discutir a inclusão de pessoas com deficiência na sociedade. Discuta a importância de promover ações destinadas a melhorar a qualidade de vida e incrementar a educação e o emprego, facilitando o acesso à saúde e liberando os espaços à locomoção e ao deslocamento de indivíduos com qualquer tipo de deficiência, permanente ou temporária, promovendo o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal **educação em direitos humanos** e a **competência geral 7**.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 3** e **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

No **exercício 1**, deve-se reconhecer que um ângulo é determinado por um vértice e dois lados. Na representação dada, tem-se os ângulos $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$. Com o transferidor, podem-se determinar as medidas desses ângulos e classificá-los em raso, obtuso e agudo. Como nenhum dos ângulos é de 90°, não está representado um ângulo reto.

Aproveite o contexto do **exercício 2** para discutir o papel do campo visual na caracterização das espécies animais. Por exemplo, predadores têm os olhos em posição frontal, lado a lado, o que lhes possibilita "visão de profundidade", estimando melhor distâncias para a caça e o abate de suas presas. Já os animais que são presas geralmente têm os olhos em posição lateral, pois precisam de um campo visual ampliado para vigiar melhor o ambiente ao redor e, assim, diminuir os riscos de sofrerem ataques.

O **exercício 3** pode ser ampliado solicitando aos estudantes que o refaçam fixando a medida *AB*, por exemplo, em 8 cm. Depois de resolverem o exercício, apresente aos estudantes o molde de um triângulo previamente recortado em papel com as mesmas dimensões. Cada estudante deve sobrepor o triângulo recortado ao triângulo desenhado no caderno e verificar que não há sobras nem faltas.

Comente então que esses dois triângulos são congruentes.

Pergunte aos estudantes se a congruência desses triângulos só ocorre pelo fato de eles serem triângulos isósceles. Então, peça a eles que repitam a atividade construindo com régua e transferidor um triângulo escaleno *ABC* com lado de medida *AB* = 9,5 cm, e ângulos $\hat{A}$ de 45° e $\hat{B}$ de 55°. Um dos estudantes decalca o seu novo triângulo, recorta-o e passa-o para os demais verificarem a congruência.

Exercícios propostos

Pode-se propor aos estudantes que reproduzam em uma malha quadriculada o esquema do **exercício 5**, alterando o trajeto a ser realizado para, depois, descrevê-lo. Se julgar pertinente, proponha-lhes que façam um trajeto menor do que o indicado originalmente, ou que tenha exatamente 5 m a menos etc.

Questões abertas e elaboradas pelos próprios estudantes, como a proposta do **exercício 6**, geram neles interesse e opções de pesquisa e de desafio lúdico, promovendo integração no conjunto.

Uma variação desse exercício é padronizar um tamanho de papel quadriculado, fazer nele dois pontos *A* e *B* próximos e, em seguida, pedir aos estudantes que criem a maior trajetória possível, sem cruzamento, para se deslocarem do ponto *A* ao ponto *B*.

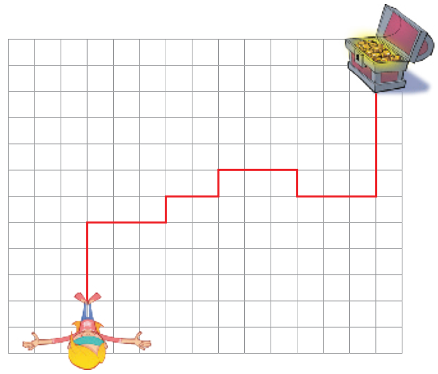
3. Ângulos congruentes

Comente com os estudantes que, em Geometria, congruência significa medidas iguais. Esse entendimento vale para todos os entes geométricos mensuráveis. Esse conceito não se aplica, portanto, a elementos geométricos como ponto, reta, plano e semirreta. Para que compreendam, pode-se propor-lhes que representem em uma malha quadriculada um retângulo com determinadas dimensões. Depois, eles devem comparar a representação com a dos colegas e perceber que, ainda que os retângulos estejam em posições variadas da malha quadriculada, a medida dos lados do retângulo é sempre a mesma. Para ampliar, solicite-lhes que representem outras figuras, como triângulos. Peça-lhes também que representem alguns ângulos e retome a discussão de que a medida de um ângulo não depende do comprimento dos traçados que representam os lados do ângulo, mas da "abertura" entre eles.

5 Vitória está participando de uma brincadeira de caça ao tesouro e recebeu um mapa como o representado a seguir.

Sabendo que os lados de cada quadradinho da malha medem 1 m, descreva o caminho que Vitória deverá seguir para encontrar o tesouro.

5. Ande 3 metros para a frente, gire 90° à direita, ande 3 metros para a frente, gire 90° à esquerda, ande 1 metro para a frente, gire 90° à direita, ande 2 metros para a frente, gire 90° à esquerda, ande 1 metro para a frente, gire 90° à direita, ande 3 metros para a frente, gire 90° à direita, ande 1 metro para a frente e gire 90° à esquerda, ande 3 metros para a frente, gire 90° à esquerda e ande 4 metros para a frente.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

6 ***Hora de criar*** – Crie um mapa indicando uma trajetória como a do exercício anterior e represente-a em uma folha de papel quadriculado. Junte-se a um colega e, sem mostrar o mapa criado por você, descreva-o para que o colega represente seu mapa em uma folha de papel quadriculado também. Em seguida, faça o mesmo com o mapa criado pelo seu colega. Comparem as representações e verifiquem se há diferença entre elas. Caso haja, expliquem por que vocês acham que elas ocorreram. **6.** Resposta pessoal.

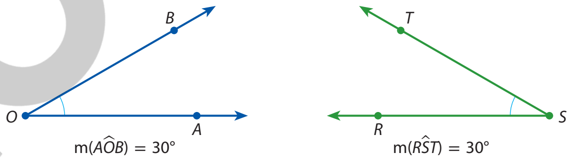
3 Ângulos congruentes

Observe uma fotografia de nado sincronizado, em que as atletas tentam formar ângulos congruentes com os braços.

Equipe italiana de nado sincronizado em apresentação no 17º Campeonato Mundial de Esportes Aquáticos, em Budapeste (Hungria). (Fotografia de 2017.)

STEFAN WERMUTH/REUTERS/FOTOARENA

Agora, atente para estes ângulos.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

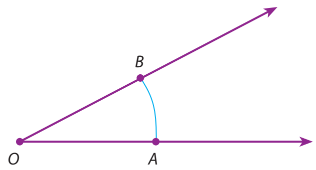
Como $A\hat{O}B$ e $R\hat{S}T$ têm a mesma medida, dizemos que eles são **ângulos congruentes**. Indicamos que $A\hat{O}B$ e $R\hat{S}T$ são ângulos congruentes da seguinte maneira:

$A\hat{O}B \cong R\hat{S}T$ (lemos: "o ângulo $A\hat{O}B$ é congruente ao ângulo $R\hat{S}T$")

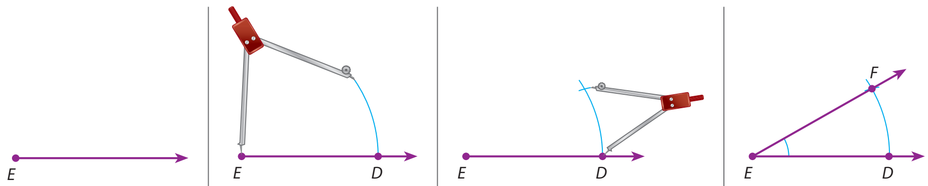
Dois ângulos são **congruentes** quando têm mesma medida.

Construção de ângulos congruentes

Dado um ângulo AÔB, é possível construir, com o auxílio de régua e compasso, um ângulo DÊF congruente a AÔB.



Acompanhe a construção do ângulo $D\hat{E}F$.



Traçamos uma semirreta de origem *E*.

Colocamos a ponta-seca do compasso em *E* e, com uma abertura de medida *OA*, traçamos um arco obtendo o ponto *D*.

Colocamos a ponta-seca do compasso em *D* e, com uma abertura de medida *AB*, marcamos *F* no arco traçado.

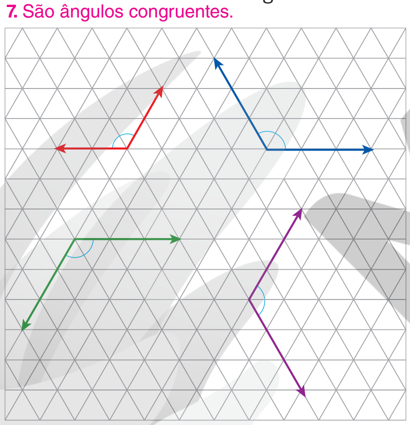
Traçamos a semirreta $\overrightarrow{EF}$. O ângulo $D\hat{E}F$ construído é congruente ao ângulo $A\hat{O}B$ dado.

Observe que o ponto *F* foi marcado de modo que a abertura de medida *DF* fosse igual à abertura de medida *AB*. Logo, os ângulos têm a mesma abertura e, portanto, são congruentes.

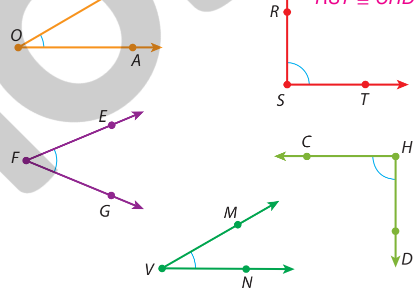
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

7 O que se pode dizer a respeito dos ângulos construídos na malha triangular?
7. São ângulos congruentes.



8 Verifique quais são os pares de ângulos congruentes. Registre a resposta no caderno.
8. $A\hat{O}B \cong M\hat{V}N$
$R\hat{S}T \cong C\hat{H}D$



9. Construa um fluxograma com os passos a serem seguidos para a construção de ângulos congruentes. **9.** Construção de figura.

No **exercício 9** propomos aos estudantes que construam um fluxograma com os passos para a construção de quaisquer ângulos congruentes, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA06) e (EF07MA07). A resolução desse exercício está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Construção de ângulos congruentes

Nesta página, temos uma das construções básicas realizadas com régua e compasso. Comente com os estudantes que, na construção passo a passo do ângulo $D\hat{E}F$, é possível obter o triângulo *DEF*. É importante que percebam, que o algorítimo executado nessa construção, serve para outros ângulos, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA06). Comente também que no próximo ano, ao estudar a congruência nos triângulos, eles poderão verificar que os triângulos *AOB* e *DEF* são congruentes e que essa construção poderá ser justificada pelo caso LAL (Lado-Ângulo-Lado).

Espera-se que eles percebam que o estudo da Matemática flui constantemente, não ficando estanque, compartimentado em cada ano letivo.

Se tiver oportunidade leve os estudantes à sala de informática para que possam construir ângulos congruentes com os recursos disponíveis em *softwares* de geometria dinâmica, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 5**.

Exercícios propostos

Para a resolução do **exercício 7**, solicite aos estudantes que observem, inicialmente, que medida em grau têm os ângulos da malha triangular (resposta: 60°). Depois, questione qual é a medida de cada ângulo indicado na malha (resposta: 120°). Se necessário, eles também podem utilizar o transferidor para conferir as respostas. Questione-os se o ângulo representado em vermelho é maior ou menor que o representado em roxo e peça-lhes que justifiquem as respostas. Espera-se que percebam que, apesar de a representação dos lados do ângulo vermelho ser "menor" do que a dos lados do ângulo roxo, ambas as representações indicam semirretas, ou seja, podem ser prolongadas indefinidamente.

No **exercício 8**, peça aos estudantes que respondam apenas observando as ilustrações e estimando as medidas dos ângulos. Para verificar suas estimativas, devem medir cada ângulo com o auxílio do transferidor.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 10** e **11** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

No **exercício 10**, pergunte aos estudantes qual é a medida de cada um dos seis ângulos congruentes. Como o ângulo raso mede 180°, a medida de cada ângulo é obtida pelo cálculo: $180° : 6 = 30°$.

No **exercício 11**, peça a eles que classifiquem cada ângulo dado em agudo, reto ou obtuso. Auxilie-os a repetir o procedimento de construção de ângulos congruentes indicado na página anterior. A resolução deste exercício está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

4. Operações com medidas de ângulos

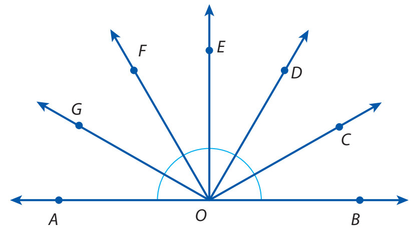
Habilidade da BNCC: **EF07MA29**.

O contexto no qual o conceito é inserido nos remete a uma situação do cotidiano da sociedade: a mobilidade. Pessoas idosas e pessoas com alguma deficiência física são mais suscetíveis a dificuldades de locomoção.

As rampas internas ou externas devem ser construídas obedecendo às normas técnicas estabelecidas pela Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT). Elas determinam limites máximos de inclinação (com áreas de descanso nos patamares a cada 50 metros de percurso), desníveis e número de segmentos permitido. Esse contexto possibilita desenvolver o Tema Contemporâneo Transversal **educação em direitos humanos**, abordando a acessibilidade como um direito fundamental das pessoas.

Na **situação 1**, a direção inicial Norte-Sul, com o sentido do Sul para o Norte, foi tomada de maneira aleatória; a direção e o sentido poderiam ser outros. Solicite aos estudantes que refaçam a trajetória indicada nessa situação iniciando na mesma direção, porém no sentido contrário. Eles deverão concluir que a pessoa chega ao ginásio também pela direção Noroeste-Sudeste, porém no sentido contrário ao da chegada na **situação 1**.

10 Na figura, o ângulo $A\hat{O}B$ está dividido em seis ângulos congruentes.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Nessas condições, no caderno, classifique as sentenças em falsas ou verdadeiras.

a) $B\hat{O}C \cong C\hat{O}D$ **10. a)** Verdadeira.

b) $B\hat{O}D \cong D\hat{O}F$ **10. b)** Verdadeira.

c) $C\hat{O}E \cong A\hat{O}F$ **10. c)** Verdadeira.

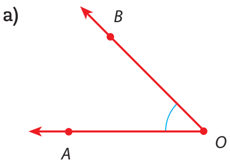
d) $C\hat{O}D \cong E\hat{O}G$ **10. d)** Falsa.

e) $C\hat{O}A \cong B\hat{O}G$ **10. e)** Verdadeira.

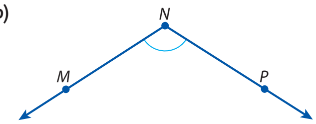
f) $D\hat{O}F \cong A\hat{O}E$ **10. f)** Falsa.

11 Construa, no caderno, com régua e compasso, um ângulo congruente ao ângulo dado em cada caso. **11.** Construção de figuras.

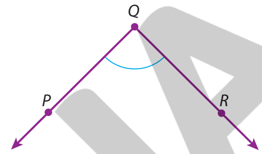
a)



b)



c)



(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

4 Operações com medidas de ângulos

Observe as situações a seguir.

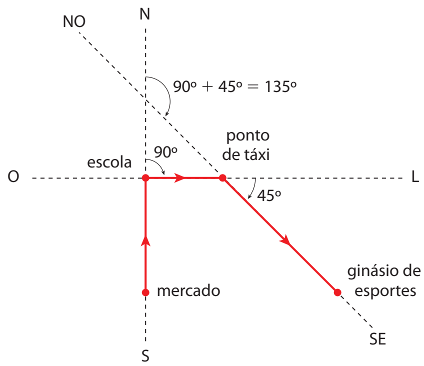
Situação 1

Um esportista que utiliza cadeira de rodas saiu do mercado, passou pela escola, virou para a direita 90°, foi em frente até atingir o ponto de táxi, virou para a direita 45° e, finalmente, chegou ao ginásio de esportes.

MONITO MAN/ARQUIVO DA EDITORA

Para saber quanto a direção do cadeirante mudou, desde que saiu do mercado até chegar ao ginásio de esportes, podemos montar um esquema, em que a linha vermelha representa o caminho percorrido por ele.

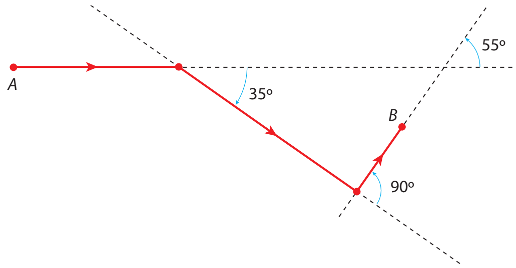
Observando os ângulos assinalados, podemos reparar que foram 90° para a direita (na escola) e mais 45° para a direita (no ponto de táxi). Nesse caso, dizemos que a direção inicial (Norte-Sul) sofreu uma mudança para a direção final (Noroeste-Sudeste) de 135° para a direita, pois o esportista em cadeira de rodas virou 90° para a direita e 45° para a direita; portanto, 90° + 45° para a direita.



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 2

Considere agora uma nova situação em que a linha vermelha do esquema representa o caminho percorrido por um ciclista do ponto *A* até o ponto *B*.



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Observe as mudanças de direção do ciclista.

- 1ª mudança: 35° para a direita;
- 2ª mudança: 90° para a esquerda.

As mudanças de direção do ciclista (35° para a direita e 90° para a esquerda) equivalem a uma mudança de direção inicial de 55° que é o mesmo que (90° – 35°) para a esquerda.

Situações como essas, envolvendo mudança de direção, são comuns nas navegações aérea e marítima para localizar aviões, navios, cargas e até passageiros, no caso de queda ou de naufrágio, e nos dão uma ideia da importância de operar com medidas de ângulos.

Transformando unidades

Quando realizamos operações com medidas de ângulos, é possível aparecerem resultados com minutos e segundos maiores que 60 unidades.

Nesse caso, devemos transformar segundos em minutos e minutos em graus, ou seja, a cada 60 unidades, trocamos por uma unidade imediatamente superior. Acompanhe os exemplos.

a) Expressar 5°20′ em minutos.

$5°20' = 5 \cdot 60' + 20' = 300' + 20' = 320'$

DANIEL ZEPPO/ARQUIVO DA EDITORA

b) Fazer a transformação de 150′ em graus e minutos.

$150' = \underbrace{2 \cdot 60'}_{2°} + 30' = 2° + 30' = 2°30'$

$$\begin{array}{r|l} 150' & 60' \\ \hline 30' & 2 \end{array}$$

c) Expressar 80″ em minutos e segundos.

$80'' = \underbrace{1 \cdot 60''}_{1'} + 20'' = 1' + 20'' = 1'20''$

$$\begin{array}{r|l} 80'' & 60'' \\ \hline 20'' & 1 \end{array}$$

Adição e subtração de medidas de ângulos

A adição de medidas de ângulos é feita adicionando segundos com segundos, minutos com minutos e graus com graus. Da mesma forma, a subtração é feita subtraindo segundos de segundos, minutos de minutos e graus de graus. Acompanhe os exemplos.

a) 38°20′ + 51°40′

$$\begin{array}{r l} & 38°20' \\ + & 51°40' \\ \hline & 89°\cancel{60'} \quad (60' = 1°) \\ + & 1° \\ \hline & 90° \end{array}$$

b) 90° – 40°20′45″

$90° = 89°60' = 89°59'60''$

$$\begin{array}{r l} & 89°59'60'' \\ - & 40°20'45'' \\ \hline & 49°39'15'' \end{array}$$

Operações com medidas de ângulos

Na **situação 2**, solicite aos estudantes que refaçam, desenhando, e descrevam a trajetória do ciclista, agora voltando, isto é, do ponto *B* para o ponto *A*.

Proponha-lhes que representem um esboço, em papel quadriculado, da trajetória da casa onde moram até a escola. Caso o caminho de algum estudante seja muito extenso, sugira-lhe que faça apenas uma parte da trajetória.

Adição e subtração de medidas de ângulos

As operações com medidas de ângulos trazem a oportunidade de trabalhar com a conversão entre unidades que não têm correspondência decimal. Por exemplo, a representação 24,5° não corresponde a 24°50′: como 1° corresponde a 60′, então 0,5° equivale à metade de 60′, ou seja, a 30′. Esses cálculos podem ser feitos por meio de frações ou raciocínio de proporcionalidade:

$$\frac{1}{2} \text{ de } 60' = \frac{1}{2} \cdot 60' = 30'$$

Nesta e nas próximas páginas, temos a oportunidade de estudar conjuntamente as Unidades Temáticas **Grandezas e medidas** e **Geometria**, o que nos leva a concluir que essas unidades, assim como as demais, devem ser entendidas como instrumentos didáticos não estanques, mas complementares.

Adição e subtração de medidas de ângulos

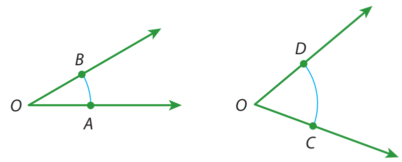
Aqui apresentamos os procedimentos, com régua e compasso, para a adição e para a subtração de dois ângulos dados, cujos resultados podem ser confirmados por meio da adição e da subtração das respectivas medidas desses ângulos. Chame a atenção dos estudantes que esses procedimentos podem ser generalizados para ângulos de quaisquer medidas, fato associado ao trabalho proposto na habilidade (EF07MA06).

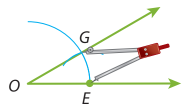
Outra maneira de compreender a soma e a diferença de dois ângulos dados é construirmos esses dois ângulos em um papel e recortá-los. Para obter a soma, devemos colocá-los um ao lado do outro, fazendo coincidir os vértices e um dos lados (assim, os dois ângulos são chamados adjacentes). Para obter a diferença entre os ângulos dados, devemos colocá-los um sobre o outro, fazendo coincidir os vértices e um dos lados. A parte do ângulo maior que não está sobreposta é a diferença.

Essa sequência de passos pode ser explorada por meio de *softwares* de geometria dinâmica. Se tiver oportunidade, leve os estudantes à sala de informática para que possam fazer tais construções, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 5**.

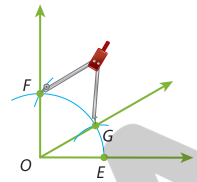
Usando régua e compasso, podemos construir um ângulo cuja medida seja igual à soma das medidas de dois ângulos, ou um ângulo cuja medida seja igual à diferença entre as medidas de dois ângulos. Acompanhe os exemplos.

a) Dados os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$, vamos construir, com régua e compasso, o ângulo $E\hat{O}F$ de medida: $m(E\hat{O}F) = m(A\hat{O}B) + m(C\hat{O}D)$



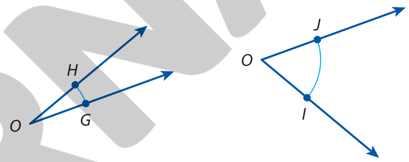


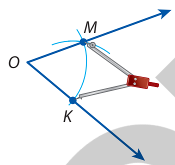
Construímos o ângulo $E\hat{O}G$, que é congruente ao ângulo $A\hat{O}B$.



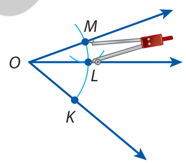
Sobre a semirreta $\overrightarrow{OG}$, construímos o ângulo $G\hat{O}F$, que é congruente ao ângulo $C\hat{O}D$, obtendo o ângulo $E\hat{O}F$.

b) Dados os ângulos $G\hat{O}H$ e $I\hat{O}J$, vamos construir, com régua e compasso, o ângulo $K\hat{O}L$ de medida: $m(K\hat{O}L) = m(I\hat{O}J) - m(G\hat{O}H)$





Construímos o ângulo $K\hat{O}M$, que é congruente ao ângulo $I\hat{O}J$.

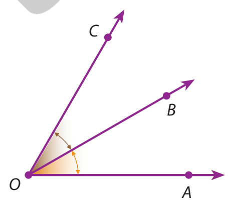


Sobre a semirreta $\overrightarrow{OM}$, construímos o ângulo $M\hat{O}L$, que é congruente ao ângulo $G\hat{O}H$, obtendo o ângulo $K\hat{O}L$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Ângulos adjacentes

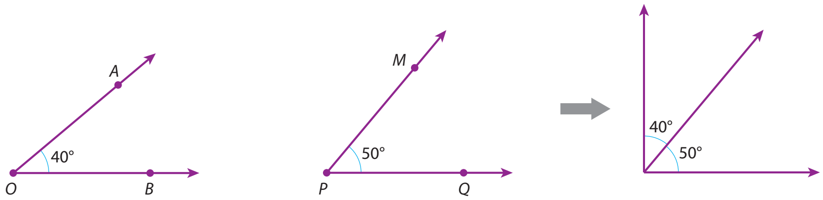
Na figura a seguir destacamos os ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$. Observe que esses ângulos têm mesmo vértice e um lado comum, mas não têm ponto em comum na região interna. Esses ângulos são chamados **adjacentes**.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

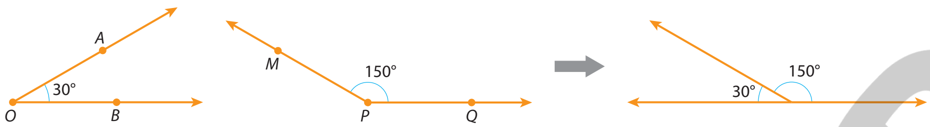
Ângulos complementares e ângulos suplementares

Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 90° são **ângulos complementares**.



Os ângulos $A\hat{O}B$ e $M\hat{P}Q$ são complementares, pois: $m(A\hat{O}B) + m(M\hat{P}Q) = 90°$.
Portanto, a medida do complemento de um ângulo agudo que mede x é $(90° - x)$.

Dois ângulos que têm a soma de suas medidas igual a 180° são **ângulos suplementares**.



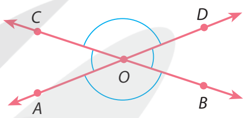
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $M\hat{P}Q$ são suplementares, pois: $m(A\hat{O}B) + m(M\hat{P}Q) = 180°$.
Logo, a medida do suplemento de um ângulo que mede y é $(180° - y)$.

Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Na figura, as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ formam o ângulo $A\hat{O}B$ e são opostas, respectivamente, às semirretas $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OC}$, que formam o ângulo $C\hat{O}D$. Além disso, os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ têm o vértice O em comum.

Por esse motivo, dizemos que os ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são **opostos pelo vértice** (**o.p.v.**).



Os ângulos $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$ também são ângulos opostos pelo vértice.

Dois ângulos são **opostos pelo vértice** quando os lados de um são semirretas opostas aos lados do outro.

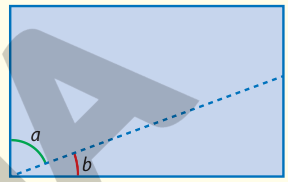
Uma propriedade importante dos ângulos opostos pelo vértice é:

Dois ângulos opostos pelo vértice são **congruentes**.

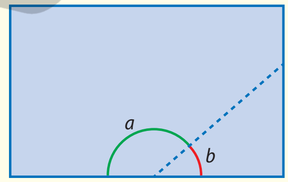
Ângulos complementares e ângulos suplementares

Apoiados no conceito de adição de ângulos, definimos os conceitos de ângulos complementares e de ângulos suplementares, cujas somas das medidas são, respectivamente, 90° e 180°.

As representações de dois ângulos complementares e de dois ângulos suplementares podem ser obtidas concretamente por meio de dobraduras em uma folha retangular de papel.



$a + b = 90°$



$a + b = 180°$

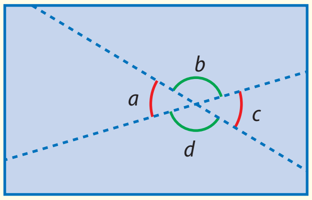
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Proponha aos estudantes que representem duas retas que se intersectam em um ponto O. Depois, oriente-os a medir os quatro ângulos determinados por essas retas, com vértice em O, e comparar as medidas, levando-os a perceber que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Ângulos opostos pelo vértice (o.p.v.)

Outra maneira de trabalhar representações da propriedade de ângulos opostos pelo vértice é por meio de dobraduras em uma folha de papel, como representado a seguir, em que as linhas tracejadas indicam a dobra feita em uma folha de papel retangular.



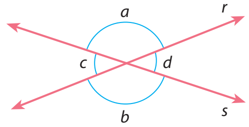
Solicite aos estudantes que obtenham, por meio de dobradura em papel, quaisquer dois pares de ângulos opostos pelo vértice. Depois, eles devem medi-los e verificar a congruência em cada par.

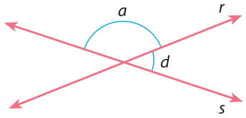
Multiplicação e divisão da medida de um ângulo por um número natural

Sugerimos escrever os exemplos na lousa, resolvendo-os passo a passo e destacando o fato de que 1° corresponde a 60′ e, por exemplo, 100′ equivalem a 60′ + 40′ ou seja, equivalem a 1°40′. Se julgar pertinente, escreva outros exemplos na lousa, sempre destacando a relação entre graus, minutos e segundos na medida de ângulos.

Vamos, então, demonstrar essa propriedade.

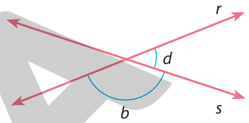
Considere as retas concorrentes *r* e *s*. Observe que elas formam quatro ângulos de medidas *a*, *b*, *c* e *d*.





Agora, considere os ângulos de medidas *a* e *d*. Como esses ângulos são suplementares, temos: $a + d = 180°$ (I).

Observe que os ângulos de medidas *d* e *b* também são suplementares, então: $d + b = 180°$ (II).



De (I) e (II) podemos escrever a seguinte igualdade:

$$\underbrace{a + d}_{180°} = \underbrace{d + b}_{180°}$$

Subtraindo *d* de ambos os membros da igualdade, obtemos:

$$a = b$$

Se empregarmos esses mesmos argumentos para os ângulos de medidas *d* e *c* e seguirmos os mesmos passos, concluiremos que $d = c$.

Assim, demonstramos que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

Multiplicação e divisão da medida de um ângulo por um número natural

A multiplicação e a divisão da medida de um ângulo por um número natural são efetuadas multiplicando ou dividindo, respectivamente, os segundos, os minutos e os graus pelo número natural.

Em seguida, na multiplicação, reduzimos os segundos a minutos e os minutos a graus, quando resultarem em um número igual ou maior do que 60. Já na divisão, quando necessário, reduzimos graus a minutos e minutos a segundos.

Observe os exemplos.

a) $32°25' \cdot 4$

$$\begin{array}{r} 32°25' \\ \times \quad 4 \\ \hline 128°100' \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 128° \\ + \quad 1°40' \\ \hline 129°40' \end{array}$$

$(100' = 1°40')$

b) $27°22'8'' : 4$

$$\begin{array}{lllll} 27° & & 22' & & 8'' \;|\; 4 \\ \cancel{3}° & \xrightarrow{3 \cdot 60'} & 180' & & 6°50'32'' \\ & & \overline{202'} & & \\ & & \cancel{0}2' & \xrightarrow{2 \cdot 60'} & 120'' \\ & & & & \overline{128''} \\ & & & & 00 \end{array}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

20. c) Setor verde: 60°, setor roxo: 90°, setor amarelo: 150°, setor azul: 30° e setor rosa 30°.

12 Converta em minutos.

a) 15° **12. a)** 900′
b) 10°35′ **12. b)** 635′
c) 420″ **12. c)** 7′
d) 1 020″ **12. d)** 17′
e) 4°240″ **12. e)** 244′
f) 6°360″ **12. f)** 366′

13 Estes quatro azulejos se ajustam perfeitamente. Quanto mede o ângulo formado por eles em torno do ponto *O*? **13.** 360°

APPSTOCK/SHUTTERSTOCK

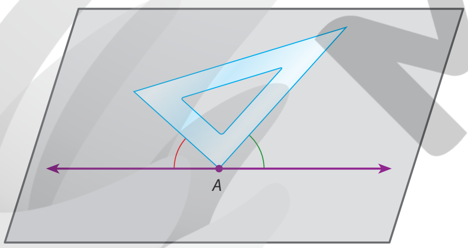
14 A quantos segundos corresponde um ângulo que tem por medida 2°10′30″? **14.** 7 830″

15 Calcule mentalmente e expresse 94′ em graus e minutos. **15.** 1°34′

16 Calcule.

a) 25°12′ + 40°30′ **16. a)** 65°42′
b) 10°45′45″ + 20°20′45″ **16. b)** 31°6′30″
c) 50°40′ – 20°35′ **16. c)** 30°5′
d) 45°20′25″ – 30°30′30″ **16. d)** 14°49′55″

17 Nesta figura, um esquadro tem o vértice de seu ângulo reto apoiado no ponto *A*, e o ângulo indicado em vermelho mede 42°10′. Quanto mede o ângulo indicado em verde? **17.** 47°50′



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

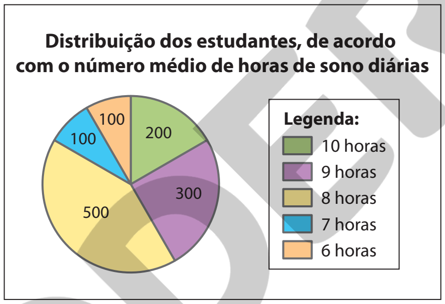
18 Determine:

a) a medida do complemento do ângulo de 17°; **18. a)** 73°
b) a medida do suplemento do ângulo de 40°; **18. b)** 140°
c) a medida do complemento do complemento do ângulo de 69°. **18. c)** 69°

19 Reúna-se com um colega e respondam:

a) Escolham uma medida de um ângulo agudo qualquer. Qual é a soma da metade dessa medida com a metade da medida de seu suplemento? **19. a)** 90°
b) A metade da medida de um ângulo obtuso mais a metade da medida de seu suplemento é igual a 90°. Quanto mede esse ângulo? **19. b)** Qualquer uma das infinitas medidas entre 90° e 180°.

20 O gráfico de setores a seguir apresenta o resultado de uma pesquisa feita com 1 200 pré-adolescentes de 10 a 13 anos do Colégio Estudebem.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pelo Colégio Estudebem.

20. a) 8 horas. **20. b)** Sim (500 + 300 + 200).

a) Qual é o número de horas de sono do maior grupo dos estudantes entrevistados?
b) É correto afirmar que mais da metade dos entrevistados dorme, em média, oito ou mais horas por dia?
c) Determine a medida dos ângulos centrais correspondentes a cada setor.
d) Classifique os ângulos de cada setor como reto, agudo ou obtuso. **20. d)** Agudo: 30°, 30° e 60°, obtuso: 150° e reto: 90°.

21 Efetue.

a) 2 · 22°30′ **21. a)** 45°
b) 5 · 25°12′15″ **21. b)** 126°1′15″
c) 15°20′ : 4 **21. c)** 3°50′
d) 15°10′24″ : 4 **21. d)** 3°47′36″

Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, há interação entre as Unidades Temáticas **Álgebra** e **Geometria**, com a aplicação de equações do 1º grau para resolver questões de Geometria.

As resoluções dos **exercícios 12**, **14** a **16**, **18**, **20** e **21** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Para responder à pergunta do **exercício 13** os estudantes deverão considerar que o ângulo formado pelos lados de um azulejo em torno do ponto *O* mede 90°; logo, o ângulo formado pelos 4 azulejos mede 360° (4 · 90°).

Para o **exercício 17** o ângulo do esquadro a ser considerado é o ângulo reto, ou seja, de 90°. Como o ângulo indicado em vermelho mede 42°10′, o ângulo verde mede:

$180° - (90° + 42°10') =$
$= 180° - 132°10' = 47°50'$

Essa interação, particularmente no **exercício 19**, oferece aos estudantes instrumentos e um caminho de resolução, que pode ser abordada do ponto de vista algébrico, do ponto de vista geométrico ou, ainda, por meio de dobraduras.

No caso do **item a**, os estudantes poderão considerar uma medida de ângulo agudo qualquer, como x, em que $0° < x < 90°$. Considerando que as medidas de dois ângulos suplementares somam 180°, a medida do suplemento do ângulo de medida x é: $180° - x$

Assim, a metade da medida do ângulo agudo é: $\frac{x}{2}$; e a metade da medida do suplemento é: $\frac{(180° - x)}{2}$

A soma desses dois valores é:

$$\frac{x}{2} + \frac{(180° - x)}{2} = \frac{180°}{2} = 90°$$

Portanto, para qualquer valor de x, em que $0° < x < 90°$, a soma pedida é igual a 90°.

Discuta com os estudantes a resolução do **item b**, que tem infinitas respostas. Nesse caso, o procedimento pode ser parecido com o utilizado no **item a**.

Aproveite a temática do **exercício 20** para conversar com os estudantes sobre a quantidade de horas de sono adequada para a idade deles, que deve ser de 8 a 10 horas por noite. Converse sobre a rotina dos estudantes antes de dormir e aproveite para comentar que algumas ações, como usar dispositivos eletrônicos ou fazer lição em horário próximo da hora de dormir, podem atrapalhar o sono. Se considerar adequado, proponha uma conversa com o professor de Ciências da Natureza, ampliando essa discussão.

Exercícios propostos

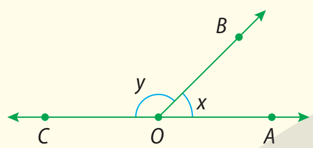
Após a definição de ângulos opostos pelo vértice, é possível observar que, no **exercício 22**, a sequência de itens induz os estudantes a concluir que esses ângulos são congruentes. Essa atividade contribui para a construção de alguns fatos matemáticos.

No **exercício 25**, caso persista alguma dúvida quanto à adição, à subtração de ângulos ou à multiplicação de um número natural por um ângulo, avalie a conveniência de orientar os estudantes a construir, tal como o personagem do enunciado, moldes de ângulos de 42° e 28° para melhor compreender a resolução desse exercício. Essa orientação serve também ao **exercício 26**.

As resoluções dos **exercícios 22** a **28** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Bissetriz de um ângulo

Para ampliar e aprofundar o estudo da bissetriz de um ângulo, desenhe a figura a seguir na lousa e proponha aos estudantes que a copiem no caderno. Nesta ilustração, x e y representam as medidas de $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, respectivamente.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Com o auxílio de régua e transferidor, devem construir as bissetrizes $\overrightarrow{OM}$ de $A\hat{O}B$ e $\overrightarrow{ON}$ de $B\hat{O}C$ e, em seguida, responder às questões.

a) Quanto vale $x + y$? (180°)

b) Qual é a medida de $M\hat{O}B$? E de $B\hat{O}N$? $\left(\frac{x}{2}; \frac{y}{2}\right)$

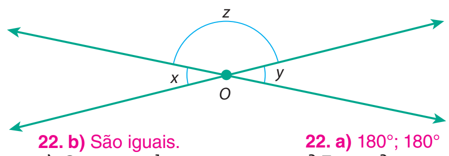
c) Qual é a medida de $M\hat{O}N$? (90°)

d) O que você pode dizer a respeito das retas $\overleftrightarrow{OM}$ e $\overleftrightarrow{ON}$? (São perpendiculares.)

Espera-se que os estudantes façam a descoberta de que as bissetrizes de ângulos adjacentes e suplementares formam ângulo reto.

---

22 Considere a figura a seguir, em que x, y e z são as medidas dos ângulos indicados.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

22. b) São iguais. **22. a)** 180°; 180°

a) Quanto vale, em grau, $x + z$? E $z + y$?

b) Qual é a relação entre $x + z$ e $z + y$?

c) Qual é a relação entre x e y? **22. c)** São iguais.

d) O que se pode concluir sobre as medidas de dois ângulos opostos pelo vértice quaisquer? **22. d)** São iguais.

23 Considerando a figura do exercício 22, escreva um algoritmo, passo a passo, de como você faria uma demonstração da afirmação: quaisquer dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes. **23.** Resposta pessoal.

24 Calcule.

a) $\frac{2}{3}$ de 15° **24. a)** 10°

b) $\frac{3}{4}$ de 90° **24. b)** 67°30′

c) $\frac{2}{5}$ de 48°30′ **24. c)** 19°24′

d) $\frac{5}{6}$ de 60°18′6″ **24. d)** 50°15′5″

25 Em uma folha de papel, Pedro construiu dois ângulos: um medindo 42° e outro 28°. Em seguida, ele recortou as representações desses ângulos para usá-las como moldes. Em outra folha, empregando somente os moldes, sem utilizar transferidor, ele construiu outros ângulos com estas medidas: 70°, 14°, 56° e 126°.

Explique como Pedro fez para construir cada um desses ângulos.

26 Com o auxílio de um transferidor, construa quatro ângulos de medidas 45°, 90°, 63° e 104°. **26.** Construção de figuras.

Agora, usando somente régua e compasso, construa ângulos de medidas:

a) 27°; **b)** 149°; **c)** 108°; **d)** 135°; **e)** 14°; **f)** 77°.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

27 A imagem mostra turbinas eólicas (de vento). Pela rotação de suas hélices, obtemos energia eólica, que é a energia obtida pelo movimento do vento.

Nesta fotografia, supondo que os três ângulos destacados tenham a mesma medida, calcule essa medida. **27.** 120°

ANDRE DIB/PULSAR IMAGENS

Aerogeradores de parque eólico situado nas dunas da Praia de Mundaú, Trairi (Ceará). (Fotografia de 2015.)

28. Resposta pessoal.

28 ***Hora de criar*** – Troque com um colega um problema que cada um de vocês criou sobre operações com medidas de ângulos. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

25. Para construir o ângulo de 70°, Pedro adicionou o ângulo de 42° ao ângulo de 28°. Para construir o de 14°, subtraiu o ângulo de 28° do ângulo de 42°. Para construir o de 56°, usou duas vezes o ângulo de 28°. Para construir o de 126°, usou três vezes o de 42°.

Bissetriz de um ângulo

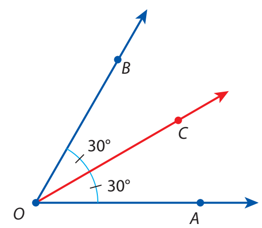
Na figura verificamos:

- $m(A\hat{O}C) = 30°$ e $m(C\hat{O}B) = 30°$

  Então, $A\hat{O}C \cong C\hat{O}B$.

- A semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos congruentes.

  Nesse caso, dizemos que $\overrightarrow{OC}$ é **bissetriz** de $A\hat{O}B$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

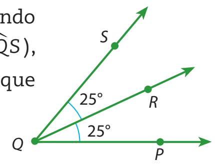
Bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois outros ângulos congruentes.

94

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

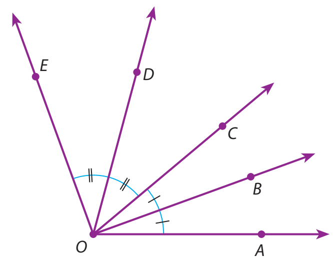
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

29 Observe a figura. Sabendo que $m(P\hat{Q}R) = m(R\hat{Q}S)$, a semirreta $\overrightarrow{QR}$ é o que em relação a $P\hat{Q}S$?
29. Bissetriz.



30 Utilizando um transferidor, construa um ângulo de 115° e trace sua bissetriz. Quais são as medidas dos ângulos obtidos?
30. Construção de figura; 57°30′.

31 Considere a figura e responda às questões a seguir no caderno, sabendo que $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $C\hat{O}E$ e $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$.

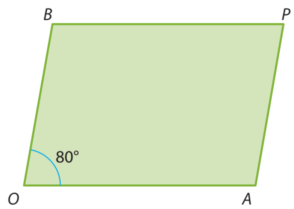


a) Se $m(A\hat{O}B) = 20°$, quanto mede $A\hat{O}C$? **31. a)** 40°

b) Se $m(C\hat{O}E) = 70°$, quanto mede $C\hat{O}D$? **31. b)** 35°

c) Se $m(A\hat{O}B) = 24°$ e $m(C\hat{O}E) = 82°$, quanto mede $A\hat{O}D$? **31. c)** 89°

32 Reproduza em uma folha de papel a figura e, em seguida, recorte-a.
(Use tesoura com ponta arredondada e a manuseie com cuidado!)



Agora, siga as instruções:
- Dobre a figura de modo que o lado $\overline{OA}$ se sobreponha ao lado $\overline{OB}$.
- Desdobre a figura e trace $\overrightarrow{OC}$ sobre a marca da dobra feita no papel.
- Dobre a figura inicial de modo que o lado $\overline{OA}$ se sobreponha a $\overrightarrow{OC}$.
- Desdobre a figura e trace $\overrightarrow{OD}$ sobre a marca da nova dobra.
- Agora, calcule a medida dos ângulos $A\hat{O}D$, $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$. **32.** $m(A\hat{O}D) = 20°$, $m(A\hat{O}C) = 40°$ e $m(B\hat{O}D) = 60°$

33 ***Hora de criar*** – Elaborе um problema sobre medidas de ângulos formados pelas bissetrizes de dois ângulos suplementares. Troque-o com um colega. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **33.** Resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

5 Ângulos formados por duas retas e por uma transversal

Na fotografia, observe a grade junto ao corrimão da escada. Podemos ver ângulos formados pelas barras paralelas ao corrimão com as barras verticais.

- Considere dois pares quaisquer desses ângulos. Sem usar um transferidor, o que você diria a respeito das medidas deles?

Espera-se que os estudantes percebam que dois desses ângulos de mesma cor são congruentes e que dois de cores diferentes são suplementares.

ALEXANDRE ZVEIGER/SHUTTERSTOCK

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 29** a **32** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Ao fazer as dobraduras propostas na **atividade 32** os estudantes devem perceber que após a primeira dobradura obtém-se a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, que corresponde à semirreta $\overrightarrow{OC}$. Logo, $A\hat{O}C$ mede 40°.

Na segunda dobra obtém-se a bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$, que corresponde à semirreta $\overrightarrow{OD}$. Logo, $A\hat{O}D$ mede 20°.

No **exercício 33**, verifique se os estudantes compreenderam adequadamente o que é a bissetriz de um ângulo. Após elaborarem o problema, avalie se a resolução proposta por eles é válida e oriente-os a trocar de problema com um colega apenas depois dessa validação.

5. Ângulos formados por duas retas e por uma transversal

Habilidade da BNCC:
EF07MA23.

Aproveite a fotografia para conversar com os estudantes sobre ângulos formados por duas retas cortadas por uma transversal (tema relacionado à habilidade EF07MA23 que será abordado neste tópico). Questione-os em que outros lugares eles podem observar situações que possam ser associadas a um par de retas paralelas (ou a um feixe de retas paralelas) cortadas por uma transversal. Em seguida, solicite a eles que representem retas paralelas cortadas por uma transversal, utilizando instrumentos de desenho geométrico e/ou malha quadriculada. Após representarem, oriente-os a determinar a medida dos ângulos formados e a discutir o que acontece nesse caso, conduzindo-os a perceber que os pares de ângulos serão congruentes.

Se possível, proponha aos estudantes que realizem esse tipo de atividade com *softwares* de geometria dinâmica.

Ângulos correspondentes

Solicite aos estudantes que, com o auxílio de uma régua, façam no caderno um traço oblíquo a algumas linhas da pauta da página e que reforcem duas dessas linhas de pauta. Depois, eles devem observar pares de ângulos formados nessa construção geométrica.

Nessa construção, os estudantes devem classificar a posição relativa das retas que contêm as linhas de pauta do caderno e reconhecer ângulos correspondentes. As linhas de pauta são paralelas.

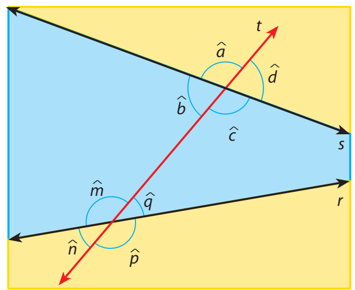
Peça a eles que identifiquem e meçam os ângulos com o transferidor, comparando as suas medidas. Espera-se que concluam que ângulos correspondentes são congruentes.

Considere duas retas coplanares (retas que estão em um mesmo plano), *r* e *s*, cortadas por uma terceira reta *t*, chamada **transversal**. Essas retas determinam oito ângulos.

Na figura:

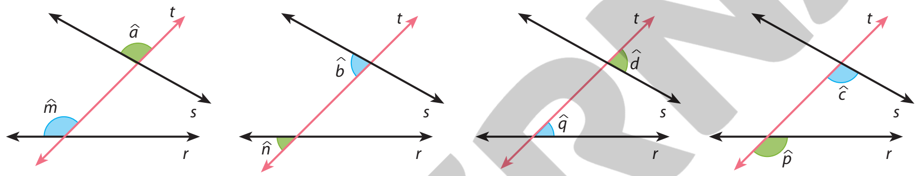
- os ângulos cujas indicações estão na faixa azul, entre as retas *r* e *s*, são chamados **internos**; assim, são internos os ângulos $\hat{b}$, $\hat{c}$, $\hat{m}$ e $\hat{q}$, de medidas *b*, *c*, *m* e *q*;
- os ângulos cujas indicações estão na região amarela são chamados **externos**; assim, são externos os ângulos $\hat{a}$, $\hat{d}$, $\hat{n}$ e $\hat{p}$, de medidas *a*, *d*, *n* e *p*.

Esses oito ângulos, combinados dois a dois, recebem nomes especiais, como veremos a seguir.



Ângulos correspondentes

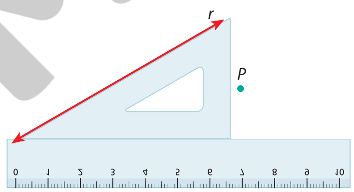
Dois ângulos são **correspondentes** quando um é interno e o outro é externo, não têm o mesmo vértice e estão situados em um mesmo lado em relação à transversal. Os ângulos destacados nas figuras são correspondentes.



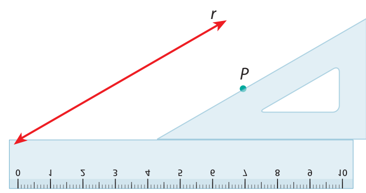
Observe a relação que existe entre ângulos correspondentes e retas paralelas. Para isso, vamos traçar uma reta *s* paralela a uma reta *r* usando régua e esquadro.

1. Vamos considerar a reta *r* e um ponto *P* fora da reta.

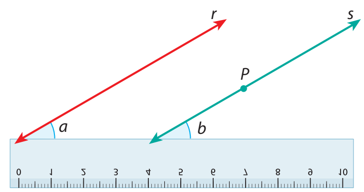
2. Posicionamos um esquadro e uma régua como mostra a figura.



3. Deslizamos o esquadro apoiado na régua até chegar ao ponto *P*.



4. Traçamos a reta *s*, que é paralela à reta *r*. Mantendo a régua apoiada no papel, indicamos por *a* e *b* as medidas dos ângulos correspondentes determinados.



Note que construímos dois ângulos correspondentes congruentes (de medidas iguais, $a = b$) e obtivemos retas paralelas, visto que estão igualmente inclinadas sobre a régua.

Logo:

> Se uma transversal corta duas retas formando ângulos correspondentes congruentes, então essas retas são **paralelas**.

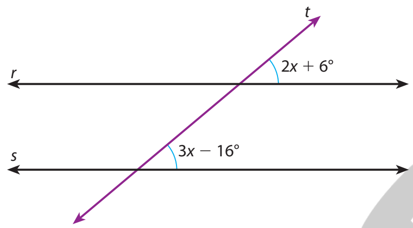
O inverso também é verdadeiro:

> Se duas retas são paralelas, então os ângulos correspondentes formados com uma transversal são **congruentes**.

Essa propriedade permite descobrir medidas de ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal conhecendo-se a medida de apenas um dos ângulos. Acompanhe um exemplo.

Considerando a figura, em que $r \parallel s$, vamos descobrir o valor de x para calcular a medida dos ângulos assinalados.

Os ângulos destacados são congruentes, pois são ângulos correspondentes formados por duas retas paralelas e uma transversal. Logo, devemos escrever a igualdade:



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$$2x + 6° = 3x - 16°$$
$$2x - 3x = -16° - 6°$$
$$-x = -22°$$
$$x = 22°$$

Substituindo x por 22° nas expressões $2x + 6°$ e $3x - 16°$, obtemos a medida dos ângulos assinalados, que devem ser iguais.

$$2x + 6° = 2 \cdot 22° + 6° = 44° + 6° = 50°$$
$$3x - 16° = 3 \cdot 22° - 16° = 66° - 16° = 50°$$

Portanto, os ângulos assinalados na figura anterior medem 50°.

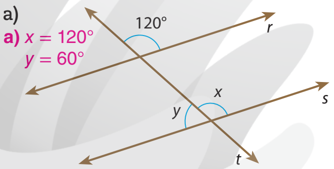
EXERCÍCIO PROPOSTO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

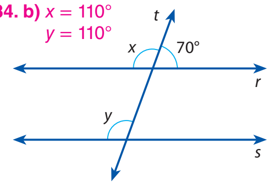
34 Nas figuras a seguir, $r \parallel s$ e t é transversal. Determine as medidas x e y dos ângulos destacados.

a)

34. a) $x = 120°$
$y = 60°$



b) **34. b)** $x = 110°$
$y = 110°$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Ângulos correspondentes

No exemplo desenvolvido nesta página, articulamos conceitos das Unidades Temáticas **Geometria** e **Álgebra** para adiante aplicar esse conhecimento em demonstrações de propriedades que envolvam retas paralelas cortadas por uma transversal.

Exercício proposto

No **exercício 34**, os estudantes podem aplicar o fato de que os ângulos correspondentes, determinados por retas paralelas cortadas por uma transversal, são congruentes. Assim, no **item a**, como x é a medida de um ângulo correspondente ao ângulo de 120°, $x = 120°$. E como $x + y = 180°$, $y = 60°$ (pois $120 + 60 = 180$). No **item b**, $x + 70° = 180°$; portanto, $x = 110°$ (pois $180 - 70 = 110$). Como x e y são as medidas de dois ângulos correspondentes, temos $x = y$ e, portanto, $y = 110°$.

Ângulos alternos internos e ângulos alternos externos

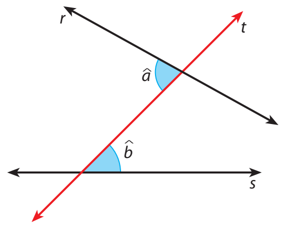
Proponha aos estudantes que observem o ambiente escolar para reconhecer situações que possam ser associadas a pares de ângulos alternos internos e pares de ângulos alternos externos.

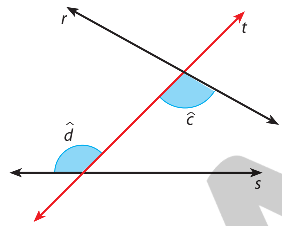
Solicite a eles que façam novamente no caderno um traço oblíquo às linhas de pauta, reforcem duas dessas linhas e identifiquem pares de ângulos alternos internos e alternos externos.

Ângulos alternos internos e ângulos alternos externos

Vamos considerar duas retas coplanares, *r* e *s*, e uma transversal, *t*.

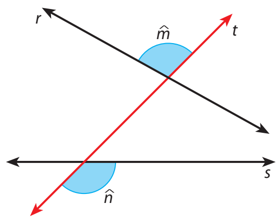
Dois ângulos são **alternos internos** quando são internos, não têm o mesmo vértice e estão situados em lados opostos em relação à transversal. Os ângulos destacados nas figuras são alternos internos.

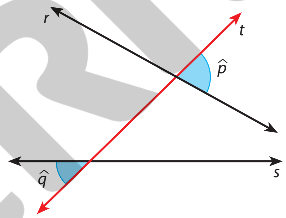




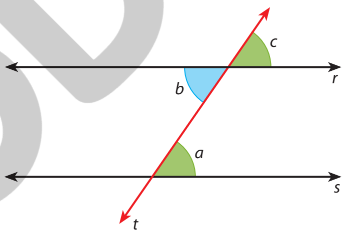
Dois ângulos são **alternos externos** quando são externos, não têm o mesmo vértice e estão situados em lados opostos em relação à transversal. Os ângulos destacados a seguir são alternos externos.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA





Vamos considerar as retas paralelas *r* e *s* cortadas pela transversal *t* na figura.



Os ângulos de medidas *a* e *b* são alternos internos.

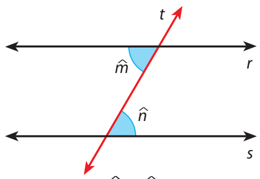
Então, verificamos:

- $a = c$, pois são medidas de ângulos correspondentes formados pelas paralelas *r* e *s* com a transversal *t*;
- $c = b$, pois são medidas de ângulos opostos pelo vértice.

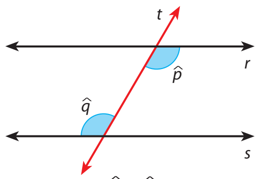
Logo, $a = b$, pois ambas as medidas são iguais a *c*.

Isso significa que:

> Se duas retas são paralelas, então os ângulos **alternos internos** formados com uma transversal são congruentes.



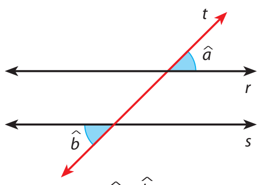
$\hat{m} \cong \hat{n}$



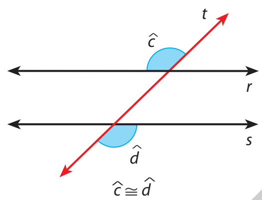
$\hat{p} \cong \hat{q}$

Essa propriedade também é válida para os ângulos alternos externos:

> Se duas retas são paralelas, então os ângulos **alternos externos** formados com uma transversal são congruentes.



$\hat{a} \cong \hat{b}$



$\hat{c} \cong \hat{d}$

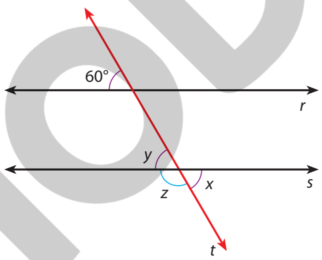
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Conforme vimos, também podemos descobrir as medidas de ângulos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal conhecendo a medida de apenas um dos ângulos.

Acompanhe o exemplo.

Na figura, $r \,/\!/\, s$ e t é transversal. Vamos calcular os valores de x, y e z.

O ângulo de medida 60° e o ângulo de medida x são alternos externos, formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal. Então, $x = 60°$.



Sabemos também que $y = 60°$, pois x e y são medidas de ângulos opostos pelo vértice.

Como $x + z = 180°$, pois x e z são medidas de ângulos suplementares, obtemos:

$$60° + z = 180°$$
$$z = 120°$$

Portanto, $x = 60°$, $y = 60°$ e $z = 120°$.

Ângulos alternos internos e ângulos alternos externos

Voltando à figura da reta transversal às linhas de pauta do caderno, peça aos estudantes que identifiquem nela pares de ângulos alternos internos e pares de ângulos alternos externos. Com o auxílio do transferidor, eles devem verificar a congruência nesses pares de ângulos.

Esse conceito será aplicado no desenvolvimento de outros conceitos.

Exercícios propostos

Os itens do **exercício 35** possibilitam aos estudantes retomar o que aprenderam sobre a congruência de ângulos alternos externos.

A resolução do **exercício 36** propicia que apliquem a reversibilidade sobre a afirmação de que "ângulos alternos internos formados por paralelas cortadas por transversal são congruentes", estudada neste tópico, e concluam que a congruência de ângulos alternos internos determina que dois de seus lados estejam contidos em retas paralelas.

As resoluções dos **exercícios 35** a **38** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

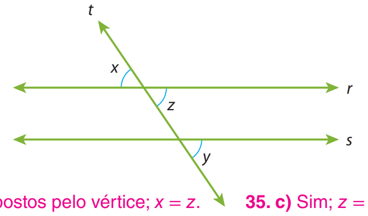
Ângulos colaterais internos e ângulos colaterais externos

Após explicar o que são ângulos colaterais internos e ângulos colaterais externos, aproveite as representações indicadas no livro e questione os estudantes sobre a relação entre esses ângulos. Depois, oriente-os a representar um par de retas paralelas cortadas por uma transversal e estudar a relação entre os ângulos colaterais internos dela. Semelhantemente, oriente-os a estudar a relação entre os ângulos colaterais externos. A intenção é que percebam que, nesse caso, os ângulos colaterais internos são suplementares, assim como os ângulos colaterais externos são suplementares.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

35 Considere a figura, em que $r \parallel s$ e x, y e z são as medidas dos ângulos $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ respectivamente.



35. b) Opostos pelo vértice; $x = z$. **35. c)** Sim; $z = y$.

a) Os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ são ângulos alternos externos? **35. a)** Sim.

b) Os ângulos $\hat{x}$ e $\hat{z}$ são ângulos complementares, suplementares ou opostos pelo vértice? Qual é a relação entre x e z?

c) Os ângulos $\hat{z}$ e $\hat{y}$ são ângulos correspondentes? Qual é a relação entre z e y?

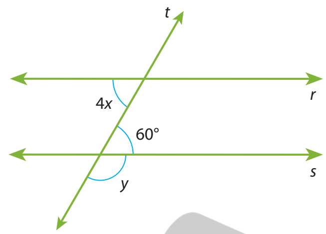
d) Comparando as respostas dos itens **b** e **c**, conclua qual é a relação entre x e y. **35. d)** $x = y$

36 Trace uma linha reta representando uma estrada principal e marque nela os pontos A e D. Com régua e transferidor, trace o roteiro de um caminho, seguindo as indicações e usando a medida de 1 cm para representar 100 m. Considerando o sentido de A para D, no ponto A da estrada principal, gire para a esquerda 58° e ande 500 m, marcando o ponto B. Gire para a esquerda 122° e ande mais 300 m, marcando o ponto C.

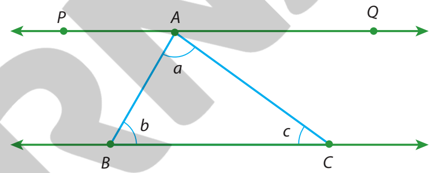
Agora responda: o segmento $\overline{BC}$ é paralelo à estrada principal? Por quê?

36. Sim, pois os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{A}D$ são ângulos alternos internos congruentes (medem 58°).

37 Determine as medidas x e y, considerando que $r \parallel s$ e que t é transversal. **37.** $x = 15°$ $y = 120°$



38 Copie a figura a seguir, em que as retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e a, b e c são medidas dos ângulos.



a) Qual é a medida de $P\hat{A}B$? E de $Q\hat{A}C$? **38. a)** b; c

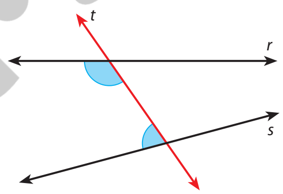
b) Qual é a soma das medidas dos ângulos $P\hat{A}B$, $B\hat{A}C$, $Q\hat{A}C$? E a dos ângulos internos do triângulo ABC? **38. b)** 180°; $a + b + c = 180°$

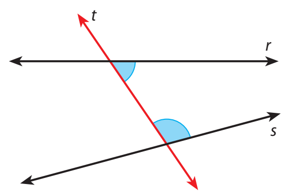
c) O resultado obtido no item **b** vale para a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo? **38. c)** Sim.

Ângulos colaterais internos e ângulos colaterais externos

Vamos considerar duas retas coplanares, *r* e *s*, e uma transversal, *t*.

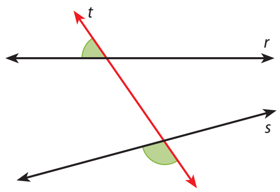
Dois ângulos são **colaterais internos** se são internos, não têm o mesmo vértice e estão situados no mesmo lado em relação à transversal. Observe em destaque nas figuras a seguir alguns ângulos colaterais internos.

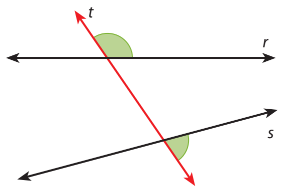




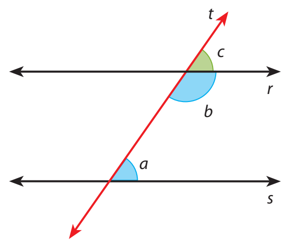
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Dois ângulos são **colaterais externos** se são externos, não têm o mesmo vértice e estão situados no mesmo lado em relação à transversal. Nas figuras a seguir, destacamos alguns ângulos colaterais externos.





Considere, na nova figura a seguir, as retas paralelas *r* e *s*, cortadas pela transversal *t*.



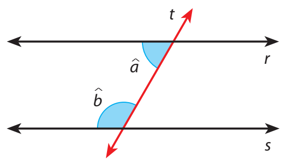
Os ângulos de medidas *a* e *b* são colaterais internos. Então, verificamos:

- $a = c$, pois são medidas de ângulos correspondentes formados pelas retas paralelas *r* e *s* com a transversal *t*;
- $c + b = 180°$, pois são medidas de ângulos suplementares.

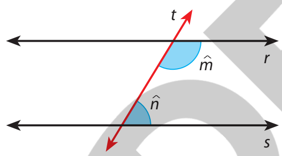
Logo: $a + b = 180°$.

Isso significa que:

> Se duas retas são paralelas, então os ângulos **colaterais internos** formados com uma transversal são suplementares.



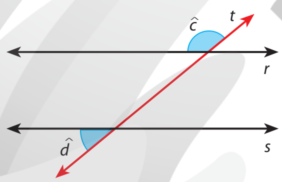
$m(\hat{a}) + m(\hat{b}) = 180°$



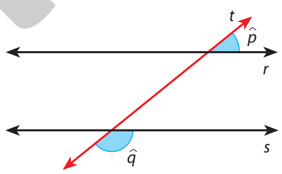
$m(\hat{m}) + m(\hat{n}) = 180°$

Essa propriedade também é válida para ângulos colaterais externos formados por duas paralelas cortadas por uma transversal:

> Se duas retas são paralelas, então os ângulos **colaterais externos** formados com uma transversal são suplementares.



$m(\hat{c}) + m(\hat{d}) = 180°$



$m(\hat{p}) + m(\hat{q}) = 180°$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Ângulos colaterais internos e ângulos colaterais externos

Considere com os estudantes o fato de que as propriedades trabalhadas neste tópico dependem do fato de as retas cortadas por uma transversal serem paralelas. Se possível, em um *software* de geometria dinâmica, construa modelos didáticos em que os estudantes realizem movimentos nas retas a fim de estudar as propriedades e perceber que, apenas quando as retas cortadas por uma transversal são paralelas, os ângulos colaterais internos são suplementares e os ângulos colaterais externos são suplementares.

101

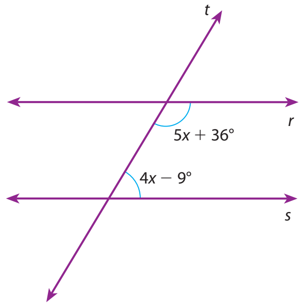
Ângulos formados por duas retas paralelas e uma reta transversal com o uso de *software*

Se tiver oportunidade, leve os estudantes para a sala de informática para que possam fazer a construção indicada e verificar as medidas dos ângulos formados.

Essa atividade contribui com o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **5**.

Com essas propriedades, podemos resolver problemas que envolvam medidas de ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. Acompanhe um exemplo.

Vamos calcular a medida dos ângulos assinalados na figura, em que $r \parallel s$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Os ângulos destacados são suplementares, pois são ângulos colaterais internos, formados por duas retas paralelas e uma transversal. Então:

$(5x + 36°) + (4x - 9°) = 180°$

$5x + 4x = 180° - 36° + 9°$

$9x = 153°$

$\dfrac{9x}{9} = \dfrac{153°}{9}$

$x = 17°$

Substituindo x por 17° nas expressões $5x + 36°$ e $4x - 9°$, obtemos as medidas dos ângulos assinalados, cuja soma deve ser 180°.

$5x + 36° = 5 \cdot 17° + 36° = 121°$

$4x - 9° = 4 \cdot 17° - 9° = 59°$

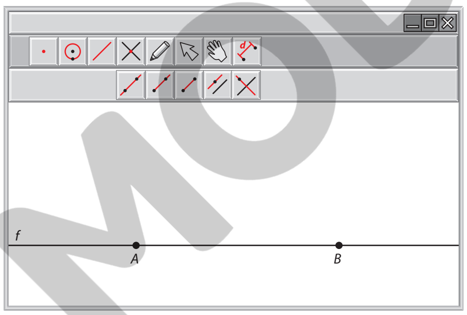
$121° + 59° = 180°$

Portanto, os ângulos assinalados medem 121° e 59°.

Ângulos formados por duas retas paralelas e uma reta transversal com o uso de *software*

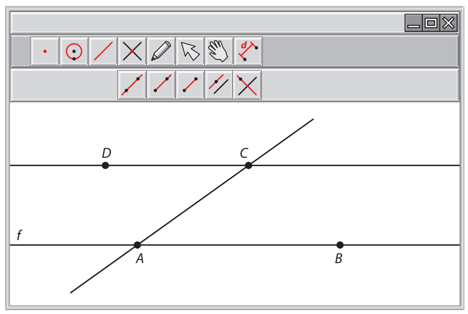
Podemos utilizar *softwares* matemáticos em uma série de situações, como verificar relações entre medidas de ângulos formados por duas retas paralelas e uma reta transversal.

1º passo



Em geral, as ferramentas ficam na parte superior da tela. Selecione a ferramenta "Reta" e clique em dois pontos quaisquer da tela para criar uma reta $\overleftrightarrow{AB}$.

2º passo



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Repita o procedimento para obter as retas $\overleftrightarrow{CD}$ e $\overleftrightarrow{AC}$. Selecionando a ferramenta "Mover", é possível movimentar o ponto C ao longo da reta $\overleftrightarrow{CD}$ e verificar que as congruências de vários pares de ângulos formados continuam valendo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

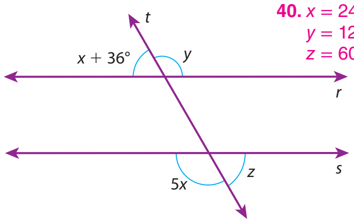
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

39 Mostre que os ângulos colaterais externos formados por duas retas paralelas e uma transversal são suplementares.

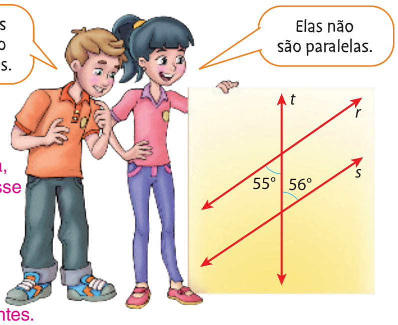
39. Demonstração.

40 Sendo $r \parallel s$, determine as medidas x, y e z.

40. $x = 24°$
$y = 120°$
$z = 60°$



41 Quem tem razão na conversa a seguir, Mário ou Vilma? Justifique sua resposta.



41. Vilma, pois, nesse caso, os ângulos alternos internos não são congruentes.

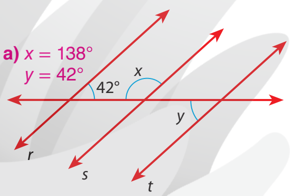
42 Os ângulos mencionados a seguir são formados por duas retas paralelas e uma transversal. Identifique as sentenças falsas e corrija-as. Os ângulos:

a) correspondentes são suplementares;
b) alternos internos são congruentes;
42. b) Verdadeira.
c) alternos externos são complementares;
d) colaterais internos são congruentes;
e) colaterais externos são suplementares.
42. e) Verdadeira.

43 Sendo $r \parallel s \parallel t$, calcule as medidas x e y dos ângulos destacados nas figuras.

a)

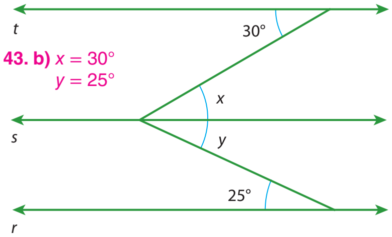
43. a) $x = 138°$
$y = 42°$



42. a) Falsa; os ângulos correspondentes são congruentes.
42. c) Falsa; os ângulos alternos externos são congruentes.

b)

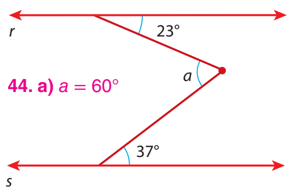
43. b) $x = 30°$
$y = 25°$



44 Sendo $r \parallel s$ e $u \parallel v$, calcule as medidas a, x e y nas figuras.

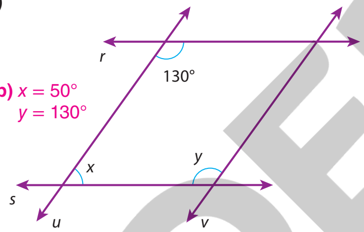
a)

44. a) $a = 60°$

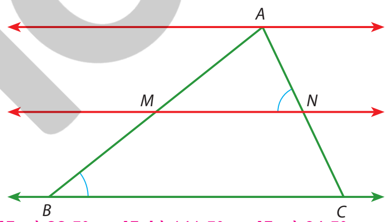


b)

44. b) $x = 50°$
$y = 130°$



45 Na figura do triângulo ABC, foram traçadas duas retas paralelas ao lado $\overline{BC}$: uma reta pelo vértice A e a reta $\overleftrightarrow{MN}$. A medida do ângulo $A\hat{B}C$ é 38,5°, e a medida do ângulo $M\hat{N}A$ é 64,5°.



45. a) 38,5° **45. b)** 141,5° **45. c)** 64,5°

a) Qual é a medida do ângulo $A\hat{M}N$?
b) Qual é a medida do ângulo $B\hat{M}N$?
c) Qual é a medida do ângulo $B\hat{C}A$?

42. d) Falsa; os ângulos colaterais internos são suplementares.

Exercícios propostos

Para o **exercício 39** os estudantes devem utilizar o mesmo raciocínio usado na demonstração de que os ângulos colaterais internos são suplementares.

No **exercício 40** os estudantes devem considerar que:

$x + 36° + y = 180°$ (suplementares) (I)

$5x + z = 180°$ (suplementares) (II)

$y + z = 180°$ (colaterais externos) (III)

$x + 36° + 5x = 180°$ (colaterais externos) (IV)

Logo, de IV, temos:

$x + 36° + 5x = 180°$

$6x = 144°$

$x = 24°$

Substituindo $x = 24°$ em I, temos:

$24° + 36° + y = 180°$

$60° + y = 180°$

$y = 120°$

Substituindo $y = 120°$ em III, temos:

$120° + z = 180°$

$z = 60°$

No **exercício 41**, temos a contraposição entre a frase de Mário ("As as retas *r* e *s* são paralelas") e a frase de Vilma ("Elas não são paralelas"). Como podemos perceber, os ângulos alternos internos não são congruentes; portanto, as retas não podem ser paralelas.

Aqui, é necessário destacar que as informações precisam ser dadas, ou seja, quando admitimos que duas retas são paralelas para resolver um exercício, isso tem de estar escrito no enunciado.

Na resolução do **exercício 43, item b**, espera-se que os estudantes percebam que $x + y = 30° + 25°$. Caso isso não ocorra, discuta esse fato com eles quando forem resolver o **exercício 44, item a**, com o qual se articula.

As resoluções dos **exercícios 39** e **42** a **45** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Trabalhando a informação

Habilidades da BNCC: **EF07MA02** e **EF07MA37**.

Cada vez mais presente por ser necessária, a pesquisa estatística é imprescindível para o desenvolvimento de projetos nos mais variados setores e contextos das atividades do dia a dia.

O contexto utilizado nesta seção representa apenas um exemplo em uma gama enorme de outros aplicáveis em projetos industriais. Os dados coletados para iniciar um estudo estatístico, além de ser organizados, precisam de uma linguagem para ser transmitidos e entendidos. Os gráficos de setores constituem um dos importantes instrumentos de propagação e de análise desses estudos e são empregados quando se deseja evidenciar a participação do dado no total.

Comente de maneira enfática que, como os setores são uma partição do todo coletado, a soma das porcentagens dos setores necessariamente é igual a 100% dos dados ou que a soma das medidas dos setores é igual a 360°.

Agora quem trabalha é você!

Na **atividade 1** dessa seção, instrua os estudantes quanto ao uso da calculadora para determinar a medida dos ângulos dos setores do gráfico. Como a soma dessas medidas deve ser 360°, um setor correspondente a 18% será de 64,8°, pois $0{,}18 \cdot 360 = 64{,}8$, por exemplo.

Pode-se ampliar a atividade propondo aos estudantes que realizem uma pesquisa sobre a temática trabalhada com os colegas de turma. Para isso, podem fazer a coleta dos dados e depois representá-los em um gráfico de setores.

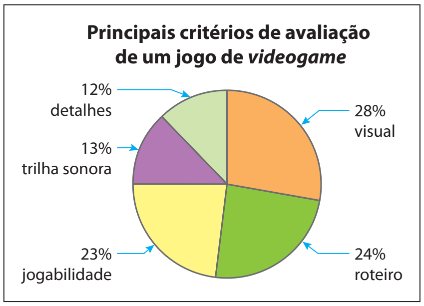
TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Gráficos de setores

Gráficos de setores são usados principalmente quando se deseja relacionar entre si as partes do que está sendo representado, ou relacionar cada parte com o todo.

Vamos analisar a situação a seguir.

Um fabricante de jogos de *videogame* fez uma pesquisa para saber quais são os principais critérios de avaliação para determinar o interesse e a decisão de compra de um jogo voltado ao público infantojuvenil. O gráfico mostra o resultado da pesquisa feita com jovens de 10 a 15 anos. Observe como o gráfico ajuda a perceber a distribuição das opiniões por critério de avaliação.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pelo fabricante de jogos.

DANIEL ZEPPO/ARQUIVO DA EDITORA

Se medirmos com um transferidor o ângulo do gráfico referente à jogabilidade, por exemplo, encontraremos aproximadamente 83°. Se calcularmos 23% de 360°, obteremos 82,8°.

Com o transferidor, o setor relativo a roteiro medirá cerca de 86°, e 24% de 360° é 86,4°.

Agora quem trabalha é você!

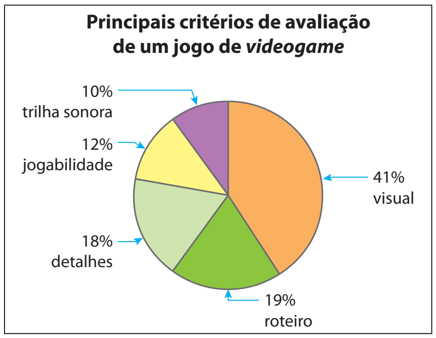
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A tabela contém o resultado da mesma pesquisa, mas agora realizada com jovens de 16 a 18 anos. Copie essa tabela e complete-a com as medidas em grau, obtidas com o uso de uma calculadora. Depois, meça os ângulos dos setores do gráfico com um transferidor e compare os resultados.

Principais critérios de avaliação de um jogo de *videogame* MODELO

Categoria	Porcentagem	Grau
trilha sonora	10%	
detalhes	18%	
visual	41%	
roteiro	19%	
jogabilidade	12%	

Dados obtidos pelo fabricante de jogos.



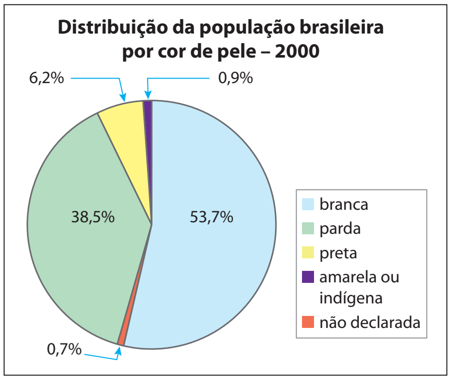
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pelo fabricante de jogos.

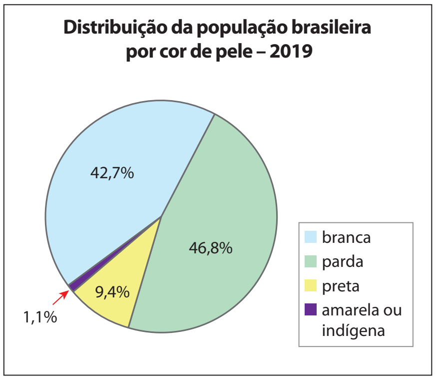
1. Trilha sonora: 36°; detalhes: 64,8°; visual: 147,6°; roteiro: 68,4°; jogabilidade: 43,2°.

2 No gráfico da atividade 1, qual é a soma das porcentagens de todos os setores? **2.** 100%

3 Os gráficos a seguir indicam a distribuição da população brasileira por cor de pele, em relação ao total de pessoas no Brasil em 2000 e em 2019. Calcule as medidas aproximadas dos setores e, depois, confira-as com o transferidor. **3.** As medidas correspondentes a cada setor estão neste *Manual*.



Dados obtidos em: IBGE. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/periodicos/83/cd_2000_caracteristicas_populacao_amostra.pdf. Acesso em: 19 maio 2022.



Dados obtidos em: Conheça o Brasil - População COR OU RAÇA. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/jovens/conheca-o-brasil/populacao/18319-cor-ou-raca.html#:~:text=De%20acordo%20com%20dados%20da,1%25%20como%. Acesso em: 19 maio 2022.

Agora, compare cada setor do gráfico de 2000 com o setor da respectiva cor de pele do gráfico de 2019 e escreva as alterações que ocorreram nesses dezenove anos.
3. De 2000 a 2019, as populações autodeclaradas branca e não declarada foram as únicas que diminuíram percentualmente. As demais aumentaram.

Pense mais um pouco...

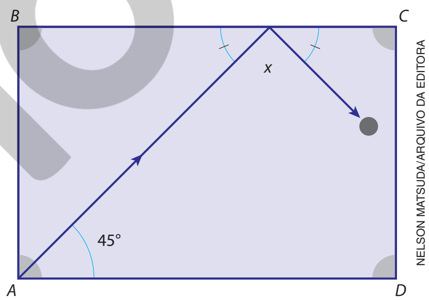
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Resolva a questão a seguir.

(UFRRJ) A figura mostra a trajetória de uma bola de bilhar. Sabe-se que, quando ela bate na lateral da mesa (retangular), forma um ângulo de chegada que sempre é igual ao ângulo de saída. A bola foi lançada da caçapa A, formando um ângulo de 45° com o lado $\overline{AD}$.

Sabendo-se que o lado $\overline{AB}$ mede 2 unidades e $\overline{BC}$ mede 3 unidades, a bola: *Pense mais um pouco...*: Alternativa **b**.

a) cairá na caçapa A.
b) cairá na caçapa B.
c) cairá na caçapa C.
d) cairá na caçapa D.
e) não cairá em nenhuma caçapa.



Agora quem trabalha é você!

Na **atividade 2**, converse com os estudantes sobre o fato de a soma das medidas dos ângulos que determinam os setores do gráfico ser 360° e o de as porcentagens representadas por esses setores, adicionadas, resultarem em 100% dos dados.

Na **atividade 3**, explore os dados representados. Se possível, amplie o contexto, desenvolvendo o Tema Contemporâneo Transversal **educação em direitos humanos** e incentivando os estudantes a pesquisar e debater a necessidade de políticas públicas que atenuem ou eliminem as diferenças de acesso à educação, por exemplo.

Pense mais um pouco...

Oriente os estudantes a observar que as laterais da mesa de bilhar, vista de cima, são paralelas e que a trajetória da bola lançada é uma reta transversal a essas paralelas.

Comente que, no jogo de bilhar ou similares, além da habilidade na tacada e do conhecimento e bom emprego das regras, para obter sucesso, o jogador deve saber usar as ideias de ângulos alternos internos e de reflexão.

Exercícios complementares

Sobre o **exercício 2**, comente com os estudantes o polígono que dá a forma da cabeça do parafuso, popularmente chamado sextavado, no caso, um hexágono regular. Oriente-os a observar a posição relativa de dois lados opostos desse polígono (paralelos), que dá segurança e facilita o encaixe da ferramenta na cabeça do parafuso. Pergunte a eles que outros polígonos regulares (lados congruentes e ângulos congruentes) têm lados opostos paralelos (quadrado, octógono, decágono etc. – polígonos de número par de lados).

A cada movimento que o mecânico faz com a chave no parafuso de cabeça sextavada, ele gira 60°. Para dar uma volta completa no parafuso, ele deve fazer 6 movimentos, pois $6 \cdot 60° = 360°$.

Aproveite a temática para explicar que a forma do parafuso, assim como a forma de embalagens ou de peças industriais, é pensada por *designers* de modo a facilitar o manuseio do objeto pelo cliente, assim como o uso de matéria-prima e o armazenamento adequado. Muitos desses estudos utilizam conceitos matemáticos e, em vários casos, conceitos geométricos. Ao comentar essa relação, contribui-se para o desenvolvimento da **competência geral 6** e do Tema Contemporâneo Transversal **trabalho**.

O **exercício 3** trata de uma manobra de *skate* denominada 900°, que se refere à quantidade de voltas dada pelo *skatista*: 2 voltas e meia ($360° + 360° + 180° = 900°$). Comente que além dessa manobra há, por exemplo, a manobra 360° *ollie*, em que o atleta dá um salto com o *skate*, tirando-o do chão para desviar de obstáculos e, em seguida, dá um giro de uma volta. Incentive os estudantes a pesquisar outras manobras de giro e compartilhar as informações com os colegas.

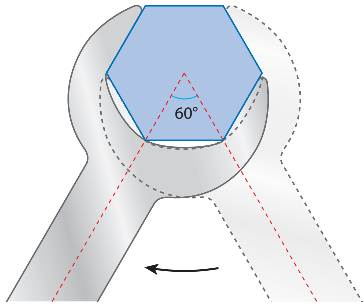
As resoluções dos **exercícios 1** e **4** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Usando régua e transferidor, construa um ângulo reto e, a partir dele, um ângulo de 45° e um de 22°30′. **1.** Construção de figura.

2 Na figura a seguir, vista de cima, a cabeça de um parafuso tem a forma de um hexágono com lados de mesma medida e com ângulos congruentes de 60°.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A cada movimento que um mecânico faz com a chave, o parafuso gira 60°. Quantos movimentos iguais a esse o mecânico deve fazer para que o parafuso dê:

a) meia-volta; **2. a)** 3 movimentos.

b) uma volta completa. **2. b)** 6 movimentos.

- Qual é a medida do ângulo interno desse hexágono? E a do ângulo externo? **2.** 120°; 60°

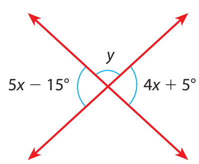
3 Uma das manobras de *skate* chama-se 900°. Nessa manobra, o *skatista* dá um giro equivalente a quantas voltas? **3.** Duas voltas e meia.

4 Acompanhe a descrição do caminho que Ângela percorreu:

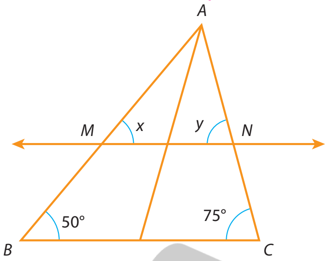
- Inicialmente, caminhei 10 m em linha reta.
- Depois, girei 90° à esquerda e avancei 10 m novamente.
- Em seguida, girei 90° à esquerda e avancei mais 20 m.

Quantos graus Ângela deverá girar à esquerda para retornar ao ponto de partida em linha reta?

5 Determine as medidas x e y da figura. **5.** $x = 20°$ e $y = 95°$

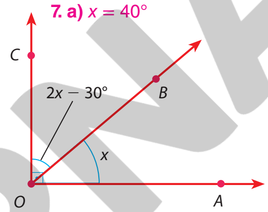


6 No triângulo $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overline{BC}$. Calcule as medidas x e y. **6.** $x = 50°$; $y = 75°$

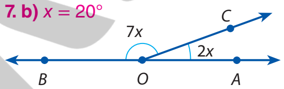


7 Calcule o valor de x em cada figura.

a) **7. a)** $x = 40°$

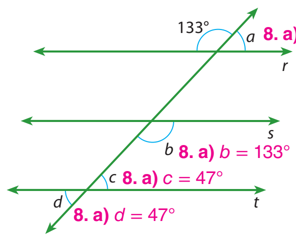


b) **7. b)** $x = 20°$



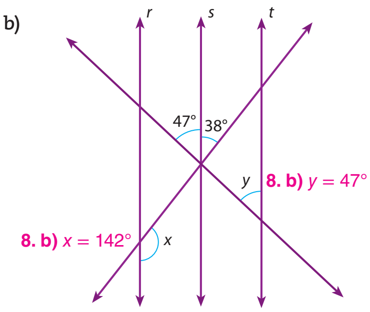
8 Sendo $r \parallel s \parallel t$, calcule as medidas a, b, c, d, x e y nas figuras.

a)



8. a) $a = 47°$; **8. a)** $b = 133°$; **8. a)** $c = 47°$; **8. a)** $d = 47°$

b)



8. b) $y = 47°$; **8. b)** $x = 142°$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

4. Ângela deverá girar 135° à esquerda para retornar ao ponto de partida em linha reta. Orientações: proponha aos estudantes que façam um desenho em uma malha quadriculada para resolver esse problema.

106

Sugestão de leitura

VELOZO, E. L.; DAOLIO, J. O *skate* como prática corporal e as relações de identidade na cultura juvenil. **Revista Ibero-Americana de Educação**, n. 62, maio-ago. 2013. Disponível em: https://rieoei.org/historico/documentos/rie62a12.htm. Acesso em: 20 jun. 2022.

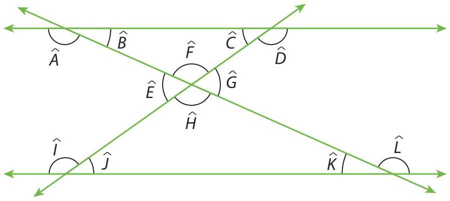
Esse artigo se propõe analisar o *skate* como uma prática corporal vinculada à cultura juvenil, portadora de significados específicos, de acordo com os diferentes grupos sociais e, ao mesmo tempo, refletir sobre as possibilidades de abordá-lo como uma manifestação da cultura corporal, perspectiva que escapa às iniciativas pedagógicas das instituições escolares.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Na imagem a seguir, supondo duas retas paralelas cortadas por duas transversais, são congruentes os ângulos: 1. Alternativa **b**.

RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA



a) $\hat{A}$ e $\hat{D}$ b) $\hat{B}$ e $\hat{K}$ c) $\hat{E}$ e $\hat{H}$ d) $\hat{C}$ e $\hat{I}$

2 Na imagem da questão 1, os pares de ângulos $\hat{E}$ e $\hat{G}$ e $\hat{A}$ e $\hat{L}$ são congruentes pois são, respectivamente: 2. Alternativa **b**.

a) opostos pelo vértice e alternos externos.
b) opostos pelo vértice e alternos internos.
c) adjacentes e colaterais externos.
d) opostos pelo vértice e colaterais externos.

3 A representação correta de 5°48′1″ em segundo é:

a) 18 000″ c) 18 481″
b) 20 880″ d) 20 881″

3. Alternativa **d**.

4 Alguns aparelhos de GPS fornecem a medida da distância angular por meio da localização em grau, minuto e segundo. Qual é a medida da distância angular entre duas pessoas que estão na linha do Equador, sendo que uma está em 41°20′5″ Leste e a outra em 15°53′58″ Oeste?

a) 57°24′3″ c) 57°14′3″
b) 66°14′3″ d) 66°24′3″

4. Alternativa **c**.

5 $\frac{1}{3}$ de 56°28′15″ equivale a: 5. Alternativa **a**.

a) 18°49′25″ c) 18°19′25″
b) 28°59′15″ d) 28°19′25″

6 A bissetriz de um ângulo divide-o em dois ângulos: 6. Alternativa **d**.

a) adjacentes e correspondentes.
b) colaterais e alternos internos.
c) congruentes e opostos pelo vértice.
d) congruentes e adjacentes.

7 Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas for igual a: 7. Alternativa **b**.

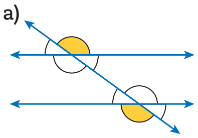
a) 45°. c) 180°.
b) 90°. d) 360°.

8 Quais são, respectivamente, as medidas dos ângulos complementar e suplementar a um ângulo que mede 78°22′? 8. Alternativa **a**.

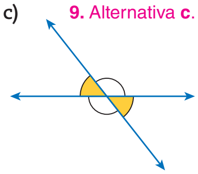
a) 11°38′ e 101°38′
b) 101°38′ e 11°38′
c) 111°48′ e 21°48′
d) 21°48′ e 111°48′

9 Assinale a alternativa que apresenta dois pares de ângulos opostos pelo vértice em destaque.

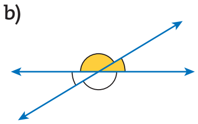
a)



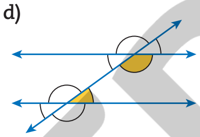
c) 9. Alternativa **c**.



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

10 Na planta de uma obra, um engenheiro verificou que a rampa de acessibilidade, em desacordo com normas técnicas, apresentava um ângulo de inclinação de 9°24′. Para corrigi-lo, decidiu traçar, na planta, a bissetriz desse ângulo. O ângulo da nova inclinação passou a medir:

a) 18°48′ c) 4°42′
b) 4°17′ d) 4°12′

10. Alternativa **c**.

11 Dois ângulos colaterais externos formados com uma transversal são: 11. Alternativa **b**.

a) complementares.
b) suplementares.
c) congruentes.
d) opostos pelo vértice.

Organizando: As respostas a estas questões estão neste *Manual*.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, faça o que se pede.

a) Escreva, com suas palavras, o que é um ângulo.
b) Quais são os submúltiplos do grau? Escreva a relação entre o grau e seus submúltiplos.
c) Qual estratégia você usa para efetuar operações com medidas de ângulos em grau e seus submúltiplos?
d) Reflita sobre a afirmativa: dois ângulos podem ser complementares e também suplementares.
e) Em quais situações, estudadas neste capítulo, há pares de ângulos congruentes?

Verificando

Para resolverem os testes dessa seção, organize os estudantes em duplas. Cada um pode resolver os testes e, depois, compartilhar com o colega da dupla para corrigirem e discutirem eventuais respostas que divergirem.

As resoluções dos **testes 1** a **11** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Organizando

As perguntas propostas nessa seção orientam os estudantes quanto aos principais conteúdos trabalhados neste capítulo. Com base nelas, pode-se realizar uma roda de conversa e revisar esses conteúdos.

Acompanhe as respostas e/ou orientações para essas questões:

a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem que um ângulo é a figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem.

b) Minuto e segundo. 1° = 60′, 1° = 3 600″ e 1′ = 60″.

c) Resposta pessoal. Os estudantes podem, por exemplo, converter minutos e segundos na parte decimal do grau ou converter a medida apenas em segundo e, depois, retornar à representação com grau, minuto e segundo.

d) Espera-se que os estudantes percebam que, se dois ângulos são suplementares, a soma das suas medidas é 180° e, por isso, eles não podem ser complementares. Analogamente, se eles forem complementares, a soma das suas medidas é 90° e, portanto, não podem ser suplementares.

e) Dois ângulos são congruentes quando forem: opostos pelo vértice; obtidos de outro pela construção da bissetriz; correspondentes ou alternos internos ou alternos externos determinados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Capítulo 5 – Equações

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo dá continuidade ao trabalho iniciado no capítulo Um pouco de Álgebra, do ano anterior, e o transcende, além de apresentar novas abordagens da Unidade Temática **Álgebra**, que aprofundarão conceitos e ideias aqui estudados.

Algumas "facetas" da Álgebra permeiam os capítulos desta obra. Delas, muito resumidamente, podemos citar:

- a representação de um elemento genérico (variável) ou desconhecido (incógnita) de um conjunto ou referente a uma grandeza;
- a sua função de linguagem estruturada, por meio da qual traduzimos uma situação-problema em sentenças de igualdade (equação), de desigualdade (inequação) ou de um conjunto dessas sentenças (sistema);
- a generalização implícita nas demonstrações de teoremas, propriedades ou conclusões específicas efetuadas;
- o papel que ela ocupa na história da evolução do pensamento do ser humano determinando a, e sendo determinada pela, cultura dos povos.

Essas talvez sejam as "facetas" mais importantes a serem destacadas no estudo da Álgebra, mesmo nas atividades lúdicas, aparentemente despretensiosas, que aqui encontramos nas seções **Pense mais um pouco...** ou **Diversificando**.

Ao apresentar algumas das obras de arte que compõem o acervo do Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand, propomos aos estudantes que façam uma pesquisa sobre as 4 obras que estão em primeiro plano na imagem. Se considerar adequado, combine com o professor de Arte a apresentação de informações sobre o museu e sobre as obras que fazem parte de seu acervo. Mais informações sobre o museu e sobre as obras apresentadas podem ser obtidas em: https://masp.org.br/sobre#:~:text=Sobre-,o%20Masp,primeiro%20museu%20moderno%20no%20pa%C3%ADs. Acesso em: 21 jun. 2022.

Capítulo 5 Equações

a) Respostas possíveis: Proteger, decorar, direcionar o olhar, destacar a cena apresentada, delimitar suas fronteiras, atrair o espectador.

Observe, leia e responda no caderno.

a) Diferentes obras de arte, fotografias, gravuras e pinturas são frequentemente acompanhadas por molduras, de formas, cores e ornamentos diversos. Existem até museus e galerias que já dedicaram exposições especiais exclusivamente às molduras, destacando sua beleza e seu trabalho artesanal. Qual é a função da moldura de um quadro?

b) Faça uma pesquisa na internet e identifique o nome das pinturas de Amedeo Modigliani que aparecem na fotografia. O que essas obras de arte têm em comum?

c) Uma dessas telas tem 100 cm de medida de altura por 65 cm de medida de largura. Qual é a medida aproximada do perímetro dessa obra de arte? c) Medida aproximada do perímetro: 330 cm.

DANIEL CYMBALISTA/PULSAR IMAGENS

Obras do acervo permanente do Museu de Arte de São Paulo Assis Chateaubriand (Masp), São Paulo. (Fotografia de 2016.)

b) Da direita para a esquerda, temos: a primeira imagem é **Lunia Czcchwska**, de 1918; a segunda, **Renée**, de 1917; a terceira é **Retrato de Leopold Zborowski**, de 1916-19; e a quarta é **Chakoska**, de 1917. Mais informações sobre essas obras podem ser obtidas no *site* do Museu de Arte de São Paulo: https://masp.org.br/acervo. Acesso em: 9 jun. 2022.

O preço da moldura de um quadro depende do seu material e da medida do perímetro da pintura, isto é, da soma das medidas dos seus lados, e pode ser obtido por meio de uma equação. As quatro obras de arte que identificamos na imagem são do artista italiano Amedeo Modigliani (1884-1920) e foram pintadas entre os anos de 1916 a 1919. É possível notar que as quatro obras estão emolduradas.

A moldura, além de proteger uma obra de arte e de ter função decorativa, direciona o olhar, dá destaque à cena apresentada, delimita suas fronteiras. Ela pode atrair o espectador, mas também pode distraí-lo. Molduras podem ser consideradas obras de arte por si sós, mas há quem questione a importância da moldura em relação à pintura. No final, a combinação entre ambas é o que conta.

Espera-se que os estudantes indiquem que todas as obras de arte são retratos.

Ao propor essa atividade, contribuímos para o desenvolvimento da **competência geral 3**.

O final do texto desta abertura do capítulo, indo além do conteúdo da Álgebra, propõe um questionamento, que não é pequeno, sobre a importância das partes de um todo. Nas artes cênicas há a máxima: "Não existe papel pequeno; existe o papel que a gente protagoniza". Assim, também no processo educativo, todos os atores são importantes. Esse pode ser o mote para uma conversa com a turma – cuja conveniência e momento devem ser avaliados pelo docente – com enfoque na educação inclusiva e possibilitando um trabalho educativo sobre o Tema Contemporâneo Transversal **direitos da criança e do adolescente**.

1 Um pouco de História

Tradicionalmente, os textos de Matemática incluem problemas para os leitores resolverem. Os antigos textos de Matemática, como os egípcios, babilônicos, indianos, árabes e chineses, possuíam uma lista de problemas cujas soluções eram fornecidas posteriormente.

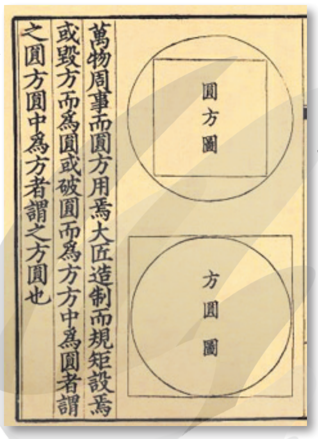
Os problemas tinham a função didática de ensinar Matemática, mas também refletiam as necessidades das sociedades e os diferentes aspectos da vida cotidiana da época.

COLEÇÃO BABILÔNICA - BIBLIOTECA DA UNIVERSIDADE DE YALE, NEW HAVEN

Tábua babilônica, em escrita cuneiforme, datada entre 1800 a.C. e 1600 a.C. Nela estão registrados 25 problemas matemáticos.

GAY ROBINS & CHARLES SHUTE - MUSEU BRITÂNICO, LONDRES

Papiro de Rhind, cerca de 1650 a.C. Esse papiro mede cerca de 33 cm de largura por 495 cm de comprimento e está escrito em hierático (que se lê da direita para a esquerda). O papiro contém uma coleção de 87 problemas, e seu nome refere-se ao escocês Alexander Henry Rhind, que o comprou por volta de 1858, em Luxor, no Egito. É também designado como papiro de Ahmes, nome do escriba egípcio que o copiou.



INSTITUTO DE HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS NATURAIS - ACADEMIA CHINESA DE CIÊNCIAS, PEQUIM

Página do **Zhou bi suan jing** ou **Chou pei suan ching** (entre 100 a.C. e 100 d.C.), considerado o texto mais antigo da Matemática chinesa. Esta reprodução corresponde a uma edição de 1213, do acervo da Biblioteca de Xangai. O texto não é apresentado por meio de problemas e respostas, mas, sim, em forma de diálogo.

UNIVERSIDADE DE OXFORD, OXFORD

Página do livro **Hisab al-jabr al-muqabala** – um tratado de Álgebra escrito pelo matemático Al-Khwārizmī, por volta de 825 d.C.

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

1. Um pouco de História

As situações apresentadas, relacionando a Matemática e a História, proporcionam aos estudantes a oportunidade de perceber que as ciências em geral, e a Matemática em particular, são patrimônios da humanidade desde tempos remotos e transitam pelas civilizações.

Assim, procuramos contemplar orientações descritas na BNCC, p. 299: *Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática*.

Ao apresentar documentos relacionados a diferentes povos e suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática, contribuímos para o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal **diversidade cultural**.

Aproveite o texto desta página para discutir com os estudantes algumas questões da história da Matemática, como:

- Que tipos de problema prático, nas civilizações da Antiguidade, envolviam o uso de Matemática em sua resolução?
- A linguagem matemática usada nas várias épocas, por diferentes civilizações, era igual à linguagem matemática atual?

Discutir com os estudantes questões como essas possibilita evidenciar o caráter histórico da Matemática, com as muitas transformações que sofreu ao longo do tempo, e compreendê-la como uma produção humana em constante evolução.

Sugestão de leitura

Para enriquecer o trabalho neste capítulo, indicamos o artigo:

COELHO, F. U.; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, n. 32, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ea/a/6KryLd3HngCnBwJtWFHxSHj/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 21 jun. 2022.

O objetivo dos autores é apresentar certos recortes sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra, a partir de relatos de alguns historiadores da Matemática, e compreender o conceito algébrico que estava explícito ou implícito nos percursos citados.

Um pouco de História

Reúna os estudantes em grupos e proponha-lhes a resolução dos problemas apresentados, compartilhando os procedimentos. Esses problemas serão resolvidos nas páginas 132 e 133.

Sugira aos estudantes que resolvam, com estratégias próprias, o primeiro problema: "Determinada quantidade e a sua quarta parte adicionadas dão 15. Qual é a quantidade?".

Um modo interessante de resolvê-lo é por meio de tentativas que se ajustem sucessivamente ao resultado. Por exemplo, podem testar valores múltiplos de 4, pois o cálculo envolve a quarta parte da quantidade procurada, e verificar o resultado obtido para fazer a próxima tentativa. Testando o valor 4: $4 + \frac{4}{4} = 5$. Como o resultado deve ser 15 (o triplo de 5), a quantidade correta é o triplo do valor testado: $3 \cdot 4 = 12$. Então: $12 + \frac{12}{4} = 15$.

Esse método de resolução de algumas equações do 1º grau com uma incógnita era denominado pelos antigos egípcios "regra da falsa posição". Ao final do capítulo, na seção **Para saber mais**, trataremos desse método com mais detalhes.

2. Números representados por letras

Habilidades da BNCC: **EF07MA13**, **EF07MA15** e **EF07MA18**.

Neste tópico, ao retomar a ideia de variável e resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 1º grau, conceitos iniciados no ano letivo anterior, aprofundamos o trabalho com as habilidades (EF07MA13) e (EF07MA18).

Iniciamos o trabalho de representação dos valores variáveis de grandezas nos contextos apresentados.

Trabalhar com o desconhecido pode ser uma atividade fascinante. Proponha aos estudantes que, em duplas, experimentem o exercício a seguir.

Um deles diz uma frase do tipo "o dobro de um número menos 5 é igual a...". O outro estudante da dupla imagina um número, calcula mentalmente o dobro desse número, subtrai 5 do resultado e diz ao colega quanto deu. Este deve descobrir qual é o número pensado.

COLEÇÃO WELLCOME, LONDRES

Fragmento do manuscrito **Lilavati** (A bela), escrito em 1150 d.C. pelo matemático indiano Bhaskara. **Lilavati** é uma das quatro partes da obra **Siddhanta siromani** e contém 278 versos com problemas simples de Aritmética.

A seguir, destacamos dois problemas.

O primeiro faz parte da coleção do papiro de Rhind, e o segundo se baseia em uma das traduções do manuscrito **Lilavati**.

Determinada quantidade e a sua quarta parte adicionadas dão 15. Qual é a quantidade? **Resposta:** A quantidade é 12.

... o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto foi para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto, e seu amado, um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descubra o número total de pérolas no colar. **Resposta:** O número total de pérolas é 30.

MONITO MAN/ARQUIVO DA EDITORA

Você saberia resolver esses problemas?

Embora não seja fácil, é possível encontrar as respostas por meio de tentativas.

Neste capítulo, você vai aprender novos recursos que podem facilitar a resolução de problemas como esses.

2 Números representados por letras

Em algumas situações, você teve a oportunidade de trabalhar com expressões matemáticas.

Observe estas expressões, escritas na linguagem comum e na linguagem simbólica da Matemática.

a) Dois vezes cinco $\rightarrow 2 \cdot 5$

b) Três vezes quatro mais um $\rightarrow 3 \cdot 4 + 1$

c) O quadrado de dois sétimos adicionado a dois quintos $\rightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \frac{2}{5}$

Como você já deve ter estudado, a Álgebra é a parte da Matemática que trabalha com grandezas cujos valores variam (**variáveis**) ou são desconhecidos (**incógnitas**) e que são representados por símbolos – em geral, por letras.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Quando falamos de um número racional qualquer, podemos usar uma letra para representá-lo. Observe alguns exemplos.

a) O dobro de um número → $2 \cdot x$

b) O triplo de um número mais quatro → $3 \cdot x + 4$

c) A metade de um número menos um terço → $\frac{x}{2} - \frac{1}{3}$

d) Um número mais seus três quintos → $x + \frac{3}{5} \cdot x$

e) A soma de dois números inteiros consecutivos → $x + (x + 1)$

Note que, em todos esses exemplos, a letra *x* pode ser qualquer número racional. Dizemos, então, que *x* é uma **variável**. Conforme o valor assumido por *x*, há um valor para a expressão matemática.

As expressões $2 \cdot x$, $3 \cdot x + 4$, $\frac{x}{2} - \frac{1}{3}$, $x + \frac{3}{5} \cdot x$ e $x + (x + 1)$ são exemplos de **expressões algébricas**.

Em expressões como essas, a variável não precisa ser obrigatoriamente a letra *x*; ela pode ser representada por qualquer outra letra. Observe.

a) O dobro de um número → $2 \cdot y$ ou $2y$ (sem o sinal de multiplicação)

b) O triplo de um número menos dez → $3z - 10$

c) O quadrado da metade de um número menos um terço desse número → $\left(\frac{t}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}t$

d) A soma de um número com o dobro de outro número → $a + 2b$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Escolha uma letra para representar um número e traduza para a linguagem simbólica da Matemática cada expressão relativa a esse número. **1.** Respostas possíveis:

a) O triplo desse número mais dez. **1. a)** $3x + 10$
b) Esse número menos quatro. **1. b)** $a - 4$
c) O quádruplo desse número. **1. c)** $4b$
d) A terça parte desse número. **1. d)** $\frac{1}{3}y$
e) Três quartos desse número. **1. e)** $\frac{3}{4}z$

2 Leia e responda à questão.

Faltam apenas duas figurinhas para que meu amigo tenha o dobro do número de figurinhas que eu tenho.
Se indicarmos por y o número de figurinhas que eu tenho, como poderemos representar o número de figurinhas que meu amigo tem? **2.** $2y - 2$

3 Sendo *a* e *b* dois números racionais, represente na linguagem simbólica da Matemática:

a) a soma desses números; **3. a)** $a + b$
b) a diferença entre esses números; **3. b)** $a - b$ ou $b - a$
c) o dobro de *a* menos o triplo de *b*; **3. c)** $2a - 3b$
d) o produto desses números. **3. d)** $a \cdot b$

4 Nas expressões a seguir, a letra *x* representa um número. Relacione cada expressão escrita na linguagem comum com a expressão algébrica correspondente, escrevendo no caderno o número romano e a letra a que está associado.

I. O dobro do quadrado de x. **4. I.** e
II. O quadrado do dobro de x. **4. II.** c
III. A diferença entre o dobro de x e 3. **4. III.** a
IV. O dobro da diferença entre x e 3. **4. IV.** g
V. A divisão da soma de x com 3 por 2. **4. V.** f
VI. A soma dos quadrados dos números x e 3. **4. VI.** b
VII. O quadrado da soma dos números x e 3. **4. VII.** d

a) $2x - 3$
b) $x^2 + 3^2$
c) $(2x)^2$
d) $(x + 3)^2$
e) $2x^2$
f) $\frac{x + 3}{2}$
g) $2(x - 3)$

Números representados por letras

Apresentar e solicitar aos estudantes uma variedade de exemplos de representação de sentenças é um bom meio de alicerçar e instrumentalizar o aprendizado em Álgebra.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 1** a **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 4**, é importante comentar com os estudantes as expressões dos **itens VI** e **VII**, que envolvem os termos: "a soma dos quadrados" e "o quadrado da soma". Apesar de muito parecidos, esses termos representam valores diferentes e não podem ser confundidos. Leia com eles o que se pede em cada caso, chamando atenção para o fato de que:

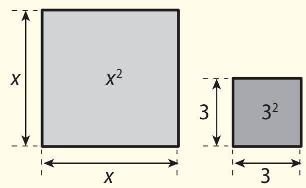
- na expressão do **item VI**, o que se pede é a soma de dois quadrados; portanto: $x^2 + 3^2$;
- na expressão do **item VII**, o que se elevará ao quadrado será uma soma; portanto: $(x + 3)^2$.

Se julgar oportuno, apresente uma representação geométrica para cada situação, convencionando que:

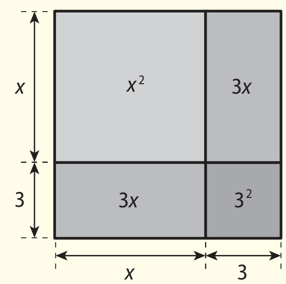
- *x* será representado por um segmento medindo *x*;
- x^2 será representado por um quadrado de área medindo x^2, ou seja, seus lados medirão *x*.

Assim, temos a seguinte representação das expressões **VI** e **VII**:

$x^2 + 3^2$



$(x + 3)^2$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

Aproveite o contexto do **exercício 5** para apresentar alguns “truques” numéricos cuja explicação pode ser compreendida pela linguagem algébrica. Por exemplo, considere a adivinhação:

> Pense em um número.
> Adicione 5.
> Multiplique por 2.
> Subtraia 10.
> Que resultado encontrou?

Para justificar o procedimento, podemos usar a linguagem algébrica:

Pense em um número: x

Adicione 5: $x + 5$

Multiplique por 2:

$2 \cdot (x + 5) = 2x + 10$

Subtraia 10:

$2x + 10 - 10 = 2x$

Assim, ao realizar os cálculos pedidos, o resultado será sempre o dobro do número pensado inicialmente; portanto, para “descobrir” o número pensado, basta dividir o resultado por 2.

Se no **exercício 6** surgir a expressão $2(y + 5)$ para o **item b**, retome a escrita do dobro de um número e explore essa representação.

As resoluções dos **exercícios 5** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

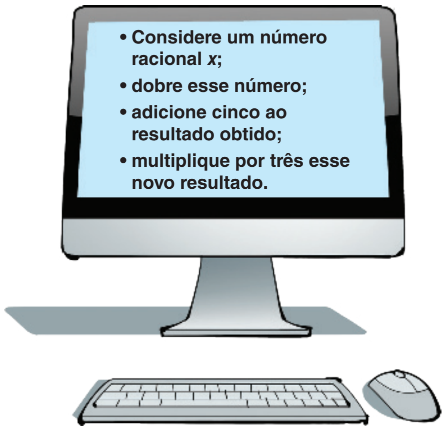
Pense mais um pouco...

Ao expressar regularidades de sequências numéricas usando simbologia algébrica, esta atividade favorece o desenvolvimento da habilidade (EF07MA15).

Nos **itens a** e **b**, espera-se que os estudantes, comparando os números de Lia com os respectivos números de Lucas, percebam que aqueles são iguais a estes adicionados de 3. Logo, a resposta ao **item a** é $x + 3$. As respostas ao **item b** são obtidas substituindo x por 25, resultando 28, e x por -3, resultando 0.

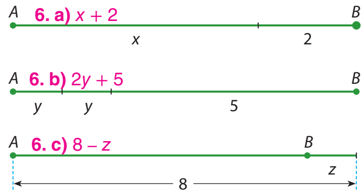
Nos **itens d** e **e**, espera-se que os estudantes, comparando os números de Lucas com os respectivos números de Lia, percebam que aqueles são iguais ao dobro destes, adicionados de 5. Logo, a resposta ao **item d** é $2x + 5$. As respostas ao **item e** são obtidas igualando $2x + 5$ a 5. Como o número que adicionado a 5 resultando 5 é 0, temos $2x = 0$; portanto, $x = 0$.

5 Indique no caderno a expressão algébrica que se obtém com este comando:
5. $(2x + 5) \cdot 3$



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

6 Nas figuras, as letras x, y e z representam medidas de diferentes segmentos. Indique, no caderno, a expressão algébrica correspondente à medida do segmento $\overline{AB}$ em cada caso.



6. a) $x + 2$
6. b) $2y + 5$
6. c) $8 - z$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

7 ***Hora de criar*** – Crie três expressões que envolvam um número x qualquer e operações matemáticas. Escreva-as no caderno em linguagem comum e também representem-as por um fluxograma. Troque de caderno com um colega para que reescrevam essas expressões em linguagem simbólica. Depois destroquem para corrigi-las. **7.** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Junte-se a um colega para resolverem este problema de sequências numéricas.

Em uma brincadeira, Lucas falava um número e Lia dizia outro, segundo uma regra criada por ela. O objetivo da brincadeira era fazer Lucas descobrir a regra inventada por Lia. Acompanhem a sequência de números que eles falaram.

Lucas	1	2	3	4	5	9	15	20
Lia	4	5	6	7	8	12	18	23

Pense mais um pouco...:

a) Descubram a regra que Lia criou e escrevam essa regra na forma de expressão algébrica. **a)** $x + 3$

b) Se Lucas falasse o número 25, que número Lia diria? E se ele falasse -3? **b)** O número 28; o número zero.

c) Que número Lucas deveria dizer para que Lia falasse o maior número possível?

Mais tarde, Lia passou a falar os números, e Lucas, segundo sua nova regra, dizia outro número. Acompanhem a nova sequência de números que eles falaram. **c) e f)** Nos itens **c** e **f**, espera-se que os estudantes percebam que não é possível Lucas ou Lia falarem o maior número, pois sempre haverá um número maior que aquele citado.

Lia	1	2	3	4	5	9	15	20
Lucas	7	9	11	13	15	23	35	45

d) Descubram a regra de Lucas e a escrevam na forma de expressão algébrica. **d)** $2x + 5$

e) Se Lia falasse o número zero, que número Lucas diria? E que número ela deveria dizer para que a resposta dele fosse o número 5? **e)** O número 5; o número zero.

f) Que número Lia deveria dizer para que Lucas falasse o maior número possível?

Aproveite a situação para sugerir aos estudantes que, em duplas, façam uma brincadeira semelhante à apresentada. Um dos estudantes inventa uma regra para aplicar a cada número que o colega enunciar. O objetivo é que o estudante que enunciar os números descubra a regra aplicada a eles e a escreva em linguagem algébrica.

Nos **itens c** e **f**, espera-se que os estudantes percebam que não é possível Lucas ou Lia falarem o maior número, pois sempre haverá um número maior. Se julgar oportuno, peça aos estudantes que, em duplas, criem as próprias regras para que o colega as descubra.

3 Valor numérico de uma expressão algébrica

Retomamos aqui a situação da abertura deste capítulo sobre a moldura de quadros.

Observe o quadro retangular cuja moldura mede x centímetros por y centímetros de lado e custa α reais por centímetro.

ANTONIO CIFRONDI - FUNDAÇÃO CARIPLO, MILÃO

CIFRONDI, A. **Euclide**. c. 1725. Óleo sobre tela, 133 × 95 cm. Fundação Cariplo, Milão, Itália.

Lembrando que a medida do perímetro de um polígono é dada pela soma das medidas de seus lados, temos:

$$x + x + y + y = 2 \cdot x + 2 \cdot y = 2x + 2y = 2 \cdot (x + y)$$

Assim, podemos calcular o preço p da moldura a partir do cálculo da medida do perímetro do quadro:

$$p = 2 \cdot (x + y) \cdot \alpha$$

Considerando que a medida da largura do quadro é 95 cm, que a medida de seu comprimento é 133 cm e supondo que cada centímetro da moldura custe R$ 2,75, vamos obter o valor numérico de p substituindo x por 95, y por 133 e α por 2,75.

$$p = 2 \cdot (95 + 133) \cdot 2{,}75 = 2 \cdot 228 \cdot 2{,}75 = 1\,254$$

Portanto, o preço da moldura desse quadro é 1 254 reais.

> Quando trocamos as letras da expressão por números e efetuamos as operações indicadas, o número obtido é chamado de **valor numérico**.

No exemplo anterior, o número 1 254 é o valor numérico da expressão $2 \cdot (x + y) \cdot \alpha$ para $x = 95$, $y = 133$ e $\alpha = 2{,}75$.

Considerando agora toda a superfície retangular do quadro e lembrando que a medida da área dessa superfície é o produto das medidas do comprimento e da largura, então a medida de sua área é dada pela expressão:

$$x \cdot y \text{ ou } xy$$

Como $x = 95$ e $y = 133$, medidas em centímetro, temos:

$$xy = 95 \cdot 133 = 12\,635$$

O valor numérico da expressão xy, para $x = 95$ e $y = 133$, é 12 635.

Portanto a medida da área do quadro é 12 635 cm^2.

3. Valor numérico de uma expressão algébrica

Habilidades da BNCC: **EF07MA13** e **EF07MA18**.

Também neste tópico, ampliamos o trabalho com as habilidades (EF07MA13) e (EF07MA18) ao retomar a ideia de variável e resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 1º grau, conceitos iniciados no ano letivo anterior.

Há quem diga que o procedimento de obtenção do valor numérico de uma expressão algébrica é a passagem da Álgebra para a Aritmética entendida como a desconstrução de um campo da Matemática para a construção de outro campo. Em termos práticos, a variável “deixa de variar” e dá lugar ao número; a generalização dá lugar à especificação.

Converse com a turma sobre esse ponto de vista. Verifique como os estudantes reagem a essa consideração.

Acrescente à discussão o fato de que a ideia de variável prevalece se entendermos que a cada novo valor da variável corresponde um novo valor da expressão. Ou seja, variando o valor atribuído à variável, o valor numérico da expressão também varia. Eis que assim podemos considerar, por fim, reconstruída a Álgebra.

Exercícios propostos

No **exercício 8**, verifique se os estudantes se lembram de que um triângulo equilátero tem lados de mesma medida. Portanto, representando a medida do lado por x, a do perímetro é $3x$.

No **exercício 9**, ao substituir os valores atribuídos às variáveis, os estudantes devem obter:

a) $3 \cdot (-6) + 5 =$
$= -18 + 5 = -13$

b) $2 \cdot (-3) + 7 \cdot \frac{1}{7} =$
$= -6 + 1 = -5$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) =$
$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$

d) $(-5)^2 - 2 \cdot (-5) \cdot 2 + 2^2 =$
$= 25 + 20 + 4 = 49$

Considerando, no **exercício 10**, que y é a medida do lado do quadrado, temos:

a) medida da área do quadrado $= y^2$;

b) medida do perímetro do quadrado $= 4y$;

c) medida da área da parte laranja $= \frac{5}{8}y^2$;

d) Para $y = 2{,}1$, temos: valor numérico da medida da área $= (2{,}1)^2 = 4{,}41$.

Para uma variação do **exercício 11**, peça aos estudantes que respondam às mesmas questões, considerando que a figura seja um cubo de lado medindo a. As respostas serão, então:

a) $4a$

b) a^2

c) $12a$

d) a^3

Para complementar o **exercício 12**, proponha aos estudantes a seguinte questão: Para que preço de venda da camiseta o lucro seria igual a zero?

Para encontrar a resposta, sugira aos estudantes que testem diferentes valores. Basta que a receita obtida com a venda das 1 000 camisetas seja igual a R$ 12 500,00:

$1000 \cdot \text{R\$ } 12{,}50 = \text{R\$ } 12\,500{,}00$

Portanto, o preço da camiseta para o qual o lucro seria igual a zero seria R$ 12,50.

Agora, acompanhe como calcular o valor numérico da expressão $p^2 + 2pq$ para $p = -2$ e $q = \frac{3}{5}$.

Substituindo na expressão a letra p por -2 e a letra q por $\frac{3}{5}$, temos:

$$p^2 + 2pq = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = 4 - \frac{12}{5} = \frac{8}{5}$$

Logo, o valor numérico da expressão $p^2 + 2pq$, para $p = -2$ e $q = \frac{3}{5}$, é $\frac{8}{5}$ ou 1,6.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

8 Sabendo que um triângulo é equilátero, determine uma expressão algébrica que indique a medida do perímetro desse triângulo. **8.** Resposta possível: $3x$

9 Calcule o valor numérico das expressões.

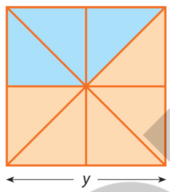
a) $3x + 5$, para $x = -6$ **9. a)** -13

b) $2a + 7b$, para $a = -3$ e $b = \frac{1}{7}$ **9. b)** -5

c) $a^2 + 3a$, para $a = -\frac{1}{2}$ **9. c)** $-\frac{5}{4}$

d) $a^2 - 2ab + b^2$, para $a = -5$ e $b = 2$ **9. d)** 49

10 Esta região quadrada está dividida em 8 partes iguais.



Determine a expressão algébrica que representa: **10. a)** y^2

a) a medida da área da região quadrada;

b) a medida do perímetro do quadrado que delimita essa região; **10. b)** $4y$

c) a medida da área da parte laranja; **10. c)** $\frac{5}{8}y^2$

d) Agora, determine o valor numérico da medida da área da região quadrada para $y = 2{,}1$. **10. d)** 4,41

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

11 Considerando o bloco retangular, determine uma expressão algébrica que represente: **11. a)** $12 + 2a$

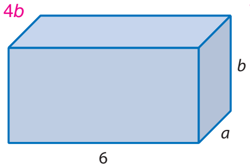
a) a medida do perímetro da face superior;

b) a medida da área da face superior; **11. b)** $6a$

c) a soma das medidas de todas as arestas;

d) a medida do volume do bloco retangular.

11. c) $24 + 4a + 4b$ **11. d)** $6ab$



12 Uma empresa de confecção assume um custo mensal fixo de R$ 10 000,00 para o pagamento de algumas despesas com funcionários e impostos, além do custo de R$ 2,50 para cada camiseta produzida.

O custo mensal para essa empresa pode ser dado pela expressão algébrica:

$$C = 10\,000 + 2{,}5x,$$

em que C é o custo mensal, em real, e x é o número de camisetas produzidas.

CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

12. a) R$ 12 500,00.

a) Determine o custo para a empresa no mês em que foram fabricadas 1 000 camisetas.

b) Se cada camiseta for vendida a R$ 20,00, a empresa terá lucro? Em caso afirmativo, de quanto? **12. b)** Sim, de R$ 7 500,00.

13 O pacote de dados de uma operadora de celular, para o acesso à internet, com direito a 2 *gigabytes*, custa R$ 24,90 por mês. Se o consumidor exceder esses 2 *gigabytes*, ele pagará R$ 5,00 por *gigabyte* excedente.

a) Escreva no caderno uma expressão algébrica que represente a situação em que o consumidor excede os 2 *gigabytes*.

b) Quanto um consumidor pagará, se usar 1 *gigabyte* em um mês? E se usar 5 *gigabytes*? **13. b)** Pagará R$ 24,90 e R$ 39,90.

14 ***Hora de criar*** – Em duplas, criem um problema cada para obter o valor numérico de expressões algébricas. Criem problemas envolvendo situações do dia a dia. Troquem os problemas criados por vocês. Depois destroquem para corrigi-los. **14.** Resposta pessoal.

13. a) $V = 24{,}90 + 5{,}00 \cdot x$, em que V é o valor da conta, e x, o número de gigabytes excedentes.

Solicite aos estudantes que tragam uma cópia de uma conta de água e peça a eles que formulem um problema similar ao **exercício 13** para um colega resolver.

No **exercício 14**, verifique as possíveis dúvidas na elaboração dos problemas.

As resoluções dos **exercícios 11** a **13** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

4 Termos algébricos

Observe as figuras.

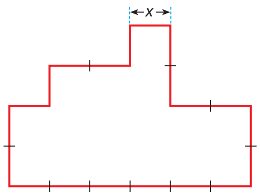


Figura 1

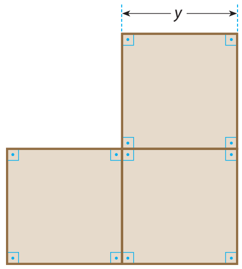


Figura 2

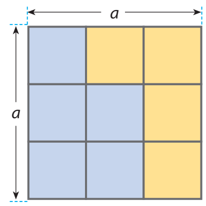


Figura 3

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Os lados da figura 1 foram divididos em segmentos de mesma medida. Considerando a medida desses segmentos igual a x, dizemos que a medida do perímetro da figura é dada por $20x$.

A figura 2 é formada por três superfícies quadradas de lados de mesma medida. Considerando a medida dos lados dessas superfícies igual a y, a medida da área da figura é dada pela expressão algébrica $3y^2$.

Como as medidas dos lados da figura 3 valem a, a medida da sua área será dada por a^2, enquanto a medida da área da região azul será dada por $\frac{5}{9}a^2$, e a medida da área da região amarela será dada por $\frac{4}{9}a^2$.

As expressões $20x$, $3y^2$, a^2, $\frac{5}{9}a^2$ e $\frac{4}{9}a^2$ são exemplos de **termos algébricos**.

Em um termo algébrico, distinguimos o **coeficiente** (parte numérica) e a **parte literal** (parte com letras). No quadro a seguir, mostramos alguns termos algébricos e destacamos, em cada um, o coeficiente e a parte literal.

Termo algébrico	Coeficiente	Parte literal
$5x$	5	x
$-m$	-1	m
$2\frac{3}{4}xy^2$	$2\frac{3}{4}$	xy^2
$2\frac{ax}{6}$	$2\frac{1}{6}$	ax

Observe que um termo algébrico tem apenas **um coeficiente** e **uma parte literal**.

Agora, considere a expressão algébrica: $2a - 5b$. Essa expressão tem dois termos algébricos: $2a$ e $-5b$. O coeficiente do primeiro termo algébrico ($2a$) é 2, e o do segundo termo algébrico ($-5b$) é -5.

Observações

- Um número racional é considerado "termo algébrico sem parte literal".
  Assim, a expressão $x^2 - 5x + 6$ tem três termos algébricos: x^2, $-5x$ e 6.
  O coeficiente de x^2 é 1, o coeficiente de $-5x$ é -5, e 6 é o termo algébrico sem parte literal.
- Note que a adição de termos algébricos resulta em uma expressão algébrica.
  Por exemplo: $x^2 + (-5x) + 6 = x^2 - 5x + 6$

4. Termos algébricos

Habilidade da BNCC: **EF07MA13**.

Neste tópico, ampliamos o trabalho com a habilidade (EF07MA13) ao retomar a ideia de variável.

Aqui começa a parte da Unidade Temática **Álgebra** em que ela se estrutura e ganha um aspecto um tanto burocrático. Para amenizar esse aspecto, às vezes menos motivador para os estudantes, e dar mais significado aos conceitos, buscamos o auxílio da Unidade Temática **Geometria** e promovemos uma integração dela com a **Álgebra**.

115

Termos semelhantes

Comente com os estudantes que, de maneira informal, podemos entender termos semelhantes como "coisas" que têm os mesmos atributos e que, portanto, podem ser adicionadas ou subtraídas. Em outras palavras, uma expressão com parcelas que representam a mesma "coisa" pode ser substituída pela soma dessas parcelas, ou seja, pode se tornar mais simples.

Novamente, a Unidade Temática **Geometria** vem em auxílio na exemplificação (obtenção da medida do perímetro de um polígono) de um conceito da Unidade Temática **Álgebra**.

Termos semelhantes

Observe as figuras a seguir.

A medida do segmento da figura 1 é dada por $3x$.

A medida do perímetro do pentágono da figura 2 é dada por $5x$.

Figura 1

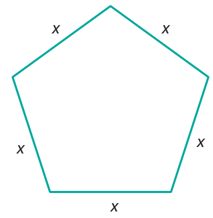


Figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Os termos algébricos $3x$ e $5x$ têm a mesma parte literal (x); dizemos, então, que eles são **termos semelhantes**.

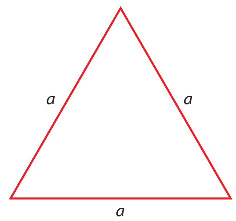
Acompanhe outros exemplos.

a) $-2ax$ e $8ax$ são termos semelhantes, porque têm a mesma parte literal (ax).

b) $5ax^2$ e $2a^2x$ não são termos semelhantes, porque as partes literais são diferentes ($ax^2 \neq a^2x$), embora as variáveis, a e x, sejam as mesmas.

Simplificação de expressões algébricas

O triângulo da figura é equilátero, isto é, todos os lados têm mesma medida, que indicamos pela letra a.



Então, a medida do perímetro desse triângulo é dada por: $a + a + a$.

Como esse triângulo é equilátero, a medida do seu perímetro é o triplo da medida do lado, ou seja, a medida do perímetro também é dada por: $3a$.

É possível simplificar a expressão $a + a + a$ escrevendo $3a$. Assim, reduzimos a expressão a único termo.

Acompanhe outros exemplos.

a) Vamos simplificar a expressão algébrica $2 \cdot (x + 6) + x$.

Para isso, vamos usar a propriedade distributiva da multiplicação:

$$2 \cdot (x + 6) + x = 2 \cdot x + 2 \cdot 6 + x = 2x + 12 + x = 3x + 12$$

Adicionamos os termos semelhantes.

b) Vamos simplificar a expressão $\dfrac{15x + 9}{3} + x + 4$.

$$\frac{15x + 9}{3} + x + 4 = \frac{15x}{3} + \frac{9}{3} + x + 4 = 5x + 3 + x + 4 = 6x + 7$$

Separamos em duas frações.

Adicionamos os termos semelhantes.

Assim, reduzimos os termos semelhantes com a mesma parte literal x a $6x$; reduzimos os termos semelhantes sem parte literal a 7.

Na prática, para **reduzir termos semelhantes** a um único termo, adicionamos algebricamente os coeficientes e conservamos a parte literal.

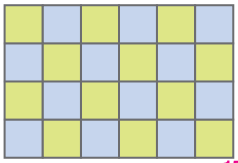
20. a) 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12. Sequência dos números naturais pares.
20. b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Sequência dos números naturais ímpares.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

19. a) Janeiro: p; fevereiro: $2p$; março: p; abril: $2p$; maio: $3p$; junho: $3p$.

15 Nesta figura, a medida da área de cada região quadrada é representada por $25x^2$.



15. b) $300x^2$

a) Determine o termo algébrico que representa a medida da área da figura toda. **15. a)** $600x^2$
b) Indique o termo algébrico que representa a medida da área da parte pintada de verde.
c) Os dois termos obtidos são semelhantes? Justifique sua resposta.
d) Calcule o valor numérico de $25x^2$ para $x = 1,2$. **15. d)** 36 **15. c)** Sim, pois eles têm a mesma parte literal.

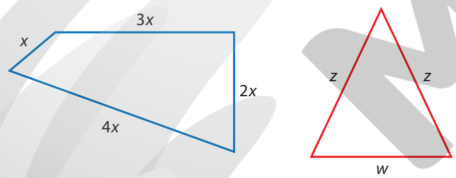
16 Reduza os termos semelhantes das expressões algébricas a seguir.

a) $-4x + 6y + 10x - 2y - x$ **16. a)** $5x + 4y$
b) $x + 7x + 10y - 3x$ **16. b)** $5x + 10y$
c) $2x - 8y - 6y - y - 9x$ **16. c)** $-7x - 15y$
d) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y - \frac{1}{3}x + 2y$ **16. d)** $\frac{7}{6}x + \frac{9}{4}y$

17 Simplifique as expressões algébricas.

a) $4(x - 1) + 3(x + 1)$ **17. a)** $7x - 1$
b) $-2(2x - 4) + 5(-2x - 10)$ **17. b)** $-14x - 42$
c) $\frac{2}{5}(x - 0,2) - \frac{1}{2}\left(3x - \frac{4}{25}\right)$ **17. c)** $-\frac{11}{10}x$

18 Considere os polígonos a seguir e responda às questões.



a) Determine a expressão algébrica que representa a medida do perímetro de cada polígono. **18. a)** $10x$; $2z + w$
b) Se $x = 3,2$ cm, qual é a medida do perímetro do quadrilátero? **18. b)** 32 cm
c) Se $z = 6$ cm e $w = 5$ cm, qual é a medida do perímetro do triângulo? **18. c)** 17 cm

19 No 1º semestre de 2021, os negócios de Alex tiveram o seguinte resultado: o lucro de fevereiro foi o dobro do lucro de janeiro; o lucro de março foi igual ao de janeiro; o de abril, igual ao de fevereiro; o de maio, o triplo do de janeiro; e o de junho, igual às quantias de janeiro e fevereiro juntas. Chamando de p o lucro do mês de janeiro, dê a expressão algébrica que indica:

a) o lucro de cada mês.
b) o lucro de todo o semestre. **19. b)** $12p$

20 Atribua à letra n os números naturais de 0 a 6. Depois, imaginando que se possa continuar atribuindo infinitamente os números naturais a n, considerando as duas expressões algébricas a seguir, quais regularidades numéricas são encontradas? Nomeie essas sequências numéricas.

a) $2n$
b) $2n + 1$

21 Considere a sequência de termos algébricos: $a, a, 2a, 3a, 5a, 8a, 13a, 21a, 34a, ...$ Junte-se a um colega e, fazendo o que se pede, descubram regularidades nas sequências numéricas.

a) Adicionem dois termos consecutivos quaisquer dessa sequência e comparem com o termo seguinte. O que acontece?
b) Adicionem a à soma dos quatro primeiros termos da sequência. O resultado é igual a algum outro termo da sequência? Em caso afirmativo, qual?
c) Adicionem a à soma, a partir do primeiro termo da sequência, de quantos termos quiserem dessa sequência. O resultado é igual a algum termo dessa sequência? Em caso afirmativo, qual?
d) Atribuindo 1 à letra a dessa sequência, temos a sequência de Fibonacci. Escreva os dez primeiros números da sequência de Fibonacci.

21. a) A soma é igual ao termo seguinte. **21. b)** Sim; igual ao 6º termo, $8a$. **21. c)** Sim; igual ao consecutivo do consecutivo da última parcela da adição dos termos da sequência. **21. d)** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

117

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

No **exercício 15**, assim como em exemplos teóricos e em outras atividades, recorremos a mais de uma linguagem: à linguagem textual, à linguagem imagética e à linguagem algébrica. Oriente os estudantes a fazer as necessárias transcrições. Nos **itens a** e **b**, deve-se ler a quantidade de regiões quadradas menores para o cálculo dos produtos:

$24 \cdot (25x^2) = 600x^2$

$12 \cdot (25x^2) = 300x^2$

Para responder ao **item c**, basta observar que os quadrados são congruentes e, portanto, as respectivas representações algébricas são termos semelhantes.

Para o **item d**, basta substituir a variável x pelo valor atribuído a ela: $25 \cdot (1,2)^2 = 36$

As resoluções dos **exercícios 16** a **21** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Expressões algébricas são bons representantes de elementos de sequências numéricas. Podemos explorá-las de maneira direta, atribuindo valores (números inteiros que mantêm uma regularidade) às suas variáveis. É o que temos, por exemplo, no **exercício 20**.

Como atividade lúdica, elabore uma expressão secreta com uma só variável. A cada número que os estudantes atribuírem a essa variável, dê o valor numérico da expressão. Após determinada quantidade previamente combinada de atribuições, os estudantes tentam "adivinhar" a expressão que foi usada.

O **exercício 21** pode ser bastante explorado, pois as sequências recursivas que ele sugere apresentam regularidades numéricas interessantes. Aproveite para conversar sobre Fibonacci (Leonardo de Pisa) e o seu papel histórico no desenvolvimento da Matemática com o famoso livro *Liber abaci*.

Sugestão de leitura

Para enriquecer o estudo de sequências numéricas, sugerimos o artigo:

MASSENO, T. C. S.; PEREIRA, A. C. C. O ensino de sequências numéricas por meio dos números triangulares utilizando a História da Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, *[S. l.]*, v. 7, n. 19, p. 103 -115, 2020. Disponível em: https://revistas.uece.br/index.php/BOCEHM/article/view/2979. Acesso em: 21 jun. 2022.

Esse estudo apresenta uma proposta de atividades didáticas envolvendo o conteúdo de sequências numéricas por meio dos números triangulares, partindo do estudo documental de pesquisas já realizadas sobre o tema.

5. Sentenças matemáticas e equações

Habilidades da BNCC: **EF07MA13** e **EF07MA18**.

Ao retomar a ideia de variável para expressar a relação entre duas grandezas, diferenciando-a de incógnita, e resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 1º grau, ampliamos, neste tópico, o trabalho com as habilidades (EF07MA13) e (EF07MA18).

Para as pessoas se comunicarem, são usadas diversas linguagens: faladas, escritas, desenhadas etc. Comente com os estudantes que uma dessas linguagens é constituída por sentenças matemáticas. Os elementos dessa linguagem são números, letras (variáveis ou incógnitas), operações, igualdades e desigualdades.

Este é um momento para muitas trocas de mensagens, das sentenças matemáticas para a língua materna, e vice-versa.

Sugestão de leitura

Como subsídio, sugerimos a leitura do livro:

MACHADO, Nílson José. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 2001.

5 Sentenças matemáticas e equações

Sentença é um conjunto de palavras com sentido completo. Algumas são consideradas ditados populares, por exemplo:

a) De poeta e de louco, todo mundo tem um pouco.

b) Mais difícil que encontrar uma agulha no palheiro é encontrar duas.

Quando uma sentença envolve números, ela é chamada **sentença matemática**. Observe alguns exemplos.

a) Cinco mais três é igual a oito.

b) Dois é menor que vinte.

c) Sete é diferente de nove.

d) Doze é o dobro de seis.

e) Dez é maior ou igual a dez terços.

Podemos escrever as sentenças matemáticas por extenso, como vimos anteriormente, ou na linguagem simbólica da Matemática. Observe.

a) $5 + 3 = 8$

b) $2 < 20$

c) $7 \neq 9$

d) $12 = 2 \cdot 6$

e) $10 \geqslant \frac{10}{3}$

As sentenças matemáticas podem ser classificadas como **verdadeiras** ou **falsas**.

Verificamos facilmente que as sentenças $5 + 7 = 12$ e $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$ são verdadeiras, enquanto as sentenças $4 + 5 < 2$ e $7 - 2 = 4$ são falsas.

A sentença $10 \geqslant \frac{10}{3}$ é classificada como verdadeira, porque dez é maior **ou** igual a dez terços, e a conjunção **ou** liga duas afirmações:

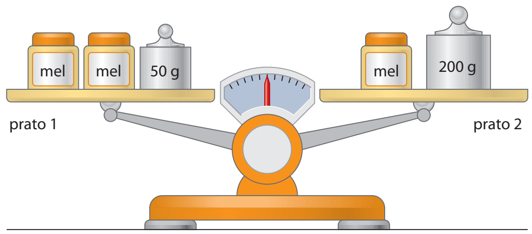
- dez é maior que dez terços (verdadeira);
- dez é igual a dez terços (falsa).

Pelo fato de **ou** ser uma conjunção alternativa, basta uma dessas afirmações ser verdadeira para que a sentença também o seja.

Equações

Observe esta balança de dois pratos.

Perceba que ela está em equilíbrio e com os pratos na mesma altura, ou seja, a medida da massa total dos objetos colocados no prato 1 é igual à medida da massa total dos objetos colocados no prato 2.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Representando por x a medida da massa, em grama, de cada pote de mel, podemos escrever:

$$x + x + 50 = x + 200$$

Essa sentença matemática é expressa por uma **igualdade** e apresenta um elemento desconhecido. Ela é um exemplo de **equação**.

> **Equação** é toda sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta letras representando números desconhecidos.

Observe outros exemplos de equação.

a) $7x + \frac{5}{2} = 4$ **b)** $2y^2 - 3y + 7 = 0$ **c)** $2x + 3y = 8$

A expressão à esquerda do sinal de igual chama-se **primeiro membro** da equação, e a expressão à direita do sinal de igual, **segundo membro** da equação.

Acompanhe mais exemplos.

a) $2y - 4 = 6$, em que $2y - 4$ é o primeiro membro e 6 é o segundo membro.

b) $2z^2 + 4 = z - 6$, em que $2z^2 + 4$ é o primeiro membro e $z - 6$ é o segundo membro.

c) $a + 1 = \frac{b}{3}$, em que $a + 1$ é o primeiro membro e $\frac{b}{3}$ é o segundo membro.

Em uma equação, os elementos desconhecidos (letras que representam números) cujos valores devem ser determinados são chamados de **incógnitas**.

Nos exemplos anteriores, podemos destacar que:

- na equação $2y - 4 = 6$, a incógnita é y;
- na equação $2z^2 + 4 = z - 6$, a incógnita é z;
- na equação $a + 1 = \frac{b}{3}$, as incógnitas são a e b.

Observação

- Nem toda igualdade é uma equação. Por exemplo, $3 + 5 = 8$ não é uma equação, porque não tem elemento desconhecido.

24. 1º membro: $4y^2 - 5y + 3$; 2º membro: 0. Resposta possível: Não, pois uma igualdade sempre vale nos dois sentidos em que é lida.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22 Entre as sentenças a seguir, copie no caderno somente as equações. **22.** Equações em **a**, **b**, **f**.

a) $3x - 9 = x + 6$

b) $2y - 9 = 21$

c) $5 + 7 = 12$

d) $3x - 1 < 8$

e) $9^2 - 7^2 = 32$

f) $9y^2 - 7y = 0$

23 Escreva a equação que tem por primeiro membro a expressão $x^2 - 2x$ e por segundo membro, $3x - 6$. **23.** $x^2 - 2x = 3x - 6$

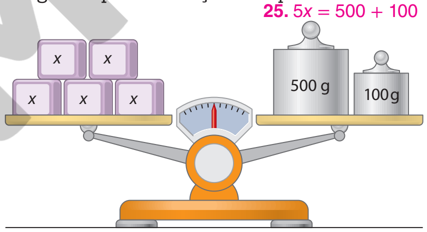
a) Na equação escrita, substitua x por 2 e calcule o valor numérico de cada membro. Faça o mesmo substituindo x por 3. O que aconteceu de comum nos dois casos?

b) Acontece o mesmo se você substituir x por 4?

23. a) O valor numérico do 1º membro é igual ao do 2º membro.

24 Na equação $4y^2 - 5y + 3 = 0$, identifique o primeiro e o segundo membros. Se você trocar de lugar os membros dessa equação, ela tem seu significado alterado? Justifique sua resposta.

25 Indicando a medida da massa, em grama, de cada cubo por x, determine a equação sugerida pela balança em equilíbrio. **25.** $5x = 500 + 100$



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

23. b) Não acontece o mesmo ao substituir x por 4.

Equações

Equação é um dos conceitos matemáticos de maior aplicação na resolução de problemas, tanto que, no senso comum, "equacionar o problema" é uma frase que se confunde com a própria resolução do problema.

Uma das alegorias que melhor retrata o conceito de equação é a da balança de dois pratos, cujo emprego tornamos recorrente, na qual cada prato representa um de seus membros e a igualdade da altura de seus pratos, em situação de equilíbrio, espelha a relação de igualdade. Sempre que julgar necessário, use dessa interpretação simbiótica.

Essa analogia, que comunica de imediato tal conceito, também será empregada no caso da desigualdade (inequação), em que consideramos os pratos em alturas diferentes, sendo o conteúdo de maior valor o que está no prato mais baixo.

Neste momento, é de vital importância para o prosseguimento do estudo da Álgebra diferenciar as ideias de variável e de incógnita.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 22** a **25** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

O **exercício 23** propõe uma reflexão antecipada da ideia de raiz de uma equação. Trabalhe questões semelhantes a essa.

O **exercício 24** tem por objetivo levar os estudantes a perceber a propriedade simétrica da igualdade, sem que se exija deles qualquer domínio de nomenclatura formal matemática.

Após a resolução do **exercício 25**, solicite aos estudantes que reflitam sobre a seguinte questão aritmética: Qual é o número que multiplicado por 5 resulta 600?

Raiz de uma equação

Novamente, fazemos uso do simbolismo da balança de dois pratos para explicar a solução de uma equação e definir sua raiz.

Observe aos estudantes que, além da igualdade das alturas dos dois pratos, consideramos que eles estejam em equilíbrio, ou seja, não se trata de uma situação instantânea, mas definitiva.

Nesta página, temos mais exemplos do procedimento de verificação de raiz de uma equação, agora substituindo o número a ser checado diretamente na sentença matemática.

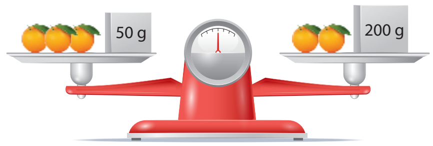
Comente com os estudantes que, para os matemáticos, a Matemática tem o próprio caminho para evoluir, independentemente de qualquer contexto. No entanto, para a humanidade, é necessário que ela possa ser aplicada nas diversas situações-problema. Por isso, o conceito de conjunto universo da equação deve ser enfatizado e associado ao contexto no qual a equação é empregada.

Outro aspecto a ser proposto para que os estudantes reflitam é o fato de que, embora a inter-relação de circunstâncias que acompanham uma situação real, como a do exemplo das laranjas, seja levada em conta, abstraímos a possibilidade de as laranjas terem massas diferentes.

Raiz de uma equação

Observe outra balança em equilíbrio e com os pratos nivelados.

No prato da esquerda, há 3 laranjas e um bloco de 50 g. No prato da direita, temos 2 laranjas e um bloco de 200 g. Vamos descobrir qual é a medida da massa de cada laranja.

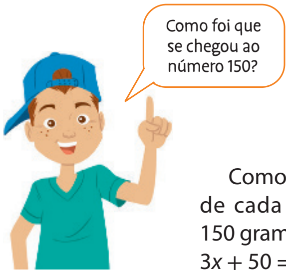


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando cada laranja com x gramas, podemos representar essa situação pela equação:

$$3x + 50 = 2x + 200$$

O valor de x que torna a igualdade verdadeira é 150. Substituindo x por 150, temos:

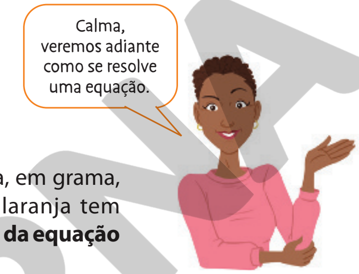


$3x + 50 = 2x + 200$

$3 \cdot \mathbf{150} + 50 = 2 \cdot \mathbf{150} + 200$

$450 + 50 = 300 + 200$

$500 = 500$ (verdadeira)



ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Como x representa a medida da massa, em grama, de cada laranja, concluímos que cada laranja tem 150 gramas. O valor **150** é chamado de **raiz da equação** $3x + 50 = 2x + 200$.

Um número é denominado **raiz de uma equação** quando, ao substituir a incógnita por ele, obtemos uma sentença verdadeira.

Esse procedimento de substituição da incógnita por um número serve para verificar se esse número é ou não raiz da equação.

Analise estes exemplos.

a) Para verificar se o número 5 é raiz da equação $x + 2 = 7$, substituímos x por 5. Assim, temos:

$\mathbf{5} + 2 = 7$

$7 = 7$ (verdadeira)

Logo, 5 é a raiz da equação $x + 2 = 7$.

b) Para verificar se o número -3 é raiz da equação $2y + 15 = y + 12$, substituímos y por -3. Dessa forma, obtemos:

$2 \cdot (\mathbf{-3}) + 15 = \mathbf{-3} + 12$

$-6 + 15 = 9$

$9 = 9$ (verdadeira)

Logo, -3 é a raiz da equação $2y + 15 = y + 12$.

c) Para verificar se o número 4 é raiz da equação $3z + 2 = 5$, substituímos z por 4. Assim, temos:

$3 \cdot \mathbf{4} + 2 = 5$

$12 + 2 = 5$

$14 = 5$ (falsa)

Logo, 4 não é a raiz da equação $3z + 2 = 5$.

Conjunto universo e solução de uma equação

Para conseguir resolver uma equação, precisamos saber quais são os valores que a incógnita pode assumir e quais são os valores que tornam a sentença verdadeira.

Vamos analisar as sentenças a seguir.

1ª) "Um **número natural par** elevado ao quadrado e adicionado a 5 é igual a 21."

Escrevendo essa sentença na linguagem simbólica da Matemática, temos a equação:

$$x^2 + 5 = 21$$

Como x representa um **número natural par**, ele pode assumir qualquer valor do conjunto {0, 2, 4, 6, ...}. Esse conjunto pode ser chamado de **conjunto universo** da equação dada.

> **Conjunto universo** é aquele formado por todos os valores que a incógnita pode assumir.

Geralmente, o conjunto universo é representado pela letra U.

Vamos verificar se os números –4 e 4 tornam a equação $x^2 + 5 = 21$ verdadeira.

- Para $x = -4$, temos:

  $(-4)^2 + 5 = 21$

  $16 + 5 = 21$ (verdadeira)

- Para $x = 4$, temos:

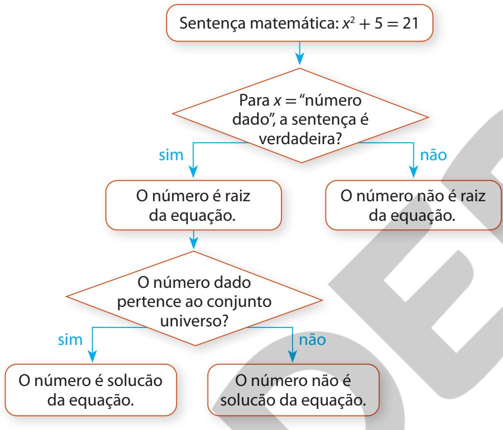
  $4^2 + 5 = 21$

  $16 + 5 = 21$ (verdadeira)

Portanto, os números –4 e 4 são as raízes da equação. Note que –4 não é um número natural; então, ele não está no conjunto universo {0, 2, 4, 6, ...}. Logo, –4 não é solução da equação.

A solução da equação $x^2 + 5 = 21$ no conjunto universo dado (números naturais pares) é 4.

Fluxograma: verificar se um número dado é solução da equação $x^2 + 5 = 21$ no conjunto universo {0, 2, 4, 6, ...}



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

2ª) "Um **número inteiro par** elevado ao quadrado e adicionado a 5 é igual a 21."

Nessa sentença, ampliamos o conjunto universo da sentença anterior, considerando, agora, que o número seja inteiro e par.

A equação correspondente é $x^2 + 5 = 21$, e o conjunto universo é:

$$U = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$$

Sabemos que as raízes dessa equação são –4 e 4. Como ambas pertencem ao conjunto universo, a solução é –4 e 4.

3ª) "Um **número natural ímpar** elevado ao quadrado e adicionado a 5 é igual a 21."

A equação correspondente é $x^2 + 5 = 21$, e o conjunto universo é $U = \{1, 3, 5, 7, ...\}$. As raízes dessa equação são –4 e 4. Como nenhuma delas está no conjunto universo (números naturais ímpares), dizemos que essa equação não tem solução no conjunto universo dado.

> **Soluções de uma equação** são os valores do conjunto universo que tornam a sentença verdadeira.

Orientações: Lembre aos estudantes que raiz da equação e solução da equação não são a mesma coisa. A raiz da equação é todo número que, ao substituir a incógnita, torna a sentença verdadeira. A solução da equação, além de ser uma raiz, deve pertencer ao conjunto universo considerado.

Conjunto universo e solução de uma equação

Por meio dos exemplos, espera-se que os estudantes comparem as definições de raiz da equação e de solução da equação e percebam que a raiz pode não pertencer ao conjunto universo, enquanto a solução sempre pertence ao conjunto universo.

Logo, assim como variável e incógnita são conceitos distintos, raiz da equação e solução da equação não são a mesma coisa. Uma equação pode ter até mais de uma raiz sem ter uma solução sequer.

Observe aos estudantes que, nos problemas em que se faz o uso de equação, o contexto da situação determina o conjunto universo dela. Assim, por exemplo, voltando ao caso das laranjas na balança de dois pratos da página anterior, não cabe considerar valores negativos ou zero para a medida da massa delas. Portanto, o conjunto universo a ser considerado para esse contexto deve ser o conjunto dos números racionais positivos.

O fluxograma sintetiza o procedimento da verificação da solução de uma equação, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA07). Solicite a elaboração de cartazes a serem fixados na sala de aula, por trios de estudantes, com o fluxograma, semelhante ao apresentado, relativo a uma equação criada por eles e com o conjunto universo definido.

Exercícios propostos

Espera-se que o modo de resolução do **exercício 26** seja por testagem dos números dados (–5, 3 e 5), substituindo-os um a um no lugar da incógnita e verificando a veracidade da expressão numérica obtida, uma vez que o procedimento de resolução de equação do primeiro grau só será objeto de estudo no tópico seguinte. No entanto, avalie a conveniência de sugerir aos estudantes que traduzam a sentença matemática para a alegoria da balança de dois pratos e tentem obter a solução retirando um “peso *y*” de cada prato. Depois, proponha-lhes que retirem “8 kg” de cada prato e, por fim, considerem a terça parte do que restou em cada prato.

As resoluções dos **exercícios 26** e **28** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

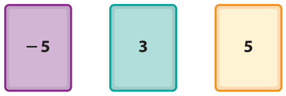
No **exercício 29**, os estudantes devem perceber que basta criar uma expressão numérica que tenha uma ou mais operações com esse número dado, calcular o valor numérico dessa expressão e, depois, substituir o número dado por uma letra, que fará o papel de incógnita.

Pergunte aos estudantes se, para determinado número dado como raiz, todos chegaram à mesma equação. Provavelmente, a resposta será negativa. Explore esse fato comentando que diferentes equações, representando diferentes contextos, podem ter raízes iguais e até soluções numericamente iguais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

26 Em uma das fichas está impresso o número que é a raiz da equação $4y + 8 = y + 17$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORAA

Que número é esse? **26.** O número é 3.

27 Verifique, no caderno, se 2 é raiz das equações:

a) $x^2 = 4$ **27. a)** Sim.
b) $-2x = 4$ **27. b)** Não.
c) $2^x = 4$ **27. c)** Sim.
d) $x - 2 = 4$ **27. d)** Não.
e) $-x^2 + 2 = x$ **27. e)** Não.

28 Determine o conjunto universo e a solução da equação correspondente a cada sentença.

a) *y* é um natural par que, dividido por 2, resulta em 3. **28. a)** $U = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$; $y = 6$
b) *a* é um número inteiro cujo módulo é 3. **28. b)** $U = \mathbb{Z}$; $a = -3$ ou $a = 3$
c) *x* é um número natural que, dividido por –2, resulta em 3. **28. c)** $U = \mathbb{N}$; A equação não tem solução em $\mathbb{N}$.

29 ***Hora de criar*** – Em duplas, cada um de vocês vai criar uma equação que tenha como raiz o número: **29.** Respostas pessoais.

a) 8; b) –8; c) –0,8; d) 0.

Depois, troquem as equações e as resolvam no caderno. Destroquem para corrigi-las. As equações criadas por vocês foram iguais? Os resultados obtidos foram os mesmos?

6 Equações do 1º grau com uma incógnita

Considere estas equações como exemplos.

a) $2x + 7 = 5$

b) $3x + 2 = x - 3$

c) $5x^2 - 8x + 7 = 0$

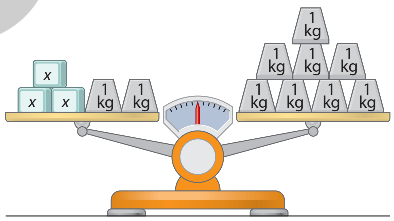
d) $x + y = 0$

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Apenas as duas primeiras equações têm uma só incógnita (letra *x*) com expoente 1 e são exemplos de **equações do 1º grau com uma incógnita**.

Equações equivalentes

A balança a seguir está em equilíbrio, com os pratos nivelados. No prato da esquerda, há 3 pacotes, cada um de *x* quilogramas, e 2 blocos de 1 quilograma. No prato da direita, há 8 blocos de 1 quilograma.



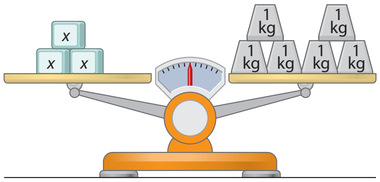
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Podemos representar essa situação pela equação

$$3x + 2 = 8.$$

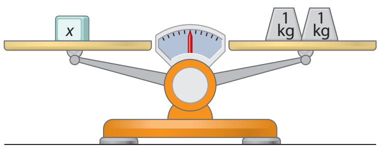
122

Retirando dois blocos de 1 kg de cada prato, a balança continua com os pratos nivelados, e a situação passa a ser esta:



$$3x + 2 = 8$$
$$-2 \quad 3x + 2 - 2 = 8 - 2 \quad -2$$
$$3x = 6$$

Deixando em cada prato a terça parte do que ele contém, a balança continua com os pratos nivelados. Passamos a ter a seguinte situação:



$$3x = 6$$
$$:3 \quad \frac{3x}{3} = \frac{6}{3} \quad :3$$
$$x = 2$$

Verificamos que o número 2 é solução das equações $3x + 2 = 8$, $3x = 6$ e $x = 2$.

$3x + 2 = 8$	$3x = 6$	$x = 2$
$3 \cdot 2 + 2 = 8$ (verdadeira)	$3 \cdot 2 = 6$ (verdadeira)	$2 = 2$ (verdadeira)

Como 2 é a solução das três equações, dizemos que elas são equações equivalentes.

Quando duas ou mais equações do 1º grau têm a mesma solução, em um mesmo conjunto universo, são chamadas **equações equivalentes**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

30 Verifique, em cada caso, se as equações são equivalentes ou não.

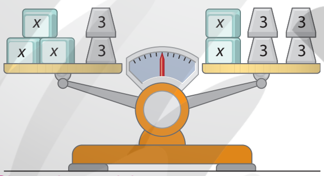
a) $x - 8 = 6$ e $x = 14$ **30. a)** Sim.

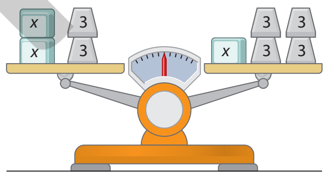
b) $2y - 1 = y$, $3y = -6$ e $y + 2 = 5$ **30. b)** Não.

c) $4z + 1 = z + 7$, $3z = 6$ e $z = 2$ **30. c)** Sim.

d) $2a + a = 12$, $2a = 6$ e $a = 3$ **30. d)** Não.

31 Observe as balanças a seguir, em que os blocos têm uma mesma unidade de medida.





31. a) Sim, pois nos dois casos encontramos a equação equivalente $x = 6$.

a) O valor de x é o mesmo nas duas balanças? Justifique sua resposta.

b) Encontre, para cada situação, a equação que a representa. Essas equações são equivalentes?

31. b) $3x + 6 = 2x + 12$; $2x + 6 = x + 12$. Sim.

6. Equações do 1º grau com uma incógnita

Habilidades da BNCC: **EF07MA13** e **EF07MA18**.

Trabalhamos, neste tópico, com as habilidades (EF07MA13) e (EF07MA18), na medida em que se fazem presentes a ideia de incógnita, diferenciando-a de variável, que expressa a relação entre duas grandezas, e a resolução e a elaboração de problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 1º grau.

Apoiados pela ilustração da balança de dois pratos com blocos desconhecidos e com blocos conhecidos, introduzimos a aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo para caracterizar duas ou mais equações equivalentes.

Entender o que são duas equações equivalentes é fundamental para os estudantes assimilarem os procedimentos de resolução de uma equação, ou seja, de determinação de suas raízes e, se houver no conjunto universo, soluções. Para isso, novamente o emprego da balança de dois pratos contribui, tornando concreto e palpável algo que em si é abstrato.

Exercícios propostos

No **exercício 30**, peça aos estudantes que verifiquem a igualdade resolvendo a equação em cada caso e observando se chegam ao mesmo valor da incógnita. Amplie a atividade solicitando aos estudantes que modifiquem uma ou mais equações de cada item para que se tornem equivalentes.

Por exemplo, no **item b**, uma modificação possível seria:

$2y - 1 = y$, $3y = 3$,
$y + 4 = 5$

Para a resolução do **exercício 31**, pergunte aos estudantes: Que alteração foi feita na balança 1 para que a situação chegasse à da balança 2? Espera-se que eles percebam que foi retirado x de ambos os lados da balança.

As resoluções dos exercícios **30** e **31** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

7. Resolução de equações

Habilidades da BNCC:
EF07MA05, **EF07MA06**, **EF07MA17** e **EF07MA18**.

Neste tópico, ampliamos a possibilidade de os estudantes adquirirem as habilidades (EF07MA05) e (EF07MA18), na medida em que eles devem resolver o mesmo problema por meio de diferentes algoritmos e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 1º grau.

Do mesmo modo, os estudantes compreenderão o processo de resolução de problemas com equações do 1º grau, que são problemas com a mesma estrutura e podem ser resolvidos com os mesmos procedimentos. Deste modo, contribui-se para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA06).

Tratamos aqui de dois conceitos muito importantes: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo.

É importante que os estudantes compreendam o significado de cada passo do processo de resolução de equações do 1º grau com uma incógnita para que não seja apenas uma sequência mecânica de regras.

Proponha aos estudantes uma discussão sobre outras formas de resolução para compararem com o método aprendido. Uma possibilidade de resolução é por tentativas sucessivas registradas em uma tabela. Observe na resolução da equação $3x - 2 = -x + 6$:

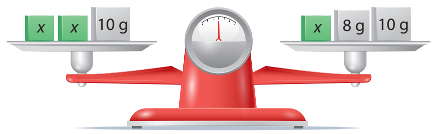
x	$3x - 2$	$-x + 6$	Diferença entre os membros
3	$3 \cdot 3 - 2 = 7$	$-3 + 6 = 3$	$7 - 3 = 4$
4	$3 \cdot 4 - 2 = 10$	$-4 + 6 = 2$	$10 - 2 = 8$
2	$3 \cdot 2 - 2 = 4$	$-2 + 6 = 4$	0

Como ambos os membros são iguais, a raiz da equação é 2.

Esse método pode ser apresentado para desenvolver habilidades de cálculo mental e de raciocínio proporcional, pois, a cada tentativa, os estudantes podem observar a correspondência entre a variação no valor de x e a variação da diferença entre os membros da equação.

7 Resolução de equações

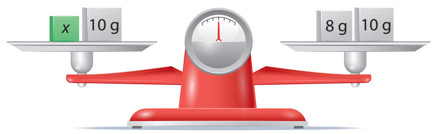
Na situação a seguir, vamos descobrir a medida da massa do cubo indicada pela letra x.



A balança está com os pratos nivelados. A equação correspondente é:

$$2x + 10 = x + 8 + 10$$

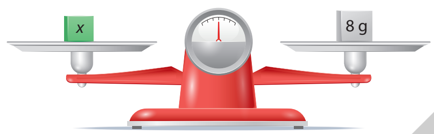
Vamos retirar um cubo de x gramas de cada prato.



A balança continua com os pratos nivelados. A equação correspondente é:

$$x + 10 = 8 + 10$$

Agora, vamos retirar um bloco de 10 g de cada prato.



Nessa situação, a balança continua com os pratos nivelados. A equação correspondente é:

$$x = 8$$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

As equações obtidas em cada passo são equivalentes. Assim, a medida da massa de cada cubo é igual a 8 gramas.

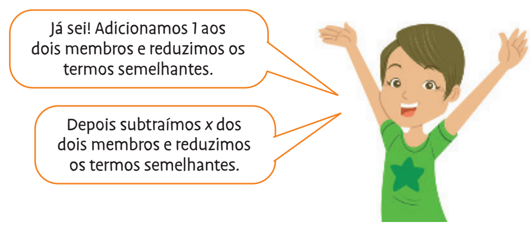
A resolução de equações do 1º grau com uma incógnita é feita transformando-se cada equação em uma equação equivalente e mais simples, até que as soluções, elementos do conjunto universo, sejam obtidas.

Na resolução de equações, aplicaremos as propriedades que veremos a seguir.

Adicionando ou **subtraindo** um mesmo número aos dois membros de uma equação, obtemos uma equação equivalente à primeira.

Como exemplo, vamos resolver a equação $2x - 1 = x + 5$, cujo conjunto universo é $\mathbb{N}$.

$$2x - 1 = x + 5$$
$$2x - 1 + 1 = x + 5 + 1$$
$$2x = x + 6$$
$$2x - x = x + 6 - x$$
$$x = 6$$



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

No exemplo anterior, ao aumentar x em uma unidade (de 3 para 4), a diferença aumentou em quatro unidades (de 4 para 8). Como queremos diferença igual a zero, reduzimos x uma unidade (de 3 para 2) para que a diferença diminua em quatro unidades (de 4 para zero).

Verificando:

$$2 \cdot 6 - 1 = 6 + 5$$
$$12 - 1 = 11$$
$$11 = 11 \text{ (verdadeira)}$$

Portanto, a solução da equação é 6.

> **Multiplicando** ou **dividindo** os dois membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtemos uma equação equivalente à equação dada.

Como exemplo, vamos resolver a equação $5x = 20$, cujo conjunto universo é $\mathbb{N}$, utilizando a propriedade anterior.

$$5x = 20$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{20}{5}$$
$$x = 4$$

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Verificando:

$$5 \cdot 4 = 20$$
$$20 = 20 \text{ (verdadeira)}$$

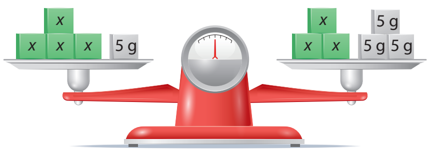
Portanto, a solução da equação é 4.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

33. a) $y = -6$ **33. b)** $x = 27$ **33. c)** $y = -9$

32 O esquema a seguir mostra uma balança com os pratos nivelados.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a) Determine a equação que representa essa situação. **32. a)** $4x + 5 = 3x + 15$

b) Determine a equação que representa a situação quando se retiram de cada prato 3 cubos $\boxed{x}$ e 1 bloco de $\boxed{5\text{ g}}$. **32. b)** $x = 10$

c) Qual é a medida da massa de cada cubo? **32. c)** 10 g

33 Determine as raízes das equações aplicando as propriedades estudadas.

a) $y + 9 = 3$

b) $x - 12 = 15$

c) $y + 5 = -4$

d) $3x = -12$ **33. d)** $x = -4$

e) $3x = 10$ **33. e)** $x = \frac{10}{3}$

f) $5x = 90$ **33. f)** $x = 18$

34 Das equações da atividade anterior, se considerarmos como conjunto universo o conjunto dos números inteiros, todas as equações terão soluções?

E se considerarmos como conjunto universo o conjunto dos números naturais? Justifique suas respostas.

35 A raiz da equação $2x + 1 + 5(x - 3) = 3(x + 1) + x$ é um número:

a) menor que -2.

b) maior que 30.

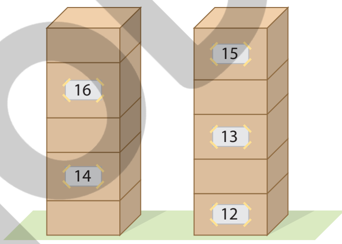
c) inteiro.

d) racional não inteiro.

e) negativo.

35. Alternativa **d.**

36 Com as 10 caixas que tenho, fiz duas pilhas de mesma altura, conforme mostra o desenho.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que, em algumas caixas, coloquei um adesivo com um número que representa a medida da sua altura em centímetro. As que estão sem adesivo têm a mesma altura.

a) Calcule a medida da altura das caixas sem adesivo. **36. a)** 10 cm

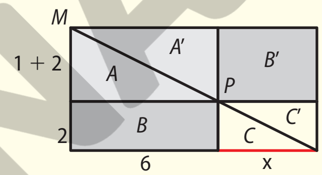
b) Qual é a medida da altura de cada pilha de caixas? **36. b)** 60 cm

34. Não, a equação do item **e** não teria solução, pois $\frac{10}{3}$ não é um número inteiro. Não, as equações dos itens **a**, **c**, **d** e **e** não teriam solução, pois -6, -9, -4 e $\frac{10}{3}$ não são números naturais.

Resolução de equações

Outro método de resolução de uma equação do 1º grau é o geométrico. Para resolver a equação $x + 2x = 12$, desenhamos um retângulo com medida da área igual a 12 e medidas dos lados 2 e 6. Juntamos a ele um novo retângulo, de lados medindo 6 e $(1 + 2)$, correspondentes aos coeficientes de $1x$ e $2x$.

Então, construímos outro retângulo, com medida de área igual à do retângulo de lados 2 e 6. Para isso, traçamos uma diagonal a partir do ponto M, passando por P, e a estendemos até cruzar o prolongamento do lado de medida 6:



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Podemos observar que:

- área de A = área de A'
- área de C = área de C' e, portanto,
- área de B = área de B', pois a diagonal do retângulo maior o divide em duas partes de mesma área.

Assim, $2 \cdot 6 = (1 + 2) \cdot x$ corresponde à equação que desejamos resolver: $x + 2x = 12$. Portanto, a raiz da equação é igual à medida x do segmento em destaque.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 32** a **34** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 35**, temos:

$$2x + 1 + 5(x - 3) =$$
$$= 3(x + 1) + x$$

Aplicando a distributiva:

$$2x + 1 + 5x - 15 =$$
$$= 3x + 3 + x$$

Reduzindo termos semelhantes:

$$7x - 14 = 4x + 3$$

Aplicando o princípio aditivo e reduzindo termos semelhantes:

$$7x - 14 - 4x + 14 =$$
$$= 4x + 3 - 4x + 14$$

Aplicando o princípio multiplicativo:

$$\frac{3x}{3} = \frac{17}{3}$$
$$x = \frac{17}{3}$$

Portanto, a raiz da equação é um número racional não inteiro.

Alternativa **d**.

O **exercício 36** exige que os estudantes definam a incógnita x como a altura das caixas sem adesivo. Assim, para o **item a** poderão escrever a seguinte igualdade:

$$x + 14 + x + 16 + x = 12 + x + 13 + x + 15$$
$$3x + 30 = 2x + 40$$
$$3x - 2x = 40 - 30$$
$$x = 10$$

No **item b**, devem substituir $x = 10$ em uma das equações:

$$3x + 30 = 3 \cdot 10 + 30 = 60$$

Pense mais um pouco...

Destaque aos estudantes que, nas equações que podem ser escritas, as raízes são iguais. Pergunte como ficaria a resposta caso as raízes fossem números diferentes. Nesse caso, não haveria valor de x que tornasse o quadrado um quadrado mágico.

Verifique se todas as possibilidades foram contempladas. Em caso negativo, com a turma, pesquise as faltantes e as escreva na lousa. Depois, solicite aos estudantes que as resolvam.

Algumas possibilidades são:

$16 + x + 4 + x + 9 =$
$= 11 + x + 8 + 15$

$16 + x + 4 + x + 9 =$
$= x + 7 + 17 + 10$

$16 + x + 4 + x + 9 =$
$= 16 + x + 8 + 10$

$16 + x + 4 + x + 9 =$
$= x + 7 + x + 8 + x + 9$

Para encontrar o valor de x, basta resolver uma destas equações:

$16 + x + 4 + x + 9 =$
$= x + 7 + 17 + 10$
$2x + 29 = x + 34$
$2x - x = 34 - 29$
$x = 5$

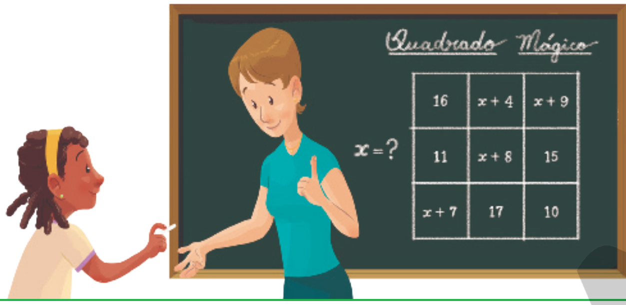
Equacionando problemas

Dado um problema, apresentamos mais de uma proposta de resolução. A diversidade de caminhos para a resolução de problemas em Matemática é um dos objetivos a serem alcançados em todas as Unidades Temáticas.

Essa diversidade forma um entrelaçamento de ideias que provoca uma sinergia de novos olhares. Isso reforça e consolida assuntos já estudados e, no caso de assuntos novos, abre uma brecha por onde o caminho continua.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Determine o valor de x no quadrado mágico a seguir, sabendo que a soma em cada linha, em cada coluna e nas diagonais é a mesma. *Pense mais um pouco...: $x = 5$*



DANIEL ZEPPO/ARQUIVO DA EDITORA

Equacionando problemas

O professor Paulo apresentou aos estudantes este problema:

Em um estacionamento, cobram-se R$ 9,00 pela primeira hora e R$ 2,50 a cada hora excedente. Se um cliente pagou R$ 24,00, quanto tempo o carro dele permaneceu nesse estacionamento?

Lúcia resolveu o problema da seguinte maneira:

Dos 24 reais eu subtraio os 9 reais da primeira hora.

$24 - 9 = 15$

Sobraram 15 reais.

Divido, então, 15 por 2,50 e encontro a quantidade de horas excedentes.

$$\begin{array}{r|l} 15{,}0 & 2{,}5 \\ \hline 0 & 6 \end{array}$$

Adicionando a quantidade de horas excedentes encontradas com a primeira hora, o cliente deixou o carro por 7 horas no estacionamento.

ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Marcos, por sua vez, resolveu o problema por tentativas.

Tentando 4 horas → $9 + 2{,}5 \cdot 3 = 16{,}5$ (é pouco)

Tentando 8 horas → $9 + 2{,}5 \cdot 7 = 26{,}5$ (é muito)

Tentando 7 horas → $9 + 2{,}5 \cdot 6 = 24$ (deu certo)

Logo, o carro permaneceu 7 horas no estacionamento.

E Jair apresentou o seguinte raciocínio:

Indicando por x a quantidade de horas excedentes, temos:

$$9 + 2{,}5x = 24$$
$$9 + 2{,}5x - 9 = 24 - 9$$
$$\frac{2{,}5x}{2{,}5} = \frac{15}{2{,}5}$$
$$x = 6$$

Adicionando com a primeira hora, o total de horas que o carro permaneceu no estacionamento foi 7 horas.

ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Note que os três estudantes resolveram corretamente o problema, empregando diferentes métodos.

Com isso, você percebe que existem vários métodos para resolver um problema. O método da resolução por meio de uma equação, empregado por Jair, é um deles. Esse método, em muitos casos, facilita a resolução de problemas.

Acompanhe mais algumas situações.

Situação 1

As reproduções das telas a seguir são assinadas por Elza Bernardes. Eu as comprei por R$ 1 320,00. Pela tela A, paguei o dobro do que paguei pela tela B, e, pela tela C, paguei o triplo do que paguei pela B. Quanto paguei pela tela C?

Tela A

ELZA BERNARDES - COLEÇÃO PARTICULAR

BERNARDES, E. **Frutas à mesa**. 1999. Óleo sobre tela, 54 × 77 cm. Coleção particular.

Tela B

ELZA BERNARDES - COLEÇÃO PARTICULAR

BERNARDES, E. **Vila de pescadores**. 1987. Óleo sobre tela, 59 × 72 cm. Coleção particular.

Tela C

ELZA BERNARDES - COLEÇÃO PARTICULAR

BERNARDES, E. **Choupana no Tietê**. 1990. Óleo sobre tela, 50 × 60 cm. Coleção particular.

Equacionando problemas

Comente com os estudantes uma história que teria acontecido com Euclides: o rei Ptolomeu, após ter folheado parte da obra escrita por Euclides, perguntou a ele se não havia um caminho mais suave para aprender Geometria. Lacônico, o matemático teria respondido: "Não há uma estrada real para a Geometria".

Discuta com eles o significado da resposta de Euclides. Os caminhos da Matemática podem não ser "suaves", mas são muitos e dão asas à criação.

O problema proposto na **situação 1** tem sua resolução simplificada com o emprego da Álgebra, mas ele também pode ser resolvido por raciocínio aritmético. Observa-se que a tela C custa o mesmo que as telas A e B juntas, ou seja, o preço dela é igual à metade do preço total: $1320 : 2 = 660$.

A tela B custou um terço do custo da tela C: $660 : 3 = 220$.

A tela A custou o dobro da tela B: $2 \cdot 220 = 440$.

Portanto, as telas A, B e C custaram, respectivamente: R$ 440,00; R$ 220,00 e R$ 660,00.

Equacionando problemas

Nesta página, há um exemplo de situação-problema um pouco mais elaborado. A leitura do enunciado de um problema sempre exige muita atenção. Oriente os estudantes a seguir os passos do Modelo de Polya para a resolução de problemas:

- Entender qual é o problema. (O que é dado? O que é pedido? Quais são as condições? Que relações existem entre o que é dado e o que é pedido?)
- Elaborar um plano de resolução. (Já viu problema parecido? Identifica o conceito em foco? Estabelece etapas de resolução? Consegue esquematizar?)
- Executar esse plano. (Faça-o por etapas, sempre verificando a correção das passagens.)
- Verificar respostas e analisar a resolução. (Cheque se a resposta obtida contempla as condições do problema. Há outras respostas? Há outros modos de resolver?)

Indicando o valor da tela B por x, a tela A custou $2x$, e a tela C, $3x$.

Então, $x + 2x + 3x = 1\,320$.

Resolvendo a equação, temos:

$$x + 2x + 3x = 1\,320$$
$$6x = 1\,320$$
$$\frac{6x}{6} = \frac{1\,320}{6}$$
$$x = 220$$

O valor da tela C é $3x$; logo:

$3x = 3 \cdot 220 = 660$

Portanto, paguei R$ 660,00 pela tela C.

Situação 2

Danilo e Diego são ciclistas e resolveram percorrer uma estrada que tem um trecho asfaltado e outro de terra.

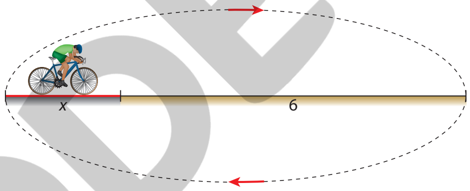
Danilo percorreu o trecho asfaltado e mais 6 km do trecho de terra. Depois, retornou ao ponto de partida.

Diego percorreu o trecho asfaltado e mais 2 km do trecho de terra, depois voltou ao ponto de partida. Ele fez esse percurso duas vezes.

Quando fizeram as contas, descobriram que haviam percorrido a mesma distância. Quantos quilômetros tem o trecho asfaltado?

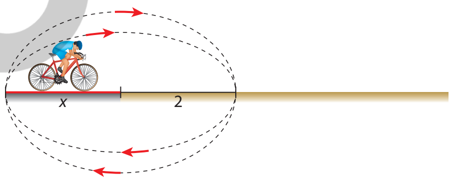
Vamos esquematizar a situação indicando a medida do comprimento do trecho asfaltado por x.

número de quilômetros percorridos por Danilo



$2(x + 6)$

número de quilômetros percorridos por Diego



$4(x + 2)$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Como o número de quilômetros percorridos é o mesmo, escrevemos a seguinte equação:

$$2(x + 6) = 4(x + 2)$$

Vamos eliminar os parênteses aplicando a propriedade distributiva da multiplicação.

Em seguida, continuamos a resolução:

$$2(x+6) = 4(x+2)$$
$$2x + 12 = 4x + 8$$
$$2x + 12 - 4x - 12 = 4x + 8 - 4x - 12$$
$$2x - 4x = 8 - 12$$
$$-2x = -4$$
$$\frac{-2x}{-2} = \frac{-4}{-2}$$
$$x = 2$$

DANIEL ZEPPO/ARQUIVO DA EDITORA

Verificando:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Danilo percorreu: } 2(2+6) = 2 \cdot 8 = 16 \\ \text{Diego percorreu: } 4(2+2) = 4 \cdot 4 = 16\end{array}\right\} \text{distâncias iguais (16 km)}$$

Logo, o trecho asfaltado mede 2 quilômetros.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

37 Maria tem o dobro da idade de Lúcia. Se Maria tivesse 8 anos a menos, e Lúcia, 4 anos a mais, elas teriam a mesma idade.

a) Representando a idade de Lúcia por y, como se representa a idade de Maria? **37. a)** $2y$

b) Determine a equação correspondente ao problema. **37. b)** $2y - 8 = y + 4$

c) Qual é a idade de Lúcia? **37. c)** 12 anos.

d) Qual é a idade de Maria? **37. d)** 24 anos.

38 Uma mesa plástica custa o triplo de uma cadeira plástica. Duas dessas mesas e oito dessas cadeiras custam R$ 226,80.

a) Qual é o preço de uma cadeira? **38. a)** R$ 16,20.

b) Qual é o preço de uma mesa? **38. b)** R$ 48,60.

c) Quanto custam 5 mesas e 20 cadeiras? **38. c)** R$ 567,00.

39 Sabendo que hoje a soma da idade de Guilherme e de Laura é 70 meses, há quantos meses a fotografia a seguir foi tirada? **39.** Há 16 meses.

CARLOS CARRARA

Guilherme, aos 18 meses, e Laura, aos 20 meses.

40 Em um jogo de basquete em cadeira de rodas, foram marcados 118 pontos. A equipe vencedora ganhou por uma diferença de 12 pontos. Quantos pontos marcou a equipe vencedora? **40.** 65 pontos.

ADAM PRETTY/GETTY IMAGES

Disputa pelo ouro nos Jogos Paralímpicos de Tóquio, no basquete feminino em cadeira de rodas. (Fotografia de 2021.)

41 Quatro candidatos disputavam a prefeitura de uma cidade. Após a apuração dos 5 219 votos, foram obtidos os resultados: o primeiro candidato conseguiu 22 votos a mais que o segundo, 130 a mais que o terceiro e 273 votos a mais que o último. Quantos votos recebeu o candidato eleito? **41.** 1 411 votos.

42 Ricardo e Julinho subiram juntos em uma balança, e o ponteiro da balança marcou 80 kg. Ricardo desceu, e Julinho pôde, então, verificar que ele tinha 6 kg a mais que Ricardo. Quantos quilogramas tem Julinho? **42.** 43 kg

Exercícios propostos

Verifique se, na resolução destes exercícios, os estudantes seguiram os passos sugeridos pelo Modelo de Polya. Comente com eles que chegar a uma resposta não é o único nem o principal objetivo da resolução de problemas. São o conjunto de etapas e a reflexão pós-resolução do procedimento empregado que possibilitam incorporar novos conhecimentos.

Nos exercícios desta página, até mesmo naqueles cujo enunciado é ilustrado com um esquema, em razão das relações que o enunciado estabelece entre os dados, é possível escrever mais de uma equação. No **exercício 37**, por exemplo, podemos escrever $x = 2y$ e $x - 8 = y + 4$.

Neste momento dos estudos, esse caminho pode ser precipitado, pois com duas equações e duas incógnitas diferentes temos um sistema de equações, o que será objeto de estudo no **capítulo 7**.

Embora haja mais de uma maneira de abordar os problemas e desenvolver as respectivas resoluções, espera-se que os estudantes venham a descobrir o poder do emprego da Álgebra nesse campo. Teriam alguma dificuldade, por exemplo, para resolver o **exercício 38** por tentativas.

No **exercício 39**, a primeira etapa do modelo de Polya não terá êxito caso não se busque informação, inclusive na legenda da fotografia.

As resoluções dos **exercícios 37** a **42** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 43**, os dados são obtidos mediante a leitura da imagem e, por consequência, também o equacionamento do problema. Esse é um modo lúdico e estimulante de apresentar um problema; por isso, tem sido utilizado como atrativo, inclusive nas redes sociais.

Considerando a medida da massa da banana x e a medida da massa da pera y, os estudantes podem resolver as seguintes equações:

$y = x + 100$ (I)

$x + y = 400$ (II)

Substituindo I em II, tem-se:

$x + (x + 100) = 400$

$2x = 400 - 100$

$2x = 300$

$x = 150$

Substituindo o valor de x em I, tem-se:

$y = 150 + 100 = 250$

Portanto, a medida da massa da banana é 150 g e a da pera é 250 g.

Também no **exercício 44** é necessário interpretar o esquema representado pela imagem.

Se a medida da distância entre A e B é o triplo da medida da distância entre B e C, então a medida da distância entre A e B é três quartos da medida da distância entre A e C, ou seja, três quartos de 72 km.

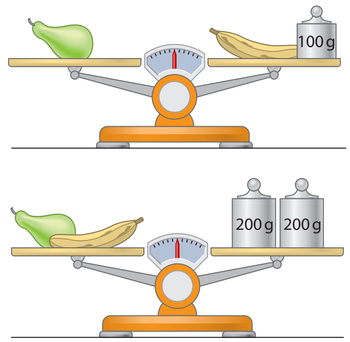
Daí obtemos: um quarto de 72 km é 18 km, e três quartos de 72 km é 54 km.

Exercícios com **Hora de criar**, como o **45**, propõem colocar os estudantes em uma perspectiva diferente dos demais exercícios, o que amplia a visão deles sobre o assunto estudado. Outro aspecto desse tipo de atividade é que possibilita aos estudantes o protagonismo de seu aprendizado, concedendo-lhes autonomia.

Pense mais um pouco...

A linguagem de história em diálogos do tipo desafio, por seu caráter lúdico, desperta nos estudantes uma postura mais descontraída. Essa proposta pode servir de exemplo para a elaboração de atividades semelhantes. Incentive os estudantes a, em duplas (uma de cada vez), criar situações como essa. Essa proposta pode, ainda, ser mais enriquecida se os diálogos forem de personagens de histórias em quadrinhos.

43 Observe o esquema das balanças e responda.



De acordo com o que as balanças indicam, quantos gramas tem a pera? E a banana?
43. Pera: 250 g; banana: 150 g.

44 Na figura a seguir, está representada uma estrada com três postos de gasolina, A, B e C. A distância entre A e B é o triplo da distância de B a C. Calcule mentalmente qual é a medida da distância entre A e B.
44. 54 quilômetros.

(Representação fora de escala.)

45 ***Hora de criar*** – Crie um problema que possa ser resolvido pelas equações: **45.** Respostas pessoais.

a) $3x + 4 = 22$ b) $\frac{x}{2} - 8 = 1$

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

André gosta de impressionar as pessoas fazendo adivinhações. Ele consegue descobrir o número pensado por uma pessoa. Observe a conversa entre ele e Fernando.

André: Pense em um número.
Fernando: “5”
André: Dobre.
Fernando: “10”
André: Adicione 10.
Fernando: “20”
André: Multiplique por 4.
Fernando: “80”
André: Subtraia 40.
Fernando: “40”
André: Divida por 2.
Fernando: “20”
André: Quanto deu?
Fernando: 20
André: Você pensou no número 5.
Fernando: Como você adivinhou?

Pense mais um pouco...:
a) André representou por x o número pensado e chegou à expressão $[(2x + 10) \cdot 4 - 40] : 2$, que resulta em $4x$. Depois, resolveu a equação $4x = 20$.

Junte-se a um colega para responderem às questões.

a) Descubram como André fez para adivinhar o número que Fernando pensou. Justifiquem a resposta.

b) Montem uma regra que possibilite adivinhar números, brinquem com outras duplas da classe e, em seguida, descubram as regras elaboradas pelas outras duplas. **b)** Respostas pessoais.

Considerando x o número pensado, o passo a passo da construção da equação é:

André: “Pense em um número.”
Fernando: “x”
André: “Dobre.”
Fernando: “$2x$”
André: “Adicione 10.”
Fernando: “$2x + 10$”
André: “Multiplique por 4.”
Fernando: “$(2x + 10) \cdot 4$”
André: “Subtraia 40.”
Fernando: “$(2x + 10) \cdot 4 - 40$”
André: “Divida por 2.”
Fernando: “$[(2x + 10) \cdot 4 - 40] : 2$”
André: “Quanto deu?”
Fernando:
“$[(2x + 10) \cdot 4 - 40] : 2$
$[8x + 40 - 40] : 2$
$8x : 2 = 4x$”

PARA SABER MAIS

A Matemática na História

A palavra **álgebra** deriva da palavra árabe *al-jabr*, presente no título do livro **Hisâb al-jabr w'al-muqâ-balah**, escrito em Bagdá, por volta do ano 825 d.C., pelo matemático árabe Al-Khwārizmī.

A tradução literal do título desse livro é "Ciência da restauração ou reunião (*al-jabr*) e redução (*w'al-muqâ-balah*)", que pode ser entendida matematicamente como a passagem de termos subtraídos para o outro membro de uma equação (*al-jabr*) e o cancelamento de termos semelhantes em membros opostos da equação (*w'al-muqâ-balah*).

A evolução do processo de resolução de equações abrange um período que vai de 1700 a.C. até 1700 d.C., caracterizando-se principalmente pelo uso de abreviações e pela utilização de vários métodos.

Vamos tratar aqui de um método utilizado inicialmente pelos egípcios, conhecido mais tarde na Europa como "regra da falsa posição", cuja notação era verbal.

A **regra da falsa posição** é um método de resolução de equações que atribui inicialmente um valor à incógnita. Ao se fazer a verificação, caso as condições dadas não forem satisfeitas, altera-se a estimativa inicial, multiplicando-a por um valor conveniente.

Atualmente, como temos à disposição um bom instrumental simbólico, pode parecer impossível que o uso da palavra tenha dificultado a resolução de uma equação. Mas observe como a equação $x + \frac{x}{7} = 24$ era representada com a notação verbal.

"Qual deve ser o valor de um número que, ao ter sua sétima parte adicionada, torna-se equivalente a 24?"

Esse é um exemplo relativamente simples, que permite, entretanto, imaginar quanto se torna complicado o enunciado na notação verbal quando a equação é mais complexa.

Para resolver essa equação, vamos atribuir a x o valor 7. Então:

$$x + \frac{x}{7} = 7 + \frac{7}{7} = 8$$

Observe que o resultado obtido é diferente de 24. Precisamos multiplicar 8 por 3 para obter o resultado desejado (24). Assim, o valor procurado de x será o valor estimado inicialmente (7) multiplicado por 3, ou seja, 21 ($7 \cdot 3$).

Verifique que 21 satisfaz a equação $x + \frac{x}{7} = 24$, pois:

$$21 + \frac{21}{7} = 21 + 3 = 24$$

A regra da falsa posição tornou-se conhecida na Europa, na Idade Média, por meio dos árabes, aparecendo nas obras de Al-Khwārizmī – a mais antiga aritmética árabe – e de muitos outros, como o matemático italiano Fibonacci (cerca de 1170-1250), o matemático alemão Johannes Widmann (1462-1498) e o matemático inglês Robert Recorde (1510-1558).

CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

Para saber mais

A regra da falsa posição é um misto de método por tentativa e erro, mas com uma direção a ser obtida pelo "acerto" a ser feito em um segundo momento predeterminado. Hoje, ela é pouco empregada na resolução de equações do 1º grau, mas tem um lugar de destaque na história da Matemática.

Comente com os estudantes não só a sua importância histórica, mas também o conceito que a fundamenta, que é o pensamento de proporcionalidade. Dessa maneira, ao resolver problemas que envolvem proporcionalidade direta entre duas grandezas, expressando a relação entre elas por meio de sentença algébrica, colaboramos com o desenvolvimento da habilidade (EF07MA17).

Solicite aos estudantes que refaçam os exercícios das páginas 129 e 130 usando a regra da falsa posição.

Agora é com você!

Para resolver a **atividade 1** podemos, por exemplo, atribuir um valor inicial para x igual a 4:

$$4+\frac{4}{2}=4+2=6$$

O resultado obtido foi 6. Para obter um valor mais próximo de 21, vamos multiplicar 4 por 3 e substituir x por 12. Logo:

$$12+\frac{12}{2}=12+6=18$$

Assim, o valor de x é maior que 12. Substituindo-o por 14, obtemos:

$$14+\frac{14}{2}=14+7=21$$

Portanto, $x = 14$.

Oriente os estudantes na elaboração da equação para a **atividade 2**. Se considerar adequado, escolha algumas das equações elaboradas e proponha aos estudantes que as resolvam.

Voltando aos problemas históricos

Retomamos nesta página os dois problemas históricos selecionados para iniciar este capítulo, agora com o conhecimento algébrico adquirido para resolvê-los.

O estudo da Matemática requer retomadas e avanços constantes.

Foi sugerida, na página 110, em relação ao primeiro problema ora apresentado, uma resolução por tentativas. Essas tentativas não se dariam aleatoriamente, mas tendo por base a regra da falsa posição e o conceito da proporcionalidade.

Aqui retomamos o problema do papiro de Rhind ou papiro de Ahmes para avançar no modo de resolução, o modo algébrico.

Esse método desapareceu no decorrer do século XVI, com a descoberta de métodos mais sofisticados para a resolução de equações mais complexas.

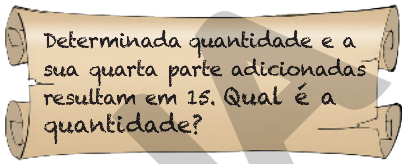
Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Resolva pelo método da falsa posição a equação $x+\frac{x}{2}=21$ **1.** $x = 14$

2 Crie uma equação do 1º grau com uma incógnita e resolva-a pela regra da falsa posição. **2.** Resposta pessoal.

Voltando aos problemas históricos

Agora podemos resolver os problemas propostos no início deste capítulo. Vamos começar com o problema do papiro de Rhind. Observe a ilustração.



CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

Considerando a quantidade que queremos encontrar como x, podemos escrever a equação:

$$x+\frac{1}{4}x=15$$

$$4\cdot\left(x+\frac{1}{4}x\right)=15\cdot 4$$

$$4x+x=60$$

$$\frac{5x}{5}=\frac{60}{5}$$

$$x=12$$

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, a quantidade procurada é 12.

Agora vamos resolver o problema apresentado em **Lilavati**.

> ... o colar do pescoço da esposa partiu-se. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto foi para debaixo da cama. A esposa apanhou um sexto, e seu amado, um décimo. Seis pérolas ficaram no fio original. Descubra o número total de pérolas no colar.

CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

Considerando a quantidade total de pérolas do colar como x, temos:

- Quantidade que caiu no chão: $\frac{1}{3}x$
- Quantidade que foi para debaixo da cama: $\frac{1}{5}x$
- Quantidade que a esposa apanhou: $\frac{1}{6}x$
- Quantidade que o amado apanhou: $\frac{1}{10}x$
- Quantidade que ficou no fio original: 6

A quantidade de pérolas que saíram do fio é igual ao total de pérolas menos a quantidade de pérolas que ficaram no fio.

Portanto, a equação correspondente à situação descrita é:

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x = x - 6$$

Assim como na adição de frações, procuramos frações equivalentes de mesmo denominador; como mmc (3, 5, 6, 10) = 30, temos:

$$\frac{10}{30}x + \frac{6}{30}x + \frac{5}{30}x + \frac{3}{30}x = x - 6$$

$$30 \cdot \left(\frac{10}{30}x + \frac{6}{30}x + \frac{5}{30}x + \frac{3}{30}x\right) = 30 \cdot (x - 6)$$ → Para eliminar os denominadores das frações da equação, podemos multiplicar os dois membros por 30.

$10x + 6x + 5x + 3x = 30x - 180$

$24x = 30x - 180$

$24x - 30x = 30x - 180 - 30x$ → Subtraímos $30x$ dos dois membros da equação.

$-6x = -180$

$\frac{-6x}{-6} = \frac{-180}{-6}$ → Dividimos os dois membros da equação por (–6).

$x = 30$

Logo, o número total de pérolas no colar era 30.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

46 Um número é adicionado a 10. Multiplica-se essa soma por 3, e o resultado é 72.

a) Qual das equações a seguir corresponde ao problema? **46. a)** $(n + 10) \cdot 3 = 72$

$n + 10 \cdot 3 = 72$ ou $(n + 10) \cdot 3 = 72$

b) Que número é esse? **46. b)** O número é 14.

47 A uma festa compareceram 43 convidados. Se tivessem ido mais dois jovens, eles seriam o quádruplo do número de adultos.

a) Indicando o número de adultos por x, represente o número de jovens. **47. a)** $4x - 2$

b) Qual é a equação correspondente a essa situação? **47. b)** $x + 4x - 2 = 43$

c) Quantos adultos compareceram a essa festa? E quantos jovens? **47. c)** Adultos: 9; jovens: 34.

48 *Hora de criar* – Em duplas, criem um problema cada que possa ser solucionado por meio da equação $4x - 45 = 3$. Troque seu problema com o do colega. Construa um fluxograma com o passo a passo para a resolução desse problema e resolva-o. Depois, destroquem para corrigi-los. **48.** Resposta pessoal. $x = 12$

49 Um terreno retangular tem 100 m de perímetro. A medida do seu comprimento é o triplo da medida da largura.

a) Indicando a medida da largura desse terreno por x, determine a medida do comprimento dele. **49. a)** $3x$

b) Determine a medida do perímetro desse terreno usando a letra x. **49. b)** $8x$

c) Escreva a equação associada ao problema. **49. c)** $8x = 100$

d) Qual é a medida da largura do terreno? E qual é a medida do comprimento? **49. d)** Largura: 12,5 m; comprimento: 37,5 m.

e) Calcule a medida da área do terreno. **49. e)** 468,75 m²

50 Dentro de um ano, Ana Maria terá o triplo da idade que tinha há nove anos. Qual é a idade de Ana Maria hoje? **50.** 14 anos.

51 Determine o número inteiro mais próximo da solução da equação: **51.** –4

$$\frac{12x - 4}{6} - \frac{8x - 3}{9} = x + \frac{2x + 5}{3}$$

Voltando aos problemas históricos

O segundo problema apresentado no início do capítulo, o de **Lilavati**, também é abordado aqui com uma resolução algébrica. Este é mais complexo na elaboração e é mais trabalhoso na resolução da equação, mas os estudantes já têm o conhecimento necessário para o êxito.

Exercícios propostos

Comente com os estudantes que, chegando ao final do capítulo, estamos aplicando nestas atividades tudo o que aprenderam ao longo dele. Nos **exercícios 46** e **47**, por exemplo, o questionamento se dá a respeito de como o enunciado deve ser traduzido para a linguagem algébrica.

As resoluções dos **exercícios 46**, **47** e **49** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 48**, o questionamento é feito de maneira invertida, mas ainda com o foco na relação entre a língua materna e a linguagem algébrica.

O **exercício 49** vai além e conduz os estudantes, passo a passo, respondendo a cada item, a explorar os dados do enunciado e a fazer a tradução para depois propor questionamentos sobre esses dados.

No **exercício 50**, representamos a idade de Ana Maria hoje por x.

Então, a equação relativa à situação dada é

$x + 1 = 3 \cdot (x - 9)$

Resolvendo, obtemos:

$x + 1 = 3x - 27$

$x + 1 - 3x - 1 =$

$= 3x - 27 - 3x - 1$

$-2x = -28$

$\frac{-2x}{-2} = \frac{-28}{-2}$

$x = 14$

A idade de Ana Maria hoje é 14 anos.

No **exercício 51**, aplicando os princípios aditivo e multiplicativo, resolvemos a equação.

$$\frac{12x - 4}{6} - \frac{8x - 3}{9} = x + \frac{2x + 5}{3}$$

$$\frac{36x - 12}{18} - \frac{16x - 6}{18} = \frac{18x}{18} + \frac{12x + 30}{18}$$

$36x - 12 - 16x + 6 = 18x + 12x + 30$

$20x - 6 = 30x + 30$

$20x - 6 - 30x + 6 = 30x + 30 - 30x + 6$

$-10x = 36$

$\frac{-10x}{-10} = \frac{36}{-10}$

$x = -3,6$

Logo, o número inteiro mais próximo é o –4.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 52**, **54**, **55** e **56** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Agora, com os estudantes mais preparados, a sequência de exercícios continua em um crescente nível de complexidade, que vai de equações dadas (linguagem algébrica) a problemas clássicos, como o dos jaburus, e históricos, como o da flor de lótus (Lilavati).

No **exercício 53**, sendo x o número de jaburus na árvore, temos a seguinte equação:

$$x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = 57$$

$$\frac{6x}{6} + \frac{2x}{6} + \frac{x}{6} = \frac{6 \cdot 57}{6}$$

$9x = 6 \cdot 57$

$x = 38$

Havia 38 jaburus na árvore.

Pense mais um pouco...

Comente com os estudantes que, nas duas equações que podem ser escritas, as raízes são iguais. Pergunte a eles como ficaria a resposta caso as raízes fossem números diferentes. A resolução do exercício seria impossível.

No **item a**, para encontrar o valor de x, os estudantes poderão fazer:

$$\frac{x+2}{2} + \frac{x+1}{3} = 3$$

Calculando o mmc:

$$3 \cdot \frac{x+2}{6} + 2 \cdot \frac{x+1}{6} = 6 \cdot \frac{3}{6}$$

Multiplicando ambos os membros por 6:

$3 \cdot (x+2) + 2 \cdot (x+1) = 6 \cdot 3$

$3x + 6 + 2x + 2 = 18$

$5x = 18 - 8$

$5x = 10$

$x = 2$

Para responder ao **item b**, basta substituir x por 2 e calcular:

$$\frac{2+1}{3} + (-5 \cdot 2) = y$$

$$\frac{3}{3} - 10 = y$$

$1 - 10 = y$

$-9 = y$

Para o último bloco:

$3 - 9 = -6$

---

52 Considerando conjunto universo o conjunto dos números racionais, calcule o valor de x nas equações a seguir.

a) $4(x + 3) = 20$ **52. a)** $x = 2$

b) $5(2x - 1) = 2(x + 4)$ **52. b)** $x = \frac{13}{8}$

c) $10 - 2(x + 3) = 8 + 3(2x + 5)$ **52. c)** $x = -\frac{19}{8}$

d) $\frac{3x}{5} - \frac{1}{2} = x - \frac{2}{5}$ **52. d)** $x = -\frac{1}{4}$

e) $\frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2x}{6} - \frac{1}{3}$ **52. e)** $x = -\frac{13}{2}$

f) $\frac{3y}{2} - 1 = \frac{3}{4} - 2y$ **52. f)** $y = \frac{1}{2}$

53 Sonhei que no Pantanal Mato-Grossense uma arara pousou em uma árvore e cumprimentou os jaburus que lá se encontravam.

— Bom dia a todos os 57 jaburus amigos que se encontram nesta árvore.

Os jaburus responderam em coro:

— Bom dia!

Um jaburu comentou:

— Nós não somos tantos, dona Arara. Mas, se a senhora somar a nós $\frac{1}{3}$ de nós e mais $\frac{1}{6}$ de nós, aí, sim, seremos 57.

Quantos jaburus havia na árvore?
53. 38 jaburus.

ADRIANO KIRIHARA/PULSAR IMAGENS

Os jaburus são aves de grande porte, que vivem em bandos e constroem ninhos coletivos. Pantanal Mato-Grossense.

54 Hoje, em uma classe, o número de meninos presentes foi igual ao número de meninas presentes, isso porque faltaram 5 meninas e 1 menino. Quantos estudantes há nessa classe, se o número de meninas é $\frac{5}{9}$ do número de estudantes da classe?
54. 36 estudantes.

55 Resolva o problema a seguir, que também está presente na obra **Lilavati**, de Bhaskara.

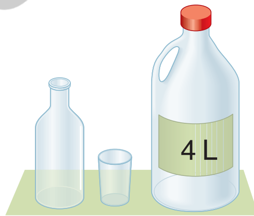
Um terço, um quinto e um sexto de uma quantidade de lótus foram oferecidos, respectivamente, ao Lorde Siva, ao Lorde Visnu e ao Sol; e um quarto foi oferecido a Parvati. Os seis lótus que sobraram foram presenteados ao venerável preceptor. Diz depressa o número total de lótus.

55. 120 lótus.

HUMANNET/SHUTTERSTOCK

Lótus é uma flor aquática, muito comum na Índia.

56 Observe esta figura.



Com três copos de água, enche-se totalmente a garrafa. Colocando-se no garrafão quatro garrafas de água e mais um copo de água, ainda assim falta 0,75 litro de água para encher o garrafão totalmente. **56. a)** 0,25 litro.

a) Quantos litros de água cabem nesse copo?

b) Quantos litros de água cabem nessa garrafa?
56. b) 0,75 litro.

Pense mais um pouco...

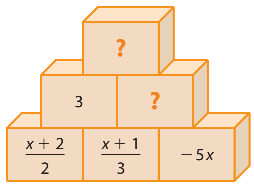
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

A partir do bloco de cima, cada número é a soma dos dois números que estão nos blocos imediatamente abaixo.

a) Descubra o valor de x. **a)** $x = 2$

b) Escreva no seu caderno os números que devem ser colocados nos blocos com "?". **b)** –6 e –9.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

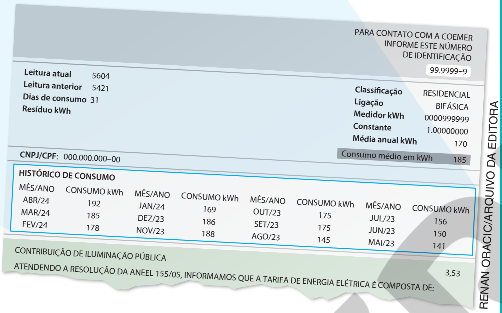
Média e estimativas

Quando algumas empresas fornecedoras de energia elétrica não conseguem fazer a leitura do consumo de uma residência, elas estimam o valor da próxima conta pela média do consumo dos últimos três meses. Vamos ver um exemplo.

Considere parte da conta de energia elétrica desta família.

HISTÓRICO DE CONSUMO

MÊS/ANO	CONSUMO kWh	MÊS/ANO	CONSUMO kWh	MÊS/ANO	CONSUMO kWh	MÊS/ANO	CONSUMO kWh
ABR/24	192	JAN/24	169	OUT/23	175	JUL/23	156
MAR/24	185	DEZ/23	186	SET/23	175	JUN/23	150
FEV/24	178	NOV/23	188	AGO/23	145	MAI/23	141



RENAN ORACIO/ARQUIVO DA EDITORA

Nos últimos três meses, temos:

Mês	Abril	Março	Fevereiro
Consumo	192 kWh	185 kWh	178 kWh

Calculando a **média aritmética**, temos:

$$\frac{192 + 185 + 178}{3} = \frac{555}{3} = 185$$

A fornecedora estimou que o consumo do mês de maio dessa família foi 185 kWh.

Agora quem trabalha é você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Considerando a conta apresentada, responda às questões.

a) Supondo que a leitura não tivesse sido feita no mês de fevereiro, estime qual seria o consumo para esse mês com base no consumo dos 3 meses anteriores. **1. a)** 181 kWh

b) O valor que você encontrou foi igual ao consumido nesse mês? Qual foi a diferença? **1. b)** Não. 3 kWh

c) Supondo que a fornecedora estime o valor cobrado para o mês com base na média de consumo dos 12 meses anteriores, qual seria a estimativa para o consumo de maio de 2024? **1. c)** 170 kWh

d) Que motivos podem ser levantados para a fornecedora considerar os últimos 3 meses, e não os últimos 12 meses, para fazer a estimativa de consumo de um mês? Converse com os colegas sobre isso. **1. d)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que, quanto menor o número de meses considerados, mais chance terá a fornecedora de detectar um consumo atípico.

2 Suponha que para uma residência tenham sido registradas as seguintes leituras:

Leitura de julho feita no dia 31 de julho: 8 120 kWh

Leitura de agosto feita no dia 23 de agosto: 8 396 kWh

Nesse caso, a fornecedora também faz uma estimativa para calcular o consumo de 31 dias.

Período entre uma leitura e outra: 23 dias

Consumo entre os 23 dias: 8 396 – 8 120 = 276 (276 kWh)

A empresa calcula o **consumo médio** de um dia e, com base nesse valor, o de 31 dias.

Com essas informações, estime o consumo médio do mês de agosto. **2.** 372 kWh

→ Realizar a leitura de dados em diferentes representações é uma importante habilidade a ser incentivada por meio da apresentação de situações significativas, que possibilitem aos estudantes compreender o cotidiano de forma crítica e participativa.

Agora quem trabalha é você!

As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF07MA35**.

A atividade proposta trabalha o conceito de média aritmética aplicado a uma estimativa, contribuindo para o trabalho com a habilidade (EF07MA35).

Peça aos estudantes, com antecedência, que tragam para a aula uma conta de energia elétrica recente. Calculando a média de consumo de energia elétrica durante um período de três meses consecutivos, os estudantes podem verificar se o resultado corresponde aproximadamente ao valor consumido no mês seguinte ao período.

Comente que o cálculo dessa média pode ser útil tanto nos casos em que não é possível a leitura direta do consumo quanto nos casos em que se questiona uma leitura equivocada.

Por exemplo, se uma família tem uma média de consumo mensal de 200 kWh e, em determinado mês, o consumo indicado é de 480 kWh, é possível questionar a leitura, pois a variação foi muito grande em relação à média.

Também é importante os estudantes perceberem que uma previsão feita com base na média só será confiável se a variação mensal do consumo não for muito grande a cada mês. No exemplo do texto, se a família consumisse nos meses de abril a junho, respectivamente, 130 kWh, 250 kWh e 175 kWh, seu **consumo médio** seria de:

$$\frac{130 + 250 + 175}{3} = 185$$

Observe que, apesar de a média ser igual à apresentada na situação do texto, como a variação no consumo é grande, uma previsão feita com base nesse valor poderia não ser uma boa opção. Ao trabalhar com essa aplicação do conceito de média aritmética, contribui-se para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

Aproveite a situação para sugerir aos estudantes que obtenham uma previsão com base na média aritmética utilizando dados apresentados em outras representações, como um gráfico.

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 1** a **9**, **11** e **12** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Este bloco de exercícios tem por objetivo proporcionar aos estudantes uma autoavaliação da apreensão dos conceitos estudados no capítulo. Espera-se que eles recorram aos conhecimentos construídos, percebendo se ainda têm alguma dificuldade.

Ao trabalhar o **exercício 10**, peça aos estudantes que apresentem formulações para o enunciado, ressaltando a possibilidade de mais de uma forma de expressá-lo algebricamente. Por exemplo, a soma dos números consecutivos pode ser expressa por:

$(x - 1) \cdot x + (x + 1) = 72$

$3x = 72 \Rightarrow x = 24$

Então, os lados têm medidas iguais a:

$(x - 1) = (24 - 1)$ cm $= 23$ cm,

$x = 24$ cm e

$x + 1 = (24 + 1)$ cm $= 25$ cm

Ou:

$x + (x + 1) + (x + 2) = 72$

$3x + 3 = 72 \Rightarrow x = 23$

Então, os lados têm medidas iguais a:

$x = 23$ cm,

$x + 1 = (23 + 1)$ cm $= 24$ cm e

$x + 2 = (23 + 2)$ cm $= 25$ cm

Comente com os estudantes que, mesmo usando expressões algébricas diferentes, os resultados são iguais.

É possível que algum estudante divida 72 por 3, obtendo, assim, a medida de um dos lados (24 cm), que equivale à média aritmética das medidas dos três. Logo, os outros dois lados medem 23 cm e 25 cm. Para justificar esse procedimento, sejam $x - 1$, x e $x + 1$ as medidas dos três lados do triângulo. Assim, $(x - 1) + x + (x + 1) = 72$; logo, $3x = 72$ e, portanto, $x = 24$. Como $x = 24$, então $x - 1 = 23$ e $x + 1 = 25$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Fernanda disse para José:

— Pense em um número. Já pensou? Então, dobre esse número, adicione 8, multiplique o resultado por 5, adicione 60 e subtraia 100. Quanto deu?

José respondeu para Fernanda:

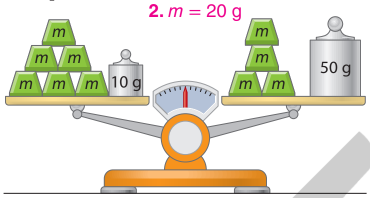
— Deu 10. **1. a)** José pensou no número 1.

a) Descubra o número em que José pensou e escreva a resposta no caderno.

b) Representando por x o número pensado e por y o resultado do cálculo proposto por Fernanda, escreva uma equação que relacione x com y. **1. b)** $(2x + 8) \cdot 5 + 60 - 100 = y$

c) Se você simplificar a equação do item **b**, o que se pode dizer de y e x? **1. c)** $y = 10x$

2 O esquema a seguir representa uma balança com os pratos nivelados. Calcule o valor de m. **2.** $m = 20$ g



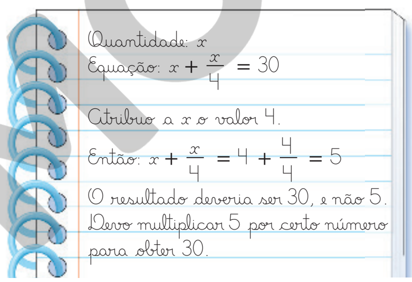
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

3 Uma batedeira e um liquidificador custam, juntos, 291 reais. A batedeira custa 81 reais a mais que o liquidificador. Qual é o preço da batedeira? **3.** 186 reais.

4 Usando a regra da falsa posição, Juliana começou a resolver o seguinte problema:

"A quantidade e sua quarta parte adicionadas resultam em 30. Qual é essa quantidade?".

Observe o que Juliana já fez no caderno.



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Calcule o número procurado por Juliana e termine a resolução desse problema.
4. O número procurado é 6, e a quantidade é 24.

5 Das equações a seguir, quais têm raiz igual a 5? **5.** Alternativas **b** e **c**.

a) $5x + 4 - 2x = 26 - 3x$

b) $3x - 4 = 11$

c) $x - (x + 1) = 12 - (3x - 2)$

d) $4x + 9 = 3x + 5$

e) $10x + 3 = 8x - 2$

6 Multiplicando as soluções das duas equações a seguir, encontraremos um número inteiro. Que número é esse? **6.** O número é –1.

$$\frac{2y}{3} - \frac{1}{2} = \frac{y}{4} - \frac{3}{2} \qquad 3x = \frac{5}{4}$$

7 Resolva as equações a seguir.

a) $7(y - 1) = 2(3y + 1)$ **7. a)** $y = 9$

b) $y + 4(y - 1) = 9 - 2(y + 3)$ **7. b)** $y = 1$

c) $4(y - 2) + 3(2y - 1) = 6(2y - 3)$ **7. c)** $y = \frac{7}{2}$

d) $8(y + 2) - 5y + 7(2y - 3) = 15 + 5y$ **7. d)** $y = \frac{5}{3}$

8 Um número menos 12 é igual a $\frac{3}{4}$ do mesmo número. Qual é esse número? **8.** O número é 48.

9 Leonardo tinha de dividir um número por 3, mas se enganou e multiplicou-o por 3. Com isso, encontrou 120 unidades a mais do que deveria ter encontrado. Qual é o número que Leonardo deveria dividir? **9.** O número é 45.

10 A medida do perímetro de um triângulo é igual a 72 cm. As medidas de seus lados são expressas por três números inteiros e consecutivos. Calcule essas medidas. **10.** 23 cm, 24 cm e 25 cm.

11 (FCC-BA) Um grupo de amigos quer dividir a despesa de uma lanchonete. Se cada um pagar R$ 20,00, faltarão R$ 60,00; se cada um der R$ 30,00, sobrarão R$ 90,00. O número de pessoas nesse grupo é: **11.** Alternativa **d**.

a) 10.

b) 12.

c) 14.

d) 15.

e) 18.

12 Responda: qual é a equação equivalente a $\frac{x - 4}{5} - \frac{x - 5}{2} = \frac{x + 2}{10}$? **12.** Alternativa **a**.

a) $4x = 15$

b) $4x = -15$

c) $4x = 35$

d) $4x = -35$

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Ana e Bruno fazem aniversário no mesmo dia, mas a idade de Ana é igual ao dobro da idade de Bruno adicionada de três unidades. Se *a* representa a idade de Ana e *b* representa a idade de Bruno, qual equação indica a situação descrita?

a) $a = 3b + 2$
b) $a = 2b + 3$
c) $a + 3 = 2b$
d) $a = \frac{b}{2} + 3$

1. Alternativa **b**.

2 Uma marcenaria faz tampos de mesa retangulares de medidas x m por y m. Qual é a medida do perímetro e a medida da área do tampo de uma mesa com 1,2 m de largura e 2 m de comprimento? **2.** Alternativa **d**.

a) $x + y = 2{,}2$ m e $x \cdot y = 2{,}4$ m²
b) $2 \cdot x = 2{,}4$ m e $2 \cdot y = 4{,}0$ m²
c) $4(x + y) = 8{,}8$ m e $x + y = 2{,}2$ m²
d) $2(x + y) = 6{,}4$ m e $x \cdot y = 2{,}4$ m²

3 Considere a expressão a seguir.

$$-2ax + x + \frac{8 - 6a}{2} + \frac{1}{2}ax + \frac{7}{3}x - 2(a + x)$$

Qual é a redução correta dessa expressão a termos semelhantes? **3.** Alternativa **a**.

a) $-\frac{3}{2}ax + \frac{4}{3}x - 5a + 4$
b) $\frac{5}{2}ax + \frac{16}{3}x - 5a + 8$
c) $\frac{5}{2}ax + \frac{1}{3}x - 5a + 4$
d) $-\frac{8}{3}ax + 4$

4 Identifique a alternativa que contém uma equação do 1º grau com uma incógnita. **4.** Alternativa **d**.

a) $a^2 + b = 12$
b) $5x + 8 < 1$
c) $0 + 3 = |-3|$
d) $27 = 2x + 1$

5 Identifique a alternativa que contém a raiz da equação $\frac{20}{3}x + 5 = 15$. **5.** Alternativa **a**.

a) 1,5
b) 3,0
c) 2,0
d) 6,0

6 Ao elevar ao quadrado um número natural múltiplo de 3, multiplicar esse resultado por 2 e, em seguida, subtrair 48, obtém-se como resultado final 114. Qual é o conjunto universo e solução da equação descrita por essa situação?

a) $U = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, ...\}$ e $x = -9$.
b) $U = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, ...\}$ e $x = 9$.
c) $U = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$ e $x = 9$.
d) $U = \{0, 3, 6, 9, 12, ...\}$ e $x = 81$. **6.** Alternativa **c**.

7 Um motorista particular cobra de seus clientes um valor fixo de R$ 5,90 por corrida mais R$ 1,50 por quilômetro rodado. Se a corrida de uma pessoa com esse motorista custou R$ 25,40, quantos quilômetros foram percorridos? **7.** Alternativa **c**.

a) 2,8 km
b) 18,0 km
c) 13,0 km
d) 19,5 km

8 Uma ceramista está produzindo *kits* com 3 vasos de cerâmica com alturas diferentes. Em cada *kit*, o primeiro vaso mede x cm de altura, o segundo mede 2x cm de altura e o terceiro mede 4x cm de altura. Um cliente comprou um *kit* e três suportes medindo 5 cm de altura cada para colocar os vasos em cima. Se a soma das medidas das alturas de todos os itens que esse cliente comprou é 1,06 m, qual é a medida da altura de cada vaso em centímetro? **8.** Alternativa **c**.

a) 30 cm; 60 cm; 120 cm
b) 15 cm; 30 cm; 60 cm
c) 13 cm; 26 cm; 52 cm
d) 6,5 cm; 13 cm; 26 cm

a) Uma expressão algébrica é um termo algébrico ou a soma de termos algébricos, sem necessariamente representar uma igualdade. Em expressões algébricas, as letras que representam números são variáveis, pois podem assumir qualquer valor numérico. Uma sentença matemática envolve números em um conjunto de operações com sentido completo. Uma equação é uma sentença matemática que envolve necessariamente uma igualdade e que apresenta letras representando números.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões.

a) Qual é a diferença entre uma expressão algébrica, uma sentença matemática e uma equação?
b) O que é o coeficiente e o que é a parte literal de um termo algébrico? **b)** O coeficiente de um termo algébrico é a parte numérica do termo, incluindo o sinal, enquanto a parte literal é a que contém letras.
c) Em qual situação podemos simplificar uma expressão algébrica?
d) O que é uma equação?
e) Como você explicaria para um amigo como ele deve fazer para encontrar a raiz de uma equação do 1º grau com uma incógnita? **c)** Podemos simplificar uma expressão algébrica sempre que haja termos algébricos da expressão com a mesma parte literal.
f) Na sua opinião, qual é a importância de sabermos resolver equações? **e)** Resposta pessoal.
g) Construa um fluxograma que permite calcular o valor numérico da expressão algébrica $x^2 + 5x + 3$, para $0 < x < 10$. **f)** Resposta possível: Espera-se que os estudantes considerem a importância na resolução de problemas e na busca por um valor desconhecido.

g) Construção de figura. **d)** Equação é toda sentença matemática expressa por uma igualdade que apresenta letras representando números desconhecidos.

Verificando

Nesta seção, apresentamos questões que abrangem todo o capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso eles apresentem dúvidas em relação a alguma das atividades propostas, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

As resoluções dos **testes 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Organizando

a) Espera-se que os estudantes tenham percebido que uma expressão algébrica é constituída de elementos quantitativos fixos e variáveis e manifesta um pensamento incompleto, enquanto a sentença matemática apresenta sentido completo. Já a equação é uma sentença matemática que exprime uma igualdade. Incentive os estudantes a exemplificar esses conceitos.
b) Os estudantes devem identificar o coeficiente como a parte numérica do termo algébrico, enquanto a parte literal, como o próprio nome diz, é constituída de letras. Solicite a apresentação de exemplos.
c) Espera-se que considerem possível a simplificação apenas de expressões que tenham termos semelhantes.
d) Neste caso os estudantes devem identificar como equação toda sentença que apresenta termos desconhecidos e é expressa por uma igualdade.
e) Resposta pessoal. Verifique se a resposta ressalta a aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo. Incentive-os a suplementar a questão acrescentando o conceito de solução da equação e do conjunto universo.
f) Resposta pessoal. Espera-se que considerem a resolução de equações como um dos instrumentos essenciais para a resolução de muitos problemas.

O fluxograma correspondente ao **item g** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Diversificando

Esta seção tem por objetivo oportunizar aos estudantes o contato com temas variados, em diferentes contextos e áreas do saber.

Atividades lúdicas são responsáveis por provocar afinidade dos estudantes com a Matemática. Aqui temos um exemplo clássico.

Ao conferir sua resposta, os estudantes se espantam com o resultado. Ao iniciar a resolução, jamais esperariam chegar a respostas como Dinamarca e morcego. Esse fato os incentiva e desafia a querer entender o porquê de resposta tão inusitada. Então é o momento propício para trabalhar as questões do **Agora é com você!**

Agora quem trabalha é você

Na **atividade 1** os estudantes podem considerar *aha* como uma incógnita e escrever:

$aha + \dfrac{aha}{7} = 19$

$7 \cdot aha + 7 \cdot \dfrac{aha}{7} = 19 \cdot 7$

$7aha + aha = 133$

$8aha = 133$

$aha = \dfrac{133}{8}$

Para a **atividade 2** há diversas possibilidades de elaboração de problemas. Faça uma lista com os problemas elaborados pelos estudantes e proponha-lhes que os resolvam em grupos.

Retomando a mágica e escolhendo o número $\frac{1}{2}$, conforme solicitado na atividade 3, temos:

- Pense em um número natural entre 1 e 5. "$\frac{1}{2}$"
- Multiplique-o por 2. "$\frac{1}{2} \cdot 2 = 1$"
- Adicione 8 ao resultado. "$1 + 8 = 9$"
- Divida por 2. "$\frac{9}{2}$"
- Subtraia o número em que você pensou. "$\frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4$"

Na **atividade 4** os estudantes podem substituir o número pensado por *x* e fazer:

- Pense em um número natural entre 1 e 5. "x"
- Multiplique-o por 2. "$x \cdot 2 = 2x$"
- Adicione 8 ao resultado. "$2x + 8$"
- Divida por 2. "$\dfrac{2x + 8}{2} = x + 4$"
- Subtraia o número em que você pensou. "$x + 4 - x = 4$"

Portanto, não importa o número escolhido, o resultado será sempre 4, o que responde à **atividade 5**.

DIVERSIFICANDO

Problemas de papiros e um pouco de "mágica"

Os conhecimentos que temos da Matemática egípcia provêm, essencialmente, de dois textos escritos em papiro: o papiro de Rhind e o papiro de Moscou. Nesses documentos, há problemas resolvidos, o que revela a preocupação pedagógica, pois muitos cálculos dos papiros são exercícios propostos para jovens estudantes.

Alguns problemas desses papiros não mencionam objetos concretos. Em vez disso, pedem o que equivale a soluções de equações, na forma $x + ax = b$, em que *a* e *b* são conhecidos e *x* é desconhecido. A incógnita é chamada de "*aha*".

Siga estes passos e tenha uma surpresa.

- Pense em um número natural entre 1 e 5.
- Multiplique-o por 2.
- Adicione 8 ao resultado.
- Divida por 2.
- Subtraia o número que você pensou.
- Associe esse resultado ao alfabeto.
  Por exemplo: se o resultado for 1, você escolherá a letra **A**; se for 2, escolherá a letra **B**; se for 3, escolherá a letra **C**; e assim por diante.
- Agora, pense no nome de um país europeu iniciado com a letra escolhida.
- Com a 5ª letra do nome desse país, pense no nome de um mamífero que voa.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Você, por acaso, pensou no país Dinamarca e no animal morcego?

2. Respostas possíveis: **a)** Determine um número cujo dobro mais 3 seja igual a 5. **b)** Eu tinha 5 figurinhas e dei algumas para meu amigo. No final, fiquei com uma figurinha. Quantas figurinhas dei a meu amigo? **c)** Um número mais seu dobro é igual a 3.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 O problema 24 do papiro de Rhind, por exemplo, pede o valor de *aha*, informando que *aha* mais um sétimo de *aha* dá 19. Encontre o valor de *aha*. **1.** O valor é $\frac{133}{8}$.

2 Escolha uma das equações a seguir e crie um problema cuja resolução seja efetuada pela equação que você escolheu.

a) $2x + 3 = 5$ b) $5 - x = 1$ c) $x + 2x = 3$

3 Repita o processo descrito na "mágica" apresentada, mas escolhendo o número racional $\frac{1}{2}$. Qual foi o resultado? **3.** O resultado foi 4.

4 Aplicando o que você estudou nos capítulos anteriores, explique por que o resultado da conta que você fez na atividade 3 sempre será 4. **4.** Porque $\frac{2x + 8}{2} - 4 = 4$. Provavelmente os estudantes usarão uma linguagem não formal; é possível explicar sem o uso da linguagem algébrica.

5 Se uma pessoa pensar em um número maior que 5, essa "mágica" funcionará? E se for um número racional qualquer? Justifique sua resposta.

5. Espera-se que os estudantes percebam que, independentemente do número, por meio da equação que representa esse problema, o número pensado será cancelado ao final da conta.

Capítulo 6

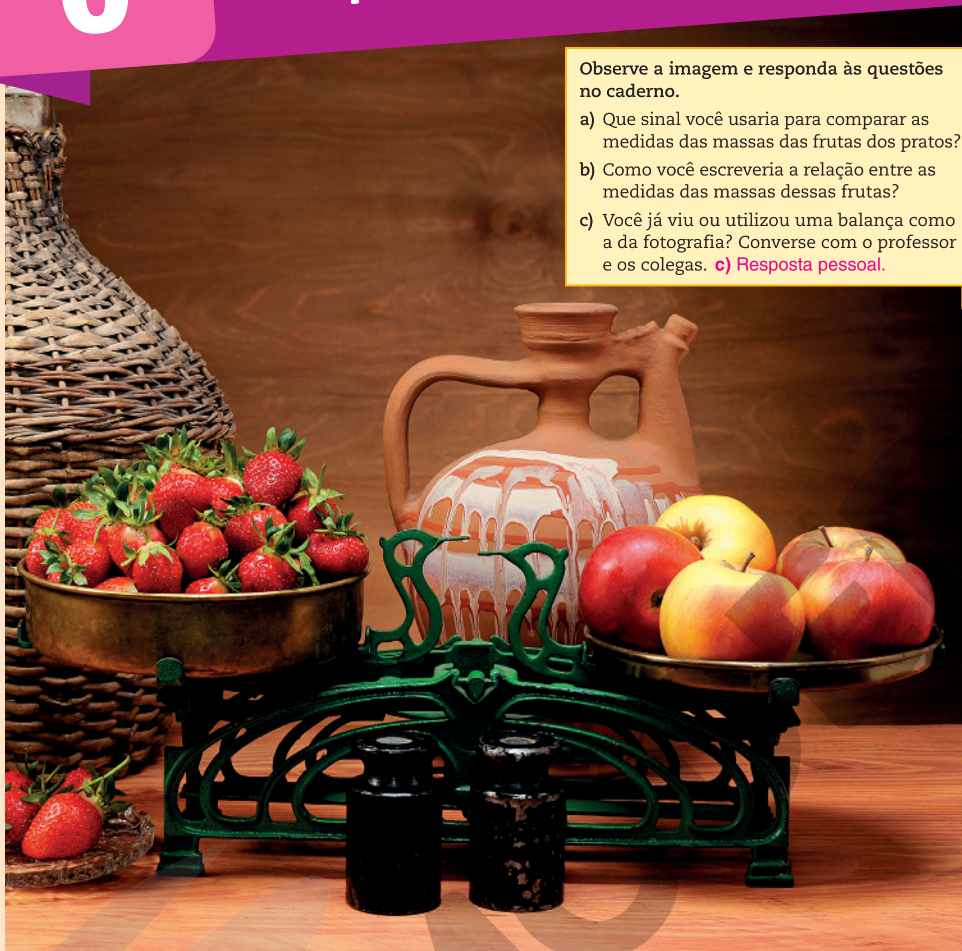
Inequações

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) Que sinal você usaria para comparar as medidas das massas das frutas dos pratos?

b) Como você escreveria a relação entre as medidas das massas dessas frutas?

c) Você já viu ou utilizou uma balança como a da fotografia? Converse com o professor e os colegas. **c)** Resposta pessoal.



DRAGI52/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

Balança com pratos em desequilíbrio.

a) Sinal de maior (>) ou de menor (<).
b) Resposta possível: $x > y$, sendo x a medida da massa das maçãs e y a medida da massa dos morangos.

A balança é um dos instrumentos de medida mais antigos, que remonta à Antiguidade e às primeiras transações comerciais entre os povos, tendo sofrido ao longo do tempo, aperfeiçoamentos significativos, de modo a tornar-se mais eficiente, mais prática e sobretudo mais precisa.

Na fotografia, a massa dos morangos difere da massa das maçãs, pois o travessão que sustenta os dois pratos não está na posição horizontal e os pratos estão em alturas diferentes. Podemos descrever essa condição de duas maneiras, ambas verdadeiras: a medida da massa das maçãs é maior do que a dos morangos ou a medida da massa dos morangos é menor do que a das maçãs.

Capítulo 6 – Inequações

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Lembre-se de que o cerne deste capítulo é trabalhar a desigualdade. Explore a fotografia de abertura, questionando os estudantes:

- A medida da massa total das maçãs é igual à medida da massa total dos morangos? (Não.)
- Se a resposta é negativa, então qual dos pratos tem maior medida de massa? (O prato das maçãs.)
- Como é possível saber? (O prato com a maior medida de massa fica abaixo do outro.)
- Se, em cada prato, colocarmos mais 200 g de frutas, os pratos se moverão para uma situação de nivelamento? (Não.)
- Se, em cada prato, duplicarmos a massa contida, os pratos se moverão para uma situação de nivelamento? (Não.)

Essas questões, com o auxílio da alegórica balança de dois pratos, exprimem um roteiro do que se espera para este capítulo no que se refere às inequações.

Com relação às perguntas dos itens da abertura:

a) Como as massas de cada prato da balança são desiguais, poderiam ser utilizados os sinais “maior que” ou “menor que”.

b) Pode-se escrever, por exemplo, que a massa das maçãs é maior do que a massa dos morangos.

c) Muito provavelmente as balanças de pratos não são utilizadas no cotidiano dos estudantes, mas podem ser observadas em museus ou em outros locais como objetos de decoração ou de coleção.

1. O que é inequação?

Comece explorando o significado da palavra inequação. Apresente aos estudantes outras palavras com o prefixo "in" e peça a eles que façam analogias. Por exemplo, palavras como inexistente (não existente), incompleto (não completo) e inalterado (não alterado) oferecem um repertório básico para a compreensão dessa acepção, a de negação. Assim, se uma equação é uma igualdade, uma inequação envolve uma "não igualdade", ou seja, uma desigualdade.

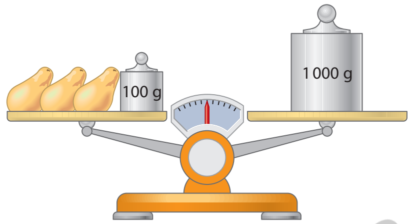
Converse com os estudantes acerca da variedade de símbolos associados às desigualdades ($\neq$, $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$), comparando-os ao símbolo único que envolve as igualdades ($=$).

Apresente problemas que tratam dos conceitos de igualdade e de desigualdade, a serem resolvidos com a manipulação de uma balança de dois pratos, como as situações-problema propostas nesta página.

1 O que é inequação?

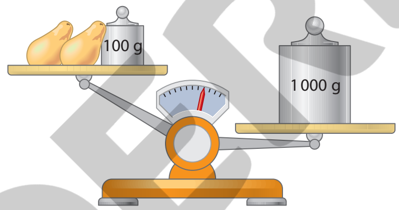
Nas situações a seguir, consideramos que a medida da massa de cada mamão em grama é a mesma, e, por ser desconhecida, vamos representá-la por x.

Situação 1



Na situação 1, a balança tem os pratos nivelados, o que indica uma **igualdade** da medida das massas, que pode ser expressa pela equação $3x + 100 = 1\,000$.

Situação 2



Na situação 2, a balança tem os pratos desnivelados. Nesse caso, o conteúdo do prato da esquerda tem medida de massa menor que o conteúdo do prato da direita. Por isso, não podemos escrever uma igualdade que expresse a situação. Aqui, empregamos um sinal de **desigualdade**.

Toda sentença matemática em que aparece um destes sinais: $\neq$ (diferente), $>$ (maior), $<$ (menor), $\geqslant$ (maior ou igual) ou $\leqslant$ (menor ou igual), expressa uma **desigualdade**.

Observe alguns exemplos.

a) $5 + 3 \neq 10$

b) $8^3 \neq 8 + 3$

c) $7 > 5$

d) $10 < 15$

e) $2x \geqslant 100$

f) $y \leqslant -3$

Considerando a desigualdade $a \neq b$, verificamos:

$$a > b \text{ ou } a < b$$

Nos exemplos **a** e **b**, obtemos:

$$5 + 3 < 10 \;\text{ e }\; 8^3 > 8 + 3$$

Retomando a situação 2, a desigualdade que traduz a situação da balança é:

$$\underbrace{2x}_{\substack{\text{medida da massa}\\ \text{dos dois mamões}}} + \underbrace{100}_{\substack{\text{medida da massa}\\ \text{do peso de 100 g}}} < \underbrace{1\,000}_{\substack{\text{medida da massa}\\ \text{do peso de 1 000 g}}}$$

Observe que podemos escrever essa mesma desigualdade de outra forma:

$$1\,000 > 2x + 100$$

Note, ainda, que a letra x representa a massa desconhecida do mamão, ou seja, x é uma **incógnita**.

As sentenças $2x + 100 < 1\,000$ e $1\,000 > 2x + 100$ são exemplos de **inequação**.

Inequação é toda sentença matemática expressa por uma desigualdade que apresenta uma ou mais incógnitas.

Verifique outros exemplos de inequações.

a) $x + 5 > 12$

b) $2x - 4 \leqslant x + 2$

c) $x^2 - 5x \geqslant 0$

d) $x + y < 0$

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que as inequações dos itens **a** e **b** têm uma só incógnita (a letra x) com expoente 1. Elas são exemplos de **inequações do 1º grau com uma incógnita**.

Já as duas últimas não são inequações do 1º grau com uma incógnita.

Assim como as equações, as inequações também têm dois membros. Vamos analisar isso, considerando a situação a seguir.

Em dezembro, Marly tirou 6 dias a mais de férias do que havia tirado em julho. No total (julho e dezembro), foram menos de 30 dias de férias.

Primeiro, indicaremos:

- o número de dias de férias de julho por y;
- o número de dias de férias de dezembro por $y + 6$.

$y + (y + 6) = 2y + 6$ (total)

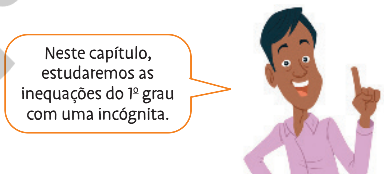
Sabendo que, no total, foram menos de 30 dias de férias, a quantidade de dias pode ser representada por esta inequação:

$$2y + 6 < 30$$

A expressão à esquerda do sinal de desigualdade é chamada de **primeiro membro** da inequação, e a expressão à direita do sinal de desigualdade, de **segundo membro** da inequação.

Portanto, na inequação $2y + 6 < 30$:

- a incógnita é y;
- o primeiro membro é $2y + 6$;
- o segundo membro é 30.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

O que é inequação?

Aproveite o início do capítulo para questionar os estudantes: Ao afirmar que determinado número desconhecido é maior que outro, a resposta corresponde a um valor único?

Espera-se que eles observem que, de modo geral, uma desigualdade admite muitas ou mesmo infinitas soluções. Por exemplo, a resposta à pergunta “Quais são os números menores que 4?” depende do conjunto universo considerado. Se for o dos números naturais, a solução será finita: {0, 1, 2, 3}. Porém, se for o conjunto $\mathbb{Z}$, haverá infinitas soluções: {..., −2, −1, 0, 1, 2, 3}.

Para se certificar de que os estudantes interpretam bem o significado dos símbolos associados às desigualdades, é interessante ler uma desigualdade de duas maneiras diferentes; por exemplo: $3 < 7$ pode ser lida da esquerda para a direita, como “três é menor que sete”, ou da direita para a esquerda, como “sete é maior que três”.

Habituá-los a usar com liberdade essas variações facilita a interpretação de desigualdades simultâneas. Por exemplo: $2 < x < 9$ pode ser lida como “x é maior que dois” e “x é menor que nove”, ou como “dois é menor que x, que é menor que nove”, pois explicita o fato de x pertencer ao intervalo]2, 9[.

Para saber mais

Esta seção retoma as sugestões de George Polya para a resolução de problemas. Podemos dizer que tais sugestões cabem em quaisquer capítulos desta coleção, visto que problemas – elementos didaticamente imprescindíveis – são propostos para ser resolvidos pelos estudantes.

No entanto, a resolução de problemas não deve ser entendida como conteúdo. Essa atividade é, portanto, mais uma contribuição com o objetivo de instrumentalizar os estudantes no desenvolvimento de habilidades inerentes ao processo de ensino-aprendizagem, como o reconhecimento de que alguns problemas podem ter estratégias de resolução similares e, dessa maneira, desenvolve-se a habilidade (EF07MA06).

Agora é com você!

Convém comentar com os estudantes que na lista há problemas com uma única solução, com nenhuma solução e com mais de uma solução (embora não seja possível determinar).

Possíveis resoluções para o **item a**, resolvendo os enigmas:

- 1º enigma: a idade x não é $3 \cdot 15$, ou seja, $x \neq 45$; nem é igual ou menor do que $2 \cdot 20 + 3 = 40 + 3 = 43$, ou seja, $x > 43$; e não é maior do que $\frac{92}{2} - 1 = 46 - 1 = 45$, ou seja, $x \leqslant 45$. Como não é 45 (pela primeira dica) e considerando a segunda dica, tenho 44 anos.
- 2º enigma: se o número de bolas é b, pode-se escrever $b > 3 \cdot 7 - 1$ e $b < \frac{105}{5}$, ou seja, $b > 20$ e $b < 21$; não há solução possível.
- 3º enigma: o número de irmãos é i; então, $i > 3 \cdot 2 - 3$, $i < \frac{12}{2} + 2$ e $i \neq 5$, ou seja, $i > 3$, $i < 8$ e $i \neq 5$, de forma que existem algumas soluções que satisfazem as 3 equações: $i = 4$, $i = 6$ e $i = 7$.

Dessa forma, o **item a** pode ser utilizado como justificativa para o **item b**. É possível observar que apenas o primeiro enigma tem resposta única; os outros possuem nenhuma ou mais do que uma resposta.

PARA SABER MAIS

Resolver problemas é uma arte!

No prefácio da primeira edição do livro *A arte de resolver problemas*, do matemático húngaro George Polya (1887-1985), lemos:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

Fonte: POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

A proposta de Polya é fundamentada em um longo e sério estudo de métodos de resolução, conhecido por **heurística**, cuja definição é: *arte de inventar, de fazer descobertas; ciência que tem por objeto a descoberta dos fatos; método educacional que consiste em fazer descobrir pelo estudante o que se lhe quer ensinar.*

Para a resolução de problemas, Polya sugere uma abordagem em quatro etapas de procedimento.

1. **Compreensão do problema**
   - Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?
   - Para determinar a incógnita, a condição é suficiente ou é insuficiente? É excessiva? É contraditória?
2. **Estabelecimento de um plano**
   - Qual é a ligação entre os dados e a incógnita?
   - Trace um caminho para a resolução: é possível descobrir algo para determinar a incógnita? E o que é preciso para descobrir esse algo?
   - Já viu um problema parecido ou que corresponda a esse? Conhece um problema auxiliar?
   - Conhece uma propriedade, um teorema, uma fórmula que seja útil para a resolução?
3. **Execução do plano**
   - Verifique cada etapa da execução. É possível verificar se essa etapa está correta?
4. **Reflexão sobre o que foi feito**
   - É possível verificar o resultado? E o argumento?
   - É possível seguir um caminho diferente?
   - O resultado obtido tem sentido no contexto do problema?

b) Sim, só o 1º enigma tem solução determinada: 44 anos. 2º enigma: Não tem solução, pois o número de bolas é um número natural, e não existe número natural que satisfaça a condição $20 < x < 21$.

3º enigma: espera-se que os estudantes percebam que não é possível dizer exatamente a quantidade de irmãos de Reginaldo. Nesse caso, só é possível dizer que o número de irmãos de Reginaldo pode ser 4, 6 ou 7.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Ao folhear um livro antigo de enigmas, Carlos se deparou com estes:

Minha idade, em anos, não é o triplo de 15, não é igual ou menor que o dobro de 20 mais 3, nem maior que a metade de 92 menos 1. Qual é minha idade, se ela é representada por um número natural?

Dentro de uma caixa, o número de bolas é maior que o triplo de 7 menos 1 e menor que a quinta parte de 105. Quantas bolas há nessa caixa?

O número de irmãos de Reginaldo é maior que o triplo de 2 menos 3, menor que a metade de 12 mais 2 e diferente de 5. Qual é exatamente o número de irmãos de Reginaldo?

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta: 44 anos.

a) Resolva esses três enigmas. **a)** Resposta pessoal.

b) Carlos resolveu os três enigmas e afirmou que somente um deles tem solução. Ele está correto? Justifique sua resposta.

c) Redija um texto explicando como você fez para resolver cada um desses enigmas.

c) Resposta pessoal.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Alternativas **b**, **c**, **d**, **f**, **h**; 1º membro à esquerda do sinal e 2º membro à direita do sinal de desigualdade.

1 Verifique, entre as sentenças, quais são inequações. Em seguida, identifique o primeiro e o segundo membro de cada inequação.

a) $3x - 1 = 10$
b) $7x < 10$
c) $x - 5 \leqslant 0{,}25$
d) $2x - 5 < x + 6$
e) $7 - 2 < 10$
f) $3x - 2 < x + 4$
g) $x - 15 = 20$
h) $5x - 3 \geqslant x + 10$
i) $2 + 9 \neq -\frac{9}{7}$

2 *Hora de criar* – Formule, em cada item, um problema que possa ser representado pela inequação apresentada. **2.** Respostas pessoais.

a) $2x + 5 < 30$
b) $3x + 12 > x - 8$

3 Escreva, usando o sinal <, a inequação que tem como primeiro membro $2x + 3$ e como segundo membro $x - 2$. Descubra um número inteiro negativo que torne essa sentença verdadeira.

3. $2x + 3 < x - 2$. Resposta possível: -6.

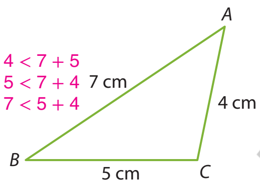
4 Em um triângulo, a medida de um lado qualquer é menor que a soma das medidas dos outros dois.

a) Escreva três desigualdades que relacionem as medidas dos lados do triângulo *ABC* ilustrado. **4. a)** $4 < 7 + 5$; $5 < 7 + 4$; $7 < 5 + 4$

b) Verifique se é possível construir um triângulo com 6 cm, 8 cm e 12 cm de medidas de lado. Justifique sua resposta.

c) Em um triângulo, dois lados medem 5 cm e 8 cm, respectivamente. Qual é o maior número inteiro que pode representar a medida do terceiro lado? E o menor? **4. c)** 12; 4

4. b) Sim, pois a medida de qualquer um dos lados é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2 Solução de uma inequação

Para verificar se um número é solução de uma inequação, podemos substituir a incógnita pelo número considerado. Acompanhe o exemplo.

Vamos verificar se os números -5 e $2{,}5$ são soluções da inequação $3x + 4 < 11{,}5$.

- Substituindo x por -5, obtemos:

$3 \cdot (-5) + 4 < 11{,}5$
$-15 + 4 < 11{,}5$
$-11 < 11{,}5 \leftarrow$ sentença verdadeira
-5 **é uma solução** da inequação dada.

- Substituindo x por $2{,}5$, obtemos:

$3 \cdot (2{,}5) + 4 < 11{,}5$
$7{,}5 + 4 < 11{,}5$
$11{,}5 < 11{,}5 \leftarrow$ sentença falsa
$2{,}5$ **não é uma solução** dessa inequação.

Acompanhe a situação a seguir.

O departamento de esportes de um clube comprou x pares de tênis a 100 reais cada par, além de outros materiais esportivos que custaram 600 reais. Foram gastos mais de 2 000 reais e comprados menos de 20 pares de tênis. Determine as possíveis quantidades de pares de tênis encomendados.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Essa situação pode ser representada pela inequação: $100x + 600 > 2000$

Exercícios propostos

Aproveite o **exercício 2** para pedir aos estudantes que, em duplas, inventem uma expressão cujo problema correspondente seja formulado pelo colega, e vice-versa.

O **exercício 4** pode ser explorado com o auxílio de palitos de madeira, como os de sorvete. Proponha aos estudantes que tentem construir triângulos nos quais a medida de um dos lados seja maior que a soma da medida dos outros dois, como um de medidas 2, 3 e 6. A experimentação propicia a percepção de que a construção é impossível.

As resoluções dos **exercícios 1** a **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

2. Solução de uma inequação

Habilidade da BNCC: **EF07MA13**.

Lembre-se de que, antes de abordar a técnica de resolução sistemática de inequações, o trabalho com tentativas para a obtenção de respostas possibilita aos estudantes desenvolver senso numérico, habilidades de cálculo mental e estratégias para aproximações sucessivas das respostas. Também são desenvolvidos aspectos relacionados à habilidade (EF07MA13) na formulação da expressão de uma inequação que pode resolver o problema apresentado e na determinação de suas soluções.

Comente com os estudantes que, se a inequação fosse $3x + 4 \leqslant 11{,}5$, o número 2,5 seria solução dela.

Também na situação da compra dos tênis, se tivéssemos no enunciado “Foram gastos 2 000 reais ou mais”, a inequação seria $100x + 600 \geqslant 2000$, e 14 seria uma solução.

Nesta página, a abordagem de resolução de inequação tem por base a tentativa e erro por meio da atribuição de valores para a incógnita.

Essa proposta de encaminhamento é o primeiro passo para o entendimento do que é resolver uma inequação. Assim, o que é feito nessa atividade precede a resolução pelos algoritmos com base nos princípios aditivo e multiplicativo.

Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, os estudantes podem resolver as inequações por tentativa e erro. Porém é possível que alguns deles, por perceberem alguma similaridade entre as inequações e as equações, tentem aplicar os princípios aditivo e multiplicativo. Nesse caso, encoraje-os a prosseguir, mesmo que esbarrem na questão da multiplicação dos dois membros da inequação por um número negativo. Então, proponha a eles que testem alguns valores encontrados e analisem o caminho escolhido.

No **exercício 6**, a verificação consiste em avaliar se a substituição da incógnita pelo valor gera uma relação verdadeira:

a) $4 \cdot 3 - 5 < 13 - 2 \cdot 3$
$12 - 5 < 13 - 6$
$7 < 7$ (falso)
Então, 3 não é solução.

b) $4 \cdot 1{,}5 - 5 < 13 - 2 \cdot 1{,}5$
$6 - 5 < 13 - 3$
$1 < 10$ (verdadeiro)
Então, 1,5 é solução.

c) $4 \cdot 0 - 5 < 13 - 2 \cdot 0$
$0 - 5 < 13 - 0$
$-5 < 13$ (verdadeiro)
Então, 0 é solução.

d) $4 \cdot 4 - 5 < 13 - 2 \cdot 4$
$16 - 5 < 13 - 8$
$11 < 5$ (falso)
Então 4, não é solução.

e) $4 \cdot (-2) - 5 < 13 - 2 \cdot (-2)$
$-8 - 5 < 13 + 4$
$-13 < 17$ (verdadeiro)
Então, -2 é solução.

f) $4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 5 < 13 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$
$-2 - 5 < 13 + 1$
$-7 < 14$ (verdadeiro)
Então, $-\frac{1}{2}$ é solução.

No **exercício 8**, como $-3 < x < 2$ exclui os valores inteiros -3 e 2 da solução, os valores inteiros que podem ser assumidos são -2, -1, 0 e 1. Como exercício complementar, solicite aos estudantes alguns exemplos contextualizados de desigualdades como essa. Uma resposta possível é: os estudantes de determinado curso têm idade *x* entre 10 anos e 15 anos ($10 < x < 15$).

As resoluções dos **exercícios 5**, **7**, **9** e **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

A quantidade de pares de tênis encomendados é um número natural, ou seja, o conjunto universo da inequação é o conjunto dos números naturais. Então, precisamos encontrar os números naturais que, colocados no lugar de *x*, tornam a sentença verdadeira.

- Para $x = 10$, obtemos:

  $100 \cdot 10 + 600 > 2\,000$
  $1\,000 + 600 > 2\,000$
  $1\,600 > 2\,000$ (falsa)

  Por isso, dizemos que **10 não é uma solução** da inequação dada.

- Para $x = 12$, obtemos:

  $100 \cdot 12 + 600 > 2\,000$
  $1\,200 + 600 > 2\,000$
  $1\,800 > 2\,000$ (falsa)

  Por isso, **12 também não é uma solução** da inequação dada.

- Para $x = 14$, obtemos:

  $100 \cdot 14 + 600 > 2\,000$
  $1\,400 + 600 > 2\,000$
  $2\,000 > 2\,000$ (falsa)

  Então, **14 não é uma solução** da inequação dada.

- Para $x = 15$, obtemos:

  $100 \cdot 15 + 600 > 2\,000$
  $1\,500 + 600 > 2\,000$
  $2\,100 > 2\,000$ (verdadeira)

  Por isso, dizemos que **15 é uma solução** da inequação dada.

Percebemos que qualquer número natural maior ou igual a 15 é solução dessa inequação. Portanto, os números naturais que satisfazem a inequação são: 15, 16, 17, 18, …

Porém, uma das condicionantes da situação-problema é a de que foram encomendados menos de 20 pares de tênis; portanto, $x < 20$. Assim, a quantidade de pares de tênis encomendados pode ter sido 15, 16, 17, 18 ou 19.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

5 Determine quais são os números inteiros negativos que são soluções da inequação $2x + 3 \geqslant x - 1$. **5.** -4, -3, -2 e -1

6 Considerando a inequação $4x - 5 < 13 - 2x$, verifique entre os números a seguir quais são soluções dela. **6.** Alternativas **b**, **c**, **e**, **f**.

a) 3
b) 1,5
c) 0
d) 4
e) -2
f) $-\frac{1}{2}$

7 Sendo $x > 20$ e $x \leqslant 21$, com *x* racional, verifique entre as sentenças a seguir quais são verdadeiras. **7.** Alternativas **b**, **c**.

a) *x* pode ser um número negativo.
b) *x* pode ser um número inteiro.
c) 20,1 pode ser um valor de *x*.
d) 21,1 pode ser um valor de *x*.

8 Um número é maior que -5 e menor que 4. Esse fato pode ser representado usando uma destas notações:

$x > -5$ e $x < 4$ ou $-5 < x < 4$

Agora, considerando $-3 < x < 2$, quais são os valores inteiros que *x* pode assumir? **8.** -2, -1, 0 e 1

9 Escreva uma inequação que corresponda a cada item.

a) Por questões econômicas, os produtos de uma indústria não devem ser embalados em menos de 20 unidades por caixa. **9. a)** $x \geqslant 20$
b) Para que esses produtos fiquem bem acondicionados, não devem ser embalados em mais de 30 unidades por caixa. **9. b)** $x \leqslant 30$
c) Cada caixa tem capacidade para 20 a 30 unidades desse produto. **9. c)** $20 \leqslant x \leqslant 30$

10 Um feirante, após ter vendido *x* melões a R$ 9,00 cada um, vendeu os restantes por um total de R$ 140,00. Depois de vender todos os melões, ele obteve mais de R$ 500,00.

a) Represente essa situação por meio de uma inequação. **10. a)** $9x + 140 > 500$
b) 40 é solução dessa inequação? E 41? **10. b)** Não. Sim.
c) Qual é a quantidade de melões que ele deve ter vendido a R$ 9,00? **10. c)** Mais de 40 melões.

3 Resolução de inequações

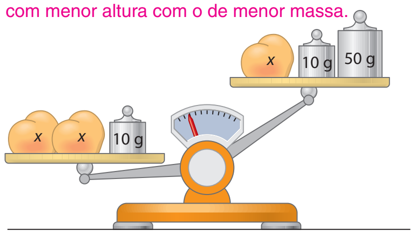
Atenção para a possibilidade de algum estudante relacionar o prato com menor altura com o de menor massa.

Na situação a seguir, vamos descobrir quais são as possibilidades para a medida da massa do pêssego, indicada pela letra *x*.

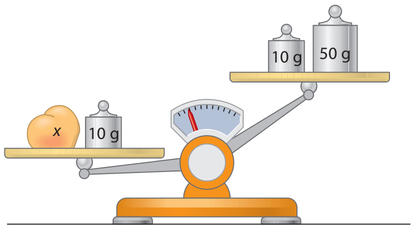
A balança, representada, não está nivelada: o prato da esquerda está com a maior medida de massa.

A inequação correspondente é:

$$2x + 10 > x + 10 + 50$$



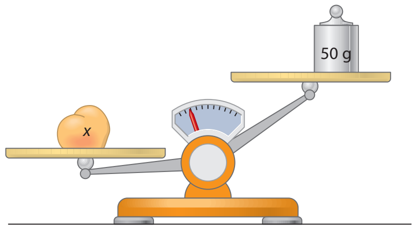
- Vamos retirar um pêssego de *x* gramas de cada prato.



A balança continua desnivelada, mantendo a mesma elevação dos pratos, e o prato da esquerda ainda é o que tem maior medida de massa. A inequação correspondente é:

$$x + 10 > 10 + 50$$

- Agora, vamos retirar um peso de 10 gramas de cada prato.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Observe que a balança continua desnivelada, mantendo a mesma elevação dos pratos. O prato da esquerda continua com maior medida de massa. A inequação correspondente é:

$$x > 50$$

As inequações obtidas em cada passo são equivalentes, ou seja, elas têm as mesmas soluções. Assim, concluímos que a medida da massa de cada pêssego é maior que 50 gramas.

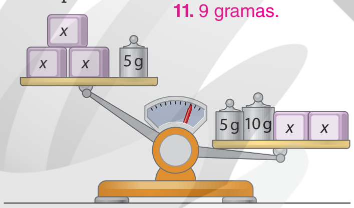
A resolução de inequações do 1º grau com uma incógnita é feita de maneira semelhante à resolução de equações, ou seja, transformando-se cada inequação em uma inequação equivalente mais simples, até que sejam obtidas as possíveis soluções.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11 Desenhe cada etapa com os esquemas das balanças para encontrar a maior medida de massa possível de cada cubinho, em grama, expressa por um número inteiro.

11. 9 gramas.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

12 Copie as afirmações falsas e, depois, modifique-as de modo que se tornem verdadeiras.

a) Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} + 5 > 2 + 5$.
12. a) Verdadeira.

b) Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} \cdot 2 < 2 \cdot 2$.
12.b) Falsa. Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} \cdot 2 > 2 \cdot 2$.

c) Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} - 2 < 2 - 2$.

d) Se $-3 > -5$, então $-3 \cdot (-1) < (-5) \cdot (-1)$.
12. d) Verdadeira.

e) Se $2x + \frac{5}{3} < \frac{8}{3}$, então $2x < 1$. **12. e)** Verdadeira.

12. c) Falsa. Se $\frac{9}{2} > 2$, então $\frac{9}{2} - 2 > 2 - 2$.

3. Resolução de inequações

Habilidade da BNCC: **EF07MA13**.

Retome com os estudantes os princípios de resolução de equações para que percebam a similaridade com as inequações. Destaque a relação entre o fato de, em ambos os contextos, as letras representarem valores desconhecidos, isto é, incógnitas. Assim, pode-se explorar e desenvolver aspectos relacionados à habilidade (EF07MA13). O trabalho com as situações representadas por meio de balanças de dois pratos é importante para a compreensão das justificativas dos procedimentos adotados nas resoluções.

Para os estudantes compreenderem a aplicação do princípio aditivo na resolução da inequação apresentada neste tópico pela ilustração da balança de dois pratos, seguimos passo a passo retirando, inicialmente, 1 pêssego de cada prato. Depois, retiramos 1 peso de 10 gramas de cada prato, mantendo a desigualdade inicial, ou seja, escrevendo inequações equivalentes à inequação dada.

Exercícios propostos

O **exercício 11** possibilita avaliar se os estudantes compreenderam a resolução de uma inequação. Observando as posições e os conteúdos dos pratos da balança, é possível escrever $3x + 5 < 15 + 2x$. Resolvendo:

$3x + 5 - 5 < 15 + 2x - 5$
$3x < 10 + 2x$
$3x - 2x < 10 + 2x - 2x$
$x < 10$.

Então, a maior massa possível é 9, pois é o maior inteiro menor do que 10.

O **exercício 12** tem por objetivo induzir os estudantes, com base em casos particulares, a formular uma proposta de ação de resolução de uma desigualdade por meio dos princípios aditivo e multiplicativo. A resolução do **exercício 12** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Exercícios propostos

No **exercício 13**, a balança de dois pratos é substituída pela gangorra, um brinquedo conhecido dos estudantes dessa faixa etária, que aqui representa a desigualdade entre as medidas das massas de duas garotas. No **item a**, a dinâmica descrita no brinquedo dessa atividade indica que elas têm medidas de massa diferentes; como Raquel está embaixo, ela é mais pesada. No **item b**, como $m > 26$ e $m < 31$, as opções inteiras, em kg, são: 27, 28, 29 ou 30.

Propriedades da desigualdade

Neste tópico, tratamos da aplicação em desigualdades dos equivalentes aos princípios aditivo e multiplicativo das igualdades com exemplos numéricos; dessa maneira, também pode ser desenvolvida a habilidade (EF07MA10), com a comparação dos valores no contexto que busca a manutenção de inequações verdadeiras. O uso da reta numérica pode auxiliar trazendo a representação gráfica das soluções. O sentido da desigualdade fica mantido, exceto no caso da multiplicação de ambos os membros por um número negativo.

13 Raquel e Muriel brincam em uma gangorra, cada uma em uma ponta. Raquel tem 31 quilogramas e, quando não impulsiona com os pés no chão para subir, Muriel não consegue descer.


OLESIA BILKEI/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

a) Qual delas tem a maior medida de massa? **13. a)** Raquel.

b) Sabendo que Muriel tem medida de massa m e que m é maior que 26 quilogramas, que valores inteiros m pode ter?
13. b) 27, 28, 29 ou 30 quilogramas.

14 *Hora de criar* – Elabore um problema sobre inequação para um colega resolver. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **14.** Resposta pessoal.

Propriedades da desigualdade

Na resolução de inequações, aplicaremos as propriedades da desigualdade.

Inicialmente, vamos estabelecer que:

- os sinais $<$ e $<$ têm o mesmo sentido;
- os sinais $<$ e $>$ têm sentidos opostos;
- os sinais $>$ e $>$ têm o mesmo sentido;
- os sinais $>$ e $<$ têm sentidos opostos.

Verifique o que acontece com o sentido de uma desigualdade quando adicionamos um mesmo número a seus dois membros.

Mesmo sentido.

a) Se $8 > 3$, então $8 + \mathbf{2} > 3 + \mathbf{2}$, ou seja, $10 > 5$

Adicionamos +2 aos dois membros da desigualdade.

Mesmo sentido.

b) Se $-8 < 5$, então $-8 \mathbf{- 2} < 5 \mathbf{- 2}$, ou seja, $-10 < 3$

Adicionamos –2 aos dois membros da desigualdade.

Note que o sentido das desigualdades não foi alterado.

> Uma desigualdade não muda de sentido quando adicionamos ou subtraímos um mesmo número a seus dois membros.

Agora, observe o que acontece quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma desigualdade por um número positivo.

Mesmo sentido.

a) Se $-8 < 5$, então $-8 \cdot \mathbf{2} < 5 \cdot \mathbf{2}$, ou seja, $-16 < 10$

Multiplicamos os dois membros por 2.

Mesmo sentido.

b) Se $-12 < 9$, então $-12 : \mathbf{3} < 9 : \mathbf{3}$, ou seja, $-4 < 3$

Dividimos os dois membros por 3.

Repare que o sentido das desigualdades também não foi alterado.

> Uma desigualdade não muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos seus dois membros por um mesmo número positivo.

Verifique, ainda, o que acontece quando multiplicamos ou dividimos os dois membros de uma desigualdade por um número negativo.

Mudou de sentido.

a) Se $8 > 3$, então $8 \cdot (-2) < 3 \cdot (-2)$, pois $-16 < -6$.

Multiplicamos os dois membros por -2.

Mudou de sentido.

b) Se $-12 < 9$, então $-12 : (-3) > 9 : (-3)$, pois $4 > -3$.

Dividimos os dois membros por -3.

Nesse caso, podemos observar que a desigualdade mudou de sentido.

> Uma desigualdade muda de sentido quando multiplicamos ou dividimos seus dois membros por um mesmo número negativo.

Para exemplificar, vamos resolver a inequação $5x + 3 > 2x - 14$, considerando x um número racional.

Aplicando as propriedades das desigualdades, obtemos:

$5x + 3 > 2x - 14$

$5x + 3 - 3 > 2x - 14 - 3$ → Adicionamos (-3) aos dois membros.

$5x > 2x - 17$ → Reduzimos os termos semelhantes.

$5x - 2x > 2x - 17 - 2x$ → Adicionamos $(-2x)$ aos dois membros.

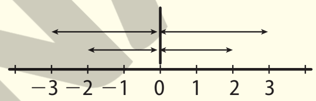
$3x > -17$ → Reduzimos os termos semelhantes.

$x > -\frac{17}{3}$ → Dividimos os dois membros por 3.

Logo, qualquer número racional maior que $-\frac{17}{3}$ satisfaz essa inequação.

Propriedades da desigualdade

No caso da multiplicação ou da divisão de ambos os membros da desigualdade por um mesmo número negativo, complemente a justificativa da inversão do sentido da desigualdade apoiando-se na ideia de simetria, mobilizando a habilidade (EF07MA10). Por exemplo, $2 < 3$: como a desigualdade envolve dois números positivos, 2 está mais próximo da origem que 3, de modo que seus pontos simétricos (-2 e -3, respectivamente) mantêm a mesma relação de proximidade. Mas, como -3 está mais à esquerda na reta que -2, então $-2 > -3$, o que inverte o sentido da desigualdade.



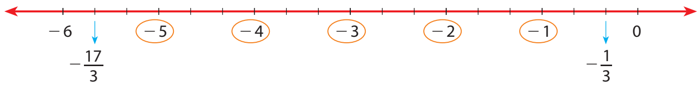
NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Resolvendo problemas com inequações

Ao trabalhar este tópico, lembre-se de que as questões que envolvem desigualdades exigem dos estudantes os mesmos tipos de habilidade requeridos para a resolução de equações.

A representação de uma situação-problema em linguagem matemática é um processo que demanda a compreensão do enunciado e das relações entre a incógnita e as condições do problema e o domínio da linguagem algébrica. Nesse processo, é necessário reconhecer certas características nos problemas, sendo possível determinar padrões nas resoluções de problemas com a mesma estrutura, desenvolvendo a habilidade (EF07MA06).

Se quiséssemos determinar os números inteiros negativos que satisfazem a inequação dada, teríamos de encontrar todos os números inteiros negativos que são maiores que $-\frac{17}{3}$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, os números inteiros negativos maiores que $-\frac{17}{3}$ são −5, −4, −3, −2 e −1.

Resolvendo problemas com inequações

Acompanhe algumas situações de resolução de inequações.

Situação 1

Alex abrigou no tanque de piscicultura de seu sítio 2 500 trutas e, com isso, ficou com uma quantidade maior que o triplo do que possuía. Antes disso, qual era o número máximo de trutas que havia no tanque?

MAURICIO SIMONETTI/PULSAR IMAGENS

Tanques de criação (piscicultura) de trutas em Resende, RJ. (Fotografia de 2021.)

Indicaremos por x a quantidade de trutas que havia inicialmente no tanque. Note que x tem de ser um número natural. Dessa forma, podemos representar a situação pela inequação $x + 2\,500 > 3x$, sendo x um número natural.

Resolvendo essa inequação, podemos responder à questão.

$x + 2\,500 > 3x$

$x + 2\,500 - x > 3x - x$ → Adicionamos $(-x)$ aos dois membros.

$2\,500 > 2x$ → Reduzimos os termos semelhantes.

$\frac{2\,500}{2} > \frac{2x}{2}$ → Dividimos os dois membros por 2.

$1\,250 > x$

Como 1 250 é maior que o número de trutas que havia inicialmente no tanque e x tem de ser um número natural, concluímos que havia, no máximo, 1 249 trutas nesse tanque.

148

Situação 2

Vamos determinar os números inteiros que são soluções da inequação $2(x - 5) \geqslant 3(x - 4)$.

$2(x - 5) \geqslant 3(x - 4)$

$2x - 10 \geqslant 3x - 12$ → Aplicamos a propriedade distributiva.

$2x - 10 + 10 \geqslant 3x - 12 + 10$ → Adicionamos (+10) aos dois membros.

$2x \geqslant 3x - 2$ → Reduzimos os termos semelhantes.

$2x - 3x \geqslant 3x - 3x - 2$ → Adicionamos ($-3x$) aos dois membros.

$-x \geqslant -2$ → Reduzimos os termos semelhantes.

$\frac{-x}{-1} \leqslant \frac{-2}{-1}$ → Dividimos os dois membros por (–1).

$x \leqslant 2$

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, qualquer número inteiro menor ou igual a 2 é solução dessa inequação.

Situação 3

Sabendo que x é um número natural, vamos agora resolver a inequação $\frac{x - 3}{3} + \frac{2x - 1}{2} < 12$.

$\frac{x - 3}{3} + \frac{2x - 1}{2} < 12$

$\frac{2(x - 3)}{6} + \frac{3(2x - 1)}{6} < \frac{72}{6}$ → Reduzimos ao mesmo denominador. Multiplicamos os dois membros por 6.

$2(x - 3) + 3(2x - 1) < 72$ → Aplicamos a propriedade distributiva.

$2x - 6 + 6x - 3 < 72$

$8x - 9 < 72$ → Reduzimos os termos semelhantes.

$8x - 9 + 9 < 72 + 9$ → Adicionamos 9 aos dois membros.

$8x < 81$

$\frac{8x}{8} < \frac{81}{8}$ → Dividimos os dois membros por 8.

$x < \frac{81}{8}$

Dividindo 81 por 8, obtemos:

$$\begin{array}{r|l} 81 & 8 \\ \cline{2-2} 01 & 10 \end{array}$$

Então, $\frac{81}{8}$ é um número entre 10 e 11. Logo, os números naturais menores que $\frac{81}{8}$ são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10.

Resolvendo problemas com inequações

É importante que os estudantes compreendam o raciocínio que levou a determinada tradução em linguagem algébrica, além da apresentação de um repertório de problemas que abordem diferentes situações.

Assim, nas situações propostas, após obter a inequação mais simples, equivalente à inequação dada e que nos dá as raízes dela, voltamos às condições definidas no enunciado para declarar as soluções da inequação inicial.

Exercícios propostos

No **exercício 15**, oriente os estudantes a estar atentos ao conjunto universo definido em cada item.

No **exercício 17**, ainda considerando apenas inteiros, solicite a eles que modifiquem o valor de referência do perímetro (32) no enunciado, de modo que:

a) o problema tenha mais de uma resposta;

b) o problema não tenha resposta.

As respostas serão: qualquer número inteiro maior do que 32; qualquer número inteiro menor do que 32.

Após a resolução do **exercício 19**, proponha aos estudantes uma variação do problema:

Um barril contém 67 litros de leite, que serão distribuídos igualmente em garrafas com 5 litros de capacidade. No máximo, quantas garrafas poderão ser preenchidas com leite?

Esse problema pode ser representado pela inequação: $67 - 5x \geqslant 0$, cuja solução é $x \leqslant \frac{67}{5}$. Portanto, serão preenchidas 13 garrafas ou menos.

Note que esse problema recai em uma inequação de 1º grau cuja solução deve ser um número inteiro não negativo.

Porém existem problemas que recaem em desigualdades com duas incógnitas, para os quais não há método direto de resolução, como as inequações de 1º grau. Por exemplo:

Em um sítio há galinhas e porcos, totalizando menos de 180 patas. Quantas galinhas e quantos porcos há nesse sítio?

Esse problema pode ser expresso algebricamente chamando-se a quantidade de galinhas de x e a quantidade de porcos de y. Temos, então: $2x + 4y < 180$.

Embora a resolução de inequação desse tipo esteja além dos objetivos propostos aos estudantes dessa faixa etária, é interessante que eles saibam que há muitos tipos de inequação, relacionados com importantes aplicações matemáticas.

As resoluções dos **exercícios 15** a **25** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

15. b) $x > \frac{15}{2}$, com x racional **15. c)** …, –2, –1, 0, 1 e 2

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15 Resolva as inequações a seguir. **15. a)** 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6

a) $x + 5 < 12$, sendo x um número natural.

b) $2x - 3 > 12$, sendo x um número racional.

c) $3x - 4 > 5x - 10$, sendo x um número inteiro.

d) $4x + 3 < x - 18$, sendo x um número natural.

15. d) Não tem solução, pois $x < -7$.

16 Resolva as inequações, considerando x um número racional. **16. d)** $x < 22$

a) $4(x + 3) > 2(x - 1)$

b) $3(x + 2) > 2(2x + 4)$

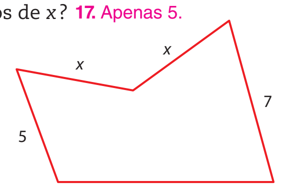
c) $5x - (x - 2) \leqslant 6$

d) $7(x - 2) < 2(3x + 4)$

e) $x - 2(x - 3) \leqslant x + 5$ **16. e)** $x \geqslant \frac{1}{2}$

16. a) $x > -7$ **16. b)** $x < -2$ **16. c)** $x \leqslant 1$

17 No polígono abaixo, sabe-se que x é maior que 4 e que a medida de seu perímetro é menor que 32. Quais são os possíveis valores inteiros de x? **17.** Apenas 5.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

18 Dada a inequação $2(x + 3) \leqslant 4(x - 1)$, encontre:

a) os números naturais menores que 8 que sejam soluções; **18. a)** 5, 6 e 7

b) o menor número inteiro de três algarismos que seja solução. **18. b)** 100

19 De um garrafão contendo 10 litros de caldo de cana, até quantos copos com capacidade de 0,25 litro podem ser retirados de modo que restem mais de 3 litros? **19.** 27 copos.

FABIO EIJI SIRASUMA/ ARQUIVO DA EDITORA

20 Meu carro percorre 12 quilômetros com 1 litro de gasolina. Quantos litros de gasolina, no mínimo, preciso ter no tanque para percorrer mais de 700 quilômetros sem abastecer? **20.** O valor deve ser maior que 58,33 litros.

21 Meu pai tem 25 anos a mais que eu. Hoje, o triplo da minha idade mais a idade de meu pai é maior que a idade do meu avô. Sabendo que meu avô tem 65 anos, qual é a idade mínima de meu pai? **21.** 36 anos.

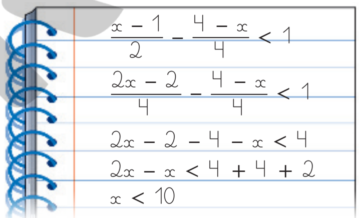
22 Considere $x - \frac{1}{3} > \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$, com x racional, e responda às questões no caderno. **22. a)** Sim, porque $2 > \frac{7}{6}$.

a) O número 2 é solução? Por quê?

b) Existe algum número negativo que seja solução? Por quê? **22. b)** Não, porque $x > \frac{7}{6}$.

23 Um bloco retangular mede 15 cm de comprimento, 12 cm de largura e 5 cm de altura. Paulo deseja construir outro bloco com a mesma medida de largura e a mesma medida de altura daquele, porém com mais de 1 200 cm³ de volume. Quantos centímetros, no mínimo, deve medir o comprimento desse outro bloco? (As medidas são expressas em números inteiros.) **23.** 21 cm.

24 Acompanhe como Joana resolveu a inequação $\frac{x - 1}{2} - \frac{4 - x}{4} < 1$.



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Ao conferir o resultado, ela percebeu que havia errado. Quando encontrou o erro, corrigiu-o e obteve a solução correta.

a) Que maneira ela pode ter escolhido para conferir o resultado?

b) Descubra qual foi o erro de Joana.

c) Qual foi a solução que Joana encontrou quando acertou? **24. c)** $x < \frac{10}{3}$

25 *Hora de criar* – Enuncie um problema que possa ser solucionado por meio da inequação $5x + 2 \leqslant 3x - 15$. Depois, resolva-o. **25.** Resposta pessoal. $x \leqslant -\frac{17}{2}$.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

24. b) O erro começou na 3ª linha, que deveria ser $2x - 2 - 4 + x < 4$.

Digitei todo o trabalho do meu grupo no computador e imprimi as páginas sem usar o verso. Para isso, cada integrante do meu grupo deu 3 folhas, e ainda tive de colocar mais 1 folha além das 3. Assim, usamos menos de 13 folhas no trabalho todo. Quantos eram os integrantes do meu grupo? *Pense mais um pouco...*: 2 ou 3.

24. a) Resposta possível: ela substituiu valores no lugar de x, por exemplo o 9, e verificou se obteve uma sentença verdadeira. Observe aos estudantes que a verificação por substituição de valores, no caso das inequações, pode não ser confiável.

Pense mais um pouco...

Como cada integrante do grupo deu 3 folhas e um deles deu 1 folha a mais, se consideramos x o total de integrantes do grupo, temos:

$$3x + 1 < 13$$
$$3x < 12$$
$$x < 4$$

Portanto, $x = 2$ ou $x = 3$, pois x deve ser natural e maior do que 1.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Alfabetizando com gráficos e tabelas

No dicionário, o verbete **alfabetização** é definido como:

ALFABETIZAÇÃO
- substantivo feminino
  ato ou efeito de alfabetizar, de ensinar as primeiras letras
1 Rubrica: pedagogia.
  iniciação no uso do sistema ortográfico
1.1 Rubrica: pedagogia.
  processo de aquisição dos códigos alfabético e numérico; letramento

Fonte: ALFABETIZAÇÃO. *In*: HOUAISS, A.; VILLAR, M. de S. (ed.). **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

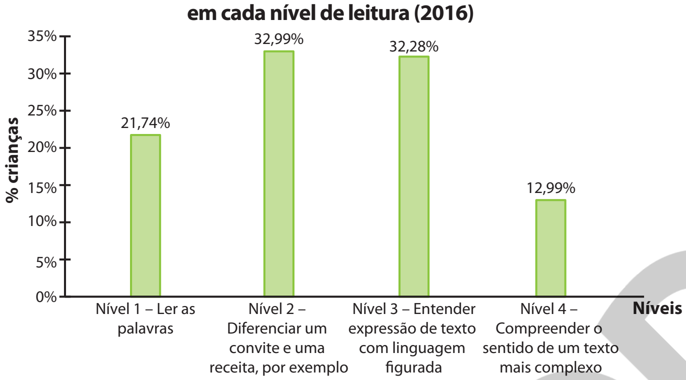
O conceito de alfabetização pode ser ampliado para todo o tipo de aquisição das várias linguagens existentes, desde o "**beabá**" e a numeração até linguagens mais complexas como gráficos e tabelas. Um profissional da área médica, por exemplo, alfabetiza-se na leitura de um eletrocardiograma; um engenheiro, na leitura e escrita de um fluxograma; um músico, na leitura e escrita de uma partitura etc. Podemos passar a vida toda nos alfabetizando em várias linguagens sem nunca chegar à totalidade delas.

A definição de um limite de aquisição do letramento, no início do Ensino Fundamental, é um tema polêmico que sempre volta ao debate: seria melhor no 2º ano ou no 3º ano?

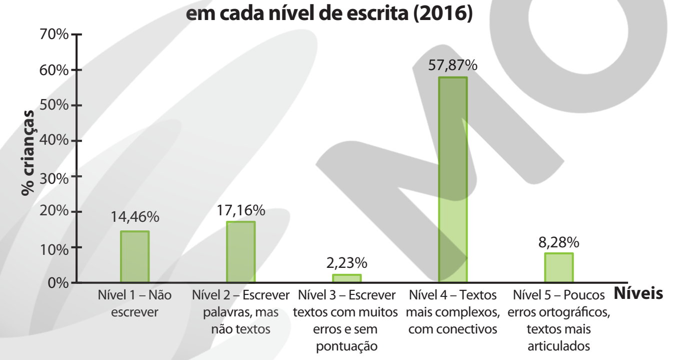
Nos gráficos a seguir, observe qual era a situação dos estudantes do 3º ano de escolas públicas na leitura e na escrita, em 2016.

Beabá: reunião das letras que fazem parte do alfabeto; abecedário.

Percentual de estudantes de escolas públicas do 3º ano em cada nível de leitura (2016)



Percentual de estudantes de escolas públicas do 3º ano em cada nível de escrita (2016)



BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Relatório do 3º ciclo de monitoramento das metas do Plano Nacional de Educação – 2020** [recurso eletrônico]. Brasília, DF: Inep, 2020.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF07MA36**.

Esta seção trata da Unidade Temática **Probabilidade e estatística**. Aqui, ela é abordada em pesquisa veiculada pela mídia na área da Educação, em que se usam diferentes meios (gráficos e tabelas) para analisar a questão da localização da alfabetização no currículo dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A soma das porcentagens de níveis criteriosamente selecionados indica a avaliação dos estudantes quanto ao quesito leitura e ao quesito escrita ao final do 3º ano.

Essa pesquisa, não censitária, porém com amostra significativa e estatisticamente confiável, fornece subsídios para argumentar a favor ou contra a antecipação do processo de alfabetização para o 2º ano do Ensino Fundamental.

Agora quem trabalha é você!

No **exercício 1**, no **item a**, deve-se observar que no nível 4 de leitura estão 12,99% dos estudantes. A aprendizagem adequada, então, é correspondente aos níveis 3 e 4 juntos, uma vez que 12,99% + 32,28% = 45,27%, ou seja, pouco mais de 45%. No **item b**, considerando as últimas duas categorias como adequadas, há 8,28% + 57,87% = 66,15% dos estudantes.

Para trabalhar os temas população e mobilidade urbana, propostos na **atividade 2**, auxilie os estudantes a se organizar em grupos, elencar as etapas da pesquisa e definir quais deles ficarão responsáveis por determinada etapa. Depois, incentive-os a compor gráficos e as tabelas para representar os dados coletados.

Para concluir, os estudantes podem apresentar um texto escrito acompanhado dos gráficos e das tabelas. Ao serem comparados, esses dados nos fornecem subsídios para a avaliação das condições sociais a que estão submetidas as respectivas populações; dessa maneira é desenvolvida a habilidade (EF07MA36).

Você já aprendeu que os mesmos dados podem ser organizados de maneiras diferentes. Por exemplo, os dados apresentados nos gráficos poderiam ser organizados em forma de tabela, de texto ou, ainda, em forma de gráfico de barras.

Note como ficariam esses dados dispostos em forma de tabela.

Percentual de estudantes de escolas públicas do 3º ano em cada nível de leitura e escrita em 2016

Nível	1	2	3	4	5
Leitura	Ler palavras (21,74%)	Diferenciar textos (32,99%)	Linguagem figurada (32,28%)	Texto mais complexo (12,99%)	—
Escrita	Não escrever (14,46%)	Escrever palavras (17,16%)	Muitos erros, sem pontuação (2,23%)	Textos com conectivos (57,87%)	Textos articulados (8,28%)

BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Relatório do 3º ciclo de monitoramento das metas do Plano Nacional de Educação – 2020** [recurso eletrônico]. Brasília, DF: Inep, 2020.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Usando como referência os gráficos e a tabela anteriores, responda às perguntas.

a) Ao final do 3º ano, um pouco mais de 45% dos estudantes têm aprendizagem adequada em leitura. A quais níveis corresponde essa afirmação? **1. a)** Níveis 3 e 4.

b) Ao final do 3º ano, quantos por cento dos estudantes têm aprendizagem adequada em escrita? **1. b)** 66,15%

c) Nos anos de 2020 e 2021 muitos estudantes não tiveram acesso a aulas presenciais devido à pandemia de Covid-19. Se essa avaliação dos níveis de leitura e escrita fosse aplicada em 2022, o que você acha que aconteceria com esses níveis? Na sua opinião, o que os órgãos governamentais poderiam fazer para melhorar esses índices?

2 A mobilidade nas grandes cidades do mundo é um grande problema e um desafio para as respectivas administrações. **2.** Resposta pessoal.

A mobilidade urbana é uma atividade essencial para a sociedade, já que se refere à locomoção das pessoas entre os espaços para atender às suas necessidades.

Ela é definida como qualquer tipo de movimento – a pé, de carro, ônibus, bicicleta, *skate*, cadeira de rodas, trem ou metrô – que tenha como finalidade o deslocamento de um ponto a outro em um espaço geográfico.

Um dos grandes desafios do nosso tempo é que a urbanização e o aumento da concentração de pessoas sem o planejamento adequado inviabiliza a mobilidade urbana.

A preferência pelo transporte individual e a escassez de ciclovias e transporte público nas cidades brasileiras são, com frequência, geradores de congestionamentos e gases do efeito estufa. Esse cenário afeta negativamente a qualidade de vida dos cidadãos.

Nesse contexto, é preciso buscar alternativas sustentáveis e estratégias para enfrentar o desafio da mobilidade urbana. A boa notícia é que já existem algumas possibilidades e exemplos a serem seguidos.

Fonte: **Portal eCycle**. Mobilidade urbana: desafios e ideias sustentáveis. Disponível em: https://www.ecycle.com.br/mobilidade-urbana/. Acesso em: 18 fev. 2022.

a) Escolha 10 pessoas que você conheça e faça uma pesquisa sobre mobilidade urbana. Dependendo das pessoas que você escolher, poderá fazer perguntas como:
- Que meios de transporte você usa para se locomover de sua residência à escola?
- Que meios de transporte você usa para se locomover de sua residência ao trabalho?
- Para facilitar seu deslocamento, os órgãos públicos deveriam investir em quais meios de locomoção?

b) Após a coleta dos dados, organize as informações em tabelas e em gráficos.

c) Escreva um texto com uma conclusão de sua pesquisa e, depois, compartilhe-o com o professor e os demais colegas de turma.

1. c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que, por causa da falta de aulas presenciais na escola, esse índice pode ter piorado.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Entre os números –3, 0 e 3, quais são soluções da inequação $5x - 2 < 2x + 3$? **1.** –3 e 0

2 Determine os números racionais que satisfazem as inequações a seguir.

a) $4(x + 3) > 2(x - 1)$ **2. a)** $x > -7$

b) $x - 2(x - 3) \leqslant x + 5$ **2. b)** $x \geqslant \frac{1}{2}$

c) $2 + 5(3x + 1) > 0$ **2. c)** $x > -\frac{7}{15}$

3 A quantidade de CDs que eu tenho é o quádruplo da quantidade de CDs que meu irmão tem subtraída de 5. Juntos, temos, no máximo, 10 CDs. Quantos CDs pode ter meu irmão? **3.** 2 ou 3 CDs.

4 Emendando dois pedaços de barbante, obtém-se mais de 1 m. A medida do comprimento do pedaço menor, em centímetro, é representado por um número inteiro. O pedaço maior tem 20 cm a mais que o menor. Qual é a medida do comprimento mínimo, em centímetro, do barbante menor? **4.** 41 centímetros.

5 Uma empresa tem a opção de embalar seu produto em dois tipos de caixa, A e B. Na caixa do tipo A, é possível embalar de 20 a 30 unidades, e na caixa do tipo B, de 15 a 20 unidades. Para este mês, a empresa usou 100 unidades de cada tipo de caixa. **5. a)** 5 000 produtos; 3 500 produtos.

a) Qual é a quantidade máxima de produtos que a empresa pode embalar neste mês? E qual é a quantidade mínima?

b) Represente por meio de uma inequação a quantidade de produtos que a empresa pode embalar neste mês. **5. b)** $3\,500 \leqslant x \leqslant 5\,000$

c) A empresa poderá embalar 5 001 produtos neste mês? E 4 896 produtos? Justifique sua resposta. **5. c)** Não, pois o máximo possível é 5 000 unidades. Sim, pois 4 896 está entre 3 500 e 5 000.

6 Existe algum número racional maior que –4 que seja solução da inequação $\frac{x-2}{3} + 2x \geqslant \frac{5x}{2}$? Justifique sua resposta. **6.** Não, pois $x \leqslant -4$.

7 Quais números inteiros menores que 10 satisfazem a inequação $5 - \frac{x}{2} \leqslant \frac{x}{3} + 1$? **7.** 5, 6, 7, 8 e 9

8 Um tonel contém 100 litros de azeite. Quantas garrafas de 0,9 litro é possível encher, no máximo, de modo que ainda sobrem mais de 10 litros no tonel? **8.** 99 garrafas.

9 Dois meninos faltaram à aula de informática. Ainda assim, nessa aula, o número de meninos era maior que o número de meninas. Sabendo-se que havia 10 meninas na sala de aula, qual é o menor número possível de estudantes dessa turma? **9.** 23 estudantes.

10 Ao final de uma prova de Matemática, realizada para selecionar os estudantes que participarão de uma Olimpíada de Matemática, Mariana comenta com seu amigo Rodrigo:

— Eu fui muito bem. Pelo gabarito que está afixado no quadro de avisos, acertei 75 questões. E você?

Rodrigo responde:

— Infelizmente não fui nada bem. Mesmo que tivesse acertado o dobro do que acertei, ainda precisaria de mais três acertos para superar o número de pontos que você obteve.

Qual foi a quantidade mínima de pontos que Rodrigo obteve? **10.** 37 pontos.

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

11 Preciso cercar um terreno, que tem a forma de um quadrilátero, para fazer uma horta. A medida do perímetro do terreno é maior que 120 metros. Dois dos lados têm a mesma medida. O terceiro lado mede a metade da medida dos lados que têm medidas iguais. O quarto lado mede 21 metros. Todos os lados têm medidas expressas por números inteiros. Nessas condições, qual é a quantidade mínima de metros de arame necessária para cercar esse terreno com seis voltas, que deve ter um portão que mede 1 metro de largura? **11.** 720 m

153

Exercícios complementares

Assim como em outros capítulos, esta seção traz uma sequência de exercícios que tem por objetivo fornecer mais oportunidades para os estudantes apreenderem os conceitos estudados, além de servir de instrumento de avaliação.

As resoluções dos **exercícios 1** e **2** e dos **exercícios 4** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

A resolução para o **exercício 3** pode ser: considerando x a quantidade de CDs do irmão, a inequação que representa essa situação é $x + (4 \cdot x - 5) \leqslant 10$. Resolvendo:

$x + 4x - 5 \leqslant 10$

$5x - 5 \leqslant 10$

$5x - 5 + 5 \leqslant 10 + 5$

$5x \leqslant 15 \Rightarrow x \leqslant \frac{15}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leqslant 3$

Então, a princípio, as respostas possíveis são 1, 2 e 3. Porém, se o irmão tem 1, eu tenho $4 \cdot 1 - 5 < 0$, que não é uma resposta possível. As outras possibilidades são válidas ($x = 2 \rightarrow 4 \cdot 2 - 5 = 3$ e $x = 3 \rightarrow$ $\rightarrow 4 \cdot 3 - 5 = 7$). Então, meu irmão pode ter 2 ou 3 CDs.

No **exercício 10**, se Rodrigo teve a nota R, pela sua fala pode-se elaborar a inequação $2 \cdot R + 3 > 75$. Resolvendo essa inequação:

$2R + 3 - 3 > 75 - 3$

$2R > 72 \Rightarrow \frac{2R}{2} > \frac{72}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow R > 36$

Então, Rodrigo fez no mínimo 37 pontos.

No **exercício 11**, como o perímetro é a soma das medidas dos lados, que é maior do que 120 m, dois deles têm medida x; outro tem metade disso, ou seja, $\frac{1}{2} \cdot x = \frac{x}{2}$; o quarto lado tem medida de comprimento 21 m; a expressão que relaciona esses dados é:

$x + x + \frac{x}{2} + 21 > 120$

$2x + \frac{x}{2} + 21 - 21 > 120 - 21$

$\frac{5x}{2} > 99 \Rightarrow \frac{5x}{2} \cdot \frac{2}{5} > 99 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow x > \frac{198}{5} = 39{,}6$

Então, o menor valor possível para x é 40 m. Com o portão de 1 m, o arame necessário para cercar 1 volta deve ter 120 m, pois $P - 1 = 40 + 40 + \frac{40}{2} + 21 - 1 = 120$. Para 6 voltas, $120 \cdot 6 = 720$, ou seja, 720 m.

Verificando

As resoluções dos **testes 1** a **5** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Resolvendo o **teste 6**:

$5x + 12 \leqslant 3(x - 6)$

$5x + 12 \leqslant 3x - 18$

$5x + 12 - 12 \leqslant 3x - 18 - 12$

$5x \leqslant 3x - 30$

$5x - 3x \leqslant 3x - 30 - 3x$

$2x \leqslant -30 \Rightarrow \frac{2x}{2} \leqslant -\frac{30}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leqslant -15$

No **teste 7**, se Vinícius tem *v* moedas, a quantidade de Elizete é $2 \cdot v - 10$, de maneira que $v + (2v - 10) < 380$. Resolvendo essa inequação:

$v + 2v - 10 < 380$

$3v - 10 + 10 < 380 + 10$

$3v < 390$

$\frac{3v}{3} < \frac{390}{3} \Rightarrow v < 130$

Então, Vinícius tem, no máximo, 129 moedas e Elizete tem, no máximo, 242 moedas, pois $2v - 10 = 2 \cdot 129 - 10 = 258 - 10 = 248$.

No **teste 8**, se um dos lados mede *y*, o outro deve medir $x = y + 2$ para garantir a diferença de 2 cm. Como $P \geqslant 48$, temos:

$2 \cdot y + 2 \cdot (y + 2) \geqslant 48$

$2y + 2y + 4 \geqslant 48$

$4y + 4 - 4 \geqslant 48 - 4$

$4y \geqslant 44 \Rightarrow \frac{4y}{4} \geqslant \frac{44}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow y \geqslant 11 \Rightarrow x \geqslant 11 + 2 = 13$

No **teste 9**, quando são produzidos *x* doces, o custo de produção é dado por $3x + 310$, e o valor arrecadado com a venda é $8x$. Para que a arrecadação supere o custo, devemos ter $8x \geqslant 3x + 310$. Resolvendo essa inequação:

$8x - 3x \geqslant 3x - 3x + 310$

$5x \geqslant 310 \Rightarrow \frac{5x}{5} \geqslant \frac{310}{5} \Rightarrow x \geqslant 62$

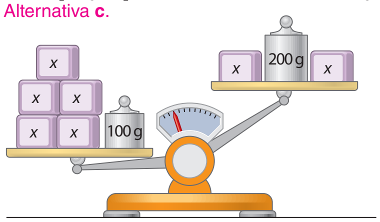
VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Com um litro de gasolina, um automóvel percorre 12 km. O proprietário quer saber quantos litros de gasolina seriam necessários para que esse automóvel percorresse mais de 500 km. Qual é a inequação que descreve essa situação, sendo *L*, a quantidade de litros? **1.** Alternativa **a**.

a) $12L > 500$
b) $12L < 500$
c) $\frac{12}{L} > 500$
d) $\frac{12}{L} < 12$

2 Que inequação pode ser associada à balança? **2.** Alternativa **c**.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

a) $5x + 100 < 2x + 200$
b) $5x + 100 \leqslant 2x + 200$
c) $5x + 100 > 2x + 200$
d) $5x + 100 \geqslant 2x + 200$

3 Carlos é ciclista e percorre 450 m por minuto pedalando. De quanto tempo, no mínimo, ele precisa para percorrer mais de 36 km? **3.** Alternativa **c**.

a) 1 hora e 8 minutos
b) 1 hora e 20 minutos
c) 1 hora e 21 minutos
d) 1 hora e 41 minutos

4 Se $-3x < 18$, então: **4.** Alternativa **d**.

a) $x < -6$
b) $x < 6$
c) $x > 6$
d) $x > -6$

5 Quais números racionais satisfazem a inequação a seguir? **5.** Alternativa **a**.

$$\frac{x}{2} + \frac{5x}{4} > 3x + 2$$

a) $x < -\frac{8}{5}$
b) $x > \frac{8}{19}$
c) $x > \frac{8}{5}$
d) $x > 2$

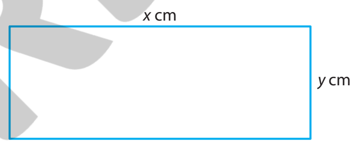
6 Qual é a solução de $5x + 12 \leqslant 3(x - 6)$? **6.** Alternativa **c**.

a) $x \leqslant -\frac{3}{4}$
b) $x \geqslant \frac{3}{4}$
c) $x \leqslant -15$
d) $x \geqslant -15$

7 Elizete e Vinícius têm uma coleção de moedas. Elizete tem 10 moedas a menos que o dobro da quantidade de Vinícius e, juntos, eles têm menos de 380 moedas. Quantas moedas, no máximo, cada um tem? **7.** Alternativa **b**.

a) Elizete tem, no máximo, 388 moedas e Vinícius, 199.
b) Elizete tem, no máximo, 248 moedas e Vinícius, 129.
c) Elizete tem, no máximo, 250 moedas e Vinícius, 130.
d) Elizete tem, no máximo, 268 moedas e Vinícius, 129.

8 A diferença entre as medidas *x* e *y* dos lados de um retângulo, dadas em centímetro, é igual a 2 cm. Quais devem ser os valores de *x* e de *y* para que a medida do perímetro do retângulo seja maior ou igual a 48 cm? **8.** Alternativa **b**.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

a) $x \geqslant 12$ cm e $y \geqslant 10$ cm
b) $x \geqslant 13$ cm e $y \geqslant 11$ cm
c) $x > 13$ cm e $y > 11$ cm
d) $x \geqslant 25$ cm e $y \geqslant 23$ cm

9 O custo de produção de doces em uma confeitaria é de R$ 3,00 por unidade mais um valor fixo de R$ 310,00. Se a unidade é vendida por R$ 8,00, quantos doces, no mínimo, devem ser vendidos para que os ganhos cubram os gastos?

a) 61 doces.
b) 62 doces.
c) 28 doces.
d) 27 doces.

9. Alternativa **b**.

Organizando

Organizando:

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir:

a) O que é uma inequação? **a)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem que uma inequação é uma sentença matemática com incógnitas e uma desigualdade envolvida.

b) Quantas soluções podem ter uma inequação? **b)** Uma inequação pode ter nenhuma a infinitas soluções.

c) Escreva dois exemplos de uma inequação do 1º grau com uma incógnita. Depois, identifique o primeiro e o segundo membro dessas inequações. **c)** Resposta pessoal.

d) Em que circunstância o sentido de uma desigualdade muda? **d)** O sentido de uma desigualdade muda quando multiplicamos ou dividimos ambos os membros por um número negativo.

e) Qual estratégia você usa para resolver uma inequação? **e)** Resposta pessoal.

154

Organizando

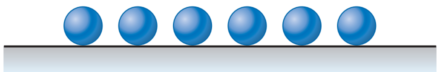
Incentive os estudantes a organizar seu aprendizado no caderno, fazendo resumos e mapas conceituais ou aplicando destaques para conceitos importantes. As questões propostas têm como objetivo fazer com que eles retomem os conteúdos aprendidos no capítulo e que reflitam sobre algumas temáticas.

Após sua correção é importante pedir que compartilhem suas respostas. Essa estratégia possibilitará o compartilhamento de dúvidas e percepções, contribuindo para o aprendizado de todos.

DIVERSIFICANDO

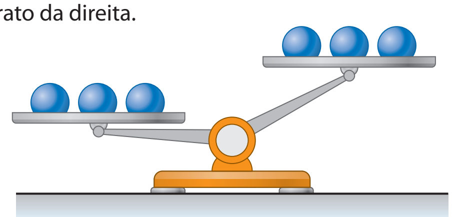
Pesagem de bolinhas

Considere 6 bolinhas, todas do mesmo tamanho e da mesma cor. Cinco delas têm a mesma massa, e uma delas é mais leve que as outras. O desafio é descobrir, em duas pesagens em uma balança de dois pratos, qual é a bolinha mais leve.



- Primeira pesagem: podemos descobrir isso dividindo as bolinhas em dois grupos de 3 bolinhas cada um e colocando cada grupo em um dos pratos da balança.

  Observando a balança da figura a seguir, percebemos que, nesse caso, a bolinha mais leve está entre as que estão no prato da direita.

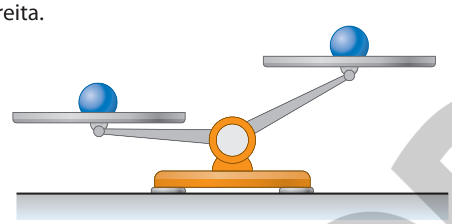


4. Separamos as bolinhas em três grupos de 3 bolinhas cada um. Na primeira pesagem, comparamos 2 desses grupos. Na segunda pesagem, comparamos o terceiro grupo com um dos grupos já pesados, determinando qual grupo é o diferente e se ele é mais leve ou mais pesado. Na terceira pesagem, comparamos 2 bolinhas do grupo diferente, descobrindo a bolinha diferente.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

- Segunda pesagem: Agora, escolhemos duas das bolinhas que estavam no prato da direita e colocamos uma em cada prato.

  Considerando o desnivelamento da balança da figura a seguir, percebemos que a bolinha mais leve está no prato da direita.



1. Dividimos as bolinhas em três grupos de 2 bolinhas cada um: grupos A, B e C. Na primeira pesagem, colocamos na balança os grupos A e B. Se houver nivelamento, a bolinha mais leve estará em C. Se houver desnivelamento, a bolinha mais leve estará no prato mais alto. Na segunda pesagem, comparamos as 2 bolinhas do grupo mais leve. A bolinha mais leve será a do prato mais alto.

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Resolva o desafio anterior dividindo as bolinhas em três grupos de 2 bolinhas cada um.

2 São dadas 8 bolinhas, todas do mesmo tamanho e da mesma cor. Sete delas têm a mesma medida de massa, e uma delas é mais leve que as outras. Descubra, em duas pesagens em uma balança de dois pratos, qual é a bolinha mais leve. **2.** Separamos as bolinhas em dois grupos de 3 bolinhas cada um e em um grupo de 2 bolinhas. Procedemos de modo análogo ao item anterior.

3 São dadas 9 bolinhas, todas do mesmo tamanho e da mesma cor. Oito delas têm a mesma medida de massa, e uma delas é mais leve que as outras. Descubra, em duas pesagens em uma balança de dois pratos, qual é a bolinha mais leve. **3.** Separamos as bolinhas em três grupos de 3 bolinhas cada um. Procedemos de modo análogo ao item 1.

4 São dadas 9 bolinhas, todas do mesmo tamanho e da mesma cor. Oito delas têm a mesma medida de massa, e uma delas é **mais leve** ou **mais pesada** que as outras. Descubra, em três pesagens em uma balança de dois pratos, qual delas tem massa diferente.

Diversificando

Na **atividade 3** do **Agora é com você!**, uma maneira de resolver é a seguinte:

Dividimos as bolinhas em três grupos, cada grupo contendo três bolinhas: grupo I, grupo II e grupo III. Colocamos as bolinhas do grupo I em um dos pratos e as do grupo II em outro.

Primeiro caso: os dois pratos se equilibram, e, portanto, a bolinha mais leve se encontra no grupo III. Comparamos, então, duas bolinhas do grupo III. Se houver desequilíbrio, a bolinha mais leve será a que se encontra no prato mais alto; se houver equilíbrio, será aquela que sobrou.

Segundo caso: se houver desequilíbrio entre os pratos, compararemos as bolinhas do grupo mais leve.

Aproveite para apresentar aos estudantes outros problemas envolvendo desigualdades. Por exemplo:

Três pescadores estão de um mesmo lado de um rio e querem atravessá-lo para chegar à outra margem. O barco que está à disposição deles suporta até 150 kg de massa. Se os pescadores têm massas medindo 50 kg, 80 kg e 110 kg, como podem chegar à outra margem?

Na primeira viagem, vão os pescadores que têm massas medindo 50 kg e 80 kg; um deles fica na outra margem e o outro volta; por exemplo, o de 50 kg. Na terceira viagem, o pescador de 110 kg vai e, na viagem seguinte, o de 80 kg volta. Na quinta viagem, os pescadores de 50 kg e 80 kg vão juntos e, assim, todos atravessam o rio.

Capítulo 7 – Sistemas de equações

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Um trabalho inicial para estabelecer pré-requisitos essenciais à relação entre as Unidades Temáticas **Geometria**, **Números** e **Álgebra** deve ser desenvolvido com a apresentação e a análise do plano cartesiano. Considere que, nesta abordagem, temos uma restrição ao conjunto dos números racionais, uma vez que a BNCC aloca o conjunto dos números reais no 9º ano do Ensino Fundamental II. Portanto, a localização de retas, por exemplo, deve ser feita por pontos cujas coordenadas sejam números racionais.

O problema dos coelhos, que abre o capítulo, será retomado na seção **Pense mais um pouco...**, na página 167, trabalhando a resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.

As questões propostas na abertura têm como objetivo auxiliar na avaliação dos conhecimentos prévios dos estudantes.

Para a resolução do **item a**, espera-se que eles analisem as informações apresentadas com atenção e concluam que o número mínimo de coelhos gestados em um ano por uma só coelha é $6 \cdot 4 = 24$, e que o número máximo é $6 \cdot 8 = 48$.

No **item b**, espera-se que os estudantes concluam que as relações são: $m + f = 20$ e $2m - f = 7$.

Se considerar adequado, ao comentar a fertilidade dos coelhos, aproveite para falar que a gestação de uma coelha dura por volta de 30 dias, podendo gerar de 4 a 8 filhotes. Após 5 meses, eles já podem reproduzir-se. Os coelhos vivem de 5 a 10 anos.

Capítulo

7 Sistemas de equações

LIGHTPOET/SHUTTERSTOCK

Observe, leia e responda no caderno.

a) A gestação de uma coelha dura quatro semanas, e em cada uma das seis ninhadas anuais nascem de quatro a oito filhotes. Supondo ocorrida essa situação, quais são os números mínimo e máximo de coelhos gestados em um ano por uma só coelha?

a) Mínimo: 24 coelhos; máximo: 48 coelhos.

b) Considerando m o número de machos e f o número de fêmeas de coelhos do sítio citado, escreva como se deve relacionar:

- m e f com o total de coelhos;
- a diferença do dobro de m com f e o número 7.

b) $m + f = 20$; $2m - f = 7$.

Filhotes de coelhos da espécie *Oryctolagus cuniculus* em criadouro.

Símbolo de fertilidade e prosperidade, a representação do coelho faz parte de crenças, literaturas, mitologias e folclores. Ele também pode estar presente em problemas de Matemática, como na seguinte situação:

Em um sítio, há 20 coelhos. A diferença entre o dobro do número de machos e o número de fêmeas é igual a 7. Quantos coelhos machos há nesse sítio?

1 Par ordenado e plano cartesiano

Par ordenado

Vamos recordar o conceito de par ordenado e sua representação geométrica em um plano, agora com números racionais.

Quem nunca brincou de palavras cruzadas? Dados os significados ou as dicas, as palavras devem ser escritas na horizontal e na vertical no quadro que também é dado. Acompanhe o exemplo.

Verticais
1. Cruzamento de duas retas distintas (palavra invertida)
2. Torne a unir
3. Aptidão inata
4. Fava-de-calabar (palavra invertida)
5. Fixes os olhos em
6. Triture com os dentes (palavra invertida)

	1	2	3	4	5	6
1	O	R	D	E	M	
2	T	E	O	R	I	A
3	N	Ú	M	E	R	O
4	O	N		S	E	R
5	P	A	R	E	S	

Horizontais
1. Organização metódica
2. Conjunto sistemático de ideias sobre determinado tema
3. Quantidade
4. Contração de (em + o) (palavra invertida); ente/criatura
5. Números múltiplos de dois

Cada letra desse passatempo tem um "endereço", isto é, está em uma casa do quadro associada a um par de números. Convencionamos a ordem desse par: o primeiro é o das verticais, e o segundo é o das horizontais.

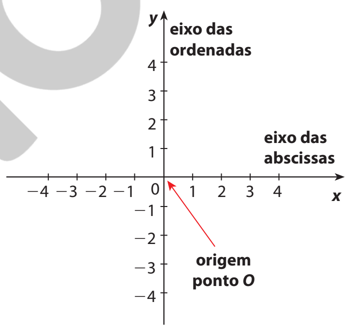
Assim, a letra D, que está no cruzamento da vertical 3 com a horizontal 1, é associada ao par ordenado (3, 1), e vice-versa. A letra I, que está no cruzamento da vertical 5 com a horizontal 2, está associada ao par ordenado (5, 2), e vice-versa. Note que o par (1, 3) associa-se à letra N da palavra NÚMERO e é diferente do par (3, 1); o par (2, 5) associa-se à letra A da palavra PARES e é diferente do par (5, 2).

Plano cartesiano

Já estudamos o conceito de par ordenado com números racionais e sua representação geométrica em um plano. Vimos também que as soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas são pares ordenados representados graficamente por pontos de um plano.

Um **sistema cartesiano de coordenadas** é formado por duas retas concorrentes, *x* e *y*, perpendiculares entre si, chamadas de **eixos**. **Plano cartesiano** é um plano que contém esse sistema.

- A reta horizontal é chamada de **eixo das abscissas** ou eixo dos *x*, que será representado por *Ox*.
- A reta vertical é chamada de **eixo das ordenadas** ou eixo dos *y*, que será representado por *Oy*.
- O ponto de cruzamento das duas retas é chamado de **origem**, que será representada por *O*.
- Em intervalos iguais, cada eixo é numerado a partir da origem.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

1. Par ordenado e plano cartesiano

Palavras cruzadas e jogos de batalha naval são instrumentos lúdicos apropriados para iniciar o entendimento do conceito de par ordenado e de plano cartesiano. Apresente alguns deles aos estudantes para exercitarem a localização de "lugares" em uma superfície plana.

No caso de batalha naval, se necessário, passe as regras com as orientações de como os estudantes podem construir em casa as grades/fichas em papel quadriculado para, em duplas, jogar em um período predeterminado da aula.

Se houver disponibilidade, sugerimos o jogo **Batalha Naval com Coordenadas Cartesianas**, disponível em: http://www.matematica.seed.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1320. Acesso em: 22 jun. 2022.

157

Plano cartesiano

Investigue com os estudantes as relações características das coordenadas de pontos que pertençam a um dos eixos coordenados ou a alguma reta específica, por exemplo, as bissetrizes dos quadrantes (pares e ímpares) ou ainda a determinada reta vertical ou reta horizontal.

Solicite aos estudantes que localizem no plano cartesiano seis pontos de abscissa igual a 4 e, a seguir, peça a eles que visualizem onde estariam os demais pontos de abscissa igual a 4. Sugira que repitam a atividade, agora com pontos de abscissa igual a –3. (Resposta: reta vertical pelo ponto (4, 0); reta vertical pelo ponto (–3, 0).)

Solicite aos estudantes que localizem no plano cartesiano seis pontos de ordenada igual a 4 e, depois, peça a eles que visualizem onde estariam os demais pontos de ordenada igual a 4. Sugira que repitam a atividade, agora com pontos de ordenada igual a –3. (Resposta: reta horizontal pelo ponto (0, 4); reta vertical pelo ponto (0, –3).)

Proponha aos estudantes que localizem no plano cartesiano seis pontos de abscissa igual à ordenada e, a seguir, peça a eles que visualizem onde estariam os demais pontos de abscissa igual à ordenada. Sugira que repitam a atividade, agora com pontos de abscissa igual ao oposto da ordenada. (Resposta: bissetriz dos quadrantes pares; bissetriz dos quadrantes ímpares.)

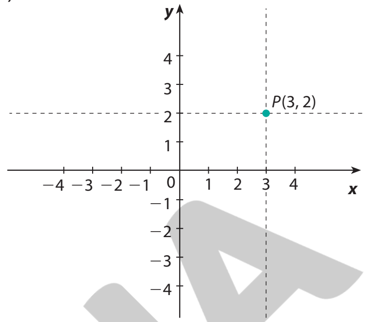
Todo par ordenado (x, y) de números racionais, em que x é o primeiro elemento do par e y é o segundo elemento, pode ser representado em um plano cartesiano e corresponde a um ponto P desse plano.

Os números x e y recebem o nome de **coordenadas do ponto** P. Em particular, o número x é a **abscissa** do ponto P, e y é a **ordenada** do ponto P. Para simplificar a linguagem, vamos dizer que o ponto P é o par ordenado (x, y). O ponto origem é o par (0, 0).

Como exemplo, vamos localizar no plano cartesiano o ponto $P(3, 2)$.

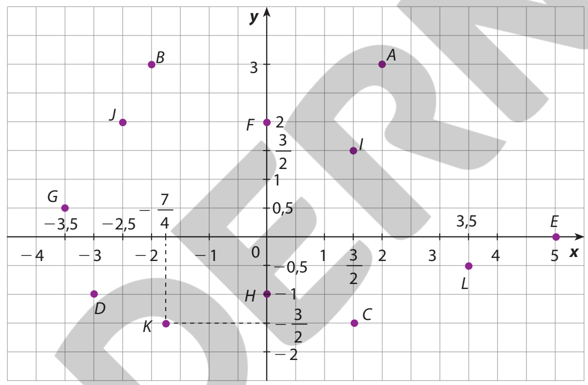
abscissa **ordenada**

- Pelo ponto do eixo dos x com abscissa 3, tracejamos uma linha paralela ao eixo dos y.
- Pelo ponto do eixo dos y com ordenada 2, tracejamos uma linha paralela ao eixo dos x.
- O ponto de cruzamento (ou ponto de intersecção) das linhas tracejadas é o ponto $P(3, 2)$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe a seguir a representação de outros pontos no plano cartesiano.



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Os pontos destacados no plano cartesiano são:

$A(2, 3)$	$C\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$E(5, 0)$	$G(-3{,}5;\ 0{,}5)$	$I\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$	$K\left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right)$
$B(-2, 3)$	$D(-3, -1)$	$F(0, 2)$	$H(0, -1)$	$J(-2{,}5;\ 2)$	$L(3{,}5; -0{,}5)$

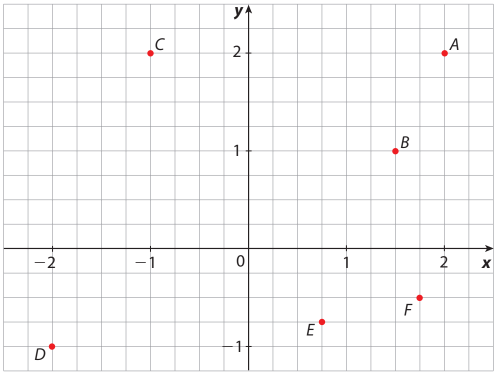
Observações

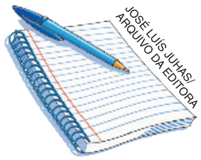
- Pontos do plano cartesiano representados por:
  - pares ordenados com abscissas opostas e ordenadas iguais são chamados de **pontos simétricos em relação ao eixo das ordenadas**. Estão a igual distância de Oy. Exemplo: pontos A e B.
  - pares ordenados com abscissas iguais e ordenadas opostas são chamados de **pontos simétricos em relação ao eixo das abscissas**. Estão a igual distância de Ox. Exemplo: pontos C e I.
  - pares ordenados com abscissas opostas e ordenadas opostas são chamados de **pontos simétricos em relação à origem**. Estão a igual distância da origem O. Exemplo: pontos G e L.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Escreva, no caderno, as coordenadas dos pontos localizados no plano cartesiano a seguir.





WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

1. $A(2, 2)$; $B\left(\frac{3}{2}, 1\right)$; $C(-1, 2)$; $D(-2, -1)$; $E\left(\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$; $F\left(\frac{7}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

2 Construa um plano cartesiano em uma folha de papel quadriculado e localize os pontos indicados. **2.** Construção de figura.

$A(-1, 3)$ $\quad C(4, -2)$ $\quad E(2, 0)$ $\quad G(0{,}5; 0{,}5)$ $\quad I\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$

$B(2, 4)$ $\quad D(-4, -3)$ $\quad F(-2, 0)$ $\quad H\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

3 Construa um plano cartesiano em uma folha de papel quadriculado e desenhe o triângulo de vértices nos pontos $A(-2, 2)$, $B(-1, 5)$ e $C(2, 2)$. **3.** Construção de figura.

4 Construa em uma folha de papel quadriculado um plano cartesiano e localize os pontos $A(5, -2)$; $B(5, 2)$; $C(2, 5)$; $D(-2, 5)$; $E(-5, 2)$; $F(-5, -2)$; $G(-2, -5)$ e $H(2, -5)$.

4. a) Construção de figura; octógono.

a) Traçando os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ e $\overline{HA}$, qual é o polígono formado?

b) Quais desses pontos são simétricos em relação ao eixo Oy, ao eixo Ox, à origem?

4. b) Ao eixo *Oy*: *A* e *F*, *B* e *E*, *C* e *D*, *H* e *G*; ao eixo *Ox*: *A* e *B*, *C* e *H*, *D* e *G*, *E* e *F*; à origem: *A* e *E*, *B* e *F*, *C* e *G*, *D* e *H*.

5 Em uma folha de papel quadriculado, construa um plano cartesiano e assinale os pontos $A(-2, -1)$ e $C(3, 4)$. Eles são os extremos da diagonal $\overline{AC}$ de um quadrado. **5.** Construção de figura.

a) Quais são os pontos extremos da outra diagonal desse quadrado? **5. a)** $(-2, 4)$ e $(3, -1)$

b) Dê as coordenadas do ponto comum a essas duas diagonais. **5. b)** $(0{,}5; 1{,}5)$

c) Considerando *u* a unidade de medida do lado de cada quadradinho da malha quadriculada, determine a medida do perímetro desse quadrado. **5. c)** 20 *u*

6 Reúna-se com um colega, providenciem papéis quadriculados e façam o que se pede.

a) Escolham oito números para *x* e assinalem em um plano cartesiano os pontos (x, y), em que $y = 0{,}5x - 1$. Esses pontos pertencem à mesma reta? **6. a)** Resposta pessoal. Sim.

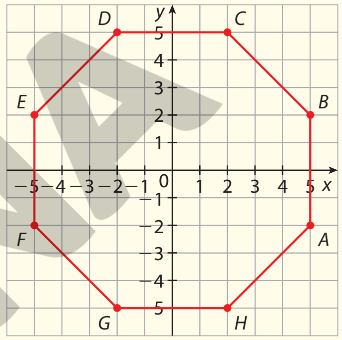
b) Assinalem, em um plano cartesiano, os pontos $M(-2, -2)$ e $N(2, 2)$. Tracem a reta que passa por esses pontos. Pelo traçado, é possível verificar outros pontos que pertencem à reta. Assinalem seis deles e escrevam suas coordenadas. Qual é a relação entre as coordenadas *x* e *y* dos pontos dessa reta? Os pontos *M* e *N* são simétricos em relação à origem? **6. b)** Construção de figura. Sim. Resposta pessoal. $x = y$. Sim.

c) Tracem a reta que passa pelos pontos $A(-4, 4)$ e $B(4, -4)$. Assinalem outros seis pontos dessa reta e escrevam suas coordenadas. Qual é a relação entre as coordenadas *x* e *y* dos pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$? Os pontos *A* e *B* são simétricos em relação à origem? **6. c)** Resposta pessoal. $x = -y$. Sim.

Exercícios propostos

Os primeiros exercícios pretendem levar os estudantes a localizar pontos esparsos do plano cartesiano. As resoluções dos **exercícios 2** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

O **exercício 4** explora os conceitos de par ordenado e plano cartesiano. No **item a**, os estudantes devem fazer a representação de retas e, em seguida, de um polígono, um octógono.



Para a resolução do **item b**, lembre os estudantes de que pontos simétricos em relação ao eixo das ordenadas (*Oy*) têm abscissas (*x*) opostas, portanto os pares de pontos simétricos em relação a esse eixo são: $A(5, -2)$ e $F(-5, -2)$; $B(5, 2)$ e $E(-5, 2)$; $C(2, 5)$ e $D(-2, 5)$; $G(-2, -5)$ e $H(2, -5)$.

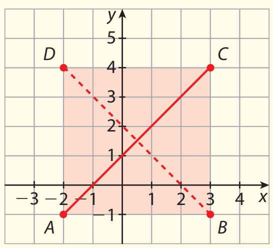
Pontos simétricos em relação ao eixo das abscissas (*Ox*) têm ordenadas (*y*) opostas. Então, os pares de pontos simétricos em relação a esse eixo são: $A(5, -2)$ e $B(5, 2)$; $C(2, 5)$ e $H(2, -5)$; $D(-2, 5)$ e $G(-2, -5)$; $E(-5, 2)$ e $F(-5, -2)$.

Pontos simétricos em relação à origem do sistema têm ambas as coordenadas opostas. Então, os pares de pontos simétricos nesse caso são: $A(5, -2)$ e $E(-5, 2)$; $B(5, 2)$ e $F(-5, -2)$; $C(2, 5)$ e $G(-2, -5)$; $D(-2, 5)$ e $H(2, -5)$.

O **exercício 5** permite trabalhar informalmente a propriedade de as diagonais do quadrado cortarem-se no ponto médio. Também sem fórmulas, esse exercício antecipa o cálculo da medida da distância entre dois pontos do plano cartesiano.

a) Observando que essa diagonal forma um ângulo de 45° com os eixos coordenados e sabendo que as diagonais do quadrado são perpendiculares entre si, pode-se concluir que a outra diagonal também forma um ângulo de 45° com os eixos, mas em outra direção.

As coordenadas dos pontos extremos da outra diagonal são $(3, -1)$ e $(-2, 4)$.



b) Observando que as diagonais se encontram no centro do quadrado, conclui-se que as coordenadas do ponto comum a elas são $(0{,}5; 1{,}5)$.

c) Considerando que cada lado do quadrado mede $5u$ de comprimento, conclui-se que o perímetro do quadrado mede $4 \cdot 5u = 20u$.

A resolução do **exercício 6** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

Fechando esse bloco de exercícios, o **exercício 7** trabalha com o cálculo da medida da distância entre dois pontos de uma reta no contexto do controle de tráfego aéreo.

a) Em quilômetro, a abscissa do ponto B é $x_B = 6 \cdot 10 = 60$; a ordenada do ponto B é $y_B = 4 \cdot 10 = 40$. Portanto, as coordenadas do avião B são (60, 40).

Em quilômetro, a abscissa do ponto C é $x_C = -4 \cdot 10 = -40$; a ordenada do ponto C é $y_C = 5 \cdot 10 = 50$. Portanto, as coordenadas do avião C são (−40, 50).

Em quilômetro, a abscissa do ponto E é $x_E = -5 \cdot 10 = -50$; a ordenada do ponto E é $y_E = -4 \cdot 10 = -40$. Portanto, as coordenadas do avião E são (−50, −40).

Em quilômetro, a abscissa do ponto G é $x_G = 3 \cdot 10 = 30$; a ordenada do ponto G é $y_G = -3 \cdot 10 = -30$. Portanto, as coordenadas do avião G são (30, −30).

b) Supondo que os aviões estejam voando à mesma altitude, a medida da distância entre os aviões A e G é de $5 \cdot 10$ km $= 50$ km. A medida da distância entre os aviões F e D é de $4 \cdot 10$ km $=$ $= 40$ km.

c) A abscissa do ponto J é $x_J =$ $= +7 \cdot 10 = +70$, portanto ele está a 70 km leste. A ordenada do ponto J é $y_J = -6 \cdot 10 =$ $= -60$, portanto ele está a 60 km sul. Então a informação do piloto está correta.

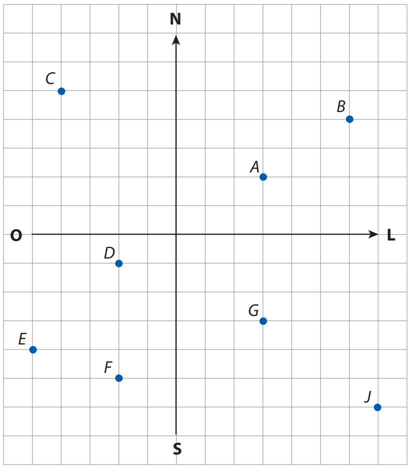
2. Equações do 1º grau com duas incógnitas

Habilidade da BNCC: **EF07MA18**.

Explore a fotografia e a manchete perguntando aos estudantes quais seriam os resultados possíveis do jogo. (Resposta: (7, 0), (6, 1), (5, 2), (4, 3), (3, 4), (2, 5), (1, 6), (0, 7).)

Pergunte se os pares (7, 0) e (0, 7) têm significados diferentes em relação ao resultado desse jogo. (Resposta: Sim, (7, 0) significa que o Grêmio venceu por 7 a 0; (0, 7) significa que o Grêmio perdeu por 0 a 7.)

7 O plano cartesiano a seguir representa a tela de radar da torre de controle de um aeroporto. Os pontos representados correspondem às posições dos aviões.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

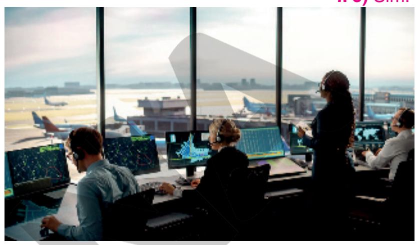
Suponha que a torre esteja situada na origem e que cada divisão dos eixos corresponda a 10 quilômetros. O norte está representado no sentido positivo do eixo dos y, e o leste, no sentido positivo do eixo dos x.

7. a) $B(60, 40)$; $C(-40, 50)$; $E(-50, -40)$ e $G(30, -30)$

a) Quais são as coordenadas dos aviões B, C, E e G?

b) Qual é a medida da distância entre os aviões A e G? E entre os aviões F e D? **7. b)** 50 km; 40 km

c) O piloto do avião J se comunica com a torre, indicando sua posição, 70 km leste e 60 km sul, pedindo permissão para pousar no aeroporto. A informação do piloto está correta? **7. c)** Sim.



GORODENKOFF/SHUTTERSTOCK

2 Equações do 1º grau com duas incógnitas

Observe a seguinte manchete de jornal.

Na última rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2021, o jogo entre Grêmio e Atlético Mineiro terminou com 7 gols marcados

Partida entre Grêmio e Atlético Mineiro na Arena do Grêmio em Porto Alegre (Rio Grande do Sul).

MÁRIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Explique aos estudantes que a equação $x + y = 7$ é a sentença matemática que representa a informação apresentada na manchete do jornal e que os pares ordenados indicados para os resultados possíveis do jogo são raízes dessa equação.

Questione qual seria o conjunto universo dessa equação, especulando se os estudantes compreendem o contexto que originou a equação. Além de ser um conjunto de pares ordenados, pergunte se as abscissas ou as ordenadas poderiam ser números não naturais.

Depois de apresentar a equação $5x + 2y = 7$, peça aos estudantes que atribuam a y os valores $\frac{17}{2}$ e 1. Peça a eles que comparem os novos pares obtidos com os pares ordenados apresentados no livro. Espera-se que os estudantes percebam que os pares ordenados são os mesmos.

Com a informação da manchete, não é possível saber quantos gols cada equipe marcou. Representando por x a quantidade de gols marcados pelo Grêmio e por y a quantidade de gols marcados pelo Atlético Mineiro, podemos escrever a equação: $x + y = 7$

Essa equação é uma **equação do 1º grau com duas incógnitas**.

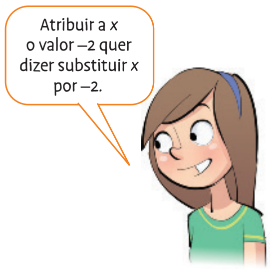
> Uma equação que pode ser escrita na forma $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, é chamada de **equação do 1º grau com duas incógnitas**.

Consideremos agora a equação $5x + 2y = 7$, em que x e y são números racionais.

Essa é uma equação do 1º grau com duas incógnitas. Vamos ver um modo de obter uma das soluções dessa equação. Para isso, escolhemos um valor racional qualquer para x e, em seguida, substituímos esse valor na equação para determinar o valor de y. O par (x, y) será uma das soluções da equação.

Como exemplo, atribuiremos a x o valor -2 e o valor 1.

$5x + 2y = 7$
$5 \cdot (-2) + 2y = 7$
$-10 + 2y = 7$
$2y = 7 + 10$
$2y = 17$
$\frac{2y}{2} = \frac{17}{2}$
$y = \frac{17}{2}$



Portanto, o par $\left(-2, \frac{17}{2}\right)$ é uma solução da equação $5x + 2y = 7$.

$5x + 2y = 7$
$5 \cdot (1) + 2y = 7$
$5 + 2y = 7$
$2y = 7 - 5$
$2y = 2$
$\frac{2y}{2} = \frac{2}{2}$
$y = 1$

Logo, o par (1, 1) é outra solução da equação $5x + 2y = 7$.

ILUSTRAÇÕES: CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Como podemos atribuir a x quaisquer números racionais, a equação $5x + 2y = 7$ tem **infinitas soluções**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

8 Entre os pares ordenados indicados a seguir, quais são soluções da equação $3x + 2y = 4$? **8.** Alternativas **b** e **c**.

a) (2, 1)
b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$
c) (2, –1)
d) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$

9 Considere a equação $4x - 2y = 6$ e responda:

a) Para que valor de x obtemos $y = 7$? **9. a)** $x = 5$
b) Para que valor de y obtemos $x = \frac{1}{2}$? **9. b)** $y = -2$
c) Se uma das soluções é o par (1,5; y), qual é o valor de y nesse caso? **9. c)** $y = 0$
d) Se uma das soluções é o par (x, –3), qual é o valor de x nesse caso? **9. d)** $x = 0$

10 Considerando a equação $x + y = 4$, calcule o valor de y quando se atribui a x o valor:

a) 9; **10. a)** $y = -5$
b) –3; **10. b)** $y = 7$
c) 2,5. **10. c)** $y = 1{,}5$

11 Considere novamente a equação $x + y = 4$. Multiplique cada membro dela por um mesmo número diferente de 0, à sua escolha. Se, na nova equação, você substituir x por 9, por –3, por 2,5, que valores de y espera obter? Seriam os mesmos valores de y obtidos no exercício anterior, ou seriam aqueles valores multiplicados pelo número que você escolheu?

Depois de responder no caderno, faça os cálculos e verifique a sua resposta.

11. Os mesmos valores obtidos no exercício anterior.

Se achar conveniente, proponha aos estudantes que apliquem o princípio aditivo para a equação $x + y = 4$, pedindo a eles que adicionem um número de sua escolha a ambos os membros e verifiquem que valores se obtêm para y, ao atribuir para x os números 9, –3 e 1,5.

Exercícios propostos

No **exercício 8**, relembre os estudantes do conceito de par ordenado e como determinar um par de soluções (x, y) para uma equação do 1º grau.

a) Substituindo $x = 2$ e $y = 1$ na equação $3x + 2y = 4$, obtemos:
$3x + 2y = 4$
$3 \cdot (2) + 2 \cdot (1) = 4$
$6 + 2 = 8 \neq 4$

Portanto, o par ordenado (2, 1) não é solução da equação.

b) Substituindo $x = \frac{1}{3}$ e $y = \frac{3}{2}$ na equação $3x + 2y = 4$, obtemos:
$3x + 2y = 4$
$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 4$
Portanto, o par ordenado $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right)$ é solução da equação.

c) Substituindo $x = 2$ e $y = -1$ na equação $3x + 2y = 4$, obtemos:
$3x + 2y = 4$
$3 \cdot (2) + 2 \cdot (-1) = 4$
$6 - 2 = 4$
Portanto, o par ordenado (2, –1) é solução da equação.

d) Como $3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right) =$
$= -1 + \frac{3}{2}\ 5\ \frac{1}{2} \neq 4$, o par ordenado $\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$ não é solução da equação.

As resoluções dos **exercícios 9** a **11** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Explore o **exercício 11** questionando se, em vez de multiplicarem ambos os membros da equação por um número diferente de zero, dividissem ambos os membros por esse número, os valores de y obtidos seriam os mesmos. Espera-se que os estudantes concluam que sim, substituindo x por 9, por –3 e por 2,5, obtemos os mesmos valores para y: –5, 7 e 1,5.

O que o exercício propõe é, na verdade, a aplicação do princípio multiplicativo da igualdade, portanto os valores se mantêm.

Exercícios propostos

Antes da resolução do **exercício 12** pode ser interessante apresentar outras ilustrações de balanças de dois pratos nivelados, nas quais estejam distribuídos nos pratos objetos com massas de medidas diferentes, registradas em grama ou em quilograma, e também objetos idênticos, com massas de medidas iguais. Para cada uma das ilustrações, proponha aos estudantes que obtenham a massa de um desses objetos.

Se x e y indicam as medidas das massas dos cubos em grama, a equação que representa a situação descrita é $3x + 2y = 500$.

Atribuindo a y o valor 70, para x obtemos:

$3x + 2y = 500$

$3x + 2 \cdot (70) = 500$

$3x + 140 = 500$

$3x = 500 - 140$

$3x = 360$

$x = \dfrac{360}{3}$

$x = 120$

Portanto, a medida da massa de cada cubo azul é 120 g.

Esse exercício é uma ótima oportunidade para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA13) e (EF07MA18).

O **exercício 13** é uma prévia da atividade apresentada na seção **Trabalhando a informação.** A seguir apresentamos sua resolução.

Como a numeração de um dado vai de 1 a 6, tem-se que $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Assim, para a equação $x + y = 8$, atribuindo os valores de 1 a 6 para x, obtemos os seguintes valores para y.

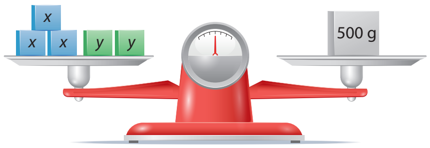
- Para $x = 1$: $1 + y = 8$, portanto $y = 7$.
- Para $x = 2$: $2 + y = 8$, portanto $y = 6$.
- Para $x = 3$: $3 + y = 8$, portanto $y = 5$.
- Para $x = 4$: $4 + y = 8$, portanto $y = 4$.
- Para $x = 5$: $5 + y = 8$, portanto $y = 3$.
- Para $x = 6$: $6 + y = 8$, portanto $y = 2$.

Como o número 7 não faz parte da numeração de um dado, há apenas cinco pares (x, y) possíveis para os resultados obtidos por Joana: (2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3) e (6, 2).

A resolução do **exercício 14** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

12 Expresse a situação representada na balança, com os pratos à mesma altura e em equilíbrio, por meio de uma equação do 1º grau com as incógnitas x e y, que representam as medidas das massas de cada cubo azul e de cada cubo verde, respectivamente.

RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA



Agora, responda: qual é a medida da massa de cada cubo azul se a medida da massa de cada cubo verde for 70 g? **12.** $3x + 2y = 500$; 120 g.

13 Joana brincava com dois dados de cores diferentes quando os deixou cair, simultaneamente, no chão. Observou o par de números obtidos e notou que a soma deles era 8. Indicando os números por x e y, descubra a equação correspondente a essa situação. Em seguida, determine todos os pares possíveis que podem ter saído nos dados.

13. $x + y = 8$; (2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3) e (6, 2).

CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

14 ***Hora de criar*** – Elabore um problema sobre equação do 1º grau com duas incógnitas que envolva as medidas das alturas de dois adolescentes. Troque com um colega e depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.

14. Resposta pessoal.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Possibilidades e probabilidades

Hugo está jogando trilha com sua irmã. Para andar o número de casas necessárias e vencer o jogo na próxima rodada, ele precisa de uma soma de pelo menos 10 pontos ao lançar dois dados.

Qual é a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada?

Para calcular essa probabilidade, devemos inicialmente descobrir todas as possibilidades de soma de números que ele pode tirar nos dados.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Ao lançar dois dados, Hugo pode tirar os seguintes pares de números:

(1, 1)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 4)	(3, 1)	(3, 4)	(4, 1)	(4, 4)	(5, 1)	(5, 4)	(6, 1)	(6, 4)
(1, 2)	(1, 5)	(2, 2)	(2, 5)	(3, 2)	(3, 5)	(4, 2)	(4, 5)	(5, 2)	(5, 5)	(6, 2)	(6, 5)
(1, 3)	(1, 6)	(2, 3)	(2, 6)	(3, 3)	(3, 6)	(4, 3)	(4, 6)	(5, 3)	(5, 6)	(6, 3)	(6, 6)

Observe que há 36 pares diferentes de números, mas nem todos têm soma igual a 10 ou maior. Por isso, circulamos os pares de números que satisfazem essa condição. Então, entre as 36 possibilidades, há somente 6 pares cuja soma de números é igual a 10 ou maior.

Como há 6 possibilidades em 36 de Hugo obter uma soma igual a 10 ou maior, dizemos que a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada é:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

162

Trabalhando a informação

■ Habilidade da BNCC: **EF07MA34**.

Ao apresentar a mecânica do jogo de trilha e analisar os resultados do lançamento de dois dados para determinar a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada, esta seção favorece o desenvolvimento da habilidade (EF07MA34). Discuta com os estudantes outros cenários possíveis. Para isso, as seguintes perguntas podem ser feitas:

- Qual é a probabilidade de Hugo não ganhar na próxima rodada? $\left(\text{Resposta: } \dfrac{5}{6}\right)$
- Há uma situação que seja diferente de Hugo "ganhar" ou "não ganhar o jogo"? (Resposta: Não.)
- Qual é a soma das probabilidades dos dois eventos, isto é, a soma das probabilidades de Hugo ganhar e de não ganhar? (Resposta: 1)

Agora quem trabalha é você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Considere o problema de Hugo e responda às questões a seguir. **a)** Sim, ela passa a ser de $\frac{15}{36}$.

a) Supondo que Hugo precise obter nos dados uma soma igual a 8 ou maior, a probabilidade de ele ganhar o jogo aumenta? Justifique sua resposta.

b) Se a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada fosse de 100%, quantas casas ele precisaria andar? **b)** Uma ou duas casas.

3 Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Observe novamente a manchete apresentada no item anterior e uma segunda manchete, de outro jornal, sobre a mesma notícia.

MÁRIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Na última rodada do Campeonato Brasileiro de Futebol de 2021, o jogo entre Grêmio e Atlético Mineiro terminou com 7 gols marcados

RAUL PEREIRA/FOTOARENA

Partida entre Grêmio e Atlético Mineiro na Arena do Grêmio em Porto Alegre (Rio Grande do Sul).

Campeonato Brasileiro de Futebol de 2021: Grêmio vence o Atlético Mineiro por 1 gol de diferença na Arena do Grêmio, em Porto Alegre (RS)

VLADIMIR MAKEEV/DREAMSTIME/EASYPIX BRASIL

RAFFAELE1/DREAMSTIME/EASYPIX BRASIL

MÁRIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Já vimos que somente com a informação da primeira manchete não é possível determinar a quantidade de gols marcados pelas equipes. O mesmo acontece se considerarmos apenas a informação da segunda manchete. Mas, se unirmos as informações apresentadas nas duas manchetes, poderemos resolver esse problema.

Para isso, vamos considerar x a quantidade de gols marcados pelo Grêmio e y a quantidade de gols marcados pelo Atlético Mineiro.

Já vimos que é possível associar à primeira manchete a seguinte equação:

$$x + y = 7, \text{ em que } x \text{ e } y \text{ são números naturais}$$

Os pares ordenados (7, 0); (6, 1); (5, 2); (4, 3); (3, 4); (2, 5); (1, 6) e (0, 7) são soluções dessa equação.

A exemplo da situação apresentada, proponha o cálculo da probabilidade de eventos em situações-problema fornecidas após a determinação do espaço amostral.

Para isso, proponha atividades em duplas, nas quais um estudante lança um dado hexagonal n vezes (definir n), enquanto o outro anota em um quadro o número da face voltada para cima (convém que os estudantes se alternem nas tarefas de lançar o dado e de registrar as informações no quadro).

Estabeleça, para cada dupla, determinado evento; por exemplo, o número da face superior é um número primo.

Após o enésimo lançamento, os estudantes devem calcular a razão entre a frequência de ocorrência do evento e o número de lançamentos n. Em seguida, devem comparar essa razão com a probabilidade estimada para o evento.

Essa atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA34).

Trabalhando a informação

As resoluções e comentários do **Agora quem trabalha é você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

3. Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Habilidades da BNCC: **EF07MA13** e **EF07MA18**.

Converse com os estudantes para que percebam que as duas equações que expressam as informações das manchetes dos jornais não dependem uma da outra nem são repetidas.

Explore um pouco mais o contexto com perguntas como:

- Se o total de gols nessa partida fosse 8, seria possível um dos times ganhar por 1 gol de diferença? (Resposta: Não.)
- E se o total de gols fosse 9? E se fosse 10? (Respostas: Sim; não.)
- Que conclusão podemos tirar das respostas às questões anteriores? (Resposta: Quando a soma é um número par, a diferença mínima é 2; caso a soma seja ímpar, a diferença mínima é 1.)

Analise com os estudantes o exemplo de manchete de jornal destacando que as manchetes precisam ser breves e sucintas, pois dispõem de espaço limitado e têm como principal função atrair o leitor. Por isso, não é possível tirar conclusões de determinadas notícias baseando-se somente em uma manchete, sem ler a matéria jornalística ou sem confrontá-la com outra que complete a informação.

Na situação apresentada, por exemplo, só podemos identificar quem venceu a partida ou qual foi o resultado do jogo após fazer o cruzamento das informações das duas manchetes. Esse cruzamento ocorre de duas maneiras: por meio das representações geométricas (retas) no plano cartesiano de cada uma das informações e por meio da resolução do sistema de duas equações com duas incógnitas.

Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Discuta com os estudantes a representação gráfica das soluções das equações. Questione-os quanto ao alinhamento dos pontos cujas coordenadas são soluções de cada equação.

- Se há uma reta passando por cada grupo de pontos.
- Se qualquer ponto dessas retas pode ser solução dessas equações, considerando o contexto que as originou.
- Se esse procedimento de resolução pode ser aplicado em outros sistemas.
- Se as letras x e y que representam as coordenadas dos pontos são variáveis ou são incógnitas. Com esse questionamento, aproveite para desenvolver a habilidade (EF07MA13).

À segunda manchete, podemos associar a equação:

$x = y + 1$, em que x e y são números naturais

Observe, no quadro a seguir, alguns dos possíveis resultados desse jogo, de acordo com a segunda manchete:

Gols marcados pelo Grêmio	1	2	3	4	5	6	7
Gols marcados pelo Atlético Mineiro	0	1	2	3	4	5	6
Pares ordenados	(1, 0)	(2, 1)	(3, 2)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)	(7, 6)

Os pares ordenados (1, 0); (2, 1); (3, 2); (4, 3); (5, 4); (6, 5) e (7, 6) são, portanto, algumas das soluções da equação $x = y + 1$.

Note que o único par ordenado comum às duas situações é o par (4, 3), pois é o único em que a soma dos gols é igual a 7 e que representa a vitória do Grêmio por 1 gol de diferença. Logo, de acordo com essas informações, podemos afirmar que o Grêmio venceu o jogo por 4 a 3.

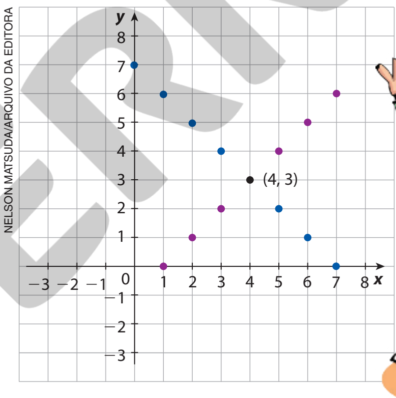
As equações $x + y = 7$ e $x = y + 1$ também podem ser indicadas por:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

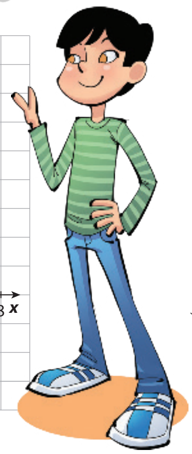
Elas constituem um exemplo de **sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas**.

O par ordenado (4, 3), que verifica as duas equações, é a solução do sistema.

Note, na figura, o que acontece quando representamos, em um mesmo sistema de coordenadas, os pares ordenados que destacamos como soluções das duas equações.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que, se traçássemos um segmento unindo os pontos que representam as soluções de uma mesma equação, obteríamos dois segmentos que se cruzariam no ponto de coordenadas (4, 3), que é a **solução do sistema**.

Resolução de sistemas

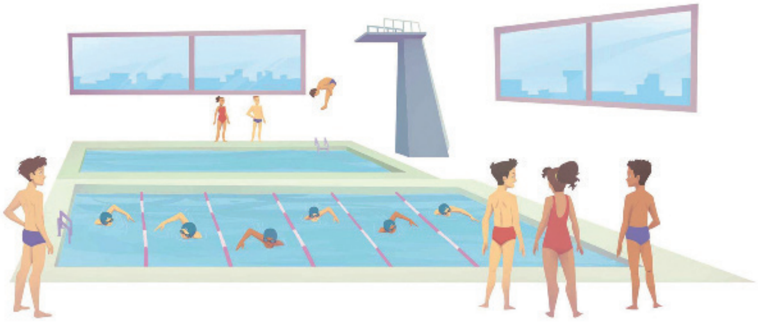
Existem vários métodos para resolver um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Aqui, estudaremos o **método da substituição**, que é um processo algébrico de resolução.

O método da substituição consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituir na outra equação a expressão obtida.

Acompanhe as situações apresentadas na página seguinte.

Situação 1

Em uma competição de esportes aquáticos, nas modalidades de natação e de saltos ornamentais, participaram 32 equipes e 344 atletas. Cada equipe de natação inscreveu 12 atletas, e cada equipe de saltos ornamentais, 10 atletas. Quantas equipes de natação participaram da competição?



ALAN CARVALHO/ARQUIVO DA EDITORA

Indicando por x a quantidade de equipes de natação e por y a quantidade de equipes de saltos ornamentais, podemos montar o seguinte sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ 12x + 10y = 344 \end{cases}$$

Para resolver esse sistema pelo método da substituição, podemos escolher, por exemplo, a equação $x + y = 32$ e isolar a incógnita x. Assim, obtemos:

$$x + y = 32$$
$$x + y - y = 32 - y$$
$$\boxed{x = 32 - y} \text{ equação com duas incógnitas}$$

Agora, substituindo x por $(32 - y)$ na equação $12x + 10y = 344$, obtemos:

$$12x + 10y = 344 \qquad 12 \cdot \underbrace{(32 - y)} + 10y = 344 \leftarrow \text{equação com uma incógnita}$$

Ao resolver essa equação, encontramos o valor de y:

$$384 - 12y + 10y = 344$$
$$-2y = -40$$
$$y = 20$$

Substituindo y por 20 na equação $x + y = 32$, encontramos o valor de x:

$$x + y = 32$$
$$x + 20 = 32$$
$$x = 12$$

Logo, a solução do sistema é o par ordenado (12, 20).

Portanto, 12 equipes de natação participaram da competição.

Resolução de sistemas

Iniciamos a resolução metodológica e algébrica de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas aplicando o método da substituição. Comente com os estudantes que, dado um problema como o da **situação 1**, a leitura do enunciado deve ser feita com muita atenção para que o equacionamento represente corretamente a situação descrita.

Esse é o momento em que realmente o problema é resolvido. Após os primeiros sistemas serem solucionados, o emprego do método da substituição torna-se rotineiro.

Depois da resolução apresentada na **situação 1**, se considerar oportuno, peça aos estudantes que resolvam o sistema isolando a incógnita y e substituindo a expressão obtida em uma das equações originais, para assim obter o valor de x.

Se considerar oportuno, proponha a eles que verifiquem o sistema com os valores encontrados para x e y.

Pergunte aos estudantes quantas equipes de saltos ornamentais participaram da competição. Eles devem concluir que foram 20. Em seguida, peça a eles que expliquem como chegaram a esse número. Alguns podem ter identificado essa quantidade olhando o par ordenado. Outros podem ter feito a subtração 32 – 12, uma vez que o total de equipes era um dado do problema. Proponha que compartilhem suas ideias.

Resolução de sistemas

A **situação 2** apresenta um problema clássico de sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas. Essa atividade permite um trabalho pedagógico interdisciplinar com Ciências. Por exemplo, considerando que o pavão é um animal com perfil de territorialidade, isto é, de difícil convivência com outros animais, comente com os estudantes que o criador deve deixar os animais separados.

Depois da resolução apresentada, se considerar oportuno, peça aos estudantes que resolvam o sistema isolando a incógnita c e substituindo a expressão obtida em uma das equações originais. Proponha aos estudantes que verifiquem o sistema com os valores encontrados para p e para c.

Exercícios propostos

Na situação descrita no **exercício 16**, no prato esquerdo da primeira balança há apenas um mamão de massa medindo x e no prato direito da primeira balança há uma maçã de massa medindo y e um bloco de massa medindo 100 g. Portanto, a equação que descreve a situação da primeira balança é $x = y + 100$, ou $x - y = 100$.

No prato esquerdo da segunda balança há um mamão de massa medindo x e uma maçã de massa medindo y; no prato direito da segunda balança há dois blocos de massa medindo 200 g cada um e dois blocos de massa medindo 20 g cada um. Portanto, a equação que descreve a situação da segunda balança é $x + y = 440$.

O sistema de equações correspondente a essa situação é:

$$\begin{cases} x - y = 100 \\ x + y = 440 \end{cases} \text{(item a)}$$

Para a resolução do sistema (**item b**), primeiro isolamos x na primeira equação e em seguida substituímos a expressão obtida na segunda equação, para obter assim o valor de y.

$$\begin{cases} x - y = 100 \\ x + y = 440 \end{cases}$$

$x = y + 100$

$y + 100 + y = 440$

$2y = 440 - 100$

$y = \dfrac{340}{2}$

$y = 170$

Para obter o valor de x, substituímos o valor obtido para y na primeira equação.

$x - y = 100$

$x - 170 = 100$

$x = 100 + 170$

$x = 270$

O par (270, 170) é a solução do sistema.

Como $x = 270$, concluímos que o mamão tem massa medindo 270 g (**item c**).

As resoluções dos **exercícios 15** e **17** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Situação 2

Pavões e chinchilas são criados em um sítio. Ao todo são dezesseis cabeças e cinquenta e seis patas. Quantos pavões e quantas chinchilas há nesse sítio?

Indicando a quantidade de pavões por p e a de chinchilas por c, podemos reescrever as informações dadas por meio de equações do 1º grau com duas incógnitas.

Ao todo são dezesseis cabeças: $p + c = 16$.

Ao todo são cinquenta e seis patas: $2p + 4c = 56$ (o pavão tem 2 patas e a chinchila, 4 patas).

Assim, formamos o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas:

$$\begin{cases} p + c = 16 \\ 2p + 4c = 56 \end{cases}$$

Isolando a incógnita p na equação $p + c = 16$, obtemos:

$p = 16 - c$ (equação com duas incógnitas)

Substituindo p por $(16 - c)$ na equação $2p + 4c = 56$, encontramos o valor de c:

$2p + 4c = 56$

$2 \cdot \underbrace{(16 - c)} + 4c = 56$ (equação com uma incógnita)

$32 - 2c + 4c = 56$

$-2c + 4c = 56 - 32$

$2c = 24$

$\dfrac{2c}{2} = \dfrac{24}{2}$

$c = 12$

Substituindo c por 12 em $p = 16 - c$, encontramos o valor de p:

$p = 16 - 12$

$p = 4$

O par (4, 12) é a solução do sistema.

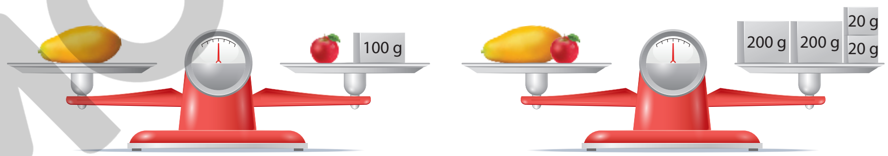
Portanto, nesse sítio há 4 pavões e 12 chinchilas.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15 Verifique se o par ordenado (5, –3) é solução do sistema: $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 9 \end{cases}$ **15.** O par (5, –3) é solução do sistema.

16 A mesma balança manteve-se nivelada em dois momentos:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

a) Chame de x a medida da massa do mamão e de y a medida da massa da maçã. Determine o sistema de equações correspondente a essa situação. **16. a)** $\begin{cases} x = y + 100 \\ x + y = 440 \end{cases}$

b) Resolva o sistema. **16. b)** (270, 170)

c) Quantos gramas tem o mamão? **16. c)** 270 g

17 Meu avô e meu pai foram pescar. Eles trouxeram 25 peixes de diversas espécies. Meu avô disse que pescou o quádruplo do número de peixes que meu pai. Quantos peixes cada um pescou? **17.** O avô pescou 20 peixes, e o pai, 5.

20. a) $a = 5$, $b = 3$ e $c = 1$ 20. b) $l = -1$, $m = 1$ e $n = 3$ 20. c) Construção de figura.

18 Para fazer duas alianças, foram usados 13 gramas de ouro. Uma das alianças tem 3 gramas a mais que a outra.

a) Escreva, no caderno, o sistema correspondente a essa situação. 18. a) $\begin{cases} x + y = 13 \\ x = y + 3 \end{cases}$

b) Resolva mentalmente o sistema e diga quantos gramas tem a aliança maior. 18. b) 8 g

19 Resolva os sistemas.

a) $\begin{cases} x = 5y \\ x + y = 12 \end{cases}$ 19. a) (10, 2)

b) $\begin{cases} x - y = 10 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$ 19. b) (8, –2)

c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 12x - 9y = -20 \end{cases}$ 19. c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$

d) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 5x - 2y = -5 \end{cases}$ 19. d) (1, 5)

20 Faça o que se pede em cada caso.

a) Encontre os valores de a, b e c, de maneira que os pares ordenados $(1, a)$, $(3, b)$ e $(5, c)$ sejam soluções da equação $x + y = 6$.

b) Encontre os valores de l, m e n, de modo que os pares ordenados $(1, l)$, $(3, m)$ e $(5, n)$ sejam soluções da equação $x - y = 2$.

c) Construa um sistema de coordenadas em uma folha de papel quadriculado e represente os pares ordenados dos itens **a** e **b**.

d) Com base na representação do item **c**, estime o par ordenado que é solução do sistema de equações $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases}$ 20. d) Resposta pessoal.

e) Resolva esse sistema no caderno e verifique se sua estimativa estava correta. 20. e) (4, 2)

21 O perímetro de um terreno retangular mede 84 m. A medida do comprimento tem 18 m a mais que a da largura. Quanto mede a área desse terreno? 21. 360 m²

22 Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ x - y = 23 \end{cases}$$

Agora faça o que se pede.

a) Encontre três pares ordenados que sejam soluções da 1ª equação. 22. a) Resposta pessoal.

b) Encontre três pares ordenados que sejam soluções da 2ª equação. 22. b) Resposta pessoal.

c) Procure, mentalmente, um par ordenado que seja solução das duas equações. O que você encontrou? Registre no caderno suas conclusões. 22. c) Resposta pessoal.

d) Resolva o sistema e confronte com suas conclusões. O que você observou? 22. d) O sistema não tem solução.

23 Mauro e Laura colecionam figurinhas. Leia o diálogo entre eles.

CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Quantas figurinhas cada um tem? 23. Mauro tem 21 figurinhas e Laura, 27.

24 ***Hora de criar*** – Em duplas, cada integrante vai elaborar um problema sobre sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Troquem de caderno para um resolver o problema do outro. Depois, destroquem para corrigi-los. 24. Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

1 Vamos agora retomar a pergunta da abertura deste capítulo: "Em um sítio, há 20 coelhos. A diferença entre o dobro do número de machos e o número de fêmeas é igual a 7."

a) Quantos coelhos machos há nesse sítio? 1. a) 9 coelhos.

b) Selecionando ao acaso um desses coelhos, qual é a probabilidade de selecionar uma fêmea? 1. b) $\frac{11}{20}$.

2 Um rapaz está embalando algumas taças e observa que:

- após colocar 7 taças em cada caixa, restam 19 taças fora das caixas;
- tentando colocar 10 taças em cada caixa, uma delas fica com 5 taças a menos do que as outras.

a) Quantas caixas esse rapaz está usando? 2. a) 8 caixas.

b) Quantas taças estão sendo embaladas? 2. b) 75 taças.


LIGHTPOET/SHUTTERSTOCK

167

Por explorar o conceito de probabilidade, essa atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA34).

Na **atividade 2**, a primeira informação pode ser traduzida por $7c + 19 = t$, em que c é o número de caixas e t é o número de taças. É preciso mais cuidado com a segunda informação, a tradução é $10c - 5 = t$, e não, como pode parecer, $9c + 5 = t$.

A resolução da **atividade 2** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Exercícios propostos

A pouca complexidade do problema proposto no **exercício 18** permite que ele seja resolvido mentalmente sem muita dificuldade, como propõe o **item b**. Discuta essa situação com os estudantes, induzindo-os a pensar em um número x e em outro número com 3 unidades a mais, que pode ser representado por $(x + 3)$. Feito isto, ficam vencidas a etapa convencional de construção do sistema com duas equações do 1º grau com duas incógnitas e a etapa de isolamento de uma das incógnitas em uma das equações do sistema, além da etapa de substituição da incógnita isolada.

Assim, basta igualar a soma de x com $(x + 3)$ ao total de 13 gramas, isto é, resolver a equação $x + (x + 3) = 13$, que resulta em $x = 5$. Portanto, uma das alianças tem 5 gramas e a outra tem 8 gramas.

No **item a**, considerando x e y as massas das alianças, o sistema correspondente à situação descrita é:

$$\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

As resoluções dos **exercícios 19** a **23** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Pense mais um pouco...

A **atividade 1** retoma o problema motivador da abertura do capítulo.

a) Sendo x o número de machos e y o número de fêmeas:

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x - x = 7 \end{cases}$$

Isolando y na primeira equação:

$x + y = 20$

$y = 20 - x$

Substituindo y por $(20 - x)$ na segunda equação:

$2x - (20 - x) = 7$

$2x + x = 7 + 20$

$3x = 27$

$x = \frac{27}{3}$

$x = 9$

Portanto, há 9 coelhos machos no sítio.

b) Após descobrir a quantidade de coelhos machos, os estudantes devem concluir que há 11 coelhos fêmeas $(20 - 9 = 11)$. Logo, a probabilidade de selecionar ao acaso, uma fêmea é de $\frac{11}{20}$.

Trabalhando a informação

Habilidades da BNCC:
EF07MA02 e **EF07MA10**.

Introduzindo um contexto socialmente relevante, a seção traz a taxa de desocupação em 2020/2021 e representa esses dados em um gráfico de colunas. Com tal gráfico, podemos fazer uma série de comparações e estabelecer relações entre os dados. Porém, se quisermos entender melhor a variação (crescente/decrescente) dessa taxa ao longo do tempo, assim como sua intensidade, o gráfico mais indicado é o gráfico de linha. Comente com os estudantes que as inclinações da linha do gráfico indicam se a variação da taxa de desocupação em determinado intervalo de tempo é crescente ou decrescente. Por exemplo, de fevereiro a março de 2021 a taxa de desocupação teve um crescimento de 0,3% (14,9% − 14,6% = 0,3%), o que indica um aumento no desemprego nesse período nas regiões pesquisadas. Note que nesse intervalo a linha do gráfico tem inclinação para cima, crescente. O gráfico de linha também mostra que de julho a agosto de 2021 a taxa de desocupação sofreu uma redução de 0,6% (13,1% − 13,7% = −0,6%), o que indica que o desemprego nesse período diminuiu. Note que nesse intervalo a linha do gráfico tem inclinação para baixo, decrescente.

Para certificar-se de que os estudantes compreenderam a relação entre os gráficos de colunas e de linha, apresente a eles outro gráfico de colunas, com dados diferentes, e peça que construam um gráfico de linhas com base nos dados do gráfico de colunas, seguindo os procedimentos descritos nessa seção.

O contexto apresentado é uma ótima oportunidade para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **economia**. Discuta com os estudantes as situações de vulnerabilidade social que podem levar ao desemprego (baixa escolaridade, falta de moradia, falta de oportunidades), as consequências do desemprego e como ele pode afetar as relações sociais e familiares.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Interpretando um gráfico de linha

O desemprego é medido sistematicamente pelo Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea) em seis regiões metropolitanas do país: Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre. Ele é representado por um índice que mede a taxa de desocupação (ou desemprego aberto), isto é, considera apenas quem procurou emprego nos 30 dias anteriores à pesquisa e não exerceu nenhum tipo de trabalho – remunerado ou não – nos últimos sete dias.

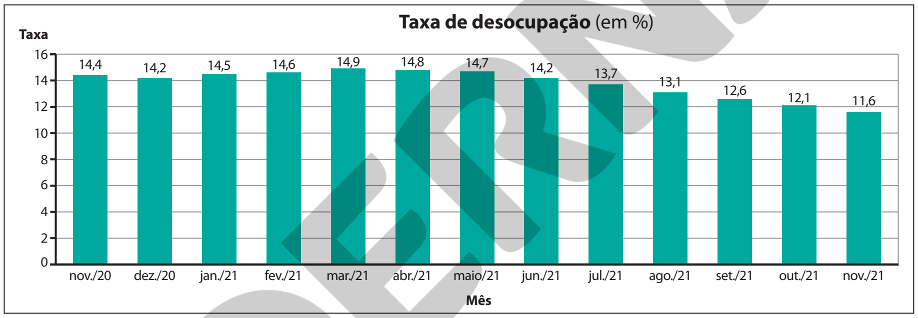
Acompanhe na tabela a seguir os índices de novembro de 2020 a novembro de 2021.

Taxa de desocupação (em %)

Mês/ano	nov./20	dez.	jan. /21	fev.	mar.	abr.	maio	jun.	jul.	ago.	set.	out.	nov.
Índice	14,4	14,2	14,5	14,6	14,9	14,8	14,7	14,2	13,7	13,1	12,6	12,1	11,6

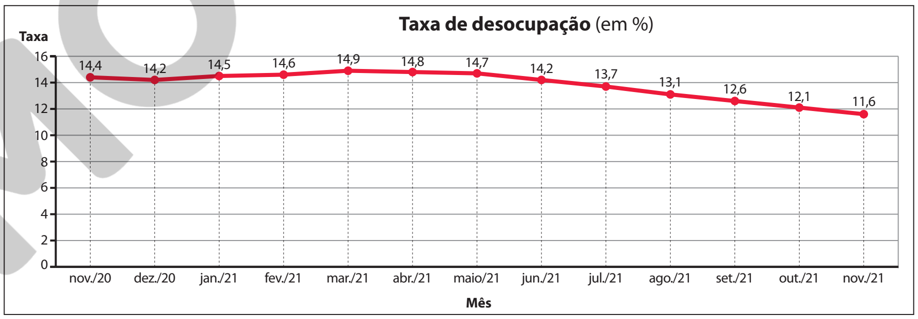
Dados obtidos em: IPEA Data. Disponível em: http://www.ipeadata.gov.br/ExibeSerie.aspx?serid=1347352645. Acesso em: 15 fev. 2022.

Podemos representar os dados da tabela por um gráfico de colunas.



Dados obtidos em: IPEA Data. Disponível em: http://www.ipeadata.gov.br/ExibeSerie.aspx?serid=1347352645. Acesso em: 15 fev. 2022.

Para perceber melhor a variação da taxa ao longo do tempo, usamos um gráfico de linha. Podemos construí-lo, com base no gráfico anterior, marcando o ponto médio da parte superior de cada coluna. A seguir, apagamos as colunas e ligamos os pontos por segmentos de reta consecutivos.



Dados obtidos em: IPEA Data. Disponível em: http://www.ipeadata.gov.br/ExibeSerie.aspx?serid=1347352645. Acesso em: 15 fev. 2022.

ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

168

Comente também a importância do planejamento financeiro, de se pensar no futuro e estar preparado para situações inesperadas. Planejar os gastos e praticar o consumo consciente são algumas das atitudes que podem ser tomadas.

Observe no gráfico que, nesse período, a taxa de desocupação subiu em 3 meses e caiu em 9 meses.

Note também que a variação da taxa pode ser maior em valor absoluto (segmento mais próximo da vertical, mais "em pé") ou menor (segmento mais "deitado"), positiva (da esquerda para a direita, sobe) ou negativa (da esquerda para a direita, desce). Por exemplo, no período observado, no mês de agosto de 2021, cuja diminuição foi 0,6% (13,7% – 13,1%), o segmento está mais "em pé" do que o do mês de abril, cuja queda foi de 0,1% (14,9% – 14,8%), que está mais "deitado". Ou seja, variação menor implica inclinação menor do segmento no gráfico.


BRUNO ROCHA/FOTOARENA

Pessoas aguardam em fila de emprego sob forte sol no Vale do Anhangabaú, região central de São Paulo (SP). (Fotografia de 2019.)

Agora quem trabalha é você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

a) Resposta possível: dezembro a janeiro e fevereiro a março; sim.
b) Menor aumento: fevereiro; maior queda: agosto.

Observando o gráfico de linha da página anterior, responda às questões no caderno.

a) Dê dois períodos em que as inclinações de aumento são iguais. Neles, ocorreram aumentos iguais?
b) Dê um mês em que ocorreu menor aumento e um em que ocorreu maior queda, em relação ao mês anterior.
c) Tradicionalmente, em dezembro o desemprego diminui. A que você atribui isso?
d) Junte-se a um colega e comentem a seguinte afirmação:
Se substituíssemos a linha poligonal do gráfico por um único segmento com extremidades no primeiro e no último ponto dessa linha, teríamos a variação total do período nov./20 a nov./21; porém não saberíamos que variações teriam ocorrido nos meses desse período.
d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concordem com a afirmação.

c) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes percebam que no final do ano há aquecimento do comércio com as compras natalinas, o que gera novos empregos.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Alternativas **c** e **d**.

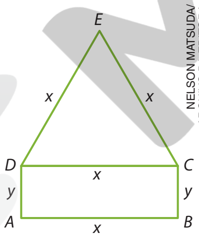
1 Verifique quais dos pares ordenados a seguir são soluções da equação $6x + 3y = 33$.

a) (–2, 7)
b) (7, –2)
c) (2, 7)
d) (5, 1)

2 Com base na figura, enuncie um problema que possa ser solucionado por meio de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.

Resolva o problema que você elaborou.

2. Resposta pessoal.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

3 Carla gosta de natação e judô. Em uma academia, a natação exige um gasto médio, entre a mensalidade e a condução, de R$ 20,00 por aula, e o judô, de R$ 15,00 por aula. Carla pretende pagar R$ 200,00 por mês e tem tempo disponível para praticar 12 aulas por mês entre os dois esportes. Quantas aulas Carla poderá fazer de cada um desses esportes?


ALAN CARVALHO/ ARQUIVO DA EDITORA

3. Natação: 4 aulas; judô: 8 aulas.

169

Agora quem trabalha é você!

No **item a**, espera-se que os estudantes considerem os acréscimos e decréscimos da taxa de desocupação de um mês para outro, identificando, assim, os intervalos em que as inclinações de aumento são iguais e, consequentemente, são iguais as variações na taxa de desocupação, como ocorreu de dezembro a janeiro, por exemplo, e de fevereiro a março. Essa atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA02).

No **item b**, de acordo com o gráfico de linha, no mês de fevereiro ocorreu menor aumento na taxa de desocupação em relação ao mês anterior (janeiro). No mês de agosto ocorreu maior queda na taxa de desocupação em relação ao mês anterior (julho). Essa atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA10).

Para a resolução do **item c**, espera-se que os estudantes percebam que no final do ano há aquecimento do comércio com as compras natalinas, o que gera novos empregos, portanto a taxa de desocupação (indicador de desemprego) diminui.

No **item d**, espera-se que os estudantes analisem o gráfico de linha e verifiquem que, de fato, a substituição da linha poligonal do gráfico por um único segmento de reta com extremidades no primeiro e no último ponto dessa linha mostraria a variação total do período de novembro de 2020 a novembro de 2021, mas deixaria de mostrar as variações que teriam ocorrido entre os meses desse período.

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Exercícios complementares

Fechando o bloco de exercícios e o capítulo, essa sequência abrange as principais ideias e conceitos estudados aqui.

Solicite aos estudantes que resolvam os exercícios, quando possível, de duas maneiras diferentes. Oriente-os a prestar atenção à leitura do enunciado para que façam suas interpretações corretamente.

Os **exercícios 4** e **5** contribuem para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA13) e (EF07MA18). Para a resolução desses exercícios, os estudantes devem compreender como representar os dados de um problema por equações do 1º grau e como encontrar a solução de um sistema de equações.

Para a resolução do **exercício 4**, considerando E a quantidade de erros e A a quantidade de acertos, o seguinte sistema de equações do 1º grau pode ser construído.

$$\begin{cases} A + E = 60 \\ 5A - 1E = -10 \end{cases}$$

Isolando E na segunda equação, obtemos:

$5A - 1E = 210$

$-1E = 210 - 5A$

$E = 5A - 210$

Substituindo E por $(5A - 210)$ na primeira equação, obtemos:

$A + E = 60$

$A + 5A - 210 = 60$

$6A = 60 + 210$

$6A = 270$

$A = \dfrac{270}{6}$

$A = 45$

Portanto, foram 45 acertos na prova. Alternativa **e**.

Para a resolução do **exercício 5**, considerando T e D os números de titulares e dependentes, respectivamente, o seguinte sistema de equações pode ser construído.

$$\begin{cases} T + D = 1\,200 \\ 20T + 10D = 18\,000 \end{cases}$$

Isolando T na primeira equação, obtemos:

$T + D = 1200$

$T = 1200 - D$

Substituindo T por $(1\,200 - D)$ na segunda equação, obtemos:

$20T + 10D = 18\,000$

$20 \cdot (1\,200 - D) + 10D = 18\,000$

$24\,000 - 20D + 10D = 18\,000$

$-10D = 18\,000 - 24\,000$

$-10D = -6\,000$

$D = \dfrac{6\,000}{10}$

$D = 600$

Portanto, estiveram presentes 600 dependentes.

As resoluções dos **exercícios 6** a **15** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

4 (UFMG) Uma prova de múltipla escolha com 60 questões foi corrigida assim: o estudante ganhava 5 pontos por questão que acertava e perdia 1 ponto por questão que errava ou deixava em branco. Se um estudante totalizou 210 pontos, o número de questões que ele acertou é:

a) 25.
b) 30.
c) 35.
d) 40.
e) 45.

4. Alternativa **e**.

5 Um clube ofereceu um baile a seus associados. Cada sócio titular pagou R$ 20,00, e seus dependentes pagaram apenas metade. Com os 1 200 participantes, o clube arrecadou R$ 18 000,00. Qual foi o número de dependentes presentes nesse baile? **5.** 600 dependentes.

6 Considere o cartaz que estava afixado em um teatro.

Se, em uma apresentação teatral, foram vendidos 125 ingressos e arrecadados R$ 2 140,00, quantas crianças assistiram a essa apresentação? **6.** 45 crianças.

7 (Unifor-CE) Um pacote tem 48 balas: algumas de hortelã e as demais de laranja. Se a terça parte do dobro do número de balas de hortelã excede a metade do de laranjas em 4 unidades, então nesse pacote há: **7.** Alternativa **d**.

a) 20 balas de hortelã.
b) 26 balas de laranja.
c) duas balas de laranja a mais que de hortelã.
d) igual número de balas dos dois tipos.
e) duas balas de hortelã a mais que de laranja.

8 Retome a resolução do sistema da Situação 2 da página 166, agora, isolando a incógnita c na equação $p + c = 16$. A solução do sistema é a mesma? **8.** Sim.

9 Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$ **9. a)** (2, 1)

b) $\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases}$ **9. b)** (2,5; 2)

c) $\begin{cases} x = -2y \\ x - 3y = 17{,}5 \end{cases}$ **9. c)** (7; –3,5)

d) $\begin{cases} 2x + 5y = 14 \\ x = y \end{cases}$ **9. d)** (2, 2)

e) $\begin{cases} 2x = 3y \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ **9. e)** (–3, –2)

f) $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$ **9. f)** (–1, 3)

10 Em uma sorveteria, os sorvetes são servidos em taças de 150 mL e de 200 mL. Em um dia, foram servidas 72 taças e 12,8 L de sorvete. Quantas taças de 200 mL foram servidas? **10.** 40 taças.

11 Uma pessoa fez uma compra de R$ 370,00 e pagou com 11 cédulas: algumas de R$ 50,00 e outras de R$ 20,00. Quantas cédulas de cada valor foram utilizadas para pagar essa compra?

11. Cinco cédulas de R$ 50,00 e seis cédulas de R$ 20,00.

12 Em um restaurante existem 60 mesas. Todas elas estão ocupadas, algumas por 4 pessoas e outras por 3 pessoas. No total são 195 pessoas. Quantas são as mesas ocupadas por 4 pessoas? **12.** 15 mesas.

13 Uma doceria vende em média 2 000 doces por dia, entre brigadeiros de colher e cocadas, obtendo com essa venda R$ 1 700,00. Sabendo que eles custam, respectivamente, R$ 0,80 e R$ 1,00, quantos doces de cada tipo são vendidos diariamente?

13. 1 500 brigadeiros de colher e 500 cocadas.

14 Um fazendeiro cria porcos e galinhas.

Quando um amigo lhe perguntou a quantidade desses animais, ele respondeu que havia contado 84 cabeças e 208 pés. Qual é a quantidade de porcos? **14.** 20 porcos.

15 Eu tenho 25 cubos, uns com aresta medindo 5 cm e outros com aresta medindo 8 cm. Colocando uns sobre os outros, formo uma pilha com altura medindo 1,70 m.

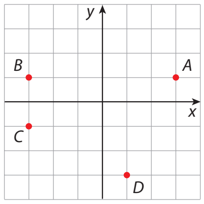
a) Quantos cubos de cada tamanho eu tenho?
b) Ao sortear, ao acaso, um desses cubos, qual é a probabilidade de sortear um cubo de aresta medindo 8 cm? **15. b)** $\frac{3}{5}$

15. a) 10 cubos de 5 cm de aresta e 15 cubos de 8 cm de aresta.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Se cada divisão dos eixos corresponde a 10 unidades, qual é o ponto que tem coordenadas (–30, 10)?

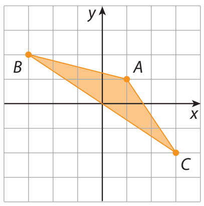


a) A
b) B
c) C
d) D

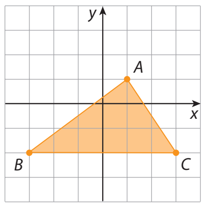
1. Alternativa **b**.

2 Qual dos triângulos a seguir tem vértices nos pontos A(1, 1), B(–3, 2) e C(3, –2)? 2. Alternativa **a**.

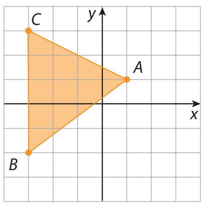
a)



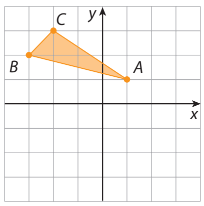
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

3 Qual dos pares ordenados a seguir satisfaz a equação $3x + 5y = 18$? 3. Alternativa **d**.

a) (0, 6) b) (3, 1) c) (–11, 3) d) (–4, 6)

4 Em jogos de basquete, um time pode fazer *x* cestas, cada uma valendo 3 pontos, por um jogador atrás da linha de 3 pontos; e *y* cestas de 2 pontos por um jogador dentro dessa linha. Em um jogo, um time fez um total de 113 pontos. Qual equação expressa essa situação? Se $y = 34$, qual é o valor de *x*? 4. Alternativa **c**.

a) $2x + 3y = 113$ e $x = 6$
b) $2x + 3y = 113$ e $x = 5$
c) $3x + 2y = 113$ e $x = 15$
d) $3x + 2y = 113$ e $x = 16$

5 Um padeiro faz uma quantidade *i* de pão integral e uma quantidade *s* de pão sem glúten. O pão integral é vendido a R$ 15,00, e o pão sem glúten, a R$ 22,00. Certo dia, ele vendeu R$ 696,00 em pães e um total de 33 pães. Qual sistema de equações expressa essa situação?

a) $\begin{cases} 22i + 15s = 33 \\ i + s = 696 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 22i + 15s = 696 \\ i + s = 33 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 15i + 22s = 696 \\ i + s = 33 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 15i + 22s = 33 \\ i + s = 696 \end{cases}$

5. Alternativa **b**.

6 Carlos foi à feira e comprou *m* maçãs, que custavam R$ 1,00 a unidade, e *c* caixas de morangos, que custavam R$ 5,00 a caixa. Ele gastou R$ 29,00 e voltou com 9 itens. Qual é o sistema de equações que modela essa situação?

a) $\begin{cases} 5m + 5c = 29 \\ m + c = 9 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 5m + c = 9 \\ m + c = 29 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 5m + c = 29 \\ m + c = 9 \end{cases}$
d) $\begin{cases} m + 5c = 29 \\ m + c = 9 \end{cases}$

6. Alternativa **d**.

7 Maria tem R$ 25,00 em moedas de R$ 0,25 e R$ 0,10. Se ela tem 190 moedas no total, quantas são de 25 centavos e quantas são de 10 centavos, respectivamente? 7. Alternativa **c**.

a) 10 e 180 b) 50 e 140 c) 40 e 150 d) 90 e 100

8 Qual é a solução do sistema $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x + y = 2 \end{cases}$?

a) $x = 2$ e $y = 0$
b) $x = 0$ e $y = -3$
c) $x = 4$ e $y = -2$
d) $x = 0$ e $y = 2$

8. Alternativa **a**.

9 Um terreno retangular tem lados de medidas *x* m e *y* m. Sabe-se que *x* é o dobro de *y* e que a medida do perímetro do terreno é 54 m. Quais são os valores de *x* e de *y*? 9. Alternativa **c**.

a) 27 e 9 b) 27 e 13,5 c) 18 e 9 d) 28 e 14

Organizando

Organizando: **a)** Resposta pessoal. Espera-se que o estudante considere o plano determinado por dois eixos perpendiculares no ponto origem (0, 0), com unidades de mesmo comprimento, e a associação de cada ponto desse plano com um único par ordenado de números racionais (que, por ora, é o conjunto universo).

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir:

a) Como você explicaria o plano cartesiano a um colega?

b) A primeira coordenada é referente ao eixo *Ox* e a segunda ao eixo *Oy* do plano cartesiano.

b) O que representa cada coordenada de um par ordenado associado a um ponto do plano cartesiano?

c) Quantos pares ordenados de números racionais uma equação do 1º grau com duas incógnitas pode ter como solução? **c)** Infinitos pares.

d) Como você explicaria a um colega a resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas?

d) Resposta pessoal. Espera-se que o estudante considere isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituir na outra equação a expressão encontrada.

Verificando

Esses exercícios são mais uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo.

Instrua-os a retornar às páginas anteriores caso alguma dúvida persista.

As resoluções dos **testes 1** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Organizando

Incentive os estudantes a organizar seus aprendizados no caderno, fazendo resumos, mapas conceituais, fluxogramas ou aplicando destaques em conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo fazer com que os estudantes retomem os conteúdos estudados no capítulo e reflitam sobre algumas temáticas. Após sua correção é importante pedir a eles que compartilhem suas respostas. Essa estratégia permitirá o compartilhamento de dúvidas e percepções sobre o conteúdo, contribuindo para o aprendizado de todos.

a) Espera-se que os estudantes expliquem que o plano cartesiano é determinado por dois eixos perpendiculares no ponto origem (0, 0), ou duas retas concorrentes (*x* e *y*) perpendiculares entre si, que se cruzam na origem (ponto *O*). Cada eixo é numerado a partir da origem, em intervalos iguais. A cada ponto desse plano é associado um único par ordenado de números racionais (que, por ora, é o conjunto universo).

b) Espera-se que os estudantes compreendam que a primeira coordenada é referente ao eixo *Ox* do plano cartesiano e é a abscissa de um ponto *P*. A segunda coordenada é referente ao eixo *Oy* e é a ordenada do ponto *P*. O ponto *P* é o par ordenado (*x*, *y*). O ponto origem *O* é o par (0, 0).

c) Lembre aos estudantes que, como podemos atribuir a *x* quaisquer números racionais, uma equação do 1º grau com duas incógnitas, escrita na forma $ax + by + c = 0$, tem infinitas soluções. Portanto, considerando que o par ordenado (*x*, *y*) é uma das soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas, essa equação pode ter infinitos pares como solução.

d) Espera-se que os estudantes expliquem o método da substituição para a resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, que consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações e substituir a expressão encontrada na outra equação.

Capítulo 8 – Simetria e ângulos

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Explore a fotografia da abertura do capítulo, que retrata o Templo de Lótus, construído em Nova Deli, na Índia.

Inaugurado em 1986, o Templo de Lótus demorou seis anos para ser construído. Sua estrutura está rodeada por nove jardins e piscinas, lembrando uma flor de lótus flutuante.

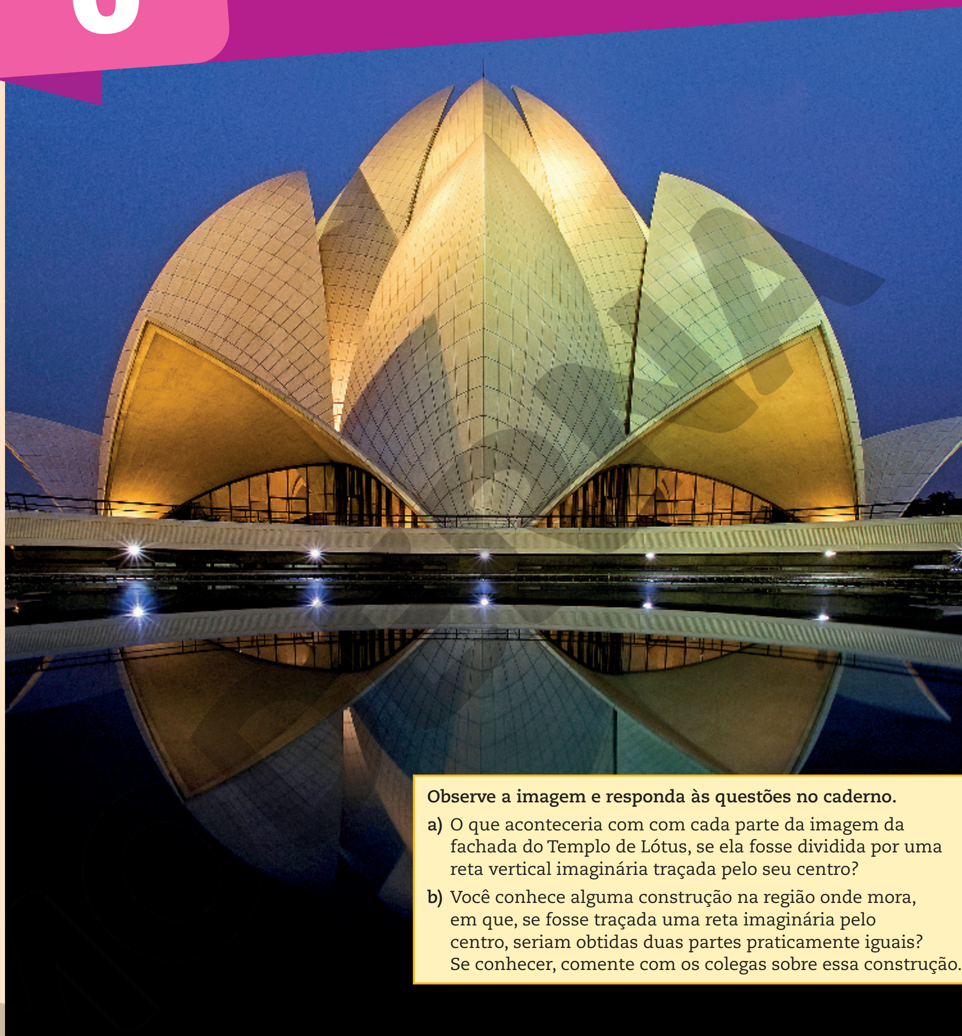
Peça aos estudantes que pesquisem na internet mais informações sobre o Templo – o formato das partes que compõem sua estrutura, como elas são encaixadas, o material usado na sua construção etc.

Depois, chame a atenção deles para as simetrias da imagem. Peça que indiquem os eixos de simetria dela.

Capítulo

8 Simetria e ângulos

ARINI/SHUTTERSTOCK



Templo de Lótus, localizado em Nova Délhi, na Índia. (Fotografia de 2019.)

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) O que aconteceria com com cada parte da imagem da fachada do Templo de Lótus, se ela fosse dividida por uma reta vertical imaginária traçada pelo seu centro?

b) Você conhece alguma construção na região onde mora, em que, se fosse traçada uma reta imaginária pelo centro, seriam obtidas duas partes praticamente iguais? Se conhecer, comente com os colegas sobre essa construção.

a) Espera-se que os estudantes mencionem que as duas partes seriam praticamente iguais.
b) Resposta pessoal.

A arquitetura frequentemente emprega a simetria como um instrumento a serviço da beleza. A simetria transmite um sentimento de equilíbrio e harmonia.

Mesmo quando há apenas uma "quase simetria", a ideia ou a visão intuitiva das figuras simétricas está presente.

1 Reconhecendo a simetria

A natureza produz formas de extrema beleza. Não há quem não admire o equilíbrio e a harmonia de figuras como as que aparecem nas fotografias a seguir.

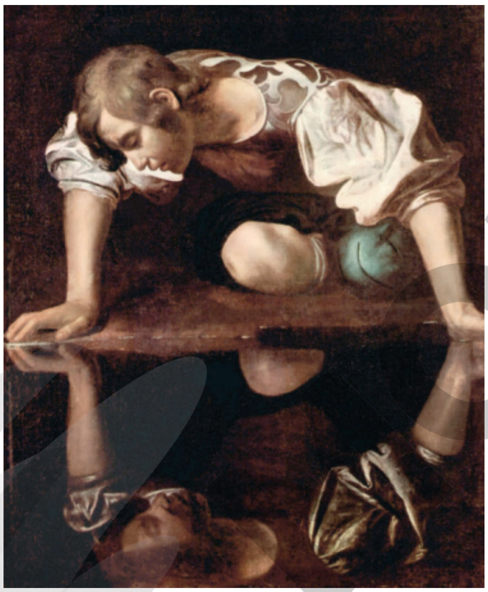
BEDRICH HRSTKA/SHUTTERSTOCK

TR3GIN/SHUTTERSTOCK

A disposição da estrutura das asas da borboleta e da flor confere a elas uma beleza incomparável. (As imagens não respeitam as proporções reais entre os seres vivos.)

Note que podemos imaginar – tanto para a figura da borboleta quanto para a da flor – uma linha reta que as divida em duas partes praticamente iguais. Essa é a ideia da simetria presente na natureza. O ser humano apropria-se dessa ideia em suas criações, como podemos ver na reprodução da obra a seguir.

MICHELANGELO MERISI DA CARAVAGGIO - PALÁCIO BARBERINI - GALERIA NACIONAL DE ARTE ANTIGA, ROMA



Nessa obra, o personagem da mitologia grega Narciso e sua imagem no espelho da água de um lago compõem um exemplo de situação que nos dá a ideia de simetria.

CARAVAGGIO, M. M. **Narciso**. 1597-1599. Óleo sobre tela. 113,3 × 94 cm.

Mas, afinal, o que é simetria?

Mesmo sem conhecer a definição desse conceito, é possível reconhecer intuitivamente a simetria em várias figuras planas.

Sugestão de leitura

Para enriquecer o trabalho, indicamos o livro:

STEWART, I. **Uma história da simetria na matemática**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

De modo simples e atraente, o livro conta como uma sucessão de matemáticos e físicos, à procura de soluções para equações algébricas, acabou por construir uma teoria que revolucionou nossa visão sobre o Universo. O autor constrói uma linha do tempo que abrange conhecimentos científicos da antiga Babilônia (c. 1800 a.C.) à Física do século XXI.

1. Reconhecendo a simetria

Habilidade da BNCC: **EF07MA21**.

Peça aos estudantes que observem as imagens apresentadas e digam se é possível imaginar eixos de simetria nelas. Peça que façam um esboço no caderno.

Ao trabalhar com esse tópico, pergunte aos estudantes:

- Em que outras situações a ideia de simetria pode ser reconhecida?
- Por que podemos dizer que a simetria é usada com frequência na Arte?
- Quais exemplos de objetos cotidianos não apresentam simetria?

Ao propor aos estudantes que reconheçam objetos e imagens que dão ideia de simetria, este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade (EF07MA21).

Proponha aos estudantes que coloquem as duas palmas das mãos sobre o tampo da carteira, uma ao lado da outra, e verifiquem se a imagem das mãos assim dispostas apresenta a ideia de simetria.

Peça a eles que façam o mesmo com as “costas” das mãos sobre o tampo da carteira e observem. Discuta o fato de que, em experiências com objetos reais (como no caso das mãos), a visão de simetria depende de algum grau de tolerância, posto que a simetria perfeita só seria possível para objetos ideais, ou seja, objetos do nosso pensamento.

Nesse momento, é importante ficar atento para não ocorrerem situações que possam desencadear a prática de *bullying*. É importante enfatizar que as pessoas têm características e tipos físicos diferentes.

Se julgar oportuno, realize um trabalho interdisciplinar com Arte. Proponha aos estudantes que pesquisem mais informações sobre a obra **Narciso**, de Michelangelo, e sobre esse artista. Eles também podem pesquisar outras obras de arte, até mesmo de artistas da região onde moram, em que percebam a ideia de simetria. Desse modo, contribui-se para o desenvolvimento da **competência geral 3**, pois os estudantes podem ter contato com diferentes manifestações artísticas.

Reconhecendo a simetria

Se possível, providencie um espelho para ser colocado sobre o eixo de simetria de uma figura. Os estudantes devem reconhecer a existência desse eixo, verificando que ambos os lados da figura são idênticos.

Após a leitura desta página, solicite aos estudantes que pesquisem figuras que apresentam simetria e peça que destaquem o eixo ou eixos de simetria dessas figuras.

Desenhos feitos em papel com uma dobra, quando recortados preservando a dobra, sempre produzem figuras que apresentam simetria, e o eixo de simetria contém a dobra.

Invista algum tempo da aula para que os estudantes façam livremente recortes em papel dobrado, como na proposta apresentada. Esse tipo de atividade promove a criatividade e o aprendizado, além da motivação para novas experiências. Dessa maneira, eles podem criar, por exemplo, cartões para datas comemorativas.

Além do recorte com simetrias, outra possibilidade é fazer uma composição temática, colando os papéis recortados com vazados simétricos em um cartão de cor contrastante para dar a impressão de profundidade. Em um segundo momento, é possível ainda enveredar para a confecção de cartões tridimensionais com figuras simétricas.

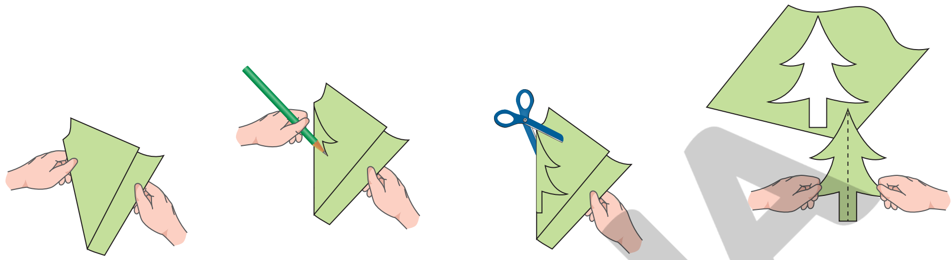
Vamos fazer um pequeno experimento para obter uma figura que apresente simetria. Pegue uma folha de papel e uma tesoura de pontas arredondadas. Tome cuidado ao manuseá-la!

Passo 1: Dobre a folha de papel, passando a mão sobre o papel dobrado e sobre o vinco.

Passo 2: Desenhe uma das metades de uma figura a partir da dobra.

Passo 3: Recorte o papel na linha do desenho.

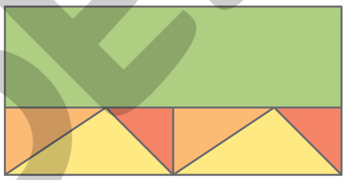
Passo 4: Abra novamente o papel e observe a figura obtida. Ela ficou dividida pelo vinco do papel em duas partes idênticas, que coincidem ao dobrar o papel no vinco.



O vinco formado pela dobra representa uma linha reta que podemos chamar de **eixo de simetria**, pois divide a figura em **duas partes de mesmo formato e mesmo tamanho**, como se uma fosse a imagem da outra refletida em um espelho. Por isso, dizemos que a figura obtida no papel é uma figura que apresenta **simetria**.

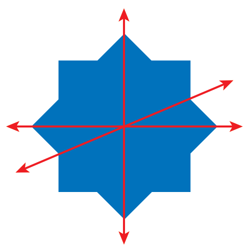
Se uma figura não tem simetria, dizemos que ela é **assimétrica**.

Verifique no exemplo a seguir.



Note que, nessa figura, não podemos traçar um eixo de simetria.

Observe agora esta outra figura:



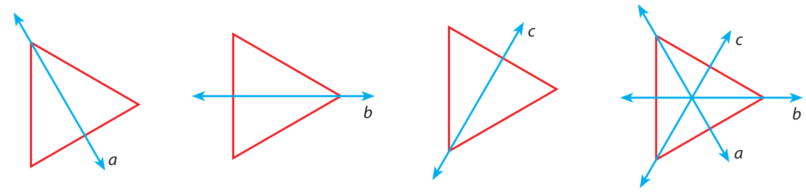
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Ela tem mais de um eixo de simetria. Destacamos três, mas há outros.

• Você consegue identificar quais são os outros eixos de simetria? Resposta pessoal.

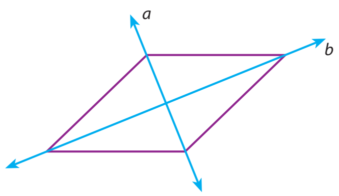
Figuras com mais de um eixo de simetria

Observe o triângulo equilátero, reproduzido quatro vezes.

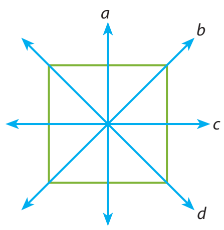


Note que as retas *a*, *b* e *c* são eixos de simetria desse triângulo. Por isso, dizemos que o triângulo equilátero tem três eixos de simetria.

Existem outros polígonos com mais de um eixo de simetria. Observe as figuras a seguir.



Losango



Quadrado

O triângulo equilátero tem 3 lados e 3 eixos de simetria. O quadrado também segue esse padrão: tem 4 lados e 4 eixos de simetria. No entanto, o losango apresentado tem 4 lados e somente 2 eixos de simetria. O que os diferencia?

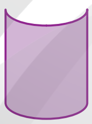
> Todo polígono que tem o número de lados igual ao número de eixos de simetria é denominado **polígono regular**.

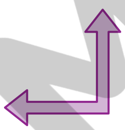
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

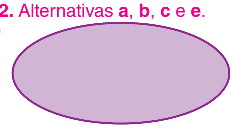
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 No caderno, desenhe uma figura assimétrica e uma figura simétrica, identificando seu eixo de simetria. **1.** Construção de figura. Identificação do eixo de simetria.

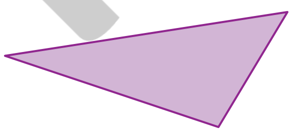
2 Entre as figuras geométricas representadas a seguir, quais apresentam eixo de simetria?
2. Alternativas **a**, **b**, **c** e **e**.

a) 

c) 

e) 

b) 

d) 

f) 

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Figuras com mais de um eixo de simetria

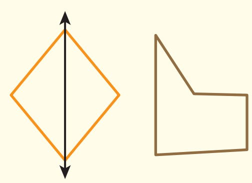
Com duas dobras não paralelas no papel, obtêm-se outras dobraduras que podem ser associadas a figuras que apresentam simetria. As figuras obtidas terão dois eixos de simetria, cada um passando por uma das dobras. Peça aos estudantes que construam figuras com uma dobra e com duas dobras, depois recortem as figuras e identifiquem a simetria nelas. Lembre os estudantes de que devem utilizar tesouras com pontas arredondadas e tomar muito cuidado ao manuseá-las.

Em grupos de quatro ou cinco estudantes, solicite que definam um tema (jardim, vitral, tapeçaria, praia, jogos de quadra, aviões, carros, paisagens, mosaicos, máscaras etc.) para construírem um painel que contenha figuras simétricas obtidas por meio de uma ou duas dobras em papel. Depois, se julgar conveniente, organize com eles uma exposição desse trabalho coletivo.

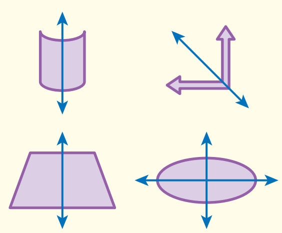
Exercícios propostos

Antes de pedir aos estudantes que iniciem o bloco de exercícios, pergunte se algum deles ainda tem alguma dúvida. É importante que todas elas sejam sanadas.

Os desenhos do **exercício 1** são pessoais. A seguir, apresentamos uma sugestão:



Ao observar as figuras dos itens **a**, **b**, **c** e **e** do **exercício 2**, notamos que elas têm eixo de simetria.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

No **exercício 3**, comente com os estudantes que em objetos reais a simetria deve ser relativizada, mas que, ainda assim, podemos associar a eles a ideia de simetria, como no caso da estrela-do-mar. Se achar conveniente, peça aos estudantes que identifiquem, sem marcar o livro, os eixos de simetria.

As imagens do floco de neve e da estrela-do-mar, **itens a** e **c**, respectivamente, apresentam simetria.

No **exercício 4**, apenas a reta *r* dos **itens a**, **c** e **f** representa um eixo de simetria da figura.

Uma maneira de ampliar esse exercício é propor aos estudantes que reproduzam em papel quadriculado as figuras dos **itens b**, **d** e **e**. Em seguida, eles devem fazer alterações mínimas, de modo que as novas figuras apresentem simetria.

A resolução do **exercício 5** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

3 Observe as imagens a seguir. Agora, responda no caderno: em qual delas há simetria?
3. Alternativas **a** e **c**.

a)

KENNETH LIBBRECHT/SPL/FOTOARENA

b)

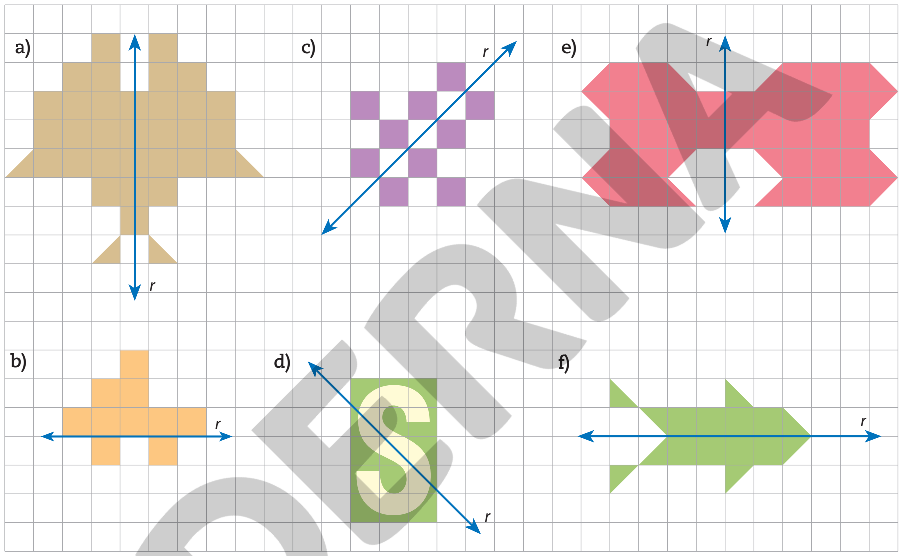
NOREEFLY/SHUTTERSTOCK

c)

PHOTODISC/GETTY IMAGES

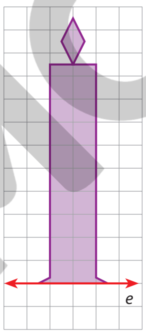
(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

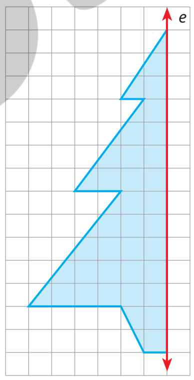
4 Em que casos a reta *r* representa um eixo de simetria da figura? Responda no caderno.
4. Alternativas **a**, **c** e **f**.

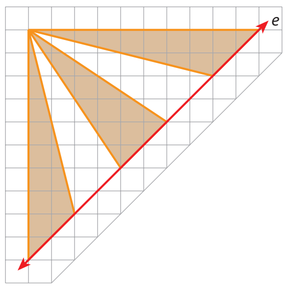


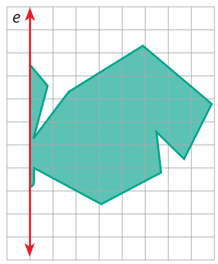
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

5 Reproduza os desenhos em uma folha de papel quadriculado. Desenhe a metade que está faltando, sabendo que a reta *e* é um eixo de simetria de cada figura. **5.** Construção de figuras.

a)


b)


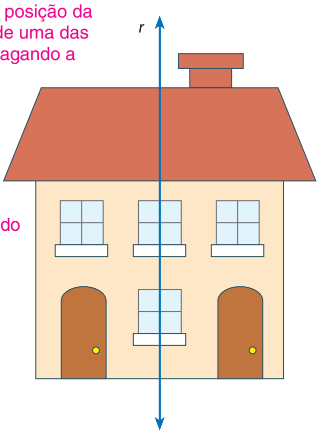
c)


d)


6. Respostas possíveis:
• Mudando a posição da fechadura de uma das portas e desenhando sobre o telhado, à esquerda da reta *r*, uma chaminé igual à da direita.

6 Descreva no caderno como você pode modificar a casa representada a seguir, para que ela se torne simétrica em relação à reta *r*.

• Mudando a posição da fechadura de uma das portas e apagando a chaminé.
• Mudando a posição da fechadura de uma das portas e redesenhando a chaminé bem no centro do telhado.

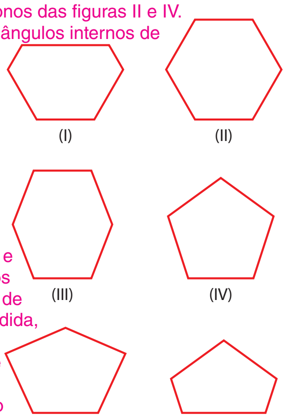


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

7 Observe os polígonos a seguir.

7. a) Os polígonos das figuras II e IV. Eles têm ângulos internos de mesma medida e lados de mesma medida.

7. b) Não, as figuras I e VI têm todos os ângulos de mesma medida, e o número de eixos de simetria é diferente do número de lados.



Responda no caderno.

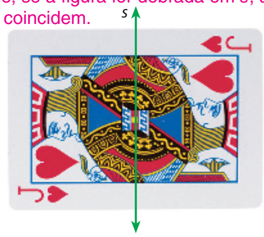
a) Entre os polígonos dados, quais têm tantos lados quantos são seus eixos de simetria? Com uma régua e um transferidor, meça os lados e os ângulos internos dos polígonos que você identificou. O que você observa?

b) A afirmação a seguir é verdadeira?
Todos os polígonos que têm todos os ângulos de mesma medida são polígonos regulares.
Justifique sua resposta.

c) A afirmação a seguir é verdadeira?
Todos os polígonos que têm todos os lados de mesma medida são polígonos regulares.
Justifique sua resposta. **7. c)** Não, as figuras III e V têm todos os lados de mesma medida, e o número de eixos de simetria é diferente do número de lados.

8 Marina desenhou a reta *s*, afirmando que essa reta representa o eixo de simetria da carta de baralho representada a seguir. Na sua opinião, Marina tem razão?

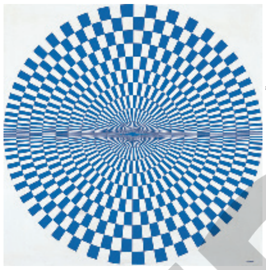
8. Não, porque, se a figura for dobrada em *s*, as duas partes não coincidem.



MYIMAGES MICHA/SHUTTERSTOCK

9 Observe estas reproduções das pinturas dos artistas Luiz Sacilotto e Milton Dacosta.

9. Espera-se que os estudantes percebam que apenas a obra de Luiz Sacilotto apresenta simetria. Na obra de Milton Dacosta, um suposto eixo de simetria seria uma reta vertical central, porém teríamos dois retângulos pequenos à direita e três retângulos à esquerda dessa reta.



VALTER SACILOTTO - COLEÇÃO PARTICULAR

SACILOTTO, L. **Concreção**. 1979. Óleo sobre tela fixada em madeira. 100 × 100 cm.

ALEXANDRE DACOSTA - COLEÇÃO PARTICULAR

DACOSTA, M. **Em vermelho**. 1958. Óleo sobre tela. 73 × 92 cm.

Em qual das duas obras há simetria? Justifique sua resposta.

10 Com um compasso, desenhe um círculo. Trace alguns eixos de simetria no círculo e, em seguida, responda: é possível traçar mais de 10 eixos de simetria em um círculo?

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

11 ***Hora de criar*** – Em duplas, cada integrante vai elaborar um problema sobre figura(s) com simetria. Troquem de caderno para um resolver o problema do outro. Depois, destroquem para corrigi-los. **11.** Resposta pessoal.

10. Espera-se que os estudantes percebam que podem traçar quantos eixos de simetria quiserem.

Exercícios propostos

No **exercício 8**, a reta *s* desenhada por Marina não representa o eixo de simetria da carta, porque, se a figura for dobrada em *s*, as duas partes não coincidem.

Proponha aos estudantes que verifiquem se há algum eixo de simetria para a figura da carta. Possivelmente, eles indicarão algumas retas. Discuta a veracidade dessas propostas. Embora seja possível, por uma rotação de 180°, verificar que a metade da esquerda é simétrica à metade da direita (e vice-versa), não há eixo de simetria nessa figura.

O **exercício 10** antecipa de maneira informal as conclusões da atividade proposta na próxima seção **Para saber mais**.

A resolução do **exercício 10** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

O **exercício 11** tem como objetivo fazer com que os estudantes reflitam sobre o que aprenderam até o momento a respeito de simetria e consigam elaborar uma situação-problema sobre esse assunto. Além de criar a situação-problema, os estudantes corrigem e avaliam a questão que elaboraram, aperfeiçoando, assim, a sua capacidade de crítica e de alteridade.

Para saber mais

Habilidade da BNCC: **EF07MA18**.

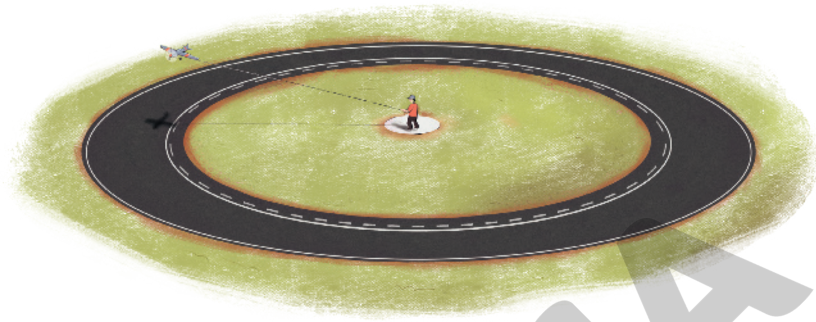
Solicite aos estudantes que façam uma pesquisa sobre aeromodelismo, trabalhando o tema da seção. Eles também podem obter imagens de aeromodelos que apresentem simetria.

Avalie a conveniência de apresentar aos estudantes o conceito de limite. Para tanto, recorde a definição de polígono regular e comente que um polígono regular com um número muito grande de lados (tendendo ao infinito) tem um número igualmente grande de eixos de simetria (também tendendo ao infinito). Essa sequência de polígonos regulares se aproxima cada vez mais da circunferência, que tem infinitos eixos de simetria.

As figuras construídas para responder ao **Agora é com você!** poderão compor, em uma atividade interdisciplinar com Arte, um painel a ser exposto aos demais estudantes da escola.

PARA SABER MAIS

A circunferência, um lugar geométrico infinitamente simétrico



IZAAC BRITO/ARQUIVO DA EDITORA

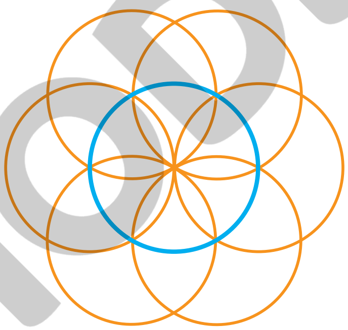
Aeromodelismo é uma atividade exercida como forma de lazer que tem muitos adeptos. Esse passatempo envolve a construção e o voo de modelos, em escala reduzida, de aeronaves e espaçonaves (aviões, balões, foguetes etc.). Trata-se de um tipo de miniaturismo. Uma das categorias de aeromodelismo é o aeromodelismo a cabo.

No aeromodelismo a cabo, o avião é mantido a uma distância constante do seu controlador, por isso, o avião descreve trajetórias circulares. Se ele rodar na pista plana, podemos dizer que traça um percurso que é uma circunferência.

É fácil visualizar a circunferência como um conjunto de todos os pontos de um plano que estão a igual distância do seu centro. Como só os pontos da circunferência têm essa propriedade de equidistar do centro, dizemos que a circunferência é um **lugar geométrico**.

Ela também é uma das figuras geométricas que vemos com mais frequência nas artes gráficas. De simples traçados com compasso a elaboradas mandalas, sua beleza, infinitamente simétrica, é encantadora.

MÁRIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



VISNEZH/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Com um compasso, trace arcos e circunferências para construir figuras com simetrias como as das mandalas. **Resposta:** Construção de figura.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

2 Simetria em relação a uma reta

Considere as situações a seguir.

Situação 1

Observe a imagem a seguir.

A paisagem real e a imagem formada no espelho-d'água dão a ideia de figuras simétricas em relação a uma reta.


JOÃO PRUDENTE/PULSAR IMAGENS

Reflexo de buritis na margem do rio Preguiças, em Barreirinhas (Maranhão). (Fotografia de 2019.)

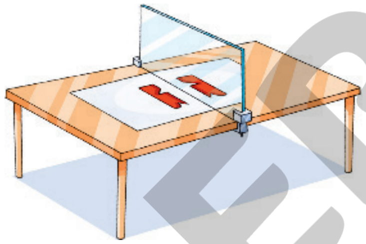
Situação 2

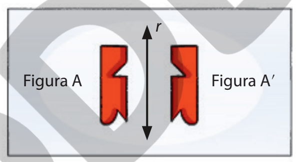
Na ilustração a seguir, o espelho acoplado à mesa fornece a imagem refletida da figura vermelha, que está desenhada na folha de papel.

Essa figura e sua imagem têm mesmo formato e mesmo tamanho, porém estão em posições opostas em relação à linha reta na qual o espelho está apoiado.

Representando na folha de papel a imagem da figura (A) refletida no espelho (A′) e a reta *r* em que este se apoia, obtemos a figura em destaque.

Dizemos que as duas figuras são simétricas em relação à reta *r*, que é o eixo de simetria. Dizemos também que fizemos uma **reflexão** da figura A em relação à reta *r*, obtendo a figura refletida A′.





ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 3

Observe a malha quadriculada.

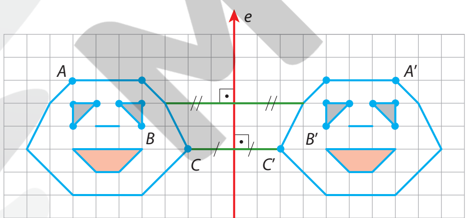


Figura 1 Figura 2

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2. Simetria em relação a uma reta

Habilidade da BNCC: **EF07MA21**.

As imagens bidimensionais que exemplificam a ideia de simetria em relação a uma reta são abundantes no cotidiano do estudante, como as fotografias que retratam o reflexo na água de objetos às margens de um lago. Na **situação 1**, o reflexo na água dos buritis na margem do rio Preguiças é um exemplo da ideia de simetria observada em situações cotidianas.

Se possível, reserve uma aula para realizar uma atividade utilizando *software* de geometria dinâmica. Com as ferramentas do *software*, os estudantes podem compor diferentes figuras e, depois, automaticamente obter as figuras que são reflexão delas, de acordo com uma reta, desenvolvendo a habilidade (EF07MA21). Geralmente, esses *softwares* possibilitam construir a reflexão de uma figura em relação a uma reta e, depois, mover a reta, possibilitando observar, ao mesmo tempo, a nova reflexão da figura original.

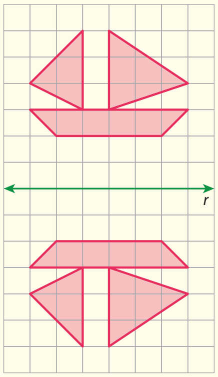
Esse tipo de atividade favorece o desenvolvimento da **competência geral 2**, pois os estudantes podem exercitar a curiosidade intelectual, a imaginação e a criatividade. A atividade também possibilita o desenvolvimento da **competência geral 5**, na medida em que eles utilizam e se apropriam dos recursos tecnológicos para a construção de conhecimento e para resolver problemas.

Exercícios propostos

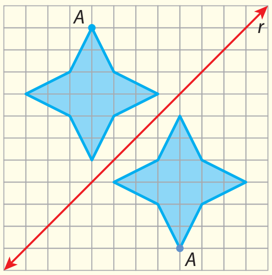
No **exercício 12**, peça aos estudantes que, após reproduzirem as figuras e desenharem seus simétricos em relação à reta *r*, recortem o conjunto de tal modo que possam dobrar as figuras no eixo de simetria e verificar que as partes coincidem. Lembre os estudantes de que devem utilizar tesouras com pontas arredondadas e manuseá-las com cuidado.

Acompanhe a resolução desse exercício.

a)



b)



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

O **exercício 13**, que trabalha as reflexões sucessivas por meio de eixos paralelos, propicia uma observação interessante quanto à similaridade da relação inversa. Ao resolvê-lo, os estudantes concluem que a imagem inversa da imagem inversa é a própria imagem.

A resolução do **exercício 13** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Note que as figuras 1 e 2 são simétricas em relação à reta *e*. Desse modo, cada ponto da figura 1 tem um ponto correspondente na figura 2, que é seu simétrico em relação à reta *e*.

Por exemplo:

- *A* e *A′* são simétricos em relação à reta *e*;
- *B′* é o simétrico de *B* em relação à reta *e*;
- *C′* é a imagem de *C* por meio da reta *e*.

Também podemos afirmar que dois pontos simétricos em relação à reta *e* estão em uma reta perpendicular e à mesma distância dessa reta, em posições opostas.

Representando a medida do comprimento do lado do quadradinho da malha por *u*, verificamos que:

- *A* e *A′* estão a 7 *u* da reta *e*;
- *B* e *B′* estão a 4 *u* da reta *e*;
- *C* e *C′* estão a 2 *u* da reta *e*.

Isso sempre ocorre com duas figuras simétricas em relação a uma reta: cada ponto de uma delas é simétrico de um ponto da outra em relação à mesma reta, e vice-versa, e os pontos simétricos estão em uma reta perpendicular e à mesma distância da reta considerada.

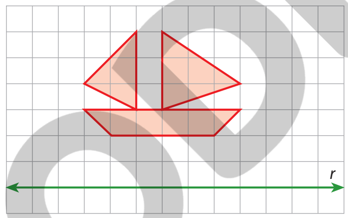
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

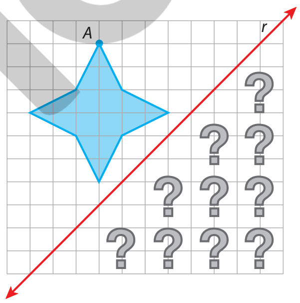
12 Reproduza cada figura e a reta *r* em uma folha quadriculada. Em seguida, desenhe a figura simétrica em relação a essa reta.

12. Construção de figuras.

a)



b)

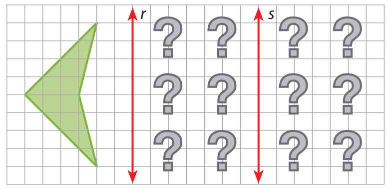


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

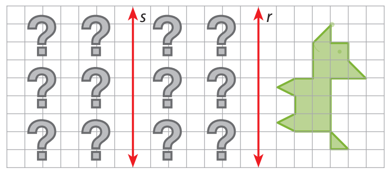
13 Reproduza as figuras em uma folha quadriculada, sem os pontos de interrogação. Desenhe as figuras obtidas destas por reflexões sucessivas em relação às retas *r* e *s*, nessa ordem.

13. Construção de figuras.

a)



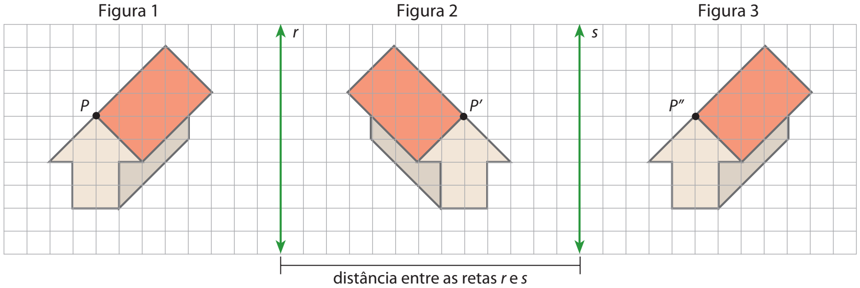
b)



- Nos dois itens, considere figura 1 a figura dada, figura 2, a obtida após a primeira reflexão, e figura 3, a obtida após a segunda reflexão. Qual é a relação entre a figura 3 e a figura 1?

13. Espera-se que os estudantes percebam que a figura 3 é uma translação da figura 1.

14 Na malha quadriculada a seguir, a figura 2 é simétrica à figura 1 em relação à reta *r*, e a figura 3 é simétrica à figura 2 em relação à reta *s*.



Considere o lado do quadradinho da malha como unidade de medida de comprimento (*u*).

a) Expresse a medida da distância entre as retas paralelas *r* e *s* nessa unidade. **14. a)** 13 *u*

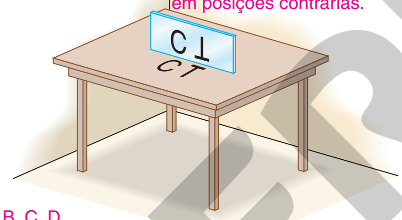
b) Qual é a medida da distância entre P e P″ nessa mesma unidade? **14. b)** 26 *u*

c) O que você observa quanto às distâncias obtidas nos itens **a** e **b**? **14. c)** A distância entre as retas é a metade da distância entre *P* e *P*″.

d) As figuras 1 e 3 são simétricas em relação a alguma reta? Por quê? **14. d)** Não, porque elas não estão em posições contrárias.

e) Que relação existe entre a figura 1 e a figura 3? **14. e)** Elas são idênticas.

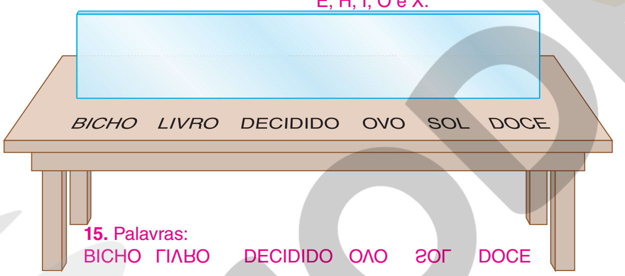
15 Algumas letras vistas no espelho aparecem inalteradas; outras, não. Observe como exemplo as letras C e T, representadas na imagem.



As letras que aparecem inalteradas quando vistas em um espelho colocado verticalmente sobre uma mesa são as que têm eixo de simetria horizontal. No alfabeto, há oito letras com essa propriedade. Quais são elas?

Agora, no caderno, desenhe a imagem das seguintes palavras refletidas no espelho.

15. Letras: B, C, D, E, H, I, O e X.



15. Palavras: BICHO ΓIΛRO DECIDIDO OΛO ƧOΓ DOCE

16 Construa dois pontos simétricos em relação a uma reta, seguindo as instruções a seguir.

Em uma folha de papel sulfite, construa uma reta *r* e um ponto P fora dela. Dobre a folha na reta *r* e decalque no verso da folha o ponto P, obtendo um novo ponto. Desdobre a folha e, agora no mesmo lado dela em que está o ponto P, represente o ponto P' na posição correspondente ao ponto decalcado no verso. O ponto P′, assim construído, é simétrico a P em relação à reta *r*? **16.** Construção de figura; sim.

17 Dados a reta *s* e o segmento $\overline{MN}$, explique como você construiria, por meio de dobraduras, o segmento $\overline{M'N'}$, simétrico a $\overline{MN}$ em relação à reta *s*. **17.** Basta dobrar a folha na reta *s* e decalcar o segmento $\overline{MN}$, obtendo um novo segmento.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

No **exercício 17**, espera-se que os estudantes respondam que basta dobrar a folha na reta *s* e decalcar o segmento $\overline{MN}$, obtendo um novo segmento.

Exercícios propostos

No **exercício 14**, os estudantes avançam um passo em relação ao exercício anterior e complementam a relação das distâncias determinadas pela simetria em relação a uma reta. Caso ainda apresentem alguma dúvida para responder ao **item c**, peça a eles que voltem a responder aos **itens a**, **b** e **c** considerando outros pontos da **figura 1**, diferentes do ponto *P*, e seus respectivos simétricos.

Acompanhe a resolução desse exercício.

a) O comprimento do lado de cada quadradinho da malha mede 1 *u*; logo, como são 13 quadradinhos de *r* a *s*, temos 13 *u* de distância.

b) Procedendo como no **item a**, temos 26 quadradinhos de *P* a *P*″; logo, temos 26 *u* de distância.

c) A distância entre as retas é a metade da distância entre *P* e *P*″.

d) As **figuras 1** e **3** não são simétricas em relação a nenhuma reta, porque elas não estão em posições contrárias.

e) As **figuras 1** e **3** são idênticas.

Se julgar conveniente, antecipe que esse é um tipo de simetria de translação.

Após a resolução do **exercício 15**, incentive os estudantes a pesquisar exemplos de palavras cujas imagens refletidas em espelho sejam elas próprias. Essa proposta pode ser aplicada em uma atividade interdisciplinar com Língua Portuguesa ou Inglês.

Uma variação interessante do **exercício 16** é pedir aos estudantes que, dados dois pontos *A* e *B*, obtenham o eixo de simetria entre ambos por meio de dobraduras. Como o eixo de simetria deve estar a uma mesma distância dos pontos *A* e *B*, ao serem sobrepostos os pontos, a dobra da folha corresponderá ao eixo de simetria procurado. Além disso, essa linha corresponde à mediatriz do segmento $\overline{AB}$, ou seja, ao conjunto de todos os pontos que estão a uma mesma distância dos pontos *A* e *B*.

As resoluções dos **exercícios 15** e **16** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Exercícios propostos

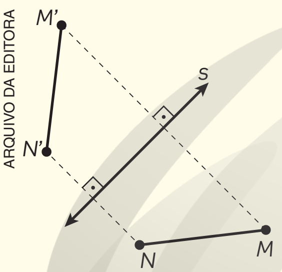
Antes de responderem ao **exercício 18**, peça aos estudantes que pesquisem na internet outros objetos de decoração em que é possível observar a ideia de simetria. Essa pesquisa pode servir de apoio para as suas criações. Os desenhos criados pelos estudantes poderão compor, em uma atividade interdisciplinar com Arte, um painel a ser exposto em sala de aula.

Pense mais um pouco...

Esta seção é uma retomada dos **exercícios 16** e **17**, de modo que os estudantes obtenham o segmento simétrico com o auxílio de régua e esquadro, sem fazer dobraduras. Isso permitirá trabalhar a ideia de distância entre ponto e reta.

Na **atividade 1**, **item b**, como cada ponto do segmento $\overline{MN}$ deve estar à mesma distância da reta *s* que os pontos simétricos correspondentes do segmento $\overline{M'N'}$, é necessário o uso de um esquadro para traçar retas suporte partindo de *M* e *N* e passando pela reta *s*, formando um ângulo de 90° com ela, como mostra a figura. Nessas retas suporte, do outro lado da reta *s*, com a régua, marcam-se os pontos simétricos que têm a mesma distância de *M* e *N* até a reta *s*; os pontos *M'* e *N'*, respectivamente.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



O processo para resolver a **atividade a** é similar, sendo necessário apenas obter o simétrico de um ponto.

Para o **item b**, verifique se os estudantes percebem que é suficiente determinar o simétrico dos pontos *M* e *N* e, em seguida, traçar o segmento de reta que passa por eles.

O comentário sobre a **atividade 1** também abrange a resolução da **atividade 2**, pois contém um texto explicativo sobre como obter as figuras pedidas.

18 ***Hora de criar*** – Há simetria também em muitos objetos de decoração, como nos exemplos a seguir.

HOMYDESIGN/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

Os azulejos coloniais decorativos são característicos de São Luís, capital do Maranhão.

SVETLANAPARSH/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

Tapete com desenhos de indígenas estadunidenses. (Estados Unidos).

Nas faixas decorativas e na tapeçaria de inspiração geométrica, os padrões se repetem preenchendo toda a superfície.

a) Elabore padrões que apresentem simetria, como em uma faixa decorativa. **18. a)** Construção de figura.

b) Faça uma descrição detalhada do processo que usou para criar seu desenho. **18. b)** Resposta pessoal.

c) Apresente seu desenho aos colegas da turma, identificando pelo menos um eixo de simetria. **18. c)** Apresentação do desenho e explicação.

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

1 Faça as seguintes construções.

a) Partindo de um ponto *P* e de uma reta *r*, *P* não pertencente a *r*, construa, usando régua e esquadro, um ponto *P'*, simétrico a *P* em relação à reta *r*. **1. a)** Construção de figura.

b) Partindo de um segmento $\overline{MN}$ e de uma reta *s*, *M* e *N* não pertencentes a *s*, construa, usando régua e esquadro, um segmento $\overline{M'N'}$, simétrico a $\overline{MN}$ em relação à reta *s*. **1. b)** Construção de figura.

2 Escreva um texto explicando como você fez para construir as figuras pedidas. **2.** Resposta pessoal.

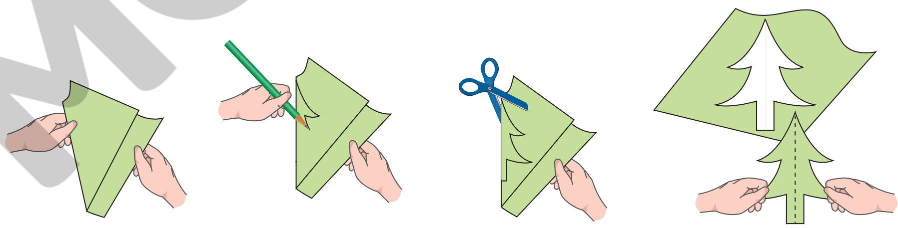
3 Reúna-se com um colega e compare o texto que você escreveu com o dele. Há diferenças nos processos de construção? **3.** Resposta pessoal.

PARA SABER MAIS

A simetria e a bissetriz

Na página 174, por meio da dobra de uma folha de papel, construímos uma figura que apresenta simetria em relação a uma linha reta. Vamos retomar o passo a passo dessa construção.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



Dobrar o papel e fazer o vinco. | Fazer um desenho. | Recortar o papel. | Desdobrar o papel.

182

Para saber mais

Essa seção retoma o conteúdo do início do capítulo para abordar a bissetriz de um ângulo entendida como eixo de simetria dele e obtida mais uma vez utilizando dobradura.

Peça aos estudantes que, seguindo o passo a passo dado, construam uma imagem simétrica e obtenham a bissetriz de um ângulo qualquer. Fique atento a possíveis dúvidas.

Também por meio de dobradura, podemos obter a **bissetriz** de um ângulo.

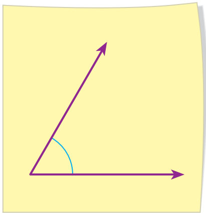


Figura 1

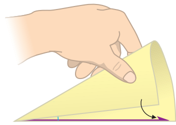


Figura 2

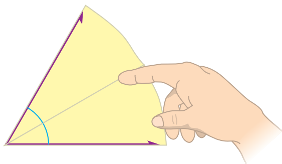


Figura 3

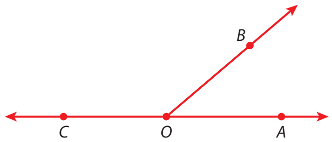
ILUSTRAÇÕES: CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que a bissetriz de um ângulo é uma linha reta que funciona como um eixo de simetria para os lados desse ângulo. Em outras palavras, ângulo pode ser descrito como uma figura que apresenta simetria e tem como eixo de simetria a sua bissetriz.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Desenhe, em uma folha de sulfite, a figura a seguir, que representa dois ângulos suplementares.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Por dobradura, obtenha as bissetrizes dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$. **1.** Construção de figura.

Em seguida, meça com o transferidor o ângulo formado pelas bissetrizes $\overrightarrow{OM}$ de $A\hat{O}B$ e $\overrightarrow{ON}$ de $B\hat{O}C$.

a) Qual é a medida obtida? **1. a)** 90°

b) Verifique se os colegas obtiveram a mesma medida. O que você conclui? **1. b)** Resposta pessoal.

c) Para justificar sua conclusão, considere a medida de $A\hat{O}B$ igual a $2x$ e a medida de $B\hat{O}C$ igual a $2y$. Depois, represente as medidas dos ângulos $M\hat{O}B$, $B\hat{O}N$ e $M\hat{O}N$. Agora, responda: quanto vale $2x + 2y$? E quanto vale $x + y$? **1. c)** x, y, $x + y$; $2x + 2y = 180°$; $x + y = 90°$

2 Reproduza em uma folha de papel o triângulo ABC da figura 1 e, em seguida, recorte-o.

a) Por dobradura, obtenha as bissetrizes dos três ângulos do triângulo ABC. Trace as bissetrizes pelas marcas das dobras. **2. a)** Construção de figura.

b) As três bissetrizes se cruzam duas a duas em pontos distintos ou se cruzam em um só ponto? **2. b)** Em um só ponto.

c) Com um esquadro e uma régua, meça a distância do ponto de encontro das bissetrizes até cada um dos lados do triângulo. Acompanhe na figura 2. O que se pode dizer dessas três distâncias? **2. c)** Elas são iguais.

d) Coloque a ponta-seca de um compasso no ponto em que as bissetrizes se encontram. Abra o compasso até a distância obtida no item **c** e trace uma circunferência. O que acontece com essa circunferência e com os três lados do triângulo?

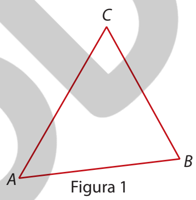


Figura 1

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

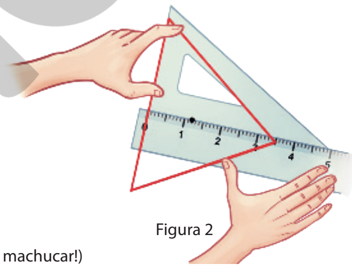


Figura 2

IZAAC BRITO/ARQUIVO DA EDITORA

(Ao usar o compasso e a tesoura sem ponta, atenção para não se machucar!)

2. d) A circunferência toca cada um dos três lados do triângulo em um único ponto.

Agora é com você!

A **atividade 1** tem como objetivo auxiliar os estudantes na compreensão da propriedade de que as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e suplementares formam um ângulo reto.

A **atividade 2** pede uma aplicação do resultado da **atividade 1** para a obtenção do incentro de um triângulo.

As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

3. Transformações geométricas

Habilidade da BNCC: **EF07MA21**.

Neste momento, passamos do estudo da ideia de “figuras que apresentam simetria” para um estudo de “simetria obtida de uma figura que sofreu uma transformação”. Essa transformação se dá por meio de um de três “movimentos”: translação, reflexão ou rotação.

Note que a mesma simetria em relação a uma reta, que até então era vista mais como uma propriedade de figuras que apresentavam em si a simetria por reflexão, agora é abordada como uma transformação de um objeto para outro.

Ao propor aos estudantes que reconheçam figuras simétricas obtidas por transformações geométricas de translação, rotação e reflexão, este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade (EF07MA21).

3 Transformações geométricas

Veremos agora três tipos de transformações geométricas, chamadas de **reflexão**, **translação** e **rotação**, por meio das quais são obtidas figuras simétricas de figuras dadas. Essas transformações são caracterizadas por movimentos feitos nessas figuras.

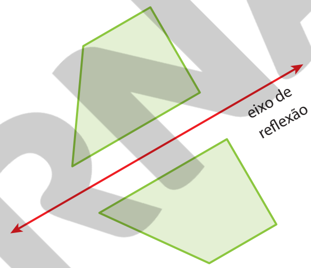
A primeira transformação, denominada reflexão, já vimos no tópico anterior. Ela corresponde à simetria em relação a uma reta que aqui chamaremos de **eixo de reflexão**.

Reflexão

Em um papel, dada uma figura e uma reta que não passe por ela, imagine o seguinte movimento: dobramos o papel pela reta e decalcamos a figura do outro lado da reta. Depois desdobramos o papel. Assim, obtemos a simétrica da figura dada inicialmente.

A reflexão mantém todas as medidas: distâncias, ângulos, formato e tamanho. Assim, a figura inicial e sua imagem refletida em relação a uma reta são congruentes.

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA



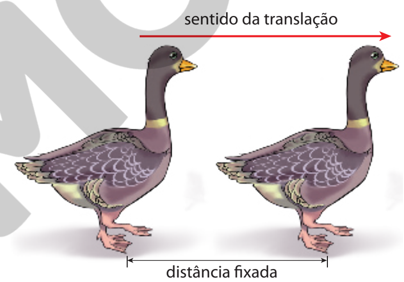
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que, quando refletimos uma figura em relação a uma reta (ou no espelho, ou na superfície de um rio), a figura obtida (imagem) tem mesmo formato e mesmo tamanho; porém, fica virada ao contrário (imagem reversa) em relação à figura inicial.

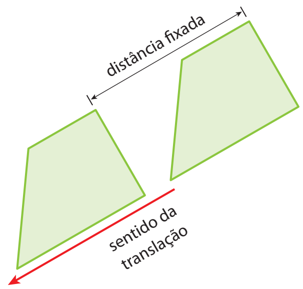
Translação

Quando movemos uma figura a uma dada distância, sempre na mesma direção e no mesmo sentido, estamos realizando uma **translação**.

Nesse caso, a figura obtida (imagem) também é congruente à figura inicial.



ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

É como se a figura inicial deslizasse, formando uma sequência de figuras congruentes a ela.

CESAR LIMA/SHUTTERSTOCK

Podemos imaginar a coluna e a janela da esquerda deslocando-se para a direita (e vice-versa).

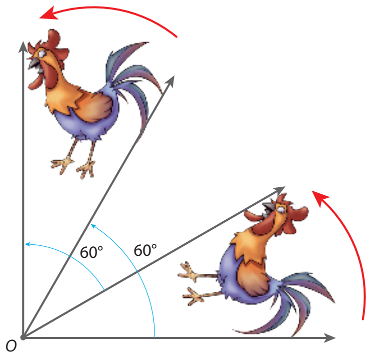
Theatro Municipal do Rio de Janeiro (RJ). (Fotografia de 2020.)

Rotação

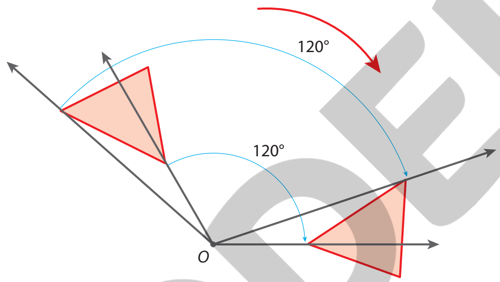
Quando o movimento aplicado à figura é um giro de determinado número de graus em torno de um ponto, estamos realizando uma **rotação**. Esse ponto é chamado de **centro da rotação**.

Uma rotação fica determinada quando conhecemos o centro, o sentido e o ângulo de giro.

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA



Rotação de centro *O* e ângulo de giro de 60° no sentido anti-horário

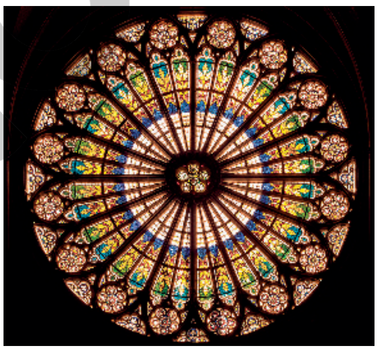


Rotação de centro *O* e ângulo de giro de 120° no sentido horário

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A rotação também preserva o formato e o tamanho das figuras. Desse modo, a imagem obtida pelas rotações é uma figura congruente à figura inicial.

Verifique mais um exemplo na imagem do vitral.



SASKIAACHT/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

Podemos imaginar uma parte desse vitral (no formato de uma região angular) girando em torno do ponto central.

Vitral da Catedral de Estrasburgo, França. (Fotografia de 2020.)

Transformações geométricas

Peça aos estudantes que citem situações em que ocorrem ideias de transformações geométricas.

Questione-os sobre que figura obtemos pela transformação por rotação de 360°. (Resposta: Obtemos a mesma figura, no mesmo lugar.)

Aproveite a imagem do vitral da Catedral de Estrasburgo e pergunte aos estudantes qual é a medida mínima do ângulo de rotação que devemos empregar para obter uma figura idêntica à original. (Resposta: A figura dada é formada por 16 setores que se repetem. Dividindo 360° por 16, obtemos 22,5°.)

Exercícios propostos

O **exercício 19** tem por objetivo levar os estudantes à distinção entre as três transformações geométricas estudadas neste capítulo. Para explorá-lo, pergunte, por exemplo, se há eixo de simetria na figura do **item a**. Alguns estudantes provavelmente dirão que sim. Nesse caso, peça a eles que coloquem ou imaginem um espelho colocado sobre o(s) suposto(s) eixo(s) de simetria, perpendicularmente à folha do livro, e verifiquem se o que aparece no espelho é igual ao que está na outra parte da figura. Eles devem concluir que não há eixo de simetria. No **item a**, é aplicada a rotação; no **item b**, a translação; e, no **item c**, a reflexão em relação a uma reta.

Após a resolução do **exercício 20**, discuta com os estudantes a invariabilidade das medidas de comprimentos e de ângulos da figura transformada em relação à figura dada.

O **exercício 21** pode ser feito com o auxílio de um espelho ou por meio de uma atividade de arte cênica chamada de jogo de espelho; essa pode ser uma ótima oportunidade para uma atividade interdisciplinar com Arte. Para isso, organize os estudantes em duplas. Solicite a um deles que fique de frente para o colega. Um deles deve repetir todos os movimentos iniciados pelo outro, dos pés à cabeça, incluindo expressões faciais (sorrir, piscar um olho, movimentar a boca, a língua e os olhos). Após algum tempo, inverta as posições dos estudantes.

As resoluções dos **exercícios 20** a **22** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Pense mais um pouco...

Em um crescente de complexidade, esta seção dá continuidade ao **exercício 22** e antecipa de maneira informal o conteúdo a ser estudado na continuidade do capítulo.

Converse com os estudantes sobre a interessante equivalência de algumas transformações aplicadas em relação aos dois eixos de simetria perpendiculares. No próximo tópico, esses eixos passam a ser os eixos coordenados que determinam o plano cartesiano.

As figuras da resolução dessa atividade estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do **capítulo 8**.

---

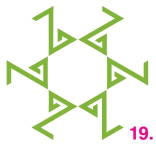
21. b) Resposta pessoal. O movimento será sempre simétrico com relação ao espelho.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

19 Identifique em cada caso a transformação geométrica aplicada: **reflexão** em relação a uma reta, **translação** ou **rotação**.

a)



19. a) Rotação.

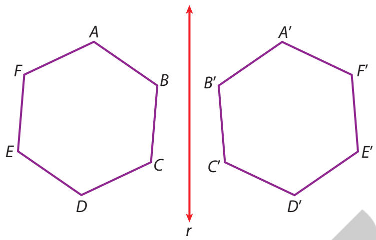
b)

19. b) Translação.

c)

19. c) Reflexão.

20 Os hexágonos a seguir são simétricos em relação ao eixo r.



Agora, responda às questões.

a) Se o lado $\overline{DC}$ mede 2 unidades, quanto mede $\overline{D'C'}$? 20. a) 2 unidades.

b) Se a medida da distância de F ao eixo r é igual a 4 unidades, quanto mede $\overline{FF'}$? 20. b) 8 unidades.

c) Se $\overline{EE'}$ mede 9 unidades, qual é a medida da distância de E ao eixo r? E de E' ao eixo r? 20. c) 4,5 unidades; 4,5 unidades.

d) Qual é a relação entre as medidas dos ângulos $A\hat{D}F$ e $A'\hat{D'}F'$? 20. d) As medidas são iguais.

e) Se o hexágono $ABCDEF$ é um polígono regular, então o hexágono $A'B'C'D'E'F'$ também é? 20. e) Sim.

f) A medida do perímetro dos dois hexágonos é a mesma? 20. f) Sim.

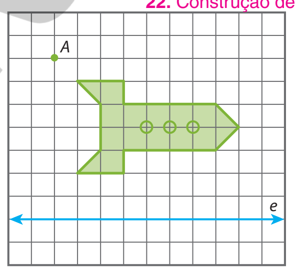
g) A medida da área da região interna dos dois hexágonos pode não ser a mesma? 20. g) Não.

21 Responda às questões a seguir. 21. a) Resposta possível: A mão esquerda está segurando a orelha direita.

a) Imagine que você esteja diante de um espelho e que segure sua orelha esquerda com a mão direita. Como você descreveria a imagem refletida no espelho?

b) Imagine um movimento que você possa fazer diante do espelho. Como você descreveria a imagem formada com esse movimento?

22 Copie a figura a seguir em três papéis quadriculados. Em uma das cópias, faça a reflexão do foguete em relação ao eixo e. Em outra, faça a translação do foguete, aplicando uma distância igual a 8 lados do quadradinho da malha e movendo-o para a direita. Na terceira cópia, faça a rotação do foguete, girando-o em torno do ponto A, 135° no sentido anti-horário. 22. Construção de figura.



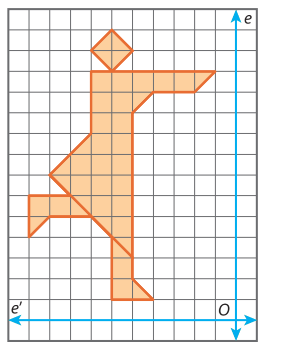
Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com dois colegas e façam o que se pede.

Copiem a figura em três papéis quadriculados.

Um dos colegas faz reflexões sucessivas em torno dos eixos e e e'. O outro faz, em outra cópia, a rotação de 180° em torno do ponto O no sentido horário. O terceiro faz na terceira cópia a rotação de 180° em torno do ponto O no sentido anti-horário. Em seguida, comparem os resultados e escrevam no caderno as conclusões dessa comparação.



Pense mais um pouco...: Espera-se que os estudantes concluam que:
- duas reflexões sucessivas em relação a dois eixos perpendiculares equivalem a uma rotação de 180° em um dos sentidos em torno do ponto de intersecção dessas retas (centro de rotação);
- uma rotação de 180° em sentido horário em torno de um ponto equivale a uma rotação de 180° em sentido anti-horário em torno do mesmo ponto.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

4 Transformações geométricas no plano cartesiano

As transformações geométricas também podem ser aplicadas no plano cartesiano.

Veremos alguns casos particulares.

Considere, no plano cartesiano, um triângulo *ABC*, em que *A*(4, 1), *B*(1, 1) e *C*(4, 3), como a figura inicial. A seguir, aplicaremos nessa figura os movimentos de translação, de reflexão e de rotação.

Translação

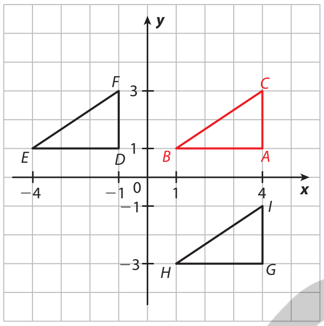
- O triângulo *DEF* é a figura obtida do triângulo *ABC* por uma translação horizontal de 5 unidades para a esquerda. Note que todos os infinitos pontos do triângulo *ABC* foram deslocados –5 unidades (para a esquerda), ou seja, as abscissas foram diminuídas em 5 unidades, e as ordenadas foram mantidas.

  Em particular, temos:

  $D(4 - 5, 1) = D(-1, 1)$;

  $E(1 - 5, 1) = E(-4, 1)$; e

  $F(4 - 5, 3) = F(-1, 3)$.



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

- O triângulo *GHI* é a figura obtida do triângulo *ABC* por uma translação vertical de –4 unidades (para baixo). Note que todos os infinitos pontos do triângulo *ABC* foram deslocados 4 unidades para baixo, ou seja, as ordenadas foram diminuídas de 4 unidades e as abscissas foram mantidas.

  Em particular, temos:

  $G(4, 1 - 4) = G(4, -3)$; $H(1, 1 - 4) = H(1, -3)$; e $I(4, 3 - 4) = I(4, -1)$.

Generalizando, considere um ponto *P*, qualquer, de coordenadas cartesianas x_P e y_P.
Um ponto *Q*, obtido de *P* por uma translação horizontal de *u* unidades, terá abscissa igual a $(x_P + u)$ e ordenada igual a y_P. Quando o deslocamento é para a esquerda, *u* é negativo; quando é para a direita, *u* é positivo.
Um ponto *R*, obtido de *P* por uma translação vertical de *u* unidades, terá abscissa igual a x_P e ordenada igual a $(y_P + u)$. Quando o deslocamento é para baixo, *u* é negativo; quando é para cima, *u* é positivo.

Acompanhe os exemplos:

a) Dado $P(5, 10)$, com uma translação horizontal de 7 unidades para a esquerda obtém-se $Q(5 - 7, 10) = Q(-2, 10)$, e com uma translação horizontal de 7 unidades para a direita obtém-se $Q(5 + 7, 10) = Q(12, 10)$.

b) Dado $P(-1{,}5; 0{,}9)$, com uma translação vertical de 7 unidades para baixo obtém-se $R(-1{,}5; 0{,}9 - 7) = R(-1{,}5; -6{,}1)$, e com uma translação vertical de 7 unidades para cima obtém-se $R(-1{,}5; 0{,}9 + 7) = R(-1{,}5; 7{,}9)$.

4. Transformações geométricas no plano cartesiano

Habilidades da BNCC: **EF07MA19**, **EF07MA20** e **EF07MA21**.

Abordamos a formalização das relações entre as coordenadas cartesianas dos pontos simétricos dados por translação, reflexão e rotação.

Antes de apresentar o conteúdo, recorde com os estudantes o que foi estudado sobre plano cartesiano e coordenadas cartesianas.

Ao propor aos estudantes que reconheçam figuras simétricas obtidas por transformações geométricas no plano cartesiano e que realizem transformações de polígonos representados no plano cartesiano, este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades (EF07MA19), (EF07MA20) e (EF07MA21).

Translação

Apresente aos estudantes o exemplo de translação em relação ao eixo das ordenadas (translação horizontal) e ao eixo das abscissas (translação vertical).

Assegure-se de que os estudantes conseguiram assimilar o que foi apresentado nesse exemplo. Caso contrário, peça a eles que escolham um ponto qualquer do 1º quadrante (não pertencente a algum dos eixos cartesianos) e obtenham os simétricos em relação a cada eixo.

Em seguida, proponha que comparem as coordenadas do ponto escolhido com as dos pontos obtidos, observando a definição de translação dada.

Reflexão

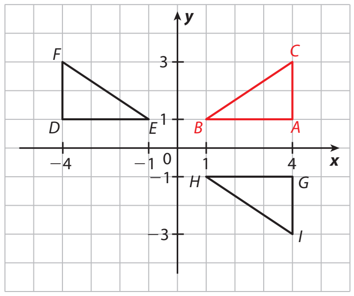
Após a leitura do exemplo e da definição de reflexão, caso seja necessário, proceda como na orientação sobre a translação.

Rotação

Após a leitura do exemplo e da definição de rotação, caso seja necessário, proceda como na orientação sobre a translação.

Após o trabalho com as transformações geométricas, como sugestão de atividade complementar, distribua aos estudantes folhas de papel quadriculado com traçado de eixos do plano cartesiano e com uma figura simples desenhada em um dos quadrantes. Solicite a construção das figuras simétricas às figuras dadas, em relação aos eixos x e y, por meio de uma translação, de uma reflexão e de uma rotação.

Reflexão



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

- O triângulo *DEF* é a figura obtida do triângulo *ABC* por uma reflexão em relação ao eixo *y*. Note que os pares e pontos *A* e *D* estão à mesma distância do eixo *y*, assim como *B* e *E*, e também *C* e *F*. Em cada um desses pares, as abscissas foram multiplicadas por (–1), ou seja, tiveram os seus sinais trocados, e as ordenadas foram mantidas.

  Em particular, temos: $D(-4, 1)$; $E(-1, 1)$ e $F(-4, 3)$.

- O triângulo *GHI* é a figura obtida do triângulo *ABC* por uma reflexão em relação ao eixo *x*. Note que os pares de pontos *A* e *G* estão à mesma distância do eixo *x*, assim como *B* e *H*, e também *C* e *I*. Em cada um desses pares, as ordenadas foram multiplicadas por (–1), ou seja, tiveram os seus sinais trocados e as abscissas foram mantidas.

  Em particular, temos: $G(4, -1)$, $H(1, -1)$ e $I(4, -3)$.

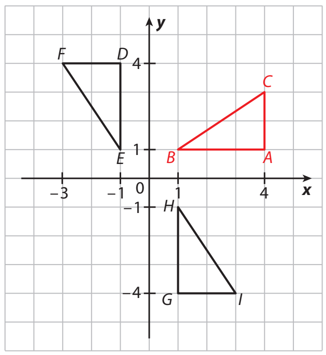
Generalizando, considere um ponto *P*, qualquer, de coordenadas cartesianas x_P e y_P.
Um ponto *Q*, obtido de *P* por uma reflexão em relação ao eixo *y*, terá abscissa igual a $-x_P$ e ordenada igual a y_P.
Um ponto *R*, obtido de *P* por uma reflexão em relação ao eixo *x*, terá abscissa igual a x_P e ordenada igual a $-y_P$.

Acompanhe os exemplos.

a) Dado $P(8, 2)$, com uma reflexão em relação ao eixo *y* obtém-se $Q(-8, 2)$, e com uma reflexão em relação ao eixo *x* obtém-se $R(8, -2)$.

b) Dado $P(-1{,}5; 0{,}9)$, com uma reflexão em relação ao eixo *y* obtém-se $Q(1{,}5; 0{,}9)$, e com uma reflexão em relação ao eixo *x* obtém-se $R(-1{,}5; -0{,}9)$.

Rotação



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

- O triângulo *DEF* é a figura obtida do triângulo *ABC* por uma rotação de um quarto de volta (90°) em torno do ponto *O*, origem do plano cartesiano, no sentido anti-horário. Esse fato pode ser verificado com um compasso. Com a ponta-seca do compasso em *O* e abertura *AO*, giramos 90° no sentido anti-horário e obtemos o ponto *D*. Do mesmo modo: obtemos o ponto *E*, com a ponta-seca em *O* e abertura *OB*; obtemos o ponto *F*, com a ponta-seca em *O* e abertura *OC*.

- O triângulo *GHI* é a figura obtida do triângulo *ABC* por uma rotação de um quarto de volta (90°) em torno do ponto *O*, origem do plano cartesiano, no sentido horário. Esse fato pode ser verificado com um compasso. Com a ponta-seca do compasso em *O* e abertura *AO*, giramos 90° no sentido horário e obtemos o ponto *G*. Do mesmo modo: obtemos o ponto *H* com a ponta-seca em *O* e abertura *OB*; obtemos o ponto *I* com a ponta-seca em *O* e abertura *OC*.

Generalizando, considere um ponto P, qualquer, de coordenadas cartesianas x_P e y_P.
Um ponto Q, obtido de P por uma rotação de 90° em torno do ponto O, origem do plano cartesiano, no sentido anti-horário, terá abscissa igual a $-y_P$ e ordenada igual a x_P.
Um ponto R, obtido de P por uma rotação de 90° em torno do ponto O, origem do plano cartesiano, no sentido horário, terá abscissa igual a y_P e ordenada igual a $-x_P$.

Acompanhe os exemplos.

a) Dado $P(6; 4,2)$, com uma rotação de 90°, sentido anti-horário, obtém-se $Q(-4,2; 6)$, e com uma rotação de 90°, sentido horário, obtém-se $R(4,2; -6)$.

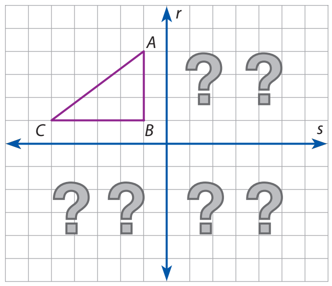
b) Dado $P\left(-\frac{3}{4}, 8\right)$, com uma rotação de 90°, sentido anti-horário, obtém-se $Q\left(-8, -\frac{3}{4}\right)$, e com uma rotação de 90°, sentido horário, obtém-se $R\left(8, \frac{3}{4}\right)$.

24. a) $A'(-3, 4)$, $B'(-4, 3)$, $C'(-3, 1)$, $D'(-1, 1)$ e $E'(-1, 3)$.
24. b) $A''(3, -4)$, $B''(4, -3)$, $C''(3, -1)$, $D''(1, -1)$ e $E''(1, -3)$.
24. c) $A'''(-3, -4)$, $B'''(-4, -3)$, $C'''(-3, -1)$, $D'''(-1, -1)$ e $E'''(-1, -3)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

23 Considere as retas perpendiculares r e s e o triângulo ABC, representados a seguir.



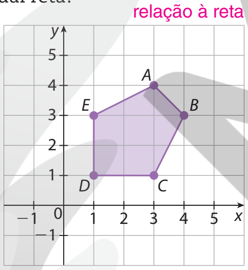
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Copie essa representação em uma folha de papel quadriculado. 23. a) Construção de figuras.

b) Construa os triângulos: DEF, simétrico ao triângulo ABC em relação à reta r; GHI, simétrico ao triângulo DEF em relação à reta s; e JKL, simétrico ao triângulo GHI em relação à reta r. 23. b) Construção de figuras.

c) O triângulo JKL é simétrico ao triângulo ABC em relação a qual reta? 23. c) A simetria é em relação à reta s.

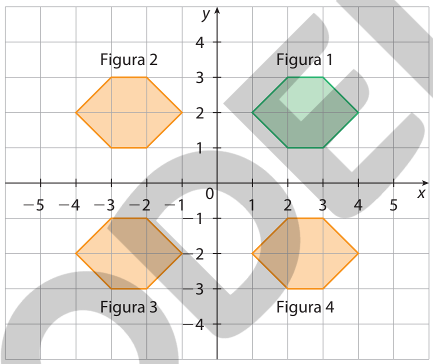
24 O polígono $ABCDE$ está representado no plano cartesiano. Identifique as coordenadas dos vértices do polígono e escreva-as no caderno:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a) refletido em relação ao eixo y;
b) refletido em relação ao eixo x;
c) rotacionado 180° no sentido horário, em relação à origem.

25 Observe a imagem e escreva no caderno as frases a seguir, completando-as. 25. a) 3



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a) A figura 1 é simétrica à figura ▀ por rotação no sentido anti-horário em relação à origem.
b) A figura 1 é simétrica à figura ▀ por reflexão em relação ao eixo x. 25. b) 4
c) A figura 1 é simétrica à figura ▀ por reflexão em relação ao eixo y. 25. c) 2

26. a) $L(3, 2)$, $M(8, 2)$ e $C(9, 5)$

26 Use um papel quadriculado para construir, em um plano cartesiano, um triângulo ABC, com $A(-2, 2)$, $B(3, 2)$ e $C(4, 5)$. A seguir obtenha:

a) o triângulo LMN, por uma translação horizontal de ABC, para a direita de 5 unidades;
b) o triângulo RST, por uma translação horizontal de ABC, para a esquerda de 5 unidades.

26. b) $R(-7, 2)$, $S(-2, 2)$ e $T(-1, 5)$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 23** a **28** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

No **exercício 23**, que pede a obtenção de figuras simétricas em relação a duas retas r e s, perpendiculares, converse com os estudantes sobre as equivalências das possíveis combinações de transformações geométricas. Por exemplo, o triângulo DEF pode ser obtido do triângulo ABC por meio de uma translação horizontal de 6 unidades para a direita, combinada com uma reflexão em relação à reta vertical que passa pelos pontos médios dos lados $\overline{DF}$ e $\overline{EF}$.

Exercícios propostos

Os **exercícios 26**, **27** e **28** são variações, com crescente complexidade, do tipo de situação-problema que os estudantes resolveram no **exercício 23** e que acompanharam nos exemplos de transformações geométricas. Ao corrigi-los com os estudantes, chame a atenção deles para o fato de que problemas similares podem ser resolvidos por estratégias comuns e, assim, podem-se desenvolver aspectos da habilidade (EF07MA06).

No **exercício 26**, a figura dada está contida em dois quadrantes.

No **exercício 27**, os vértices do triângulo pertencem aos eixos coordenados.

No **exercício 28**, dois vértices pertencem ao eixo das abscissas e o outro não pertence a eixo algum.

Exercícios complementares

Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de retomar os principais conceitos estudados no capítulo e recorrer aos conhecimentos construídos. Solicite a eles que resolvam esses exercícios de duas maneiras diferentes.

Verifique se ainda apresentam dificuldade em algum deles e, se este for o caso, sugira que refaçam algumas atividades referentes a tais assuntos.

As resoluções do **exercício 1** e dos **exercícios 3** a **5** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

A bandeira nacional brasileira reproduzida no **exercício 2** não apresenta simetria, por causa das estrelas, da faixa branca central e do que está escrito nela. Converse com os estudantes de maneira que concluam que, desconsiderando esses elementos da bandeira, suas demais formas geométricas formam uma figura com 4 eixos de simetria (2 eixos definidos pelos pares de vértices opostos do retângulo verde e 2 eixos definidos pelos pares de vértices opostos do losango amarelo).

---

27. a) $L(-3, 0)$, $M(-5, 0)$ e $N(0, 5)$
27. b) $R(3, 0)$, $S(5, 0)$ e $T(0, -5)$
27. c) $U(-3, 0)$, $V(-5, 0)$ e $W(0, -5)$

27 Use um papel quadriculado para construir, em um plano cartesiano, um triângulo ABC, com $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ e $C(0, 5)$. A seguir, obtenha:

a) o triângulo LMN, por uma reflexão de ABC em relação ao eixo y;
b) o triângulo RST, por uma reflexão de ABC em relação ao eixo x;
c) o triângulo UVW, por uma reflexão de LMN em relação ao eixo x.

28 Use um papel quadriculado para construir, em um plano cartesiano, um triângulo ABC, com $A(3, 0)$, $B(5, 0)$ e $C(4, 3)$. A seguir, obtenha:

a) o triângulo LMN, por uma rotação de ABC de 90° em torno do ponto O, origem do plano cartesiano, no sentido anti-horário;
b) o triângulo RST, por uma rotação de ABC de 90° em torno do ponto O, origem do plano cartesiano, no sentido horário.

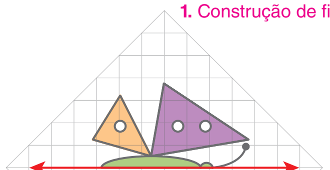
28. a) $L(0, 3)$, $M(0, 5)$ e $N(-3, 4)$
28. b) $R(0, -3)$, $S(0, -5)$ e $T(3, -4)$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

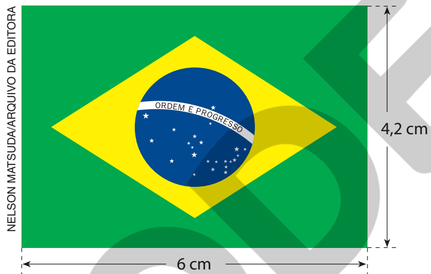
1 Reproduza em uma folha de papel quadriculado a figura e desenhe a parte que falta para obter uma figura simétrica em relação à reta e.

1. Construção de figura.



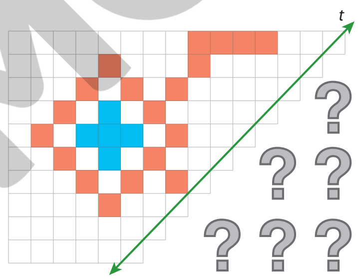
2. Não, por causa das estrelas, da faixa branca central e do que está escrito nela.

2 A bandeira nacional brasileira apresenta simetria? Justifique sua resposta.



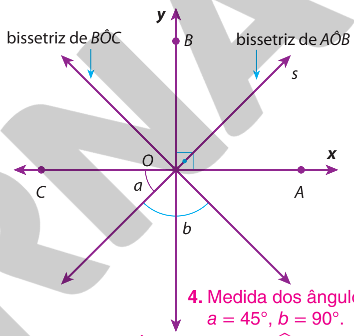
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

3 Reproduza em uma folha de papel quadriculado a figura a seguir e construa a simétrica em relação à reta t. **3.** Construção de figura.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

4 Observe a figura a seguir e determine os valores de a e b, em grau.



4. Medida dos ângulos: $a = 45°$, $b = 90°$.

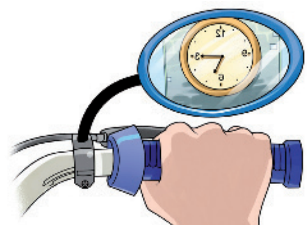
4. a) É a bissetriz de $B\hat{O}C$.

Agora responda às questões a seguir.

a) Qual é a figura simétrica da bissetriz de $A\hat{O}B$ em relação ao eixo y?
b) Qual é a figura simétrica da bissetriz de $A\hat{O}B$ em relação ao eixo x?

4. b) É a bissetriz de $B\hat{O}C$.

5 (OBM) Benjamim passava pela praça de Quixajuba quando viu o relógio da praça pelo espelho da bicicleta, como na figura a seguir.



LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Que horas o relógio estava marcando?

a) 5 h 15 min
b) 5 h 45 min
c) 6 h 15 min
d) 6 h 45 min
e) 7 h 45 min

5. Alternativa **a**.

190

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Assinale a alternativa que traz uma figura que **não** apresenta simetria. **1.** Alternativa **b**.

a)  b)  c)  d) 

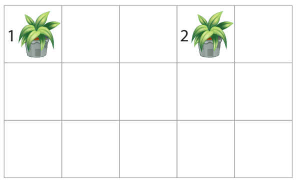
2 Quantos eixos de simetria há na figura a seguir? **2.** Alternativa **b**.

a) 3
b) 6
c) 9
d) 12

3 Qual figura obtemos ao realizar o seguinte corte em uma folha de papel dobrada ao meio? **3.** Alternativa **d**.

a)  b)  c)  d) 

4 Amanda tem uma estante com 15 espaços para organizar seus objetos. Uma planta estava, inicialmente, na posição 1 e, depois, Amanda colocou-a na posição 2.



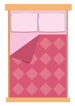
Que transformação geométrica pode ser associada à mudança de posição da planta? **4.** Alternativa **c**.

a) Reflexão
b) Rotação
c) Translação
d) Translação e rotação

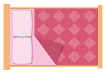
5 Se o ponto (–3, –3) for transladado 4 unidades, verticalmente, para cima e depois, sofrer reflexão em relação ao eixo *x*, suas coordenadas serão: **5.** Alternativa **c**.

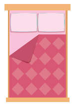
a) (3, –1)
b) (–3, 1)
c) (–3, –1)
d) (1, 3)

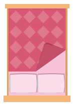
6 Matheus vai trocar alguns móveis do seu quarto de lugar. Ele decidiu que a cama seria rotacionada em 90° no sentido anti-horário, sendo o centro de rotação o centro da cama. Se a posição inicial é esta ilustrada, assinale a alternativa que contém a posição da cama após a rotação. **6.** Alternativa **a**.

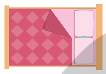


Posição inicial.

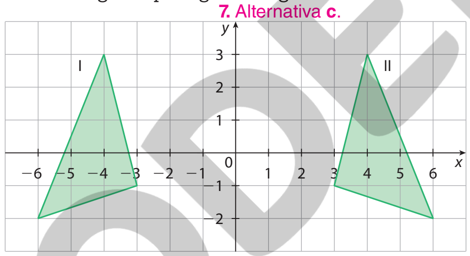
a) 

c) 

b) 

d) 

7 Qual foi a transformação geométrica aplicada na figura I para gerar a figura II? **7.** Alternativa **c**.



a) Reflexão em relação ao eixo x.
b) Translação de 6 unidades, na horizontal e para a direita.
c) Reflexão em relação ao eixo y.
d) Rotação de 180° no sentido horário.

Organizando

Organizando:
a) Sugestão de resposta: Um exemplo de figura simétrica é qualquer polígono regular; um exemplo de figura assimétrica é um triângulo escaleno.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir:

a) Dê um exemplo de figura simétrica e de figura assimétrica.
b) Descreva, com suas palavras, o que é uma reflexão.
c) Descreva, com suas palavras, o que é uma translação.
d) Descreva, com suas palavras, o que é uma rotação.

b) Reflexão é a transformação geométrica em que, com base em um eixo de reflexão, obtemos uma figura semelhante à original, com mesmas medidas, porém invertida com relação ao eixo.
c) Translação é a transformação geométrica que consiste em mover uma figura a uma dada distância e em determinada direção e sentido.
d) Rotação é a transformação geométrica em que movimentamos uma figura em torno de um ponto até determinado ângulo.

Verificando

Esses testes são mais uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo. Instrua-os a retornar às páginas anteriores caso alguma dúvida persista.

No **teste 1**, comente com os estudantes que simetria é uma propriedade de figuras geométricas planas em relação à medida de seus lados e à medida de seus ângulos. Observando a figura apresentada na alternativa **b**, pode-se perceber que, se ela tivesse eixos de simetria, eles conteriam alguma das diagonais do quadrado associado à figura ou alguma das medianas desse mesmo quadrado, o que não ocorre nessa figura. As demais figuras desse teste possuem simetria de rotação em relação ao ponto associado ao centro delas e/ou de reflexão em relação aos eixos que contêm as diagonais e as medianas dos quadrados associados às figuras.

As resoluções dos **testes 2** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Organizando

Incentive os estudantes a organizar o aprendizado no caderno, fazendo resumos, mapas conceituais ou aplicando destaques para conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo fazer com que eles retomem os conteúdos aprendidos no capítulo e reflitam sobre algumas temáticas. Após sua correção é importante pedir aos estudantes que compartilhem suas respostas; essa estratégia permitirá o compartilhamento de dúvidas e percepções, contribuindo para o aprendizado de todos.

Diversificando

Discuta o texto com os estudantes e pergunte a eles se reconhecem outras situações do dia a dia em que ocorrem movimentos que possam ser associados à transformação geométrica rotação.

Agora é com você!

1. $360° : 28$

$$\begin{array}{r|l} 360 & 28 \\ \hline -336 & 12 \\ 24 & \end{array}$$

$24° \cdot 60 = 1440'$

$$\begin{array}{r|l} 1440 & 28 \\ \hline -1428 & 51 \\ 12 & \end{array}$$

$12' \cdot 60 = 720''$

$$\begin{array}{r|l} 720 & 28 \\ \hline -700 & 25 \\ 20 & \end{array}$$

Logo, a medida aproximada do ângulo descrito é $12°51'25''$.

2. a) Posição de Leandro em *J*.

b) Posição de Leandro em *A* e Juliana em *J*.

c) A posição simétrica de *P* é *G* e a posição simétrica de *G* é *P*.

d) $360° : 18 = 20°$

Logo, $H\hat{S}I$ mede 20°.

Se fosse no sentido horário, $H\hat{S}I$ mediria:

$360° - 20° = 340°$

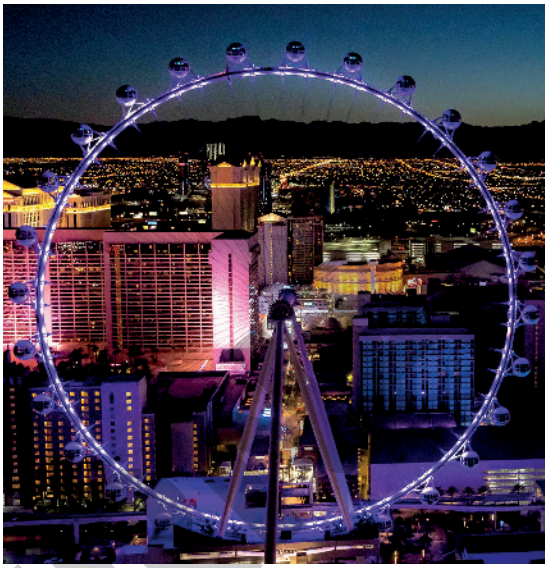
e) Bissetriz de um ângulo é a semirreta que parte de seu vértice e divide o ângulo em duas partes congruentes. Logo, a posição da cadeira é *P*.

f) Resposta possível: $D\hat{S}F$, $C\hat{S}G$ e $B\hat{S}H$

DIVERSIFICANDO

Girando no parque

A High Roller é uma roda-gigante digna do nome: tem 167,6 metros de altura e 158,5 metros de diâmetro. Foi inaugurada em 31 de março de 2014, em Las Vegas, Estados Unidos. Ela tem 28 cápsulas igualmente espaçadas, com ar-condicionado, cada uma com capacidade para 40 pessoas, e o tempo total do passeio (uma volta completa) dura cerca de 30 minutos. A medida de um ângulo imaginário com vértice no centro dessa roda, com lados que passem no centro de duas cápsulas vizinhas, pode ser indicada pela razão $\frac{360°}{28}$ ou $\frac{90°}{7}$.



ERIK KABIK PHOTOGRAPHY/MEDIA PUNCH/ALAMY/FOTOARENA

A High Roller, em Las Vegas (EUA), é a maior roda-gigante das Américas. (Fotografia de 2020.)

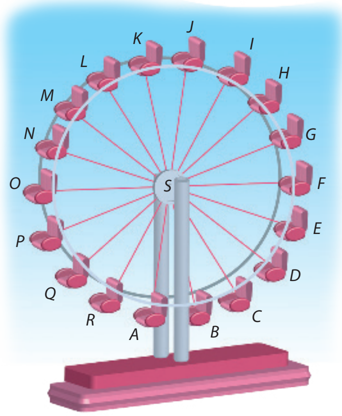
Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Qual é a medida aproximada do ângulo descrito acima em grau, minuto e segundo? **1.** $12°51'25''$

2. b) Leandro em *A* e Juliana em *J*.

2 A roda-gigante de um parque de diversões tem 18 cadeiras, igualmente espaçadas, e move-se no sentido anti-horário, isto é, no sentido contrário ao do ponteiro do relógio. Na figura, as letras de A a R indicam as posições das cadeiras. Leandro sentou-se na posição indicada pela letra A.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Em um primeiro momento, a roda moveu-se em meia-volta e parou para que Juliana se sentasse. Nesse momento, qual era a posição de Leandro? **2. a)** *J*

b) Após Juliana se sentar, a roda moveu-se 1,5 volta, novamente. Qual era a nova posição de Leandro e Juliana?

c) A posição *M* é simétrica de *D* em relação ao centro, assim como *N* é simétrica de *E*, e *O* é simétrica de *F*. Qual é a posição simétrica de *P* em relação ao centro da roda? E qual é a simétrica de *G* em relação ao centro da roda? **2. c)** *G*; *P*

d) Considerando que uma volta inteira corresponde a 360°, quantos graus tem o ângulo $H\hat{S}I$ descrito pela cadeira que vai da posição *H* até *I*, no sentido anti-horário? E se fosse no sentido horário? **2. d)** 20°; 340°

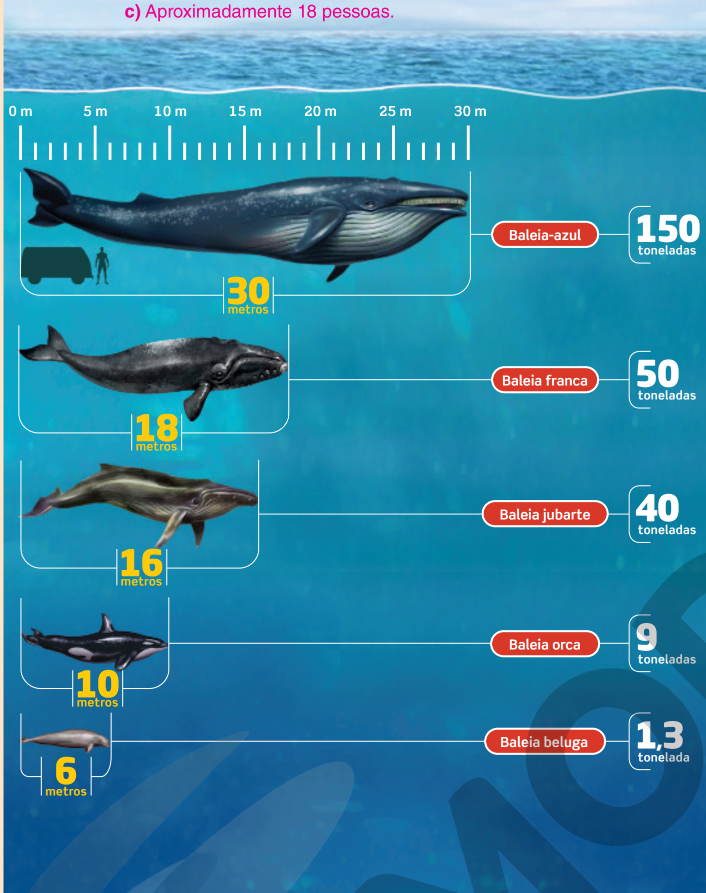
e) Qual é a posição da cadeira que está na bissetriz do ângulo $M\hat{S}A$ de menor medida? **2. e)** *P*

f) A cadeira da posição *E* está na bissetriz de um ângulo. Dê o nome de três ângulos em que isso é possível. **2. f)** Resposta possível: $D\hat{S}F$, $C\hat{S}G$ e $B\hat{S}H$.

Capítulo

9 Razões, proporções e porcentagem

a) Resposta esperada: representam a comparação das medidas das massas e dos comprimentos de diferentes espécies de baleia.
c) Aproximadamente 18 pessoas.



ÉBER EVANGELISTA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe, leia e responda no caderno.

a) Identifique os diferentes dados apresentados na ilustração. O que esses dados representam?

b) Qual é a relação entre as medidas de comprimento das baleias jubarte e franca?

c) Aproximadamente quantas pessoas medindo 1,70 m de altura, enfileiradas umas sobre as outras, equivalem ao comprimento médio da baleia-azul?

d) As baleias têm um ciclo de reprodução longo; as baleias franca, por exemplo, têm um filhote a cada três anos, e as baleias jubarte têm um filhote por ano. No caso de algum evento extremo, como a caça excessiva, o que o longo ciclo reprodutivo significa para as baleias?

b) Espera-se que os estudantes indiquem que o comprimento da baleia jubarte é $\frac{8}{9}$ do comprimento da baleia franca, ou cerca de 89%.

A baleia é o maior mamífero do planeta. A baleia-azul, a maior espécie de baleias e o maior animal do mundo, tem em média 150 toneladas e mede cerca de 30 metros de comprimento, o que equivale ao comprimento de mais de 6 carros populares enfileirados. Estima-se que existam cerca de 1,5 milhão de baleias de diferentes espécies habitando os oceanos atualmente. Todos os anos, centenas de baleias das espécies franca e jubarte visitam o litoral do Brasil durante seu período de reprodução, entre julho e novembro.

d) Significa que a população de baleias não é restabelecida rapidamente e a preservação de uma espécie pode ficar ameaçada.

193

Para o **item d** proponha uma reflexão sobre o problema apresentado. Espera-se que os estudantes percebam que a população de baleias não é restabelecida rapidamente e a preservação de uma espécie pode ficar ameaçada.

Sugestão de leitura

Para enriquecer a discussão, sugerimos a leitura do documento:

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Plano de Ação Nacional para a conservação de cetáceos marinhos**. Brasília: MMA/ICMBio, 2021. Disponível em: https://www.gov.br/icmbio/pt-br/assuntos/biodiversidade/pan/pan-cetaceos-marinhos. Acesso em: 22 jun. 2022.

Nesse documento é possível obter informações sobre as espécies de cetáceos marinhos que estão ameaçadas de extinção.

Capítulo 9 – Razões, proporções e porcentagem

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo aborda os conceitos de proporcionalidade e de porcentagem contribuindo para o desenvolvimento e a ampliação de ideias de proporcionalidade já estudadas anteriormente.

Enfatize a diversidade de emprego do conceito de razão entre grandezas de mesma natureza, como em escalas de mapas ou em procedimentos comparativos na confecção de miniaturas que testam projetos, como hidrelétricas, aviões, aparelhos eletrônicos e de informática, fórmulas químicas etc.

Pode-se aproveitar o contexto da abertura deste capítulo e explorar o Tema Contemporâneo Transversal **educação ambiental**. Comente, por exemplo, que a baleia-azul é uma espécie que está classificada como em perigo de extinção e cite aspectos da caça predatória às baleias.

No **item a** das questões propostas, os estudantes deverão identificar as diferentes informações apresentadas na imagem, que são: medida de comprimento, medida de massa, nomes das baleias e comparação entre os animais e um homem adulto. Faça a leitura dessas informações em conjunto com os estudantes e, se possível, incentive-os a comparar as medidas apresentadas com construções conhecidas, como a medida do comprimento da sala de aula.

No **item b** devem estabelecer uma relação entre as medidas de comprimento das baleias jubarte e franca, que são, respectivamente, 16 m e 18 m. Essa relação pode ser expressa pela razão: $\frac{16}{18} = \frac{8}{9}$.

No **item c** chamamos a atenção para a relação entre a medida de comprimento da baleia-azul e de um adulto medindo 1,70 m. Assim ao fazer a divisão de 30 m por 1,70 m irão obter: $30 : 1{,}7 \simeq 17{,}65$.

Logo, deverão concluir que serão aproximadamente 18 pessoas adultas.

1. O conceito de razão

Habilidades da BNCC: **EF07MA08** e **EF07MA09**.

Neste tópico, é possível trabalhar as habilidades (EF07MA08) e (EF07MA09) à medida que se explora a associação entre razão e fração.

Incentive os estudantes a fazer a leitura das situações apresentadas nesta página e, depois, proponha que estabeleçam outras comparações com base nas pessoas presentes na sala de aula. Por exemplo, pergunte a eles:

- Quantos estudantes da turma utilizam óculos de grau?
- Como escrever a fração que representa os estudantes que usam óculos em relação aos que não utilizam?
- É possível simplificar essa fração?

Proponha outras situações do contexto dos estudantes de maneira que, em algumas, possam simplificar a fração. Trabalhe também a ideia associada a essas frações com frases como:

- Para cada 5 estudantes que usam óculos, 10 não utilizam.
- A cada 15 estudantes, 5 utilizam óculos.

Elabore frases como essas de maneira que os estudantes percebam como associar a fração à razão e possam trabalhar a ideia de frações equivalentes para resolver problemas como:

- Se, em um grupo de 30 estudantes, 10 utilizam óculos, mantida essa razão, quantos utilizam óculos em um grupo de 60 estudantes? E em um grupo de 120 estudantes?

Espera-se que os estudantes percebam que, se a razão é mantida, $\frac{1}{3}$ dos estudantes em cada grupo utilizará óculos.

1 O conceito de razão

Observe as situações.

Situação 1

Uma pesquisa realizada em um bairro revelou que 160 das 400 pessoas pesquisadas praticam atividades físicas regularmente.

Com os dados da pesquisa, podemos estabelecer uma relação entre o número de pessoas que praticam atividades físicas regularmente e o número total de pessoas pesquisadas, escrevendo:

$$\frac{160}{400} = \frac{2}{5}$$


ANDRÉ VAZZIOS/ADJ/ARQUIVO DA EDITORA

Esse quociente é chamado de **razão**. Podemos dizer, então, que a razão do número de pessoas que praticam atividades físicas regularmente para o número total de pessoas pesquisadas é de 2 para 5. Isso significa que, de cada 5 pessoas pesquisadas, 2 praticam atividades físicas regularmente.

Situação 2

Sebo é o nome popular dado a livrarias que compram, vendem e trocam livros usados.

Uma pesquisa realizada por um sebo revelou que durante um trimestre foram vendidos 750 romances e 150 livros de histórias em quadrinhos.

A razão entre o número de livros de histórias em quadrinhos e o de romances vendidos no trimestre é $\frac{150}{750}$. Calculando esse quociente, encontramos 0,20 ou $\frac{20}{100}$. Isso significa que, enquanto foram vendidos 20 livros de histórias em quadrinhos, venderam-se cerca de 100 romances.


JUCA MARTINS/OLHAR IMAGEM

Livraria sebo no centro do Rio de Janeiro. (Fotografia de 2019).

A **razão** entre dois números é o quociente entre eles, com o segundo número diferente de zero.

Considere a razão $\frac{1}{5}$ (lemos: "razão de um para cinco"). Ela pode ser representada por 1 : 5, ou na forma de fração $\left(\frac{1}{5}\right)$ ou pela fração equivalente $\frac{20}{100}$, na forma decimal (0,2 ou 0,20), ou na forma percentual (20%).

1. d) Espera-se que os estudantes percebam que, de cada 5 pessoas pesquisadas, 3 não praticam atividades físicas regularmente, e que isso equivale a dizer que 60% das pessoas pesquisadas não praticam atividades físicas regularmente.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Leia novamente a situação 1 do início deste capítulo. 1. a) Respostas possíveis: $\frac{240}{400}$ ou $\frac{3}{5}$.

a) Qual é a razão entre o número de pessoas que não praticam atividades físicas regularmente e o número total de pessoas pesquisadas?

b) Escreva a razão obtida no item **a** na forma decimal. 1. b) 0,6

c) Escreva a razão obtida no item **a** na forma percentual. 1. c) 60%

d) Qual é o significado da razão que você encontrou?

2 Entre os estudantes de uma escola, existem 350 meninas e 210 meninos.

a) Determine a razão entre:

I. o número de meninas e o número de meninos; 2. a) I. $\frac{5}{3}$

II. o número de meninos e o número de meninas; 2. a) II. $\frac{3}{5}$

III. o número de meninas e o número de estudantes da escola; 2. a) III. $\frac{5}{8}$

IV. o número de meninos e o número de estudantes da escola. 2. a) IV. $\frac{3}{8}$

b) Escreva o significado de cada uma das razões obtidas.

c) Escolhendo ao acaso um desses estudantes, qual é a probabilidade de ser uma menina? E qual é a probabilidade de ser um menino? 2. c) $\frac{5}{8}$; $\frac{3}{8}$

3 Durante um jogo de futebol entre Fortaleza e Ceará, havia 30 000 torcedores no estádio. De cada 5 torcedores, 2 torciam para o Fortaleza e 3 para o Ceará.

a) Determine a razão entre o número de torcedores do Fortaleza e o número de torcedores do Ceará no estádio. 3. a) $\frac{2}{3}$

b) Determine a razão entre o número de torcedores do Fortaleza e o total de torcedores no estádio. 3. b) $\frac{2}{5}$

c) É correto afirmar que, dos 30 000 torcedores, 12 000 eram torcedores do Fortaleza? Por quê? 3. c) Sim, porque $\frac{2}{5} = \frac{12\,000}{30\,000}$.

d) Qual é a porcentagem de torcedores do Ceará que assistiam a esse jogo no estádio? 3. d) 60%

e) Um brinde foi sorteado, ao acaso, entre um desses torcedores. Qual time tem a maior probabilidade de ter um de seus torcedores contemplados? Justifique.

2. b) Espera-se que os estudantes percebam que, para cada quantidade indicada no numerador da fração, corresponde a quantidade indicada no denominador.

3. e) Ceará, pois 60% dos torcedores, torciam para esse time.

4 A turma A do 7º ano da escola Girassol tem igual número de meninas e de meninos. Uma recente pesquisa revelou o esporte preferido entre as meninas. Observe o quadro.

Futebol	Vôlei	Basquete	Tênis
12	5	2	1

Determine a razão entre:

a) o número de meninas que preferem futebol e o total de meninas; 4. a) $\frac{3}{5}$

b) o número de meninas que preferem vôlei e o das que preferem futebol; 4. b) $\frac{5}{12}$

c) o número de meninas que preferem tênis e o das que preferem basquete; 4. c) $\frac{1}{2}$

d) o número de meninas que preferem basquete e o das que preferem vôlei; 4. d) $\frac{2}{5}$

e) o número de meninas e o número de meninos; 4. e) $\frac{1}{1}$

f) o número de meninas que preferem futebol e o total de estudantes da turma. 4. f) $\frac{3}{10}$

5 Observe a tabela.

Número estimado de habitantes de algumas capitais brasileiras em 2021	
Capital	**Número de habitantes**
Rio de Janeiro	6 775 561
Fortaleza	2 703 391
Curitiba	1 963 726
Belo Horizonte	2 530 701
Vitória	369 534

Fonte: IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados. Acesso em: 21 fev. 2022.

a) Calcule a razão entre o número de habitantes de Fortaleza e o do Rio de Janeiro. Escreva essa razão na forma de porcentagem. 5. a) Aproximadamente 40%.

b) Qual é a razão, na forma de porcentagem, do número de habitantes de Vitória em relação ao de Curitiba? 5. b) Aproximadamente 19%.

6 Quantos meninos há na sua turma? E quantas meninas? Com base nessas informações, responda: 6. a) Resposta pessoal. 6. b) Resposta pessoal.

a) Qual é a razão entre o número de meninas e o número de meninos?

b) E qual é a razão entre o número de meninos e o total de estudantes da turma?

c) Na sua opinião, os valores calculados se mantêm para todas as turmas da escola? Justifique sua resposta. 6. c) Espera-se que os estudantes percebam que os valores devem variar conforme as turmas, que podem ter quantidades diferentes de estudantes, meninos e meninas.

Exercícios propostos

Os exercícios deste bloco trabalham o conceito de fração entendida como razão. O **exercício 1** retoma a situação apresentada no início do capítulo. Verifique se os estudantes compreendem a relação entre a representação da razão em cada item, como fração, como decimal e como porcentagem. Aborde essas diferentes representações no contexto da atividade, questionando, por exemplo: considerando que a razão se mantém:

- Em um grupo de 800 pessoas, quantas não praticam atividades físicas regularmente?
- E em um grupo de 1 000 pessoas?

Os estudantes podem calcular de diferentes maneiras; por exemplo, para o grupo de 800 pessoas, podem perceber que é possível resolver calculando 800 · 0,6 ou determinando 60% de 800 ou calculando $800 \cdot \frac{3}{5}$.

No **exercício 2**, deve-se considerar a ordem estabelecida para determinar a razão. Com o **item a**, verifique se os estudantes percebem, por exemplo, que a razão entre o número de meninas em relação ao de meninos (**I**) não é a mesma razão entre o total de meninos em relação ao total de meninas (**II**). O **item b** ajudar na interpretação das razões obtidas anteriormente ao entender que elas podem ser interpretadas da seguinte maneira:

I. Para cada 5 meninas, há 3 meninos.

II. Para cada 3 meninos, há 5 meninas.

III. A cada 8 estudantes da escola, 5 são meninas.

IV. A cada 8 estudantes da escola, 3 são meninos.

No **item c** é proposto aos estudantes a probabilidade de escolher, ao acaso, uma menina entre os estudantes e a probabilidade de escolher um menino. Como há 350 meninas, a probabilidade é de $\frac{350}{560} = \frac{5}{8}$. E de escolher um menino é de $\frac{210}{560} = \frac{3}{8}$.

Por propor aos estudantes o cálculo de probabilidade, esse exercício contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA34).

No **exercício 3**, verifique se os estudantes compreendem como determinar as razões pedidas e se relacionam corretamente a razão à porcentagem. No **item a**, como, a cada 5 torcedores, 2 torciam para o Grêmio e 3 para o Internacional, a razão entre torcedores do Grêmio e torcedores do Internacional é 2 para 3, ou seja, $\frac{2}{3}$. No **item b**, o total de torcedores no estádio pode ser organizado em grupos de 5 torcedores. Desta maneira, basta colocarmos o número 5 no denominador e o número de torcedores do Grêmio no numerador. Assim, a razão é $\frac{2}{5}$.

As resoluções dos **itens c**, **d** e **e** do **exercício 3** e dos **exercícios 4** a **6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

2. Razão entre grandezas

Habilidades da BNCC:
EF07MA08 e **EF07MA09**.

Neste tópico, abordamos a razão entre grandezas, conteúdo que permitirá a comparação entre frações associadas a diferentes ideias, contribuindo para o trabalho com a habilidade (EF07MA08). Assim, como nas situações apresentadas e nas propostas de exercícios, trabalharemos a associação entre razão e fração, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA09).

A **situação 1** leva os estudantes a comparar razões entre grandezas lineares e de superfície. Enfatize e solicite a pesquisa de cálculos de perímetro e de área de outros polígonos para que os comparem e concluam que a razão entre áreas é igual ao quadrado da razão entre perímetros.

Chame a atenção dos estudantes para o fato apontado pelo personagem, ou seja, que a fração $\frac{4}{9}$ corresponde ao quadrado da fração $\frac{2}{3}$. Solicite aos estudantes que verifiquem se essa relação entre essas razões será sempre a mesma, independentemente das medidas dos lados dos quadrados. Para isso, podem considerar quadrados de lados medindo x e y, sendo x e y números reais positivos. Nesses casos, a razão entre os perímetros será:

$$\frac{4x}{4y} = \frac{x}{y}$$

E a razão entre as áreas será:

$$\frac{x^2}{y^2}$$

Logo,

$$\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

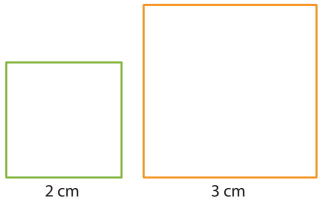
Aproveite a **situação 2** para uma atividade interdisciplinar com História identificando, por exemplo, aspectos e processos específicos de sociedades milenares africanas e asiáticas antes da chegada dos europeus, com destaque para as formas de organização social e o desenvolvimento de saberes e técnicas.

2 Razão entre grandezas

Considere as situações.

Situação 1

Considere os quadrados ilustrados.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

- A razão entre a medida de um dos lados do quadrado menor e a medida de um dos lados do quadrado maior é $\frac{2}{3}$.

  Note que aqui comparamos duas medidas de comprimento, ou seja, duas medidas da mesma grandeza.

- A medida do perímetro do quadrado menor é 8 cm; a medida do perímetro do quadrado maior é 12 cm.

  A razão entre a medida do perímetro do quadrado menor e a medida do perímetro do quadrado maior é $\frac{8}{12}$. Simplificando, obtemos $\frac{2}{3}$.

  Aqui também comparamos duas medidas de comprimento.

- A medida da área do quadrado menor é 4 cm^2; a medida da área do quadrado maior, 9 cm^2.

  A razão entre a medida da área do quadrado menor e a medida da área do quadrado maior é $\frac{4}{9}$.

  Nesse caso, comparamos duas medidas de área, ou seja, também comparamos duas medidas da mesma grandeza.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 2

A domesticação dos camelos foi praticada há milhares de anos. Esses animais, de cerca de 0,65 tonelada de massa, demonstram grande resistência a temperaturas extremas e têm capacidade de andar cerca de 65 quilômetros ao dia em regiões inóspitas, carregando cargas de até 200 quilogramas.

Para determinar a razão entre a medida da massa do camelo e a medida da massa que ele pode carregar, devemos escrever essas duas medidas da grandeza massa em uma mesma unidade de medida.

$$0{,}65 \text{ t} = 0{,}65 \cdot 1\,000 \text{ kg} = 650 \text{ kg}$$

Então, a razão procurada é $\frac{200}{650}$ ou $\frac{4}{13}$.

AMIR MAKAR/AFP/GETTY IMAGES

Treinador de camelos monta um camelo nos arredores ocidentais da cidade gêmea de Gizé, capital egípcia. (Fotografia de 2021.)

A **razão** entre duas medidas da mesma grandeza ou entre duas medidas de grandezas de mesma natureza, em uma mesma unidade de medida, é o quociente dos números que expressam essas medidas.

196

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

7 Considere o segmento $\overline{AC}$.

Determine a razão entre as medidas dos segmentos:

a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; **7. a)** $\frac{2}{3}$

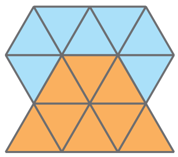
b) $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; **7. b)** $\frac{2}{5}$

c) $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$; **7. c)** $\frac{3}{5}$

d) $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$. **7. d)** $\frac{3}{2}$

8 Uma latinha de refrigerante tem capacidade de 350 mL, e uma garrafa, de 2 L. Determine a razão entre as medidas da capacidade dessa latinha e a da capacidade dessa garrafa. **8.** Razão: $\frac{7}{40}$

9 Considerando  como unidade de medida de área, para a figura a seguir, determine a razão entre as medidas das áreas:



a) da parte laranja e da parte azul; **9. a)** $\frac{8}{7}$

b) da parte azul e da parte laranja; **9. b)** $\frac{7}{8}$

c) da parte azul e da figura. **9. c)** $\frac{7}{15}$

10 Observe os anúncios.

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, responda em seu caderno.

a) Qual é a razão entre o preço do molho de tomate da marca A e o preço do molho de tomate da marca B? **10. a)** $\frac{18}{35}$

b) Qual é a razão entre as medidas da massa do molho de tomate da marca A e a da massa do molho de tomate da marca B? **10. b)** $\frac{4}{9}$

c) Qual é a medida da massa de 9 caixas do molho da marca A? E qual é o preço delas?

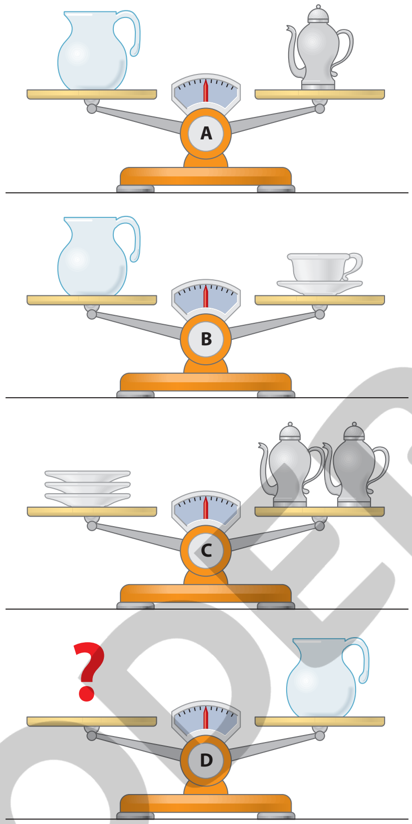
d) Qual é a medida da massa de 4 caixas do molho da marca B? E qual é o preço delas?

e) Supondo que tenham a mesma qualidade, é mais vantajoso comprar o molho da marca A ou da marca B? **10. e)** B

10. c) 1 800 g; R$ 32,40
10. d) 1 800 g; R$ 28,00

11 Um jogo de equilíbrio!

Observe as figuras e encontre o número de xícaras que devem estar no prato da balança D para que ela fique em equilíbrio, ou seja, com os dois pratos nivelados. **11.** 3 xícaras.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, responda no caderno. **11. a)** $\frac{2}{1}$

a) Qual é a razão entre a medida da massa de um pires e a medida da massa de uma xícara?

b) Qual é a razão entre as medidas da massa de um bule e da massa de um pires? **11. b)** $\frac{3}{2}$

12 *Hora de criar* – Em duplas, elaborem dois problemas diferentes, um cada, para a determinação da razão entre duas medidas de comprimento. Troquem de caderno e resolvam o problema um do outro. Depois destroquem para corrigi-los. As duas razões obtidas são equivalentes? **12.** Resposta pessoal.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 7** e **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

No **exercício 9**, há um total de 15 triângulos que compõem a figura, dos quais 8 triângulos são laranja e 7, azuis. Dessa maneira:

a) $\frac{\text{laranja}}{\text{azul}} = \frac{8}{7}$

b) $\frac{\text{azul}}{\text{laranja}} = \frac{7}{8}$

c) $\frac{\text{azul}}{\text{total}} = \frac{7}{15}$

No **exercício 10**, auxilie e oriente os estudantes quanto à análise das informações apresentadas nos anúncios. Com base nelas, podem-se determinar as razões como segue:

a) $\frac{\text{Preço } A}{\text{Preço } B} = \frac{3,60}{7} = \frac{360}{700} = \frac{18}{35}$

b) $\frac{\text{Massa } A}{\text{Massa } B} = \frac{200}{450} = \frac{4}{9}$

c) A massa de 9 caixas é 1 800 g ($9 \cdot 200 = 1800$), e o preço desse total de caixas é R$ 32,40, pois $9 \cdot 3,60 = 32,40$.

d) A massa de 4 caixas da marca *B* é dada por $4 \cdot 450 = 1800$, ou seja, 1 800 g. E o custo desse total de caixas é R$ 28,00, pois $4 \cdot 7 = 28$.

e) É mais vantajoso comprar da marca *B*, pois, ao comparar o custo de uma mesma medida de massa para ambas as marcas, percebe-se que a marca *B* é a mais barata.

No **exercício 11**, percebe-se que todas as balanças estão em equilíbrio. Assim:

- a massa de 1 jarra é a mesma da de 1 bule (balança *A*).
- a massa de 1 bule é a mesma massa de 1,5 pires (balança *C*).
- a massa de 1,5 pires é a mesma de uma jarra (balança *C* e, depois, balança *A*).
- a massa de 1 xícara com 1 pires é a mesma da de 1 jarra, que é a mesma da de 1,5 pires (balança *B* e balança *C*).

Desta última relação, tem-se que a massa de 1 xícara é a mesma da de 0,5 pires. Logo, como são necessários 1,5 pires para equilibrar com 1 jarra, serão necessárias 3 xícaras em um dos pratos da balança para equilibrar com 1 jarra no outro prato.

Com base nas relações estabelecidas anteriormente, no **item a**, tem-se que a massa de um pires é o dobro da massa de 1 xícara. Assim:

$$\frac{\text{massa de um pires}}{\text{massa de uma xícara}} = \frac{2}{1}$$

Semelhantemente, no **item b**, tem-se:

$$\frac{\text{massa de um bule}}{\text{massa de um pires}} = \frac{3}{2}$$

No **exercício 12**, incentive os estudantes a discutir os enunciados elaborados com um colega e, depois, resolvê-los. Se possível, peça a eles que compartilhem alguns dos problemas com toda a turma.

Pense mais um pouco...

Nesta seção, peça aos estudantes que indiquem por x o valor total do prêmio. Assim, Pedro e Melissa receberam, juntos, metade dos prêmios na razão $\frac{4}{3}$, ou seja, $\frac{x}{2}$ dividido em 7 partes iguais $(4 + 3)$, das quais 4 foram destinadas a Pedro e 3 a Melissa. Assim:

- Pedro recebeu $\frac{4}{7}$ de $\frac{x}{2}$, ou seja, $\frac{4x}{14}$;
- Melissa recebeu $\frac{3}{7}$ de $\frac{x}{2}$, ou seja, $\frac{3x}{14}$;
- Vanessa recebeu o dobro de Melissa, ou seja, $2 \cdot \frac{3x}{14} = \frac{6x}{14}$;
- Márcio recebeu R$ 50 000,00.

Assim, temos:

$$x = \frac{4x}{14} = \frac{3x}{14} = \frac{6x}{14} + 50000$$

$$14x = 4x + 3x + 6x + 700000$$

$$14x - 13x = 700000$$

$$x = 700000$$

Escala

Explore a relação entre a escala do mapa e a ideia de razão. Verifique se os estudantes compreendem a escala gráfica apresentada no mapa da Região Sul do Brasil, em que a medida do segmento representa 200 km na realidade. Se possível, disponibilize outros mapas, como do bairro ou do município, e oriente os estudantes em atividades que possam determinar a distância entre dois pontos relevantes no mapa e na realidade, de acordo com a escala.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Um programa de televisão distribuiu prêmios em dinheiro para quatro participantes. Pedro e Melissa, juntos, receberam a metade dos prêmios. A razão entre o valor recebido por Pedro e o valor recebido por Melissa é $\frac{4}{3}$. Vanessa recebeu o dobro de Melissa. E Márcio, o último participante, recebeu R$ 50 000,00. Qual foi o valor total dos prêmios distribuídos?

Pense mais um pouco...: R$ 700 000,00.

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Escala

Observe o mapa da região Sul do Brasil.

Nele, a medida da distância entre Porto Alegre e Florianópolis, em linha reta, é igual a 1,9 cm (com uma régua, verifique no mapa). A distância real, em linha reta, entre essas duas cidades mede aproximadamente 380 km.

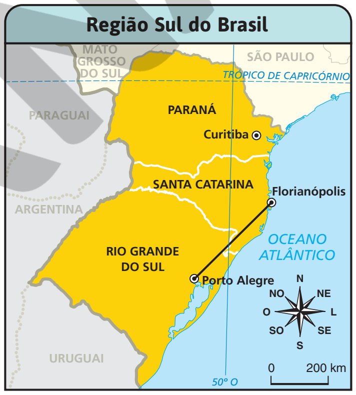
Vamos calcular a razão entre a medida da distância entre Porto Alegre e Florianópolis no mapa e a medida da distância real entre as duas cidades, em linha reta. Para isso, precisamos expressá-las em uma mesma unidade de medida.

Transformamos 380 km (distância real) em centímetro:

$$380 \text{ km} = 38\,000\,000 \text{ cm}$$

Portanto, a razão procurada é dada por:

$$\frac{1{,}9}{38\,000\,000} = \frac{1}{20\,000\,000} = 1 : 20\,000\,000$$



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado a partir de: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018. p. 90.

A razão 1 : 20 000 000 indica que cada centímetro representado no mapa corresponde a 20 000 000 cm, isto é, cada centímetro no mapa corresponde a 200 km.

A esse tipo de razão chamamos de **escala**.

Em um mapa, podemos representar essa escala assim:

0 200 km

Escala é a razão entre uma medida de comprimento em um desenho (ou outra representação qualquer) e a medida de comprimento real correspondente em uma mesma unidade de medida.

$$\text{escala} = \frac{\text{medida de comprimento no desenho}}{\text{medida de comprimento real}}$$

Acompanhe outros exemplos.

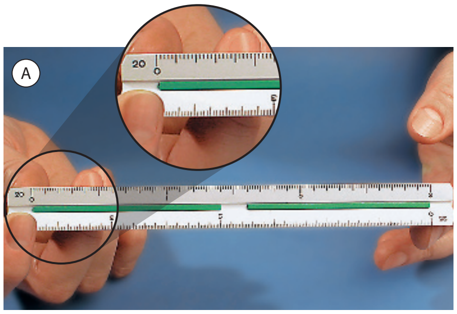
a) As miniaturas de trens são construídas segundo uma escala. Uma das escalas mais usadas nesse tipo de construção é chamada H0 (*half zero*), cuja razão é $\frac{1}{87}$.

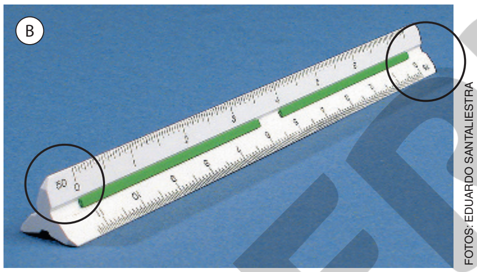
Isso significa que cada 1 cm na miniatura corresponde a 87 cm no trem em tamanho real, por exemplo. Ou seja, temos uma escala de 1 : 87 (lemos: "escala de um para oitenta e sete").


TYCSON1/SHUTTERSTOCK

b) As plantas baixas de casas e apartamentos também são desenhadas obedecendo a uma escala. Existem programas de computador próprios para isso. Entretanto, quando essas plantas são feitas à mão, geralmente se usa uma régua chamada **escalímetro**, que facilita o traçado do desenho.

Observe as fotografias.





FOTOS: EDUARDO SANTALIESTRA

Fotografia de um escalímetro e algumas de suas escalas.

O escalímetro é uma régua triangular com três faces e seis escalas, duas em cada face. Nele, o número que está ao lado esquerdo do zero indica a escala que está sendo utilizada. Por exemplo, na fotografia A, o número 20 indica que a escala é de 1 para 20 (1 : 20). Isso significa que cada 1 unidade de medida no desenho representa 20 unidades de medida em tamanho real.

O escalímetro das fotografias apresenta estas escalas:

$$\frac{1}{20}, \frac{1}{25}, \frac{1}{50}, \frac{1}{75}, \frac{1}{100} \text{ e } \frac{1}{125}$$

c) Uma sala mede 9 m de comprimento. Essa medida de comprimento equivale a 6 cm em um desenho. Qual é a escala do desenho?


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Escala

Converse com os estudantes sobre o uso de miniaturas em diferentes áreas como a engenharia ou arquitetura. Protótipos miniaturizados (aviões, por exemplo) com escala previamente definida, seja quanto à economia, segurança ou recursos, viabilizam projetos industriais importantes. As impressoras do tipo 3-D têm dado uma contribuição significativa para a concretização desses projetos.

Solicite aos estudantes que pesquisem em livros, em revistas e na internet a miniaturização nos projetos industriais. Essa pesquisa pode ser realizada em conjunto com a disciplina de Arte, em que os estudantes desenvolvem uma maquete ou representação em miniatura de uma escultura arquitetônica, por exemplo.

199

Exercícios propostos

No **exercício 13**, como os 500 km foram representados por um segmento cujo comprimento é 5 cm, podemos deduzir que a cada 1 cm no mapa correspondem 100 km na realidade. Dessa maneira, devemos transformar as medidas para cm. Como 100 km equivalem a 10 000 000 cm, temos que a escala do mapa é:

$$\frac{1}{10\,000\,000}$$

Semelhantemente, no **exercício 14**, devemos transformar as medidas para centímetros, ou seja, 7 m = 700 cm. Assim, a escala é dada por $\frac{28}{700} = \frac{1}{25}$.

Espera-se que os estudantes percebam, no **exercício 15**, que é possível representar o terreno na folha, pois, com a escala sendo $\frac{1}{100}$, a frente da casa é 1 500 cm e é representada por 15 cm no papel, e a outra medida de comprimento do terreno é 2 000 cm e pode ser representada por 20 cm no papel.

Ao usarmos a escala $\frac{1}{20}$ a frente do terreno, no papel, deveria ser representada por um segmento de 75 cm, que é maior do que as dimensões do papel disponível; portanto, não é possível usar essa escala na situação proposta.

No **exercício 16**, como a escala é $\frac{1}{125}$, para o **item a**, temos que um segmento de 5,2 cm na planta equivale a 650 cm na realidade ($5{,}2 \cdot 125 = 650$), ou seja, a 6,5 m. No **item b**, como 3 m equivalem a 300 cm e 4 m equivalem a 400 cm, temos que:

$\frac{1}{125} \cdot 300 = 2{,}4$; logo, 300 cm na realidade equivalem a 2,4 cm na planta.

$\frac{1}{125} \cdot 400 = 3{,}2$; logo, 400 cm na realidade equivalem a 3,2 cm na planta.

No **item c**, as medidas do terreno serão 800 cm (pois $6{,}4 \cdot 125 = 800$) e 3 500 m (pois $28 \cdot 125 = 3\,500$), o que equivale, em metro, respectivamente, a 8 m e a 35 m.

As resoluções dos **exercícios 17** a **19** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Primeiro, transformamos 9 m (medida de comprimento real) em centímetro: 9 m = 900 cm. Agora, podemos fazer os cálculos.

$$\text{escala} = \frac{\text{medida de comprimento no desenho}}{\text{medida de comprimento real}} = \frac{6}{900} = \frac{1}{150}$$

Logo, a escala desse desenho é $\frac{1}{150}$ ou 1 : 150.

d) Um mapa foi desenhado na escala $\frac{1}{31\,000\,000}$, e a medida da distância entre as cidades de Brasília e João Pessoa, em linha reta, foi representada por 5,5 cm. Qual é a medida da distância real aproximada, em quilômetro, entre essas cidades?

A escala indica que cada centímetro no mapa equivale a uma distância real de 31 000 000 cm, isto é, 310 km.

Logo, 5,5 cm equivalem a $5{,}5 \cdot 310$ km = 1 705 km. Portanto, a medida da distância aproximada entre as duas cidades é 1 705 km.

13. $\frac{1}{10\,000\,000}$ (1 : 10 000 000)

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

13 A distância entre duas cidades, em linha reta, mede 500 km. Essa distância foi representada em um mapa por um segmento medindo 5 cm. Qual foi a escala utilizada nesse mapa?

14 A medida do comprimento da sala de um apartamento equivale à medida de 28 cm em uma planta baixa. Sabendo que a medida do comprimento real da sala é 7 m, que escala foi usada nessa planta baixa? **14.** $\frac{1}{25}$ ou 1 : 25

15 Mauro quer desenhar o terreno de sua casa, que é retangular e mede 15 m de frente por 20 m de fundo. Ele quer desenhá-lo em uma folha que mede 28 cm de comprimento e 18 cm de largura, na escala $\frac{1}{100}$. O desenho do terreno caberá nessa folha? E se a escala usada for $\frac{1}{20}$? **15.** Sim. Não.

16 Com um escalímetro, a planta de uma casa foi desenhada na escala $\frac{1}{125}$. Nessas condições, responda às questões.

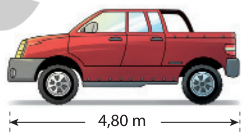
a) Qual é a medida de comprimento real, em metro, de uma sala que, nessa planta, equivale à medida de 5,2 cm? **16. a)** 6,5 m

b) Os quartos dessa casa medem 3 m por 4 m. Quais são as medidas dos quartos nessa planta? **16. b)** 2,4 cm por 3,2 cm

c) Na planta, o terreno mede 6,4 cm por 28 cm. Quais são as medidas reais desse terreno, em metro? **16. c)** 8 m por 35 m

17 Desenhe a planta baixa do cômodo em que você dorme. Use a escala 1 : 75.
17. Construção de figura.

18 Uma caminhonete de 4,80 m de comprimento foi representada na figura a seguir.



CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

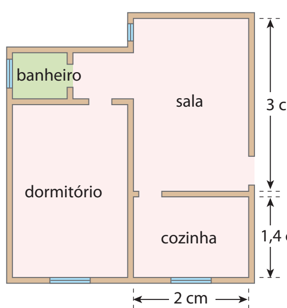
Com uma régua, meça o comprimento da caminhonete na figura e determine a escala que foi utilizada para desenhá-la. **18.** $\frac{1}{120}$

19 Observe a planta baixa de um apartamento e responda às questões. **19. a)** 2,1 m por 3 m

a) Quais são as medidas reais da cozinha?

b) Determine a medida da área real da sala. **19. b)** 13,50 m^2

escala 1 : 150



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

20. Cada 1 cm equivale a 664 km, ou seja, a escala é 1 : 66 400 000.

20 No mapa, estão marcados os pontos extremos do Brasil: no Norte, a nascente do rio Ailã (fronteira do Brasil com a Guiana), no monte Caburaí, em Roraima; no Sul, o arroio Chuí, no Rio Grande do Sul (fronteira do Brasil com o Uruguai); no Leste, banhada pelo oceano Atlântico, a Ponta do Seixas, na Paraíba; no Oeste, a nascente do rio Moa (fronteira do Brasil com o Peru), na serra de Contamana, no Acre. Determine a escala aproximada usada nesse mapa.

21 *Hora de criar* – Em duplas, desenhem a planta baixa da sua sala de aula ou de um dos prédios da sua escola utilizando duas escalas diferentes. Troquem seus cadernos e comparem as medidas dos dois desenhos. As medidas são iguais? Os desenhos são semelhantes? **21.** Respostas pessoais.

Pontos extremos do Brasil

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado a partir de: **Enciclopédia do estudante:** geografia do Brasil, aspectos físicos, econômicos e sociais. São Paulo: Moderna, 2008. p. 18.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Em um folheto de propaganda de um novo condomínio, junto ao mapa do local, vem escrito: “Mapa da localização sem escala”. O que isso quer dizer? *Pense mais um pouco...*: Quer dizer que as razões entre as medidas do desenho e as medidas reais não correspondem à realidade.

3 Proporção

Juliana coleciona gibis. A cada 5 gibis de sua coleção, 1 é de histórias em quadrinhos feitas no estilo japonês (mangá).

FÁBIO EUGÊNIO/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, a cada 10 gibis da coleção de Juliana, 2 são mangás; a cada 15 gibis, 3 são mangás; a cada 20 gibis, 4 são mangás; e assim por diante.

Então, a razão do número de gibis da coleção de Juliana que são mangás para o número total de gibis da coleção pode ser representada pelas frações equivalentes:

$$\frac{1}{5} \qquad \frac{2}{10} \qquad \frac{3}{15} \qquad \frac{4}{20}$$

Exercícios propostos

O **exercício 20** propicia um trabalho interdisciplinar com Geografia. Solicite um relatório sucinto com as características de cada um dos lugares extremos do Brasil que aparecem no mapa. A resolução deste exercício está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

No **exercício 21**, incentive os estudantes a utilizar diferentes escalas para representar a planta baixa da sala de aula (ou outros espaços da escola) e, depois, a compartilhar as produções com os colegas.

Pense mais um pouco...

Abordamos uma situação do cotidiano em que a não utilização da escala pode mascarar informações vitais para o comprador de um imóvel. O mapa da localização sem escala se reduz a um croqui que, em geral, simplifica em demasia e subestima as distâncias do imóvel a pontos desejáveis, levando o consumidor a possíveis erros de avaliação.

Se tiver oportunidade, proponha aos estudantes que levem para a escola panfletos de imóveis à venda que tenham representações de mapas do bairro e, junto com eles, analise essa representação, identificando os lugares conhecidos e se as representações estão em escala.

3. Proporção

Habilidade da BNCC: **EF07MA17**.

Neste tópico iniciamos o trabalho com o conceito de proporção, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA17).

Alerte os estudantes para o fato de que a palavra **proporção** – igualdade entre duas razões, na acepção Matemática – tem vários significados na linguagem comum e, por isso, muitas vezes é empregada de maneira errada em Matemática.

Avalie a conveniência de fazer com os estudantes um levantamento de vocabulário desse termo consultando um dicionário da Língua Portuguesa.

Proporção

Informe aos estudantes que os nomes dados aos termos de uma proporção – extremos e meios – advêm do fato de que, quando escritos em uma só linha e na ordem de leitura, o primeiro e o último (extremos) margeiam os outros dois (meios), deixando-os no meio da escrita.

Exercícios propostos

Os exercícios que iniciam essa sequência têm baixo grau de complexidade, porém são fundamentais para que os estudantes apliquem o conceito sempre de maneira adequada quando se depararem com problemas mais elaborados.

No **exercício 22**, se necessário, retome a definição de proporção e escreva a relação entre $\frac{4}{5}$ e $\frac{8}{10}$ por extenso, isto é: 4 está para 5 assim como 8 está para 10.

Dessa maneira, os estudantes podem identificar os números no começo e no fim da escrita (4 e 10) como os extremos, e os demais (5 e 8) como os meios da proporção.

Para trabalhar o **exercício 23**, peça aos estudantes que, nos itens em que não há proporção, modifiquem um dos quatro números dados de modo que o novo conjunto de números represente uma proporção. (Respostas possíveis: **b)** 2, 8, 20, 80; **c)** 6, 14, 9, 21.)

A resolução do **exercício 24** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Observe que todas essas razões são iguais a $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \qquad \frac{1}{5} = \frac{3}{15} \qquad \frac{1}{5} = \frac{4}{20}$$

Sentenças como essas, que representam uma igualdade entre duas razões, são chamadas de **proporção**.

> **Proporção** é uma igualdade entre duas razões.

A proporção $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ também pode ser indicada assim: 1 : 5 = 2 : 10.

Em ambos os casos, essa proporção é lida: "um está para cinco assim como dois está para dez".

De modo geral, podemos dizer que os números *a*, *b*, *c* e *d*, não nulos, formam, nessa ordem, uma proporção quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

- Os números *a*, *b*, *c* e *d* são os **termos** da proporção.
- Os termos *a* e *d* são chamados de **extremos** da proporção.
- Os termos *b* e *c* são chamados de **meios** da proporção.

Por exemplo, na proporção $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ os extremos são 1 e 10, e os meios, 5 e 2.

Agora, vamos verificar se os números 4, 6, 10 e 15 formam, nessa ordem, uma proporção.

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

As razões são iguais; logo, $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$.

Portanto, os números 4, 6, 10 e 15 formam, nessa ordem, uma proporção.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22. Quatro está para cinco assim como oito está para dez.

22 Escreva como se lê a proporção $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$. Em seguida, identifique:

a) os termos dessa proporção; **22. a)** 4, 5, 8 e 10

b) os meios dessa proporção; **22. b)** 5 e 8

c) os extremos dessa proporção. **22. c)** 4 e 10

23 Verifique em cada caso se os números, nessa ordem, formam uma proporção. Em caso afirmativo, escreva a proporção.

a) 2, 5, 8 e 20 **23. a)** Sim. $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$

b) 2, 8, 20 e 5 **23. b)** Não.

c) 6, 14, 9 e 27 **23. c)** Não.

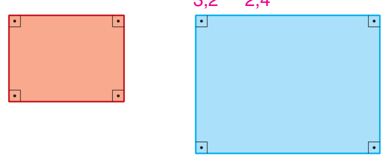
d) 9, 6, 15 e 10 **23. d)** Sim. $\frac{9}{6} = \frac{15}{10}$

24 Com o auxílio de uma régua, meça os lados das regiões retangulares a seguir e determine:

a) a razão entre a medida do comprimento do retângulo menor e a medida do comprimento do retângulo maior; **24. a)** $\frac{2}{3,2}$

b) a razão entre a medida da largura do retângulo menor e a medida da largura do retângulo maior; **24. b)** $\frac{1,5}{2,4}$

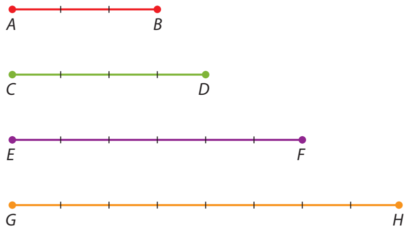
c) a proporção formada no caso de essas razões serem iguais. **24. c)** $\frac{2}{3,2} = \frac{1,5}{2,4}$



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

25. As medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, formam uma proporção, pois $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

25 Verifique se as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, formam uma proporção. Justifique sua resposta.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

26 Escreva uma proporção na qual uma das razões seja $\frac{5}{9}$. **26.** Resposta pessoal.

27 Para que os números 15, x, 3 e 4 formem, nessa ordem, uma proporção, qual deve ser o valor de x? **27.** $x = 20$

28 Um mercado vende o mesmo tipo de arroz em dois tipos de pacote:

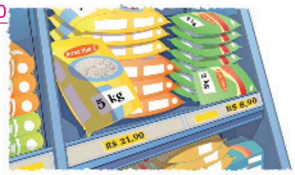
- de 2 kg por R$ 8,90;
- de 5 kg por R$ 21,90

28. c) O pacote de 5 kg, porque custa R$ 0,07 por quilograma mais barato em relação ao pacote de 2 kg.

28. b) Não, pois $\frac{8{,}90}{2} \neq \frac{21{,}90}{5}$.

a) Para cada pacote, determine a razão entre o preço e a medida da massa.

28. a) $\frac{8{,}90}{2}$, $\frac{21{,}90}{5}$



ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

b) Essas razões formam uma proporção? Justifique sua resposta.

c) Entre os dois pacotes, qual deles é mais vantajoso comprar? Por quê?

d) Quanto deveria custar o pacote de 2 kg para que o seu preço fosse equivalente ao preço do pacote de 5 kg? **28. d)** R$ 8,76

29 *Hora de criar* – Em duplas, elaborem duas receitas culinárias simples, uma cada. Troquem de caderno e reescrevam a receita um do outro como se fossem fazê-la para o dobro de pessoas, ou seja, duplicando a receita. Indiquem as proporções entre alguns dos ingredientes da receita original e da receita duplicada. Destroquem os cadernos e verifiquem se as proporções indicadas pelo colega estão corretas.

29. Resposta pessoal.

4 Propriedade fundamental das proporções

Considere a proporção $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$.

- Os extremos dessa proporção são 6 e 15, e seu produto é 90.
- Os meios são 5 e 18, e seu produto também é 90.

Perceba que, nessa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Considere estas outras proporções:

a) $\frac{0{,}9}{0{,}6} = \frac{15}{10}$

$$\underbrace{0{,}9 \cdot 10}_{9} = \underbrace{0{,}6 \cdot 15}_{9}$$

produto dos extremos — produto dos meios

b) $\frac{8}{12} = \frac{12}{18}$

$$\underbrace{8 \cdot 18}_{144} = \underbrace{12 \cdot 12}_{144}$$

produto dos extremos — produto dos meios

Isso acontece em todas as proporções.

> Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Essa é a **propriedade fundamental das proporções**.

Exercícios propostos

No **exercício 25**, as medidas dos comprimentos dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$, nessa ordem, determinam uma proporção, pois:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Para o **exercício 26**, verifique se os estudantes compreendem como determinar uma proporção com a razão determinada. Espera-se que utilizem, por exemplo, frações equivalentes ou valores x e y que tornem verdadeira a igualdade $5 \cdot x = 9 \cdot y$, em que x é o denominador e y é o numerador da fração procurada.

No **exercício 27**, para determinar o valor de x, deve-se considerar a relação fundamental das proporções. Assim:

$$\frac{15}{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3x = 15 \cdot 3 \Rightarrow x = 20$$

No **item a** do **exercício 28**, os estudantes devem determinar a razão entre a medida da massa e o preço de dois pacotes de arroz. Para o pacote de menor medida de massa tem-se $\frac{8{,}90}{2}$ e para o pacote de maior medida de massa tem-se $\frac{21{,}90}{5}$.

No **item b**, eles devem perceber que as razões não formam uma proporção. Para isso, podem fazer a divisão de 8,90 por 2 ($8{,}90 : 2 = 4{,}45$) e a de 21,90 por 5 ($21{,}90 : 5 = 4{,}38$). Como os valores encontrados são diferentes, conclui-se que as razões não formam uma proporção.

As divisões realizadas são importantes para responder ao **item c**, pois os valores encontrados correspondem ao preço de 1 kg de arroz em cada pacote. Como o menor valor foi o do pacote de 5 kg, pode-se concluir que esse pacote seria mais vantajoso por ter um preço menor por quilograma.

Para responder ao **item d**, basta multiplicar 4,38 por 2; logo, o valor seria de R$ 8,76.

Aproveite essa atividade para conversar com os estudantes sobre a avaliação dos preços de um mesmo produto vendido em embalagens de diferentes tamanhos. Comente que, ao comparar as razões entre o preço e a quantidade do produto, é possível identificar a embalagem mais vantajosa em relação ao preço. Além disso, também é importante levar em consideração a necessidade de levar uma maior quantidade do produto, principalmente de produtos perecíveis. Atitudes como essa são importantes para desenvolver o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais **educação financeira** e **educação para o consumo**.

No **exercício 29**, comente com os estudantes que devem indicar o rendimento das receitas que elaborarem e considerar ingredientes dados por números racionais na forma decimal e/ou na forma de fração, utilizando medidas como xícara de chá, colher de chá, colher de sopa etc. ou, ainda, considerando as medidas de massa ou de volume dos ingredientes dadas por meio de unidades de medida padronizadas (grama e mililitros, por exemplo).

4. Propriedade fundamental das proporções

Habilidades da BNCC: **EF07MA09**, **EF07MA12** e **EF07MA17**.

O trabalho realizado neste tópico tem o objetivo de desenvolver a compreensão em relação à propriedade fundamental das proporções, pois esta dá fundamento à resolução de diferentes problemas do cotidiano, em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, contribuindo para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA09), (EF07MA12) e (EF07MA17).

Dando continuidade à apresentação da propriedade fundamental das proporções, temos aqui mais alguns exemplos de proporções nas quais a propriedade pode ser constatada.

A **situação 1** trata sobre a miniaturização, no caso de uma maquete, em que se emprega uma escala para determinar uma das medidas reais. Como é comum nos cálculos matemáticos, não importa se a maquete é de um ginásio de esportes, de um veículo, de um boneco ou de uma torre, o procedimento é sempre o mesmo. O importante é os estudantes reconhecerem que as resoluções de um grupo de problemas com a mesma estrutura podem ser realizadas empregando os mesmos procedimentos, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA06). Enfatize essa ideia.

Por meio dessa propriedade, também podemos identificar quando duas razões formam uma proporção.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $\frac{8}{10}$ e $\frac{24}{30}$ formam uma proporção, pois:

$$\underbrace{8 \cdot 30}_{240} = \underbrace{10 \cdot 24}_{240}$$

produto dos extremos → 240; 240 ← produto dos meios

b) $\frac{4}{3}$ e $\frac{12}{9}$ formam uma proporção, pois:

$$\underbrace{4 \cdot 9}_{36} = \underbrace{3 \cdot 12}_{36}$$

produto dos extremos → 36; 36 ← produto dos meios

c) $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{5}$ não formam uma proporção, pois o produto dos extremos ($2 \cdot 5 = 10$) é diferente do produto dos meios ($4 \cdot 3 = 12$).

Nas situações a seguir, observe como podemos encontrar o valor desconhecido de um termo em uma proporção usando a propriedade fundamental.

Situação 1

A maquete de um ginásio de esportes tem medida da largura igual a 54 cm e foi construída na escala $\frac{9}{250}$; ou seja, cada 9 cm na maquete correspondem a 250 cm no ginásio em tamanho real.

Vamos calcular a medida real da largura desse ginásio de esportes.

$$\text{escala} = \frac{\text{medida de comprimento no desenho}}{\text{medida de comprimento real}}$$

$$\frac{9}{250} = \frac{54}{x}$$

Observe que obtivemos uma proporção.

Aplicando a propriedade fundamental das proporções e resolvendo a equação obtida, temos:

$$9x = 54 \cdot 250$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{54 \cdot 250}{9}$$

$$x = 1\,500$$

Logo, a medida da largura real desse ginásio é de 1 500 cm, ou seja, 15 m.

Situação 2

Vamos calcular o valor de x na proporção $\frac{3x - 1}{x + 4} = \frac{2}{3}$.

$$\underbrace{3 \cdot (3x - 1)}_{\text{produto dos extremos}} = \underbrace{2 \cdot (x + 4)}_{\text{produto dos meios}}$$

$$9x - 3 = 2x + 8$$

$$9x - 2x = 8 + 3$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{11}{7}$$

$$x = \frac{11}{7}$$

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

1 Criem, cada um, uma proporção com números inteiros não nulos e troquem-nas entre si.

a) Somem 1 a cada razão da proporção recebida do colega. **1. a)** Resposta pessoal.

b) Verifiquem se as novas sentenças matemáticas obtidas representam uma proporção. **1. b)** Sim.

2 Agora, criem mais uma proporção cada um e façam a troca.

a) Subtraiam 1 de cada razão da proporção recebida do colega. **2. a)** Resposta pessoal.

b) Verifiquem se as novas sentenças matemáticas obtidas representam uma proporção. **2. b)** Sim.

3 Dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, respondam.

a) $\frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$ é uma proporção? Justifiquem. **3. a)** Sim; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a + b}{b} = \frac{c + d}{d}$

b) $\frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$ é uma proporção? Justifiquem. **3. b)** Sim; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Rightarrow \frac{a - b}{b} = \frac{c - d}{d}$

4 Para que a, $a + 1$, b, $b + 1$ formem uma proporção, nessa ordem, que condições devem ser obedecidas? **4.** $a = b \neq -1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

30 Aplicando a propriedade fundamental das proporções, verifique se o par de razões $\frac{9}{6}$ e $\frac{12}{8}$ forma uma proporção. **30.** Sim.

31 Em uma proporção, o produto dos extremos é 24 e um dos meios é 8. Determine o outro meio. **31.** 3

32 Uma proporção tem meios 6 e 10. Um dos extremos é 4. Qual é o outro extremo? **32.** 15

33 Calcule o valor de x nas proporções.

a) $\frac{6}{x} = \frac{9}{12}$ **33. a)** $x = 8$

b) $\frac{2x}{3} = \frac{-24}{15}$ **33. b)** $x = -\frac{12}{5}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{5x}{20}$ **33. c)** $x = 3$

d) $\frac{x + 5}{3} = \frac{x - 1}{5}$ **33. d)** $x = -14$

Pense mais um pouco...

Esta seção merece uma atenção especial. Cada estudante é levado a percorrer um procedimento aplicado a uma proporção inventada por um colega e deve chegar a uma conclusão válida para aquela proporção, além de verificar que ela também é válida para outras tantas. Não se trata de uma demonstração, mas é uma experiência muito rica, acessível aos estudantes em geral e que os coloca como protagonistas de seus aprendizados.

Exercícios propostos

No **exercício 30**, aplicando a propriedade fundamental das proporções, temos que:

$9 \cdot 8 = 12 \cdot 6 \Rightarrow 82 = 82$

Dessa maneira, essa razão forma uma proporção.

Em toda proporção, sabemos que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Assim, no **exercício 31**:

$8 \cdot x = 24 \Rightarrow x = 3$

Semelhantemente, no **exercício 32**, temos:

$6 \cdot 10 = 4 \cdot x \Rightarrow x = 15$

Essa mesma ideia pode ser aplicada no **exercício 33**:

a) $9x = 6 \cdot 12 \Rightarrow 9x = 72 \Rightarrow x = 8$

b) $2x \cdot 15 = 3 \cdot (-24) \Rightarrow$
$\Rightarrow 30x = (-72) \Rightarrow x = -\frac{12}{5}$

c) $4 \cdot 5x = 3 \cdot 20 \Rightarrow 20x = 60 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 3$

d) $(x + 5) \cdot 5 = 3 \cdot (x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x + 25 = 3x - 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x - 3x = -3 - 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = -28 \Rightarrow x = -14$

Exercícios propostos

No **exercício 34**, para que os valores indicados formem proporção, devemos ter:

$\frac{8}{6} = \frac{4}{x} \Rightarrow 8x = 6 \cdot 4 \Rightarrow x = 3$

No **exercício 35**, de acordo com a razão estabelecida, temos que, para cada R$ 6,00 que o sorteado receber, o outro recebe R$ 4,00. Assim, no **item a** temos que o valor x procurado, em reais, é dado por:

$\frac{6}{4} = \frac{3000}{x} \Rightarrow 6x = 4 \cdot 3000 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2000$

E, portanto, o total pedido no **item b** é R$ 5 000,00, pois 3 000 + + 2 000 = 5 000.

No **exercício 36**, como a escala é 1 : 96, temos que o comprimento x procurado, em cm, é dado por:

$$\frac{1}{96} = \frac{5{,}5}{x} \Rightarrow x = 528$$

No **exercício 37**, é preciso considerar que os convidados da mesa maior para a mesa menor estão na razão de 9 para 5. Assim, no **item a**, temos que 5 pessoas consumiram 2,5 *pizzas*, ou seja, cada pessoa consumiu meia *pizza* (2,5 : 5 = 0,5). Como na mesa maior há 9 pessoas, cada uma consumindo meia *pizza*, temos que foram consumidas, nessa mesa, 4,5 *pizzas* (9 · 0,5 = 4,5). No **item b**, o valor que cada pessoa da mesa menor pagou foi R$ 18,00 (90 : 5 = 18). As pessoas da mesa maior, no entanto, pagaram cerca de R$ 13,34 cada uma (120 : 9 ≃ 13,33). Assim, considerando que seria justo todas as pessoas pagarem o mesmo valor, temos que a divisão da conta desta maneira não foi justa, pois as pessoas da mesa maior pagaram menos do que as da mesa menor.

No **exercício 41**, temos que, para cada parte de soja, Raimundo acrescenta 2 partes de feno. Portanto, a mistura totaliza 3 partes. Como 60 kg representam essas 3 partes, cada parte equivale a 20 kg (60 : 3 = 20). Assim, a massa de semente de soja utilizada é de 20 kg.

As resoluções dos **exercícios 38** a **40** e do **exercício 42** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

34 Para que valor de x os números 8, 6, 4 e x formam, nessa ordem, uma proporção? **34.** $x = 3$

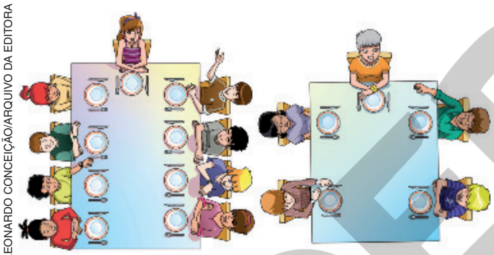
35 Douglas e Eduardo participaram do sorteio de um prêmio em dinheiro. Eles combinaram que, se um dos dois fosse sorteado, eles dividiriam o prêmio na razão de 6 para 4, de modo que o amigo sorteado ficaria com a maior parte. Eduardo foi sorteado e ficou com R$ 3 000,00. **35. a)** R$ 2 000,00.

a) Com quanto Douglas ficou?

b) Qual foi o valor total do prêmio? **35. b)** R$ 5 000,00.

36 A miniatura de um carro, construída na escala 1 : 96, mede 5,5 cm de comprimento. Qual é a medida do comprimento real do carro? **36.** 5,28 m

37 Luciana foi a uma pizzaria comemorar seu aniversário. Como havia muitos convidados, não foi possível acomodá-los na mesma mesa. Então, eles foram divididos em dois grupos da seguinte forma:


LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

a) Sabendo que os convidados da mesa menor comeram 2 *pizzas* e meia e os da mesa maior comeram proporcionalmente a mesma quantidade de *pizzas* da mesa menor, quantas eles comeram? **37. a)** 4 *pizzas* e meia.

b) Ao dividir a conta, os convidados da mesa menor pagaram R$ 90,00 no total, e os da mesa maior, R$ 120,00. Essa divisão foi justa? Justifique sua resposta.

38 Calcule x e y na proporção $\frac{x}{y} = \frac{8}{3}$, sabendo que $x + y = 132$. **38.** $x = 96$ e $y = 36$

39 Um marceneiro dividiu uma ripa de madeira medindo 14 cm de comprimento em dois pedaços na razão de 3 para 4. Qual é a medida, em centímetro, do pedaço maior? **39.** 8 cm

40 Um prêmio de R$ 10 000,00 foi dividido entre os dois primeiros colocados em uma prova de atletismo na razão de 5 para 3.

ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

a) Indique por x a parte que coube ao primeiro colocado e por y a parte que coube ao segundo. Escreva o sistema de equações associado a essa situação.

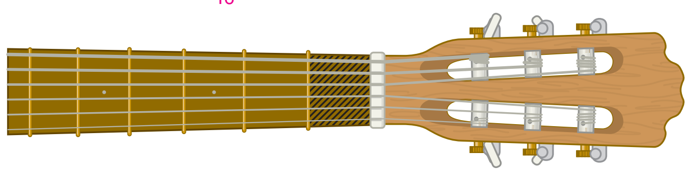
b) Qual é o valor de x? E de y? **40. b)** R$ 6 250,00; R$ 3 750,00.

41 Ao preparar a ração para as cabras que cria, Raimundo mistura semente de soja com feno na razão de 1 para 2. Para 60 kg dessa mistura, qual é a massa de semente de soja, em quilograma, utilizada? **41.** 20 kg

40. a) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \\ x + y = 10000 \end{cases}$


ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

42 (UFG-GO) Sabe-se que as casas do braço de um violão diminuem de largura seguindo uma mesma proporção. Se a primeira casa do braço de um violão tem 4 cm de largura, e a segunda casa, 3 cm, calcule a largura da quarta casa. Na figura abaixo, está representado o braço de um violão com sua primeira casa hachurada. **42.** $\frac{27}{16}$ cm ou, aproximadamente, 1,69 cm.


RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

37. b) Espera-se que os estudantes afirmem que a divisão da conta não foi justa, pois não foi proporcional ao número de convidados de cada mesa.

206

PARA SABER MAIS

Resolvendo problemas com o auxílio de esquemas

Em um passeio escolar, 160 jovens podiam escolher entre visitar o Museu Nacional, o Parque Nacional ou o Teatro Nacional. Sabe-se que 1 em cada 8 jovens decidiu visitar o Museu, 1 em cada 2 jovens decidiu visitar o Parque Nacional e 3 em cada 8 jovens decidiram visitar o Teatro Nacional.

A professora pediu a Pedro que calculasse o número de jovens que iriam em cada um desses três locais. Acompanhe como ele fez.

Visita ao Museu Nacional

$$\begin{array}{c|c} 1 & 20 \\ \hline 8 & 160 \end{array} \quad (\times 20)$$

Visita ao Parque Nacional

$$\begin{array}{c|c} 1 & 80 \\ \hline 2 & 160 \end{array} \quad (\times 80)$$

Visita ao Teatro Nacional

$$\begin{array}{c|c} 3 & 60 \\ \hline 8 & 160 \end{array} \quad (\times 20)$$

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Resposta possível: No cálculo do número de jovens que foram ao museu, por exemplo, a ideia é perceber que se deve obter o total de jovens (160) a partir do número 8 (multiplicando 8 por 20); feito isso, é obrigatório multiplicar também o número 1 por 20, o que resulta no total de 20 jovens.

1 Explique o raciocínio de Pedro para calcular os números procurados.

2 Para cada situação a seguir, faça um esquema para calcular o que se pede.

a) Em certo dia de verão, havia 240 pessoas em um clube. Dessas pessoas, 1 em cada 6 estava nas quadras, 1 em cada 2 estava na piscina e 1 em cada 3 estava no restaurante. Calcule quantas pessoas estavam em cada local.

b) Durante um jogo de futebol, havia 2 800 torcedores no estádio. De cada 7 torcedores, 4 torciam para o time A e 3 torciam para o time B. Calcule quantas pessoas torciam para cada time nesse dia. **2. b)** 1 600 torciam para o time A e 1 200 torciam para o time B.

c) Em certo dia, ao pedalar de bicicleta, a cada 3 horas João percorria 51 km. Determine a medida da distância que João percorreu em 2 horas e 30 minutos. **2. c)** 42,5 km

d) Uma moto mede 2,1 m de comprimento. Uma miniatura dessa moto mede 7 cm de comprimento. Que escala foi usada na construção dessa miniatura? **2. d)** 1 : 30

e) Em um mapa, duas cidades, A e B, estão separadas por uma distância de 5 cm. No mapa, cada 1 cm representa 2 500 m. Calcule, em quilômetro, a medida da distância real entre as duas cidades. **2. e)** 12,5 km

2. a) Quadras: 40 pessoas; piscina: 120 pessoas; restaurante: 80 pessoas.

Para saber mais

Habilidades da BNCC: **EF07MA05** e **EF07MA06**.

Proponha aos estudantes que leiam o texto apresentado nesta seção e analisem o esquema que Pedro utilizou. Depois, promova uma exposição dialogada do esquema e incentive-os a comentar este e outros esquemas que utilizariam para determinar o total de jovens que iriam a cada um dos três locais.

Antes de realizarem as atividades desta seção, proponha aos estudantes algumas questões, como:

- Se 1 jovem em cada 8 vai ao museu, mantida essa razão, quantos iriam se o total de jovens fosse 16? E se o total fosse 24? E se fosse 32? (Respostas: 2 jovens; 3 jovens; 4 jovens.)
- Se 1 jovem em cada 2 vai ao Parque Nacional, mantida essa razão, quantos iriam se o total de jovens fosse 20? (Resposta: 10 jovens.)

Agora é com você!

Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes percebam que o conceito envolvido nesses cálculos é o de proporcionalidade.

Na **atividade 2**, possibilite aos estudantes que compartilhem com os colegas os esquemas que produzirem para cada item. Peça a alguns que expliquem o esquema representando-o na lousa. A resolução desta atividade está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

5. Porcentagem

Habilidades da BNCC:
EF07MA02, **EF07MA05**
e **EF07MA06**.

Contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA05) apresentamos na **situação 1** diferentes estratégias de resolução de um mesmo problema. Converse com os estudantes sobre os 4 modos apresentados de maneira que compreendam o uso de cada representação de uma mesma razão (forma de fração, forma decimal, porcentagem e por meio do uso da calculadora).

No desenvolvimento deste tópico, os estudantes deverão perceber que esses métodos podem ser usados para a resolução de outros problemas que envolvem o cálculo de porcentagem, o que contribui para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA02) e (EF07MA06).

5 Porcentagem

Já vimos que a razão $\frac{30}{100}$ pode ser representada na forma decimal, $\frac{30}{100} = 0{,}30$; e na forma percentual, $\frac{30}{100} = 30\%$.

Agora, vamos ver diferentes maneiras de resolver problemas que envolvam porcentagens e proporções. Observe algumas situações.

Situação 1

Uma saca de arroz integral, após o processo de beneficiamento (retirada da casca e do farelo), sofreu perda de 25% da massa inicial. Se a saca de arroz contém 60 kg, qual foi a massa perdida, em quilograma, no beneficiamento dessa saca?

Esse problema pode ser resolvido de vários modos.

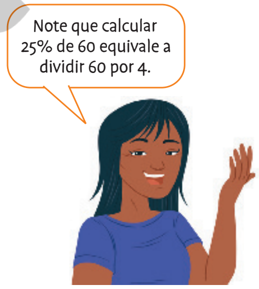

ALEX LIEW/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

Fábrica de beneficiamento de arroz em Bangladesh. (Fotografia de 2019.)

- **1º modo:**

Precisamos calcular 25% de 60. Como $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, temos:

$$25\% \text{ de } 60 = \frac{1}{4} \text{ de } 60 = \frac{1}{4} \cdot 60 = \frac{60}{4} = 15$$



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

- **2º modo:**

Como $25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$, temos: $25\% \text{ de } 60 = 0{,}25 \cdot 60 = 15$

- **3º modo:**

Como 100% de 60 é 60, indicando 25% de 60 por x, temos a proporção:

$$\frac{100}{25} = \frac{60}{x}$$

$$100 \cdot x = 25 \cdot 60$$

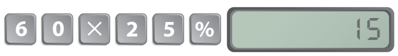
$$100x = 1\,500$$

$$\frac{100x}{100} = \frac{1\,500}{100}$$

$$x = 15$$

- **4º modo:**

Usando uma calculadora simples para determinar 25% de 60, procedemos da seguinte maneira:



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, foram perdidos 15 kg de arroz no beneficiamento.

Observação

- O método empregado no 1º modo de resolução é muito utilizado no cálculo mental de algumas porcentagens. Acompanhe alguns exemplos.

a) 1% de 400 $= \frac{1}{100} \cdot 400 = \frac{400}{100} = 4$

Calcular 1% de 400 equivale a dividir 400 por 100.

b) 10% de 400 $= \frac{10}{100} \cdot 400 = \frac{1}{10} \cdot 400 = \frac{400}{10} = 40$

Calcular 10% de 400 equivale a dividir 400 por 10.

c) 20% de 400 $= \frac{20}{100} \cdot 400 = \frac{1}{5} \cdot 400 = \frac{400}{5} = 80$

Calcular 20% de 400 equivale a dividir 400 por 5.

d) 50% de 400 $= \frac{50}{100} \cdot 400 = \frac{1}{2} \cdot 400 = \frac{400}{2} = 200$

Calcular 50% de 400 equivale a dividir 400 por 2.


LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Situação 2

Na escola Aprender, 882 estudantes estão matriculados no período da manhã. Isso corresponde a 63% do total de estudantes da escola. Quantos estudantes estão matriculados nessa escola?

Esse problema também pode ser resolvido de diferentes modos.

- **1º modo:**

Representando o número de estudantes da escola Aprender por *x*, temos:

$$63\% \text{ de } x = 882$$
$$\frac{63}{100} \cdot x = 882$$
$$\frac{63x}{100} = 882$$
$$63x = 882 \cdot 100$$
$$\frac{63x}{63} = \frac{88\,200}{63}$$
$$x = 1\,400$$

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

- **2º modo:**

Como *x* representa 100% dos estudantes, obtemos a proporção:

$$\frac{882}{x} = \frac{63}{100}$$
$$63x = 882 \cdot 100$$
$$\frac{63x}{63} = \frac{88\,200}{63}$$
$$x = 1\,400$$

Portanto, na escola Aprender estão matriculados 1 400 estudantes.

Porcentagem

Estratégias de cálculo mental colocadas ao alcance dos estudantes preparam-nos para assumir uma postura investigativa, no sentido de adquirirem as próprias estratégias.

A **situação 2** também apresenta mais de um modo de resolução do problema dado. Seja qual for a estratégia escolhida, comente com os estudantes a importância de se distinguir claramente o que é dado do que é pedido. Converse também sobre a importância de analisar a coerência do valor numérico obtido como resposta, a fim de verificar se ele, de fato, soluciona o problema.

Porcentagem

Ao trabalhar a **situação 3**, propicie aos estudantes perceber que é possível resolver um problema por meio de diferentes estratégias.

Possibilite que compartilhem outras estratégias para resolver a **situação 3**. Outra estratégia, além das apresentadas nesta página, seria obter a razão entre o preço a prazo e o preço à vista:

$388{,}8 : 360 = 1{,}08$

Assim, o preço a prazo é 1,08 maior que o preço à vista, e, como 1,08 equivale a $\frac{108}{100}$, pode-se perceber que o acréscimo equivale a 8% (100% + 8% = 108%).

Aproveite para conversar com os estudantes sobre as taxas cobradas por estabelecimentos comerciais em casos de pagamentos parcelados. É importante que, em casos de cobrança de taxas, prestem atenção ao percentual cobrado e se vale a pena parcelar o valor da compra. Essas atitudes contribuem para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

Situação 3

Uma prancha de surfe é vendida nas seguintes condições:

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a taxa cobrada sobre o preço à vista, em porcentagem, na compra para pagamento parcelado?

Esse problema também pode ser resolvido de diferentes modos.

- **1º modo:**

Primeiro vamos encontrar o valor em reais correspondente à porcentagem procurada, ou seja, precisamos calcular a diferença entre o preço para pagamento parcelado e o preço à vista.

$$388{,}80 - 360{,}00 = 28{,}80$$

Indicando a taxa cobrada sobre o preço à vista, em porcentagem, por $x\%$, temos:

$$x\% \text{ de } 360 = 28{,}80$$
$$\frac{x}{100} \cdot 360 = 28{,}80$$
$$360 \cdot x = 28{,}80 \cdot 100$$
$$360x = 2\,880$$
$$\frac{360x}{360} = \frac{2\,880}{360}$$
$$x = 8$$

Portanto, a taxa cobrada sobre o preço à vista é de 8%.

- **2º modo:**

Podemos resolver o problema aplicando o conceito de proporção.

Diferença entre os preços = 388,80 – 360,00 = 28,80

Valor (em R$)	Porcentagem
360,00	100
28,80	x

$$\frac{360}{28{,}80} = \frac{100}{x}$$
$$360 \cdot x = 28{,}80 \cdot 100$$
$$360x = 2\,880$$
$$\frac{360x}{360} = \frac{2\,880}{360}$$
$$x = 8$$

Portanto, a taxa cobrada sobre o preço à vista é de 8%, ou seja, o preço para pagamento parcelado é 8% maior que o preço à vista.

210

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

43 Calcule mentalmente.

a) 10% de 850 **43. a)** 85
b) 20% de 500 **43. b)** 100
c) 50% de 75 **43. c)** 37,5
d) 1% de 520 **43. d)** 5,2
e) 100% de 125 **43. e)** 125
f) 25% de 200 **43. f)** 50
g) 30% de 120 **43. g)** 36
h) 15% de 80 **43. h)** 12

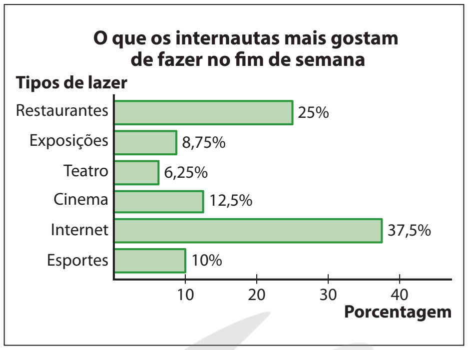
44 Responda.

a) 40 é quantos por cento de 100? **44. a)** 40%
b) 5 é quantos por cento de 50? **44. b)** 10%
c) 2,5 é quantos por cento de 5? **44. c)** 50%
d) 10 é quantos por cento de 40? **44. d)** 25%
e) 10 é quantos por cento de 80? **44. e)** 12,5%

45 Ao comprar uma bicicleta no valor de R$ 420,00, obtive um desconto de 10% por ter pagado à vista.

a) Qual foi o valor do desconto que obtive? **45. a)** R$ 42,00
b) Quanto paguei pela bicicleta? **45. b)** R$ 378,00

46 Eduarda fez uma pesquisa com 960 internautas para saber o que eles mais gostam de fazer no fim de semana. Observe os resultados obtidos.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos por Eduarda.

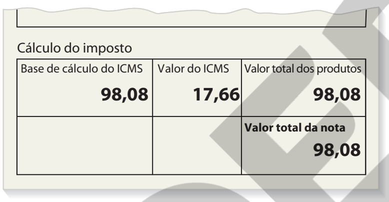
a) O que os internautas mais gostam de fazer no fim de semana? **46. a)** Navegar na internet.
b) Dos internautas pesquisados, quantos gostam de ir ao cinema no fim de semana? **46. b)** 120 internautas.
c) Se todos os internautas que escolheram cinema tivessem escolhido restaurante, o que teria acontecido em relação à opção “internet”? **46. c)** Haveria um empate, pois “restaurante” e “internet” representariam, cada um, 37,5% dos internautas pesquisados.

47 Na casa de Paola, eram gastos, em média, 960 quilowatts-hora de energia elétrica por mês. Com a mudança de alguns hábitos, como a redução no tempo de banho e o uso de lâmpadas LED, o consumo foi reduzido em 20%.

a) Essa redução corresponde a quantos quilowatts-hora? **47. a)** 192 quilowatts-hora
b) Sabendo que o chuveiro elétrico representa, em média, 30% do consumo de energia elétrica em uma residência, calcule quantos quilowatts-hora são gastos, aproximadamente, na casa de Paola com o uso do chuveiro. **47. b)** 230,4 quilowatts-hora

48 A população de uma cidade cresceu de 54 600 para 68 250 habitantes. De quantos por cento foi esse aumento? **48.** 25%

49 Em uma compra de material escolar, observou-se que na nota fiscal constava o valor do Imposto sobre Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS), que deve ser pago pela empresa sobre o valor da nota fiscal. Calcule a taxa, em porcentagem, referente a esse imposto. **49.** 18%


Cálculo do imposto

Base de cálculo do ICMS	Valor do ICMS	Valor total dos produtos
98,08	17,66	98,08
		Valor total da nota 98,08

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

50 O abastecimento de água em uma região metropolitana é feito por 8 sistemas que liberam 65 m³ de água por segundo. Um desses sistemas atende 9 milhões de pessoas e libera 33 m³ de água por segundo. Quantos por cento, aproximadamente, da quantidade de água liberada no total esse sistema representa? **50.** Aproximadamente 51%.

51 Douglas foi a uma loja de roupas e comprou algumas peças para seus filhos, gastando um total de R$ 285,00. Ao chegar ao caixa para o pagamento, a vendedora ofereceu um parcelamento em 10 prestações de R$ 35,00.

a) Se optar pelo pagamento parcelado, que percentual Douglas estará pagando a mais pela compra? **51. a)** Aproximadamente 22,8%.
b) Se Douglas tem o dinheiro para o pagamento à vista, seria uma escolha adequada optar pelo pagamento parcelado? Justifique sua resposta. **51. b)** Espera-se que os estudantes indiquem que não, pois um acréscimo de 22,8% pode ser considerado alto nesta situação.

O **exercício 51** é mais uma oportunidade para a conversa sobre o pagamento parcelado e o pagamento à vista.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 43** a **51** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Oriente os estudantes a verificar, em gráficos do tipo do **exercício 46**, cujos dados em porcentagem são partição de um todo, se a soma das porcentagens é igual a 100%, a menos que haja algum dado com aproximação.

Aproveite a temática da atividade e proponha aos estudantes que façam um levantamento entre os colegas de turma sobre o que mais gostam de fazer no fim de semana e que, coletivamente, organizem os dados coletados em um gráfico na lousa.

Após a resolução do **exercício 47**, peça aos estudantes que pesquisem o consumo médio da energia elétrica de sua casa e calculem quantos quilowatts-hora são gastos por mês com o uso do chuveiro elétrico. Depois, peça que avaliem possibilidades de redução desse gasto, contribuindo para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **educação para o consumo**.

Para ampliar o **exercício 49**, pergunte a eles qual seria o valor pago pela compra do material, caso não houvesse esse imposto. Com base no contexto dessa atividade, podem-se trabalhar os Temas Contemporâneos Transversais **educação financeira** e **educação fiscal**. Os estudantes podem pesquisar outros impostos aplicados em diferentes mercadorias e serviços, a fim de compreender como eles são definidos ou para que são destinados. A composição do preço do combustível, por exemplo, pode ser mais bem compreendida ao perceber que existem, além do preço de custo de produção, impostos federais e estaduais que incidem no preço a ser repassado ao consumidor.

Sugestão de leitura

Para ampliar o assunto sobre impostos, recomenda-se a leitura do material:

COMO SÃO formados os preços da gasolina e do diesel? **G1**, Economia, 10 mar. 2022. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2022/03/10/como-sao-formados-os-precos-da-gasolina-e-diesel.ghtml. Acesso em: 17 maio 2022.

A matéria aborda a composição dos preços de alguns combustíveis, como a gasolina, identificando como é calculado o preço final cobrado ao consumidor.

Para saber mais

Essa seção possibilita trabalhar o Tema Contemporâneo Transversal **educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras** ao abordar aspectos da escravização e seus reflexos na sociedade moderna, bem como a importância de políticas públicas que tratem do respeito à diversidade e da garantia de direitos. Pode-se aproveitar a temática para discutir as consequências da escravidão e incentivar os estudantes a debater, por exemplo, a relevância das cotas sociais e/ou raciais em determinados concursos ou processos seletivos.

Após realizarem a leitura do texto, converse com os estudantes sobre os usos das frações citadas e sobre a facilidade que o uso da porcentagem (que equivale ao uso de frações com o denominador 100) pode oferecer para a compreensão de transações comerciais. Por exemplo, questione-os sobre qual é o maior desconto: um desconto de $\frac{1}{25}$ ou um de $\frac{3}{20}$, ambos sobre determinado preço.

Ao reduzir essas frações a um denominador comum, por exemplo, 100, a comparação dos descontos fica mais direta. Discuta com eles sobre esse fato e sobre o uso das porcentagens no cotidiano e, ainda, sobre o significado do símbolo % ou da leitura "por cento", relacionando-os a frações de denominador 100.

Agora é com você!

Na atividade do **item a**, espera-se que os estudantes percebam que a fração $\frac{1}{100}$ equivale à porcentagem 1% e, no **item b**, que 4 centésimos equivalem a 0,04 e, portanto, a 4% $\left(\text{pois } \frac{4}{100} = 0{,}04\right)$.

PARA SABER MAIS

A Matemática na História

A ideia de porcentagem já era conhecida pela civilização romana, no século I a.C., quando o imperador Augusto estabeleceu vários impostos sobre mercadorias vendidas e sobre libertação e venda de escravizados. Por exemplo, havia o *centesima rerum venalium*, cujo significado é "centésimo do valor das coisas a serem vendidas", que era uma taxa de $\frac{1}{100}$ sobre o valor das mercadorias vendidas em mercados públicos. Sobre o valor de venda de escravizados, cobrava-se $\frac{1}{25}$ e sobre cada escravizado libertado, $\frac{1}{20}$ do valor correspondente.

Os romanos não lidavam com o "por cento" como tal, mas o conceito de porcentagem já estava presente, na medida em que eles usavam as frações que eram facilmente redutíveis a centésimos. Por exemplo, para as frações mencionadas anteriormente, temos:

- $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$, ou seja, 4 centésimos de imposto sobre a venda de escravizados;
- $\frac{1}{20} = \frac{5}{100}$, ou seja, 5 centésimos de imposto.

Na Idade Média, tanto no Oriente quanto no Ocidente, novas moedas entraram em circulação e surgiu a necessidade de uma base comum para a realização dos cálculos. Essa base foi o número 100. Contudo, nesse período, ainda não havia o conceito de porcentagem como conhecemos atualmente. Ele se tornou popular no século XV em situações que envolviam questões comerciais, como cálculo de juros, de lucros e prejuízos, bem como de impostos.

Em manuscritos italianos do fim desse mesmo século, encontramos um grande número de exemplos que envolvem expressões como "X p cento" e "VI p c" para indicar, em linguagem moderna, 10% e 6%, respectivamente.

Com o crescimento das atividades comerciais, várias obras de aritmética foram publicadas e, no fim do século XV, a forma de expressar porcentagens já estava estabelecida. Por exemplo, o matemático italiano Giorgio Chiarino utilizou, em 1481, diversas expressões, como "XX. *per. c.*" para representar 20%, e "VIII *in* X *perceto*" para expressar 8 a 10%.

Quanto à nomenclatura, o símbolo %, como o conhecemos hoje, aparece nas suas formas primitivas em manuscritos sobre aritmética comercial, com expressões como "*per co*" ou "*p c*º", uma abreviação para "por cento". Em meados do século XVII, esse símbolo evoluiu para "*per* $\frac{o}{o}$", deixando posteriormente de apresentar o "*per*" e chegando à forma atual: %.

Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Com base no texto, responda às questões.

a) Qual porcentagem sobre o valor de venda de uma mercadoria um comerciante deveria pagar como imposto ao imperador Augusto? **a)** 1%

b) Qual é o significado de "4 centésimos de imposto sobre o valor de venda de escravizados"?
b) Resposta possível: Deveriam ser pagos 4% sobre o valor de venda de escravizados como imposto.

6 Acréscimos e descontos

Considere as situações.

Situação 1

A pista de pouso e decolagem de um aeroporto media 3 240 m de comprimento. Em uma reforma, a medida do comprimento da pista aumentou em 15%, pois o aeroporto passou a operar voos internacionais, que são realizados em aviões maiores. Vamos determinar a nova medida de comprimento dessa pista.

Os 3 240 m correspondem a 100% do comprimento da pista. Então, a nova medida de comprimento equivale a 115% (100% + 15%).

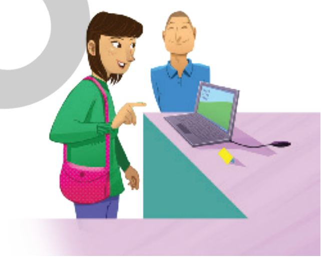
Calculando 115% de 3 240, encontramos a nova medida de comprimento sem precisar conhecer a quantidade de metros que a pista foi aumentada.

$$115\% \text{ de } 3\,240 = \frac{115}{100} \cdot 3\,240 = 1{,}15 \cdot 3\,240 = 3\,726$$

Portanto, a nova medida de comprimento da pista será 3 726 m.

Situação 2

Uma loja de informática está vendendo um *notebook* por R$ 2 550,00. No pagamento à vista, há um desconto de 8%. Vamos encontrar o preço à vista sem conhecer o valor do desconto em reais.



Os R$ 2 550,00 correspondem a 100% do valor do *notebook*. Então, o preço com desconto equivale a 92% (100% – 8%) do valor total.

Calculando 92% de R$ 2 550,00, encontramos o valor do *notebook* no pagamento à vista.

$$92\% \text{ de } 2\,550 = \frac{92}{100} \cdot 2\,550 = 0{,}92 \cdot 2\,550 = 2\,346$$

Portanto, o preço do *notebook* à vista é R$ 2 346,00.

ILUSTRAÇÕES: LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

6. Acréscimos e descontos

Habilidades da BNCC: **EF07MA02**, **EF07MA12** e **EF07MA17**.

Ao trabalharem situações-problema que envolvem acréscimos e descontos envolvendo porcentagens, os estudantes desenvolvem a habilidade (EF07MA02) e, ao utilizarem números racionais, representados tanto na forma decimal como na forma de fração, trabalham a habilidade (EF07MA12). Ideias sobre proporcionalidade direta também são usadas nesses contextos em que se determina a porcentagem de certa quantidade; assim, contribui-se para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA17).

Na **situação 1**, utilize outras estratégias de resolução para os cálculos de 115% de 3 240, por exemplo, calculando primeiro 15% de 3 240:

15% de 3 240 =

$= 0{,}15 \cdot 3\,240 = 486$

Depois, adicionamos os valores da grandeza comprimento correspondentes a 100% e a 15%:

$3\,240 + 486 = 3\,726$

Os estudantes devem perceber nesta abordagem que, antes, adicionamos (ou subtraímos) os percentuais e, depois, calculamos o valor da grandeza com acréscimo (ou desconto):

$100\% + 15\% = 115\%$

115% de 3 240 =

$= 1{,}15 \cdot 3\,240 = 3\,726$

Na **situação 2**, apresentamos novamente um exemplo de situação de diferença de preço para compra à vista e a prazo. Peça aos estudantes que calculem a diferença entre os valores e avaliem as duas formas de pagamento, considerando que o valor a prazo poderia ser parcelado em até 10 prestações de mesmo valor.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 52** a **59** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Aproveite os exercícios propostos para conversar com os estudantes sobre as diferentes formas de pagamento praticadas no comércio. Destaque que, muitas vezes, quando os pagamentos são feitos em mais de uma parcela, pode haver um acréscimo em relação ao pagamento à vista. O **item e** do **exercício 53** proporciona um bom momento para refletir sobre planejamento orçamentário, o que contribui para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

No **exercício 59** e em outros, além da articulação com o tratamento da informação, chame a atenção dos estudantes para a forma de organização dos dados em texto, tabelas, gráficos de barras, de barras duplas e de setores. Comente com eles que esse tipo de tratamento aos dados é muito comum em jornais e revistas. Então, proponha que façam uma pesquisa em jornais e revistas sobre as diferentes formas de organizar os dados e tragam o material coletado para compartilhar com a turma.

53. e) Resposta pessoal. Espera-se que o estudante reflita sobre a origem dos recursos para a compra do celular, quanto tempo ele precisará para juntar esse dinheiro, quais outros gastos podem ser cortados.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

52 José recebia R$ 1 400,00 por mês. Ele foi promovido, obtendo um aumento de 9% no salário. Calcule quanto José ganha atualmente. **52.** R$ 1 526,00

53 Uma loja vende determinado modelo de celular nestas condições:

- em três vezes: R$ 1 200,00;
- à vista: desconto de 4% sobre o valor financiado em 3 vezes;
- em 10 pagamentos (1 + 9): acréscimo de 12% sobre o valor financiado em três vezes.

Responda: **53. b)** R$ 1 152,00. **53. c)** R$ 1 344,00.

a) Qual é o valor do desconto quando se compra esse aparelho à vista? **53. a)** R$ 48,00.
b) Qual é o valor desse celular à vista?
c) Qual é o preço desse celular em 10 prestações?
d) Qual é a diferença entre o preço à vista e o preço em 10 pagamentos? **53. d)** R$ 192,00.
e) Como você planejaria seu orçamento para poupar seu dinheiro e comprar o celular à vista, pagando o preço mais baixo?

54 Mariana é dona de uma loja. Ela compra os produtos por um valor e os revende com um acréscimo de 24%. Qual será o preço final de uma mercadoria pela qual ela pagou R$ 72,50? Se Mariana der 20% de desconto sobre o valor de venda, terá algum lucro sobre o preço de custo? **54.** R$ 89,90. Não.

55 Um retângulo mede 48 cm de comprimento por 36 cm de largura. Diminuindo 12,5% na medida do comprimento e aumentando 12,5% na medida da largura, obtém-se um novo retângulo. **55. a)** 42 cm e 40,5 cm

Com base nessas informações, faça o que se pede.

a) Determine as medidas do comprimento e da largura do novo retângulo.
b) Calcule a medida da área, em centímetro quadrado, do novo retângulo. **55. b)** 1 701 cm²
c) A medida da área do novo retângulo aumentou ou diminuiu em relação à medida da área do primeiro? Em quantos por cento aproximadamente? **55. c)** Diminuiu aproximadamente 1,6%.

56 Ao final de cada estação do ano, as lojas que comercializam roupas fazem liquidações. Com a chegada do outono, por exemplo, a liquidação de verão tenta acabar com os estoques para receber novas mercadorias. Supondo que um biquíni custava R$ 45,00 e, com a liquidação, será vendido por R$ 27,00, qual é a taxa percentual de desconto? **56.** 40%

57 Um teclado eletrônico custa R$ 540,00 e é vendido em 3 prestações iguais. Na compra à vista, há um desconto de 10%. Qual é o valor do teclado à vista? **57.** R$ 486,00

58 Observe a seguir o anúncio de uma geladeira das lojas Vende Mais!

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

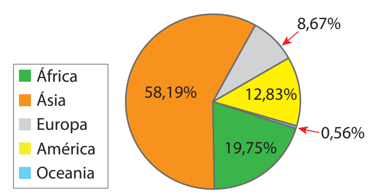
58. a) R$ 1 542,90.

Um cliente fez um bom negócio e conseguiu um desconto de 7,5% sobre o preço à vista.

a) Quanto o cliente pagou por essa geladeira?
b) Determine, em porcentagem, quanto o cliente economizou em relação ao valor a prazo. **58. b)** Aproximadamente 25,7%.

59 Observe o gráfico a seguir.

População mundial estimada para 2030



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: ONU. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Download/Standard/Population/. Acesso em: 25 fev. 2022.

Sabendo que a população mundial estimada para o ano de 2030 é 8,5 bilhões de habitantes, responda.

a) Qual será a população da América nesse ano? **59. a)** 1 090 550 000 habitantes.
b) Supondo que o Brasil tenha 215 milhões de habitantes em 2030, quantos por cento isso representará, aproximadamente, da população do continente americano? **59. b)** Aproximadamente 19,71%.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Na loja de materiais esportivos Araruá, uma bicicleta ergométrica estava à venda por 450 reais. A gerente da loja autorizou o funcionário Fred a aumentar o preço da bicicleta em 20%. Fred, então, marcou o novo preço.

Depois de um mês, a bicicleta não tinha sido vendida. A gerente, então, pediu a Fred que reduzisse o preço em 20%. E assim foi feito.

Ao ver o novo preço, a gerente chamou o funcionário.

ILUSTRAÇÕES: LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

O que você acha? Faça as contas e descubra.

Pense mais um pouco...: Ao reduzir 20% de 540 reais (preço com aumento), obtemos 432 reais, e não 450 reais (preço inicial).

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Construindo um gráfico de setores

Em sua sorveteria, Marcelo deixa um *freezer* reservado apenas para armazenar os sorvetes sem lactose.

Como conhece bem seus clientes, ele abastece esse *freezer* com a quantidade necessária para atendê-los, conforme representado na tabela.

Sorvetes sem lactose da Sorveteria do Marcelo		
Sabor	**Quantidade de sorvetes**	**Porcentagem de sorvetes**
Limão	105	35%
Uva	60	20%
Maçã verde	60	20%
Maracujá	45	15%
Abacaxi	30	10%

Dados obtidos por Marcelo.

Pense mais um pouco...

Esta seção trata de aplicação sucessiva de percentuais a determinado valor. Alerte os estudantes para o fato de que esse procedimento pode nos levar a conclusões erradas.

Inicialmente, oriente-os no sentido de que o cálculo percentual não depende apenas da taxa percentual, mas também do valor no qual a taxa é aplicada. Foi o que ocorreu no contexto apresentado. A taxa é a mesma em ambos os cálculos (20%). No entanto, para calcular o acréscimo, o primeiro cálculo foi feito aplicando-se a taxa de 20% em 450 reais, o que elevou o preço da bicicleta para 540 reais. Depois, foi aplicado um desconto de 20% sobre 540 reais. Logo, o desconto foi maior do que o acréscimo, e os resultados não são os mesmos.

Trabalhando a informação

Habilidades da BNCC: **EF07MA02** e **EF07MA37**.

Esta seção também recorre a conhecimentos sobre procedimentos e eixos das Unidades Temáticas **Números** e **Geometria** para a construção de gráficos de setores.

Disponibilize materiais como régua, compasso e transferidor e, se necessário, oriente os estudantes a relacionar as porcentagens ao ângulo de cada setor do gráfico, de maneira que percebam, por exemplo, que se 35% dos sorvetes são do sabor limão, o setor do gráfico correspondente a esse sabor deverá ter um ângulo equivalente a 35% de 360°, ou seja, 126° ($0,35 \cdot 360 = 126$).

Trabalhando a informação

Verifique se os estudantes utilizam adequadamente o transferidor. Se julgar conveniente, explique como determinar ângulos com o vértice em comum.

Pode-se discutir sobre anúncio como “sorvete 100% sem lactose”. Questione-os se faz sentido dizer que um produto é sem lactose se houver alguma porcentagem dele, por menor que seja, que contenha lactose. Nesse sentido, pode-se desenvolver de maneira integrada com Ciências o Tema Contemporâneo Transversal **educação alimentar e nutricional**, com a realização de uma pesquisa sobre a importância da segurança alimentar. Comente, por exemplo, que há pessoas que têm intolerância à lactose ou ao glúten, e, por isso, os alimentos processados precisam vir com a indicação de ingredientes que os possam conter, ainda que em pequenas quantidades.

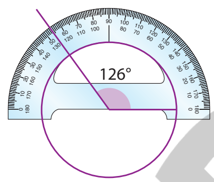
Com base nesses dados, podemos construir um gráfico de setores formado por um círculo dividido em cinco partes; cada parte é chamada de **setor circular** e está relacionada a um valor percentual.

O tamanho dos setores é determinado pelas medidas de abertura dos ângulos de cada setor. Um ângulo com medida de abertura de 360° corresponde a 100% dos sorvetes sem lactose. Assim, a medida do ângulo de cada setor é obtida do seguinte modo:

Sabor	Na tabela	No gráfico
Limão	35% do total de sorvetes	medida do ângulo: 35% de 360° ou $\frac{35}{100} \cdot 360° = 126°$
Uva	20% do total de sorvetes	medida do ângulo: 20% de 360° ou $\frac{20}{100} \cdot 360° = 72°$
Maçã verde	20% do total de sorvetes	medida do ângulo: 20% de 360° ou $\frac{20}{100} \cdot 360° = 72°$
Maracujá	15% do total de sorvetes	medida do ângulo: 15% de 360° ou $\frac{15}{100} \cdot 360° = 54°$
Abacaxi	10% do total de sorvetes	medida do ângulo: 10% de 360° ou $\frac{10}{100} \cdot 360° = 36°$

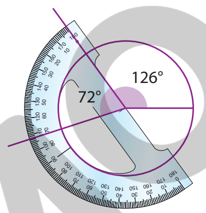
Após determinar a medida do ângulo correspondente a cada setor, desenha-se uma circunferência e marcam-se esses ângulos com uma régua e um transferidor. Esses ângulos estão associados à porcentagem de cada sabor de sorvete.

1º

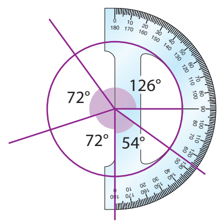


ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

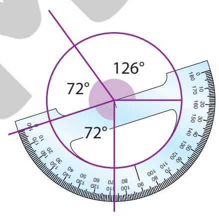
2º



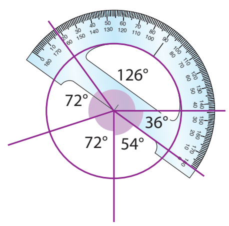
4º



3º



5º

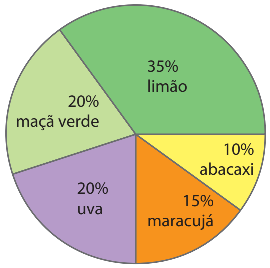


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Em seguida, cada setor é pintado com uma cor diferente. Registram-se, então, o nome e a porcentagem que correspondem a cada um dos setores.

Para finalizar, é necessário colocar o título do gráfico e a fonte dos dados apresentados.

Sorvetes sem lactose da Sorveteria do Marcelo



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos por Marcelo.

Ao interpretar as informações apresentadas pelo gráfico, percebe-se, por exemplo, que 35% dos sorvetes sem lactose da Sorveteria do Marcelo são de limão. Observa-se também que há uma mesma quantidade de sorvetes de maçã verde e de uva.

Esse tipo de gráfico é o mais indicado quando se quer comparar cada parte com o total, quando se quer comparar partes entre si e também quando se quer analisar proporções.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Durante uma aula de Matemática no 7º ano A da Escola São Lucas, a professora Ana fez uma pesquisa para identificar a preferência musical dos estudantes dessa classe. Após a pesquisa, Ana organizou os resultados obtidos em uma tabela como esta:

Preferência musical dos estudantes do 7º ano A		
Gênero musical	**Quantidade de estudantes**	**Porcentagem de estudantes**
Rock	16	40%
Pagode	8	20%
Forró	12	30%
Outros	4	10%

Dados obtidos pela professora Ana.

Construa um gráfico de setores para a situação apresentada na tabela. **1.** Construção de gráfico.

2 Faça uma pesquisa com, no mínimo, 10 pessoas da sua família (pais, irmãos, primos, tios, avós etc.) sobre a preferência deles a respeito de um tema à sua escolha. Registre os dados em uma tabela com as quantidades absolutas em uma coluna e com as respectivas porcentagens em outra coluna. Com base na tabela, construa um gráfico de setores. **2.** Resposta pessoal. Construção de gráfico.

Trabalhando a informação

Comente com os estudantes que, na interpretação ou na construção de gráficos de setores, eles sempre devem verificar se a soma das porcentagens é igual a 100% e se a soma das medidas angulares é igual a 360°, a menos que haja possíveis pequenos arredondamentos.

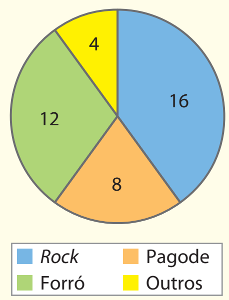
Outra orientação é que, nos gráficos com muitos setores, convém fazer a legenda separadamente, para o gráfico ficar mais legível, em vez de escrever legendas em cada setor.

Essas orientações contribuem para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA37).

Agora quem trabalha é você!

É importante que a **atividade 1** seja feita utilizando o transferidor para medir os ângulos, que devem ser 144°, 72°, 108° e 36°, respectivamente relacionados aos setores dos gêneros musicais *rock*, pagode, forró e "outros". A seguir, um exemplo do gráfico de setores.

Quantidade de estudantes



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Na **atividade 2**, é pertinente discutir um tema em sala de aula e, depois, propor aos estudantes que façam a pesquisa com as 10 pessoas.

Após a realização dessas atividades, pode-se agendar uma aula na sala de informática para fazer os gráficos de setores apresentados nesta seção utilizando os recursos de planilhas eletrônicas, por exemplo.

Ao solicitar aos estudantes a elaboração de uma pesquisa, contribui-se para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA36).

Exercícios complementares

Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de retomar os principais conteúdos estudados no capítulo e utilizar os conhecimentos construídos. Verifique se ainda apresentam dificuldade em algum deles e, se este for o caso, sugira que refaçam atividades referentes a tais assuntos.

As resoluções dos **exercícios 1** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

O **exercício 10** alia conhecimentos das Unidades Temáticas **Números** e **Geometria**. Para resolvê-lo, os estudantes podem imaginar o cubo montado, percebendo, assim, quais são as faces opostas entre si e obtendo as proporções:

- $\frac{x+2}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow$
  $\Rightarrow 5(x+2) = 8 \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = -\frac{2}{5}$
- $\frac{5+y}{y-1} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5 =$
  $= 5(5+y) = 3(y-1) \Rightarrow$
  $\Rightarrow y = -14$
- $\frac{2{,}5+z}{3} = \frac{9}{2} \Rightarrow 2(2{,}5+z) =$
  $= 27 \Rightarrow z = 11$

Portanto, $x = -\frac{2}{5}$, $y = -14$ e $z = 11$.

Se houver dificuldades, sugira aos estudantes que reproduzam essa planificação em uma cartolina e montem o cubo.

Para resolver o **exercício 11**, basta considerar que $2\,580{,}00 \cdot 0{,}172 = 443{,}76$.

Já no **exercício 12**, os estudantes podem utilizar a ideia de proporção e, considerando x o valor procurado, obter que:

$$\frac{129{,}5}{7} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = 1\,850{,}00$$

No **exercício 13**, como perderam-se 5%, logo, restaram 95% do volume total. Assim, sendo x o volume total inicial, tem-se que $x = 42{,}75$ L, pois:

$x \cdot 95\% = 42{,}75 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \cdot 0{,}95 = 42{,}75 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 45$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Um quadrado mede 12 cm de lado, e outro mede 15 cm de lado. Qual é a razão entre:

a) a medida do lado do quadrado menor e a medida do lado do quadrado maior? **1. a)** $\frac{4}{5}$
b) a medida do perímetro do quadrado menor e a medida do perímetro do quadrado maior? **1. b)** $\frac{4}{5}$
c) a medida da área do quadrado menor e a medida da área do quadrado maior? **1. c)** $\frac{16}{25}$

2 (Vunesp) Em uma festa, a razão entre o número de moças e o de rapazes é $\frac{13}{12}$. A porcentagem de rapazes na festa é: **2.** Alternativa **d**.

a) 44%. b) 45%. c) 40%. d) 48%. e) 46%.

3 (UFC-CE) Em um mapa cartográfico, 4 cm representam 12 km. Nesse mesmo mapa, 10 cm representarão quantos quilômetros? **3.** 30 km

4 Um ourives confecciona joias e coloca 6 gramas de prata em cada 18 gramas de ouro puro.

a) Qual é a razão entre a massa de prata e a massa de ouro puro que esse ourives usa? **4. a)** $\frac{1}{3}$
b) Se em uma joia esse ourives usar 4,5 gramas de ouro puro, de quantos gramas de prata ele precisará? **4. b)** 1,5 g

5 (UFRGS-RS) Se a escala de um mapa é 5 por 2 500 000 e dois pontos no mapa estão à distância de 25 cm, ao longo de uma rodovia, a medida da distância real em km é:

a) 100. b) 125. c) 150. d) 200. e) 250. **5.** Alternativa **b**.

6 (UFC-CE) A planta de um apartamento está confeccionada na escala 1 : 50. Então, a área real, em m², de uma sala retangular, cujas medidas na planta são 12 cm e 14 cm, é: **6.** Alternativa **d**.

a) 24. b) 26. c) 28. d) 42. e) 54.

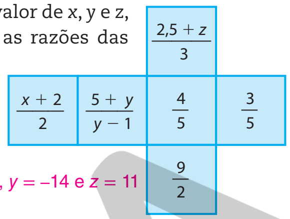
7 Verifique em cada caso se os números, nessa ordem, formam uma proporção.

a) 3, 2, 9 e 6 **7. a)** Sim. b) 4, 3, 3 e 8 **7. b)** Não.

8 Um poste medindo 5,40 m de altura projeta uma sombra que mede 1,80 m de comprimento. Nesse mesmo instante, um prédio projeta uma sombra que mede 14,00 m de comprimento. Qual é a medida da altura do prédio? **8.** 42,00 m

9 Em uma proporção, o produto dos extremos é 80 e um dos meios é 4. Determine o outro meio. **9.** 20

10 Observe a planificação de um cubo no qual foi escrita uma razão em cada uma de suas faces. Determine o valor de x, y e z, sabendo que as razões das faces opostas formam uma proporção.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

10. $x = -\frac{2}{5}$, $y = -14$ e $z = 11$

11 Neste anúncio, o valor economizado com o desconto está manchado. Considerando uma compra à vista, determine esse valor. **11.** R$ 443,76.

ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

12 Márcia comprou um celular com um desconto de R$ 129,50, que equivale a 7% do valor do aparelho. Quanto ela pagou pelo celular? **12 .** R$ 1 850,00.

13 (UEMS) Dentro de um recipiente há um líquido que perdeu 5% de seu volume total por meio de evaporação, restando 42,75 litros. Qual era o volume total desse líquido? **13.** 45 litros.

14 (Uerj) Um lojista oferece 5% de desconto ao cliente que pagar suas compras à vista. Para calcular o valor com desconto, o vendedor usa uma máquina calculadora do seguinte modo:

preço total	×	5	%	–

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Um outro modo de calcular o valor com desconto seria multiplicar o preço total das mercadorias por: **14.** Alternativa **c**.

a) 0,05. b) 0,5. c) 0,95. d) 1,05.

No **exercício 14**, espera-se que os estudantes percebam que dar um desconto de 5% equivale a cobrar 95% do valor total de um produto. Portanto, a alternativa **c** é a correta, pois calcular 95% de um valor equivale a multiplicar esse valor por 0,95.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Em uma turma do 7º ano, $\frac{4}{7}$ dos estudantes praticam algum esporte. Qual é o significado dessa razão? **1.** Alternativa **a.**

a) A cada 7 estudantes da turma, 4 praticam algum esporte.
b) De todos os 7 estudantes da turma, 4 praticam algum esporte.
c) Apenas 7 estudantes praticam algum esporte.
d) Apenas 4 estudantes praticam algum esporte.

2 Carolina comprou dois livros de contos de mistério: um com 160 páginas e outro com 448 páginas. Qual é a razão entre o número de páginas do primeiro livro e o número de páginas do segundo livro? **2.** Alternativa **b.**

a) $\frac{10}{23}$
b) $\frac{5}{14}$
c) $\frac{20}{51}$
d) $\frac{16}{44}$

3 A medida da distância entre duas cidades é de 680 km. Em um mapa, essa distância é representada por um segmento de reta medindo 1,7 cm. Qual é a escala desse mapa?

a) 1 : 2 000 000
b) 1 : 40 000 000
c) 1 : 30 000 000
d) 1 : 4 000 000

3. Alternativa **b.**

4 Qual das proporções a seguir está correta? **4.** Alternativa **d.**

a) $\frac{15}{30} = \frac{2}{5}$

b) $\frac{24}{6} = \frac{8}{3}$

c) $\frac{4\,500}{500} = \frac{7}{1}$

d) $\frac{90}{54} = \frac{5}{3}$

5 Em um mapa cartográfico, 3 cm representam 9 km. Nesse mesmo mapa, 15 cm representarão quantos quilômetros? **5.** Alternativa **c.**

a) 9 km
b) 15 km
c) 45 km
d) 135 km

6. Alternativa **c.**

6 Um carrinho de controle remoto custa R$ 360,00 e é vendido em 4 prestações iguais. Na compra à vista, há um desconto de 12% sobre o valor total do produto. Qual é o valor do carrinho à vista?

a) R$ 331,20
b) R$ 324,00
c) R$ 316,80
d) R$ 309,60

7 Uma garrafa de 275 mL de suco de determinada marca é vendida por R$ 3,00. A garrafa de 1,5 L da mesma marca é vendida por R$ 5,00. As razões entre a capacidade de cada garrafa e o seu preço são proporcionais? **7.** Alternativa **d.**

a) Sim, pois $\frac{275}{3} = \frac{1,5}{5}$.

b) Sim, pois $\frac{0,275}{3} = \frac{1,5}{5}$.

c) Não, pois $\frac{275}{3} \neq \frac{1,5}{5}$.

d) Não, pois $\frac{0,275}{3} \neq \frac{1,5}{5}$.

8 Calcule o valor de x na proporção $\frac{2x + 3}{4} = \frac{5x}{9}$.

a) 0,7
b) 1,5
c) 13,5
d) 15,0

8. Alternativa **c.**

9 Dalila faz parte de um cineclube com 120 membros. Na Mostra de Animação organizada anualmente por esse cineclube compareceram 65% dos membros. Quantos membros do cineclube participaram da Mostra? **9.** Alternativa **a.**

a) 78
b) 65
c) 42
d) 30

10 O funcionário de uma empresa teve seu salário reajustado em 18% após ser promovido. Se o salário inicial era de R$ 1 650,00, qual é o novo salário após a promoção? **10.** Alternativa **b.**

a) R$ 1 668,00
b) R$ 1 947,00
c) R$ 1 353,00
d) R$ 2 047,00

11 Eduardo comprou um fone de ouvido em uma promoção. O preço original do fone era de R$ 250,00 e a promoção ofereceu um desconto de 20%. Qual foi o valor pago pelo fone? **11.** Alternativa **d.**

a) R$ 300,00
b) R$ 230,00
c) R$ 225,00
d) R$ 200,00

Organizando: **a)** Razão é o quociente entre dois números, sendo o denominador diferente de zero. Resposta possível: na preparação de receitas culinárias e na leitura de mapas, aplicamos o conceito de razão.
b) Proporção é uma igualdade entre duas razões. Resposta possível: quando ampliamos fotografias no computador, aplicamos o conceito de proporção para manter a imagem com suas características originais. Para aumentar ou reduzir uma receita culinária também é aplicado o conceito de proporção, assim como na criação de maquetes e plantas baixas de construções.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões.

a) O que é uma razão? Dê exemplos de situações em que o conceito de razão é aplicado.

b) O que é uma proporção? Dê exemplos de situações em que o conceito de proporção é aplicado.

c) O que diz a propriedade fundamental das proporções?

d) Como você calcularia a porcentagem de um determinado valor?

c) A propriedade fundamental das proporções enuncia que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos de uma proporção, ou seja, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$.

d) Respostas possíveis: com um par de razões formando uma proporção ou utilizando uma calculadora simples.

Verificando

Esta seção possibilita retomar o trabalho com os principais conteúdos abordados neste capítulo. Os estudantes podem responder aos testes individualmente ou em duplas.

Para o **teste 1**, é necessário entender que a fração $\frac{4}{7}$ refere-se ao fato de que, a cada 7 estudantes, 4 praticam algum esporte.

Para o **teste 2**, a razão pedida é $\frac{5}{14}$, pois:

$$\frac{160}{448} = \frac{5}{14}$$

No **teste 3**, como 1,7 cm no mapa corresponde a 680 km e como 680 km equivalem a 6 800 000 cm, temos que:

$$\frac{1,7}{68\,000\,000} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 40\,000\,000$$

Para responder ao **teste 4**, pode-se utilizar a relação fundamental das proporções. Assim, a única igualdade verdadeira é a apresentada na alternativa **d**, pois $90 \cdot 3 = 54 \cdot 5 = 270$.

As resoluções dos **testes 5** a **11** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Organizando

Essa seção possibilita aos estudantes retomar os conteúdos e utilizar as respostas dos itens como um resumo do que aprenderam. Possibilite a eles compartilhar as respostas com os colegas. Para cada item, peça a um estudante que registre na lousa a resposta dada e aos demais que a comparem com a própria resposta, corrigindo-a quando necessário e complementando-a se possível.

Capítulo 10 – Estudo dos polígonos

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo dedica-se ao estudo dos polígonos, em especial dos polígonos regulares.

Os cálculos do número de diagonais, da soma das medidas dos ângulos internos e da soma das medidas dos ângulos externos de um polígono têm abordagem direta e simples, sempre apoiada em ilustrações e fotografias, que facilitam o entendimento dos textos, a generalização e a sistematização dos resultados.

O estudo dos polígonos progride com a definição de polígono regular e com o cálculo das medidas do ângulo interno e do ângulo externo.

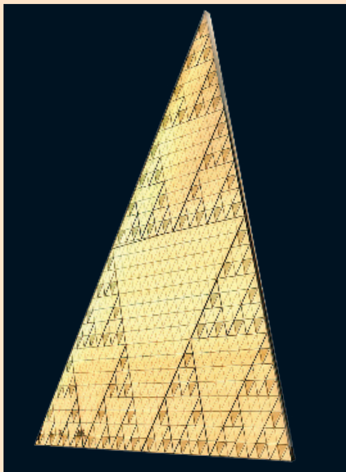
O conceito de congruência, visto com triângulos, é retomado e ampliado para polígonos quaisquer.

Aproveite o tema da abertura do capítulo e, em trabalho interdisciplinar com História, explore mais o tema das grandes pirâmides do Egito e os diferentes artefatos encontrados nos diferentes sítios arqueológicos do Vale dos Reis, contribuindo para o desenvolvimento das **competências gerais 1** e **3** e do Tema Contemporâneo Transversal **diversidade cultural**.

A imagem da fachada do museu foi inspirada na sequência de triângulos de Sierspinski, um exemplo de fractal autossimilar. O **item c** explora essa sequência de modo a transcender o estudo da Geometria. Outra sequência numérica que ainda pode ser trabalhada nessa mesma sequência de imagens é a da quantidade de triângulos claros: 0, 1, 4, 13, 40, ..., cuja lei de formação é, a partir da segunda figura, $3 \cdot n + 1$, sendo $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Capítulo

10 Estudo dos polígonos


BALKIS PRESS/ABACA/ZUMA PRESS/FOTOARENA

Representação gráfica de detalhe da fachada do museu.

Observe, leia e responda no caderno. **b)** Quéops, Quéfren e Miquerinos.

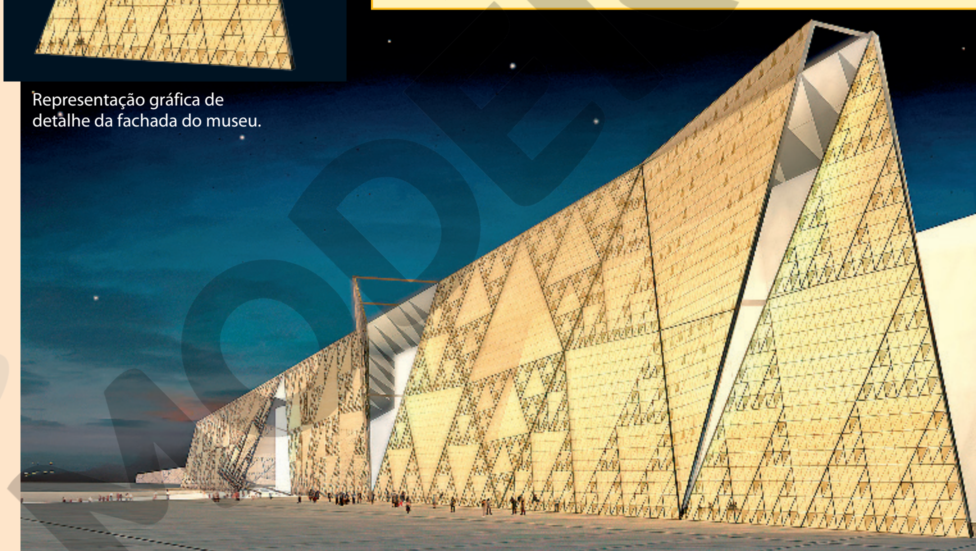
a) A imagem retrata a aplicação da Matemática na Arquitetura. Qual figura geométrica você identifica na fachada do Grande Museu Egípcio? **a)** Espera-se que os estudantes identifiquem o triângulo.

b) Esse museu fica perto das Pirâmides de Gizé. Pesquise e responda: quais são os nomes das três pirâmides mais famosas do Egito?

c) A figura dessa fachada é resultado de modificações repetidas em um triângulo inicial.


RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

Quantos triângulos escuros você vê na 1ª figura à esquerda? E na 2ª figura? E na 3ª figura? E na 4ª figura? **c)** 1; 3; 9; 27.


BALKIS PRESS/ABACA/ZUMA PRESS/FOTOARENA

Representação gráfica da fachada do Grande Museu Egípcio, no Cairo (Egito).

A apenas 2 km de distância das pirâmides de Gizé e considerado o maior museu do mundo dedicado a uma única civilização, o complexo cultural do Grande Museu Egípcio foi construído para abrigar uma coleção de aproximadamente 100 000 artefatos antigos, cobrindo uma área total de 24 000 m^2.

220

Sugestão de leitura

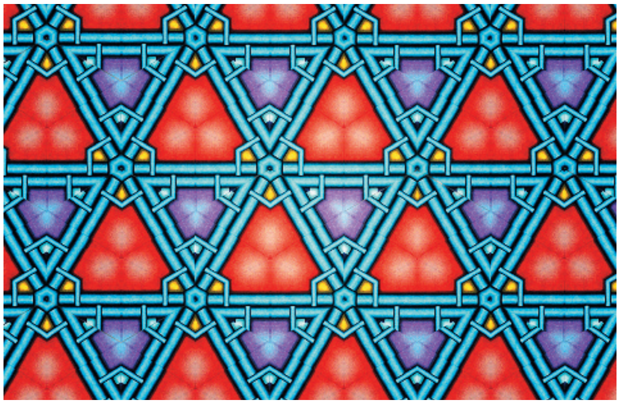
Para ampliar o assunto, sugerimos o material a seguir:

UFJF. **Fractalize**: modelagem fractal nas Ciências e Engenharias. 21 maio 2021. Disponível em: https://www2.ufjf.br/fractalize/2021/05/22/triangulo-de-sierpinski/. Acesso em: 18 maio 2022.

O material apresenta uma sequência de construção de um fractal.

1 Polígonos

Já aprendemos que uma linha poligonal fechada simples é chamada de **polígono**.

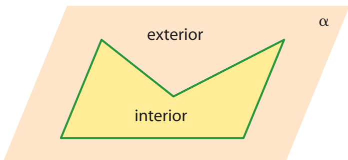

PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

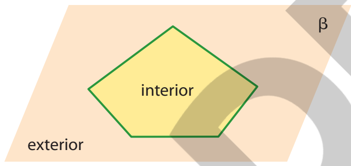
A imagem formada em um caleidoscópio reproduz e multiplica superfícies poligonais.


ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

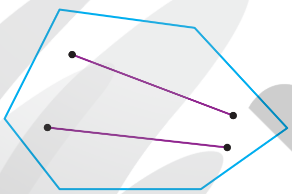
Agora, vamos recordar o que já sabemos sobre polígonos.

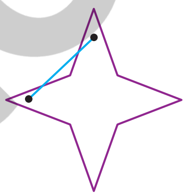
- Os polígonos dividem o plano em duas regiões sem pontos comuns: a **interior** e a **exterior**.





- Polígonos são denominados **convexos** quando o segmento que une quaisquer dois pontos de seu interior estiver contido nele. Caso contrário, são chamados de polígonos **não convexos**.


Polígono convexo


Polígono não convexo

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Neste e nos próximos capítulos, vamos trabalhar apenas com polígonos convexos, que chamaremos simplesmente de polígonos.

1. Polígonos

Habilidade da BNCC: **EF07MA27**.

Neste tópico, ao calcular medidas de ângulo interno de polígono sem o uso de fórmulas e determinar relações entre ângulos internos e externos de polígonos, aprofundamos o trabalho com a habilidade (EF07MA27).

Apoiados em uma imagem gerada por um caleidoscópio, retomamos o conceito de polígono e seus elementos como parte do plano, que o divide em regiões interna e externa, convexa e não convexa.

Nesta coleção, adotamos a definição de polígono como uma linha poligonal fechada simples, ou seja, uma linha formada apenas por segmentos consecutivos de um plano, que não se entrelaça.

Se possível, apresente aos estudantes um caleidoscópio. Em uma pesquisa na internet, é possível encontrar diversas opções para a construção de um. Oriente-os a realizar esta construção em duplas. Mostre a eles que cada caleidoscópio construído tem inúmeras possibilidades de formação de figuras geométricas geradas pela reflexão nos espelhos das pedrinhas que o compõem.

De modo lúdico, aproveite esse instrumento para retomar e reforçar o conteúdo estudado no capítulo 8 deste livro, que trata sobre as transformações geométricas.

Exercícios propostos

No **exercício 1**, como as medidas são dadas na mesma unidade de comprimento, basta adicioná-las para obter a medida do perímetro.

medida do perímetro = (4 + 1,6 + + 3 + 1,9) cm = 10,5 cm

O **exercício 2** trata da congruência dos ângulos internos, como antecipação de uma das características do polígono regular, que será estudado no final do capítulo. Desse modo, para responder à questão basta dividir 540° por 5:

540° : 5 = 108°

No **exercício 3**, os estudantes deverão aguçar a visão para identificar várias possibilidades de formação de polígonos pelas diagonais de um heptágono. Esse tipo de questão pode ser ampliado para polígonos de um número maior de lados, aumentando sua complexidade e desafiando os estudantes.

Observe se o tamanho (pequeno) do desenho do heptágono está dificultando a realização da atividade.

O **exercício 4**, de forma simples, reúne conceitos das Unidades Temáticas **Geometria**, **Números** e **Grandezas e medidas**.

As resoluções dos **exercícios 3** e **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Pense mais um pouco...

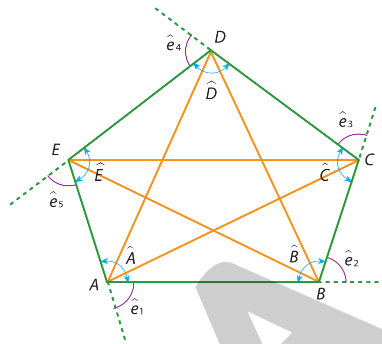
Essa seção tem aspecto lúdico e desafiador. Os estudantes devem confeccionar as figuras exatamente como são indicadas e, depois de recortadas, manipulá-las até obter a figura pedida.

Antes de os estudantes montarem a figura, oriente-os a analisar as medidas angulares e lineares das peças (triângulo, trapézios isósceles e trapézio retângulo). Depois de a montarem, estude com eles os ângulos formados com a união das figuras. Outra forma de trabalhar esse material é pedir aos estudantes que componham retângulos com duas, com três e com quatro peças. Há ainda outras possibilidades, como formar triângulo, quadrado, pentágono, hexágono, heptágono etc.

A resolução da atividade da seção **Pense mais um pouco...** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Elementos de um polígono

Considere os elementos de um polígono. Alguns deles você já conhece.

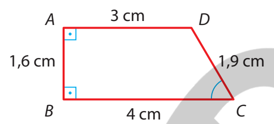


- **Lados**: são os segmentos que formam o polígono. No polígono *ABCDE*, os lados são $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$.
- **Vértices**: são os pontos de encontro de dois lados consecutivos de um polígono. No polígono *ABCDE*, os vértices são os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*.
- **Ângulos internos**: são os ângulos formados por duas semirretas com origem em um mesmo vértice. Cada uma contém um lado do polígono. No polígono *ABCDE*, os ângulos internos são $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ e $\hat{E}$.
- **Ângulos externos**: são os ângulos formados por duas semirretas com origem em um mesmo vértice. Uma contém um lado do polígono e a outra, o prolongamento do lado consecutivo a ele. No polígono *ABCDE*, são ângulos externos: $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$, $\hat{e}_4$ e $\hat{e}_5$.
- **Diagonais**: são os segmentos com extremidades em dois vértices não consecutivos do polígono. As diagonais do polígono *ABCDE* são os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Calcule a medida do perímetro do trapézio *ABCD*. **1.** 10,5 cm



2 Se os ângulos de um pentágono forem congruentes, e a soma das medidas deles for 540°, quanto medirá cada um desses ângulos? **2.** 108°

3 Desenhe um heptágono convexo e trace todas as diagonais. Essas diagonais determinam vários polígonos. Pinte a região interior de um desses polígonos que tenha:

a) 3 lados; **b)** 4 lados; **c)** 5 lados; **d)** 6 lados; **e)** 7 lados.

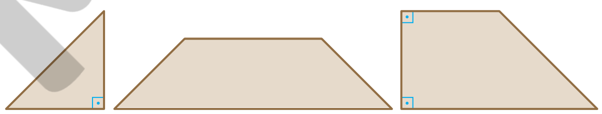
3. Construção de figura.

4 Considere três polígonos: um heptágono de lados medindo 2,5 cm, um octógono de lados medindo 2 cm e um eneágono de lados medindo 1,8 cm. Descubra, mentalmente, qual deles tem a maior medida de perímetro. **4.** O heptágono.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

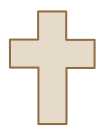
Reúna-se com um colega e resolvam este desafio. Copiem em uma folha de papel sulfite as figuras, nas quantidades indicadas, e recortem-nas.



(três figuras) (duas figuras) (uma figura)

(Use tesoura com ponta arredondada e a manuseie com cuidado!)

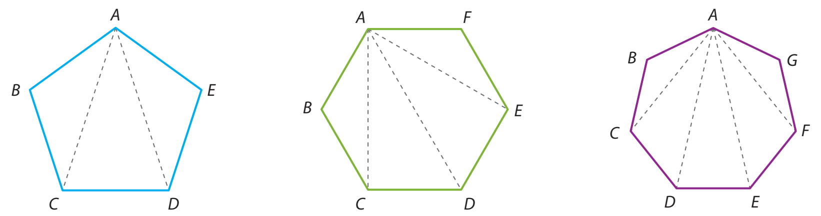
Depois, com as seis peças, construam uma cruz neste formato:



Pense mais um pouco...: Construção de figura.

2 Número de diagonais de um polígono

Considere o número de lados dos polígonos e o de diagonais traçadas por um de seus vértices.



número de lados: 5
número de diagonais: 2

número de lados: 6
número de diagonais: 3

número de lados: 7
número de diagonais: 4

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Note que o número de diagonais traçadas por um de seus vértices (o vértice A) é igual ao número de lados menos 3.

Em um polígono de n lados, podemos traçar, por um dos vértices, $(n - 3)$ diagonais.

Como o polígono tem n vértices, podemos traçar $n \cdot (n - 3)$ diagonais.

Esse produto, porém, representa o dobro do número de diagonais, pois cada diagonal foi contada duas vezes (por exemplo, a diagonal $\overline{AC}$ e a diagonal $\overline{CA}$).

Então, para calcular o número total de diagonais d de um polígono de n lados, podemos empregar a fórmula:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

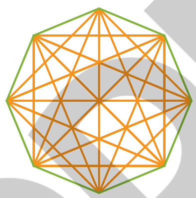
Acompanhe alguns exemplos.

a) Vamos calcular o número de diagonais de um octógono.

$n = 8$

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2} = \frac{8 \cdot (8 - 3)}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = \frac{40}{2} = 20$$

Portanto, o octógono tem 20 diagonais.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

b) Qual é o polígono cujo número de diagonais é igual ao número de lados?

Podemos escrever o sistema de equações: $\begin{cases} d = n \\ d = \dfrac{n \cdot (n - 3)}{2} \end{cases}$

Substituindo d por n, na segunda equação, obtemos: $n = \dfrac{n^2 - 3n}{2}$

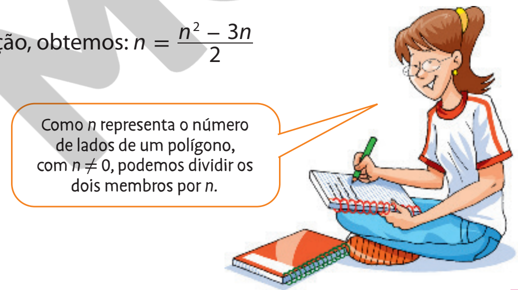
$2n = n^2 - 3n$

$2n + 3n = n^2 - 3n + 3n$

$5n = n^2$ ou $n^2 = 5n$

$\dfrac{n^2}{\cancel{n}} = \dfrac{5\cancel{n}}{\cancel{n}}$, ou seja, $n = 5$

Logo, o polígono é o pentágono.



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

2. Número de diagonais de um polígono

Retomamos ainda um dos elementos do polígono: a diagonal. Em seguida, com base na triangularização de um polígono qualquer, por meio das diagonais com uma extremidade comum e considerando o número de vértices, e aplicando o princípio multiplicativo, avançamos para o cálculo do número de diagonais em função do número de lados.

Assim, por meio da generalização do cálculo, obtemos uma fórmula que permite aos estudantes obter o número de diagonais, dado o número de lados. O inverso também é possível: obter o número de lados, dado o número de diagonais, conforme descrito nos exemplos **a** e **b**.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 5** a **8** e **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Propostas como a do **exercício 6** possibilitam aos estudantes a descoberta de propriedades dos polígonos. Ele pode ser mais explorado com a sugestão de que façam o mesmo com um retângulo ou um losango (nesse caso, verificam que as diagonais são perpendiculares).

Para a resolução dos exercícios deste bloco, os estudantes podem raciocinar construindo figuras, como se fossem enunciados gráficos. No **exercício 9**, no entanto, a abordagem algébrica é um caminho mais adequado. Veja a resolução:

a) $d = 6n$

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 6n$$

$n \cdot (n-3) = 12n$

$n^2 - 15n = 0$

Por tentativa e erro, os estudantes devem chegar a $n = 0$ (descartar) ou $n = 15$. Portanto, o polígono tem 15 lados.

b) $d = 4n$

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 4n$$

$n \cdot (n-3) = 8n$

$n^2 - 11n = 0$

Por tentativa e erro, devem chegar a $n = 0$ (descartar) ou $n = 11$. Portanto, o polígono tem 11 lados.

No **exercício 10**, os estudantes devem traçar as diagonais a partir de um de seus vértices em cada figura, construindo o chamado "enunciado gráfico", e depois verificar a quantidade de triângulos formados. A relação vai se tornando perceptível ao responderem aos **itens a**, **b**, **c** e **d**. Espera-se que o acúmulo de informações desses itens leve os estudantes a generalizar e a resolver o **item e**: a quantidade de triângulos formados nessa condição é o número de lados menos 2. Dessa forma, é possível antecipar uma ideia que será trabalhada no próximo tópico teórico.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

5 Calcule mentalmente: **5. a)** 3 diagonais.

a) Quantas diagonais podemos traçar a partir de um dos vértices de um hexágono?

b) Quantas diagonais tem um triângulo? **5. b)** Nenhuma.

6 Desenhe um quadrado e trace suas diagonais. **6.** Construção de figura.

a) Quantas diagonais ele tem? **6. a)** 2 diagonais.

b) Com uma régua, compare a medida das diagonais. O que é possível perceber? **6. b)** As diagonais têm a mesma medida.

7 Por um dos vértices de um polígono foi possível traçar até 4 diagonais. Que nome recebe esse polígono? **7.** Heptágono.

8 Quantas diagonais tem um polígono com: **8. a)** 170 diagonais. **8. b)** 104 diagonais.

a) 20 lados? b) 16 lados? c) 24 lados? **8. c)** 252 diagonais.

9 Quantos lados tem o polígono cujo número de diagonais é:

a) seis vezes o número de lados? **9. a)** 15 lados.

b) o quádruplo do número de lados? **9. b)** 11 lados.

10 Traçando todas as diagonais a partir de um vértice, quantos triângulos são formados em um: **10. a)** 2 triângulos. **10. b)** 3 triângulos.

a) quadrilátero?
b) pentágono?
c) hexágono? **10. c)** 4 triângulos.
d) heptágono? **10. d)** 5 triângulos.
e) decágono? **10. e)** 8 triângulos.
f) polígono de *n* lados? **10. f)** $(n - 2)$ triângulos.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Cada um dos cinco cartões tem um número em uma face e uma figura na outra.

Alguém afirmou: "Atrás de um número par há sempre um triângulo".

Que procedimento devemos adotar para verificar se a afirmação é verdadeira, virando o menor número de cartões? *Pense mais um pouco...*: Devemos virar o 3º, o 4º e o 5º cartão, da esquerda para a direita.

Conversem com outra dupla e comparem as respostas obtidas.

Elaborem outras afirmações sobre esses cartões para outra dupla fazer a verificação.

ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

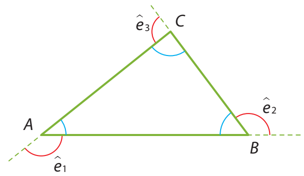
3 Estudando triângulos

Você já aprendeu que os triângulos são polígonos de três lados. Vamos relembrar quais são seus principais elementos.

Indicamos um triângulo *ABC*, como o da figura a seguir, por $\triangle ABC$.

Nesse triângulo, destacamos seus principais elementos:

- os **vértices** *A*, *B* e *C*;
- os **lados** $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$;
- os **ângulos internos** $B\hat{A}C$ ou $\hat{A}$, $A\hat{B}C$ ou $\hat{B}$, e $A\hat{C}B$ ou $\hat{C}$;
- os **ângulos externos** $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$ e $\hat{e}_3$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

224

Pense mais um pouco...

Para verificar se a afirmação é verdadeira, devemos considerar:

- Nada podemos dizer a respeito de que figura está atrás de um cartão com número ímpar; logo, pode haver qualquer figura ou não haver nenhuma figura. Portanto, não precisamos virar o primeiro cartão da esquerda.
- O segundo cartão pode ter, no verso, um número par ou um número ímpar, e a frase será verdadeira; portanto, não precisamos virá-lo.
- No verso do terceiro cartão, deve haver um triângulo; devemos virar o cartão para conferir.
- No verso do quarto e do quinto cartões, não pode haver um número par; devemos virar os cartões para conferir. Portanto, devemos virar o terceiro, o quarto e o quinto cartões.

Observe que cada lado é oposto ao ângulo interno determinado pelos outros dois lados:

- $\overline{BC}$ é oposto ao ângulo $\hat{A}$;
- $\overline{AC}$ é oposto ao ângulo $\hat{B}$;
- $\overline{AB}$ é oposto ao ângulo $\hat{C}$.

Note, também, que cada ângulo externo é suplementar do ângulo interno adjacente:

- $m(\hat{A}) + m(\hat{e}_1) = 180°$
- $m(\hat{B}) + m(\hat{e}_2) = 180°$
- $m(\hat{C}) + m(\hat{e}_3) = 180°$

Classificação de triângulos

Podemos classificar um triângulo de duas maneiras: pelas **medidas dos lados** ou pelas **medidas dos ângulos internos**.

Observação

- Indicamos os lados correspondentes em polígonos congruentes cortando esses lados com um mesmo número de tracinhos. Para indicar ângulos correspondentes, usamos um pequeno arco cortado por um mesmo número de tracinhos.

Classificação quanto às medidas dos lados

Quanto às medidas dos lados, os triângulos se classificam em **isósceles**, **equilátero** ou **escaleno**.

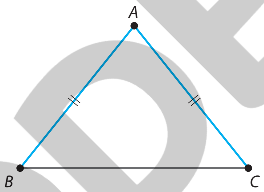
a) Triângulos isósceles são triângulos que têm dois lados congruentes.

Em um triângulo isósceles:

- o ângulo formado pelos lados congruentes é chamado de **ângulo do vértice**;
- o lado oposto a esse ângulo é chamado de **base**;
- os ângulos adjacentes à base são chamados de **ângulos da base**.

O $\triangle ABC$ é isósceles, pois $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.

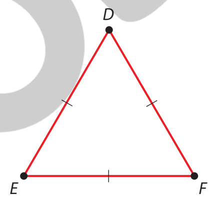
Nesse triângulo, o ângulo do vértice é $\hat{A}$, a base é o lado $\overline{BC}$ e os ângulos da base são $\hat{B}$ e $\hat{C}$.



b) Triângulos equiláteros são triângulos que têm os três lados congruentes.

Todo triângulo equilátero também é um triângulo isósceles.

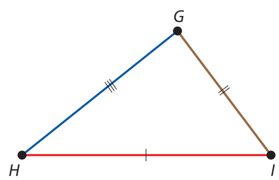
O $\triangle DEF$ é equilátero, pois $\overline{DE} \cong \overline{DF} \cong \overline{EF}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

c) Triângulos escalenos são triângulos que não têm lados congruentes.

O $\triangle GHI$ é escaleno, pois não tem lados congruentes.



3. Estudando triângulos

Habilidades da BNCC: **EF07MA24**, **EF07MA25**, **EF07MA26** e **EF07MA27**.

Neste tópico, ao tratar de cálculos de medidas de ângulo interno de polígono e sem o uso de fórmulas; determinar relações entre ângulos internos e externos de polígonos; construir triângulos usando régua e compasso; reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados; descrever por meio de fluxograma um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados; e reconhecer a rigidez geométrica do triângulo e suas aplicações como em estruturas metálicas e de telhados, oferecemos ao estudante a oportunidade de desenvolver as habilidades (EF07MA24), (EF07MA25), (EF07MA26) e (EF07MA27).

Classificação de triângulos

Avançando no estudo dos triângulos, estabelecemos nesta página a relação entre as medidas de cada ângulo interno e o respectivo ângulo externo como sendo a de ângulos suplementares.

Também no boxe **Observação** estabelecemos a convenção que relaciona os lados congruentes a fim de facilitar a classificação quanto aos lados.

Uma maneira de verificar a compreensão dos estudantes sobre a classificação de triângulos quanto aos lados é questioná-los sobre a validade da recíproca da afirmação “Todo triângulo equilátero é um triângulo isósceles”. Eles devem concluir que a recíproca não é verdadeira.

Classificação quanto às medidas dos ângulos

Discuta com os estudantes a indagação feita pela personagem a respeito da possibilidade de um triângulo ter dois ângulos internos retos ou obtusos. Caso haja alguma dúvida, peça a eles que tentem representar a suposta situação por meio de um desenho.

Construção de triângulos

No procedimento da construção de um triângulo com base nas medidas de seus lados, aplicamos, sem conceituar (pois o conceito será estudado no 8º ano), a propriedade característica de lugar geométrico da circunferência.

Dadas as medidas $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm e $BC = 3$ cm, uma vez traçado o lado $\overline{AB}$, todos os pontos do plano que distam 5 cm do ponto A estão na circunferência de centro A e raio medindo 5 cm, e todos os pontos do plano que distam 3 cm do ponto B estão na circunferência de centro B e raio medindo 3 cm.

Como a distância entre A e B é menor do que a soma das distâncias entre A e C e entre B e C, há dois pontos C do plano que satisfazem ambas as condições, simétricos em relação à reta $\overleftrightarrow{AB}$, que com A e B determinam dois triângulos ABC idênticos, mas em posições diferentes.

Discuta com os estudantes o caso em que as três medidas dadas não tenham as especificações de nomeação dos pontos. Nele, o procedimento recém-descrito nos levará a obter quatro triângulos, todos congruentes entre si, pois poderíamos permutar os dois raios e os dois centros das circunferências traçadas.

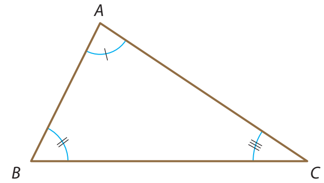
O processo apresentado contribui para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA06) e (EF07MA24).

Classificação quanto às medidas dos ângulos

Quanto às medidas dos ângulos, os triângulos se classificam em **acutângulo**, **obtusângulo** ou **retângulo**.

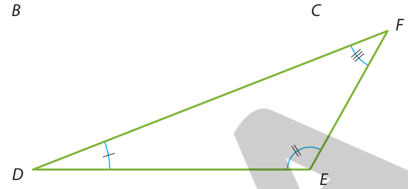
a) Triângulos acutângulos são triângulos que têm os três ângulos internos agudos.

O $\triangle ABC$ é acutângulo, pois m($\hat{A}$) < 90°, m($\hat{B}$) < 90° e m($\hat{C}$) < 90°.



b) Triângulos obtusângulos são triângulos que têm um ângulo interno obtuso.

O $\triangle DEF$ é obtusângulo, pois m($\hat{E}$) > 90°.

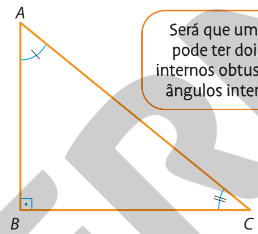


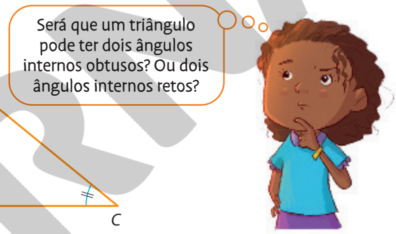
c) Triângulos retângulos são triângulos que têm um ângulo interno reto.

Em um triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**, e os outros lados são chamados de **catetos**.

O triângulo ABC é retângulo, pois m($\hat{B}$) = 90°.

Nesse triângulo, os catetos são $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, e a hipotenusa é $\overline{AC}$.



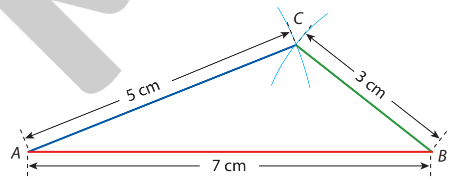


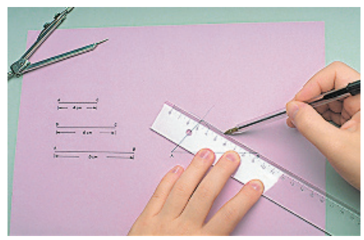
Construção de triângulos

Vamos recordar a construção de um triângulo, com régua e compasso, quando são conhecidas as medidas de seus lados, por exemplo, 3 cm, 5 cm e 7 cm.

Acompanhe:

- Com o auxílio da régua, traçamos o segmento $\overline{AB}$ de medida 7 cm.
- Com a ponta-seca em A e abertura igual a AC (5 cm), depois com a ponta-seca em B e abertura igual a BC (3 cm), traçamos arcos que se cruzam em C.
- Com o auxílio da régua, traçamos os lados $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$.





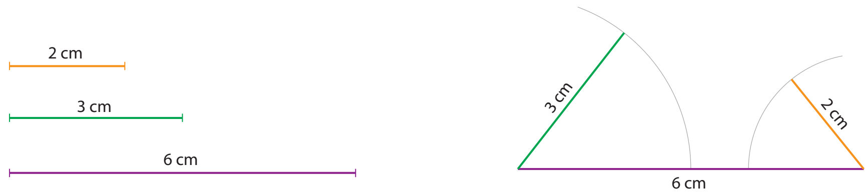
Construção de um triângulo.

Condição de existência de um triângulo

Nem sempre é possível construir um triângulo, mesmo sendo conhecidas as três medidas dos lados. Considere as situações a seguir.

Situação 1

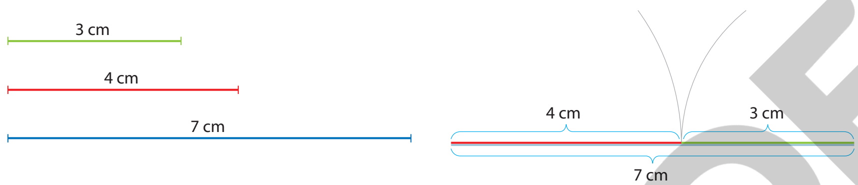
Vamos tentar construir um triângulo de lados medindo 6 cm, 3 cm e 2 cm.



Perceba que não foi possível construir o triângulo com lados medindo 6 cm, 3 cm e 2 cm, pois os arcos traçados não se cruzam. Repare também que o maior segmento (de 6 cm) tem medida maior que a soma das medidas dos outros dois segmentos (3 cm + 2 cm = 5 cm). Isso significa que não existe um triângulo cujos lados medem 6 cm, 3 cm e 2 cm.

Situação 2

Vamos tentar construir um triângulo de lados medindo 7 cm, 4 cm e 3 cm.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Perceba que também não foi possível construir o triângulo com lados medindo 7 cm, 4 cm e 3 cm. Repare que o maior segmento (de 7 cm) tem medida igual à soma das medidas dos outros dois segmentos (3 cm + 4 cm = 7 cm). Isso significa que não existe um triângulo cujos lados medem 7 cm, 4 cm e 3 cm.

Vimos que não foi possível construir o triângulo de medidas 6 cm, 3 cm e 2 cm, pois $6 > 2 + 3$.

Também não foi possível construir o triângulo de medidas 7 cm, 4 cm e 3 cm, pois $7 = 4 + 3$.

No entanto, é possível construir um triângulo de lados medindo 7 cm, 5 cm e 3 cm. Repare que o maior lado desse triângulo (7 cm) tem medida menor que a soma das medidas dos outros dois lados (5 cm + 3 cm = 8 cm). Isso também ocorre com os outros dois lados desse triângulo: a medida de cada um deles é menor que a soma das medidas dos outros dois:

- 5 cm < 3 cm + 7 cm
- 3 cm < 5 cm + 7 cm

Essa é a condição de existência de qualquer triângulo.

> Em todo triângulo, a medida de qualquer lado é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Condição de existência de um triângulo

Na **situação 1**, uma vez traçado o segmento de 6 cm, todos os pontos do plano que distam 2 cm de uma de suas extremidades estão na circunferência de centro nessa extremidade e raio medindo 2 cm; e todos os pontos do plano que distam 3 cm da outra extremidade estão na circunferência de centro nessa extremidade e raio medindo 3 cm. Porém, neste caso, essas circunferências não se cruzam, ou seja, não determinam o que seria o terceiro vértice, portanto não formam triângulo algum.

Na **situação 2**, uma vez traçado o segmento de 7 cm, todos os pontos do plano que distam 5 cm de uma de suas extremidades estão na circunferência de centro nessa extremidade e raio medindo 5 cm; e todos os pontos do plano que distam 3 cm da outra extremidade estão na circunferência de centro nessa extremidade e raio medindo 3 cm. Porém, neste caso, essas circunferências se cruzam em um único ponto pertencente ao segmento de 7 cm, portanto colinear com as extremidades do segmento, não formando triângulo.

Condição de existência de um triângulo

O fluxograma desta página descreve o procedimento generalizado a ser percorrido para a construção de um triângulo, dadas as medidas de seus lados, enquanto o texto exemplifica as situações diversas, tornando as conclusões palpáveis ao estudante e contribui para o desenvolvimento das habilidades (EF07MA06) e (EF07MA26).

Caso tenha oportunidade leve os estudantes à sala de informática para que possam construir diferentes triângulos com o apoio de um *software* de geometria dinâmica. Depois, solicite que construam um fluxograma com as ferramentas disponíveis no *software*. Desse modo, contribui-se para o desenvolvimento da **competência geral 5**.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 11, 14, 17** e **19** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Solicite aos estudantes que, na resolução de cada item do **exercício 11**, obtenham a construção de todas as possibilidades dos triângulos.

Após a resolução do **exercício 13**, peça a eles que construam outro triângulo cujas medidas dos lados sejam respectivamente o dobro das medidas do triângulo *ABC*. Proponha que classifiquem o novo triângulo e o comparem com o anterior. Questione: ao duplicarmos, triplicarmos, quadruplicarmos etc. as medidas de um triângulo dado, o triângulo preserva a sua forma sempre? Eles devem concluir que sim, antecipando de modo informal a ideia de semelhança de triângulos, a ser estudada no livro do 9º ano.

Discuta com os estudantes a resolução do **exercício 14**. Provavelmente, eles devem ter construído triângulos retângulos e isósceles com medidas de lados diferentes uns dos outros. No entanto, todos deverão dar a mesma resposta, 45°, para a medida dos ângulos agudos. Incentive-os a perceber esse fato.

Veja outros exemplos e o fluxograma da construção.

a) Vamos verificar se existe o triângulo cujos lados medem 12 cm, 9 cm e 8 cm.

Basta verificar se a medida do lado maior é menor que a soma das medidas dos outros dois lados:

12 cm < 9 cm + 8 cm

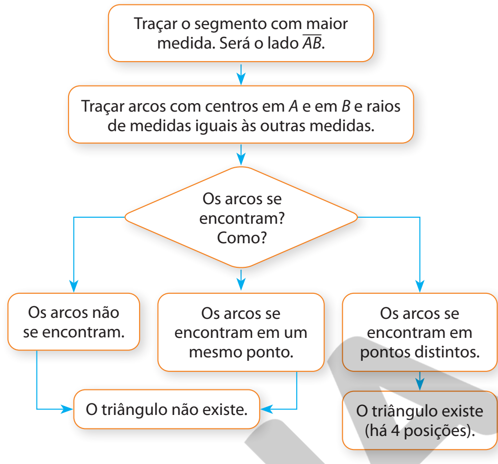
Logo, o triângulo **existe**.

b) Vamos verificar se existe o triângulo cujos lados medem 15 cm, 10 cm e 4 cm:

15 cm > 10 cm + 4 cm

Logo, o triângulo **não existe**.

Fluxograma: construção de triângulo



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11 Com régua e compasso, construa os triângulos: **11.** Construção de figuras.

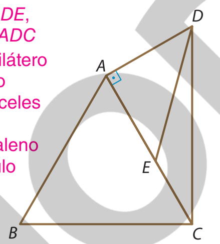
a) isósceles; medida da base: 5 cm; lados congruentes: 4 cm;
b) equilátero; medida dos lados: 3 cm;
c) escaleno; medida dos lados: 6 cm, 4 cm e 3,5 cm.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

12 Considere a figura a seguir.

12. b) $\triangle ABC$, $\triangle ADE$, $\triangle EDC$ e $\triangle ADC$

12. c) $\triangle ABC$: equilátero e acutângulo; $\triangle ADE$: isósceles e retângulo; $\triangle CDE$: escaleno e obtusângulo



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Quantos triângulos existem na figura?
b) Nomeie cada um deles. **12. a)** 4 triângulos.
c) Utilizando uma régua e um transferidor, classifique os triângulos *ABC*, *ADE* e *CDE* quanto às medidas dos lados e quanto às medidas dos ângulos.

13. 90°. Triângulo retângulo e escaleno.

13 Desenhe um triângulo *ABC*, em que *AB* = 5 cm, *AC* = 3 cm e *BC* = 4 cm. Com um transferidor, meça o ângulo $A\hat{C}B$. Classifique esse triângulo quanto às medidas dos lados e dos ângulos.

14 Construa um triângulo retângulo e isósceles. Quanto medem seus ângulos agudos? **14.** 45°

15 É possível a construção de um triângulo retângulo equilátero? Justifique sua resposta. **15.** Não, porque cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60°.

16 É possível a construção de um triângulo que tenha dois ângulos externos retos? E a de um triângulo que tenha dois ângulos externos obtusos? **16.** Não. Sim.

17 Verifique se é possível construir, com régua e compasso, triângulos cujas medidas dos lados são:

a) a = 8 cm, b = 6 cm e c = 4 cm; **17. a)** Sim.
b) a = 8 cm, b = 5 cm e c = 4 cm; **17. b)** Sim.
c) a = 8 cm, b = 4 cm e c = 4 cm; **17. c)** Não.
d) a = 8 cm, b = 3 cm e c = 4 cm; **17. d)** Não.
e) a = 7 cm, b = 3 cm e c = 4 cm; **17. e)** Não.
f) a = 6 cm, b = 3 cm e c = 4 cm. **17. f)** Sim.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

18 Em quais itens do exercício **17** não foi possível construir o triângulo? Por que isso ocorreu?

19 ***Hora de criar*** – Troque com um colega um problema sobre triângulos criado por vocês. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **19.** Resposta pessoal.

18. Nos itens **c**, **d** e **e**. Isso ocorreu porque as somas das medidas dos segmentos menores são iguais ou menores que a medida do segmento maior, ou: **c)** 8 cm = 4 cm + 4 cm; **d)** 8 cm > 3 cm + 4 cm; **e)** 7 cm = 3 cm + 4 cm

Para os **exercícios 15** e **16**, peça aos estudantes que façam o "enunciado gráfico", isto é, um esboço da figura que traduza o enunciado escrito e que tenha os dados do problema e uma tentativa de resolução. Facilite a percepção de que o enunciado traduzido graficamente tende a tornar a resolução mais eficiente.

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

1 Construa uma figura conforme as indicações a seguir.

- Marque um ponto A.
- Desenhe o segmento $\overline{AB}$ com 3 cm.
- Indo de A para B, faça um giro de 120° em B para a esquerda. Trace $\overline{BC}$ também com medida 3 cm.
- Indo de B para C, faça outro giro de 120° em C para a esquerda e trace $\overline{AC}$.

a) Qual é a medida de $\overline{AC}$? **1. a)** 3 cm

b) Qual é a medida do ângulo $C\hat{A}B$? **1. b)** 60°

c) Que figura foi desenhada? **1. c)** Um triângulo equilátero.

2 Renato quer construir um triângulo da seguinte maneira:

- um dos lados deve medir 30 cm;
- outro lado deve medir 20 cm;
- o terceiro lado deve ter como medida, em centímetro, um múltiplo de 15.

a) Dessa maneira, quantos triângulos diferentes Renato poderá construir? **2. a)** 3 triângulos.

b) Quais serão as medidas dos lados dos triângulos?

2. b) 30 cm, 20 cm, 15 cm; 30 cm, 20 cm, 30 cm; 30 cm, 20 cm, 45 cm


JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

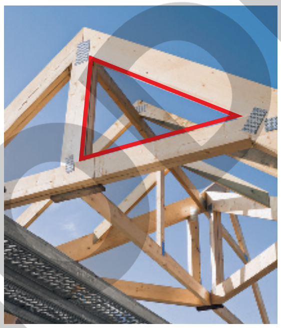
PARA SABER MAIS

Uma propriedade importante dos triângulos

Em toda estrutura que precisa ser rígida, pode verificar: existe um triângulo!

Essa propriedade do triângulo (rigidez) é aproveitada na construção de muitas estruturas, entre elas portões e armações de telhados, para conservá-las sem deformações.


SIMON MARGETSON TRAVEL/ALAMY/FOTOARENA


IGOR SOKOLOV (BREEZE)/SHUTTERSTOCK

Agora é com você!

As estruturas das figuras a seguir, feitas com canudinhos de papel presos por percevejos, representam polígonos diversos: triângulo (A), quadriláteros (B e C), pentágonos (D e E) e hexágonos (F e G). Com a ajuda de um adulto, você pode construí-las para descobrir uma das propriedades dos triângulos: ao tentar movimentar, com muito cuidado com o percevejo, um dos vértices de cada estrutura, você percebe que a única que permanece rígida é a que tem formato triangular.

Comente com os estudantes que estas características são consideradas por *designers* no desenvolvimento de estruturas que devem ser rígidas ou não, contribuindo para o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **Trabalho** e da **competência geral 6**.

Orient os estudantes nas construções propostas em **Agora é com você!**. Caso não disponha de percevejo, podem ser utilizados canudos e barbante.

Pense mais um pouco..

Nesta seção, o estudante é instado a elaborar um enunciado gráfico, seguindo cada um dos comandos da **atividade 1**.

Na **atividade 2**, se houver dúvida, oriente-os a aplicar a condição de existência de um triângulo.

As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Para saber mais

Habilidade da BNCC: **EF07MA25**.

Há situações em que a rigidez do triângulo é necessária (estruturas de maneira geral) e outras nas quais ela não é desejada. No uso de um pantógrafo ou de um macaco de automóvel, por exemplo, a não rigidez é o que garante a sua eficiência.

Elabore com os estudantes uma lista de objetos com a rigidez do triângulo e outra lista de objetos sem essa rigidez.

Proponha a eles que tragam fotos de estruturas (telhados, portões etc.) nas quais o triângulo aparece para garantir a rigidez.

Apresente a eles fotografias de dois tipos de mão-francesa iguais às das figuras 1 e 2. Pergunte a eles qual dos tipos lhes parece ser mais resistente. Espera-se que concluam que a do tipo da figura 1 é a mais resistente.


GEMA ALONSO BORJA/SHUTTERSTOCK

Figura 1


YUDHISTIRA99/SHUTTERSTOCK

Figura 2

4. Somas das medidas dos ângulos de um polígono

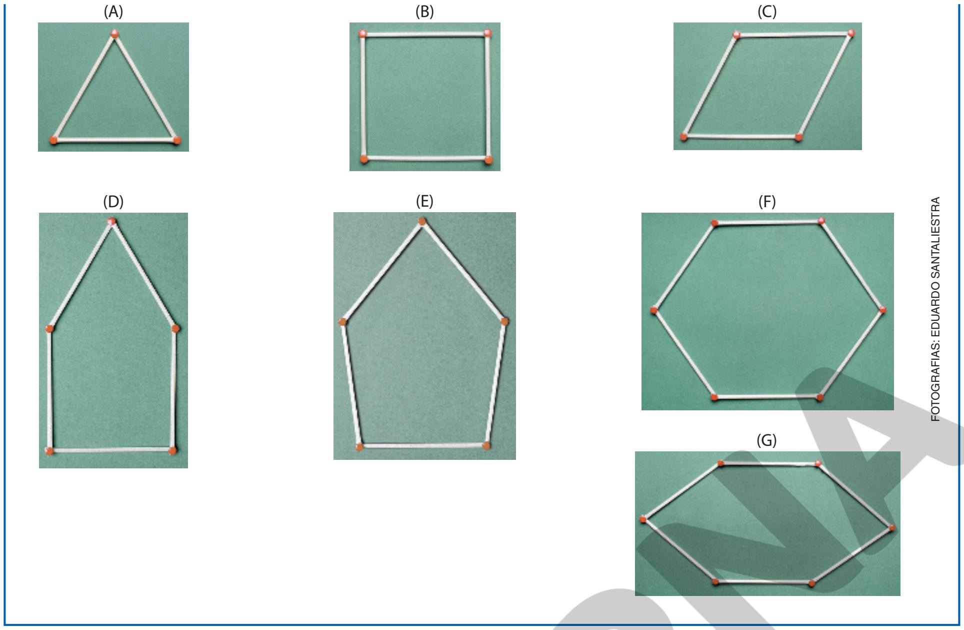
Habilidade da BNCC: **EF07MA27**.

Neste tópico, ao calcular a soma das medidas dos ângulos internos de polígonos, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, trabalhamos o desenvolvimento da habilidade (EF07MA27).

A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo já foi estudada de maneira informal. Aqui, ela é retomada com o emprego da congruência de dois ângulos alternos internos formados por duas retas paralelas.

Além de ser útil na resolução de vários problemas, ela atua como base na demonstração do cálculo da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados.

Essa trajetória, a de tomar contato informalmente com as ideias, quase sempre em casos particulares, para depois elaborar e testar hipóteses que se tornam teses gerais sintetizadas em enunciados de teoremas ou de fórmulas, é comum no desenvolvimento das ciências e na consolidação do saber. Assim, tijolo por tijolo, ideia por ideia, o conhecimento é construído e serve de base a futuros conhecimentos.

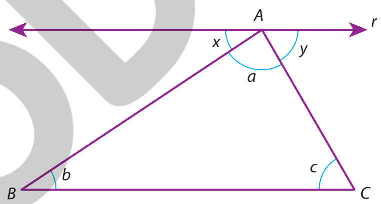


FOTOGRAFIAS: EDUARDO SANTALIESTRA

4 Somas das medidas dos ângulos de um polígono

Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Considere um triângulo *ABC* qualquer e uma reta *r* paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ que passa por *A*. Indicamos por *x* e *y* as medidas dos ângulos formados pela reta *r* com os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Ângulos alternos internos formados por paralelas são congruentes; logo, $x = b$ e $y = c$.

A soma das medidas dos três ângulos de vértice *A* forma um ângulo raso com lados em *r*; então, $x + a + y = 180°$.

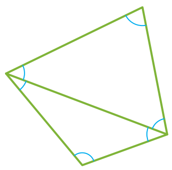
Substituindo *x* por *b* e *y* por *c*, obtemos: $b + a + c = 180°$

Portanto:

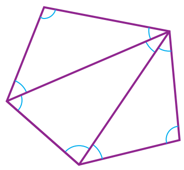
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180°.

Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados

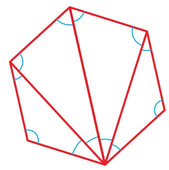
Considere os polígonos a seguir. Após traçar todas as diagonais por um vértice, obtivemos alguns triângulos que auxiliam no cálculo das somas S_i das medidas dos ângulos internos.



4 lados: 2 triângulos
$S_i = 2 \cdot 180° = 360°$

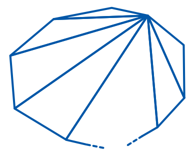


5 lados: 3 triângulos
$S_i = 3 \cdot 180° = 540°$



6 lados: 4 triângulos
$S_i = 4 \cdot 180° = 720°$

Agora, vamos considerar um polígono de *n* lados. Traçando todas as diagonais a partir de um dos vértices desse polígono, obtemos $(n - 2)$ triângulos.



Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, a soma S_i das medidas dos ângulos internos de $(n - 2)$ triângulos é:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

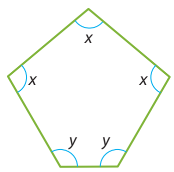
A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados é igual a: $(n - 2) \cdot 180°$.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Calcule a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono.
$n = 6$ e $S_i = (n - 2) \cdot 180°$
Substituindo *n* por 6, obtemos:
$S_i = (6 - 2) \cdot 180°$
$S_i = 4 \cdot 180° = 720°$
Logo, a soma das medidas dos ângulos internos de um hexágono é 720°.

b) Qual é o polígono cuja soma das medidas dos ângulos internos é 1 080°?
$S_i = (n - 2) \cdot 180°$ e $S_i = 1\,080°$
$(n - 2) \cdot 180° = 1\,080°$
$180° \cdot n - 360° = 1\,080°$
$180° \cdot n = 1\,080° + 360°$
$180° \cdot n = 1\,440°$
$n = 8$
Portanto, o polígono é um octógono.

c) Calcule as medidas *x* e *y* indicadas na figura, sabendo que $y - x = 20°$.



Na figura: $n = 5$ e $S_i = 3x + 2y$
Como $S_i = (n - 2) \cdot 180°$, temos:
$3x + 2y = (5 - 2) \cdot 180°$
$3x + 2y = 540°$
Ao resolver o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 540° \\ y - x = 20° \end{cases}$, obtemos $x = 100°$ e $y = 120°$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados

A mesma decomposição de um polígono em triângulos por meio do traçado das diagonais que partem de um único vértice, usada para o cálculo do número de diagonais de um polígono de *n* lados, serve também para o cálculo da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados. A quantidade desses triângulos já é objeto de cálculos não genéricos desde o **exercício 10**.

Neste momento, o estudante já amadureceu essa ideia e pode compreender a generalização desse cálculo.

Os exemplos desta página trazem diversidade de aplicação da fórmula, ora dando o número de lados e pedindo a soma das medidas dos ângulos internos, ora invertendo essas condições, ora fornecendo relações entre esses dados.

Solicite aos estudantes que recortem em papel várias regiões poligonais; em cada uma delas, façam a decomposição por meio de cortes nas diagonais que partem de um único vértice. Eles deverão construir uma tabela e anotar em cada coluna: o nome do polígono, o número de lados, o número de triângulos obtidos, a multiplicação do número de triângulos obtidos com 180° e a soma das medidas dos ângulos internos do polígono.

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de *n* lados

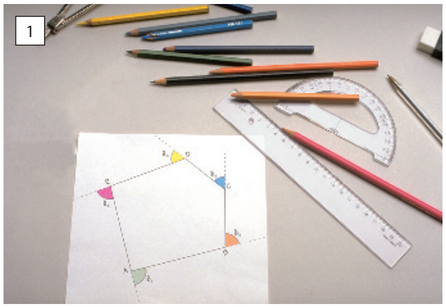
A abordagem do conceito se dá inicialmente de maneira empírica, com desenho em papel, recorte e manipulação. Essa abordagem, ao alcance da compreensão de qualquer estudante, traz segurança em sua conclusão: a soma em questão é igual a 360°.

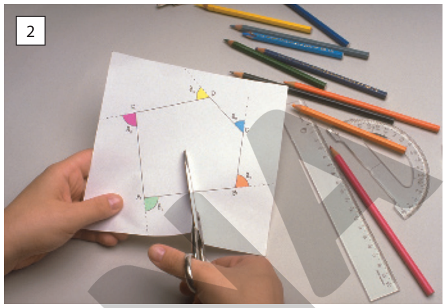
Antes de generalizar, proponha aos estudantes que construam outros polígonos particulares (entre seis e doze lados) e repitam o procedimento realizado nesta página para o pentágono. Eles devem validar a conclusão de que a soma das medidas dos ângulos externos desses polígonos é igual a 360°.

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de *n* lados

A atividade a seguir nos permitirá perceber um resultado importante.

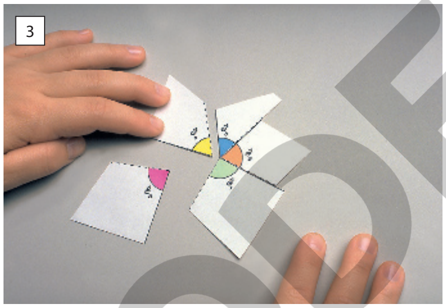
Desenhamos o polígono *ABCDE* e seus ângulos externos $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$, $\hat{e}_4$, e $\hat{e}_5$ em uma folha de papel (fotografia 1). Com uma tesoura, recortamos a figura para destacar cada um dos ângulos externos, como sugere a fotografia 2.

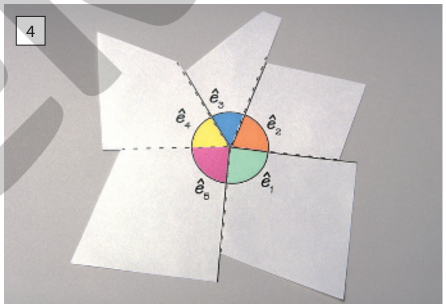




FOTOGRAFIAS: EDUARDO SANTALIESTRA

Reunimos os cinco ângulos externos em torno de um dos vértices, de modo que se tornem adjacentes dois a dois (fotografia 3). Cada dois desses ângulos têm um lado comum, como mostra a fotografia 4; desse modo, podemos estimar que a soma das medidas desses ângulos é igual a 360°.





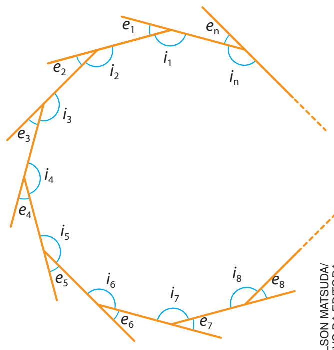
Para comprovar nossa estimativa, considere um polígono de *n* lados. Nele, vemos que em cada vértice a soma das medidas do ângulo interno com as do ângulo externo é igual a 180°.

Como o polígono de *n* lados tem *n* vértices, então a soma das medidas de todos os ângulos externos (S_e) com as de todos os ângulos internos (S_i) é igual a $n \cdot 180°$:

$$\underbrace{(e_1 + i_1)}_{180°} + \underbrace{(e_2 + i_2)}_{180°} + \underbrace{(e_3 + i_3)}_{180°} + \underbrace{(e_4 + i_4)}_{180°} + ... + \underbrace{(e_n + i_n)}_{180°} = n \cdot 180°$$

$$(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + ... + e_n) + (i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + ... + i_n) = n \cdot 180°$$

$$S_e + S_i = n \cdot 180°$$



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Substituindo S_i por $(n - 2) \cdot 180°$, obtemos:

$$S_e + (n - 2) \cdot 180° = n \cdot 180°$$

$$S_e + n \cdot 180° - 2 \cdot 180° = n \cdot 180°$$

$$S_e = \cancel{n \cdot 180°} - \cancel{n \cdot 180°} + 360°$$

$$S_e = 360°$$

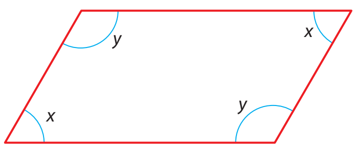
Portanto:

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer é 360°.

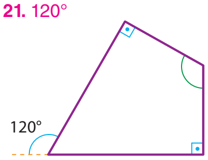
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

20 Determine a medida y do ângulo sabendo que, no quadrilátero, y = 2x. **20.** 120°



21 Determine a medida do ângulo destacado em verde. **21.** 120°

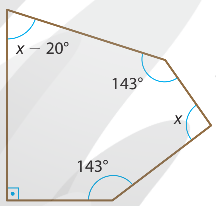


22 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono é 1 260°.

a) Qual é o nome desse polígono? **22. a)** Eneágono.

b) Quantas diagonais ele tem? **22. b)** 27 diagonais.

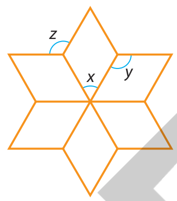
23 Calcule a medida x do ângulo na figura. **23.** 92°



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

24 Descubra mentalmente a diferença entre a soma das medidas dos ângulos internos de um decágono e a de um octógono. **24.** 360°

25 A figura é formada por seis paralelogramos congruentes. Sabendo que a medida y é o dobro da medida x, qual é a medida z? **25.** 120°



26 Reúna-se com um colega e façam o que se pede. Considerem a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de *n* lados como $S_i(n)$ e a soma das medidas dos ângulos externos como $S_e(n)$ e respondam.

a) $S_i(14)$ é o dobro de $S_i(7)$? **26. a)** Não.

b) $S_e(14)$ é o dobro de $S_e(7)$? **26. b)** Não.

c) $[S_i(14) + S_e(14)]$ é o dobro de $[S_i(7) + S_e(7)]$? **26. c)** Sim.

d) Existe algum valor para *n* de modo que $S_i(2n)$ seja o dobro de $S_i(n)$? **26. d)** Não.

e) Existe algum valor para *n* de modo que $S_e(2n)$ seja o dobro de $S_e(n)$? **26. e)** Não.

f) Existe algum valor para *n* de modo que $[S_e(2n) + S_i(2n)]$ seja o dobro de $[S_e(n) + S_i(n)]$?

26. f) Existem infinitos valores: qualquer número natural maior que 2.

27 *Hora de criar* – Escolha um polígono e elabore um problema sobre soma das medidas de ângulos internos e/ou externos desse polígono. Troque com um colega e depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **27.** Resposta pessoal.

233

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de *n* lados

Nesta página, passamos do particular para o geral, aplicando o fato de que ângulo externo e ângulo interno de um polígono são suplementares. Assim, de maneira irrefutável, concluímos que a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de *n* lados independe de *n*, é constante e igual a 360°.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 20** a **25** e **27** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

No **exercício 26**, sem apresentar a estrutura formal de um teorema, propomos uma "tese": "a soma dada por $[S_e(2n) + S_i(2n)]$ é igual ao dobro da soma dada por $[S_e(n) + S_i(n)]$", em que $S_e(n)$ representa a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono de *n* lados e $S_i(n)$ representa a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. Para o grupo de estudantes, fica estabelecido um caminho procedimental por meio de uma sequência de itens (inicialmente com casos particulares e depois generalizando) que os induzem a concluir essa "tese".

A seguir, apresentamos a resolução dos últimos três itens, que são generalizações dos anteriores.

d) Devemos verificar se existe algum valor de *n* que satisfaça a condição:

$S_i(2n) = 2 \cdot S_i(n)$

$(2n - 2) \cdot 180° =$

$= 2 \cdot (n - 2) \cdot 180°$

$2n \cdot 180° - 2 \cdot 180° =$

$= 2 \cdot n \cdot 180° - 2 \cdot 2 \cdot 180°$

$-360° = -720°$

Chegamos a uma sentença falsa; portanto, não existe valor de *n* que satisfaça a condição acima.

e) Como a soma das medidas dos ângulos externos de qualquer polígono é igual a 360°, não existe valor de *n* que satisfaça a condição $S_e(2n) = 2 \cdot S_e(n)$.

f) Para terminar, devemos verificar se existe algum valor de *n* que satisfaça a condição: $[S_e(2n) + S_i(2n)] = 2 \cdot [S_e(n) + S_i(n)]$

1º membro:

$[(2n - 2) \cdot 180° + 360°] =$

$= [2n \cdot 180° - 2 \cdot 180° + 360°] = 2n \cdot 180° = n \cdot 360°$

2º membro:

$2 \cdot [S_i(n) + S_e(n)] = 2 \cdot [(n - 2) \cdot 180° + 360°] =$

$= 2 \cdot [n \cdot 180° - 2 \cdot 180° + 360°] =$

$= 2 \cdot n \cdot 180° = n \cdot 360°$

Portanto, temos: $[S_i(2n) + S_e(2n)]$ é o dobro de $[S_i(n) + S_e(n)]$

5. Polígonos regulares

Habilidade da BNCC: **EF07MA27**.

Neste tópico, ao calcular a soma das medidas dos ângulos internos de polígonos, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, trabalhamos o desenvolvimento da habilidade (EF07MA27)

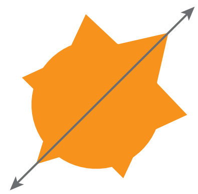
Paralelamente à definição clássica de polígono regular, na qual um **polígono** é **regular** quando todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos internos são congruentes entre si, os estudantes têm acesso a outra definição com base no número de eixos de simetria.

As conclusões válidas para os polígonos de n lados permanecem válidas para os polígonos regulares de n lados. Portanto, podemos calcular as medidas dos ângulos internos e dos ângulos externos desses polígonos.

Solicite aos estudantes que decalquem em uma folha transparente e recortem o contorno dos polígonos regulares desta página. Depois eles devem, por dobradura, obter todos os eixos de simetria desses polígonos.

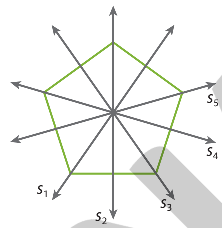
5 Polígonos regulares

Já vimos que uma figura apresenta simetria em relação a um eixo quando ela pode ser dividida, por uma linha reta, em duas partes com mesmo formato e tamanho, como se fossem espelhadas.



A essa linha reta chamamos de eixo de simetria. Algumas figuras podem apresentar mais de um eixo de simetria.

Vimos também que um polígono é regular se tiver tantos eixos de simetria quantos forem os seus lados.

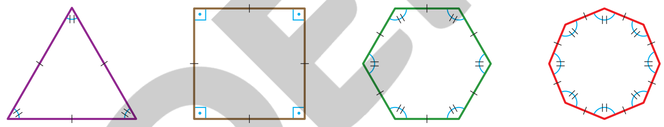


O pentágono regular tem 5 eixos de simetria.

Entretanto, é possível caracterizar um polígono regular de outro modo.

Um **polígono** é **regular** quando todos os seus lados são congruentes entre si e todos os seus ângulos internos são congruentes entre si.

Estas figuras são polígonos regulares.

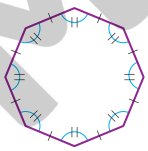


Representando por a_i a medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados e por a_e a medida do ângulo externo, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \text{ e } a_e = \frac{360°}{n}$$

Acompanhe os exemplos.

a) Vamos calcular a medida do ângulo interno e a medida do ângulo externo do octógono regular.



$S_i = (n - 2) \cdot 180°$
$S_i = (8 - 2) \cdot 180°$
$S_i = 6 \cdot 180°$
$S_i = 1\,080°$

• $a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{1\,080°}{8} = 135°$

• $a_e = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{8} = 45°$

Note que $a_i + a_e = 135° + 45° = 180°$.

Logo, o ângulo interno mede 135°, e o ângulo externo, 45°.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

b) Quantos lados tem o polígono regular cujo ângulo interno mede 150°?

$a_i + a_e = 180°$
$150° + a_e = 180°$
$a_e = 180° - 150°$
$a_e = 30°$

Como $a_e = \dfrac{360°}{n}$ e $a_e = 30°$, obtemos:

$30° = \dfrac{360°}{n}$

$30° \cdot n = 360°$

$n = 12$

Portanto, esse polígono tem 12 lados.
Note que o problema poderia ter sido resolvido fazendo $\dfrac{S_i}{n} = 150°$:

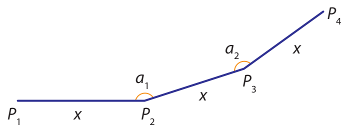
$\dfrac{(n - 2) \cdot 180°}{n} = 150°$, ou seja, $n = 12$.

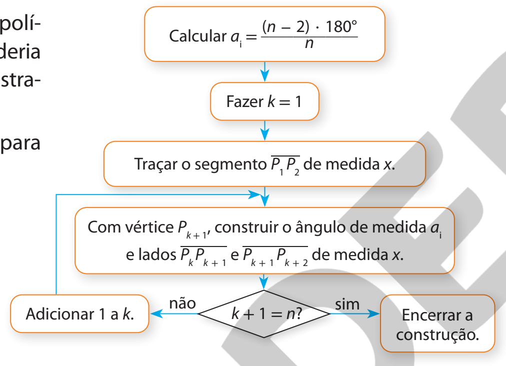
PARA SABER MAIS

Fluxograma da construção de polígono regular com *n* lados de medida *x*

Se um computador fosse construir um polígono regular de *n* lados de medida *x*, ele poderia seguir os passos descritos no fluxograma ilustrado. Os valores de *n* e *x* são conhecidos.

Observe a seguir o início da construção para $k = 1$, 2 e 3.





Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

No caderno, siga os passos do fluxograma e construa com régua e transferidor um pentágono regular ($n = 5$) com lados medindo 6 cm, ou seja, $x = 6$. *Para saber mais*: Construção de figura.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

28 Considere um decágono regular. Calcule as medidas a_i e a_e, nessa ordem, lembrando que elas são suplementares. Depois, calcule-as na ordem inversa. Qual das maneiras de resolução você acha mais simples?
28. 36°; 144°; Resposta pessoal.

29 Sabendo que um polígono é regular e tem 15 lados, responda às questões.

29. a) Pentadecágono.
a) Qual é o nome desse polígono?
b) Qual é a soma das medidas de seus ângulos internos? **29. b)** 2 340°
c) Qual é a soma das medidas de seus ângulos externos? **29. c)** 360°
d) Quanto mede cada um de seus ângulos internos? **29. d)** 156°
e) Quanto mede cada um de seus ângulos externos? **29. e)** 24°

Para saber mais

Habilidade da BNCC: **EF07MA28**.

Também neste item, os exemplos de aplicação das conclusões genéricas obtidas têm diversidade entre o que é dado e o que é pedido.

O fluxograma fornece o algoritmo para a construção de um polígono regular de *n* lados com régua e transferidor.

Verifique se todos os estudantes entenderam a lógica do fluxograma por meio de algumas perguntas, tais como:

- Quais são os valores conhecidos ao empregar o fluxograma? (*n* e *x*)
- Por que o fluxograma pede para adicionar 1 a *k*? (Porque é preciso ter uma rotina para construir o próximo lado do polígono.)
- O que acontece com a construção geométrica quando $k + 1 = n$? (A linha poligonal se fecha e o polígono está construído. Por isso, deve-se encerrar a construção.)

A resolução da atividade da seção **Para saber mais** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Exercícios propostos

No **exercício 28**, os estudantes são levados a resolver um problema de duas maneiras diferentes e são cobrados a avaliar qual resolução é a mais simples. Um dos objetivos da questão é mostrar que em geral os problemas podem ser resolvidos de mais de uma maneira.

A resolução dos **exercícios 28** e **29** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 30** a **35** e **37** a **41** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

O **exercício 35** traz uma composição interessante de três polígonos regulares – o triângulo equilátero, o quadrado e o hexágono regular – que cobre o plano em torno de um vértice. Esses são os únicos polígonos que, em separado, também cobrem o plano em torno de um vértice.

Peça aos estudantes que construam uma composição de triângulos equiláteros justapostos e verifiquem que não haverá sobras ou remontagem deles. Analogamente, devem fazer uma composição com quadrados e também com hexágonos regulares.

No **exercício 36**, um robô é programado para dar 5 passos e girar 30° para a direita e repetir esse processo até atingir o ponto *O*. Promova uma discussão sobre o que garante que o robô atinja novamente o ponto *O*. Eles devem perceber que 30° é um divisor de 360°; logo, haverá um número inteiro de giros de 30° para dar uma volta completa, ou seja, para o robô girar 360°.

Para a resolução, sugira que esbocem um polígono regular com um ângulo externo medindo 30°. Eles descobrirão que o polígono tem 12 lados e, nesse caso, basta multiplicar 12 por 5 passos e eles terão o total de 60 passos.

Outra resolução é a algébrica:

$a_e = 360° : n$

$30° = 360° : n$

$n = 360° : 30°$

$n = 12$

O polígono tem 12 lados; como em cada lado o robô dá 5 passos, ao todo o robô dará 60 passos.

No **exercício 37** também pode ser pertinente promover uma discussão com os estudantes e perguntar qual é o fato que garante que a faixa vermelha dará a volta na toalha e formará um polígono. Novamente, eles devem perceber que 40° é um divisor de 360°; logo, haverá um número inteiro de giros de 40° para dar uma volta completa, ou seja, para a fita completar um giro de 360°.

30 O icoságono é um polígono de 20 lados. Qual é a medida do ângulo interno de um icoságono regular? **30.** 162°

31 Determine a diferença entre a medida de um ângulo interno e a de um ângulo externo de um octógono regular. **31.** 90°

32 Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 3 960°, responda às questões. **32. a)** 24 lados.

a) Quantos lados tem esse polígono?
b) Quanto mede cada um de seus ângulos internos? **32. b)** 165°
c) Quanto mede cada um de seus ângulos externos? **32. c)** 15°
d) Qual é a soma das medidas dos seus ângulos externos? **32. d)** 360°

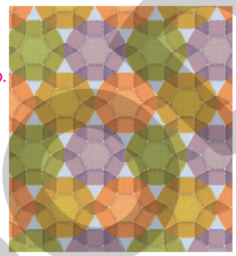
33 Sabendo que um ângulo externo de um polígono regular mede 12°, responda. **33. a)** 30 lados.

a) Quantos lados tem esse polígono?
b) Quanto mede cada um de seus ângulos internos? **33. b)** 168°

34 Reúna-se com um colega e respondam: se o número de lados de um polígono é par, pode-se dizer que o número de diagonais desse polígono também é par? **34.** Não; por exemplo, o hexágono tem 6 lados e 9 diagonais.

35 Alessandra fez um painel com uma composição de figuras que lembram polígonos regulares com suas regiões internas coloridas.

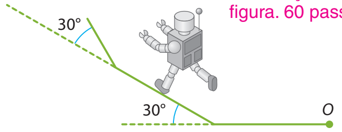
35. a) Quadrados, triângulos equiláteros, hexágono e dodecágono.



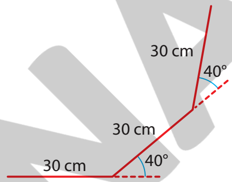
ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

a) No painel há quais polígonos regulares?
b) Podemos identificar nesse painel uma figura composta de polígonos regulares que lembra um outro polígono regular. Qual é o nome desse polígono?
c) Calcule a medida de cada ângulo interno do polígono que você identificou no item **b**. **35. c)** 150°

36 Um robô é programado para partir do ponto O, dar 5 passos, girar 30° para a direita e repetir esse processo até atingir o ponto O novamente e parar. Construa o polígono regular do trajeto do robô e calcule quantos passos ele dá para percorrer esse caminho. **36.** Construção de figura. 60 passos.



37 Marina confeccionou uma toalha de mesa no formato de um polígono regular. Na borda da toalha, ela pregou uma faixa vermelha. Observe a seguir o esquema que ela utilizou para fazer essa toalha.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

37. a) 2,7 m

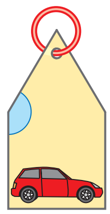
a) Quantos metros de faixa vermelha Marina utilizou para fazer esse trabalho?
b) A faixa vermelha formou um polígono. Determine a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. **37. b)** 1 260°

38 Um retângulo pode ser regular? Justifique. **38.** Sim; o quadrado é um retângulo regular.

39 (UPM-SP) O polígono regular convexo cujo ângulo interno é $\frac{7}{2}$ do seu ângulo externo é o: **39.** Alternativa **d.**

a) icoságono.
b) dodecágono.
c) decágono.
d) eneágono.
e) octógono.

40 Para confeccionar os crachás dos expositores de uma feira de automóveis, foi utilizada a composição de dois polígonos regulares. Veja o modelo.



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

O ângulo destacado em azul no crachá mede: **40.** Alternativa **d.**

a) 120°.
b) 135°.
c) 165°.
d) 150°.

41 *Hora de criar* – Escolha um polígono regular e elabore um problema sobre as medidas de seus ângulos internos e/ou externos. Troque-o com o de um colega. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **41.** Resposta pessoal.

35. b) O polígono formado é um dodecágono regular, pois todos os seus lados têm a mesma medida e todos os seus ângulos internos também têm a mesma medida.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

Reúna-se com alguns colegas e respondam às questões.

1 Em um polígono regular qualquer, um ângulo externo e o ângulo interno de mesmo vértice são ângulos complementares ou suplementares? **1.** Suplementares.

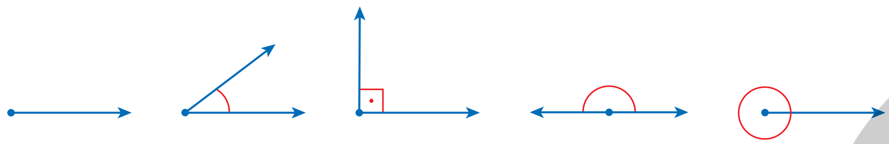
2 Quantos divisores naturais tem o número 360? Quais?
2. 24 divisores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180 e 360

3 Quantos polígonos regulares existem de modo que a medida (em grau) do ângulo externo seja um número natural? Quais são essas medidas?
3. 22 polígonos regulares. Todos os divisores obtidos na resposta da questão **2**, exceto 180° e 360°.

PARA SABER MAIS

Combinatória nos polígonos

No início do estudo de ângulo, vimos a ideia de giro e que o ângulo de uma volta mede 360°.



Ângulo nulo **Ângulo agudo** **Ângulo reto** **Ângulo de meia-volta** **Ângulo de uma volta**

Vamos supor que a figura 1 seja parte de um polígono. Com algumas figuras iguais a ela, vamos tentar cobrir um ângulo de uma volta (figura 2), sem sobra nem remonte, colocando-as uma ao lado de outra em torno de um mesmo ponto (vértice).

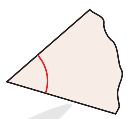


Figura 1

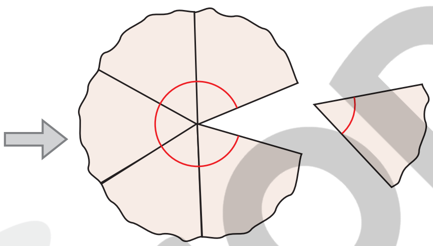


Figura 2

Juntando cinco dessas figuras, percebemos que há uma sobra e juntando seis figuras haverá um remonte. Concluímos então que, para não acontecer sobra ou remonte, a medida do ângulo destacado na figura da esquerda deve ser um divisor de 360°.

Observe o quadro com alguns polígonos e as medidas de seus ângulos internos.

Medidas de ângulos internos de polígonos regulares					
Polígono	**Triângulo**	**Quadrilátero**	**Pentágono**	**Hexágono**	**Heptágono**
S_i	180°	360°	540°	720°	900°
a_i	60°	90°	108°	120°	$\simeq$128° 34′

ILUSTRAÇÕES: RICARDO YORIO/ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...

Em grupo, os estudantes analisam de maneira mais ampla todos os possíveis polígonos regulares cuja medida do ângulo seja um divisor de 360°, ou seja, todas as possibilidades de medidas de giros constantes que constroem um percurso com formato de polígono regular.

Para saber mais

Esta seção propõe um problema clássico: a questão do recobrimento do plano por polígonos regulares. A resolução é apresentada por meio de pesquisa e da organização em tabela dos casos mais simples. A resposta consiste no triângulo equilátero, no quadrado e no hexágono regular.

Solicite que em duplas reflitam e analisem a seguinte questão: Há bolas de futebol cuja superfície planificada é formada por hexágonos regulares e por pentágonos regulares. Em torno de um vértice são juntados 2 hexágonos e 1 pentágono. A soma das medidas de 2 ângulos internos do hexágono regular e 1 ângulo interno do pentágono regular é 120° + 120° + 108° = 348°, ou seja, menor do que 360°. Como é possível não deixar sobra nessa superfície?

Espera-se que percebam que a superfície da bola depois de costurada e fechada não é plana.

A resolução da atividade proposta em **Agora é com você!** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Habilidade da BNCC: **EF07MA27**.

Neste tópico, ao calcular a soma das medidas dos ângulos internos de polígonos, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, trabalhamos o desenvolvimento da habilidade (EF07MA27).

Iniciamos aqui um conceito que terá continuidade nos anos que seguem.

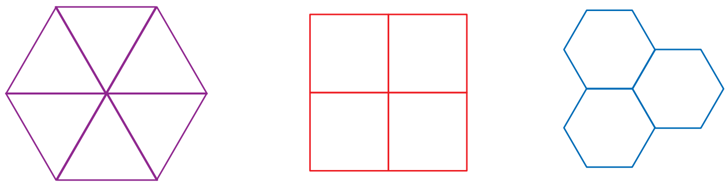
Além da indicação de como verificar a congruência (superposição) de dois polígonos, também fica estabelecido como identificar os elementos correspondentes desses polígonos.

Vale recordar a observação da página 225:

Indicamos os lados correspondentes em polígonos congruentes cortando esses lados com um mesmo número de tracinhos. Para indicar ângulos correspondentes, usamos um pequeno arco cortado por um mesmo número de tracinhos.

Para cobrir um ângulo de uma volta, ou seja, para cobrir o plano, com um único tipo de polígono regular, precisamos de 6 triângulos equiláteros ($6 \cdot 60° = 360°$) ou de 4 quadrados ($4 \cdot 90° = 360°$) ou de 3 hexágonos regulares ($3 \cdot 120° = 360°$).

Note que as medidas dos ângulos internos dos polígonos regulares de mais de 6 lados são maiores do que 120°, e que não são divisores de 360°.



ILUSTRAÇÕES: RICARDO YORIO/ ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com um colega e descubram dois tipos de polígonos, não necessariamente regulares, que, juntos, cobrem o plano. Depois, usando esses polígonos, desenhem um painel cobrindo um ângulo de uma volta. Resposta possível: dois octógonos regulares e um quadrado.

6 Congruência de polígonos

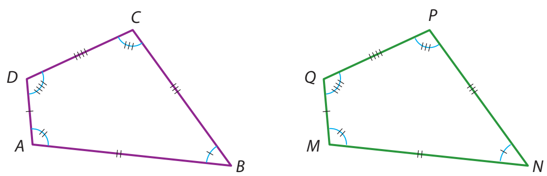
Considere estes dois polígonos.

Usando uma folha de papel translúcido, reproduzimos o polígono A. Deslocando e girando esse polígono de maneira conveniente, podemos colocá-lo sobre o polígono B. A esse procedimento chamamos de **superposição** (ou sobreposição).

Assim, por superposição, será possível verificar se todos os pontos desses dois polígonos coincidem. Caso isso aconteça, diremos que os polígonos A e B são **congruentes** e indicaremos por $A \cong B$.

Elementos correspondentes em polígonos congruentes

Considere os polígonos congruentes.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Em polígonos congruentes, os elementos que coincidem por superposição são chamados de **correspondentes**. Assim, por exemplo:

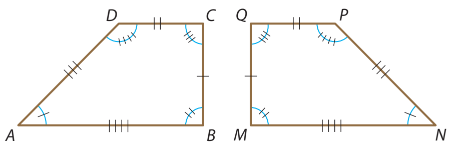
- o ângulo $\hat{A}$ é correspondente ao ângulo $\hat{M}$;
- o ângulo $\hat{B}$ é correspondente ao ângulo $\hat{N}$;
- o lado $\overline{AB}$ é correspondente ao lado $\overline{MN}$;
- o lado $\overline{BC}$ é correspondente ao lado $\overline{NP}$.

Dois polígonos são **congruentes** se os lados correspondentes e os ângulos correspondentes são congruentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

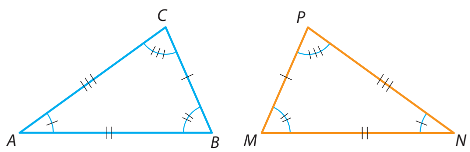
42 Observe os polígonos congruentes.



Escreva o elemento do polígono *MNPQ* correspondente ao:

a) vértice *A*; **42. a)** *N*
b) vértice *C*; **42. b)** *Q*
c) lado $\overline{AD}$; **42. c)** $\overline{NP}$
d) lado $\overline{BC}$; **42. d)** $\overline{MQ}$
e) ângulo $\hat{D}$; **42. e)** $\hat{P}$
f) lado $\overline{CD}$. **42. f)** $\overline{QP}$

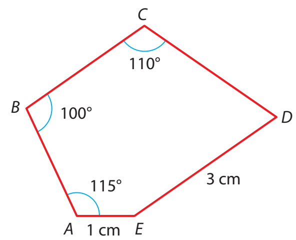
43 Os triângulos *ABC* e *MNP* a seguir são congruentes.

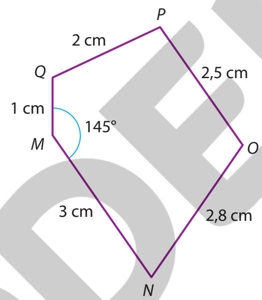


Escreva o elemento do triângulo *MNP* correspondente ao:

a) vértice *A*; **43. a)** *N*
b) vértice *B*; **43. b)** *M*
c) lado $\overline{AC}$; **43. c)** $\overline{NP}$
d) lado $\overline{BC}$. **43. d)** $\overline{MP}$

44 Os pentágonos a seguir são congruentes.





Determine: **44. a)** 2 cm

a) a medida do lado $\overline{AB}$; **44. b)** 11,3 cm
b) a medida do perímetro do pentágono *ABCDE*;
c) a medida do ângulo $O\hat{P}Q$. **44. c)** 100°

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Um marceneiro construiu um portão de madeira fixando 10 ripas lado a lado de modo a obter uma estrutura de formato retangular. Para que o portão fique com uma estrutura rígida, ele vai colocar uma outra ripa que será fixada em cada uma das 10 ripas que formam a estrutura. Como essa nova ripa deve ser fixada? Justifique sua resposta. **1.** Deve ser fixada na diagonal da estrutura retangular, de modo a obter estruturas triangulares.

2 Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 2 880°, responda:

2. a) 18 lados.

a) Quantos lados tem esse polígono?
b) Se ele for regular, quanto mede cada um de seus ângulos externos? **2. b)** 20°
c) Quantas são as suas diagonais?
2. c) 135 diagonais.

239

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

A abordagem da congruência de polígonos neste ano está apresentada em um nível de complexidade inicial. Portanto, os **exercícios 42** e **43** exigem apenas a identificação dos elementos congruentes.

O **exercício 44** requer um pouco mais de atenção, pois vai além da correspondência entre elementos congruentes. Explore-o bastante em sala de aula.

A resolução do **exercício 44** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Exercícios complementares

Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de retomar os principais conceitos estudados no capítulo e também os conhecimentos construídos. Verifique se ainda apresentam alguma dificuldade em algum deles e, se esse for o caso, sugira que refaçam atividades referentes a tais assuntos.

Para responder ao **exercício 1** os estudantes devem levar em consideração o estudo sobre a rigidez dos triângulos e o fato de que um retângulo é decomposto em triângulos ao traçarmos uma de suas diagonais.

No **exercício 2**, para descobrir quantos lados tem o polígono, conforme solicitado no **item a**, os estudantes devem fazer:

Para $S_i = 2\,880°$, tem-se:

$(n - 2) \cdot 180 = 2\,880 \Rightarrow$
$\Rightarrow 180 \cdot n - 360 = 2\,880 \Rightarrow$
$\Rightarrow 180n - 360 + 360 =$
$= 2\,880 + 360 \Rightarrow$
$\Rightarrow 180n = 3\,240 \Rightarrow n = \dfrac{3\,240}{180} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 18$

Portanto, o polígono tem 18 lados.

Para o **item b**, devem considerar a quantidade de lados e fazer:

Para $n = 18$, tem-se:

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360}{18} = 20°$$

Para determinar a quantidade de diagonais pedida no **item c**:

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360}{18} = 20°$$

Com $n = 18$, tem-se:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{18(18-3)}{2} =$$
$= 9 \cdot 15 = 135$

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 3** a **7** e **9**, **10**, **12** e **13** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Na resolução do **exercício 8**, considere que a menor diagonal de um polígono regular forma um triângulo isósceles com os dois lados consecutivos que têm vértices comuns a seus extremos. Esse triângulo tem dois ângulos de 30°, o que implica que o outro ângulo interno mede 120° (180° – 30° – 30°), ou seja, o ângulo externo do polígono procurado mede 60° (180° – 120°).

Como $a_e = 360° : n$, temos:

$60° = 360° : n$

$n = 360° : 60°$

$n = 6$

Portanto, a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono é $6 \cdot 120°$, ou seja, 720°.

No **exercício 11**, os estudantes devem organizar todos os dados do enunciado, traduzindo-os para a linguagem matemática.

Para responder ao **item a**, os estudantes devem perceber que, na sequência de figuras, temos 1, 3, 9, 27 triângulos escuros para as quatro primeiras, ou seja, 3^0, 3^1, 3^2 e 3^3. A próxima figura tem $3^4 = 81$ triângulos escuros.

No **item b**, basta que contem: 0, 1, 4, 13.

No **item c**, a_1 é verificado de imediato pois $a_1 = 0$. Os demais são: $a_2 = 1 + 3a_1 = 1$; $a_3 = 1 + 3a_2 = 4$; $a_4 = 1 + 3a_3 = 13$.

Para o **item d**, obter a_5.

$a_5 = 1 + 3a_4 = 1 + 3 \cdot 13 = 40$

Foram removidos, portanto, 40 triângulos.

Ao explorar uma sequência recursiva, essa atividade contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA14).

3 A medida de um ângulo externo de um polígono regular é 24°. Determine:

a) o número de lados desse polígono; **3. a)** 15 lados.

b) a medida de cada um de seus ângulos internos. **3. b)** 156°

4 A diferença entre a medida de um ângulo interno de um hexágono regular e a medida de um ângulo interno de um quadrado é igual à medida do ângulo externo de qual polígono regular? **4.** Dodecágono.

5 O número de diagonais de um polígono regular é o triplo do número de seus lados. Determine:

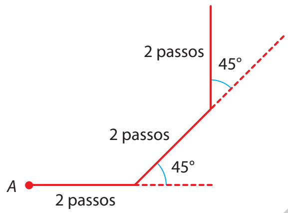
a) o número de lados desse polígono; **5. a)** 9 lados.

b) o número de suas diagonais; **5. b)** 27 diagonais.

c) a soma das medidas dos ângulos internos; **5. c)** 1 260°

d) a medida de seu ângulo externo. **5. d)** 40°

6 A figura a seguir representa o início da construção de um polígono que será obtido a partir das movimentações de um personagem de *videogame*.



Mateus, que está fazendo essa jogada, deu o seguinte comando para seu personagem:
Partindo de A, avance dois passos e gire 45° para a esquerda.
Supondo que todos os passos do personagem tenham a mesma medida, ao retornar ao ponto de partida (ponto A), a trajetória descrita pelo personagem será: **6.** Alternativa **c**.

a) uma circunferência.

b) um pentágono regular.

c) um octógono regular.

d) um polígono não regular.

7 Existe um polígono regular em que a medida do ângulo interno é igual à medida do ângulo externo. Que polígono é esse? **7.** Quadrado.

8 A menor diagonal de um polígono regular forma, com um dos lados, um ângulo de 30°. Dê a soma das medidas dos ângulos internos desse polígono. **8.** 720°

9 Quantas diagonais tem o polígono regular cujo ângulo interno mede 135°? **9.** 20 diagonais.

10 O número de diagonais de um polígono regular é igual ao sêxtuplo do número de lados. Qual é a medida de seu ângulo externo? **10.** 24°

11 Na abertura deste capítulo vimos uma sequência de triângulos conhecidos por triângulos de Sierpinski. Eles formam uma sequência cujas figuras são determinadas recursivamente: a partir da 1ª figura (um triângulo equilátero) as demais são obtidas sempre em relação à anterior. Observe as 5 primeiras figuras dessa sequência:

No primeiro triângulo determinam-se os pontos médios de cada lado e unem-se esses pontos por segmentos. Remove-se o triângulo do meio e obtém-se o segundo triângulo. Repete-se esse procedimento para obter a próxima figura, indefinidamente.

a) Quantos triângulos escuros tem a quinta figura? **11. a)** 81 triângulos.

b) Escreva a sequência dos números de triângulos removidos das quatro primeiras figuras. **11. b)** 0, 1, 4, 13

c) Verifique se as respostas do item **b** podem ser obtidas pelas expressões $a_1 = 0$; $a_n = 1 + 3 \cdot a_{n-1}$, onde n é a posição (2, 3 ou 4) da figura na sequência.

d) Aplique $n = 5$ na expressão do item **c** para obter o número de triângulos removidos na quinta figura. **11. d)** 40 triângulos.

11. c) O estudante deve obter 0, 1, 4, 13.

12 Sabendo que o ângulo interno de um polígono regular mede 135°, responda.

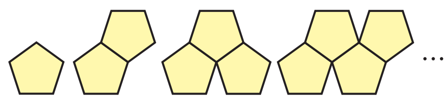
a) Quanto mede seu ângulo externo? **12. a)** 45°

b) Quantos lados tem esse polígono? **12. b)** 8 lados.

c) Se cada lado desse polígono mede 3,4 cm, quantos centímetros tem a medida do seu perímetro? **12. c)** 27,2 cm

d) Quantas são as diagonais traçadas por um de seus vértices? **12. d)** 5 diagonais.

13 (Obmep) Com pentágonos regulares medindo 1 cm de lado, formamos uma sequência de polígonos como na figura. A medida do perímetro do primeiro polígono é 5 cm, a medida do perímetro do segundo é 8 cm, e assim por diante. Quantos pentágonos são necessários para formar um polígono com perímetro medindo 1 736 cm? **13.** Alternativa **e**.



a) 570
b) 572
c) 574
d) 576
e) 578

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Se a medida do perímetro de um triângulo equilátero é igual a 12 cm, qual é a medida de cada um de seus lados e qual é a medida de cada um de seus ângulos internos? **1.** Alternativa **c**.

a) 3 cm e 45°
b) 4 cm e 45°
c) 4 cm e 60°
d) 6 cm e 60°

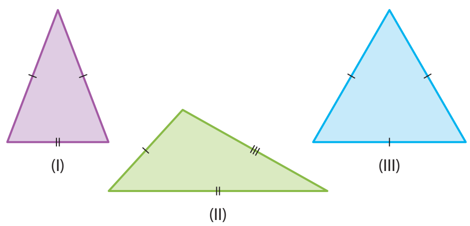
2 O decágono é um polígono regular de 10 lados. Qual é o número total de diagonais de um decágono? **2.** Alternativa **b**.

a) 7 diagonais
b) 35 diagonais
c) 50 diagonais
d) 70 diagonais

3 Mariana estava folheando seu livro de Matemática e encontrou um polígono conhecido como octodecágono, que tem 18 lados. Quantas diagonais podem ser traçadas a partir de um vértice desse polígono? **3.** Alternativa **d**.

a) 18 diagonais
b) 16 diagonais
c) 17 diagonais
d) 15 diagonais

4 Qual é a classificação, quanto à medida dos lados, dos triângulos a seguir? **4.** Alternativa **b**.



a) (I) equilátero, (II) escaleno e (III) isósceles
b) (I) isósceles, (II) escaleno e (III) equilátero
c) (I) escaleno, (II) isósceles e (III) equilátero
d) (I) escaleno, (II) equilátero e (III) isósceles

5 Se um triângulo tem um ângulo interno de medida maior que 90° e outros dois ângulos internos congruentes e de medidas menores que 90°, qual é a sua classificação quanto às medidas dos ângulos internos? **5.** Alternativa **c**.

a) retângulo
b) acutângulo
c) obtusângulo
d) isósceles

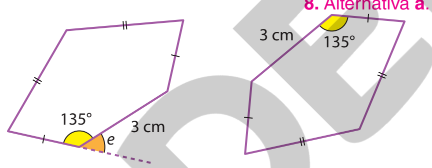
6 Como proposto em uma tarefa escolar, Lucas deve construir triângulos com o apoio de régua e compasso. Para isso, deve usar as seguintes medidas de comprimento de lados dos triângulos: 20 cm, 15 cm, 12 cm, 9 cm e 7 cm. Qual alternativa apresenta uma combinação de medidas de comprimento em que não será possível construir um triângulo? **6.** Alternativa **a**.

a) 20 cm, 12 cm e 7 cm
b) 20 cm, 15 cm e 9 cm
c) 15 cm, 12 cm e 7 cm
d) 12 cm, 9 cm e 7 cm

7 Sabendo que o tridecágono é um polígono de 13 lados, qual é a soma das medidas de seus ângulos internos? **7.** Alternativa **d**.

a) 1 440° b) 1 620° c) 1 800° d) 1 980°

8 Sabendo que os pentágonos abaixo são congruentes, qual é a medida do ângulo $\hat{e}$? **8.** Alternativa **a**.



a) $e = 45°$
b) $e = 90°$
c) $e = 135°$
d) $e = 180°$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir:

a) Desenhe um polígono com mais de 3 lados e identifique seus elementos. *Organizando*: **a)** Resposta pessoal.

b) Dado o número de lados, existe um modo de calcular quantidade de diagonais de um polígono com mais de 3 lados? Explique como é possível calcular e dê um exemplo.
b) Sim, pois o número de diagonais de um polígono com mais de 3 lados é dado por $d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

c) É possível construir um triângulo com quaisquer medidas de lado? Justifique sua resposta.
c) Não, pois a medida de qualquer lado deve ser menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

d) Em diferentes construções identificamos estruturas triangulares. Que propriedade triangular pode justificar este uso? **d)** A propriedade de rigidez de um triângulo permite que estruturas com esse formato não se deformem, mantendo uma rigidez.

e) Dado um polígono qualquer de n lados, é possível obter a soma das medidas de seus ângulos internos? Justifique sua resposta. **e)** Sim, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a: $(n - 2) \cdot 180°$.

f) Explique como é possível obter a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono com mais de 3 lados a partir da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

g) O que são polígonos congruentes? **g)** Dois polígonos são congruentes se os lados correspondentes e os ângulos correspondentes são congruentes.

f) Ao traçarmos as diagonais de um polígono, é sempre possível dividir sua região interna em vários triângulos. A partir disso, ou seja, da quantidade de triângulos admitidos dentro de um polígono qualquer, conseguimos calcular a soma das medidas de seus ângulos internos.

Verificando

Nesta seção apresentamos questões que abrangem todo o capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso eles tenham dúvidas em relação a alguma das atividades propostas, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

As resoluções dos **testes 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Organizando

a) Oriente os estudantes a nomear os vértices com letras latinas maiúsculas, para facilitar as indicações dos elementos.

b) Espera-se que os estudantes se lembrem da fórmula ou que saibam deduzi-la.

c) Caso ainda haja dúvida na condição de existência de um triângulo, solicite aos estudantes que usem um barbante de 40 cm. Eles devem fixar uma parte central de 25 cm do barbante e, depois, juntar as suas duas pontas.

d) Espera-se que os estudantes se lembrem da rigidez do triângulo.

e) Espera-se que os estudantes saibam deduzir ou se lembrem da fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de um polígono.

f) Espera-se que os estudantes façam um enunciado gráfico, decompondo um polígono em triângulos a partir de um só vértice e, depois, multipliquem o número de triângulos por 180°.

g) Incentive os estudantes a apresentar as duas definições trabalhadas no capítulo.

Diversificando

Esta seção tem por objetivo possibilitar ao estudante entrar em contato com temas variados, em diferentes contextos e áreas do saber.

Antes de trabalhar esta atividade em sala de aula, convém inteirar-se da história dos jogos de RPG – e sua evolução do tabuleiro de mesa para os *videogames* –, dos elementos que o compõem, seu funcionamento e suas características, o que pode ser obtido em diversos *sites* na internet.

Aproveite para trabalhar mais esse tema. Pergunte aos estudantes se algum deles já jogou RPG e peça àqueles que já jogaram que relatem resumidamente a sua experiência com o jogo.

Solicite que, em duplas, construam um dos poliedros de Platão baseando-se em sua planificação.

As resoluções das **atividades 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Na **atividade 1** foi proposto aos estudantes o cálculo da probabilidade de o jogador tirar uma face favorável ao momento do jogo. Desse modo, contribui-se para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA34).

DIVERSIFICANDO

O RPG e os poliedros de Platão

Provavelmente, ao brincar com alguns jogos, você já teve contato com um dado de seis faces, aquele sólido que lembra um hexaedro (cubo). Alguns jogos usam esse dado, por exemplo, para mostrar quantas casas o peão do jogador deve avançar no tabuleiro.

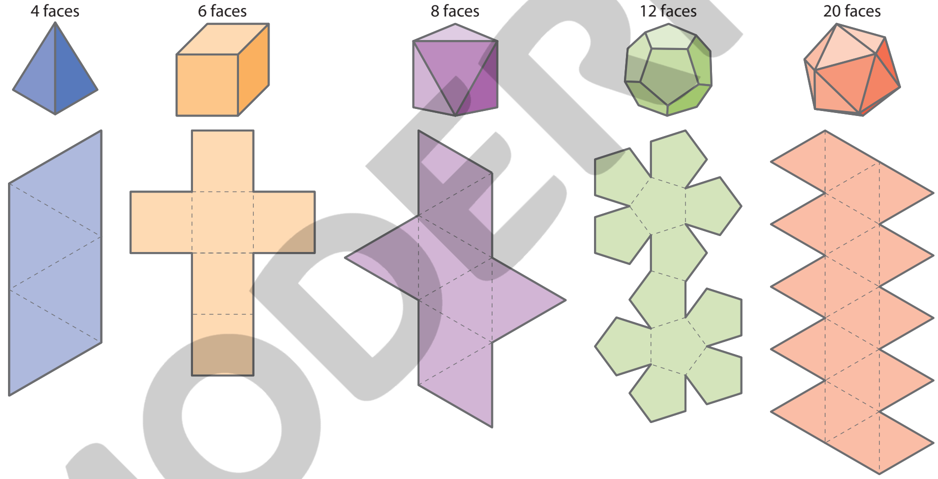
O *role-playing game* (RPG), que pode ser traduzido como "jogo de interpretação de papéis", é um jogo em que um dos participantes narra uma história, e os outros enriquecem e completam essa história, criando personagens a serem interpretados por eles mesmos.

① SLPIX/SHUTTERSTOCK; ② 4MAX/SHUTTERSTOCK; ③ CARON BADKIN/SHUTTERSTOCK; ④ JOYCE MAR/SHUTTERSTOCK; ⑤ CARON BADKIN/SHUTTERSTOCK

O RPG pode usar dados com seis faces ou outros tipos de dado, como os das fotografias. Entre outras funções, os dados são usados para atribuir pontos de ataque, de defesa ou de vida. Esses dados, que lembram os cinco poliedros de Platão, têm polígonos regulares como faces.

Veja a seguir os poliedros de Platão e uma possível planificação de cada um deles.

tetraedro 4 faces | **hexaedro** 6 faces | **octaedro** 8 faces | **dodecaedro** 12 faces | **icosaedro** 20 faces



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Suponha que, para se defender de um ataque inimigo em uma aventura de RPG, um jogador precise de 18 pontos ou mais. Ele jogará o dado de 20 faces, numerado de 1 a 20. Quantas faces favorecem esse jogador? Quantas não o favorecem? Qual é a probabilidade de ele tirar os pontos que precisa? **1.** 3 faces; 17 faces; $\frac{3}{20}$.

2 Sabendo que os poliedros acima possuem faces que são polígonos, calcule o número de diagonais de cada um desses polígonos. **2.** Espera-se que os estudantes percebam que os polígonos das faces que são triângulos não têm diagonais. Uma face do cubo tem 2 diagonais, e uma face do dodecaedro tem 5 diagonais.

3 Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do polígono que forma a face do tetraedro? E a do que forma a face do cubo? E a do dodecaedro? Esses polígonos são convexos? Justifique sua resposta. **3.** A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo é 180°, a do quadrado é 360° e a do pentágono é 540°. Esses polígonos são convexos, pois não têm ângulos internos maiores que 180°.

Capítulo

11 Sobre áreas e volumes

a) Resposta possível: quadrados, retângulos, triângulos, paralelepípedos, cubos, prismas.
b) Resposta pessoal.
c) Respostas possíveis: noção de profundidade, de perspectiva, de espessura das paredes.

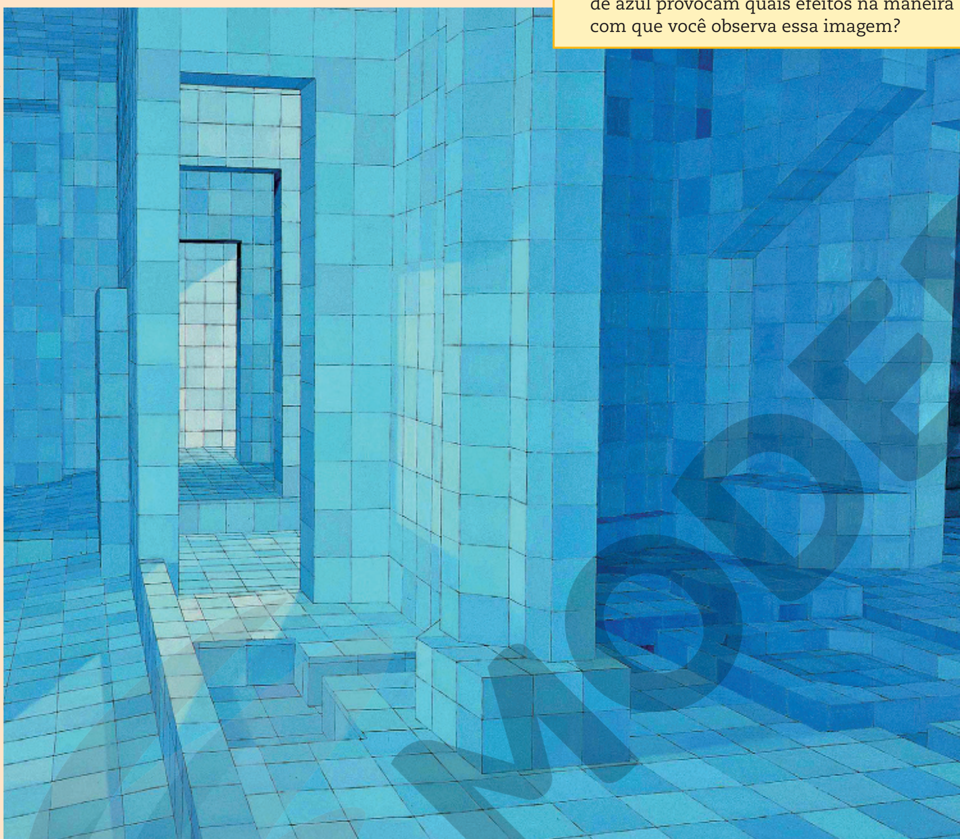
Observe, leia e responda no caderno.

a) Nesta imagem, podemos perceber quais são os polígonos e poliedros?

b) Na sua opinião, a artista consegue retratar as ideias de área e de espaço?

c) A aplicação de luz e sombra nos vários tons de azul provocam quais efeitos na maneira com que você observa essa imagem?

ADRIANA VAREJÃO – ACERVO GALERIA FORTES VILAÇA, SÃO PAULO



Detalhe de: VAREJÃO, A. **O Sedutor**. 2004. Óleo sobre tela. 230 × 530 cm.

Nessa obra, a composição de ambientes é dada pelos jogos de luz e sombra em azulejos monocromáticos em tons de azul, que delimitam os espaços em perspectiva, circunscrevem áreas e definem volumes.

Capítulo 11 – Sobre áreas e volumes

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo resgata, amplia e aprofunda os conhecimentos que os estudantes já construíram sobre áreas e inicia o trabalho com o conceito de volume.

No decorrer do capítulo, trabalharemos com o conceito de equivalência entre figuras e estimativas de medidas de área e volume, conteúdos que ampliam o repertório de estratégias para a resolução de problemas que envolvem o conceito de área e volume.

A abertura propõe a análise de uma obra de arte que utiliza quadriláteros para representar azulejos que cobrem as superfícies de paredes e pisos. Converse com os estudantes sobre o uso, pela artista, de diferentes tonalidades de azul para dar a ideia de profundidade.

Essas reflexões sobre a obra de arte contribuem para o desenvolvimento da **competência geral 3**.

1. O conceito de área

Habilidades da BNCC: **EF07MA29** e **EF07MA32**.

Pergunte aos estudantes quantas pessoas eles estimam que cabem na sala de aula. Essa pergunta simples pode ser uma boa abordagem inicial para este capítulo. Ela leva os estudantes à comparação, que é o primeiro passo para efetuar a medição de uma grandeza, padronizada ou não. Ela também leva os estudantes a vincular coisas da mesma natureza (ou que apresentem similitudes) para estabelecer as relações de semelhança ou de disparidade que possam existir entre elas.

O texto apresenta alguns exemplos de situações do cotidiano em que há necessidade de medir uma superfície, ou seja, de calcular a medida da área da superfície, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA29).

Recorde aos estudantes que o quadrado é um retângulo com todos os lados de mesma medida.

1 O conceito de área

Desde tempos muito remotos, o ser humano tem necessidade de medir superfícies. No antigo Egito, por exemplo, a cada ano, os estiradores de cordas (homens incumbidos de demarcar as terras inundadas pelo rio Nilo) determinavam a medida da área de cada propriedade não apenas para que os proprietários pudessem preservar suas terras, mas também, e principalmente, para garantir aos faraós o pagamento dos impostos sobre essas propriedades.

Hoje, a necessidade de determinar medidas de áreas está presente, por exemplo, na previsão de gastos para azulejar uma cozinha, ou na decisão da área que uma sala de aula deve ter para acomodar certa quantidade de estudantes.

Acompanhe algumas situações em que devemos determinar a medida da área de uma região.

TARTOS/SHUTTERSTOCK

Para determinar quantos metros quadrados de vidro foram utilizados nessa janela, deve-se calcular a medida da área de quatro regiões retangulares.

ANA DRUZIAN

Para saber quantos metros quadrados de toalha foram necessários para cobrir o tampo dessa mesa, deve-se calcular a medida da área da região limitada por um hexágono.

MATTHEW TABACCOS/BARCROFT MEDIA/GETTY IMAGES

Para obter o total de metros quadrados de grama necessários para cobrir um campo de futebol, deve-se calcular a medida da área limitada por um retângulo.

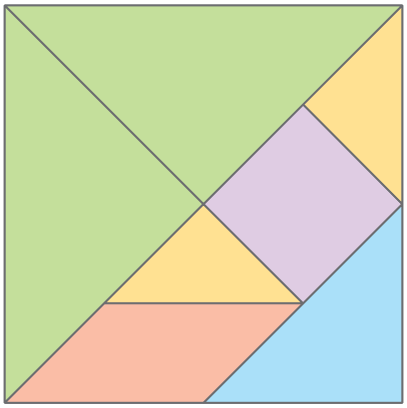
No estudo de áreas que faremos a seguir, vamos considerar que a medida da **área** de um polígono é a medida da área da superfície limitada por esse polígono. Por exemplo, a medida da área de um triângulo é a medida da área da região triangular relativa a esse triângulo.

244

Já estudamos que, para medir uma superfície, é preciso tomar outra superfície como unidade de medida e verificar quantas vezes a superfície escolhida cabe naquela que se deseja medir.

Observe como isso pode ser feito com o **tangram**, quebra-cabeça chinês formado por 7 peças:

- 2 triângulos grandes iguais;
- 1 triângulo médio;
- 2 triângulos pequenos iguais;
- 1 quadrado;
- 1 paralelogramo.



Como se vê na figura, essas peças se encaixam perfeitamente, formando um quadrado.

Reproduzindo esse tangram em uma folha de cartolina ou papelão e recortando as peças, podemos medir a superfície de cada uma delas, usando como unidade de medida a peça triangular pequena.

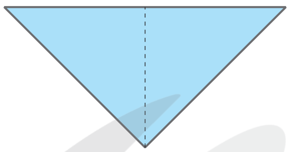
Vamos ver como isso funciona.

Primeiro, indicamos por t a unidade de medida; logo, a medida da área T_p de cada peça triangular pequena será igual a 1 t.

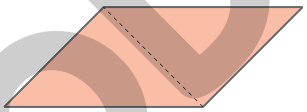
Depois, indicamos por T_g, T_m, Q e P, respectivamente, a medida da área de cada triângulo grande, do triângulo médio, do quadrado e do paralelogramo.

Com as peças recortadas, verificamos que:

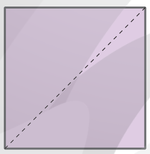
- O triângulo médio pode ser recoberto por dois triângulos pequenos. Ou seja, $T_m = 2\,t$.



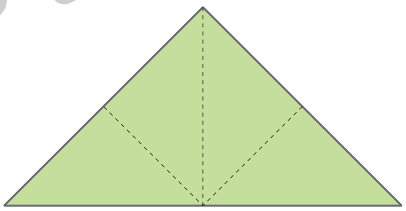
- O paralelogramo pode ser recoberto por dois triângulos pequenos. Ou seja, $P = 2\,t$.



- O quadrado pode ser recoberto por dois triângulos pequenos. Ou seja, $Q = 2\,t$.



- O triângulo grande pode ser recoberto por quatro triângulos pequenos. Ou seja, $T_g = 4\,t$.



O conceito de área

Trabalhamos com o tangram para introduzir o conceito de área, tomando como unidade de medida a medida da área do triângulo menor, contribuindo para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA32). Para aprofundar o estudo, converse com os estudantes sobre a lenda do tangram.

Não se conhece ao certo a origem do tangram. Sabe-se que é um quebra-cabeça de origem chinesa, usado há muitos séculos no Oriente.

Conta a lenda que um jovem chinês se despedia de seu mestre, pois iniciaria uma grande viagem pelo mundo. Então, o mestre entregou-lhe um espelho de formato quadrado e disse ao jovem: – Com esse espelho você registrará tudo o que encontrar durante a viagem para me mostrar na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

– Mas, mestre, como um simples espelho poderá lhe mostrar tudo o que eu encontrar durante a viagem?

Nesse momento, o espelho caiu, quebrando-se em sete peças. Então, o mestre respondeu: – Agora, com essas sete peças, você poderá construir figuras para ilustrar o que viu durante a viagem.

Com as sete peças de um tangram é possível criar e montar cerca de 1700 figuras, entre animais, plantas, pessoas, objetos, letras, números, figuras geométricas etc. Com o tangram, podemos trabalhar a identificação, a comparação, a descrição, a classificação de figuras geométricas planas, a decomposição e a composição de figuras, propriedades das figuras geométricas planas, a reprodução e a resolução de problemas usando padrões geométricos.

Peça aos estudantes que construam um tangram em cartolina e identifiquem cada peça com o respectivo símbolo atribuído nesta página. Oriente-os sobre as medidas a serem seguidas para o traçado do tangram e sobre os cuidados que devem ter ao recortar as peças. Recomende que usem tesoura com ponta arredondada e a manuseiem com cuidado.

Medida da área de cada triângulo pequeno: T_p

Medida da área de cada triângulo médio: T_m

Medida da área de cada triângulo grande: T_g

Medida da área do quadrado: Q

Medida da área do paralelogramo: P

Com o próprio tangram, cada estudante deve verificar as afirmações feitas no texto, tomando como unidade de medida t, a medida da área do triângulo pequeno $T_p = 1t$; $T_m = 2t$; $Q = 2t$; $P = 2t$ e $T_g = 4t$.

Proponha que obtenham também:

a) a área de Q, P, T_g e T_p tomando como unidade de medida $T_m = m$. $\left(\text{Resposta: } Q = m,\ P = m,\ T_g = 2m \text{ e } T_p = \frac{1}{2}m\right)$

b) a área de Q, P, T_m e T_p tomando como unidade de medida $T_g = g$. $\left(\text{Resposta: } Q = \frac{1}{2}g,\ P = \frac{1}{2}g,\ T_m = \frac{1}{2}g \text{ e } T_p = \frac{1}{4}g\right)$

O conceito de área

Como curiosidade, proponha aos estudantes uma pesquisa na internet ou em livros e atlas sobre a medida da área em km^2 de Brasília e de todas as capitais do Brasil. Peça a eles que destaquem a de maior medida de área; a de menor medida de área; a mais populosa e a menos populosa.

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 1** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 2**, é considerado como unidade de medida de área o quadradinho da malha. Então, a medida da área de cada figura é igual à quantidade de quadradinhos que a compõem. Logo:

a) 16 ■

b) 12 ■

Uma variação desse exercício é, em vez de apresentar figuras desenhadas no papel quadriculado e pedir a respectiva medida de área (com o quadradinho como unidade de medida), apresentar valores da medida de área na unidade quadradinho e pedir aos estudantes que construam no papel quadriculado figuras cujas áreas sejam os valores dados.

No **exercício 3**:

a) A região retangular pode ser decomposta em duas regiões triangulares iguais. Logo, a fração que representa a parte que cada região triangular ocupa em relação à região retangular é $\frac{1}{2}$.

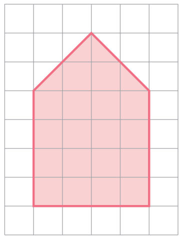
b) $40\ m^2 : 2 = 20\ m^2$

Logo, a área mede $20\ m^2$.

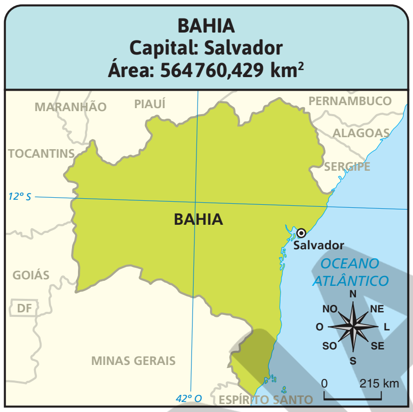
Se considerar adequado, pergunte aos estudantes se qualquer retângulo pode ser decomposto em dois triângulos e qual é a relação entre as áreas dessas figuras.

Podemos medir superfícies utilizando unidades de medida não padronizadas, como o quadradinho de uma malha quadriculada, ou unidades de medida padronizadas, entre as quais estão o metro quadrado (m^2), seus múltiplos e submúltiplos.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



A medida da área da figura rosa é 20 .



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado a partir de: IBGE. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro, 2018. p. 90.

Observação

- Área é uma grandeza associada à superfície. A medida da área nos dá a ideia da sua extensão. Assim, consideramos três componentes: a grandeza (área), o objeto geométrico (superfície) e a medida (número). Porém, para uma comunicação mais fácil de compreender, veículos de informação (jornais, revistas etc.) optam por uma linguagem mais direta, não distinguem área e medida de área. Por exemplo, em vez de "a medida da área do apartamento é $40\ m^2$", dizem "a área do apartamento é $40\ m^2$"; "a medida da área de Maceió é $509\ km^2$", expressam "a área de Maceió é $509\ km^2$".

1. b) Nesse caso, considerando que as unidades de medidas são diferentes, vamos comparar apenas os números que representam a medida da área. Quando a unidade usada é o triângulo médio, o número que dá a medida da área é a metade do número que dá a medida da área calculada, tendo por unidade o triângulo pequeno.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Reproduza o tangram da página anterior e faça o que se pede.

a) Expresse a medida da área do tangram com as seguintes unidades de área:
- o paralelogramo; **1. a)** Paralelogramo 8.
- um dos triângulos grandes; **1. a)** Triângulo 4.
- o quadrado. **1. a)** Quadrado 8.

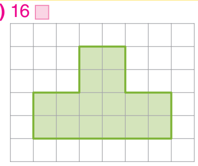
Monte uma tabela para apresentar os resultados obtidos. **1. a)** Construção de tabela.

b) Compare a medida da área do quebra-cabeça calculada com a unidade de área de um dos triângulos pequenos com a medida de área do quebra-cabeça calculada com a unidade de área do triângulo médio.

2 Usando como unidade de medida de área, determine a medida da área das figuras.

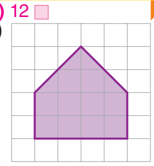
2. a) 16

a)



2. b) 12

b)



- Qual será a medida da área de cada figura se a unidade de medida for a metade do quadradinho?

3 Observe as figuras. Com dois triângulos iguais ao da figura 1, posso compor o retângulo da figura 2.

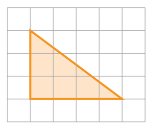


Figura 1

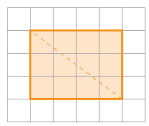


Figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

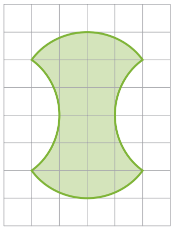
2. • Se a unidade de medida for a metade do quadradinho, a medida da área calculada em cada item será o dobro.

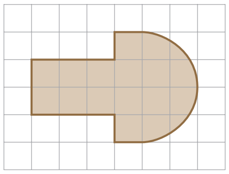
6. e) Não, pois a proporção entre as figuras é mantida, independentemente do tamanho da malha.

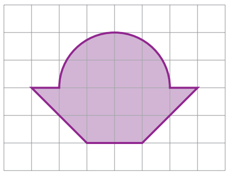
a) Escreva a fração que representa a parte que cada região triangular ocupa em relação à região retangular. 3. a) $\frac{1}{2}$

b) Se a medida da área da região retangular é 40 m², quanto mede a área da região triangular? 3. b) 20 m²

4 Usando ▢ como unidade de medida de área, determine a medida da área aproximada de cada figura.

a)  4. a) 16 ▢

b)  4. b) 16 ▢

c)  4. c) 14,5 ▢

5 Observe as figuras a seguir. Com alguns triângulos iguais ao da figura 1, posso compor vários retângulos como os da figura 2.

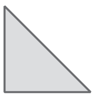


Figura 1

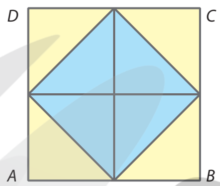


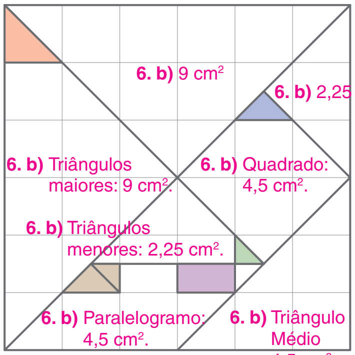
Figura 2

a) Escreva a fração que cada região triangular representa em relação à maior região retangular (*ABCD*). 5. a) $\frac{1}{8}$

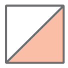
b) Determine a fração irredutível que a parte azul representa em relação ao interior do retângulo *ABCD*. 5. b) $\frac{1}{2}$

c) Se a área do interior do retângulo *ABCD* mede 120 cm², quanto mede a área da figura azul? 5. c) 60 cm²

6 O tangram a seguir foi construído em um papel quadriculado, no qual cada quadradinho tem lados medindo 1 cm e área 1 cm².



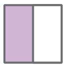
a) Encontre a medida da área de cada parte colorida indicada nos quadradinhos a seguir.



(I) 6. a) I $\frac{1}{2}$ cm²

(III) 6. a) III $\frac{1}{4}$ cm²

(V) 6. a) V $\frac{3}{8}$ cm²



(II) 6. a) II $\frac{1}{2}$ cm²

(IV) 6. a) IV $\frac{1}{8}$ cm²

b) Calcule a medida da área de cada peça do tangram em centímetro quadrado.

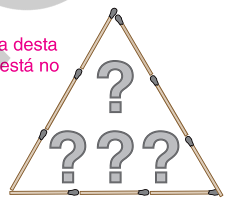
c) Que relações você observa entre as áreas das peças do tangram?

d) A área do triângulo grande corresponde a que porcentagem da área do quebra-cabeça montado? 6. d) 25%

e) Se o tangram fosse construído em um papel quadriculado com quadradinhos de lados medindo 2 cm, a resposta obtida para o item **d** mudaria?

7 Monte a figura a seguir com palitos de fósforo usados, colando-os em uma folha de papel.

7. A resposta desta atividade está no *Manual*.



Depois, com outros palitos, divida a região triangular em três partes iguais. Mostre a solução na figura montada por você.

6. c) Resposta possível: $T_m = Q = P = \frac{1}{2}T_g$, $T_p = \frac{1}{2}T_m$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

Por causa das linhas arredondadas, se houver dificuldade de resolução do **exercício 4**, esclareça aos estudantes que o próprio enunciado pede um cálculo aproximado. Acompanhe sua resolução.

a) Observando a figura e considerando o ▢ como unidade de medida de área, temos que a medida da área aproximada é 16 ▢. A mesma estratégia pode ser utilizada para obter as medidas dos **itens b** e **c**.

b) 16 ▢

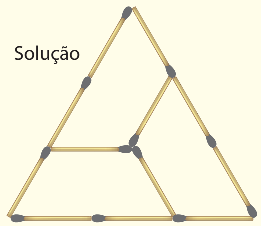
c) 14,5 ▢

Para explorar melhor esse tipo de exercício, peça aos estudantes que construam figuras em papel quadriculado e, em duplas, troquem os papéis para cada um calcular a medida da área da figura do outro. Depois, destroquem os papéis para conferir o cálculo.

As resoluções dos **exercícios 5** e **6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Para a resolução do **exercício 7**, peça aos estudantes que utilizem palitos de fósforo usados ou palitos de algum outro tipo, desde que sejam todos do mesmo tamanho. Acompanhe uma possível solução desse exercício:

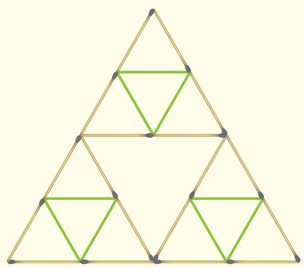
Solução



RENAN ORACIC/ ARQUIVO DA EDITORA

Esse exercício pode ser ampliado apresentando uma figura de um triângulo equilátero (semelhante à do exercício) com lados formados por 4 palitos de fósforo usados. Depois, com outros palitos, peça aos estudantes que dividam a região triangular em quatro partes iguais. Mostre a solução na figura montada por você.

Cada parte da divisão tem área igual à de 4 triângulos menores. A divisão pode ser feita usando 6 palitos, como na figura a seguir.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

O **exercício 8** possibilita uma atividade interdisciplinar com História, ampliando a discussão sobre a história da América.

Um desafio interessante é pedir aos estudantes que decalquem o mapa do Brasil desse exercício e, depois, tracem uma linha paralela à do tratado de Tordesilhas de modo que o Brasil fique dividido em duas partes de áreas iguais.

Para fazer as estimativas solicitadas, os estudantes deverão contar a quantidade de quadradinhos e encontrar aproximadamente 31 cm^2 para Portugal e 53 cm^2 para a Espanha.

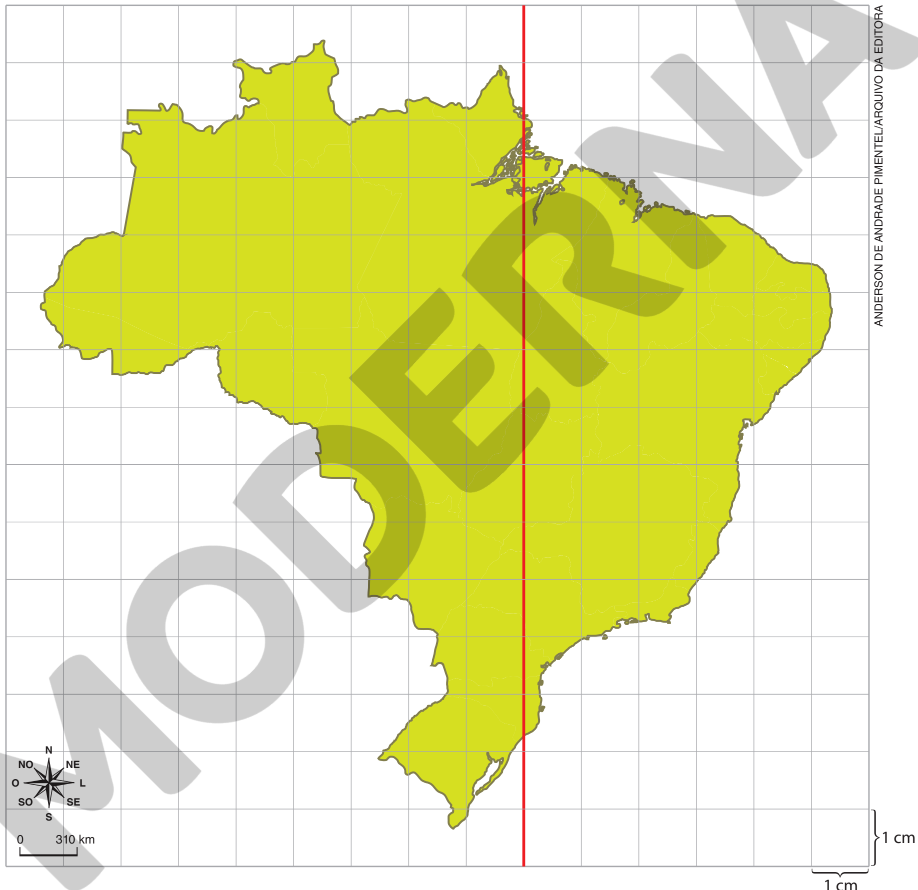
O **exercício 9** tem como objetivo fazer com que os estudantes reflitam sobre o que aprenderam a respeito de área e consigam elaborar uma situação-problema que apresente dados suficientes para responder a uma pergunta proposta.

8 A chegada à América da expedição espanhola comandada por Cristóvão Colombo, em 1492, gerou intensa rivalidade entre Portugal e Espanha. Considerando-se pioneiros nas viagens pelo oceano Atlântico, os portugueses julgavam-se donos de todas as terras ultramarinas alcançadas. Após longas discussões, os governos de Portugal e Espanha assinaram, em 1494, o Tratado de Tordesilhas, que estabelecia uma linha imaginária, a 370 léguas a oeste do arquipélago de Cabo Verde (ilhas situadas na costa noroeste da África, que foram colônias de Portugal até 1975), e dividia as terras entre os dois países. As terras a leste dessa linha seriam de Portugal, e as terras a oeste pertenceriam à Espanha.

CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

No mapa atual do Brasil, reproduzido a seguir, foi traçada uma linha que corresponde aproximadamente à divisão estabelecida pelo Tratado de Tordesilhas. Estime quantos centímetros quadrados desse mapa corresponderiam às terras pertencentes a Portugal e quantos seriam pertencentes à Espanha em 1494.

8. Resposta possível: 31 cm^2 para Portugal e 53 cm^2 para a Espanha



ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

Elaborado a partir de: FERREIRA, G. M. L. **Moderno atlas geográfico**. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

9 ***Hora de criar*** – Elabore um problema sobre área. Troque-o com um colega e depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem-nos para corrigi-los. **9.** Resposta pessoal.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Estimativa da quantidade de pessoas que habitaram um sítio arqueológico

Vários indícios são levados em consideração. A primeira coisa a ser feita para saber o tamanho de uma população extinta é determinar o tamanho do sítio arqueológico, ou seja, o espaço onde aquele grupo viveu. E aí já entra a subjetividade.

[...]

O arqueólogo não escava a área toda. Faz-se uma regra de três: se em 5 m^2 de escavação de um sítio foram encontrados restos de dez esqueletos humanos e aquele sítio tem 500 m^2, estima-se que ali viveram cerca de mil pessoas.

Mas esse cálculo pode não ser muito fiel: o cenário de um sítio arqueológico representa um momento no tempo, e não a ocupação daquele lugar em várias etapas do tempo.

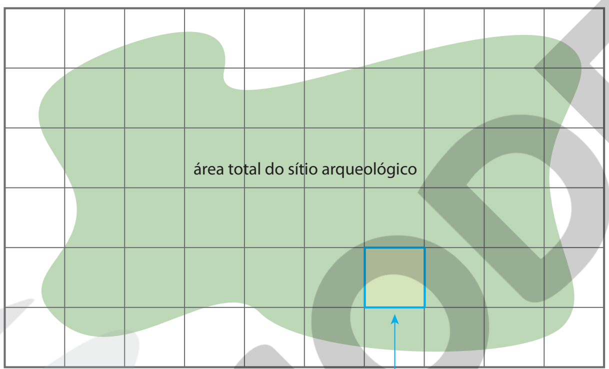
Fonte: VERNEY, C. J. Como calculamos quantas pessoas habitaram um sítio arqueológico? **Galileu**, São Paulo, ano 9, n. 210, jan. 2009. p. 32.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Observe a seguir a esquematização de um sítio arqueológico no qual é feita uma escavação.


JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Pesquise e escreva quais são as atribuições de um arqueólogo, em que lugares trabalha e qual deve ser sua formação educacional. **a)** Resposta pessoal.

b) Supondo que a área de escavação do sítio do esquema anterior meça 16 m^2, faça uma estimativa da medida da área total desse sítio. **b)** Cerca de 600 m^2.

c) Supondo que na área de escavação do sítio foram encontrados restos de 12 esqueletos, qual seria a população estimada por um arqueólogo? **c)** 450 pessoas.

d) Em civilizações conhecidas, como a romana, em um sítio com 50 casas, por exemplo, os arqueólogos estimam com mais certeza que cada uma delas foi habitada por 5 pessoas. Considerando essa hipótese, quantas casas teria o sítio do esquema anterior? **d)** 90 casas.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF07MA32**.

Esta seção reproduz uma matéria interessante sobre como a Matemática subsidia outras ciências. Solicite aos estudantes que pesquisem na internet, em livros ou revistas outros textos sobre esse assunto.

Ao trabalhar com esse tema, contribui-se para o desenvolvimento da **competência geral 2**.

Esta é uma situação em que é possível traçar um paralelo com a situação de uma pesquisa estatística sobre a abrangência e a representatividade da parte pesquisada em relação ao todo. Uma pesquisa estatística em geral não é censitária, isto é, elabora-se com determinados critérios uma amostra representativa da população a ser pesquisada. Da mesma maneira, para realizar essa estimativa, é feita uma escolha criteriosa de uma parte do sítio arqueológico que supostamente representa o todo a ser investigado. A ação é menos invasiva e preserva o local.

Ao propor a comparação da área da escavação com a área total do sítio arqueológico para estimar sua medida, é possível desenvolver a habilidade (EF07MA32).

As resoluções do **Agora quem trabalha é você**! estão no início deste *Manual*.

2. Figuras equivalentes

Habilidade da BNCC:
EF07MA32.

Neste tópico trabalhamos o conceito de figuras equivalentes, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA32).

As imagens das figuras compostas falam por si no que diz respeito à área total, pois todas têm as mesmas partes, mudando apenas sua disposição para formar o todo. Porém, se houver dúvida, recorra a uma situação análoga com massa em vez de área.

Proponha aos estudantes que imaginem três objetos quaisquer, A, B e C, a serem pesados em uma balança. Pergunte a eles em qual das situações a balança registrará maior medida final de massa.

- Colocando A sobre a balança, depois B (sem tirar A) e depois C (sem tirar A e B).
- Colocando B sobre a balança, depois C (sem tirar B) e depois A (sem tirar B e C).
- Colocando C sobre a balança, depois A (sem tirar C) e depois B (sem tirar C e A).

Espera-se que os estudantes concluam que a balança vai registrar a mesma medida total de massa nas três situações.

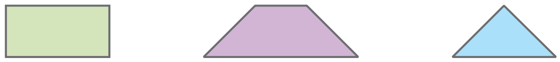
Exercícios propostos

Para resolver o **exercício 10**, os estudantes devem considerar o quadradinho da malha como unidade de medida de área. Sabemos que duas figuras, para serem equivalentes, precisam ter a mesma medida de área; logo, as figuras equivalentes são: A e F, B e C, D e E.

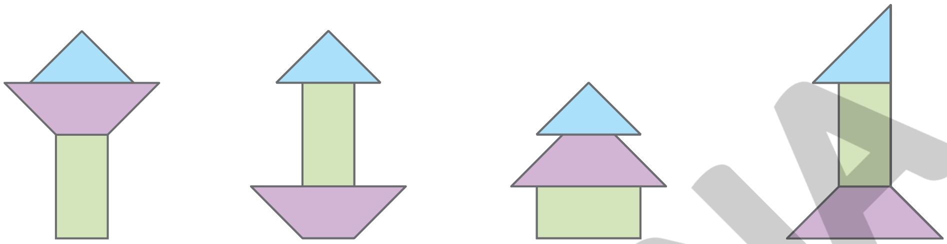
A resolução do **exercício 11** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

2 Figuras equivalentes

Considere estas figuras:



Com elas podemos compor diversas outras, como estas:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

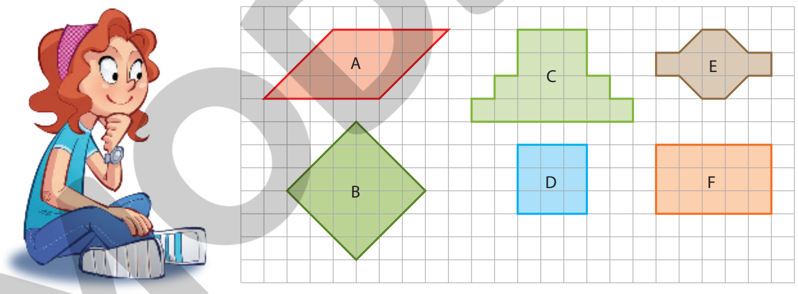
As figuras formadas, embora tenham formatos diferentes, têm mesma área, já que todas foram compostas das mesmas figuras. Em razão disso, dizemos que elas são **figuras equivalentes**.

Duas figuras são **equivalentes** quando têm áreas iguais na mesma unidade.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

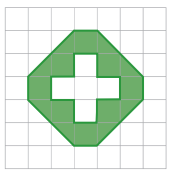
10 A seguir há três pares de figuras equivalentes. Quais são eles? **10.** A e F, B e C, D e E.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

11 Desenhe em um papel quadriculado três figuras equivalentes à figura pintada de verde a seguir. **11.** Construção de figura.

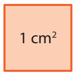


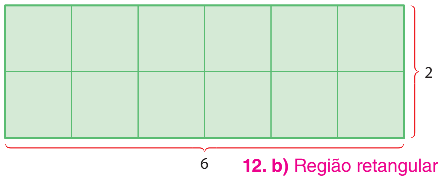
NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

13. b) Neste caso, os estudantes podem desenhar retângulos que tenham lados medindo 2 cm e 8 cm ou 1 cm e 16 cm.
13. c) Medida da área do quadrado: $4 \cdot 4 = 16$ (16 cm²); medida da área do retângulo: $2 \cdot 8 = 16$ ou $1 \cdot 16 = 16$ (16 cm²).

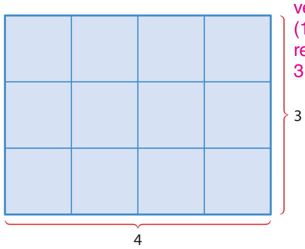
12 Considere os retângulos formados por quadrados de 1 cm².

12. a) Sim, pois são formados pela mesma quantidade de quadrados e, portanto, têm mesma medida de área.





12. b) Região retangular verde: $2 \cdot 6 = 12$ (12 cm²); Região retangular azul: $3 \cdot 4 = 12$ (12 cm²).



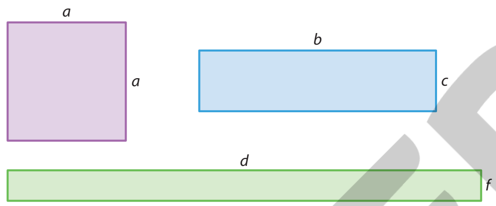
a) Esses retângulos são equivalentes? Justifique sua resposta.
b) Determine a medida da área de cada região por meio de uma multiplicação.
c) Se um outro retângulo fosse formado por a quadradinhos na base e b quadradinhos na altura, que expressão indicaria a medida de sua área?

12. c) Área $= a \cdot b$

13 Desenhe em seu caderno um quadrado de lados medindo 4 cm.

13. a) 16 quadradinhos.

a) Decomponha esse quadrado em quadradinhos menores de lados medindo 1 cm. Quantos quadradinhos você obteve?
b) Agora, desenhe um retângulo que seja equivalente ao quadrado. Quais são as medidas dos lados desse retângulo?
c) É possível indicar a medida da área do quadrado e do retângulo por meio de uma multiplicação? Em caso afirmativo, escreva essas multiplicações.
d) Suponha que o número a^2 possa ser escrito por meio da multiplicação entre b e c e também entre d e f. Como você indicaria a medida de área das figuras a seguir? Elas seriam equivalentes? Justifique sua resposta.



13. d) a^2; bc; df. Como $a^2 = bc = df$, as figuras são equivalentes, pois têm mesma medida de área.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...:
a) Em todos, pois nas três figuras obtidas as linhas tracejadas formam ângulos retos com um dos lados.

Considere os três paralelogramos equivalentes de lados medindo x e y:

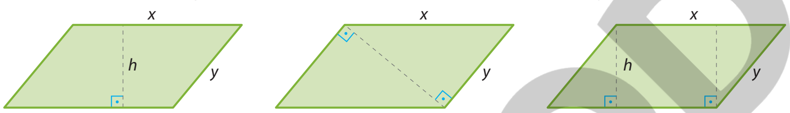


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Se cada uma das figuras fosse recortada nas linhas tracejadas e as peças obtidas fossem rearranjadas, em que casos seria possível montar uma região retangular? Por quê?
b) Decalque essas figuras em uma folha de papel e depois, com o auxílio de uma tesoura sem ponta, recorte-as nas partes tracejadas e façam a montagem da figura solicitada no item **a**.
c) Cada uma das figuras obtidas continuam equivalentes às figuras 1, 2 e 3?

b) Construção de figura.
c) Sim.

d) Na figura 1 temos um paralelogramo de base medindo x e altura de medida h. Quais são as medidas dos lados do retângulo obtido com a composição das partes da figura 1? Qual é a medida da área desse retângulo?
e) E qual é a medida da área do retângulo obtido com as partes da figura 3?

e) A medida de sua área pode ser determinada por: $x \cdot h$.

f) Converse com o professor e os colegas sobre a afirmação:
A medida da área de um paralelogramo é dada pelo produto entre as medidas da base e de sua altura.

f) Aproveite a atividade para formalizar com os estudantes que a área de um paralelogramo corresponde à área de um retângulo de mesma medida de base e de altura.

(Use tesoura com ponta arredondada e a manuseie com cuidado!)

d) Os estudantes devem obter um retângulo de base medindo x e altura medindo h. A medida de sua área pode ser determinada por: $x \cdot h$.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

251

Exercícios propostos

Este bloco de exercícios tem o objetivo de ampliar o trabalho com a habilidade (EF07MA31) ao propor aos estudantes que escrevam expressões para o cálculo de medidas de áreas de retângulos, quadrados e paralelogramos com base na ideia de equivalência de áreas e decomposição de figuras.

No **exercício 12**, com base na equivalência de figuras e decomposição, os estudantes devem concluir que os dois retângulos têm mesma medida de área. Para responder ao **item b**, basta que eles determinem a quantidade de quadradinhos da base e da altura. Aproveite o **item c** para formalizar a expressão para o cálculo de área de um retângulo.

Já no **exercício 13** os estudantes devem concluir que, assim como no caso do retângulo, a medida da área de um quadrado é dada pelo produto entre as medidas de seus lados. Para o **item b** devem desenhar um retângulo, que, assim como o quadrado, é formado por 16 quadradinhos e, por esse motivo, seus lados devem medir 2 cm e 8 cm ou 1 cm e 16 cm.

Pense mais um pouco...

Esta seção oferece uma boa oportunidade para os estudantes comporem, de maneira diversa, retângulos a partir de partes de um paralelogramo não retângulo e verificarem que as medidas das áreas de um paralelogramo e de um retângulo de mesmas medidas de base e de altura são equivalentes.

3. Triângulos equivalentes a outros polígonos

Habilidade da BNCC: **EF07MA31**.

A equivalência de polígonos é tratada aqui por meio de reduções do número de lados do polígono dado, até chegarmos ao triângulo, e das técnicas de Desenho geométrico.

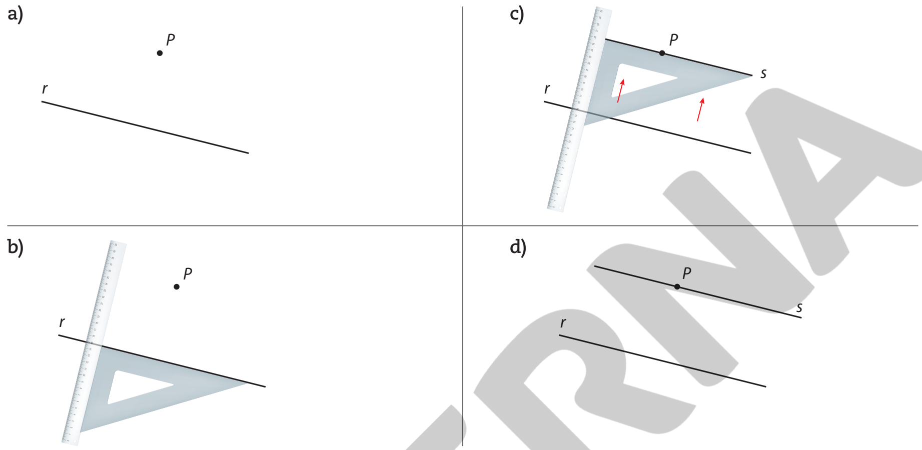
Aqui, em particular, é abordada a equivalência de infinitos triângulos com a mesma base, e o terceiro vértice é um ponto qualquer de uma reta paralela não coincidente à reta que contém essa base. Garantidas essas duas condições, os infinitos triângulos têm a mesma base e altura com a mesma medida. Portanto, eles têm a mesma medida de área, ou seja, são triângulos equivalentes.

3 Triângulos equivalentes a outros polígonos

Um problema clássico do estudo de desenho geométrico trata da obtenção, utilizando régua e esquadro, de um triângulo equivalente a um dado polígono convexo qualquer.

Antes de acompanhar a resolução desse problema, vamos lembrar o procedimento prático do traçado da paralela e verificar triângulos equivalentes de mesma base.

- Dado um ponto P fora de uma reta r, por um postulado da Geometria euclidiana, afirmamos que existe e é única a reta paralela a r por P. Siga os passos para obtê-la com régua e esquadro.

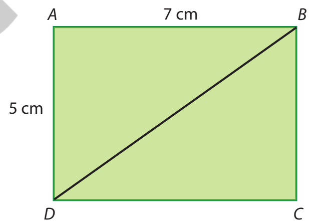


- Vimos que a medida da área S_{ABCD} do retângulo verde é dada pelo produto das medidas da base e da altura.

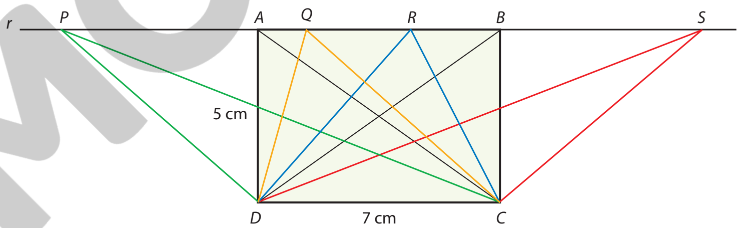
$$S_{ABCD} = (7 \cdot 5)\ \text{cm}^2 = 35\ \text{cm}^2$$

Também já vimos que uma diagonal divide esse retângulo em dois triângulos congruentes. Logo, a medida da área de cada um desses triângulos é a metade da medida da área do retângulo, isto é:

$$S_{DCB} = \frac{S_{ABD}}{2} = 17{,}5\ \text{cm}^2$$



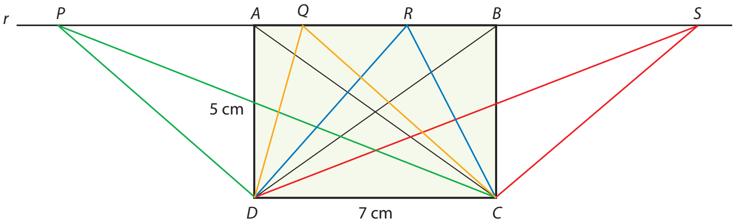
Agora, considere os triângulos destacados na situação a seguir.



Cada um desses triângulos tem base $\overline{DC}$ medindo 7 cm e altura medindo 5 cm, ou seja, são triângulos cuja medida da área é igual à metade da medida da área do retângulo $ABCD$. Em outras palavras, todos os triângulos de base $\overline{DC}$ com o terceiro vértice na reta r, paralela à reta $\overleftrightarrow{DC}$, são **triângulos equivalentes**.

Área de triângulos

Verificamos que é possível traçar diferentes triângulos de mesma medida de base (7 cm) e mesma medida de altura (5 cm) e que todos esses triângulos são equivalentes.

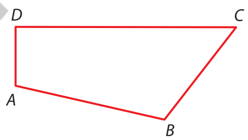


Os triângulos *PDC*, *ADC*, *QDC*, *EDC*, *BDC* e *SDC* são equivalentes e têm base medindo 7 cm e altura correspondente a essa base medindo 5 cm.

Do mesmo modo, verificamos que a medida da área de todos esses triângulos corresponde à metade da medida da área de um retângulo de mesma medida de altura e mesma medida de base.

$$\text{medida da área do triângulo} = \frac{\text{medida da base} \cdot \text{medida da altura}}{h}$$

Triângulo equivalente a um quadrilátero



Área de triângulos

Complementando o trabalho com a habilidade (EF07MA31), apresentamos a expressão de cálculo da medida de área de triângulos. Comente com os estudantes que é possível traçar infinitos triângulos que tenham as mesmas medidas de base e de altura do retângulo *ABCD* e que todos esses triângulos serão equivalentes e terão a medida da área correspondente à metade da medida da área do retângulo.

Se tiver oportunidade, leve os estudantes à sala de informática e, com o apoio de um *software* de geometria dinâmica, faça a construção do retângulo *ABCD* e de triângulos de mesma medida de base e de altura, contribuindo para o desenvolvimento da **competência geral 5**.

Triângulo equivalente a um quadrilátero

Iniciamos neste tópico a obtenção de equivalência de outros polígonos, que não o próprio triângulo, equivalentes a um triângulo. Neste caso, fazemos a redução de um quadrilátero para um triângulo.

A ideia é obter com régua e esquadro o traçado de um triângulo equivalente a um quadrilátero dado por dois lados consecutivos do polígono e uma diagonal que une os dois vértices não comuns desses lados.

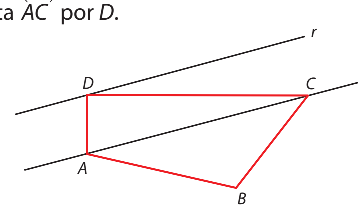
O triângulo equivalente obtido, no entanto, deve ter um dos novos lados alinhado com outro lado do polígono cuja área queremos calcular. Assim é feita a redução do número de lados: dois lados do polígono dado são substituídos por um só lado no novo polígono.

Caso seja necessário, utilizando régua e esquadro de lousa, construa, na lousa, um triângulo equivalente a um quadrilátero qualquer aplicando o passo a passo dado.

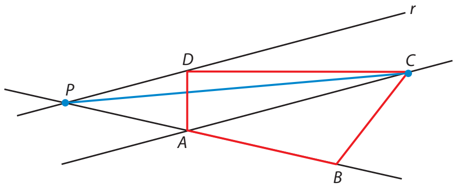
Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 14** a **16** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

1º) Traçamos a reta que contém a diagonal $\overline{AC}$ e, com régua e esquadro, a reta *r*, paralela à reta $\overleftrightarrow{AC}$ por *D*.

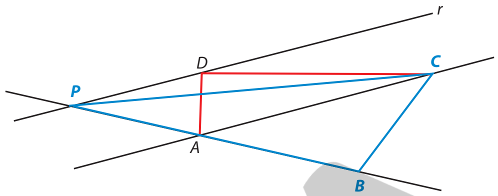


2º) Prolongamos o lado $\overline{AB}$, obtendo o ponto *P*, na reta *r*. Traçamos o segmento $\overline{PC}$, obtendo o triângulo *PAC*, equivalente ao triângulo *DAC*.



ILUSTRAÇÕES: RICARDO YORIO/ARQUIVO DA EDITORA

3º) Observe o triângulo *PBC* (em azul). Sua área é a soma das áreas dos triângulos *ABC* e *PAC* (que é igual à área do triângulo *DAC*). Também o quadrilátero *ABCD* tem área igual à soma das áreas dos triângulos *ABC* e *DAC* (que é igual à área do triângulo *PAC*).



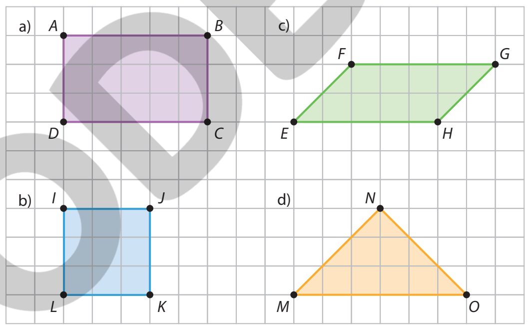
Portanto, o triângulo *PBC* é equivalente ao quadrilátero *ABCD*.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

14 Determine a medida da área dos polígonos a seguir, considerando que a medida dos lados de cada quadradinho da malha é igual a 0,5 cm.

14. a) 3,75 cm²
14. b) 2,25 cm²
14. c) 2,5 cm²
14. d) 4,5 cm



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

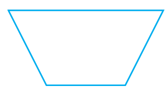
15 Desenhe no caderno um quadrado, um retângulo, um paralelogramo e um triângulo que sejam equivalentes. **15.** Construção de figura.

16 No caderno, decalque os quadriláteros a seguir e obtenha, com régua e esquadro, os triângulos equivalentes a eles. **16.** Construção de figuras.

a) retângulo

b) paralelogramo

c) trapézio



ILUSTRAÇÕES: MÁRIO MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

4 Volume

Leia a reportagem a seguir, de 30 de outubro de 2020, sobre o maior porto da América Latina.

Santos recebe navio gigante que pode transportar até 12 mil contêineres

O Porto de Santos, recebeu, na tarde de quinta-feira (29) um de seus maiores navios em capacidade de transporte. O Kota Pusaka, de bandeira de Hong Kong, do armador asiático PIL, pode transportar até 11.923 TEU (unidade equivalente a um contêiner de 20 pés).

MÁRIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Santos recebe navio gigante que pode transportar até 12 mil contêineres. **Informativo dos Portos**. Disponível em: https://www.informativodosportos.com.br/santos-recebe-navio-gigante-que-pode-transportar-ate-12-mil-conteineres/. Acesso em: 23 maio 2022.

O transporte marítimo de mercadorias no comércio internacional emprega, cada vez mais, essas enormes "caixas de metal", com a forma de paralelepípedo, chamadas contêineres, que podem ser empilhadas por guindastes nos navios e nos cais dos portos. Um contêiner de 20 pés tem volume medindo 33 metros cúbicos.

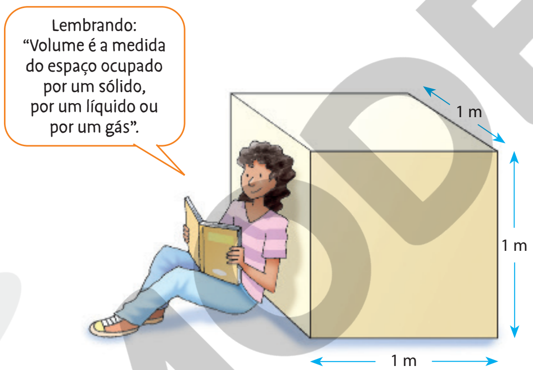
O metro cúbico e o volume de um paralelepípedo são os nossos próximos assuntos de estudo.

Metro cúbico, seus múltiplos e submúltiplos

O Sistema Internacional de Unidades adota como unidade padrão de volume o **metro cúbico**, representado por **m³**. O metro cúbico corresponde ao volume de um cubo de 1 metro de medida de aresta.

CARLOS CARRARO

Cada aresta do "cubo" desta fotografia mede 1 metro.



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Muitas vezes, o metro cúbico não é a unidade mais indicada para medir determinado volume, como o volume de água do reservatório de uma usina hidrelétrica ou o volume de certo medicamento colocado em uma seringa. Dependendo do volume a ser medido, podemos empregar os múltiplos ou os submúltiplos do metro cúbico.

Quando precisamos medir um volume menor que o metro cúbico, empregamos seus submúltiplos: **decímetro cúbico** (**dm³**), **centímetro cúbico** (**cm³**) ou **milímetro cúbico** (**mm³**).

Quando o volume a ser medido é maior que o metro cúbico, empregamos seus múltiplos: **quilômetro cúbico** (**km³**), **hectômetro cúbico** (**hm³**) ou **decâmetro cúbico** (**dam³**).

4. Volume

Habilidade da BNCC: **EF07MA30**.

Neste tópico trabalharemos com a ideia de volume e com as unidades de medida usuais, o que contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA30).

Solicite aos estudantes que pesquisem informações gerais sobre contêineres (volume, produção, uso, transporte, estocagem etc.). Informe que também há contêineres sendo usados como residências e como locais para comércio. Pergunte por que, na opinião deles, os contêineres conquistaram tamanha importância na indústria mundial.

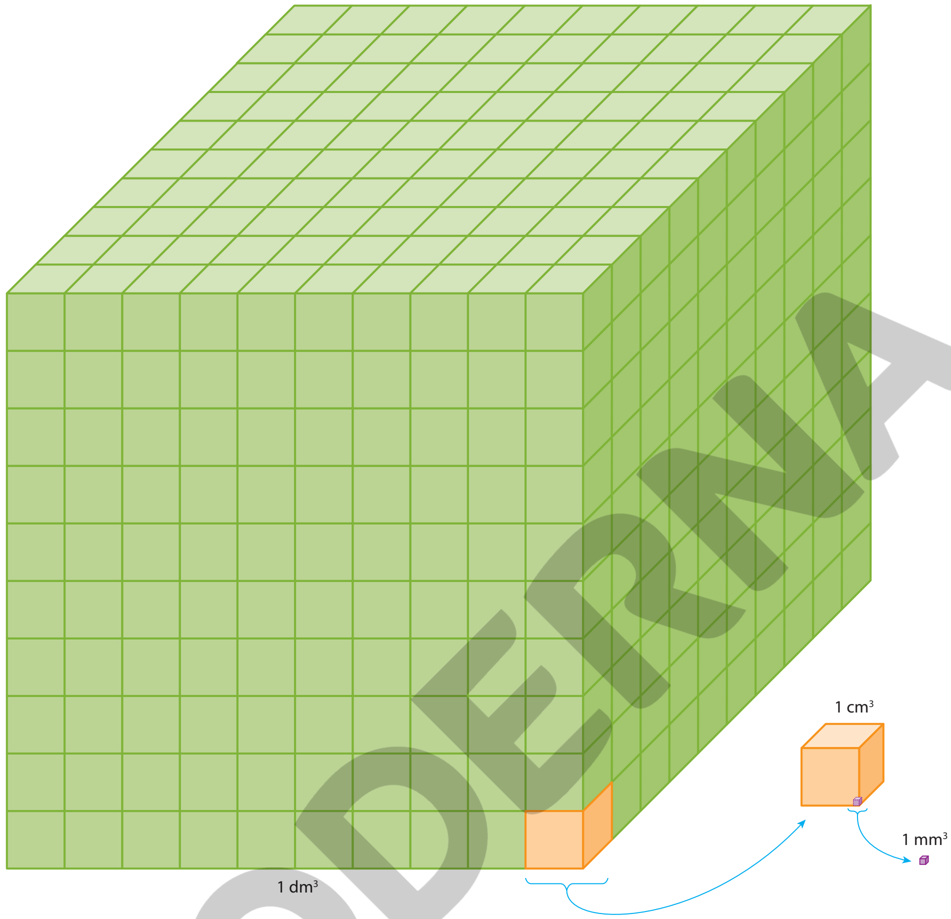
Em relação à fotografia apresentada, destacamos que é interessante os estudantes observarem o "cubo" de 1 metro de aresta e compararem suas medidas com a medida de uma criança. Devem notar que não é possível a criança ficar em pé, pois a altura é limitada a apenas 1 metro. Essa observação é importante para os estudantes desenvolverem um referencial para **volume**. A ilustração que mostra uma pessoa adulta encostada em outro cubo com aresta de 1 metro reforça esse referencial.

Metro cúbico, seus múltiplos e submúltiplos

Destaque aos estudantes que as ilustrações dos cubos de arestas 1 dm, de arestas 1 cm e de arestas 1 mm estão em tamanho real e propiciam não só uma referência concreta como também as relações entre as medidas de seus volumes na razão de 1 para 1000. Essas relações estão organizadas e resumidas no quadro de unidades de medida de volume apresentado no final da página.

Peça aos estudantes que identifiquem situações do dia a dia nas quais também empregamos os submúltiplos do metro cúbico como unidade de medida.

As figuras a seguir mostram a relação entre o decímetro cúbico, o centímetro cúbico e o milímetro cúbico.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Note que o cubo cujo volume mede 1 dm³ contém 1 000 cubinhos que medem 1 cm³ de volume, e cada um destes contém 1 000 cubos que medem 1 mm³ de volume.

O quadro a seguir apresenta o nome das unidades de volume (linha lilás), os símbolos correspondentes (linha verde) e os valores de cada unidade em relação ao metro cúbico (linha amarela).

Múltiplos			Unidade padrão	Submúltiplos		
quilômetro cúbico	hectômetro cúbico	decâmetro cúbico	metro cúbico	decímetro cúbico	centímetro cúbico	milímetro cúbico
km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
1 000 000 000 m^3	1 000 000 m^3	1 000 m^3	1 m^3	0,001 m^3	0,000001 m^3	0,000000001 m^3

Relacionando essas unidades de medida, verificamos:

- cada unidade é a milésima parte da unidade imediatamente superior;
- cada unidade é 1 000 vezes a unidade imediatamente inferior.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $1\ cm^3 = 0{,}001\ dm^3$

b) $1\ mm^3 = (0{,}001 \times 0{,}001)\ dm^3 = 0{,}000001\ dm^3$

c) $1\ km^3 = 1\,000\,000\,000\ m^3 = (1\,000\,000\,000 \times 1\,000)\ dm^3 = 1\,000\,000\,000\,000\ dm^3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

17 Represente as medidas de volumes indicadas a seguir, usando algarismos e símbolos do Sistema Internacional de Unidades.

a) trinta e cinco metros cúbicos **17. a)** $35\ m^3$
b) quarenta centímetros cúbicos **17. b)** $40\ cm^3$
c) quinze quilômetros cúbicos **17. c)** $15\ km^3$
d) três milímetros cúbicos **17. d)** $3\ mm^3$
e) oito decímetros cúbicos **17. e)** $8\ dm^3$
f) seis decâmetros cúbicos **17. f)** $6\ dam^3$

18 Indique a unidade de medida mais adequada, no Sistema Internacional de Unidades, para calcular a medida do volume:

a) das águas do planeta Terra; **18. a)** km^3
b) da água da piscina de um clube; **18. b)** m^3
c) do líquido contido em uma seringa; **18. c)** cm^3 ou mm^3
d) do ar contido em uma sala de aula; **18. d)** m^3
e) de um manto de gelo (associação de muitas geleiras); **18. e)** km^3
f) do ar contido em um elevador; **18. f)** m^3
g) do pó químico contido em um extintor de incêndio. **18. g)** cm^3


HART PHOTOGRAPHY/SHUTTERSTOCK

Bombeiro usando extintor de incêndio.

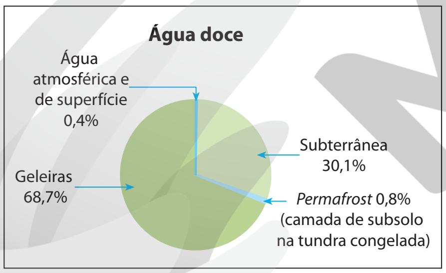
19 Leia o texto e responda às questões a seguir.

A **hidrosfera** é a parte da superfície terrestre coberta pelas águas oceânicas e continentais. Ela engloba oceanos, mares, rios, lagos, lençóis subterrâneos, geleiras e neves eternas. A hidrosfera da Terra tem um volume aproximado de **1,4 bilhão de km³**; estima-se que 97,5% das águas sejam salgadas.

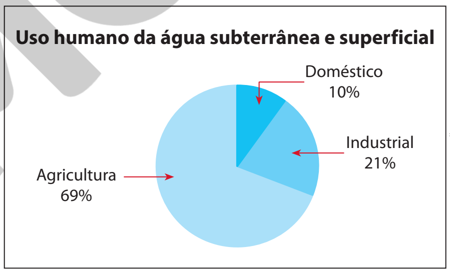
JOSÉ LUÍS JUHAS/ ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: **Almanaque Abril 2014**. São Paulo, Abril, 2015. p. 200.

a) Calcule, em quilômetro cúbico, o volume de água doce do nosso planeta. **19. a)** $35\,000\,000\ km^3$
b) Calcule, em quilômetro cúbico, os dados dos gráficos abaixo.



Dados obtidos em: **Almanaque Abril 2014**. São Paulo, 2015. p. 201.



Dados obtidos em: **Almanaque Abril 2014**. São Paulo, 2015. p. 201.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

19. b) água atmosférica e de superfície: $140\,000\ km^3$; *permafrost*: $280\,000\ km^3$; subterrânea: $10\,535\,000\ km^3$; geleiras: $24\,045\,000\ km^3$; uso doméstico: $1\,067\,500\ km^3$; uso industrial: $2\,241\,750\ km^3$; uso agrícola: $7\,365\,750\ km^3$

Exercícios propostos

Na resolução do **exercício 18**, mesmo que ele trate de grandezas que envolvem três dimensões, os estudantes devem ser incentivados a retomar o conhecimento sobre unidades de medida de comprimento e as maneiras de estimar medidas dessa natureza. No **item a**, por exemplo, devem lembrar que, se usam o quilômetro (km) como unidade de medida de comprimento, é natural usarem o quilômetro cúbico (km^3) para expressar a medida de volume.

Aproveite o **exercício 19** para discutir com os estudantes, possivelmente em um estudo interdisciplinar com Geografia e Ciências, a importância do uso comedido da água potável, indispensável à vida, da necessidade da preservação e da não poluição de mananciais, rios e lagos.

Ao trabalhar com esses assuntos, contribui-se para o desenvolvimento da **competência geral 10** e do Tema Contemporâneo Transversal **educação ambiental**.

Questione os estudantes sobre qual é a porcentagem do uso doméstico da água doce do planeta, considerando que ele corresponde a 10% do uso humano da água subterrânea e superficial, e que este corresponde a 30,5% (0,4% + 30,1%) da água doce, equivalente a 2,5% da água do planeta. (Resposta: 0,0007625% $(0{,}1 \cdot 0{,}305 \cdot 0{,}025)$.)

A resolução do **exercício 19** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Transformação de unidades de medida

A transformação de unidades de medida de uma mesma grandeza é um problema a resolver em uma gama enorme de atividades, pessoais ou profissionais, de aplicações ou de projetos, individuais ou coletivas.

Solicite aos estudantes um levantamento de situações em que seja necessário fazer transformações de unidades de mesma grandeza.

Proponha a eles uma pesquisa na internet sobre os benefícios da utilização do tijolo ecológico comparados aos da utilização do tijolo cerâmico. Sugira também uma pesquisa sobre inovações ecológicas que podem ser utilizadas no dia a dia.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 20** a **23** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Após a resolução do **exercício 21**, peça a dois ou três estudantes que expliquem aos demais como chegaram à solução, dando destaque à necessidade de expressar todas as medidas em uma mesma unidade antes de efetuar qualquer tipo de operação, ou então os resultados serão absurdos.

Depois de todos os estudantes resolverem o **exercício 23**, pergunte a eles quais relações entre unidades foram necessárias para chegar à resposta e por que os cálculos não podem ser feitos com unidades de medida diferentes.

Observação

- Volume é uma grandeza associada ao objeto geométrico sólido. A medida do volume nos dá a ideia da sua extensão no espaço. Assim, consideramos três componentes: a grandeza (volume), o objeto geométrico (sólido) e a medida (número). Porém, para uma melhor comunicação, veículos de informação (jornais, revistas etc.) optam por uma linguagem mais direta, não distinguem volume e medida do volume. Por exemplo, em vez de "a medida do volume de água liberada, por segundo, pela Amazônia para o oceano Atlântico é 300 mil m³", exprimem "o volume de água liberada, por segundo, pela Amazônia para o oceano Atlântico é 300 mil m³".

Transformação de unidades de medida

Em algumas situações do dia a dia, é necessário transformar uma unidade de volume em outra. Você já viu que cada unidade de volume é 1 000 vezes maior que a unidade imediatamente inferior. Por isso, as transformações de unidades de volume podem ser feitas segundo o esquema abaixo.

$$km^3 \underset{:1000}{\overset{\times 1000}{\rightleftarrows}} hm^3 \underset{:1000}{\overset{\times 1000}{\rightleftarrows}} dam^3 \underset{:1000}{\overset{\times 1000}{\rightleftarrows}} m^3 \underset{:1000}{\overset{\times 1000}{\rightleftarrows}} dm^3 \underset{:1000}{\overset{\times 1000}{\rightleftarrows}} cm^3 \underset{:1000}{\overset{\times 1000}{\rightleftarrows}} mm^3$$

Acompanhe uma situação em que aplicamos a conversão de unidades de volume.

A medida do volume da massa de um tijolo ecológico produzido em uma fábrica é de 3 375 cm³. Quantos desses tijolos é possível fabricar com 135 m³ de matéria-prima?

Inicialmente, escrevemos 135 m³ em centímetro cúbico: $m^3 \xrightarrow{\times 1000} dm^3 \xrightarrow{\times 1000} cm^3$

Para isso, devemos multiplicar 135 por 1 000 · 1 000, ou seja, multiplicar 135 por 1 000 000.

$$135\ m^3 = (135 \cdot 1\,000\,000)\ cm^3 = 135\,000\,000\ cm^3$$

Em seguida, dividimos 135 000 000 por 3 375 para obter o número de tijolos procurado:

$$135\,000\,000 : 3\,375 = 40\,000$$

Portanto, com 135 m³ de matéria-prima, a fábrica produz 40 000 tijolos ecológicos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

20 Na construção de 39 km do prolongamento da rodovia dos Boiadeiros, foram escavados 8 800 000 m³ de terra. Isso equivale a quantos quilômetros cúbicos? **20.** 0,0088 km³

21 Em um copo cabem 250 cm³ de farinha. Quantos desses copos cheios de farinha são necessários para encher uma vasilha que tem 2 dm³ de volume? **21.** 8 copos.

22 Um *freezer*, com medida do volume interno útil de 1,17 m³, armazena potes de sorvete de 1,8 dm³. Supondo que as dimensões do *freezer* permitam utilização total do espaço interno para esse tipo de pote, até quantos potes de sorvete desse tipo podem ser guardados no *freezer*? **22.** 650 potes.

23 A massa preparada por Liz para fazer goiabada ocupou toda a vasilha com 5,4 dm³ de medida de volume. Com ela, Liz fez 300 tabletes iguais de goiabada.

a) Quantos centímetros cúbicos tem cada um desses tabletes de goiabada? **23. a)** 18 cm³

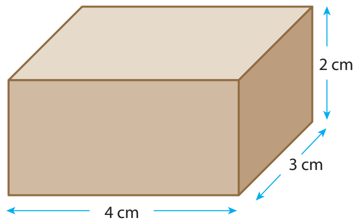
b) Quanto Liz receberá se vender todos os tabletes a R$ 0,60 cada um? **23. b)** R$ 180,00.

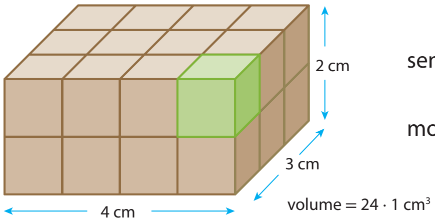
c) De quantos decímetros cúbicos dessa massa Liz precisaria para fazer 500 desses tabletes? **23. c)** 9 dm³

5 Volume de um paralelepípedo de faces retangulares

A figura representa um paralelepípedo de faces retangulares medindo 4 cm de comprimento, 3 cm de largura e 2 cm de altura. Vamos determinar a medida do seu volume em centímetro cúbico.

Para isso, dividimos o paralelepípedo em cubos de aresta de medida 1 cm.



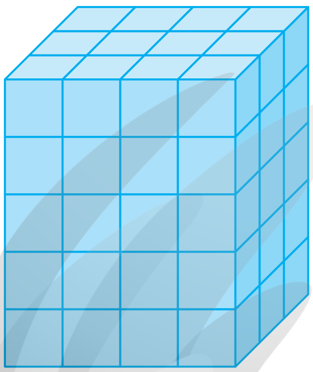


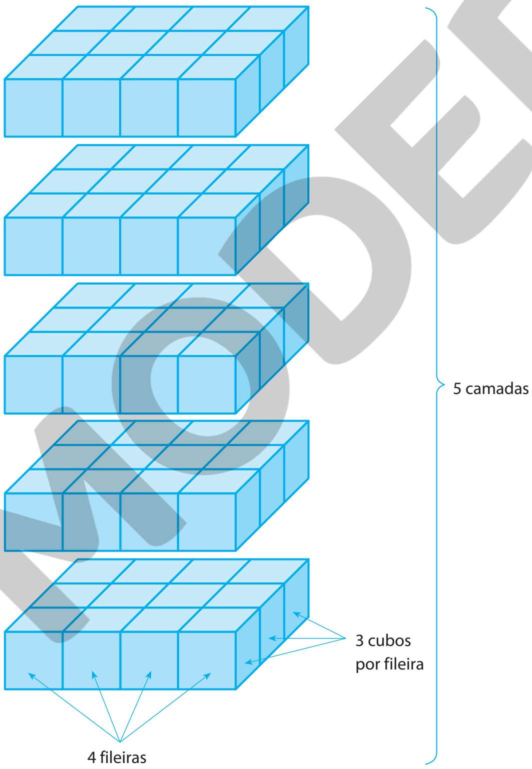
Nesse caso, cada um desses pequenos cubos representa uma unidade de volume: 1 cm^3.

Contando a quantidade de pequenos cubos, obtemos a medida do volume do paralelepípedo: 24 cm^3.

Nem sempre a simples contagem de cubos é conveniente para determinar o volume de um paralelepípedo.

Considere a figura a seguir. Esse paralelepípedo foi dividido em cubos de aresta de medida 1 cm. Ele é constituído de 5 camadas de cubos e, em cada camada, há 4 fileiras de 3 cubos em cada uma. Observe a figura das 5 camadas.





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

5. Volume de um paralelepípedo de faces retangulares

Habilidade da BNCC: **EF07MA30**.

Neste tópico abordaremos o cálculo da medida do volume de blocos retangulares, complementando o trabalho com a habilidade (EF07MA30).

Previamente, apresente aos estudantes a planificação da superfície de um cubo com 10 cm de aresta e solicite a cada um que construa em casa, com cartolina, alguns cubos (de 6 a 10, dependendo do número de estudantes na turma).

Depois, em grupos ou em ação coletiva de toda a turma, eles devem compor (montar), com o conjunto desses cubos construídos, vários outros cubos ou paralelepípedos retângulos. Considerando cada cubo como uma unidade de medida de volume, peça aos estudantes que calculem o volume de cada cubo ou paralelepípedo retângulo montado.

Volume de um cubo

Solicite aos estudantes que calculem, em centímetro cúbico e em decímetro cúbico, o volume dos cubos que construíram em casa. (Resposta: 1000 cm^3; 1 dm^3)

Exercícios propostos

No **exercício 24**:

a) Como a medida da área do piso da sala é igual à medida do comprimento do piso multiplicado pela medida da sua largura, temos:

$7 \cdot 6{,}40 = 44{,}8$

Logo, a área do piso da sala mede $44{,}8 \text{ m}^2$.

b) A sala de aula tem o formato de um bloco retangular. Então:

$7 \cdot 6{,}40 \cdot 3{,}20 = 143{,}36$

Logo, o volume de ar da sala de aula mede $143{,}36 \text{ m}^3$.

Depois da resolução desse exercício, com o intuito de ampliar os referenciais de **área** e **volume**, solicite aos estudantes que obtenham as medidas reais da própria sala de aula onde estudam e, com elas, calculem a medida da área do piso da sala (em metro quadrado) e a medida do volume do ar da sala de aula (em metro cúbico). Neste caso, é adequado o uso de calculadora.

Boas aproximações para o **exercício 25** são: 1 dm^3 para a bola de futsal infantil e 1 cm^3 para a bola de gude.

Resolução do **exercício 26**:

a) Medida do volume da caçamba do caminhão, em cm^3:

$4 \cdot 1{,}75 \cdot 2{,}2 = 15{,}4$

Logo, podem ser transportados no máximo $15{,}4 \text{ m}^3$ de terra em cada caminhão.

b) $337{,}5 : 15{,}4 \simeq 21{,}9$

Portanto, serão necessárias no mínimo 22 viagens para transportar todo o entulho.

Ao todo, obtemos:

$$\underbrace{(5}_{\text{camadas}} \cdot \underbrace{4}_{\text{fileiras por camada}} \cdot \underbrace{3)}_{\text{cubos por fileira}} \text{ cubos} = 60 \text{ cubos}$$

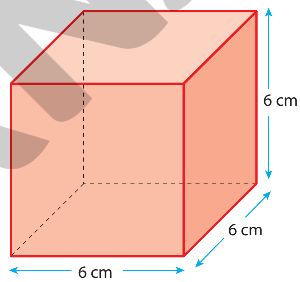
Como cada cubo tem 1 cm^3 de medida de volume, esse paralelepípedo mede 60 cm^3 de volume. Essa medida também pode ser obtida multiplicando-se as dimensões do paralelepípedo: $(5 \cdot 4 \cdot 3) \text{ cm}^3 = 60 \text{ cm}^3$.

Procedendo do mesmo modo, concluímos que a medida do volume do paralelepípedo marrom do início deste item, cujas dimensões são 4 cm, 3 cm e 2 cm, também pode ser obtida efetuando-se $(4 \cdot 3 \cdot 2) \text{ cm}^3 = 24 \text{ cm}^3$.

Medida do volume do paralelepípedo = (medida do comprimento) · (medida da largura) · (medida da altura)

Volume de um cubo

Como você já estudou, o cubo é um paralelepípedo de faces retangulares cujas arestas têm a mesma medida. Assim, para determinar a medida de seu volume, basta multiplicar as medidas de seu comprimento, de sua largura e de sua altura.



Então, se a aresta de um cubo mede 6 cm, a medida do seu volume, em centímetro cúbico, é dada por:

$$(6 \cdot 6 \cdot 6) \text{ cm}^3 = 6^3 \text{ cm}^3 = 216 \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume do cubo mede 216 cm^3.

Medida do volume do cubo = (medida da aresta)^3

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

24 Uma sala de aula mede 7 m de comprimento, 6,40 m de largura e 3,20 m de altura. Calcule:

a) a medida da área do piso; **24. a)** $44{,}8 \text{ m}^2$

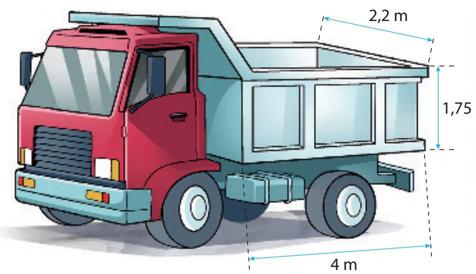
b) a medida do volume do ar da sala de aula. **24. b)** $143{,}36 \text{ m}^3$

25 Faça algumas estimativas. **25.** Respostas pessoais.

a) Quantas bolas de futsal infantil cabem em sua sala de aula? **25. a) e b)** Orientações: Boas aproximações são 1 dm^3 para a bola de futsal infantil e 1 cm^3 para a bola de gude.

b) E quantas bolas de gude?

26 Um deslizamento ocorrido em uma encosta de estrada deslocou $337{,}5 \text{ m}^3$ de terra sobre a pista. Para a limpeza desse lugar, a prefeitura destinou caminhões com as dimensões indicadas na figura a seguir.



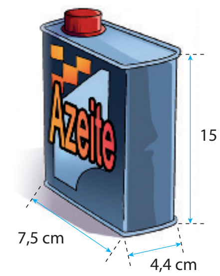
26. a) $15{,}4 \text{ m}^3$

a) No máximo, quantos metros cúbicos de terra podem ser transportados em cada caminhão?

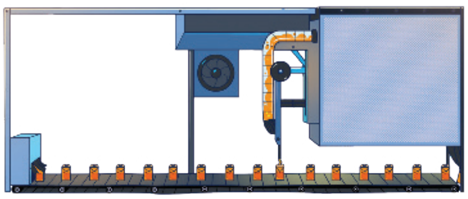
b) No mínimo, quantas viagens serão necessárias para transportar todo o entulho utilizando apenas um caminhão?

26. b) 22 viagens.

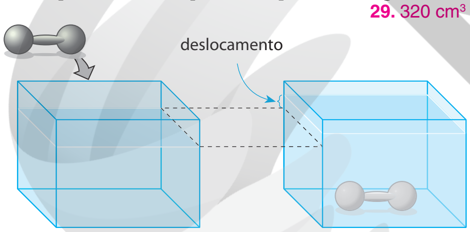
27 Observe as dimensões da lata de azeite indicadas na figura a seguir e calcule, em decímetro cúbico, a medida do volume de azeite que a preenche. **27.** 0,495 dm³



28 Os sucos de fruta produzidos em uma fábrica são vendidos em embalagens medindo 12 cm de altura, 4,5 cm de largura e 3,5 cm de profundidade. Sabendo que o reservatório usado para encher as embalagens é uma caixa cúbica medindo 2,5 m de aresta, aproximadamente quantas embalagens de suco são necessárias para utilizar todo o conteúdo do reservatório? Use uma calculadora para facilitar seus cálculos. **28.** 82 672 embalagens.



29 Uma das maneiras de calcular a medida do volume de um objeto é mergulhá-lo em um recipiente contendo água. O volume da água deslocada corresponde ao volume do objeto. Calcule, em centímetro cúbico, a medida do volume de um peso para ginástica, sabendo que a base do recipiente mede 0,4 m por 0,2 m e que o nível da água sobe de 0,340 m para 0,344 m quando o peso é mergulhado. **29.** 320 cm³



30 Considerando cubinhos de aresta medindo 1 milímetro, responda às questões a seguir.

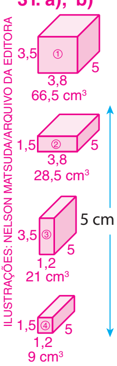
a) Quantos desses cubinhos são necessários para formar um cubo de aresta medindo 1 metro? **30. a)** 1 bilhão (10^9)

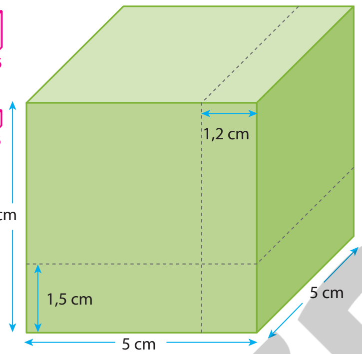
b) Se você empilhar essa quantidade de cubinhos, um sobre o outro, qual será a medida da altura da pilha?

30. b) 1 bilhão de milímetros ou 1 milhão de metros.

31 Leonardo fez alguns cortes em um modelo de cubo de espuma, conforme mostra a imagem a seguir.

31. a); b)





a) Desenhe no caderno cada um dos quatro paralelepípedos de faces retangulares em que esse cubo ficou dividido.

b) Qual é a medida do volume de cada um?

c) Qual era a medida do volume do cubo antes de ser cortado? **31. c)** 125 cm³

32 O bolo de casamento representado a seguir tem 3 camadas, cada uma medindo 6 cm de altura. A camada do topo do bolo tem as medidas: 30 cm de comprimento e 20 cm de largura. As demais camadas aumentam sempre 15 cm em cada uma das medidas (comprimento e largura). Quantos centímetros cúbicos mede esse bolo? **32.** 31 050 cm³

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 30** e **31** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Uma das maneiras de resolver o **exercício 27** é multiplicar as medidas das dimensões da lata de azeite e, depois, transformar o resultado de centímetro cúbico para decímetro cúbico. Acompanhe:

$7{,}5\ \text{cm} \cdot 4{,}4\ \text{cm} \cdot 15\ \text{cm} = 495\ \text{cm}^3$

Para transformar de cm³ para dm³ dividimos por 1 000.

$495 : 1000 = 0{,}495$

Logo, a medida do volume de azeite que preenche a lata é 0,495 dm³.

No **exercício 28**, convertendo a unidade de medida de comprimento da caixa cúbica de metro para centímetro, os estudantes devem concluir que a sua capacidade é para 15 625 000 cm³. Como cada embalagem de suco tem capacidade para 189 cm³, então a caixa cúbica seria suficiente para encher aproximadamente 82 672 dessas embalagens.

Para trabalhar o **exercício 29**, havendo condições, uma boa prática é realizar experimentos em sala de aula usando os materiais disponíveis, com os quais seja possível observar essa maneira de calcular a medida do volume de um objeto. Com certeza será um momento significativo para os estudantes.

Acompanhe sua resolução.

Vamos chamar a medida do volume do peso de V_o, a medida do volume do recipiente antes de colocar o peso de V_I e a medida do volume do recipiente depois de colocar o peso de V_{II}. Assim:

$V_o = V_{II} - V_I$

$V_o = (h_{II} - h_I) \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2$

$V_o = (0{,}344 - 0{,}340) \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}2$

$V_o = 0{,}00032$

$0{,}00032 \cdot 1\,000\,000 = 320$

Logo, a medida do volume do peso é 320 cm³.

Uma das maneiras possíveis de resolver o **exercício 32** é organizar as informações dadas em um quadro.

	Comprimento	Largura	Altura	Volume
1ª camada	30 cm	20 cm	6 cm	3 600 cm³
2ª camada	45 cm	35 cm	6 cm	9 450 cm³
3ª camada	60 cm	50 cm	6 cm	18 000 cm³

Logo, a medida do volume total do bolo será 31 050 cm³.

Exercícios propostos

No **exercício 33**:

a) Medida do volume do bolo:

$48\text{ cm} \cdot 30\text{ cm} \cdot 8\text{ cm} = 11\,520\text{ cm}^3$

Como o bolo foi dividido igualmente entre 24 pessoas, temos:

$11\,520\text{ cm}^3 : 24 = 480\text{ cm}^3$

Logo, cada um recebeu 480 cm^3 de bolo.

b) A fatia A, pois seu volume é de 480 cm^3. Os volumes das fatias B e C são, respectivamente, 400 cm^3 e 240 cm^3, porções menores do que cada um recebeu.

c) Como a fatia C tem 240 cm^3 de medida de volume, temos:

$11\,520\text{ cm}^3 : 240\text{ cm}^3 = 48$

Logo, o número máximo seria de 48 fatias.

A resolução do **exercício 34** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 35** apresentamos uma proposta de elaboração de problemas. Oriente os estudantes para que os problemas elaborados tenham os dados necessários para sua resolução.

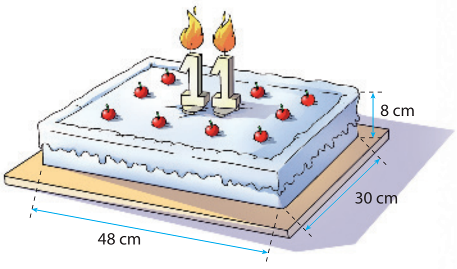
Pense mais um pouco...

Os estudantes podem experimentar diferentes estratégias para a resolução: contar os paralelepípedos ou cubos do sólido; contar os que faltam para completar o paralelepípedo ou o cubo; calcular a diferença da quantidade entre o "todo" e a "parte"; calcular a diferença entre as medidas dos volumes do "todo" e da "parte".

As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

---

33 Rafael pediu à sua mãe que fizesse um bolo para comemorar seu aniversário com alguns amigos. O bolo tinha as medidas indicadas na figura.



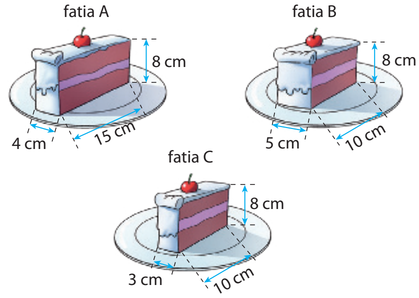
CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando essa situação, responda às questões a seguir.

a) No dia do aniversário, o bolo foi dividido igualmente entre as pessoas presentes na casa de Rafael: os 23 amigos e o aniversariante. Quantos centímetros cúbicos de bolo cada um recebeu? **33. a)** 480 cm^3

b) Entre as fatias a seguir, qual pode representar a fatia de bolo que cada um recebeu? Por quê?

33. b) A fatia **A**, pois seu volume é de 480 cm^3. Os volumes das fatias **B** e **C** são, respectivamente, 400 cm^3 e 240 cm^3, porções menores do que cada um recebeu.



ILUSTRAÇÕES: CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

c) Qual é o número máximo de fatias em que o bolo poderia ser cortado se cada uma tivesse as medidas indicadas na fatia **C**? **33. c)** 48 fatias.

34 Um contêiner de 20 pés tem as seguintes dimensões: 6,058 m de comprimento, 2,438 m de largura e 2,591 m de altura. Use uma calculadora para obter a medida do volume desse contêiner. **34.** $38{,}267525764\text{ m}^3$

35 ***Hora de criar*** – Elabore um problema, sobre volume das pedras de um jogo de dominó, que têm a forma de paralelepípedo. Troque-o como o de um colega. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **35.** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...

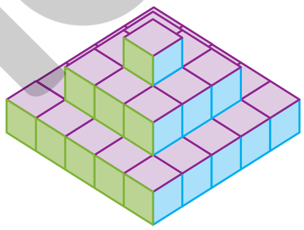
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

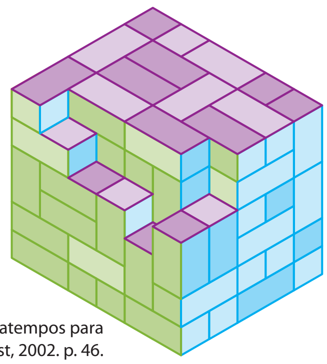
Pense mais um pouco...:

Reúna-se com um colega e cronometrem o tempo que levam para realizar o que se pede.

1 O sólido representado à direita é composto de paralelepípedos que medem $1 \times 1 \times 2$. Quantos desses paralelepípedos compõem o sólido? (Vocês podem imaginar que os paralelepípedos "ocultos" estão presentes.) **1.** 84 paralelepípedos.

2 O sólido representado à esquerda é composto de cubos de aresta 1. Quantos desses cubos faltam para transformar esse sólido em um cubo de aresta 5? **2.** 90 cubos.





Fonte: *Treinando seu cérebro*: centenas de jogos e passatempos para exercitar sua mente. Rio de Janeiro: Reader's Digest, 2002. p. 46.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Para saber mais

Habilidade da BNCC: **EF07MA37**.

A leitura do gráfico de setores com os estudantes contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF07MA37). Explique a eles que o retângulo representado à direita do gráfico indica a distribuição dos usos setoriais da água. Logo, eles devem compreender que, do total de água retirada no Brasil, 70% são usados para irrigação, abastecimento humano urbano, indústria, uso animal, termelétricas, mineração e abastecimento humano rural.

A **atividade 1** do **Agora é com você!** possibilita um trabalho interdisciplinar com Geografia. Para isso, proponha aos estudantes que façam uma pesquisa sobre o conceito de sazonalidade e sua relação com a retirada de água (evaporação e consumo). Discuta como condições ambientais e operacionais podem afetar a evaporação e o consumo de água.

As resoluções das **atividades 2** a **5** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

PARA SABER MAIS

Arredondar para fazer estimativas

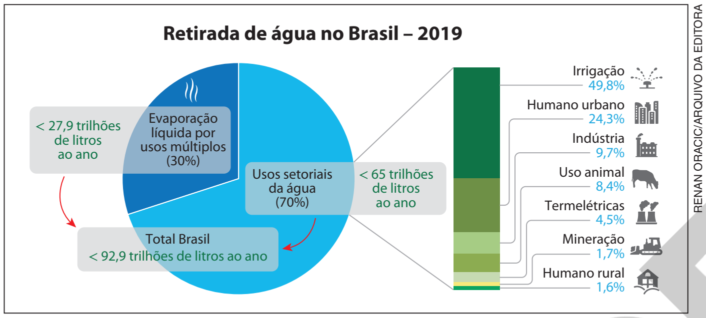
Leia o texto a seguir:

"No Brasil, a água é utilizada principalmente para irrigação de lavouras, abastecimento público, atividades industriais, geração de energia, extração mineral, aquicultura, navegação, turismo e lazer. Cada uso depende e pode afetar condições específicas de quantidade e de qualidade das águas. [...]

Cerca de **93 trilhões de litros de água são retirados anualmente** de fontes superficiais e subterrâneas para atender aos diversos usos consuntivos múltiplos e setoriais. A evaporação líquida, a irrigação, a termeletricidade e algumas indústrias apresentam forte **sazonalidade**, ou seja, o consumo de água pode variar expressivamente dentre os meses de um mesmo ano.

O conhecimento sobre os usos da água é constantemente aprimorado por meio de levantamentos, estudos setoriais e cadastros de usuários. Para que vários setores usufruam da água, a ANA realiza estudos e emite normas que garantem o acesso aos recursos hídricos."

Agora, considere o gráfico:



Fonte: Agência Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA). Disponível em: https://www.gov.br/ana/pt-br/assuntos/gestao-das-aguas/usos-da-agua. Acesso em: 23 maio 2022.

No gráfico, podemos observar:

- A soma das porcentagens referentes aos setores "Evaporação Líquida" e "Usos setoriais da água" é, como deve ser em todos os gráficos de setores, igual a 100%.
- A coerência dos dados percentuais e dos dados brutos. Por exemplo, 30% de 92,9 trilhões, de fato, equivale a 27,9 trilhões.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Como você explicaria a um colega o significado de "A evaporação líquida, a irrigação, a termoelétrica e algumas indústrias apresentam forte sazonalidade." **1.** Resposta pessoal.

2 Qual é a soma dos percentuais referentes aos vários Usos setoriais da água? **2.** 100%

3 Quantos litros de água o setor da irrigação consumiu em 2019? **3.** 32,37 trilhões de litros.

4 Em 2019, quantos litros de água o Humano (urbano mais rural) consumiu a mais do que o Uso animal? **4.** 11,375 trilhões de litros.

5 A indústria consumiu 9,7% de 70% da água retirada em 2019. Esse consumo (9,7% de 70%) equivale a quantos por cento do total (Evaporação líquida mais Usos setoriais da água)? **5.** 6,79%

Exercícios complementares

Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de retomar os principais conteúdos estudados no capítulo e mobilizar os conhecimentos construídos. Verifique se ainda apresentam dificuldade em algum deles e, se for este o caso, sugira que refaçam exercícios referentes a tais assuntos.

No **exercício 1**, a medida da área do triângulo hachurado será:

$(8\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}) : 2 = 16\text{ cm}^2$

Logo, a alternativa correta é **a**.

A área de cada quadradinho da malha do **exercício 2** mede $2{,}25\text{ cm}^2$ $(1{,}5 \cdot 1{,}5)$. A figura desenhada é composta de 60 quadradinhos; logo, sua área mede 135 cm^2.

O **exercício 3** segue o mesmo raciocínio do **exercício 2**. No **item a**, temos 45 cm^2; no **item b**, $40{,}50\text{ cm}^2$; e no **item c**, 9 cm^2.

Resolução do **exercício 4**:

Como o revestimento tem o formato de um bloco retangular, tem:

$3\text{ cm} = 0{,}03\text{ m}$

$10 \cdot 14 \cdot 0{,}03 = 4{,}2$

Logo, o volume da mistura deverá medir $4{,}2\text{ m}^3$.

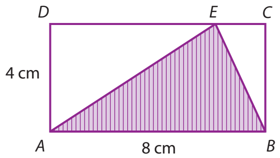
As resoluções dos **exercícios 5** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

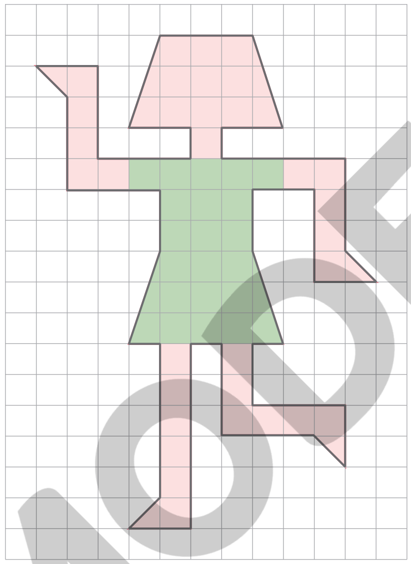
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 (FMU-SP) Sendo E um ponto qualquer do lado $\overline{CD}$ do retângulo $ABCD$, a área do triângulo hachurado será: **1.** Alternativa **a**.

a) 16 cm^2.
b) 12 cm^2.
c) 8 cm^2.
d) 32 cm^2.
e) 6 cm^2.

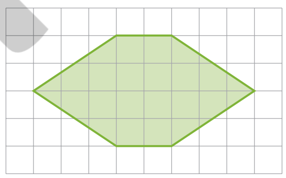


2 Calcule a medida da área da figura desenhada na malha quadriculada a seguir, sabendo que o lado do quadradinho da malha mede 1,5 cm.
2. 135 cm^2

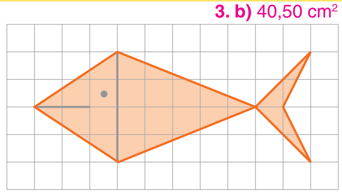


3 Determine a área de cada figura, considerando que o lado do quadradinho do quadriculado mede 1,5 cm.

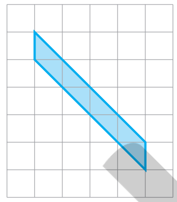
a) **3. a)** 45 cm^2



b) **3. b)** $40{,}50\text{ cm}^2$



c) **3. c)** 9 cm^2



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

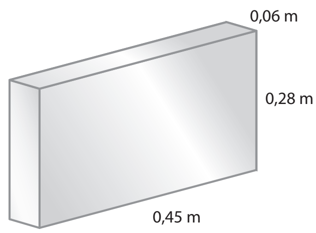
4 Deseja-se cimentar, com uma mistura de areia e cimento, um quintal retangular com 10 m por 14 m de medidas. O revestimento terá 3 cm de medida de espessura. Qual deverá ser a medida do volume dessa mistura? **4.** $4{,}2\text{ m}^3$

5 (Unifor-CE) Um aquário com a forma de paralelepípedo de faces retangulares (ou bloco retangular) tem 40 cm de comprimento, 30 cm de largura e 20 cm de altura e contém água, que ocupa $\frac{2}{3}$ de sua capacidade. Um objeto é mergulhado na água de maneira que o conteúdo do aquário passa a ocupar 19.600 cm^3. O volume desse objeto em centímetro cúbico é:

a) 600.
b) 2.800.
c) 3.600.
d) 4.800.
e) 5.600.

5. Alternativa **c**.

6 Uma peça de alumínio tem as medidas indicadas, em metro, na figura a seguir. Sabendo que 1 cm^3 de alumínio tem 2,7 g, quantos quilogramas tem essa peça? **6.** 20,412 kg

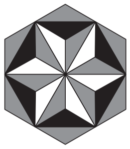


7 Um conta-gotas tem capacidade de 2,5 cL. Qual é a medida de sua capacidade em mililitro?
7. 25 mL

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A figura representada a seguir é formada por regiões triangulares congruentes. Considerando que uma dessas regiões tenha 1 cm² de área, qual é a medida de área da região colorida de cinza? **1.** Alternativa **c**.



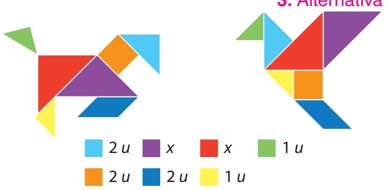
a) 6 cm² b) 10 cm² c) 12 cm² d) 18 cm²

2 Considere uma região retangular formada por 42 quadradinhos, cada um medindo 2 cm² de área. Quanto mede o lado de cada quadradinho e qual é a medida da área total da região retangular?

a) 1 cm e 42 cm².
b) 1 cm e 84 cm².
c) $\sqrt{2}$ cm e 42 cm².
d) $\sqrt{2}$ cm e 84 cm².

2. Alternativa **d**.

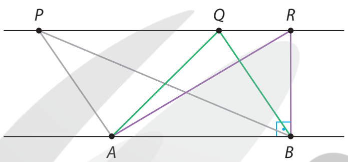
3 Considere as seguintes figuras formadas por peças de um tangram e a legenda que indica a medida da área da superfície de cada peça. **3.** Alternativa **b**.



Sabendo que a medida da área total da superfície de uma dessas figuras é de 48 cm² e que *x* é igual a 4 *u*, os valores de *x* e *u* são, respectivamente:

a) 4 cm² e 1 cm².
b) 12 cm² e 3 cm².
c) 16 cm² e 4 cm².
d) 48 cm² e 12 cm².

4 Os triângulos *ABP*, *ABQ* e *ABR* representados a seguir têm mesmas medidas de base e de altura.

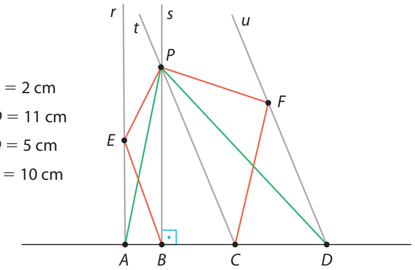


A partir dessas informações, podemos afirmar que eles são: **4.** Alternativa **a**.

a) equivalentes.
b) equiláteros.
c) congruentes.
d) isósceles.

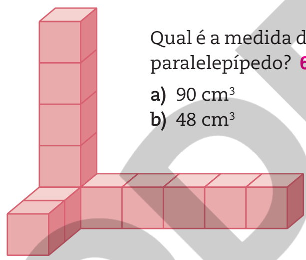
5 Dada a imagem a seguir e as informações contidas nela, qual é a medida da área do triângulo *BCP*? **5.** Alternativa **b**.

$AB = 2$ cm
$AD = 11$ cm
$CD = 5$ cm
$BP = 10$ cm



a) 10 cm² b) 20 cm² c) 25 cm² d) 55 cm²

6 Considere um paralelepípedo formado por cubinhos medindo 1 cm³. O esquema a seguir representa a quantidade de cubinhos que compõem a largura, o comprimento e a altura do paralelepípedo.



Qual é a medida do volume do paralelepípedo? **6.** Alternativa **a**.

a) 90 cm³
b) 48 cm³
c) 40 cm³
d) 14 cm³

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

7 Seja uma caixa com a forma de um paralelepípedo de arestas medindo 2 m, 2 m e 4 m, e outra, de mesmo formato, de arestas medindo 1 m, 2 m e 6 m, qual é a diferença entre os volumes dessas caixas? **7.** Alternativa **c**.

a) 1 m³ b) 2 m³ c) 4 m³ d) 6 m³

Organizando

Organizando:
a) Resposta possível: saber a quantidade de tinta para pintar uma parede, a quantidade de piso para cobrir uma superfície, a quantidade de adubo necessário para uma horta etc.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir:

a) Cite três situações do seu dia a dia em que o cálculo de medidas de áreas pode ser empregado.
b) O que são figuras equivalentes? **b)** Considerando uma mesma unidade de medida, são figuras que têm áreas iguais.
c) Qual é a medida do volume de um cubo de aresta medindo 1 m? E qual é a medida da aresta de um cubo com 1 cm³ de medida de volume? **c)** 1 m³; 1 cm.
d) Em que situações é preciso conhecer a medida do volume de algum objeto? Dê dois exemplos.
d) Resposta possível: a medida do volume de uma caixa-d'água para saber a quantidade de água que pode ser armazenada e a medida do volume de uma caixa de suco, para indicar a quantidade de suco que é vendida.

Verificando

Esses testes são mais uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo. Instrua-os a retornar às páginas anteriores caso alguma dúvida persista.

As resoluções dos **testes 1** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Organizando

Incentive os estudantes a organizar seu aprendizado no caderno, fazendo resumos, mapas conceituais ou aplicando destaques para conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo fazer com que eles retomem os conteúdos aprendidos no capítulo e reflitam sobre algumas temáticas. Após sua correção, é importante pedir aos estudantes que compartilhem suas respostas; essa estratégia permitirá o compartilhamento de dúvidas e percepções, contribuindo para o aprendizado de todos.

Para a resolução do **item c**, lembre os estudantes que basta multiplicar as medidas do comprimento, da largura e da altura de um cubo para determinar a medida de seu volume, ou seja, a medida do volume de um cubo é dada pela medida de sua aresta ao cubo. Portanto, a medida do volume de um cubo de aresta medindo 1 m é igual a 1 m³. A medida da aresta de um cubo cujo volume mede 1 cm³ é igual a 1 cm.

Capítulo 12 – Estudo da circunferência e do círculo

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, identificamos os elementos da circunferência e do círculo. Em seguida, calculamos o comprimento da circunferência de forma prática e empírica.

O estudo das posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências, assim como o estudo de segmentos tangentes a uma circunferência e de ângulo inscrito, apesar de bem ilustrados, podem ser reforçados com a manipulação de material concreto confeccionado ou trazido pelos estudantes, como círculos de papelão, argolas de pulseiras, canudos finos, pequenos botões etc.

Para responder ao **item a**, os estudantes devem buscar a informação no texto.

No **item b**, deve-se considerar que uma volta completa corresponde a um ângulo de 360° e, portanto, meia volta corresponde a 180°. Já no **item c**, como são 48 cabines, temos que a circunferência associada à estrutura da roda-gigante deve ser dividida em 48 partes. Como 360 : 48 = 7,5, temos que cada ângulo cujos lados são determinados pelo centro da roda-gigante e por uma cabine e pelo centro da roda-gigante e pela cabine vizinha é de 7,5°.

Capítulo

12 Estudo da circunferência e do círculo

KYRYLO NEIEZHMAKOV/ISTOCK PHOTO/GETTY IMAGES

A Ain Dubai, em Dubai, é uma das maiores rodas-gigantes do mundo. (Fotografia de 2020.)

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) Quantas pessoas cabem no máximo em um passeio de uma volta completa nessa roda-gigante? **a)** 1 750 pessoas.

b) A quantos graus corresponde o giro de deslocamento de uma cabine que está no ponto mais baixo até o ponto mais alto dessa roda-gigante? **b)** 180°

c) Qual é a medida aproximada do menor ângulo com vértice no centro da roda-gigante e lados que passem no centro de duas cabines vizinhas? **c)** 7,5°

Inaugurada em outubro de 2021, a Ain Dubai tem 250 metros de medida de altura. Está localizada na ilha artificial de Bluewaters, em Dubai. Ela tem 48 cabines de 30 m^2, com vista de 360°, que podem levar até 1 750 pessoas por vez. O passeio de uma volta completa pode durar até 38 minutos.

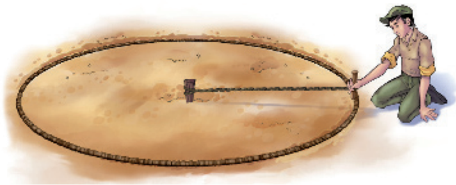
1 Circunferência

Canteiro de flores.

Observe a situação a seguir.

Para traçar o canteiro de uma praça, o jardineiro Luís usou uma corda presa a duas estacas de madeira, uma em cada ponta.

Com uma das estacas presa ao chão e mantendo a corda esticada, ele riscou a terra com a outra, dando uma volta completa.

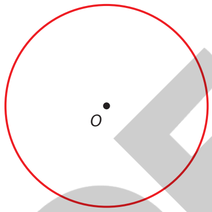


O traçado obtido pelo jardineiro dá a ideia de uma **circunferência**.

> **Circunferência** é a linha formada por todos os pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo desse plano.

Considere a circunferência a seguir.

Todos os pontos de uma circunferência são equidistantes de um ponto fixo, chamado de **centro da circunferência**. Nessa circunferência, o centro é o ponto *O*.

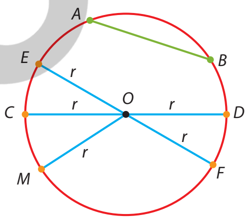


Destacamos alguns elementos em uma circunferência:

- **Raio**: segmento cujos extremos são o centro e um ponto qualquer da circunferência.
- **Corda**: segmento cujos extremos são dois pontos quaisquer de uma circunferência.
- **Diâmetro**: corda que passa pelo centro de uma circunferência. A medida do comprimento do diâmetro (D) é igual ao dobro da medida do comprimento do raio ($2r$). Assim:
  $D = 2r$

Na figura a seguir:

- $\overline{AB}$ é uma corda;
- $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são alguns dos diâmetros;
- $\overline{OM}$, $\overline{OC}$ e $\overline{OF}$ são alguns dos raios.



Observação

▶ A palavra **raio** será usada tanto para designar um segmento como para indicar a medida desse segmento. Assim, por exemplo, quando dizemos que uma circunferência tem raio 3,8 cm, queremos dizer que os infinitos segmentos que são raios dessa circunferência medem 3,8 cm.

1. Circunferência

Habilidades da BNCC: **EF07MA22** e **EF07MA33**.

Neste tópico, ao construir circunferências com o compasso, reconhecendo-as como um lugar geométrico, e empregá-las para elaborar composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes, aprofundamos o trabalho com a habilidade (EF07MA22). Também aqui, estabelecemos o número π como a razão entre as medidas do comprimento de uma circunferência e do seu diâmetro, contemplando a habilidade (EF07MA33) e antecipando informalmente o estudo a ser feito no 9º ano.

Para ilustrar e tornar concreta a propriedade que caracteriza a circunferência como um lugar geométrico e que a define, construa na lousa uma circunferência usando um barbante esticado. Fixando uma das pontas do barbante com um dedo e segurando um giz na outra ponta, faça esta girar, sempre com o barbante esticado para garantir que a distância entre as duas pontas seja a mesma, e dê uma volta completa.

Solicite a alguns estudantes que repitam essa experiência na lousa, cada um usando uma medida de comprimento diferente da dos demais, e identifiquem nesse procedimento o centro e um raio da circunferência traçada por eles.

Feito isso, peça a outros estudantes que estiquem, cada um, outro barbante que passe pelo centro da circunferência, obtendo um diâmetro dela. Nesse momento, questione se há alguma corda da respectiva circunferência com maior comprimento do que o do diâmetro. A resposta deve ser negativa. A seguir, eles devem dobrar ao meio o pedaço de barbante que representa um diâmetro e verificar que a sua medida é igual à medida do raio. Ou seja, a medida do diâmetro é o dobro da medida do raio.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 1** a **5** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Além de exercícios que pedem a identificação dos elementos da circunferência, os estudantes encontram o **exercício 3**, que solicita a construção de circunferências e a comparação entre as medidas de seus elementos. Neste exercício, e em outros em que os estudantes utilizarem compasso, instrua-os quanto ao uso cuidadoso a fim de evitarem se machucar com a ponta-seca do compasso.

Após responderem às questões, peça a eles que comparem, em grupo, suas escolhas e respostas com as dos colegas.

No **exercício 5**, comente com os estudantes que devemos supor que o contorno da cratera seja uma linha plana que possa ser associada a uma circunferência.

No **exercício 6**, verifique se foi percebido que as dimensões do retângulo, em unidade de comprimento *u*, são dadas pelas medidas do raio (3 *u*) e do diâmetro (6 *u*) da circunferência. Portanto, a medida do perímetro do retângulo *ABCD*, em *u*, é dada pela soma $3 + 6 + 3 + 6 = 18$.

No **exercício 7**, observando a figura, deve-se perceber que:

- a medida da base do retângulo (16) pode ser representada pela soma $x + y + y + x + y + y + x$, ou $3x + 4y$;
- a medida da altura do retângulo (9) pode ser representada pela soma $x + y + y + x$, ou $2x + 2y$.

Solução do sistema:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 16 \\ 2x + 2y = 9 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por qualquer um dos métodos já estudados, obtemos $x = 2$ e $y = 2{,}5$.

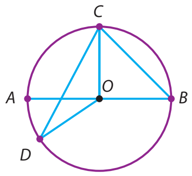
Portanto, a medida do raio da circunferência é 2,5 unidades de comprimento.

Oriente os estudantes na elaboração de problemas proposta no **exercício 8**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

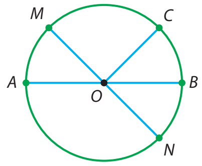
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Observe a circunferência e classifique, no caderno, os segmentos em raio, diâmetro ou corda.



a) $\overline{OB}$ **1. a)** Raio.
b) $\overline{OC}$ **1. b)** Raio.
c) $\overline{BC}$ **1. c)** Corda.
d) $\overline{AB}$ **1. d)** Diâmetro.
e) $\overline{CD}$ **1. e)** Corda.
f) $\overline{OD}$ **1. f)** Raio.

2 Considere a figura a seguir, depois responda às questões no caderno.



a) Se $OM = 3$ cm, quanto mede $\overline{AB}$? **2. a)** 6 cm
b) Se $MN = 8$ cm, quanto mede $\overline{OC}$? **2. b)** 4 cm
c) Se $OC = x$, quanto mede $\overline{OB}$? **2. c)** x
d) Se $OA = y$, quanto mede $\overline{AB}$? **2. d)** $2y$

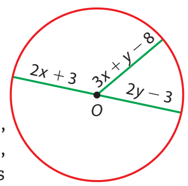
3 Com um compasso, trace três circunferências: uma de raio medindo 2 cm, outra de raio medindo 2,5 cm, e a terceira com a medida que você escolher. Em seguida, em cada uma delas, trace um diâmetro $\overline{AB}$, uma corda $\overline{CD}$, que não passe pelo centro O, e um raio $\overline{OE}$.

Considerando as possibilidades de suas escolhas para os pontos A, B, C, D e E, responda às questões no caderno.

a) $\overline{CD}$ pode ser maior que $\overline{AB}$? **3. a)** Não.
b) $\overline{AB}$ é sempre maior que $\overline{CD}$? **3. b)** Sim.
c) $\overline{CD}$ pode ser maior que $\overline{OE}$? **3. c)** Sim.
d) $\overline{CD}$ pode ser menor que $\overline{OE}$? **3. d)** Sim.
e) $\overline{AB}$ é sempre o dobro de $\overline{OE}$? **3. e)** Sim.

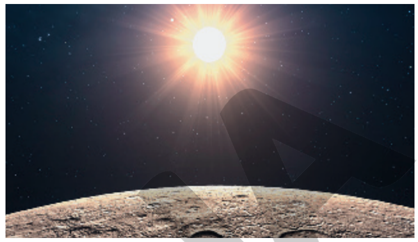
(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

4 Na figura, as expressões algébricas representam a medida dos raios da circunferência.



a) Escreva no caderno, com essas expressões, um sistema de duas equações com duas incógnitas.
b) Resolva o sistema do item **a** e calcule as medidas do raio e do diâmetro em unidades de comprimento (*u*).

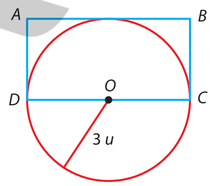
5 Uma das maiores crateras conhecidas do nosso Sistema Solar está em Mercúrio, o planeta mais próximo do Sol. O diâmetro dessa cratera mede aproximadamente 1 300 km. Determine, em metro, a medida aproximada do raio dessa cratera. **5.** 650 000 m



CHRIS BUTLER/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

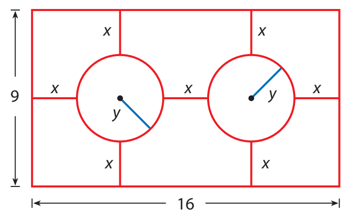
Superfície de Mercúrio. O Sol está a, aproximadamente, 58 000 000 km de distância de Mercúrio, pouco mais de $\frac{1}{3}$ da distância da Terra ao Sol.

6 Calcule a medida do perímetro do retângulo *ABCD*. **6.** 18 *u*



7 Junte-se a um colega e façam o que se pede.

Na figura a seguir há duas circunferências de mesmo raio, e as medidas estão em uma mesma unidade de comprimento *u*.



Escrevam e resolvam um sistema de duas equações com duas incógnitas para determinar a medida do raio das circunferências. **7.** 2,5 *u*

8 ***Hora de criar*** – Elabore um problema sobre circunferência. Troque-o com um colega e depois que cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem-nos para corrigi-los. **8.** Resposta pessoal.

4. a) Resposta possível: $\begin{cases} 2x + 3 = 3x + y - 8 \\ 2x + 3 = 2y - 3 \end{cases}$

4. b) Medida do raio: 11 *u*
Medida do diâmetro: 22 *u*

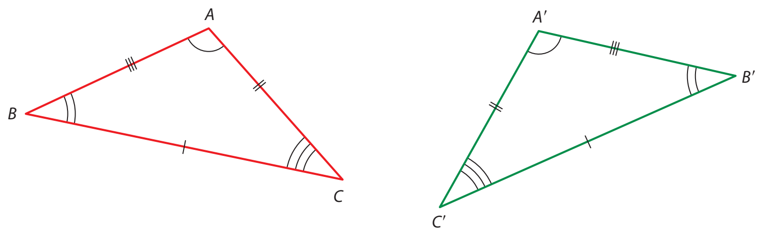
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

PARA SABER MAIS

Triângulos simétricos na circunferência

Já vimos que o conceito de congruência se aplica a elementos geométricos com medidas iguais. Por exemplo, segmentos congruentes têm medidas iguais; ângulos congruentes, também.

Podemos dizer que dois triângulos são congruentes quando as medidas de um deles são respectivamente iguais às medidas do outro: os lados de um são congruentes aos do outro e também os ângulos de um são congruentes aos ângulos do outro.

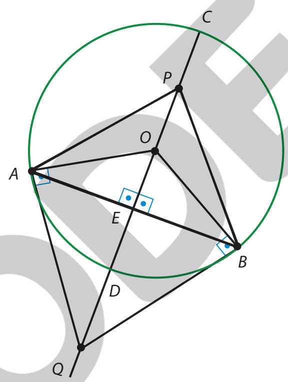


Lados congruentes:
$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$
$\overline{CB} \cong \overline{C'B'}$

Ângulos congruentes:
$A\hat{B}C \cong A'\hat{B}'C'$
$B\hat{A}C \cong B'\hat{A}'C'$
$A\hat{C}B \cong A'\hat{C}'B'$

Observe a figura. A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é um eixo de simetria.

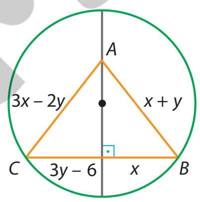
Dobrando a folha pela reta $\overleftrightarrow{CD}$, podemos perceber que há vários pares de triângulos que se sobrepõem; logo, são triângulos congruentes: $\triangle OAE \cong \triangle OBE$, $\triangle PAE \cong \triangle PBE$, $\triangle QAE \cong \triangle QBE$, $\triangle OAQ \cong \triangle OBQ$, $\triangle PAQ \cong \triangle PBQ$.



Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Considerando a figura a seguir, escreva e resolva um sistema de duas equações com duas incógnitas. Depois, calcule a medida do perímetro do triângulo *ABC*.
Resposta: 32 unidades de medida de comprimento.



Para saber mais

A primeira parte da seção apresenta a definição de triângulos congruentes por meio da congruência de seus respectivos elementos (lados e ângulos internos) apoiada nas figuras dos triângulos *ABC* e *A'B'C'*.

Depois, cita diversos pares de triângulos congruentes da outra ilustração que apresenta a circunferência, exceto um par de triângulos congruentes. Desafie os estudantes a descobrir que par é esse.

(Resposta: $\triangle PAO \cong \triangle PBO$)

A resolução do **Agora é com você!** é uma boa oportunidade para os estudantes, em grupos, voltarem a praticar a demonstração de uma proposição geométrica com base na simetria e, em seguida, aplicá-la em um sistema de duas equações com duas incógnitas, fazendo um elo com os capítulos 7 e 8.

Espera-se que os estudantes construam o sistema formado pelas equações:

$$\begin{cases} 3x - 2y = x + y \\ 3y - 6 = x \end{cases}$$

Substituindo *x* por $3y - 6$ na primeira equação, obtemos:

$3 \cdot (3y - 6) - 2y = 3y - 6 + y$
$9y - 2y - 18 = 4y - 6$
$9y - 2y - 4y = 18 - 6$
$3y = 12$
$\frac{3y}{3} = \frac{12}{3}$
$y = 4$

Substituindo *y* por 4 em $3y - 6 = x$, obtemos $x = 6$.

A medida do perímetro (*P*) do triângulo obtém-se substituindo *x* por 6 e *y* por 4 na expressão $3x - 2y + x + y + 3y - 6 + x$, que equivale a $5x + 2y - 6$, e efetuando as operações indicadas.

$P = 5 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 6 = 32$

O perímetro mede 32.

Círculo

Organize a turma em dois grupos com o mesmo número de estudantes. Dê cerca de 5 minutos para cada grupo levantar nomes de objetos que lembrem circunferências e outros que lembrem círculos.

Após o prazo determinado, um estudante representante de cada grupo deve listar na lousa os nomes de que seu grupo lembrou. A cada nome escrito, o grupo ganha pontos de acordo com o seguinte critério: 2 pontos se o outro grupo também escreveu aquele nome, 5 pontos em caso contrário. Ganha a competição o grupo que somar mais pontos.

Círculo

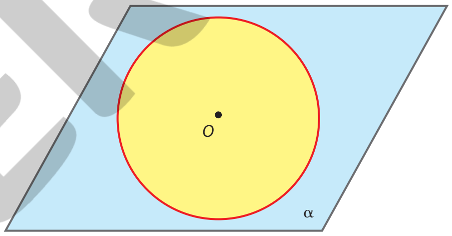
Uma circunferência de centro O, contida em um plano α, determina duas regiões: região interna e região externa.

MARCELO MACHADO DE MELO/FOTOARENA

O aro da ginasta lembra uma circunferência. Toda circunferência limita um círculo. Barbara Domingos, ginasta brasileira, durante final individual do aro da ginástica rítmica dos Jogos Pan Americanos Lima 2019. (Fotografia de 2019.)

Na figura a seguir:

- a circunferência está desenhada em vermelho;
- a região interna à circunferência está pintada de amarelo e o centro pertence à região interna;
- a região externa está pintada de azul.

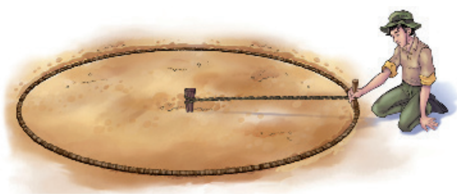


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A região do plano formada por uma circunferência e pela região interna a ela é chamada de **círculo**.

Comprimento de uma circunferência

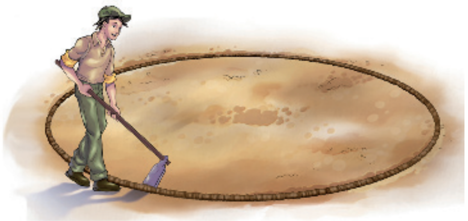
Vamos relembrar o exemplo do jardineiro Luís, apresentado anteriormente. Ele traçou o contorno de um canteiro em uma praça com duas estacas de madeira e uma corda esticada.



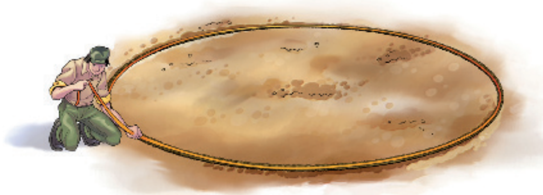
ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Vimos que o traçado obtido por Luís dá a ideia de uma circunferência.

Após o traçado, Luís fez, com uma enxada, um sulco sobre a circunferência.



Desejando saber quantos metros de tela seriam necessários para cercar esse canteiro, ele esticou uma corda, acompanhando o sulco, e cortou-a ao final do contorno.



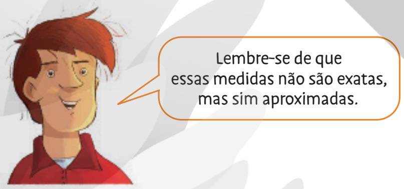
ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Depois, com uma trena, mediu a corda e verificou que a medida da distância entre as duas estacas, com a corda esticada, era igual a 3 m e que a medida do comprimento da circunferência era de 18,84 m. Desse modo, concluiu que seriam necessários aproximadamente 19 m de tela.

Considerando a distância entre as duas estacas, podemos dizer que ele traçou uma circunferência de 3 m de medida de raio, ou seja, de 6 m de medida de diâmetro.

Acompanhe outro exemplo.

Para determinar a medida do comprimento da circunferência de um pneu de bicicleta e a medida de seu diâmetro, podemos utilizar um barbante e uma fita métrica.



SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

DELFIM MARTINS/PULSAR IMAGENS

Jovem medindo com um barbante o contorno do pneu de uma bicicleta.

Comprimento de uma circunferência

Neste tópico são apresentadas a expressão para o cálculo da medida do comprimento de uma circunferência e a razão entre a medida de seu comprimento e a medida de seu diâmetro, representada por um número irracional indicado pela letra grega π.

Para explorar a noção de comprimento de uma circunferência, a seguinte atividade pode ser realizada com os estudantes.

Divida os estudantes em duplas e distribua a cada dupla uma lata cilíndrica ou outros objetos cilíndricos, além de pedaços de barbante. Oriente-os a medir o comprimento da circunferência da base de alguns dos objetos cilíndricos que receberam utilizando o barbante. Para isso, eles devem contornar a circunferência da base do objeto com o barbante. O pedaço de barbante utilizado deve então ser esticado e medido com uma régua, verificando assim a medida do comprimento da circunferência e anotando o resultado.

Em seguida, oriente-os a medir o raio e o diâmetro da circunferência da base com a régua, anotando os resultados.

Se achar conveniente, faça um quadro na lousa e anote nele os dados que as duplas de estudantes encontraram.

Comprimento de uma circunferência

Dando sequência à atividade proposta no início deste tópico, oriente os estudantes a comprovar o valor da razão entre as medidas do comprimento de uma circunferência e de seu diâmetro como sendo um número próximo de π, isto é, próximo de 3,14.

Para isso, eles devem dividir as medidas do comprimento da base da circunferência (C) dos objetos cilíndricos, obtidas anteriormente, pelas medidas de seus respectivos diâmetros (D). Espera-se que encontrem valores próximos a 3,14.

Sugira que comparem os resultados da atividade proposta com os obtidos pelos colegas.

Se achar conveniente, complete o quadro feito na lousa anteriormente com os dados obtidos pelos estudantes para a razão entre a medida do comprimento da base de cada circunferência e a medida de seu respectivo diâmetro $\left(\frac{C}{D}\right)$.

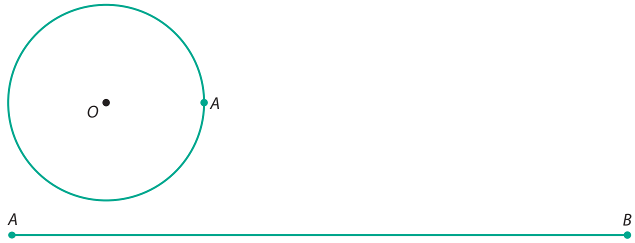
Na atividade proposta, como os valores para a razão $\frac{C}{D}$ poderão variar, devido a erros e aproximações das medidas, sugerimos complementar a atividade utilizando um *software* de geometria dinâmica em que os estudantes representem diferentes circunferências e, com as ferramentas do *software*, determinem a medida C do comprimento de cada uma delas e a medida D do diâmetro de cada uma delas, organizando um quadro com as medidas C com as medidas D e com o quociente de $C : D$, ou razão $\frac{C}{D}$.

Assim, os estudantes poderão perceber que, quanto mais precisas forem as medições, mais a razão $\frac{C}{D}$ se aproximará de 3,14 ou de π.

Essa atividade contribui para o desenvolvimento da **competência geral 5**.

Suponha que contornemos com um barbante a circunferência a seguir. Esticando o barbante, ele teria a mesma medida do segmento $\overline{AB}$.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



A medida do segmento $\overline{AB}$ é igual à medida do comprimento dessa circunferência.

A razão entre as medidas do comprimento da circunferência e do diâmetro é um número que, na forma decimal, apresenta infinitas casas decimais não periódicas.

O avanço da tecnologia na área da informática tem validado, na prática, o que a teoria mostra: já é possível expressar esse número com milhões de casas decimais, e essa representação não apresenta nenhum período, pois trata-se de um **número não racional**. A esse tipo de número com infinitas casas decimais sem apresentar período, que estudaremos no próximo ano, chamamos de **número irracional**.

O número irracional, que representa a razão entre a medida do comprimento C de uma circunferência e a medida D de seu diâmetro, é representado pela letra grega π (lemos: "pi").

Assim, podemos escrever:

$$\frac{\text{medida do comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}} = \pi \quad \text{ou} \quad \frac{C}{D} = \pi$$

Observe a representação decimal desse número com suas primeiras trinta casas decimais:

3,141592653589793238462643383279...

Como a medida D do diâmetro de uma circunferência é o dobro da medida r de seu raio, podemos escrever:

$$\frac{C}{2r} = \pi \quad \text{ou} \quad C = 2\pi r$$

Note que, no exemplo do jardineiro Luís, é possível chegar a um valor aproximado para π, pois a medida do comprimento da circunferência do canteiro, dividida pela medida de seu diâmetro, é: 18,84 : 6 = 3,14.

- Que tal fazer um experimento? Determine as medidas do comprimento da circunferência do pneu de uma bicicleta e do diâmetro dessa circunferência. Calcule a razão entre essas medidas. A que número você chegou? Espera-se que os estudantes tenham chegado a um número próximo de 3,14.

272

Sugestão de leitura

BRITO, S. Cientistas suíços calculam novo recorde de dígitos do número *Pi*. **Veja**, Ciência, São Paulo, 17 ago. 2021. Disponível em: https://veja.abril.com.br/ciencia/cientistas-suicos-calculam-novo-recorde-de-digitos-do-numero-pi/. Acesso em: 18 maio 2022.

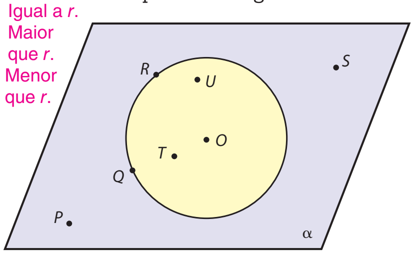
A matéria aborda as tentativas de determinar os dígitos do número π e retrata a importância da tecnologia no desenvolvimento de estudos matemáticos avançados.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

9 Com uma régua, obtenha a medida r do raio da circunferência de centro O, contida no plano α. Depois, meça as distâncias de cada um dos outros pontos da figura ao centro O.

9. a) • Igual a r.
• Maior que r.
• Menor que r.

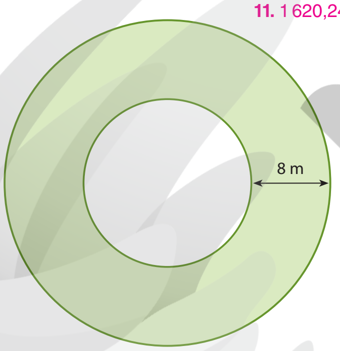


a) Compare com r as medidas das distâncias dos pontos destacados:
- da circunferência até O;
- da região externa da circunferência até O;
- da região interna da circunferência até O.

b) No caderno, copie a figura e marque um ponto V, cuja medida da distância ao centro O seja maior do que r, e um ponto W, cuja medida da distância a O seja menor do que r. O ponto V pertence à circunferência, à região interna ou à região externa? E o ponto W? **9. b)** Externa. Interna.

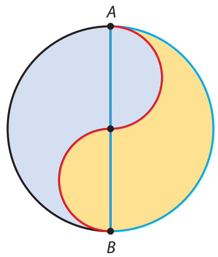
10 Uma roda de bicicleta tem 40 cm de medida do raio. Calcule a medida aproximada do comprimento da circunferência dessa roda, considerando $\pi = 3{,}14$. **10.** 251,20 cm

11 Uma pista circular tem 8 m de medida de largura. O comprimento de sua margem interna mede 1570 m. Determine a medida aproximada do comprimento de sua margem externa, considerando $\pi = 3{,}14$.
11. 1 620,24 m



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

12 Marina e Paula estão na posição A de uma praça circular de 50 m de medida de raio. Elas caminham em direção à posição B. Marina caminha segundo o traçado preto, e Paula, segundo o traçado vermelho.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

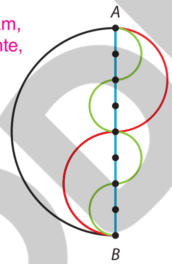
Considerando $\pi = 3{,}14$, faça o que se pede.

a) Sem fazer nenhum cálculo, responda: quem andou a maior distância? Justifique sua resposta. **12. a)** Resposta pessoal.

b) Calcule quantos metros cada uma andou, aproximadamente, e verifique se você acertou o item anterior.

c) Agora, observe o trajeto feito por Andréa, conforme o traçado verde.
12. c) Resposta pessoal.

12. b) As duas andaram, aproximadamente, 157 m.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Sem fazer nenhum cálculo, é possível dizer que a distância percorrida por Andréa é maior ou menor do que as distâncias percorridas por Marina e Paula?

d) Calcule quantos metros Andréa andou, aproximadamente, e verifique se você acertou o item anterior. **12. d)** Aproximadamente 157 m.

e) Imagine que você caminhasse de A para B, fazendo um caminho sinuoso como o de Paula e o de Andréa; porém, percorrendo oito semicircunferências, cada uma delas de diâmetro de mesma medida que a do raio das semicircunferências percorridas por Andréa. Quantos metros você andaria?
12. e) Espera-se que o estudante conclua que caminharia aproximadamente 157 m.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 9** e **10** e do **exercício 12** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Nos exercícios desta página, há a aplicação do cálculo da medida do comprimento de circunferências e arcos de circunferências, além de estimativas que podem ser comprovadas teoricamente após discussão em grupos pequenos ou com a turma toda.

No **exercício 11**, verifique se os estudantes calcularam inicialmente a medida do raio da circunferência da margem interna $\left[\dfrac{1\,570}{2 \cdot 3{,}14} = 250\right]$ e adicionaram a ela a medida da largura da pista, obtendo a medida da circunferência da margem externa $(250 + 8 = 258)$.

A partir daí eles devem calcular a medida C do comprimento da circunferência maior:

$C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 258 = 1\,620{,}24$

O comprimento da circunferência externa mede 1 620,24 m.

O **exercício 12** é bastante interessante e trabalha a relação entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do raio. Quando uma das meninas faz um trajeto por semicircunferências cuja medida do raio é metade da medida do raio da circunferência do outro trajeto, há uma "compensação", pois a quantidade de semicircunferências dobra, de modo que os vários trajetos assim definidos têm sempre o mesmo comprimento.

Exercícios propostos

O **exercício 13** possibilita aos estudantes exercitar estimativas. Comente que esse tipo de atividade não requer um “chute”, uma vez que estimativas exigem algum tipo de critério.

As resoluções dos **exercícios 13** e **14** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF07MA36**.

Antes de colocar em prática as atividades desta seção, considere o planejamento do tempo das atividades, da ocupação do espaço, dos recursos didáticos. Isso reduz a improvisação e é fator relevante para o bom desempenho dos estudantes. Defina com eles as etapas das atividades a serem realizadas, estabeleça a organização da turma e disponibilize os recursos materiais adequados para cada situação.

Esta seção propõe atividades que contemplam objetivos educacionais expressos na BNCC, como o trecho que destacamos a seguir, sintetizado na habilidade (EF07MA36).

[...] O planejamento de como fazer a pesquisa ajuda a compreender o papel da estatística no cotidiano dos alunos. Assim, a leitura, a interpretação e a construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, bem como a forma de produção de texto escrito para a comunicação de dados, pois é preciso compreender que o texto deve sintetizar ou justificar as conclusões. No Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é que os alunos saibam planejar e construir relatórios de pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central e construção de tabelas e diversos tipos de gráfico. Esse planejamento inclui a definição de questões relevantes e da população a ser pesquisada, a decisão sobre a necessidade ou não de usar amostra e, quando for o caso, a seleção de seus elementos por meio de uma adequada técnica de amostragem. [...]

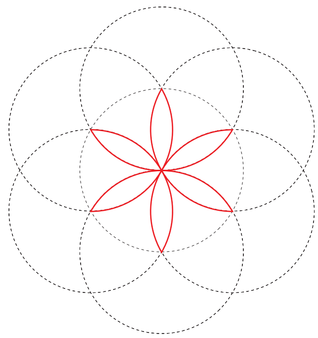
BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF: MEC, 2018. p. 273. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 6 jul. 2022.

13 Reúna-se com um colega para fazer algumas estimativas. **13. a)** Aproximadamente 8 cm.

a) Desenhem o contorno de uma moeda de 1 real. Estimem a medida do comprimento da circunferência desenhada, em centímetro, e tracem um segmento com esse comprimento.

b) Estimem o comprimento do traçado vermelho da figura, em centímetro, feito com uma moeda de 1 real. Expliquem como fizeram essa estimativa. **13. b)** Aproximadamente 16 cm. Resposta pessoal.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



14 ***Hora de criar*** – Elabore um problema sobre comprimento de circunferência. Troque-o com um colega e depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem-nos para corrigi-los.
14. Resposta pessoal.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Limites do corpo humano

O professor Adelson passou um texto para motivar seus estudantes a fazerem uma pesquisa estatística sobre os limites do corpo humano. Acompanhe.

Corpo humano pode estar chegando ao limite, diz estudo

Cada geração é mais alta, forte e longeva que a geração anterior – mas isso está parando

Cientistas franceses e brasileiros analisaram os registros de longevidade, altura e força física das pessoas em diversos países ao longo dos últimos 120 anos – e constataram que, mesmo com os avanços da medicina e a melhoria nas condições de vida, esses indicadores pararam de aumentar na década de 1980.

Fonte: SZKLARZ, E. Corpo humano pode estar chegando ao limite, diz estudo. **Superinteressante**, São Paulo, ed. 386, p. 12, mar. 2018.

Orientação para grupos de trabalho

- **Objetivo da pesquisa**: comparar as alturas de jovens com as de seus pais, por gênero.
- **População estatística** (alvo): pessoas conhecidas, sendo uma de cada família.
- Coletar a altura (em centímetro) de 10 jovens (15 a 24 anos), sexo feminino, e a altura da respectiva mãe. Idem para sexo masculino e respectivo pai.
- Organizar os dados colhidos em duas tabelas (jovem – genitor/a), incluindo a diferença de alturas e as respectivas médias de cada grupo.
- Construir dois gráficos de colunas das diferenças de alturas (jovem/mãe; jovem/pai).

Trabalhando a informação

Para complementar o trabalho e aproveitar o contexto proposto, pode-se realizar uma atividade interdisciplinar com Ciências, a fim de desenvolver o Tema Contemporâneo Transversal **saúde**. Os estudantes podem pesquisar, por exemplo, as condições da saúde da comunidade ou da cidade com base em indicadores como a mortalidade infantil ou a longevidade.

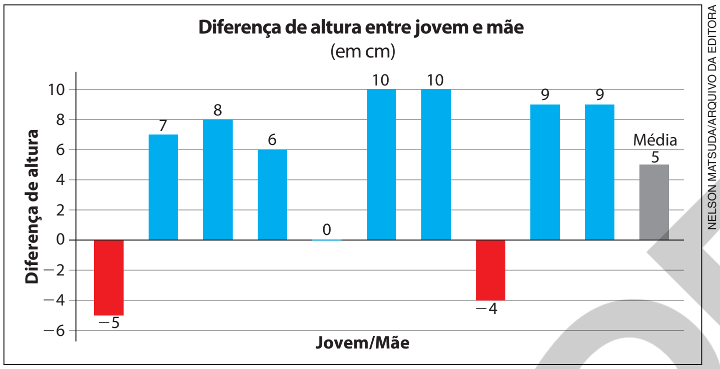
As resoluções das atividades do **Agora quem trabalha é você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

- Avaliar se a quantidade de pessoas pesquisadas (**pesquisa amostral**, isto é, pesquisa com uma parte da população estatística) é suficiente para chegar a conclusões seguras sobre as comparações das alturas das pessoas ou se seria necessário aumentar o número de pessoas pesquisadas até a totalidade da população (**pesquisa censitária**).
- Redigir relatório comparando as alturas de filhos e pais, por gênero, e verificar se a conclusão desse trabalho é compatível com a reportagem anterior.

Observe parte do trabalho de um dos grupos de estudantes de Adelson, com o gênero feminino.

Altura de jovem feminina (15-24 anos) e sua mãe (em cm)											Média
Jovem	160	173	168	168	165	180	176	163	170	177	170
Mãe	165	166	160	162	165	170	166	167	161	168	165
Diferença	–5	7	8	6	0	10	10	–4	9	9	5

Dados obtidos pelos estudantes de Adelson.



Dados obtidos pelos estudantes de Adelson.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 O mesmo grupo de estudantes do professor Adelson elaborou a seguinte tabela:

Altura de jovem masculino (15-24 anos) e seu pai (em cm)											Média
Jovem	170	188	173	168	173	180	176	175	180	177	176
Pai	165	176	170	172	165	170	166	177	181	168	171
Diferença	5	12	3	–4	8	10	10	–2	–1	9	5

Dados obtidos pelos estudantes de Adelson.

Construa o gráfico de colunas que representa os dados dessa tabela. **1.** Construção de gráfico.

2 Junte-se a quatro colegas e façam uma pesquisa igual à proposta pelo professor Adelson, seguindo todas as etapas das orientações. **2.** Construção de tabelas, gráficos e relatório.

3 Agora o grupo do qual você faz parte deve juntar os dados de todos os outros grupos e fazer as tabelas, os gráficos e o relatório como se fosse uma só pesquisa. Com essa população estatística maior, a conclusão sobre a pesquisa é mais confiável? **3.** Resposta pessoal. Construção de tabelas, gráficos e relatório.

275

2. Posições relativas

Habilidade da BNCC: **EF07MA22**.

Neste tópico, ao construir circunferências com o compasso, reconhecendo-as como um lugar geométrico, e empregá-las para elaborar composições e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes, aprofundamos o trabalho com a habilidade (EF07MA22).

Embora as ilustrações desta página e das próximas não deixem dúvidas sobre as relações entre distâncias e as posições relativas entre ponto e circunferência, entre reta e circunferência e entre duas circunferências, o estudo pode ser complementado com a manipulação de material concreto construído ou trazido pelos estudantes, como caixas de *pizza* circulares de papelão, argolas de pulseiras, canudos finos, pequenos botões etc.

Exercícios propostos

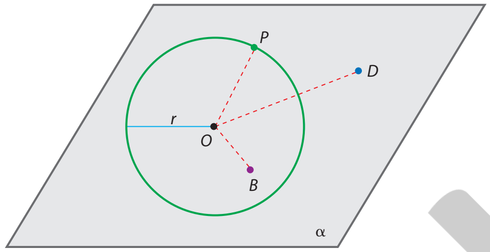
A resolução do **exercício 15** tem por base a observação comparativa da ilustração facilmente transponível para uma situação cotidiana como a de um jogo de bolinhas de gude. Já a resolução do **exercício 16** pede uma formalização dos critérios usados nas conclusões do **exercício 15**. Embora seja simples, essa sequência de atividades induz os estudantes a assumir uma postura investigativa diante dos problemas, passando de uma abordagem intuitiva e sensorial para uma intelectual.

2 Posições relativas

Posições relativas de um ponto em relação a uma circunferência

Se uma circunferência está contida em um plano α, então um ponto qualquer de α pode ser interno, externo ou pertencente à circunferência.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



- Se a medida da distância de um ponto ao centro de uma circunferência é maior do que a medida do raio dessa circunferência, dizemos que esse ponto é **externo** a ela.

  Na figura, $OD > r$; logo, o ponto D é externo à circunferência.
- Se a medida da distância de um ponto ao centro de uma circunferência é menor do que a medida do raio dessa circunferência, dizemos que esse ponto é **interno** a ela.

  Na mesma figura, $OB < r$; logo, o ponto B é interno à circunferência.
- Se a medida da distância de um ponto ao centro de uma circunferência é igual à medida do raio dessa circunferência, dizemos que esse ponto **pertence** a ela.

  Na figura, $OP = r$; logo, o ponto P pertence à circunferência.

Considerando essas três situações, concluímos que todos os pontos de uma circunferência têm a propriedade de estar à distância de medida r de O. E só os pontos dessa circunferência têm essa propriedade.

Como estudamos anteriormente, dizemos que essa circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam r de O.

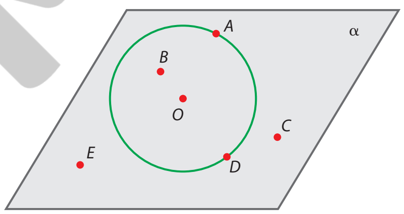
No próximo ano retomaremos o estudo deste e de outros lugares geométricos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15 Considere a figura a seguir.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



Agora, escreva no caderno os pontos:

a) internos à circunferência; **15. a)** *B* e *O*.

b) externos à circunferência; **15. b)** *C* e *E*.

c) pertencentes à circunferência. **15. c)** *A* e *D*.

16 Estabeleça uma relação de igualdade ou de desigualdade entre as medidas dos segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$, com o raio de medida r da circunferência do exercício anterior.

16. $OA = r$, $OB < r$, $OC > r$

17 Com um compasso, trace uma circunferência de centro O. Marque sobre ela dois pontos distintos, M e N, não colineares com o ponto O. Como você classifica, quanto aos lados, o triângulo MON?
(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)
17. Triângulo isósceles.

18 No chão do pátio da escola onde Cristina estuda, há o desenho de uma circunferência que mede 6 m de diâmetro. Certo dia, Cristina estava a 2 m do centro dessa circunferência, e sua amiga Rosana, a 7 m.

a) Qual é a posição de Cristina e de Rosana em relação à circunferência? **18. a)** Cristina está na região interna à circunferência, e Rosana, na externa.

b) Determine a medida da distância entre elas, sabendo que Cristina, Rosana e o centro dessa circunferência estão sobre uma mesma reta. **18. b)** 5 m ou 9 m.

19 Com um compasso, trace em uma folha avulsa uma circunferência de centro O e marque sobre ela dois pontos distintos, A e B, não colineares com o ponto O. Construa o triângulo AOB e, por dobradura, trace a bissetriz $\overrightarrow{OD}$ do ângulo $A\hat{O}B$, em que D seja ponto de $\overline{AB}$.

a) Como são as medidas dos ângulos $O\hat{B}A$ e $O\hat{A}B$? **19. a)** Iguais.

b) Como são as medidas dos segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$? **19. b)** Iguais.

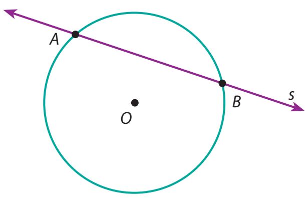
c) Quanto aos ângulos, como se classifica o triângulo ODB? E o triângulo ODA? **19. c)** Triângulo retângulo. Triângulo retângulo.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

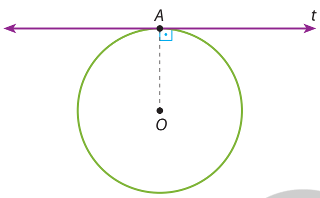
Posições relativas de uma reta em relação a uma circunferência

Em relação a uma circunferência, uma reta pode ser **secante**, **tangente** ou **exterior**.

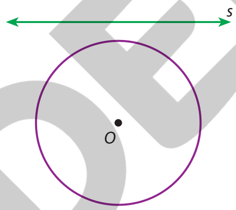
- **Secante**: quando a reta tem dois pontos em comum com a circunferência.



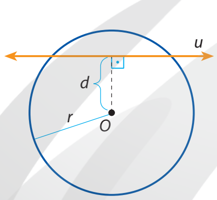
- **Tangente**: quando a reta tem só um ponto em comum com a circunferência.



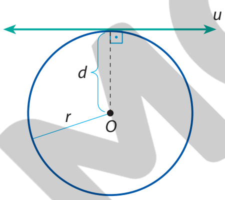
- **Exterior** (ou **externa**): quando a reta não tem ponto em comum com a circunferência.



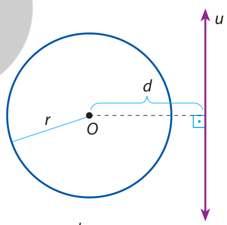
Representando por *d* a medida da distância do centro da circunferência à reta e por *r* a medida do raio, temos:



$d < r$
reta secante



$d = r$
reta tangente



$d > r$
reta exterior

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

▶ Toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio traçado pelo ponto de tangência.

Exercícios propostos

Avalie se há necessidade de os estudantes usarem o material de manipulação proposto na página anterior para a resolução dos exercícios desta página, bem como para a melhor compreensão do texto sobre as posições relativas de uma reta em relação a uma circunferência.

As resoluções dos **exercícios 17** a **19** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Os **exercícios 17** e **19** propõem construções geométricas nas quais os estudantes devem identificar propriedades de triângulos e classificá-los, fazendo um elo com o conceito de triângulo. Lembre-os de ter cuidado ao utilizar compasso, a fim de que não se machuquem com a ponta-seca.

O **exercício 18** propicia uma dramatização da situação. Caso haja quadra poliesportiva na escola, a dramatização pode ser realizada no seu círculo central.

Posições relativas de uma reta em relação a uma circunferência

Este tópico pode ser exposto tendo como cenário as linhas, incluindo o círculo central de uma quadra poliesportiva.

Outra opção é solicitar aos estudantes que, em uma folha de papel sulfite, com uma régua, tracem uma reta vertical e três retas horizontais quadriculando-a em 8 partes iguais. Então, com centro no centro de cada quadriculado, construam uma circunferência com raio medindo 3 cm. Depois, em cada parte, tracem uma só reta *s* vertical. As retas *s* devem estar à direita e ter as seguintes distâncias do centro: 4 cm, 3,5 cm, 3 cm, 2 cm e uma reta *s* passando pelo centro. Outras retas *s* devem estar à esquerda e ter as seguintes distâncias do centro: 2 cm, 3 cm, 3,5 cm e 4 cm. A folha deve ser recortada em 8 partes iguais, determinadas anteriormente, e essas partes devem ser sobrepostas formando um bloco. As folhas do bloco devem ser ordenadas de acordo com as medidas das distâncias das retas *r* ao centro, da direita para a esquerda. Em seguida, as folhas devem ser fixadas umas às outras na lateral esquerda, com cola, fita adesiva ou grampos de papel, por exemplo. Isto feito, peça aos estudantes que segurem à esquerda do bloco e o folheiem, como se estivessem produzindo uma animação, observando o movimento das retas *s* em relação à circunferência. Depois, eles devem classificar a posição de cada reta *s* em relação à circunferência e relacionar a medida da distância de *s* ao centro com a medida do raio.

Lembre os estudantes de que devem utilizar tesouras com pontas arredondadas e tomar muito cuidado ao manuseá-las.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 20** e **21** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

O **exercício 22** apresenta uma situação comum em vários projetos industriais, não só no campo da metalurgia, mas também nos mais diversos segmentos da Economia, para não ocorrer perda de matéria-prima e para seu uso ser otimizado.

No **item a**, observando a figura, os estudantes devem concluir que a medida do raio das circunferências é a quarta parte de 20 cm, ou seja, 5 cm. Então, da sobra, é possível considerar um retângulo com base medindo 20 cm e altura medindo 5 cm (15 − 10). Portanto, os operários podem recortar quatro círculos de raio 2,5 cm.

No **item b**, espera-se que inicialmente os estudantes se lembrem de calcular quantos desses círculos menores cabem em uma placa: 3 fileiras de 4 círculos, ou seja, 12 círculos. Basta dividir 120 por 12 e obter 10 placas.

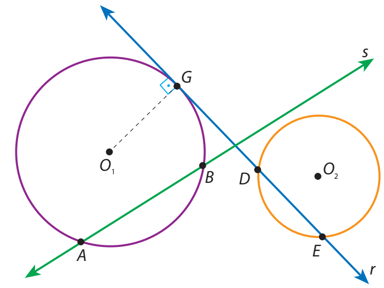
No **item c**, comente que aqui temos um caso de grandezas inversamente proporcionais: a metade da medida dos raios implica o dobro da quantidade de círculos. Como em uma placa cabem 4 círculos na base e 3 círculos na altura, teremos na nova situação 8 círculos cabendo na base e 6 cabendo na altura, totalizando 48 círculos em uma placa (pois $8 \cdot 6 = 48$).

Portanto, seria necessária 1 placa.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

20 Considere a figura a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, classifique:

a) a reta r em relação à circunferência de centro O_1; **20. a)** Tangente.

b) a reta r em relação à circunferência de centro O_2; **20. b)** Secante.

c) a reta s em relação à circunferência de centro O_1; **20. c)** Secante.

d) a reta s em relação à circunferência de centro O_2. **20. d)** Exterior.

21 Com régua e compasso, trace a circunferência de raio r e a reta s cuja medida da distância até o centro da circunferência é d. Depois, classifique a reta s em relação à circunferência.

a) $r = 1{,}5$ cm; $d = 1$ cm **21. a)** Secante.

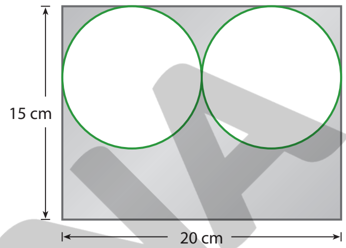
b) $r = 1{,}5$ cm; $d = 1{,}5$ cm **21. b)** Tangente.

c) $r = 1{,}5$ cm; $d = 2$ cm **21. c)** Exterior.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

22 Reúna-se com um colega e, em seguida, respondam às questões.

Uma metalúrgica produziu uma placa retangular de alumínio de medidas 20 cm × 15 cm. Os operários recortaram dois círculos dessa placa, como mostra a figura.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

22. a) 2,5 cm **22. b)** 10 placas.

a) Com a sobra da placa, os operários recortaram outros quatro círculos idênticos e com raios de maior medida possível. Qual é a medida do raio desses círculos?

b) Considerando os círculos do item **a**, determine quantas placas serão necessárias para obter 120 desses círculos menores.

c) Se quiséssemos obter, com essas placas, novos círculos de raios cujas medidas fossem metade dos círculos menores do item **a**, quantas placas seriam necessárias para obter 48 desses círculos? **22. c)** 1 placa.

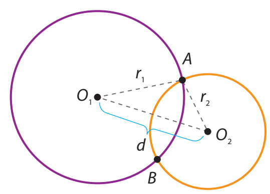
Posições relativas de duas circunferências

Vamos considerar a circunferência de centro O_1 e raio de medida r_1 e a circunferência de centro O_2 e raio de medida r_2, com $r_1 > r_2$. Além disso, vamos indicar por d a medida da distância entre os centros O_1 e O_2.

De acordo com a posição relativa que apresentam, as circunferências podem ser secantes, tangentes exteriores, tangentes interiores, externas ou internas.

- **Secantes**: quando as circunferências têm dois pontos comuns, e a medida da distância entre seus centros é menor que a soma das medidas de seus raios e maior que a diferença entre elas.

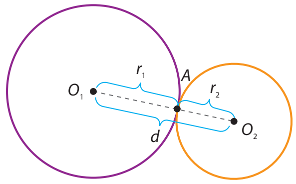
$$d < r_1 + r_2 \text{ e } d > r_1 - r_2$$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

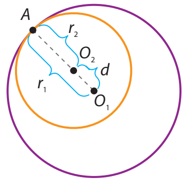
- **Tangentes exteriores**: quando as circunferências têm um só ponto em comum, e a medida da distância entre seus centros é igual à soma das medidas de seus raios.

$$d = r_1 + r_2$$



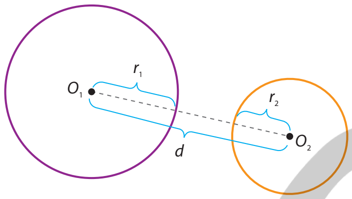
- **Tangentes interiores**: quando as circunferências têm um só ponto em comum, e a medida da distância entre seus centros é igual à diferença entre as medidas de seus raios.

$$d = r_1 - r_2$$



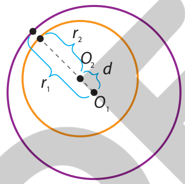
- **Externas**: quando as circunferências não têm ponto em comum, e a medida da distância entre seus centros é maior que a soma das medidas de seus raios.

$$d > r_1 + r_2$$



- **Internas**: quando as circunferências não têm ponto em comum, e a medida da distância entre seus centros é menor que a diferença entre as medidas de seus raios.

$$d < r_1 - r_2$$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe um exemplo.

Considere duas circunferências, uma de raio medindo $r_1 = 5$ cm e outra de raio medindo $r_2 = 3$ cm. Indicando por d a medida da distância entre os centros dessas circunferências, vamos determinar a posição relativa das circunferências nos seguintes casos:

a) $d = 10$ cm
b) $d = 8$ cm
c) $d = 2$ cm
d) $d = 1$ cm
e) $d = 4$ cm

Calculamos a soma das medidas dos raios e a diferença entre essas medidas.

- $r_1 + r_2 = 5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$
- $r_1 - r_2 = 5 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$

a) $10 > 8$ $(d > r_1 + r_2)$ ⟶ As circunferências são externas.
b) $8 = 8$ $(d = r_1 + r_2)$ ⟶ As circunferências são tangentes exteriores.
c) $2 = 2$ $(d = r_1 - r_2)$ ⟶ As circunferências são tangentes interiores.
d) $1 < 2$ $(d < r_1 - r_2)$ ⟶ As circunferências são internas.
e) $4 > 2$ e $4 < 8$ $(d > r_1 - r_2$ e $d < r_1 + r_2)$ ⟶ As circunferências são secantes.

Posições relativas de duas circunferências

Solicite com antecedência aos estudantes que levem para a sala de aula argolas ou bambolês com diâmetros de medidas variadas para verificarem as relações entre as distâncias dos centros das circunferências e as medidas dos seus raios, somas, diferenças etc.

279

Circunferências concêntricas

A fotografia mostra ondas produzidas por pingos em uma superfície de água. Se possível, em uma ação interdisciplinar com Ciências, realize com os estudantes experiências como essa em uma cuba com água. Faça também com dois pingos simultâneos a pouca distância um do outro para verificar as interferências do conjunto de circunferências produzidas por um dos pingos no conjunto de circunferências do outro pingo.

No Ensino Médio, esse assunto deve ser retomado em Física, no estudo sobre interferências em ondas mecânicas.

Exercícios propostos

No **exercício 23**, questione os estudantes se os centros de todas as circunferências dadas são colineares. Esse é um aspecto fundamental para que classifiquem as posições dessas circunferências.

Aproveite o **exercício 24** para incentivar a pesquisa sobre o significado dos aros do símbolo das Olimpíadas.

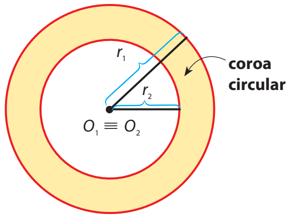
- Azul: Europa
- Preto: África
- Vermelho: América
- Amarelo: Ásia
- Verde: Oceania

As resoluções dos **exercícios 25** e **26** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Circunferências concêntricas

Um caso particular de circunferências internas é aquele em que ambas têm o mesmo centro. Elas são chamadas de **circunferências concêntricas**, e a parte do plano compreendida entre elas recebe o nome de **coroa circular**.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



WICHUDAPA/SHUTTERSTOCK

As ondas, provocadas pelos pingos na superfície da água, que aparecem na fotografia, dão a ideia de circunferências concêntricas.

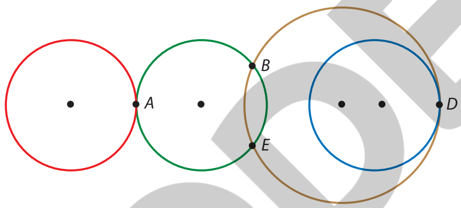
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

23 Dê a posição relativa das circunferências:

a) vermelha e verde; **23. a)** Tangentes exteriores.
b) vermelha e marrom; **23. b)** Externas.
c) verde e marrom; **23. c)** Secantes.
d) marrom e azul. **23. d)** Tangentes interiores.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



24 Na figura, estão desenhados os aros olímpicos que representam a união dos cinco continentes.

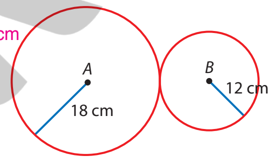
ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

Dê a posição relativa das circunferências das coroas circulares representadas pelas cores:

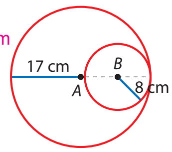
a) azul e amarela; **24. a)** Secantes.
b) verde e vermelha; **24. b)** Secantes.
c) preta e vermelha. **24. c)** Externas.

25 Determine a medida da distância entre os centros das seguintes circunferências:

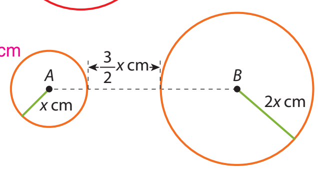
a) **25. a)** 30 cm



b) **25. b)** 9 cm



c) **25. c)** $\frac{9}{2}x$ cm



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

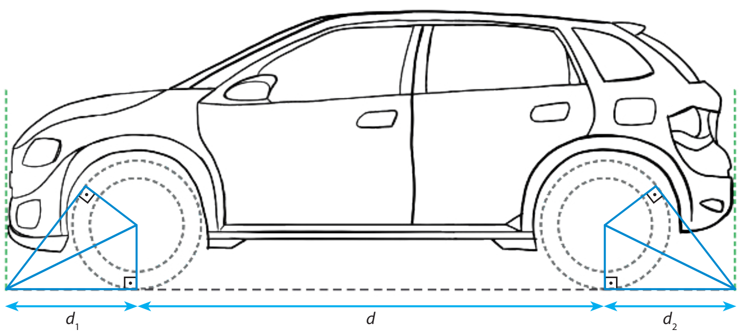
26 Indicando as medidas dos raios de duas circunferências por r_1 e r_2 e a medida da distância entre os centros por d, dê a posição delas quando:

a) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 9$ cm; **26. a)** Tangentes exteriores.
b) $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 10$ cm; **26. b)** Externas.
c) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm e $d = 2$ cm; **26. c)** Tangentes interiores.
d) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm e $d = 8$ cm; **26. d)** Secantes.
e) $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 4$ cm e $d = 1$ cm; **26. e)** Internas.
f) $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 5$ cm e $d = 0$. **26. f)** Concêntricas.

3 Segmentos tangentes a uma circunferência

Em seus projetos, a indústria automobilística enfrenta inúmeras questões para obter um produto com bom desempenho e sucesso. Uma questão importante é a medida da distância d entre eixos, por exemplo. Outra questão é sobre as medidas das distâncias d_1 entre o eixo da roda e a frente do carro e d_2 entre o eixo da roda e a traseira do carro.

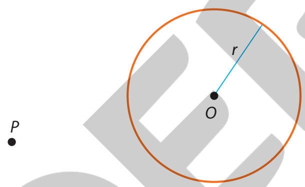
Observe na figura que a soma $d_1 + d + d_2$ fornece a medida do comprimento do veículo.



IZAAC BRITO/ARQUIVO DA EDITORA

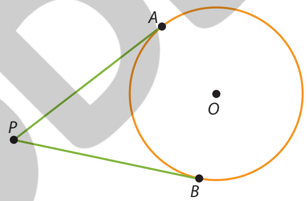
Note que os triângulos cujos lados tangenciam as rodas no contato com o chão são triângulos retângulos, pois os raios nesses pontos são verticais e a linha do chão é horizontal. Os outros dois triângulos também são triângulos retângulos, pois são simétricos àqueles.

Vamos considerar a circunferência de centro O e raio de medida r e um ponto P externo a ela.



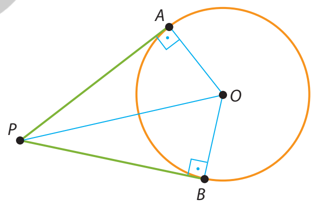
Vamos traçar por P os segmentos tangentes à circunferência: $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$.

Lembrando que, se a reta $\overleftrightarrow{PA}$ é tangente à circunferência em A, então ela é perpendicular ao raio $\overline{OA}$. Do mesmo modo, a reta $\overleftrightarrow{PB}$ é perpendicular ao raio $\overline{OB}$.



Com a régua, unimos os pontos A, B e P ao centro O, obtendo os triângulos retângulos PAO e PBO. Como a reta $\overleftrightarrow{PO}$ é um eixo de simetria, esses triângulos são **congruentes**. Assim:

$$\overline{PA} \cong \overline{PB}$$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Os segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são **congruentes**.

3. Segmentos tangentes a uma circunferência

Habilidades da BNCC: **EF07MA22** e **EF07MA29**.

Neste tópico, ao construir circunferências, reconhecendo-as como um lugar geométrico e empregando-as para resolver problemas que envolvam objetos equidistantes, assim como medidas de grandezas em situações cotidianas em que se reconhece que medidas empíricas são aproximadas, aprofundamos o trabalho com as habilidades (EF07MA22) e (EF07MA29).

Proponha uma experiência que não deixe dúvidas sobre o fato de serem congruentes os segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência. Apresente aos estudantes um bambolê, posicione-o no chão (ou paralelamente ao chão) da sala de aula, encostando-o em duas paredes. Peça a um estudante que meça com uma trena as distâncias de cada ponto de tangência do bambolê com cada parede até a linha de encontro das duas paredes. Eles verificarão a igualdade dessas distâncias.

Essa experiência pode ser ampliada se o bambolê for encostado em uma parede e na porta da sala de aula. Variando a abertura da porta, os pontos de tangência e as distâncias variam, mas se mantém o fato de as distâncias (associadas à medida de comprimento dos segmentos) continuarem iguais entre si.

Segmentos tangentes a uma circunferência

Explore o uso de segmentos tangentes à circunferência e a sua importância na construção de polígonos inscritos em uma circunferência.

Convém lembrar aos estudantes que, sendo o centro O da circunferência um ponto equidistante dos lados do triângulo nela inscrito, esse ponto O pertence às três bissetrizes dos ângulos internos, ou seja, ele é o incentro do triângulo.

Exercícios propostos

No **exercício 27**, espera-se que os estudantes apliquem a condição de congruência dos segmentos tangentes.

No **item a**, devem impor a igualdade:

$4x - 1 = 5x - 11$

$4x - 5x = 1 - 11$

$-x = -10$

$x = 10$

No **item b**, devem escrever o sistema de equações:

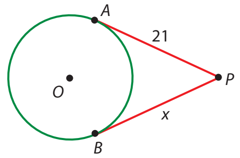
$$\begin{cases} a - b = 3b + 2 \\ 2a + 4b = 3a - b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por qualquer dos métodos já estudados, devem obter $a = 10$ e $b = 2$.

Acompanhe alguns exemplos.

Vamos calcular o valor de x em cada uma das figuras.

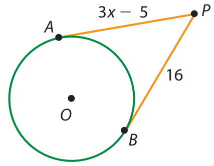
a)



Como $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, obtemos:

$x = 21$

b)



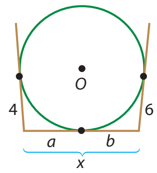
Como $\overline{PA} \cong \overline{PB}$, obtemos:

$3x - 5 = 16$

$3x = 21$

$x = 7$

c)



Como $a = 4$ e $b = 6$, obtemos:

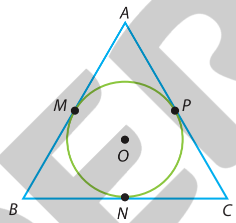
$x = 4 + 6$

$x = 10$

Triângulo circunscrito

Um triângulo é **circunscrito** a uma circunferência quando seus lados são tangentes a ela. Nesse caso, dizemos que a circunferência é **inscrita** no triângulo.

Na figura a seguir, o triângulo ABC é circunscrito à circunferência. Os pontos M, N e P são chamados de **pontos de tangência**.



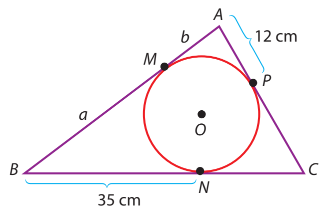
Acompanhe um exemplo de aplicação.

Vamos calcular a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC.

Como $a = 35$ cm e $b = 12$ cm, obtemos:

$m(\overline{AB}) = 35 \text{ cm} + 12 \text{ cm}$

$m(\overline{AB}) = 47 \text{ cm}$



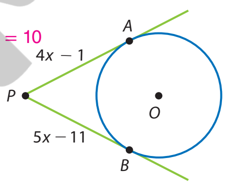
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

27 Calcule os valores de x, a e b.

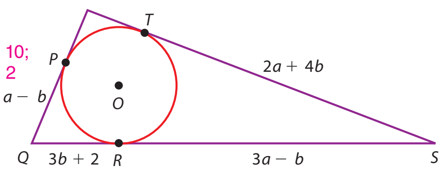
a)

27. a) $x = 10$

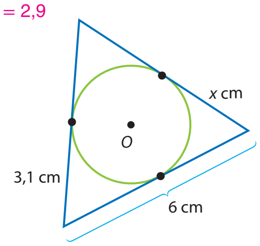


b)

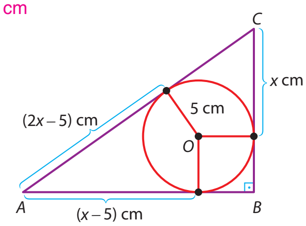
27. b) $a = 10$; $b = 2$



28 Determine o valor de x.
28. $x = 2{,}9$



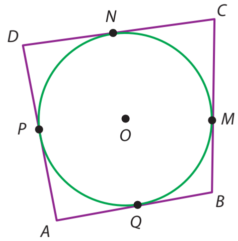
29 Calcule a medida do perímetro do triângulo.
29. 60 cm



Quadrilátero circunscrito

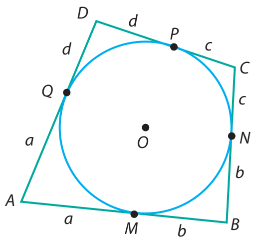
Um quadrilátero é **circunscrito** a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes a ela. Nesse caso, dizemos que a circunferência é **inscrita** no quadrilátero.

Na figura, o quadrilátero *ABCD* é circunscrito à circunferência.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Considere a figura a seguir, que representa o quadrilátero *ABCD* circunscrito à circunferência. Vamos calcular a soma das medidas dos lados opostos.



$$\begin{cases} AB + CD = a + b + c + d \\ BC + AD = b + c + a + d \end{cases}$$

Logo: $AB + CD = BC + AD$

Em todo quadrilátero circunscrito a uma circunferência, as somas das medidas dos lados opostos são iguais.

A propriedade recíproca, que não será demonstrada, também vale.

Se as somas das medidas dos lados opostos de um quadrilátero são iguais, então ele é circunscrito a uma circunferência.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

30 As medidas dos lados de um quadrilátero *ABCD* são $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 6$ cm e $AD = 5$ cm. Esse quadrilátero pode ser circunscrito a uma circunferência? Por quê?
30. Não, porque $AB + CD \neq BC + AD$.

31 Um trapézio isósceles é circunscrito a uma circunferência, e suas bases medem 11 cm e 7 cm. Quanto mede cada um dos outros dois lados? **31.** 9 cm

Exercícios propostos

No **exercício 28**, verifique se os estudantes estão aplicando corretamente a condição de congruência dos segmentos tangentes.

Neste caso: $x + 3{,}1 = 6$. Logo, $x = 6 - 3{,}1 = 2{,}9$.

No **exercício 29**, questione os estudantes sobre que tipo de quadrilátero obtemos com os dois segmentos tangentes a uma circunferência, quando são perpendiculares entre si, e mais os dois raios com extremidades nos pontos de tangência de tais segmentos. Pergunte a eles também qual é a relação entre as medidas desses segmentos e a medida do raio. Espera-se que percebam que obtemos um quadrado e que as medidas são iguais.

A resolução do **exercício 29** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Quadrilátero circunscrito

A propriedade do quadrilátero circunscrito é de muita utilidade em projetos arquitetônicos, de marcenaria, entre outros.

Antes de apresentar essa propriedade formalmente, realize atividades investigativas em que os estudantes possam percebê-la.

Exercícios propostos

O **exercício 30** avalia se o estudante reconhece e aplica corretamente a propriedade do quadrilátero circunscrito.

Para o **exercício 31**, sendo x a medida de cada lado do trapézio isósceles, devemos ter:

$x + x = 11 + 7$

$x = 9$

Cada um dos lados mede 9 cm.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 32** e **34** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Com este bloco de exercícios, os estudantes podem fixar e aplicar a propriedade dos segmentos tangentes a uma circunferência e, ainda, aplicar propriedades de triângulos isósceles e de triângulos retângulos.

Em particular, o **exercício 33** exemplifica a importância, em um projeto arquitetônico, da propriedade do quadrilátero circunscrito a uma circunferência e de sua recíproca.

Exemplifica também um problema que envolve medidas de grandezas em situações cotidianas em que se reconhece que medidas empíricas são aproximadas.

4. Arco de circunferência e ângulo central

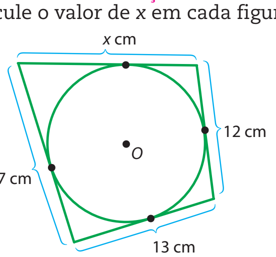
Observe se os estudantes percebem que o fato de a união dos dois arcos resultar na circunferência implica que a soma de suas medidas vale 360°.

33. Não. Só é possível circunscrever um quadrilátero a uma circunferência quando as somas das medidas dos lados opostos desse quadrilátero forem iguais, e isso não acontece nessa situação.

32 Calcule o valor de x em cada figura.

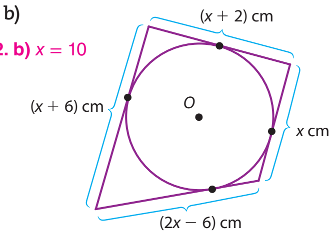
a)

32. a) $x = 16$



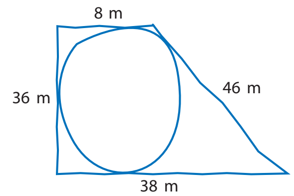
b)

32. b) $x = 10$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

33 José fez um esquema à mão livre de como gostaria que fosse construída uma piscina circular no terreno dele. Observe.



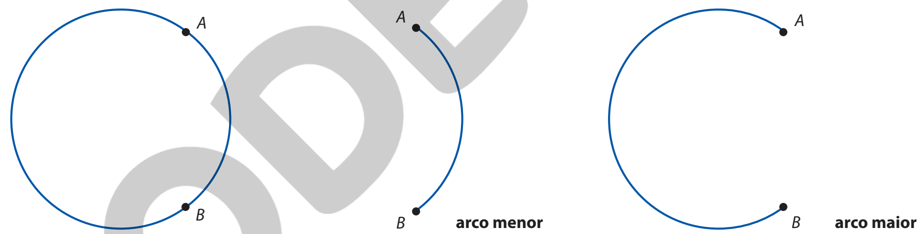
É possível construir a piscina de acordo com o esquema que José fez? Justifique sua resposta.

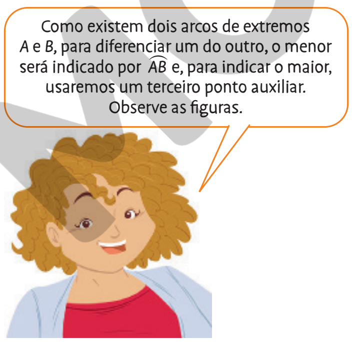
34 Um quadrilátero $ABCD$ é circunscrito a uma circunferência. As medidas de seus lados são $AD = 12$ cm, $DC = 9$ cm, $BC = (x + 7)$ cm e $AB = (2x + 1)$ cm. Calcule a medida do perímetro desse quadrilátero. **34.** 56 cm

4 Arco de circunferência e ângulo central

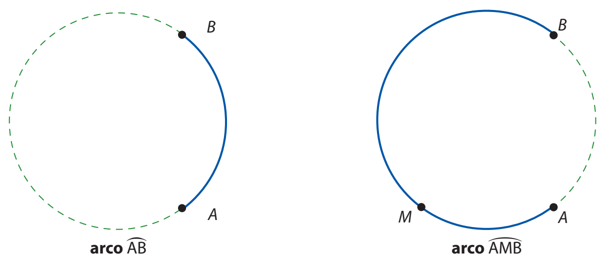
Arco de circunferência

Dois pontos distintos de uma circunferência dividem-na em duas partes. Cada uma dessas partes é chamada de **arco**.



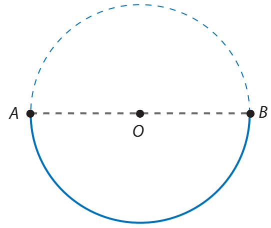


ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



284

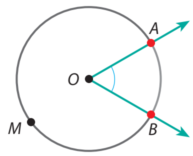
Quando os extremos *A* e *B* coincidirem com os extremos de um diâmetro, cada um dos arcos será chamado de **semicircunferência**.



semicircunferência

Ângulo central

Ângulo central é todo ângulo que tem seu vértice no centro de uma circunferência.



Na figura, $A\hat{O}B$ é um ângulo central, e $\overset{\frown}{AB}$ é o arco correspondente a esse ângulo.

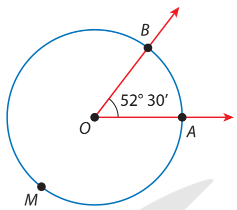
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Dividindo uma circunferência em 360 partes de mesmo tamanho, determinamos 360 ângulos centrais, cada um deles de **medida** 1 grau (1°). A cada um desses ângulos centrais corresponde um arco cuja medida angular é 1 grau (1°). Assim, podemos afirmar que **1° corresponde a $\frac{1}{360}$ da circunferência**, ou seja, a circunferência mede 360°.

A medida angular de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente.

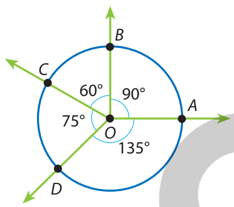
O sistema de medida de arcos é sexagesimal; portanto, são necessários 60 minutos (60′) para obter 1°, e 60 segundos (60″) para obter 1′. Acompanhe alguns exemplos.

a)



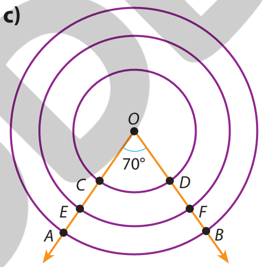
m($\overset{\frown}{AB}$) = 52° 30′
m($\overset{\frown}{AMB}$) = 360° − 52° 30′
m($\overset{\frown}{AMB}$) = 307° 30′

b)



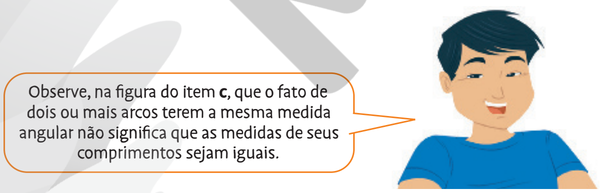
m($\overset{\frown}{AB}$) = 90°
m($\overset{\frown}{BC}$) = 60°
m($\overset{\frown}{CD}$) = 75°
m($\overset{\frown}{AD}$) = 135°

c)



m($\overset{\frown}{AB}$) = 70°
m($\overset{\frown}{CD}$) = 70°
m($\overset{\frown}{EF}$) = 70°

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



ARTUR FUJITA/ ARQUIVO DA EDITORA

Arco de circunferência

Lembre aos estudantes que o prefixo "semi" significa metade, então semicircunferência é a metade de uma circunferência.

Ângulo central

Caso algum estudante manifeste dúvida, esclareça que os arcos de circunferência têm duas medidas: a medida angular e a medida de comprimento.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 35** e **36** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Um gráfico de setores deve apresentar os dados referentes a todos os setores. Porém, mesmo quando alguns dados não são fornecidos, às vezes é possível resgatá-los. É o caso do **exercício 37**.

Os ângulos referentes à região Norte e à região Sul são ângulos opostos pelo vértice; logo, são congruentes. Portanto, o ângulo do setor relativo à região Sul mede 108°.

Este é suplementar do ângulo do setor relativo à região Leste. Logo, este setor tem ângulo medindo 180° − 108°, ou seja, 72°.

Por fim, o ângulo do setor relativo à região Oeste é oposto pelo vértice do ângulo do setor relativo à região Leste. Portanto, mede 72° também.

Após a resolução dos exercícios, solicite aos estudantes que decalquem no caderno a figura do **exercício 36, item b**, e tracem a reta $\overleftrightarrow{OC}$ até encontrar a circunferência no ponto P, simétrico do ponto C. Depois de traçar as semirretas $\overrightarrow{PB}$ e $\overrightarrow{PA}$, peça a eles que meçam os ângulos $B\hat{P}C$ e $A\hat{P}C$ e que comparem suas medidas, respectivamente, com as medidas dos ângulos $B\hat{O}C$ e $A\hat{O}C$. Os estudantes devem obter as medidas 17° e 25°, metades, respectivamente, das medidas de $B\hat{P}C$ e $A\hat{P}C$. A intenção aqui é antecipar de maneira informal a propriedade a ser estudada no próximo tópico.

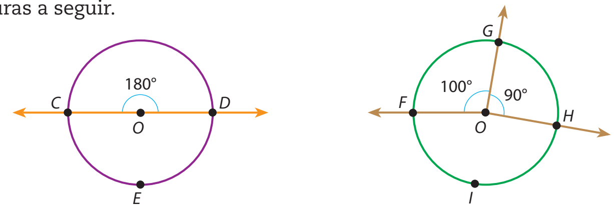
5. Ângulo inscrito

Logo após a definição do ângulo inscrito em uma circunferência, fazemos uma abordagem teórica que nos leva ao teorema do ângulo inscrito e do ângulo central correspondente. O entendimento desse teorema fica facilitado com a sugestão de complementação do **exercício 36, item b**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

35 Observe as figuras a seguir.

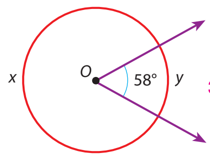


Agora, determine:

a) m($\overset{\frown}{CD}$) **35. a)** 180° b) m($\overset{\frown}{CED}$) **35. b)** 180° c) m($\overset{\frown}{HGF}$) **35. c)** 190° d) m($\overset{\frown}{FIH}$) **35. d)** 170°

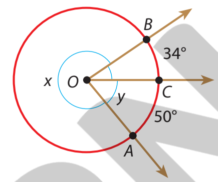
36 Determine, em grau, o valor de x e de y nas figuras a seguir.

a)



36. a) $x = 302°$; $y = 58°$

b)



36. b) $x = 276°$; $y = 50°$

37 Foi realizada uma pesquisa sobre a região de moradia de 1 200 associados do Clube da Boa Viagem. Os resultados foram registrados no gráfico de setores.

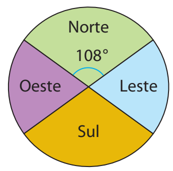
Agora, responda às questões. **37. a)** Sul: 108°; leste: 72°; norte: 108°; oeste: 72°.

a) Qual é a medida do ângulo central de cada setor?

b) Qual é a porcentagem de pessoas correspondente a cada setor? **37. b)** Sul: 30%; leste: 20%; norte: 30%; oeste: 20%.

c) Quais são as regiões de moradia que predominam nesse grupo de pessoas? **37. c)** Sul e norte.

Região de moradia

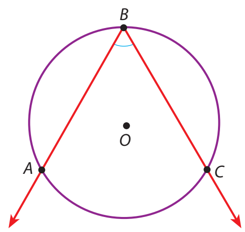


Dados obtidos pelo Clube da Boa Viagem.

5 Ângulo inscrito

Ângulo inscrito é todo ângulo cujo vértice pertence à circunferência e cujos lados são semirretas secantes a ela.

Na figura, $A\hat{B}C$ é um ângulo inscrito na circunferência.



Vamos demonstrar o seguinte teorema:

> A medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida angular (em grau) do arco compreendido por seus lados.

Hipótese: $A\hat{B}C$ é ângulo inscrito

Tese: $m(A\hat{B}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}$

286

- **Demonstração**

Construção auxiliar: traçamos $\overrightarrow{BD}$ passando pelo centro O; traçamos também $\overline{OA}$ e $\overline{OC}$.

Assim, temos:

(1) $x = a + p$ e $y = c + q$ (ângulos externos de um triângulo)

(2) $a = p$ e $c = q$ (ABO e CBO são triângulos isósceles)

(3) $x = 2p$ e $y = 2q$ (substituindo a por p e c por q em (1))

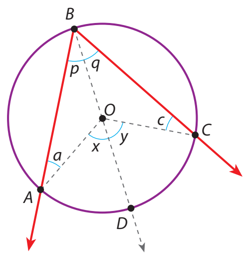
(4) $x + y = 2p + 2q$ (adicionando membro a membro)

(5) $x + y = 2(p + q)$, ou seja, $p + q = \dfrac{x + y}{2}$

(6) $x = m(\overset{\frown}{AD})$ e $y = m(\overset{\frown}{DC})$ (medida do ângulo central)

Como $p + q = m(A\hat{B}C)$ (por construção) e $x + y = m(A\hat{O}C)$, então

$m(A\hat{B}C) = \dfrac{m(\overset{\frown}{AC})}{2}$



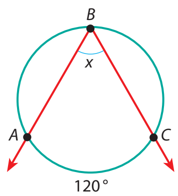
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

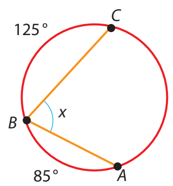
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

38 Determine, em grau, o valor de x nas figuras.

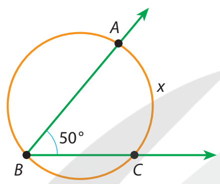
a) **38. a)** $x = 60°$



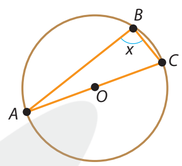
d) **38. d)** $x = 75°$



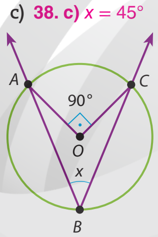
b) **38. b)** $x = 100°$



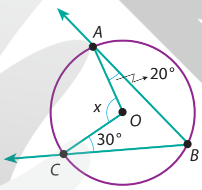
e) **38. e)** $x = 90°$



c) **38. c)** $x = 45°$

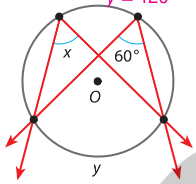


f) **38. f)** $x = 100°$

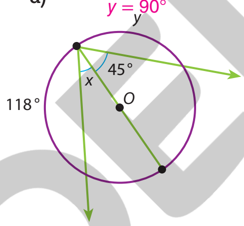


39 Observe as figuras e determine, em grau, o valor de x e de y.

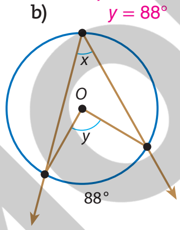
a) **39. a)** $x = 60°$; $y = 120°$



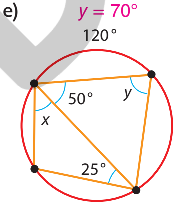
d) **39. d)** $x = 31°$; $y = 90°$



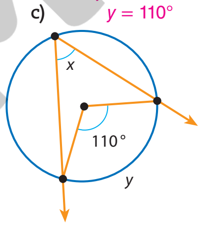
b) **39. b)** $x = 44°$; $y = 88°$



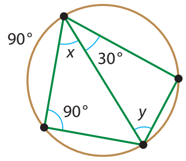
e) **39. e)** $x = 45°$; $y = 70°$



c) **39. c)** $x = 55°$; $y = 110°$



f) **39. f)** $x = 45°$; $y = 60°$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Ângulo inscrito

Caso haja dúvida quanto à demonstração do teorema do ângulo inscrito, peça aos estudantes que, com um transferidor, confiram as medidas dos ângulos da figura.

Essa verificação feita pelo estudante apenas lhe dá confiança para aceitar o resultado. Por isso, convém que ele identifique qual passo dado na demonstração não entendeu para, assim, dirimir suas dúvidas.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 38** e **39** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Nesses exercícios, os estudantes encontram situações diferenciadas dadas pelas figuras para aplicar o teorema, que afirma a relação entre as medidas de um ângulo inscrito e do ângulo central correspondente.

6. Ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência

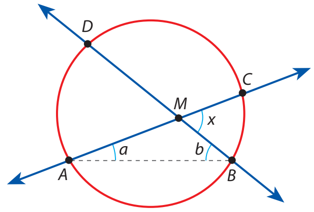
Antes da leitura das demonstrações das proposições sobre ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência, recorde aos estudantes a relação entre um ângulo externo de um triângulo com os ângulos internos não adjacentes: Em qualquer triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes. Essa é a relação primordial para o entendimento das duas proposições apresentadas nesta página.

A título de verificação do caso particular ilustrado pelas figuras desta página, solicite aos estudantes que meçam com o transferidor os ângulos de medidas a, b e x na primeira figura, e comparem a soma $a + b$ com x. E que façam o mesmo na segunda figura: meçam com o transferidor os ângulos de medidas c, y e x, e comparem a soma $c + y$ com x.

6 Ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência

Já estudamos o ângulo central (com vértice coincidente com o centro da circunferência) e ângulos inscritos (com vértice na circunferência). Agora, vamos estudar os demais casos.

Considere a figura a seguir, em que M é um ponto interno à circunferência e x é a medida do ângulo $B\widehat{M}C$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

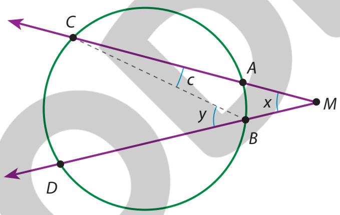
Vamos provar que: $x = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD})}{2}$

Traçando o segmento $\overline{AB}$, obtemos o triângulo AMB. Como x é a medida de um ângulo externo não adjacente aos ângulos internos de medidas a e b, temos: $x = a + b$.

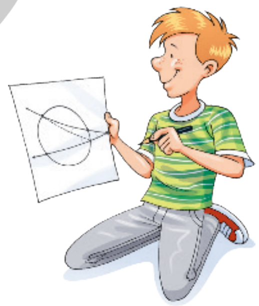
Como $a = \dfrac{m(\overset{\frown}{BC})}{2}$ e $b = \dfrac{m(\overset{\frown}{AD})}{2}$, pois $\hat{a}$ e $\hat{b}$ são ângulos inscritos, obtemos:

$$x = \frac{m(\overset{\frown}{BC}) + m(\overset{\frown}{AD})}{2}$$

Agora, considere esta outra figura, em que M é um ponto externo à circunferência e x é a medida do ângulo $A\widehat{M}B$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos provar que: $x = \dfrac{m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{AB})}{2}$

Traçando o segmento $\overline{BC}$, obtemos o triângulo BMC. Como y é a medida de um ângulo externo não adjacente aos ângulos de medidas c e x, temos: $y = c + x$ ou $x = y - c$.

Como $y = \dfrac{m(\overset{\frown}{CD})}{2}$ e $c = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB})}{2}$, pois $\hat{y}$ e $\hat{c}$ são ângulos inscritos, obtemos:

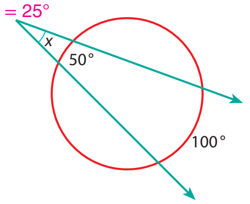
$$x = \frac{m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{AB})}{2}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

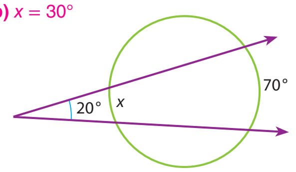
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

40 Calcule, em grau, o valor de x nas figuras.

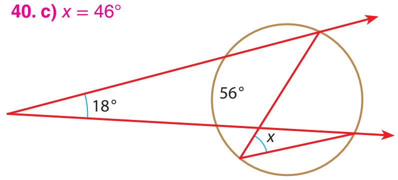
a) **40. a)** $x = 25°$



b) **40. b)** $x = 30°$

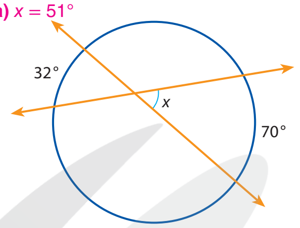


c) **40. c)** $x = 46°$

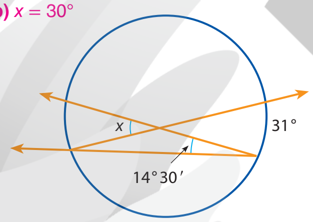


41 Calcule, em grau, o valor de x nas figuras.

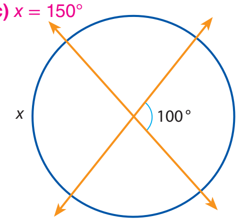
a) **41. a)** $x = 51°$



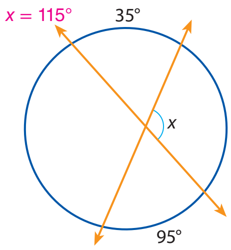
b) **41. b)** $x = 30°$



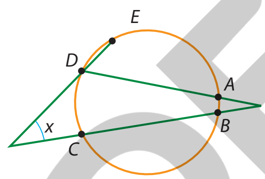
c) **41. c)** $x = 150°$



d) **41. d)** $x = 115°$

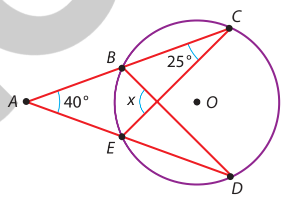


42 (Cesgranrio-RJ) Se, na figura, $m(\overset{\frown}{AB}) = 20°$, $m(\overset{\frown}{BC}) = 124°$, $m(\overset{\frown}{CD}) = 36°$ e $m(\overset{\frown}{DE}) = 90°$, então o ângulo x mede: **42.** Alternativa **c**.



a) 34°.
b) 35° 30′.
c) 37°.
d) 38° 30′.
e) 40°.

43 (Univali-SC) Considere a figura abaixo.



A medida x do ângulo assinalado é:

a) 90°.
b) 85°.
c) 80°.
d) 75°.
e) 70°.

43. Alternativa **a**.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 40** a **43** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Várias situações diferenciadas são dadas pelas figuras para aplicar as relações que afirmam as proposições sobre ângulos cujos vértices não pertencem à circunferência e cujos lados são secantes a ela.

O **exercício 40**, **item a**, sugere uma especificidade no caso de o vértice do ângulo ser externo e um dos arcos determinados medir o dobro do outro. Solicite aos estudantes que resolvam este desafio: determinar a medida *x* do ângulo com vértice externo à circunferência e que determina nela arcos de medidas *a* e 2*a*. $\left(\text{Resposta: } x = \frac{a}{2}\right)$

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 4**, **6**, **7** e **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de retomar os principais conceitos estudados no capítulo e mobilizar os conhecimentos construídos. Verifique se ainda apresentam dificuldade em algum deles e, se este for o caso, sugira que refaçam atividades referentes a tais assuntos.

No **exercício 1**, **item a**, outra resposta seria: Um polígono é circunscrito a uma circunferência se todos os seu lados forem tangentes a ela. No **item b**, outra resposta seria: A medida do arco compreendido pelos lados de um ângulo inscrito é o dobro da medida desse ângulo.

No **exercício 2**, espera-se que os estudantes percebam que as dimensões do retângulo são: base medindo 4 raios e altura medindo 2 raios. A medida do perímetro é, então, equivalente à medida de 12 raios, ou seja, 12 cm.

No **exercício 3**, há uma inversão de dados em relação ao **exercício 2**. Observando a figura, percebemos que a medida de 1 raio é $\frac{1}{24}$ da medida do perímetro do retângulo, ou seja, $\frac{12}{24}$ cm, que é igual a 0,5 cm.

No **exercício 5**, os estudantes devem lembrar que a soma das medidas de dois lados opostos de um quadrilátero circunscrito a uma circunferência é igual à soma das medidas dos outros dois. Logo, $AB + DC = 2{,}5 + 3 = 5{,}5$ e a medida do perímetro de *ABCD* é $5{,}5 + 5{,}5 = 11$.

Portanto, o perímetro de *ABCD* mede 11 cm.

1. a) Falsa. Resposta possível: um polígono é inscrito em uma circunferência se todos os seus vértices pertencem a ela.
1. d) Falsa. Resposta possível: a medida do ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco compreendido pelos seus lados.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Reescreva as sentenças falsas, tornando-as verdadeiras.

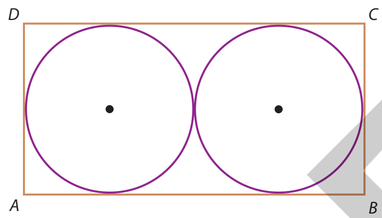
a) Um polígono é circunscrito a uma circunferência se seus vértices pertencem à circunferência.

b) O centro de uma circunferência inscrita em um polígono é equidistante de seus lados. **1. b)** Verdadeira.

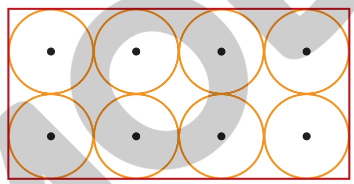
c) As medidas dos segmentos tangentes traçados de um mesmo ponto exterior a uma circunferência são iguais. **1. c)** Verdadeira.

d) A medida do ângulo inscrito em uma circunferência é igual à medida do arco compreendido pelos seus lados.

2 Considere que cada circunferência a seguir tem raio medindo 1 cm. Calcule a medida do perímetro do retângulo *ABCD*, sabendo que seus lados são tangentes às circunferências e que elas são tangentes exteriores entre si. **2.** 12 cm



3 Sabendo que o retângulo tem 12 cm de medida de perímetro, calcule a medida do raio de cada circunferência. **3.** 0,5 cm



4 Dê a posição relativa das circunferências C_1, de centro O_1 e raio de medida r_1, e C_2, de centro O_2 e raio de medida r_2, nos seguintes casos:

a) $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 4$ cm e $O_1O_2 = 6$ cm;

b) $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 2$ cm e $O_1O_2 = 10$ cm;

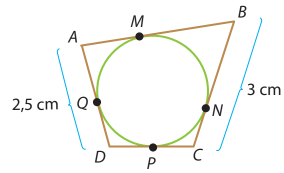
c) $r_1 = 9$ cm, $r_2 = 6$ cm e $O_1O_2 = 7$ cm;

d) $r_1 = 8$ cm, $r_2 = 4$ cm e $O_1O_2 = 20$ cm;

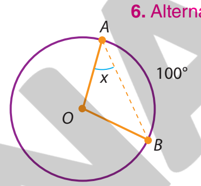
e) $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 4$ cm e $O_1O_2 = 1$ cm.

4. a) Tangentes interiores. **4. b)** Tangentes exteriores. **4. c)** Secantes. **4. d)** Externas. **4. e)** Internas.

5 Calcule a medida do perímetro do quadrilátero circunscrito à circunferência. **5.** 11 cm

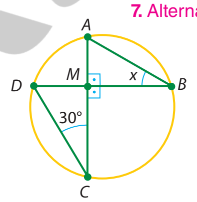


6 Na figura, o valor de x, em grau, é: **6.** Alternativa **d**.



a) 50°. b) 80°. c) 100°. d) 40°.

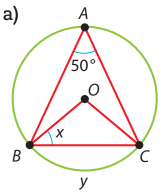
7 Na figura, o valor de x, em grau, é: **7.** Alternativa **a**.



a) 30°. b) 60°. c) 120°. d) 15°.

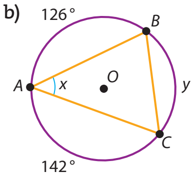
8 Calcule, em grau, o valor de *x* e de *y* nas figuras a seguir.

a)



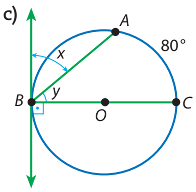
8. a) $x = 40°$; $y = 100°$

b)



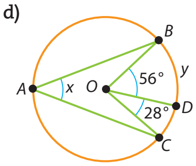
8. b) $x = 46°$; $y = 92°$

c)



8. c) $x = 50°$; $y = 40°$

d)



8. d) $x = 42°$; $y = 56°$

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Considere uma circunferência C_1 de centro O, sendo $\overline{AB}$ uma corda, com $AB = 2$ cm. Sabendo que o diâmetro $\overline{EF}$ tem medida igual ao triplo da medida de $\overline{AB}$, quais são as medidas de $\overline{EF}$ e de $\overline{EO}$? **1.** Alternativa **a**.

a) $EF = 6$ cm e $EO = 3$ cm
b) $EF = 6$ cm e $EO = 2$ cm
c) $EF = 3$ cm e $EO = 4$ cm
d) $EF = 3$ cm e $EO = 6$ cm

2 Seja um grupo de circunferências com medidas de diâmetros, em centímetro, dadas pela expressão $6x + 2$. Para quais valores de x, em centímetro, as circunferências terão medidas de raio maior que 2 cm e menor que 13 cm? **2.** Alternativa **c**.

a) $\frac{1}{3} < x < \frac{11}{6}$
c) $\frac{1}{3} < x < 4$
b) $0 < x < 2$
d) $0 < x < 6$

3 Qual é a medida aproximada do comprimento de uma circunferência de diâmetro medindo 7 cm? (Considere $\pi = 3{,}14$.) **3.** Alternativa **b**.

a) 10,99 cm
c) 32,97 cm
b) 21,98 cm
d) 43,96 cm

4 Um plano α, contém uma circunferência de centro O e os pontos P, Q e R. As medidas das distâncias desses pontos em relação ao centro O são: $OP = 6$ cm, $OQ = 8$ cm e $OR = 3$ cm. Sabendo que o raio dessa circunferência mede 6 cm, quais são as posições dos pontos P, Q e R em relação à circunferência? **4.** Alternativa **d**.

a) P pertence, Q é interno e R é externo.
b) P é interno, Q pertence e R é externo.
c) P é externo, Q pertence e R é interno.
d) P pertence, Q é externo e R é interno.

5 Considere as posições de r, s e t em relação a uma circunferência:

(I) nenhum ponto de r está contido na circunferência;
(II) s tem dois pontos em comum com a circunferência;
(III) t tem um único ponto em comum com a circunferência.

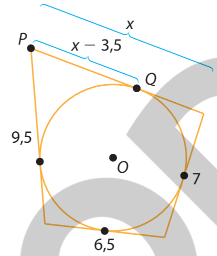
Considerando as posições das retas r, s e t em relação à circunferência, temos: **5.** Alternativa **a**.

a) r é externa, s é secante e t é tangente.
b) r é externa, s é tangente e t é secante.
c) r é secante, s é tangente e t é externa.
d) r é tangente, s é externa e t é secante.

6 Sejam duas circunferências, C_1 de raio medindo 12 cm e C_2 de raio medindo 8 cm. Se o centro de C_1 está há uma distância de medida igual a 4 cm do centro da C_2, qual é a posição relativa entre C_1 e C_2? **6.** Alternativa **c**.

a) Secantes.
b) Tangentes exteriores.
c) Tangentes interiores.
d) Externas.

7 Considere a circunferência representada a seguir, com raio medindo 4 cm. Qual é a medida da área do triângulo POQ? **7.** Alternativa **b**.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a) 11 cm²
b) 13 cm²
c) 15 cm²
d) 17 cm²

Organizando

Organizando:
a) Os estudantes devem considerar que o círculo é a região interna de uma circunferência e a própria circunferência.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões.

a) Como você explicaria para um colega a diferença entre círculo e circunferência?
b) Quais são as posições relativas entre um ponto e uma circunferência, entre uma reta e uma circunferência e entre duas circunferências?
c) O que são circunferências concêntricas? **c)** São circunferências internas que têm o mesmo centro.
d) Quando um segmento é tangente à uma circunferência? **d)** Quando ele toca a circunferência em um só ponto.
e) O que é possível afirmar sobre as somas das medidas dos lados opostos de qualquer quadrilátero circunscrito a uma circunferência? **e)** São iguais.
f) Qual é a relação entre a medida angular de um arco de circunferência e a medida do ângulo central correspondente? **f)** São iguais.

b) Ponto e circunferência: interno, externo e pertencente; reta e circunferência: secante, tangente e exterior; duas circunferências: secantes, tangentes interiores, tangentes exteriores, externas ou internas (nesse caso, ainda, podem ser concêntricas).

Verificando

Nesta seção apresentamos testes que abrangem todo o capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso os estudantes tenham dúvidas, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

As resoluções dos **testes 1** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Organizando

a) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes digam que a circunferência é uma linha e que o círculo é a região interna a essa linha.
b) Oriente os estudantes a responder separadamente a cada um dos três grupos de posições. Verifique se eles, além de classificar as posições por nome (tangentes, secantes etc.), escrevem a condição matemática que deve ocorrer em cada caso.
c) Solicite aos estudantes que deem a condição matemática que deve ocorrer nesse caso.
d) Solicite aos estudantes que deem a condição matemática que deve ocorrer nesse caso: a medida da distância da reta suporte do segmento ao centro é igual à medida do raio.
e) Solicite aos estudantes que esbocem a situação com um exemplo.
f) Incentive os estudantes a ir além da resposta trivial "são iguais". Solicite que ilustrem a situação com um esboço.

LISTA DE SIGLAS

Cesgranrio-RJ — Fundação Cesgranrio
FCC — Fundação Carlos Chagas
FMU-SP — Centro Universitário das Faculdades Metropolitanas Unidas
OBM — Olimpíada Brasileira de Matemática
Obmep — Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
UEMS — Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Uerj — Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UFC-CE — Universidade Federal do Ceará
UFMG — Universidade Federal de Minas Gerais
UFG-GO — Universidade Federal de Goiás
UFRGS-RS — Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRRJ — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Unifor-CE — Universidade de Fortaleza
Univali-SC — Universidade do Vale do Itajaí
UPM-SP — Universidade Presbiteriana Mackenzie
Vunesp — Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

SUGESTÕES DE LEITURA PARA O ESTUDANTE

A seguir indicamos alguns livros para você. Faça uma boa leitura!

Alice no país dos números
Carlo Frabetti, Ática, 2019.

Alice está de mau humor porque tem de estudar Matemática. Sorte que, bem na hora da tarefa, Lewis Carroll, o autor de Alice no País das Maravilhas, a leva para o País dos Números. Lá, entre aventuras e charadas, Alice descobre que a Matemática tem como base o raciocínio, que ela serve para muita coisa e, o mais importante, que aprendê-la pode ser fácil e divertido.

Guia do viajante pelo mundo antigo: Egito
Charlotte Booth. Editora Ciranda Cultural, 2010.

Escrito pela importante egiptóloga Charlotte Booth, o livro propõe ao leitor uma viagem pelo conhecimento. Imagine como seria viajar no tempo e explorar uma cidade da Antiguidade, ver as maravilhas antigas quando eram novas e recém-construídas, encontrar as pessoas que viviam e trabalhavam naquela época. Esse livro apresenta um panorama detalhado do Egito antigo, do seu povo e das características desse importante império no ano 1200 a.C.

História de sinais

Luzia Faraco Ramos, Editora Ática, 2001. (Coleção A descoberta da Matemática).

Milena fica de cara amarrada ao descobrir que um hóspede passará o verão em sua casa. Ela não imaginava, porém, que o rapaz fosse tão bonito e inteligente. Com a ajuda dele, Milena aprenderá a resolver problemas com números inteiros.

O prazer das compras: o consumismo no mundo contemporâneo

Maria Helena Pires Martins, Editora Moderna, 2016. (Série Aprendendo a Com-Viver).

Consumir é uma necessidade. Para nos mantermos vivos, consumimos energia, água e nutrientes. O ser humano, entretanto, consome além das suas necessidades: por desejo, por impulso, o que leva ao consumismo – consumo exagerado de alimentos, roupas e acessórios da moda, aparelhos eletrônicos etc. –, que causa um enorme acúmulo de lixo difícil de ser descartado. Além disso, para produzir tantos bens de consumo, a indústria faz uso de quantidades crescentes de matérias-primas, de energia e de água. Como resultado, os recursos naturais estão se esgotando no planeta. O que fazer, então, para nos tornarmos consumidores conscientes?

Uma proporção ecológica

Luzia Faraco Ramos, Editora Ática, 2002. (Coleção A descoberta da Matemática).

Um grupo de jovens quer conscientizar a cidade sobre a importância da coleta seletiva. Usando a Matemática, eles controlam o lixo coletado. Só que não contavam com um vilão por perto.

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

AABOE, A. **Episódios da história antiga da Matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

Essa obra está dividida em 4 capítulos. O primeiro é sobre o sistema numérico e a aritmética na Babilônia. O segundo é sobre a matemática desenvolvida na Grécia em dois momentos: a matemática antes e depois de Euclides, com suas contribuições para a construção do pentágono regular. O penúltimo é sobre o trabalho de Arquimedes, como as construções de polígonos regulares, a trissecção do ângulo e a construção do heptágono regular. No último, conhecemos a tabela trigonométrica de Ptolomeu.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**. 3. ed. São Paulo: Atual, 2001.

A obra convida a descobrir e criar padrões, particularmente no campo da Geometria euclidiana, relativos à pavimentação de superfícies planas.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de Matemática. 5. ed. São Paulo: CAEM/IME - USP, 2004.

A autora disserta sobre a importância de trabalhar com jogos nas aulas de Matemática. Apresenta ainda alguns exemplos de jogos e como fazer a avaliação dos estudantes.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

Edição dividida em 24 capítulos que contemplam desde os vestígios matemáticos encontrados nas culturas primitivas até as tendências recentes e perspectivas futuras para a matemática. Apresenta uma cobertura atualizada de tópicos como o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como a teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do Pensamento Computacional Através de Atividades Desplugadas na Educação Básica**. 2017. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil, 2017. (Tese de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação). Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 25 abr. 2022.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

Documento oficial do Ministério da Educação que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio de todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file. Acesso em: 25 abr. 2022.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Elaborado pelo Ministério da Educação, guia prático com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

CASTRUCCI, B. **Fundamentos da Geometria**: estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro: LTC, 1978.

Apresenta um estudo axiomático da Geometria inspirado nas ideias de David Hilbert e em cursos ministrados em universidades.

CENTURION, M. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. 2. ed. São Paulo: Scipione, 1995.

A obra baseia-se na ideia de que o estudante constrói seu próprio conhecimento por meio de suas ações e problematizações. Aborda as principais dúvidas tanto do estudante de pedagogia quanto do professor das séries iniciais do Ensino Fundamental.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994.

Essa obra apresenta uma coleção de artigos referentes a diferentes temáticas relacionadas ao ensino de Álgebra, como equações, expressões, resolução de problemas e uso da calculadora.

294

CRESPO, A. A. **Estatística fácil**. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

Com uma linguagem objetiva, esse livro traz uma abordagem introdutória de Estatística.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 1999.

Abordando a resolução de problemas matemáticos e sua importância no ensino, esse livro representa uma valiosa contribuição para a melhoria da prática de educação matemática. Propõe uma discussão dos fatores que atuam de forma negativa no aprendizado, por meio da classificação dos tipos de problemas e das etapas envolvidas na resolução.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 3. ed. São Carlos: Edufsc, 2021.

Esse livro é uma introdução à teoria dos números. Apresenta um estudo da divisibilidade relacionada aos números naturais e, depois, ampliada para os números inteiros. Apresenta, também, o desenvolvimento de algumas partes da análise matemática como pré-requisito para o estudo da teoria da representação decimal dos números reais.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

Apresentado de forma cronológica, o livro inicia com uma abordagem sobre a história dos números, passando por diferentes sistemas de numeração e relatando diferentes temáticas da história da Matemática até o século XX.

HOUAISS, A. **Minidicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 3. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2008.

Dicionário da Língua Portuguesa.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Tomo 1.

Livro sobre a história dos sistemas de numeração de diferentes civilizações desde a pré-história, passando por civilizações como a dos egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, hebreus, maias, chineses, hindus e árabes.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na Matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1994.

Essa obra apresenta uma coleção de 22 artigos de especialistas em educação matemática, que poderá ajudar os professores de Matemática a lidar com a resolução de problemas. Os 19 primeiros artigos abordam a resolução de problemas por variados ângulos, sempre com a preocupação de não fugir à realidade da sala de aula. O vigésimo e o vigésimo primeiro artigos se ocupam de medições. O último é uma bibliografia comentada, muito útil para orientar o leitor na busca de mais material sobre o assunto.

LIMA, A. C. P.; MAGALHÃES, M. N. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 3. ed. São Paulo: IME-USP, 2001.

Voltado a estudantes de cursos superiores, esse livro apresenta uma introdução à Probabilidade e à Estatística.

LIMA, E. L. **Medida e forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011. (Coleção do professor de Matemática).

Nesse livro o autor selecionou curiosidades históricas que revelam que a determinação de áreas e volumes está entre as primeiras noções geométricas que despertaram o interesse do homem. Sua opção por introduzir a Geometria, situando-a no contexto histórico do seu surgimento, torna o livro mais fascinante e facilita o estudo da noção de medida em geometria sob aspectos uni, bi e tridimensional, ou seja, a medida de segmentos de reta (comprimento), de figuras planas (área) e de figuras sólidas (volume).

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 2005.
Uma das maiores contribuições desse livro é mostrar a importância da Geometria no ensino e na aprendizagem de Matemática. Merece destaque o capítulo que trata do desenvolvimento do pensar geométrico sob a perspectiva das pesquisas do casal Van Hiele, segundo a qual se pode compreender que um trabalho planejado e consistente em aulas especialmente definidas para o estudo de Geometria, baseadas na problematização, é essencial para que os estudantes desenvolvam o pensar geométrico.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.
Esse livro considera a Álgebra e a Aritmética como duas faces da mesma atividade, lidando com relações quantitativas e explorando a inter-relação da aprendizagem de uma e de outra. Diante disso, busca identificar de que modo isso sugere mudanças na educação matemática escolar.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
Nesse livro são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
Nessa obra são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.
Apresenta um olhar crítico de como a história da Matemática tem sido contada ao longo do tempo.

RUSSELL, M. K.; AIRASIAN, P. W. **Avaliação em sala de aula**: conceitos e aplicações. Porto Alegre: Penso, 2014.
Esse livro apresenta a avaliação como um componente-chave para o processo de ensino e aprendizagem. Traz, também, ferramentas e abordagens de avaliação que decorrem da introdução das tecnologias computacionais nas escolas.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. **Álgebra**: das variáveis às equações e funções. São Paulo: CAEM/IME – USP, 1996.
Apresenta uma reflexão sobre o ensino de Álgebra com propostas de atividades.

SOUZA, E. R. *et al*. **A Matemática das sete peças do tangram**. São Paulo: CAEM/IME – USP, 1997.
Apresenta diferentes atividades que trabalham com a construção do *tangram* com régua e compasso, semelhança dos triângulos do *tangram*, entre outros temas.

TINOCO, L. A. A. *et.al.* **Álgebra**: pensar, calcular, comunicar... 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ/Projeto Fundão, 2011.
Nesse livro são apresentadas atividades que exploram os papéis da Álgebra na Escola Básica e suas possíveis abordagens, para propiciar uma aprendizagem significativa do tema e a construção do sentido do símbolo pelos estudantes.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática de Matemática**: como dois e dois – a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997.
Esse livro traz atividades que possibilitam despertar a intuição matemática, relacionando-as à teoria formal da Matemática.

ISBN 978-85-16-13568-3