Edwaldo Bianchini

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA BIANCHINI

8º ano

Componente curricular:
MATEMÁTICA

MODERNA

Edwaldo Bianchini
Licenciado em Ciências pela Faculdade de Educação de Ribeirão Preto, da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP).
Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo, no Ensino Fundamental e Médio, por 25 anos.

MANUAL DO PROFESSOR

MATEMÁTICA BIANCHINI

8º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

10ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Maria Cecília da Silva Veridiano
Edição de texto: Dario Martins de Oliveira, Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Livia Santa Clara
Assistência editorial: Roberta Stoppe
Preparação de texto: Geuid Dib Jardim
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Tatiane Porusselli
Capa: Douglas Rodrigues José, Tatiane Porusselli, Apis Design, Fábio Luna
Imagem da capa: Detalhe de: Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Sarbalé Ke, "Casa da Celebração" em Festival de Música e Artes Coachella 2019, Califórnia, EUA.
© Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Foto: Iwan Baan.
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine
Editoração eletrônica: Grapho Editoração, JSDesign
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Cesar G. Sacramento, Daniela Uemura, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Maura Loria, Patricia Cordeiro, Roberta Otoni, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Vanessa Trindade
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bianchini, Edwaldo
Matemática Bianchini : 8º ano: manual do professor / Edwaldo Bianchini. -- 10. ed. -- São Paulo : Moderna, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-16-13572-0

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

22-115268 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Sarbalé Ke, a "Casa da Celebração" na língua Bissa de Burkina Fasso, é uma instalação criada para o Festival de Música e Artes Coachella 2019, pelo arquiteto Diébédo Francis Kéré. A instalação explora, com 12 torres, o mundo interior de um baobá.
As três torres mais altas formam o centro da instalação e o maior espaço de encontro para os visitantes que podem aproveitar seus interiores cheios de luz, naturalmente ventilados e sombreados.

SUMÁRIO

Apresentação

Professor(a),

Como material de apoio à prática pedagógica, este *Manual* traz, de maneira concisa, orientações e sugestões para o uso do livro do estudante como texto de referência, com o objetivo de subsidiar seu trabalho em sala de aula. Esperamos que este material o(a) auxilie a melhor aproveitar e a compreender as diretrizes pedagógicas que nortearam a elaboração dos quatro livros desta coleção.

Este *Manual* também discute a avaliação da aprendizagem sob a luz de pesquisas em Educação e Educação Matemática e em documentos oficiais. Além disso, oferece indicações de leituras complementares e *sites* de centros de formação continuada, na intenção de contribuir para a ampliação de seu conhecimento, sua experiência e atualização.

As características da coleção, as opções de abordagem e os objetivos educacionais a alcançar são também expostos e discutidos aqui.

Visão geral da proposta da coleção

Esta coleção tem como principais objetivos servir de apoio ao professor no desenrolar de sua prática didático-pedagógica e oferecer ao estudante um texto de referência auxiliar e complementar aos estudos.

Com base nos conteúdos indicados para a Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º anos) e suas especificidades de ensino, a obra procura possibilitar ao estudante a elaboração do conhecimento matemático, visando contribuir para a formação de cidadãos que reflitam e atuem no mundo, e subsidiar o trabalho docente, compartilhando possibilidades de encaminhamento e sugestões de intervenção. Nesse sentido, atribui especial importância ao desenvolvimento de conceitos de maneira precisa e por meio de linguagem clara e objetiva, com destaques pontuais para aqueles de maior importância.

As ideias matemáticas são apresentadas e desenvolvidas progressivamente, sem a preocupação de levar o estudante a assimilar a totalidade de cada conteúdo, isto é, sem a pretensão de esgotar o assunto na primeira apresentação. Ao longo da coleção, oferecemos constantes retomadas, não apenas visando à revisão, mas à complementação e ao aprofundamento de conteúdos. Acreditamos que, por meio de diversos contatos com as ideias e os objetos matemáticos, o estudante conseguirá apreender seus significados.

Em relação à abordagem, a apresentação de cada conteúdo se dá, principalmente, por meio de situações contextualizadas e problematizadoras que possibilitem ao estudante uma aprendizagem significativa, assim como estabelecer relações da Matemática com outras áreas do saber, com o cotidiano, com sua realidade social e entre os diversos campos conceituais da própria Matemática.

Essa contextualização abarcou situações comuns, vivenciadas pelos jovens em seu cotidiano, e informações mais elaboradas, que costumam aparecer nos grandes veículos de comunicação. Assim, a obra tem por objetivo contribuir para a formação integral do estudante, de modo que, enquanto assimila e organiza os conteúdos próprios da Matemática, coloque em prática, sempre que possível, suas capacidades reflexiva e crítica, inter-relacionando tanto os tópicos matemáticos entre si quanto estes com os de diferentes áreas do saber. O intento é colaborar de maneira eficaz para a solidificação do conhecimento matemático e com o preparo do exercício da cidadania e da participação positiva na sociedade.

Na perspectiva mundial da permanente busca por melhor qualidade de vida, a Matemática, sobretudo em seus aspectos essenciais, contribui de modo significativo para a formação do cidadão crítico e autoconfiante, com compreensão clara dos fenômenos sociais e de sua atuação na sociedade, com vistas a uma **formação integral** e **inclusiva**. Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma, de maneira explícita, seu compromisso com a educação integral e reconhece que:

> [...] a Educação Básica deve visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. Significa, ainda, assumir uma visão plural, singular e integral da criança, do adolescente, do jovem e do adulto – considerando-os como sujeitos de aprendizagem – e promover uma educação voltada ao seu acolhimento, reconhecimento e desenvolvimento pleno, nas suas singularidades e diversidades (BRASIL, 2018, p. 14).
>
> A ideia de educação inclusiva sustenta-se em um movimento mundial de reconhecimento da diversidade humana e da necessidade contemporânea de se constituir uma escola para todos, sem barreiras, na qual a matrícula, a permanência, a aprendizagem e a garantia do processo de escolarização sejam, realmente e sem distinções, para todos (SÃO PAULO, 2019, p. 25).

Na sequência, os conceitos teóricos são trabalhados entremeados por blocos de exercícios e, algumas vezes, por atividades de outra natureza em seções especiais. A distribuição das atividades em diferentes seções procura facilitar e flexibilizar o planejamento do trabalho docente, bem como possibilitar ao estudante desenvolver habilidades diversas.

As atividades também foram pensadas de acordo com o mesmo viés da exposição teórica, intercalando-se aos exercícios convencionais, importantes para formalizar e sistematizar conhecimentos, aqueles que associam os contextos matemáticos aos de outras áreas do conhecimento, que contemplam temas abrangendo informações de Biologia, Ecologia, Economia, História, Geografia, Política, Ciências e Tecnologia.

A constante recorrência a imagens, gráficos e tabelas, muitos deles publicados em mídias atuais, tem por objetivo estimular os estudantes a estabelecerem conexões com o mundo em que vivem.

A obra procura trazer atividades que possibilitam a sistematização dos procedimentos e a reflexão sobre os conceitos em construção. Elas procuram abordar diferentes aspectos do conceito em discussão por meio de variados formatos, apresentando, quando possível, questões abertas, que dão oportunidade a respostas pessoais, questões com mais de uma solução ou cuja solução não existe. Da mesma maneira, há exercícios que estimulam a ação mental, promovendo o desenvolvimento de argumentações, a abordagem de problemas de naturezas diversas e as discussões entre colegas e em grupos de trabalho. O professor tem, então, uma gama de questões a seu dispor para discutir e desenvolver os conceitos matemáticos em estudo.

É importante reafirmar que, ao longo de toda a coleção, houve preocupação com a precisão e a concisão da linguagem. A abordagem dos conteúdos procurou ser clara, objetiva e simples, a fim de contribuir adequadamente para o desenvolvimento da Matemática escolar no nível do Ensino Fundamental. Além do correto uso da língua materna e da linguagem propriamente matemática, procuramos o auxílio da linguagem gráfica, com ilustrações, esquemas, diagramas e fluxogramas que auxiliam a aprendizagem pelas mudanças dos registros de representação.

Objetivos gerais da coleção

- Apresentar a Matemática, em seus diversos usos, como uma das linguagens humanas, explorando suas estruturas e seus raciocínios.
- Introduzir informações que auxiliem a apreensão de conteúdos matemáticos, com vistas à sua inserção em um corpo maior de conhecimentos e à sua aplicação em estudos posteriores.
- Possibilitar ao estudante o domínio de conteúdos matemáticos que lhe deem condições de utilização dessa ciência no cotidiano e na realidade social, oportunizando o desenvolvimento do letramento matemático[1].
- Propiciar, com o auxílio do conhecimento matemático, o desenvolvimento das múltiplas competências e habilidades cognitivas do estudante, preparando-o como pessoa capaz de exercer conscientemente a cidadania e de progredir profissionalmente, garantindo uma formação integral e inclusiva.
- Desenvolver hábitos de leitura, de estudo e de organização.

Esses objetivos se justificam à medida que compreendemos que a Matemática desempenha um importante papel no desenvolvimento dos estudantes, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, com aplicações no mundo do trabalho, e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Possibilita, ainda, o trabalho e o relacionamento com as diferentes linguagens, explorando suas estruturas e raciocínios, além de propiciar o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e desenvolver hábitos relacionados ao cotidiano escolar.

Fundamentos teórico-metodológicos

Vamos apresentar alguns temas relativos ao ensino de Matemática que norteiam as escolhas curriculares da coleção e se alinham às proposições da BNCC, documento que foi elaborado após ampla consulta a especialistas e à população e que é a referência para a construção dos currículos de toda a rede de ensino, municipal, estadual e federal, em todo o país. Ela traz o conteúdo mínimo a ser desenvolvido em cada etapa da Educação Básica e, para preservar a autonomia das escolas e dos professores, deve ser complementada com a inclusão das especificidades regionais e locais.

A BNCC traz o conjunto das aprendizagens consideradas essenciais que todo estudante deve desenvolver ao longo de sua trajetória escolar no ensino básico. Essas aprendizagens estão apresentadas em forma de competências gerais, competências específicas e habilidades segundo os componentes curriculares ou as áreas do conhecimento para cada etapa do ensino.

A importância de aprender Matemática

Partimos da proposição de que uma característica da Matemática é ser uma linguagem capaz de decodificar, traduzir e expressar o pensamento humano, o que contribui para a formação integral do estudante.

> O conhecimento matemático é necessário para todos os estudantes da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais (BRASIL, 2018, p. 265).
>
> Atualmente, é indiscutível a importância da Matemática na formação humana, especialmente por vivermos em uma sociedade cada vez mais permeada pela ciência e pela tecnologia. Diversas profissões [...] exigem conhecimentos matemáticos e competências básicas para lidar com as mesmas. Além disso, exige-se do cidadão do século XXI habilidades matemáticas essenciais tais como compreensão de gráficos, capacidade de fazer estimativas, de organização do pensamento, tomada consciente de decisões, entre outras, de modo que ele seja capaz de fazer uma leitura de mundo, de encarar desafios e resolver problemas, levantando hipóteses e buscando soluções, além de emitir opinião sobre fatos e fenômenos que emergem da realidade na qual está inserido (PERNAMBUCO, 2019, p. 65).

A palavra **matemática** vem do grego *mathematike*. Em sua origem, estava ligada ao ato de aprender, pois significava "tudo o que se aprende", enquanto **matemático**, do grego *mathematikos*, era a palavra usada para designar alguém "disposto a aprender". O verbo **aprender** era originalmente, em grego, *manthanein*; mas hoje o radical *math*, antes presente nas palavras ligadas à aprendizagem, parece ter perdido essa conotação e daí talvez resulte a ideia geral de que a Matemática é uma disciplina que lida apenas com números, grandezas e medidas e que se aprende na escola de forma compulsória.

Na realidade, a Matemática fornece ao indivíduo, além de uma linguagem para expressar seu pensamento, ferramentas com as quais ele pode gerar novos pensamentos e desenvolver raciocínios, ou seja,

> […] a Matemática não é simplesmente uma disciplina, mas também uma forma de pensar. É por isso que a Matemática, assim como a alfabetização, é algo que deveria ser tornado disponível para todos […] (NUNES; BRYANT; 1997, p. 105).

A Matemática, portanto, é algo que deve estar disponível a todo ser humano, para que possa fazer uso dela como uma de suas ferramentas de sobrevivência e convívio social, promovendo uma formação inclusiva.

[1] Segundo a Matriz de Avaliação de Matemática do Pisa 2012 (disponível em: https://download.inep.gov.br/acoes_internacionais/pisa/marcos_referenciais/2013/matriz_avaliacao_matematica.pdf; acesso em: 2 maio 2022): Letramento matemático é a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em uma variedade de contextos. Isso inclui raciocinar matematicamente e utilizar conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas para descrever, explicar e predizer fenômenos. Isso auxilia os indivíduos a reconhecer o papel que a matemática exerce no mundo e para que cidadãos construtivos, engajados e reflexivos possam fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões necessárias.

Um ponto crucial a considerar é que as formas de pensar características da Matemática podem expandir-se para outros raciocínios, impulsionando a capacidade global de aprendizado. Ao lidar com a Matemática, fundamentamos o pensamento em um conjunto de axiomas, na geração e na validação de hipóteses, no desenvolvimento de algoritmos e procedimentos de resolução de problemas — ferramentas aplicáveis a um conjunto de situações similares —, estabelecendo conexões e fazendo estimativas. Analisando situações particulares e inserindo-as na estrutura global, é possível construir estruturas de pensamento também úteis em situações não matemáticas da vida em sociedade.

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico. Esses sistemas contêm ideias e objetos que são fundamentais para a compreensão de fenômenos, a construção de representações significativas e argumentações consistentes nos mais variados contextos (BRASIL, 2018, p. 265).

Ao construir sua história, o ser humano tem modificado e ampliado constantemente suas necessidades, individuais ou coletivas, de sobrevivência ou de cultura. O corpo de conhecimentos desenvolvido nesse longo trajeto ocupa lugar central no cenário humano. No que diz respeito aos **conhecimentos matemáticos**, muitos continuam atravessando os séculos, enquanto outros já caíram em desuso. Há, ainda, outros que estão sendo incorporados em razão das necessidades decorrentes das ações cotidianas, como é o caso da Educação Financeira. As novas práticas solicitam a ampliação e o aprofundamento desses conhecimentos.

Até algumas décadas atrás, "saber" Matemática implicava basicamente dominar e aplicar as operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Na atualidade, contudo, as pesquisas educacionais, as diretrizes pedagógicas oficiais e, em especial, a BNCC apontam para a necessidade de que em todos os anos da Educação Básica a escola trabalhe conteúdos organizados nas cinco Unidades Temáticas: **Números**, **Álgebra**, **Geometria**, **Grandezas e medidas** e **Probabilidade e estatística**, tendo como referência o desenvolvimento das competências e habilidades descritas pela BNCC.

> Na BNCC, **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BRASIL, 2018, p. 8).

Para entender a real importância da Matemática, basta pensar em nosso cotidiano. É fácil fazer uma longa lista de ações nas quais precisamos mobilizar os conhecimentos desse campo: calcular uma despesa para efetuar seu pagamento; examinar diferentes alternativas de crédito; estimar valores; calcular medidas e quantidades com alguma rapidez; compreender um anúncio ou uma notícia apresentados por meio de tabelas e gráficos; analisar criticamente a validade de um argumento lógico; avaliar a razoabilidade de um resultado numérico ou estatístico; decidir a sequência de passos necessários para resolver um problema; orientarmo-nos no espaço (para deslocamentos ou indicações de trajetórias), entre tantas outras situações.

Hoje sabemos da importância de o indivíduo aprender continuamente, durante toda a vida, para assimilar as incessantes inovações do mundo moderno e, desse modo, realimentar seu repertório cultural. Em um ambiente mundial cada vez mais competitivo e desenvolvido do ponto de vista tecnológico, é preciso tornar acessíveis a todas as pessoas as vantagens desses avanços. E é responsabilidade também da educação escolar levar o estudante a perceber criticamente a realidade, cuja interpretação depende da compreensão de sua estrutura lógica, do entendimento da simbologia adotada no contexto, da análise das informações veiculadas por dados numéricos, imagens, taxas, indexadores econômicos etc. Um indivíduo com poucos conhecimentos matemáticos pode estar privado de exercer seus direitos como cidadão, por não ter condições de opinar em situação de igualdade com os demais membros da sociedade, nem de definir seus atos políticos e sociais com base em uma avaliação acurada da situação.

No ensino da Matemática, assumem grande importância aspectos como o estímulo a relacionar os conceitos matemáticos com suas representações (esquemas, diagramas, tabelas, figuras); a motivação para identificar no mundo real o uso de tais representações; o desafio à interpretação, por meio da Matemática, da diversidade das informações advindas desse mundo.

Podemos afirmar que a maior parte das sociedades de hoje depende cada vez mais do conjunto de conhecimento produzido pela humanidade, incluindo de maneira notável as contribuições da ciência matemática. Ao mesmo tempo, esse arcabouço cultural revigora-se incessantemente, com grande diversidade e sofisticação. Os apelos de um mundo que se transforma em incrível velocidade, em uma crescente variedade de domínios, constituem uma das razões mais significativas para o maior desafio dos educadores: preparar os jovens para uma atuação ética e responsável, balizada por uma formação múltipla e consistente.

Matemática acadêmica × Matemática escolar

No âmbito específico da Matemática, há muito mais conhecimento já estabelecido do que o que chega à sala de aula. A seleção desses conhecimentos-conteúdos e a maneira de apresentá-los aos estudantes exigem bom preparo didático e pedagógico e uma série de estudos e adaptações.

Em sua formação inicial, na universidade, o futuro professor de Matemática tem contato simultâneo com a **Matemática acadêmica** e a **Matemática escolar**. No entanto, em seu exercício profissional, o destaque será para a Matemática escolar; daí a relevância de procurarmos entender a distinção entre ambas.

De acordo com Moreira e David (2003), a Matemática acadêmica, ou científica, é o corpo de conhecimentos produzido por matemáticos profissionais. Nesse caso, as demonstrações, definições e provas de um fato e o rigor na linguagem utilizada ocupam papel relevante, visto que é por meio deles que determinado conhecimento é aceito como verdadeiro pela comunidade científica.

No caso da Matemática escolar, há dois aspectos fundamentais que modificam significativamente o papel do rigor nas demonstrações. O primeiro refere-se ao fato de a "validade" dos resultados matemáticos, que serão apresentados aos estudantes no processo de ensino-aprendizagem, não ser colocada em dúvida; ao contrário, já está garantida pela própria Matemática acadêmica. O segundo aspecto diz respeito à aprendizagem; nesse caso, o mais importante é o desenvolvimento de uma prática pedagógica que assegure a compreensão dos conteúdos matemáticos essenciais, assim como a construção de justificativas que permitam ao jovem estudante utilizá-los de maneira coerente e conveniente, tanto na vida escolar quanto na cotidiana, propiciando o desenvolvimento das competências e habilidades para ele exercer a cidadania plena e atuar no mundo.

O pensador Henri Jules Poincaré também discute a diferença entre o rigor necessário e conveniente à Matemática científica e o rigor adequado a um processo educativo. Para ele, uma boa definição é aquela que pode ser entendida pelo estudante.

Diante disso, a coleção procura harmonizar o uso da língua materna com a linguagem matemática, promovendo uma leitura acessível e adequada aos estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental.

A Matemática como componente curricular do Ensino Fundamental

A importância de ensinar Matemática no Ensino Fundamental, conforme indica a BNCC, decorre também da contribuição que a área representa na formação do cidadão.

> O Ensino Fundamental deve ter compromisso com o desenvolvimento do **letramento matemático**, definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas. É também o letramento matemático que assegura aos estudantes reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e perceber o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição).
>
> O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática (BRASIL, 2018, p. 266).

Diversos pesquisadores e profissionais ligados à Educação Matemática têm procurado sintetizar o papel social do ensino dessa área do conhecimento. Na literatura, segundo Ponte (2002), cabem ao ensino da Matemática quatro diferentes papéis:

- instrumento da cultura científica e tecnológica, fundamental para profissionais como cientistas, engenheiros e técnicos, que utilizam a Matemática em suas atividades;
- filtro social para a continuação dos estudos e a seleção para as universidades;
- instrumento político, como símbolo de desenvolvimento e arma de diversas forças sociais que utilizam as estatísticas do ensino da Matemática para seus propósitos;
- promotora do desenvolvimento dos modos de pensar a serem aplicados na vida cotidiana e no exercício da cidadania.

É evidente que cada um desses papéis serve a diferentes interesses e finalidades. Contudo, considerando os indivíduos seres sociais, é o último desses papéis o mais importante e o que mais nos interessa. Como explica Ponte:

> Incluem-se aqui os aspectos mais diretamente utilitários da Matemática (como ser capaz de fazer trocos e de calcular a área da sala), mas não são esses aspectos que justificam a importância do ensino da Matemática. São, isto sim, a capacidade de entender a linguagem matemática usada na vida social e a capacidade de usar um modo matemático de pensar em situações de interesse pessoal, recreativo, cultural, cívico e profissional. Em teoria, todos reconhecem que esta é a função fundamental do ensino da Matemática. Na prática, infelizmente, é muitas vezes a função que parece ter menos importância (PONTE, 2002).

O fato de a função de promover modos de pensar estar explicitada no currículo e nos programas não é suficiente, contudo, para concretizar essa função.

> O sistema de avaliação, os manuais escolares e a cultura profissional dos professores podem influenciar de tal modo as práticas de ensino que as finalidades visadas pelo currículo em ação, muitas vezes, pouco têm a ver com aquilo que é solenemente proclamado nos textos oficiais. (PONTE, 2002).

Ao discorrer sobre esses papéis, Ponte (2002) analisa em particular a função de filtro social e afirma que "a verdade é que este papel de instrumento fundamental de seleção tem pervertido a relação dos jovens com a Matemática". Isso se dá porque os estudantes passam a enxergá-la como obstáculo a ser transposto para a conquista de objetivos, em vez de entendê-la como aliada nesse processo. O pesquisador enfatiza a importância de identificar os fatores que originam o insucesso dos estudantes em Matemática. Para ele, tais fatores estão relacionados com:

- a crise da escola como instituição, que se reflete na aprendizagem em geral e na Matemática em particular;
- aspectos de natureza curricular — tradição pobre de desenvolvimento curricular de Matemática;
- insuficiente concretização prática e caráter difuso das finalidades do aprendizado;
- o próprio fato de a Matemática constituir-se em instrumento de seleção, o que, de imediato, desencanta e amedronta o estudante;
- questões ligadas à formação dos professores.

Em contrapartida, de acordo com a BNCC, podemos destacar que:

> [...] Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional (BRASIL, 2018, p. 266).

As atuais e inúmeras discussões na área educacional têm nos alertado sobre mudanças na forma de conceber a Educação Básica no mundo. No que diz respeito à Educação Matemática, podemos dizer que ela tem atravessado um grato momento de revitalização:

> Novos métodos, propostas de novos conteúdos e uma ampla discussão dos seus objetivos fazem da Educação Matemática uma das áreas mais férteis nas reflexões sobre o futuro da sociedade (D'AMBROSIO, 2000).

A BNCC preconiza a inclusão e a discussão de temas contemporâneos, como é o caso dos "direitos da criança e do adolescente" e "educação em direitos humanos":

> Por fim, cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora (BRASIL, 2018, p. 19).

A orientação de introduzir e interligar no âmbito escolar temas dessa natureza traz efetivas possibilidades de expansão dos currículos, para além dos conteúdos das disciplinas tradicionais. Esses temas também podem ser abordados de acordo com a necessidade dos estudantes e da comunidade em que estão inseridos.

O importante é ter em vista que, por meio do trabalho com esses temas, é possível incluir as questões sociais nos currículos escolares. Dessa perspectiva, os conteúdos trabalhados ganham novo papel; o aprendizado da Matemática, entre outras abordagens, concorre para a formação da cidadania e, consequentemente, para um entendimento mais amplo da realidade social.

Por compreender a importância desse trabalho, esta coleção procura, na medida do possível, incorporar e discutir alguns conteúdos matemáticos em contextos diversificados.

Objetivos da formação básica para o Ensino Fundamental

Segundo o Parecer 11/2010 do Conselho Nacional de Educação/Câmara de Educação Básica[2] sobre Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos, os objetivos para a formação básica relativos ao Ensino Infantil e Ensino Fundamental são:

- o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
- a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, das artes, da tecnologia e dos valores em que se fundamenta a sociedade;
- a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores como instrumentos para uma visão crítica do mundo;
- o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

O papel do livro didático

Entendemos que, em geral, os recursos presentes em salas de aula não são suficientes para fornecer todos os elementos necessários ao trabalho do professor e à aprendizagem do estudante. Nesse caso, o livro didático desempenha um papel importante, assessorando nesse processo, como organização e encaminhamento da teoria e propostas de atividades e exercícios. Assim, o livro didático contribui para o processo de ensino-aprendizagem e atua como mais um interlocutor na comunicação entre educador e educando.

Mas é preciso considerar que o livro didático, por mais completo que seja, deve ser utilizado intercalado com outros recursos que enriqueçam o trabalho do professor.

Concordamos com Romanatto (2004) quando diz que, partindo do princípio de que o verdadeiro aprendizado apoia-se na compreensão, e não na memória, e de que somente uma real interação com os estudantes pode estimular o raciocínio e o desenvolvimento de ideias próprias em busca de soluções, cabe ao professor aguçar seu espírito crítico perante o livro didático.

Na organização desta coleção, os conceitos e as atividades foram concebidos e dispostos em uma sequência que garanta a abordagem dos conhecimentos matemáticos relativos aos Anos Finais do Ensino Fundamental, visando à ampliação dos conhecimentos básicos tratados nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apresentando-os em capítulos específicos e, depois, retomando-os e ampliando-os em volumes posteriores. Assim, os estudantes podem resgatar os conhecimentos trabalhados anteriormente, ampliar os conceitos ao longo de seus estudos em Matemática do 6º ao 9º anos e preparar-se para a continuidade no Ensino Médio.

As orientações deste *Manual* pretendem esclarecer intenções, objetivos e concepções das atividades que podem auxiliar o trabalho pedagógico do professor em seus encaminhamentos, intervenções e na ampliação e no enriquecimento de seus conhecimentos matemáticos.

Competências socioemocionais

Nas últimas décadas, a Educação passou a enfatizar abordagens que incluíam outras dimensões do desenvolvimento humano, como a afetiva, a social para além da tradicional ênfase no cognitivo e na aquisição de conhecimento. A educação socioemocional sempre esteve presente no ambiente escolar de diferentes formas, seja na própria cultura escolar ou como suporte para projetos de comportamento positivo. A nova proposta é que essas competências sejam ensinadas propositadamente permitindo aos estudantes oportunidades para praticá-las.

Solidariedade, amizade, responsabilidade, colaboração, empatia, organização, ética, cidadania e honestidade são valores (ou características) que deverão ser ensinados, praticados ou estimulados nas escolas, segundo as diretrizes da BNCC. Esse documento valoriza os estudantes em sua singularidade e diversidade, afirmando que toda criança, jovem ou adolescente deve ter oportunidades para saber ser criativo, analítico-crítico, colaborativo, resiliente, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, entre outras características.

> Compreender o conceito de competências socioemocionais envolve o estudo das emoções. Ao longo da história, as emoções foram abordadas de diferentes perspectivas: da neuropsicologia, da biologia, dos padrões das espécies, da psicopedagogia, da cultura etc. Dentre todas essas abordagens, aquelas voltadas para as competências socioemocionais no contexto escolar são as de interesse nesse texto por abordarem diretamente as novas diretrizes propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a proposta de Educação para o século 21 (proposta pela Unesco) e o ensino integral.

[2] BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos**. Brasília: Parecer CNE/CEB nº11/2010. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/rceb007_10.pdf. Acesso em: 27 maio 2022.

> Na BNCC, as competências socioemocionais estão presentes em todas as 10 competências gerais. Portanto, no Brasil, até 2020, todas as escolas deverão contemplar as competências socioemocionais em seus currículos (BASE, 2022).

Nesta coleção, trabalhamos com essas competências em diferentes momentos, na forma de atividades ou de orientações para o desenvolvimento do trabalho. Ao longo deste *Manual*, você encontrará diferentes orientações que colaboram para esse trabalho. Para ampliar o trabalho com as competências socioemocionais, temos como apropriado considerar os aspectos que caracterizam a adolescência, a diversidade e as culturas juvenis. Com base nesses aspectos, é importante compreender as situações que podem ser recorrentes na escola, como o *bullying*, e, assim, trabalhar temas e contextos que possibilitem promover a saúde mental dos estudantes e a cultura de paz. De maneira geral, discutiremos esses aspectos a seguir e, mais especificamente, retomaremos esses assuntos no decorrer do *Manual* de cada volume da coleção, quando o contexto apresentado for conveniente para se trabalharem esses temas.

Caracterização da adolescência

Segundo o Estatuto da Criança e do Adolescente – Lei nº 8.069/1990: "Considera-se criança, para os efeitos desta Lei, a pessoa até doze anos de idade incompletos, e adolescente aquela entre doze e dezoito anos de idade.".

De acordo com a BNCC:

> Os estudantes dessa fase inserem-se em uma faixa etária que corresponde à transição entre infância e adolescência, marcada por intensas mudanças decorrentes de transformações biológicas, psicológicas, sociais e emocionais. [...] ampliam-se os vínculos sociais e os laços afetivos, as possibilidades intelectuais e a capacidade de raciocínios mais abstratos. Os estudantes tornam-se mais capazes de ver e avaliar os fatos pelo ponto de vista do outro, exercendo a capacidade de descentração, "importante na construção da autonomia e na aquisição de valores morais e éticos" (BRASIL, 2010); (BRASIL, 2018, p. 60).

Esta coleção procura uma aproximação com os estudantes dessa fase, seja na linguagem utilizada, seja na escolha de assuntos que possam despertar seu interesse. Um desses momentos pode ser observado nas aberturas dos capítulos, nas quais são apresentadas situações que buscam aguçar a curiosidade dos estudantes para o tema a ser tratado. Além disso, a coleção busca também facilitar a passagem de um ano para outro no processo de ensino-aprendizagem em Matemática, retomando conceitos, revisitando conhecimentos – como as quatro operações fundamentais e o estudo das figuras geométricas –, ampliando e aprofundando conteúdos com novos aspectos, a fim de que os estudantes se apropriem dos conceitos com a compreensão dos processos neles envolvidos, caso da ampliação do campo numérico (dos números naturais aos números reais).

Diversidade e culturas juvenis

No mundo contemporâneo, um dos principais desafios é aprender a conviver em um ambiente de diversidade, já que muitas vezes as diferenças entre as pessoas não são vistas como algo positivo, dando lugar à discriminação, ao preconceito ou ao reforço de desigualdades.

É importante considerar que os jovens são diferentes em muitos aspectos, como origem social, gênero, território, modos de ser, sentir, agir, entre tantos outros.

Assim, a escola deve ser o espaço em que essas diversas culturas juvenis se manifestem, se relacionem e se organizem em busca de um objetivo comum. Segundo a BNCC,

> Considerar que há muitas juventudes implica organizar **uma escola que acolha as diversidades**, promovendo, de modo intencional e permanente, o respeito à pessoa humana e aos seus direitos. E mais, que garanta aos estudantes ser **protagonistas** de seu próprio processo de escolarização, reconhecendo-os como interlocutores legítimos sobre currículo, ensino e aprendizagem. Significa, nesse sentido, assegurar-lhes uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu **projeto de vida** [...] (BRASIL, 2018, p. 463).

A diversidade não pode ser considerada um obstáculo para a convivência, mas o contrário: deve ser tratada como uma oportunidade ao indivíduo de ganhar novas perspectivas, expandir seus horizontes e aprender com as diferenças, valorizando a multiplicidade de culturas e grupos que formam a sociedade.

> Conforme afirmado na Declaração Universal dos Direitos Humanos, em seu artigo 1º, "Todos os seres humanos nascem livres e iguais em dignidade e em direitos. [...]" (ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS, 1948).

A escola é um espaço formado por uma diversidade de pessoas e deve promover a reflexão sobre diferentes temáticas de modo a desconstruir preconceitos.

Para trabalhar a diversidade, apresente ao estudante o trecho a seguir, da palestra **O perigo de uma história única**, do livro de mesmo nome, da escritora nigeriana Chimamanda Ngozi Adichie. A autora explica em detalhes os problemas causados quando contamos com apenas uma fonte de informações para conhecer a história e a identidade de um povo, enfatizando a necessidade de pesquisar diferentes fontes para compreender outras culturas.

> Anos depois, pensei nisso quando saí da Nigéria para fazer faculdade nos Estados Unidos. Eu tinha dezenove anos. Minha colega de quarto americana ficou chocada comigo. Ela perguntou onde eu tinha aprendido a falar inglês tão bem e ficou confusa quando respondi que a língua oficial da Nigéria era o inglês. Também perguntou se podia ouvir o que chamou de minha "música tribal", e ficou muito decepcionada quando mostrei minha fita da Mariah Carey. Ela também presumiu que eu não sabia como usar um fogão.
>
> O que me impressionou foi: ela já sentia pena de mim antes de me conhecer. Sua postura preestabelecida em relação a mim, como africana, era uma espécie de pena condescendente e bem-intencionada. Minha colega de quarto tinha uma história única da África: uma história única de catástrofe. Naquela história única não havia possibilidade de africanos serem parecidos com ela de nenhuma maneira; não havia possibilidade de qualquer sentimento mais complexo que pena; não havia possibilidade de uma conexão entre dois seres humanos iguais. (ADICHIE, 2009)

Após a apresentação, inicie uma conversa sobre a situação descrita e sobre os fatos serem analisados em uma perspectiva diversa, fundamentada em diversas fontes. Converse sobre o fato de a colega ter uma versão estereotipada da autora e como muitas vezes um grupo de pessoas é julgado como se fosse composto por uma única identidade.

Esse será um momento importante para conversarem sobre a diversidade do grupo e sobre a importância de se respeitarem sem julgamentos prévios. Se considerar adequado, apresente a palestra para os estudantes ou sugira a leitura do livro.

Nas interações com os colegas, os jovens compartilham ideias, experiências e saberes, expressam aspectos das culturas juvenis e possibilitam o convívio com o diferente. Observar os grupos com os quais eles se identificam, ou dos quais fazem parte, contribui para a compreensão de seus modos de agir e, ainda, de seu processo de formação.

Enfim, para construir uma escola inclusiva, em que os estudantes se sintam acolhidos e protegidos, é necessário estabelecer redes de cooperação em que as interações sociais estejam baseadas no respeito mútuo, no companheirismo, na solidariedade e no compartilhamento de experiências e de saberes. O papel do professor na organização dessa rede é fundamental, como mediador desse processo de construção do conhecimento, da identidade, da autonomia e dos projetos de vida, e deve ser desempenhado nas diferentes atividades propostas para serem realizadas em grupos. Ao longo da coleção, os estudantes são instigados a realizar tarefas em grupo ou trocar saberes, momento que pode ser oportuno para trabalhar a diversidade juvenil e propor reflexões sobre cooperação e respeito, promovendo a desconstrução de preconceitos.

Bullying

O termo *bullying* designa um tipo de violência física ou psicológica e tem sido amplamente utilizado em ambientes escolares, para se referir às atitudes hostis, agressivas e mesmo violentas que ocorrem persistentemente nas relações interpessoais de estudantes. A palavra *bullying* tem origem no inglês *bully*, que significa "valentão", "brigão" ou "tirano", e é usada para nomear ações de agressão, intimidação, maus-tratos e ataques ao outro, pautadas em uma relação desigual de poder, para que a vítima se sinta inferiorizada, além de ser muitas vezes excluída socialmente de ambientes aos quais pertence.

Como forma de prevenção, em primeiro lugar os professores devem observar com atenção mudanças apresentadas pelos estudantes, como retraimento excessivo, falta de interesse nas tarefas escolares, ausência frequente às aulas, demonstração de tristeza ou ansiedade, isolamento do grupo, impaciência, baixa autoestima. É importante que professores, assim como toda a comunidade escolar, possibilitem um ambiente acolhedor e estreitem vínculos com os jovens, para que eles possam sentir segurança e recorram a esses adultos quando algo não estiver bem.

Atividades propostas para serem realizadas em grupo podem ser um bom momento para desenvolver o conceito de **empatia** por meio da prática de uma escuta atenta e respeitosa, na qual os estudantes podem falar e ser escutados, e ideias são compartilhadas e podem ser validadas, possibilitando a eles considerar novas maneiras de atuação, fundamentadas na compreensão do ponto de vista do outro.

Sugerimos a seguir uma atividade inicial para trabalhar com o conceito de empatia.

Apresente aos estudantes a definição da palavra *empatia*, conforme consta em dois dicionários:

Empatia

1. PSICOL Habilidade de imaginar-se no lugar de outra pessoa.

2. PSICOL Compreensão dos sentimentos, desejos, ideias e ações de outrem.

3. Qualquer ato de envolvimento emocional em relação a uma pessoa, a um grupo e a uma cultura.

[...]

Fonte: EMPATIA. *In*: MICHAELIS Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2015. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/empatia/. Acesso em: 30 jun. 2022.

Empatia

1. Psi. Experiência pela qual uma pessoa se identifica com outra, tendendo a compreender o que ela pensa e a sentir o que ela sente, ainda que nenhum dos dois o expressem de modo explícito ou objetivo.

2. Capacidade de compreensão emocional e estética de um objeto, ger. de arte (um quadro, livro, filme, p. ex.).

3. Nas inter-relações pessoais e sociais, capacidade de alguém de se ver como os outros o veem, de ver outrem como os outros o veem e também como ele mesmo se vê.

Fonte: EMPATIA. *In*: AULETE Digital. Rio de Janeiro: Lexicon. Disponível em: https://www.aulete.com.br/empatia. Acesso em: 30 jun. 2022.

Em seguida, solicite aos estudantes que expressem, verbalmente ou por escrito, situações em que colocamos em prática a empatia. Se possível, peça que deem exemplos de situações em que alguém foi empático com eles ou em que eles aplicaram empatia. Dê oportunidades para que todos possam se manifestar e, do mesmo modo, respeite aqueles que não quiserem falar. Após a conversa, organize a sala em grupos e solicite que cada grupo escreva cinco atitudes que viabilizam a prática de empatia na escola. Depois, com a participação de todos, escolham dez atitudes que consideram mais importantes e confeccionem cartazes sobre o tema para serem anexados em alguns pontos da escola.

Saúde mental dos estudantes

É importante que professores, assim como toda a comunidade escolar, observem os diferentes sinais que os jovens em sofrimento emocional costumam dar, como isolamento e distanciamento dos amigos e dos grupos sociais, brigas constantes e agressividade, publicações com conteúdo negativo nas redes sociais ou participação em grupos virtuais que incentivam automutilação ou suicídio, entre outros.

Muitos desses sinais poderão se manifestar ao longo deste e dos próximos anos como decorrência do impacto da pandemia de Covid-19 na saúde emocional dos estudantes.

Um estudo publicado em 1º de abril de 2022, realizado pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo e pelo Instituto Ayrton Senna[3], revelou que dois de cada três estudantes do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio da rede estadual relatam sintomas de depressão e ansiedade. De acordo com esse estudo:

[3] INSTITUTO Ayrton Senna. **Mapeamento aponta que 70% dos estudantes de SP relatam sintomas de depressão e ansiedade**. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/mapeamento-aponta-que-70-por-cento-dos-estudantes-de-SP-relatam-sintomas-de-depressao.html. Acesso em: 11 maio 2022.

A avaliação mergulha nos danos severos à educação causados pela pandemia e reforça o desenvolvimento socioemocional como mola propulsora para a aprendizagem e outras conquistas ao longo da vida. A análise dos dados ainda revela a importância direta das competências socioemocionais para o aprendizado e o seu impacto em outros aspectos que afetam a aprendizagem indiretamente, como saúde mental, violência e estratégias de aprendizagem [...].

Prejuízos no desenvolvimento dessas competências podem impactar diversos resultados ao longo da vida dos estudantes. O estudo revelou que características como autogestão, que inclui foco, determinação, organização, persistência e responsabilidade, e amabilidade, que reúne empatia, respeito e confiança, foram afetadas durante a pandemia.

Desenvolver habilidades de autoconhecimento, como o reconhecimento das próprias emoções, para administrar metas e objetivos de maneira mais eficiente, pode ser um recurso valioso nestas situações. O autoconhecimento faz parte das competências socioemocionais e, quando desenvolvido, possibilita ao jovem criar estratégias eficazes para o manejo das emoções nos diferentes contextos sociais dos quais participa.

É possível trabalhar o autoconhecimento em diferentes situações do cotidiano escolar, trabalhando com os estudantes o reconhecimento das próprias emoções, pensamentos, desejos, medos, frustrações, dificuldades e assim por diante. Uma atividade que pode ser praticada em alguns momentos é sugerir aos estudantes que se perguntem "o porquê".

- Por que estou brigando com esse colega?
- Por que esta tarefa me incomoda?
- Por que não gosto deste professor ou deste colega?
- Por que tenho medo de responder oralmente a uma pergunta feita pelo professor?

Ao identificarem as causas de determinados sentimentos ou ações, poderão refletir sobre suas atitudes e, assim, administrar situações futuras que possam prejudicá-los em momentos diversos, na escola ou no convívio social fora dela.

Para ampliar o conhecimento sobre si mesmo, destacam-se as práticas meditativas, em especial o *mindfulness*, ou atenção plena. Trata-se de um exercício compreendido por Leahy como "estado mental particular e intencional que une atenção focada no presente, consciência aberta e memória de si mesmo". Praticado constantemente, auxilia na redução do estresse e da ansiedade, possibilitando maior criatividade, aumento do autocontrole e da resistência emocional, além de maior satisfação ao realizar as atividades do cotidiano.

Cultura de paz

A cultura de paz está relacionada à compreensão dos princípios de liberdade, justiça, democracia, igualdade e solidariedade, proposta em 1999 pela Organização das Nações Unidas (ONU). Envolve um modo de agir e de se posicionar, com base na prática da não violência, por meio da educação, do diálogo e da cooperação.

> Mais do que teoria e prática, a não violência deve ser uma atitude que permeia toda a prática de ensino, envolvendo todos os profissionais de educação e os estudantes da escola, os pais e a comunidade, em um desafio comum e compartilhado. Assim, a não violência integrada confere ao professor outra visão do seu trabalho pedagógico. A escola deve dar lugar ao diálogo e ao compartilhamento, tornando-se um centro para a vida cívica na comunidade.
>
> Para obter um impacto real, a educação sem violência deve ser um projeto de toda a escola, o qual deve ser planejado, integrado em todos os aspectos do currículo escolar, na pedagogia e nas atividades, envolvendo todos os professores e profissionais da escola, assim como toda a estrutura organizacional da equipe de tomada das decisões educacionais. As práticas de não violência devem ser coerentes e devem estar refletidas nas regras e na utilização das instalações da escola.
>
> Vista pelo ângulo da não violência, a educação ajuda a:
>
> - aprender sobre as nossas responsabilidades e obrigações, bem como os nossos direitos;
> - aprender a viver juntos, respeitando as nossas diferenças e similaridades;
> - desenvolver o aprendizado com base na cooperação, no diálogo e na compreensão intercultural;
> - ajudar as crianças a encontrar soluções não violentas para resolverem seus conflitos, experimentarem conflitos utilizando maneiras construtivas de mediação e estratégias de resolução;
> - promover valores e atitudes de não violência – autonomia, responsabilidade, cooperação, criatividade e solidariedade;
> - capacitar estudantes a construírem juntos, com seus colegas, os seus próprios ideais de paz.
>
> (UNESCO, [entre 2017 e 2022]).

Considerada um espaço privilegiado para a convivência com a diversidade e a promoção do diálogo, diante de tudo que foi apresentado, destacamos que a escola precisa oferecer um ambiente de confiança entre os estudantes, professores e gestores. Para tanto, é preciso formar crianças e jovens que atuem com base em princípios éticos e solidários, além de combater as violências que fazem parte de qualquer sociedade. Pautado em valores humanos, o trabalho com as competências socioemocionais precisa ser exercitado diariamente para que se transforme em uma ação concreta. Ao experimentar uma troca possibilitada por meio do diálogo legítimo, em que o estudante pode ouvir os pares e ser escutado, intercambiando pontos de vista e construindo argumentos consistentes e bem fundamentados, ele irá adquirir e vivenciar habilidades essenciais que farão a diferença em sua profissionalização e em sua vida futura.

BNCC e currículos

A BNCC e os currículos estão em concordância com os princípios e valores que norteiam a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) e as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

Com base nesses documentos, relacionam-se algumas ações que visam adequar suas proposições à realidade dos sistemas ou redes de ensino e das instituições escolares, considerando o contexto e as características dos estudantes:

> - contextualizar os conteúdos dos componentes curriculares, identificando estratégias para apresentá-los, representá-los, exemplificá-los, conectá-los e torná-los significativos, com base na realidade do lugar e do tempo nos quais as aprendizagens estão situadas;
> - decidir sobre formas de organização interdisciplinar dos componentes curriculares e fortalecer a competência

pedagógica das equipes escolares para adotar estratégias mais dinâmicas, interativas e colaborativas em relação à gestão do ensino e da aprendizagem;

- selecionar e aplicar metodologias e estratégias didático-pedagógicas diversificadas, recorrendo a ritmos diferenciados e a conteúdos complementares, se necessário, para trabalhar com as necessidades de diferentes grupos de estudantes, suas famílias e cultura de origem, suas comunidades, seus grupos de socialização etc.;
- conceber e pôr em prática situações e procedimentos para motivar e engajar os estudantes nas aprendizagens;
- construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos estudantes;
- selecionar, produzir, aplicar e avaliar recursos didáticos e tecnológicos para apoiar o processo de ensinar e aprender;
- criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de formação docente que possibilitem contínuo aperfeiçoamento dos processos de ensino e aprendizagem;
- manter processos contínuos de aprendizagem sobre gestão pedagógica e curricular para os demais educadores, no âmbito das escolas e sistemas de ensino.

(BRASIL, 2018, p. 16-7).

Competências na BNCC

Visando assegurar as aprendizagens essenciais a que todo estudante da Educação Básica tem direito, a BNCC propõe o desenvolvimento de competências que vão além dos conteúdos curriculares a serem ensinados, pois, como expusemos anteriormente, é preciso assumir a necessidade de os estudantes se tornarem capazes de mobilizar conteúdos, habilidades, atitudes e valores. Nesse sentido, propõe 10 **competências gerais** para a Educação Básica e 8 **competências específicas** para a área de Matemática, as quais listamos a seguir.

COMPETÊNCIAS GERAIS	COMPETÊNCIAS ESPECÍFICAS DE MATEMÁTICA PARA O ENSINO FUNDAMENTAL
1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. **2.** Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. **3.** Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural. **4.** Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo. **5.** Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. **6.** Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade. **7.** Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta. **8.** Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas. **9.** Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza. **10.** Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.	**1.** Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. **2.** Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. **3.** Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. **4.** Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes. **5.** Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados. **6.** Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). **7.** Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza. **8.** Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Ao longo dos conteúdos, são oferecidas diferentes oportunidades para o estudante interpretar, refletir, analisar, discutir, elaborar hipóteses, argumentar, concluir e expor resultados de diversas maneiras, contribuindo para o desenvolvimento das competências. Esse trabalho é realizado em vários momentos da coleção, como nas seções **Diversificando** e **Trabalhando a informação**.

Para garantir o desenvolvimento das competências específicas, **Unidades Temáticas** organizam diferentes **objetos de conhecimento** que, por sua vez, propõem um conjunto de **habilidades** a serem trabalhadas com os estudantes.

Unidades Temáticas

De acordo com a BNCC:

> Ao longo do **Ensino Fundamental – Anos Finais**, os estudantes se deparam com **desafios de maior complexidade**, sobretudo devido à necessidade de se apropriarem das diferentes lógicas de organização dos conhecimentos relacionados às áreas. Tendo em vista essa maior especialização, é importante, nos vários componentes curriculares, **retomar e ressignificar as aprendizagens do Ensino Fundamental – Anos Iniciais no contexto das diferentes áreas**, visando ao aprofundamento e à ampliação de repertórios dos estudantes. Nesse sentido, também é importante **fortalecer a autonomia** desses adolescentes, oferecendo-lhes condições e ferramentas para acessar e interagir criticamente com diferentes conhecimentos e fontes de informação (BRASIL, 2018, p. 60).

A BNCC propõe cinco Unidades Temáticas: **Números**, **Álgebra**, **Geometria**, **Grandezas e medidas** e **Probabilidade e estatística**. Dessa forma, procura garantir o trabalho com a variedade de conhecimentos matemáticos ao longo do ano e orientar a formulação de habilidades a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental.

> Com base nos recentes documentos curriculares brasileiros, a BNCC leva em conta que os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de **ideias fundamentais** que produzem articulações entre eles: **equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação**. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p. 268).

A proposta presente nesta coleção, aliada ao trabalho do professor em sala de aula, propicia a articulação das diferentes Unidades Temáticas, estabelecendo conexões entre elas e as outras áreas do conhecimento. Faremos a indicação dessas articulações ao longo deste *Manual*.

Apresentamos, a seguir, as principais ideias relacionadas a cada Unidade Temática que nortearam a organização da coleção, destacando alguns pontos em que contribuímos para o desenvolvimento das competências específicas da Matemática. Ressaltamos que os pontos apresentados são exemplos de trabalho, mas, ao longo de toda a coleção, contemplamos as 8 competências específicas de modo a favorecer o desenvolvimento dos estudantes no estudo da Matemática.

Números

As noções matemáticas fundamentais vinculadas a essa Unidade Temática são as ideias de número, operações, aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem.

Nos anos finais do Ensino Fundamental são trabalhados diferentes campos numéricos, de modo que os estudantes resolvam problemas com números naturais, números inteiros e números racionais, envolvendo as operações e fazendo uso de estratégias diversas, reconheçam a necessidade dos números irracionais e tomem contato com os números reais, comparando, ordenando e relacionando esses números com pontos na reta numérica, envolvendo a valorização do raciocínio estruturado de modo a favorecer o desenvolvimento da **competência específica 2**.

Também recorremos à história da Matemática em diferentes momentos, como no trabalho com os diferentes sistemas de numeração ou com números irracionais, o que contribui para o desenvolvimento da **competência específica 1**, que está relacionada com o processo de reconhecer a Matemática como uma ciência viva, relacionada a diferentes culturas e a diferentes momentos históricos. Espera-se também que os estudantes dominem cálculos com porcentagens, juros, descontos e acréscimos, incluindo o uso de tecnologias digitais, favorecendo o desenvolvimento da **competência específica 5**, que propõe o uso de diferentes ferramentas, entre elas os recursos tecnológicos. O pensamento numérico se completa, é ampliado e aprofundado com a discussão de situações que envolvem conteúdos das demais Unidades Temáticas, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 3**, que propõe aos estudantes a compreensão entre as relações dos conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática.

Outro aspecto que se quer desenvolver nessa Unidade Temática é o estudo de conceitos ligados à educação financeira dos estudantes, como conceitos básicos de economia e finanças, temáticas que estão diretamente ligadas à **competência específica 7**, pois permitem compreender diferentes questões relacionadas ao contexto social.

Álgebra

O foco dessa Unidade Temática é o desenvolvimento do pensamento algébrico, essencial na compreensão, na representação e na análise da variação de grandezas e também no estudo das estruturas matemáticas, o que favorece o trabalho com a **competência específica 2**, que propõe o desenvolvimento do raciocínio lógico, do espírito de investigação e da capacidade de produzir argumentos, habilidades que estão intimamente ligadas ao estudo da Álgebra. Nos anos finais do Ensino Fundamental, os estudos de Álgebra retomam, aprofundam e ampliam a identificação de regularidades e padrões em sequências (numéricas ou não) e o estabelecimento de leis matemáticas que expressem a interdependência entre grandezas e generalizações. Espera-se que os estudantes criem, interpretem e transitem entre as diversas representações gráficas e simbólicas para resolver equações e inequações, desenvolvidas para representar e solucionar algum tipo de problema, o que contribui para o desenvolvimento das **competências específicas 5 e 6**. É necessário que o estudante estabeleça conexões entre variável e função e entre incógnita e equação.

As ideias matemáticas fundamentais que os estudantes precisam desenvolver nessa Unidade Temática são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. O raciocínio proporcional envolve diferentes processos mentais, como analisar, estabelecer relações e comparação entre grandezas e quantidades, proporcionando uma melhor compreensão das relações multiplicativas, o que favorece o trabalho com a **competência específica 3**.

Além disso, a aprendizagem da Álgebra, assim como as de outros campos da Matemática, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento computacional. Destaca-se, assim, a importância da presença de algoritmos e fluxogramas como objetos de estudo nas aulas de Matemática nessa fase do aprendizado.

Geometria

O desenvolvimento do pensamento geométrico, necessário para avançar nas habilidades de investigação de propriedades, elaboração de conjecturas e produção de argumentos geométricos convincentes, está ligado ao estudo da posição e dos deslocamentos no espaço, das formas de figuras geométricas e relação entre seus elementos, temas dessa Unidade Temática, que contribuem para o desenvolvimento da **competência específica 2**. Além disso, o aspecto funcional também deve estar presente por meio do estudo das transformações geométricas, em especial a simetria, com ou sem o recurso de *softwares* de Geometria dinâmica, favorecendo o trabalho com a **competência específica 5**.

Estão associadas a essa Unidade Temática as seguintes ideias matemáticas fundamentais: construção, representação e interdependência.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, o ensino de Geometria deve consolidar e ampliar os conhecimentos construídos anteriormente – enfatizando-se a análise e a produção de transformações, ampliações e reduções de figuras geométricas – para o desenvolvimento dos conceitos de congruência e semelhança. O raciocínio hipotético-dedutivo é outro ponto importante a se destacar; a realização de demonstrações simples pode contribuir para a construção desse tipo de raciocínio. Além disso, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 3**, a articulação da Geometria com a Álgebra também deve ser ampliada com propostas que envolvam o plano cartesiano, objeto de estudo da Geometria analítica.

Grandezas e medidas

O estudo das medidas e das relações entre elas é o foco dessa Unidade Temática. Os anos finais do Ensino Fundamental devem retomar, aprofundar e ampliar as aprendizagens já realizadas. O estudo das relações métricas favorece a integração da Matemática com diversas áreas do conhecimento, assim como a articulação com as demais Unidades Temáticas, consolidando e ampliando a noção de número e promovendo a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico, favorecendo o trabalho com a **competência específica 3**.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, espera-se que os estudantes reconheçam comprimento, área e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas, resolvam problemas com essas grandezas e obtenham grandezas derivadas, como densidade e velocidade. Além disso, deve-se introduzir medidas de capacidade de armazenamento de computadores ligadas a demandas da sociedade moderna, ressaltando-se o caráter não decimal das relações entre elas. Trabalhando com essas grandezas é possível trabalhar o uso da Matemática em diferentes contextos sociais, contribuindo para o desenvolvimento da **competência específica 7**.

Probabilidade e estatística

O intuito dessa Unidade Temática é desenvolver habilidades necessárias para o exercício pleno da cidadania: coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados; descrever, explicar e predizer fenômenos com base em conceitos e representações. Desse modo, esse trabalho favorece o desenvolvimento da **competência específica 7**.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, em Estatística espera-se que cada estudante seja capaz de planejar e elaborar relatórios com base em pesquisas estatísticas descritivas, incluindo medidas de tendência central, construir tabelas e tipos variados de gráfico, o que favorece o trabalho com a **competência específica 4**.

Quanto ao estudo de Probabilidade, deve ser ampliado e aprofundado. Espera-se que os estudantes façam experimentos aleatórios e simulações para aplicar ou comparar resultados obtidos com o cálculo de probabilidades.

Propostas didáticas

Os tópicos a seguir destinam-se a oferecer suporte à discussão sobre as atuais tendências de ensino – que priorizam a globalidade da formação educacional, no sentido de capacitar os jovens a atuar de forma positiva na sociedade – alinhadas à proposta da coleção e auxiliadoras do trabalho em sala de aula.

Conhecimentos prévios

Ao passar de um ano para outro de escolaridade, o estudante traz experiências pessoais, interpretações e conhecimentos acumulados sobre os conteúdos e temas tratados no ano anterior. Torna-se relevante considerar essa bagagem no processo de aprendizagem de modo a fazer com que o estudante seja protagonista no processo de aprendizagem. Há algum tempo, pesquisas na área da educação reforçam a importância de considerar os conhecimentos prévios como forma de tornar a aprendizagem mais significativa.

> Para o desenvolvimento das habilidades previstas para o Ensino Fundamental – Anos Finais, é imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos estudantes, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência (BRASIL, 2018, p. 298).

> Esses conhecimentos, embora pouco elaborados cientificamente, são construídos pelos estudantes a partir do nascimento, acompanhando-os na vida escolar, onde os conceitos científicos são inseridos sistematicamente em sala de aula. Ausubel (2003) refere-se aos conhecimentos prévios como sendo aquelas ideias, percepções ou explicações funcionais para os objetos e fenômenos, muitas vezes pouco elaborados, diferentemente dos saberes científicos apresentados pela escola. Freire (1996) evidencia os conhecimentos prévios como a base inicial para progressão, sendo as interpretações e representações do senso comum, motores da curiosidade ingênua que poderá vir a ser curiosidade gnosiológica e base de sustentação e progressão para o conhecimento apurado, científico.

> Embora a ideia sobre identificar os conhecimentos prévios dos estudantes possa parecer simples, as suas implicações são complexas. O que um ser humano sabe pertence a sua estrutura cognitiva e é de natureza idiossincrática. Isso significa que não é um processo simples, o de descobrir as percepções do estudante

e aproveitá-las. No entanto, é possível encontrar indícios. Para isso, faz-se necessário buscar o conhecimento prévio em forma de linguagem falada, escrita ou por meio de símbolos. O fato é que subestimar as experiências pessoais dos estudantes seria um erro por parte dos professores, uma vez que a educação ocorre a partir e através da sua própria experiência (UJIIE, 2017).

Em diferentes momentos desta coleção, é possível criar oportunidades para este levantamento, como nas aberturas de cada capítulo, em que, por meio da análise do texto e da imagem e da resolução das questões, é possível fazer com que os estudantes compartilhem suas experiências pessoais e conhecimentos relacionados ao conteúdo que será estudado, tornando a aprendizagem significativa.

Resolução de problemas e compreensão leitora

O trabalho com a resolução de problemas é um dos destaques do ensino matemático contemporâneo. Para atender aos pressupostos de uma educação globalmente formadora, o problema matemático deve, sempre que possível, ser apresentado em um contexto desafiador, que faça sentido ao estudante. Ele possibilita a mobilização dos conteúdos estudados em busca de soluções e, sobretudo, abre espaço para a criação de estratégias pessoais e para a produção de novos conhecimentos.

Um problema matemático é visto como uma situação desafiadora que tem significado para o estudante e se define como tal não por sua forma, mas sim por sua relação com os saberes e o nível de conhecimento do estudante que deve pensar sobre ele.

Na resolução de problemas, é importante que o estudante:

- elabore um ou vários procedimentos de resolução (por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses);
- compare seus resultados com os de outros estudantes;
- valide seus procedimentos.

Nas aulas de Matemática, também é necessário fazer um trabalho voltado para a linguagem matemática e suas especificidades, muito além da aprendizagem de leitura dos enunciados dos problemas propostos. Para isso, deve-se estabelecer um diálogo entre a língua materna e a linguagem matemática, solicitando aos estudantes que, além de explicarem oralmente a resolução, escrevam sobre o percurso mental que realizaram para chegar a ela. Em seguida, em duplas, um estudante lê o texto do outro e ambos sugerem propostas para melhorá-los.

Para compreender uma situação-problema, por exemplo, há um caminho a ser percorrido: leitura do enunciado, elaboração de hipóteses, identificação dos dados que aparecem no texto e solução para o que foi proposto. Para esse trabalho caminhar, muitas vezes, é necessário retomar as estratégias de leitura e verbalizar com a turma todo esse percurso.

Nesta coleção, procuramos diversificar as atividades e propor problemas variados, distribuídos entre os capítulos e, em especial, nas seções **Pense mais um pouco...** e **Diversificando**.

Uso de tecnologias

Os estudantes estão inseridos na era digital e fazem uso frequente de tecnologia. Assim, a escola não pode ignorar esses importantes recursos e precisa trazê-los para a educação escolar. Para isso, o professor precisa se apropriar dessas ferramentas de modo que possa identificar tipos de *software* e formas de utilizá-los com os estudantes. Vamos destacar a calculadora e o uso de *softwares* e aplicativos, entre as diversas possibilidades.

É importante salientar que, como instrumento de apoio ao processo de ensino-aprendizagem, a calculadora é somente mais um recurso auxiliar, e não um substituto do exercício do raciocínio ou da capacidade analítica. O que propomos é o uso da calculadora de maneira consciente, de modo a contribuir para a reflexão dos conteúdos matemáticos.

O uso da calculadora é sugerido na coleção como auxiliar na resolução de problemas. Das tecnologias disponíveis na escola, a calculadora é, sem dúvida, uma das mais simples e de menor custo. Ela pode ser utilizada como instrumento motivador na realização de atividades exploratórias e investigativas e, assim, contribuir para a melhoria do ensino.

Podemos tomar como orientação para o uso da calculadora em atividades matemáticas os seguintes aspectos:

- é um instrumento que possibilita o desenvolvimento de conteúdos pela análise de regularidades e padrões e pela formulação de hipóteses;
- é um facilitador da verificação e da análise de resultados e procedimentos;
- sua manipulação e utilização são, em si, conteúdos a serem aprendidos.

Sugerimos que, inicialmente, o professor verifique o conhecimento que os estudantes têm sobre o funcionamento da calculadora. O ideal é que a escola disponha de calculadoras simples, que ofereçam as funções básicas. Caso não seja possível disponibilizar uma calculadora para cada estudante, pode-se trabalhar em duplas ou de outra forma a critério do professor.

As atividades sugeridas pressupõem um uso simples da calculadora, o que poderá ser ampliado de acordo com as necessidades e os interesses de cada turma.

Outra possibilidade de aprofundar os conhecimentos matemáticos com o auxílio de tecnologia é o uso de *softwares* e aplicativos, conforme a disponibilidade da escola. Por exemplo, no campo geométrico, *softwares* de geometria dinâmica permitem a construção de retas paralelas e de retas perpendiculares, a investigação e a verificação de propriedades geométricas, entre outras possibilidades.

O uso consciente da internet também deve fazer parte da educação escolar. É importante que os estudantes saibam fazer pesquisas em ambientes confiáveis como também se proteger de notícias falsas ou de outros perigos presentes nos ambientes virtuais. Cabe aos professores e à comunidade escolar fazer com que a inclusão digital desempenhe um papel significativo no processo de aprendizagem, pois ela procura formar cidadãos com capacidade de interagir com outros e compartilhar decisões/informações que propiciem a lógica da informação a serviço da interatividade.

Pensamento computacional

A BNCC propõe trabalhar o pensamento computacional por meio da Álgebra. Quando os estudantes interpretam e elaboram algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas, eles podem desenvolvê-los, ao ser "capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos".

O pensamento computacional se apoia nos quatro pilares expostos a seguir:

- **Decomposição:** consiste em dividir um problema em partes menores (subproblemas) ou etapas, de maneira que a resolução de cada uma das partes ou etapas resulta na resolução do problema inicial. Dessa maneira, um problema complexo pode ser resolvido aos poucos, com estratégias e abordagens diversas.
- **Reconhecimento de padrões:** ocorre ao se perceber similaridade da situação enfrentada com outra previamente resolvida, o que permite o reaproveitamento de uma estratégia conhecida. Esse reconhecimento de padrões pode se dar entre instâncias distintas de um problema ou dentro dele mesmo, quando há repetições de etapas ou padrões em sua resolução.
- **Abstração:** no contexto do pensamento computacional, significa filtrar as informações e dados relevantes à resolução, eliminando dados desnecessários, permitindo uma modelagem do problema mais limpa e eficaz.
- **Algoritmo:** a aplicação dos pilares anteriores pode facilitar o surgimento de um algoritmo, que é uma generalização da resolução e permite resolver toda uma família de problemas similares. Um algoritmo pode ser definido como uma sequência finita de passos cuja finalidade é resolver um problema ou executar uma tarefa.

É importante destacar que nem todos os pilares precisam ser acionados para a resolução de todos os problemas. Além disso, há atividades desplugadas que podem ser realizadas para ensinar pensamento computacional sem fazer uso de um computador.

Trabalho em grupo e o convívio social

Quando orientado e praticado adequadamente, além de contribuir para o desenvolvimento de competências que visam à interação e à participação sociais, o trabalho em grupo auxilia no desenvolvimento de competências que dependem do confronto e da partilha de ideias, pois oferece a oportunidade de provar resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos de resolução e validar ou não o pensamento na busca de soluções.

Além de reforçar a aprendizagem conceitual, o trabalho em grupo contribui para o aprimoramento da evolução de procedimentos e atitudes, tanto em relação ao pensar matemático quanto em relação à dinâmica grupal.

Pesquisas acerca dos processos de aprendizagem indicam que, mesmo com o exercício em grupo, acaba prevalecendo o aprendizado individual, o qual apenas se enriquece com as múltiplas contribuições geradas pelo trabalho desenvolvido de maneira coletiva, pela interação entre diferentes formas de pensar.

> Alunos que estão preparados para a cooperação saberão comportar-se em situações de trabalho em grupo sem supervisão direta do professor. É necessário introduzir novos comportamentos cooperativos em um programa de preparação intencional. O objetivo de tal programa de preparação é a construção de novas regras, concepções coletivas sobre como deve ser a atuação produtiva em situações de grupo. Às vezes, as regras são explícitas e escritas, às vezes, elas são expectativas ou obrigações de comportamento não verbalizadas.
>
> Quando um indivíduo começa a sentir que deve se comportar de acordo com essa nova maneira, a regra se tornou internalizada. Regras internalizadas produzem não apenas o comportamento desejado, mas um desejo de reforçar as expectativas sobre o comportamento dos outros no interior do grupo. Em situações de aprendizagem cooperativa, mesmo estudantes muito jovens podem ser vistos aconselhando outros membros do grupo sobre como devem se comportar. Em função do seu papel na sala de aula, os professores têm um extenso poder para estabelecer regras conhecidas e para introduzir outras (COHEN; LOTAN, 2017).

De qualquer modo, reforçamos que o sucesso do trabalho em grupo depende notavelmente do planejamento e da supervisão pedagógica, respeitados os diferentes tipos de aprendiz. No intuito de colaborar com a atuação do professor em sala de aula, esta coleção preocupou-se em indicar, pontualmente, as atividades que mais possibilitam a exploração em grupo.

A organização da turma é parte essencial para o sucesso do desenvolvimento do trabalho com os estudantes. Para cada proposta pedagógica, haverá alguma escolha metodológica mais adequada e, junto a essa escolha, a necessidade de organização dos estudantes em sala de aula: trabalhos individuais, em duplas, em pequenos grupos ou em estações de trabalho, por exemplo. Consideramos apropriado descartar a ideia de que uma boa aula é aquela em que os estudantes devem permanecer sentados enfileirados, sem conversas entre os integrantes de uma mesma turma, com uma fala expositiva por parte do professor. Hoje, sabemos que esse tipo de organização constante acaba por dificultar a relação do estudante com os conceitos apresentados e não promove a interação, a busca por diálogo na aprendizagem, muito menos as trocas entre pares possíveis, tão essenciais para desenvolverem competências que visam à empatia e à cooperação, por exemplo.

É necessário considerarmos que a compreensão dos conceitos por parte da turma passa pela observação da dinâmica de aprendizagem em sala; alguns estudantes assimilam melhor em momentos em que escutam sobre determinado tema, outros em situações que proporcionem debates com os colegas sobre o que estão estudando ou, ainda, outros que precisam de uma boa visualização, em esquemas, dos conteúdos ou resoluções dos problemas apresentados. Tornar a sala de aula um ambiente plural e dinâmico, para que todos os estudantes de diferentes perfis possam vivenciar experiências diversas, torna-se crucial para o desenvolvimento da turma como um todo.

Outro fator importante para favorecer a aprendizagem é a promoção da autonomia do estudante no processo de aprendizagem. Essa é uma perspectiva que a BNCC salienta e que está destacada nas competências gerais, principalmente naquelas em que se preza pelo desenvolvimento da autonomia, empatia e cooperação. São elementos que, quando favorecidos no desenvolvimento, proporcionam ganhos na aprendizagem de toda a turma.

Sabendo que cada estudante desenvolve competências e habilidades com mais facilidade usando estratégias diferentes, uma proposta que favorece essa construção é o chamado **painel de soluções**, em que o professor promove um momento de socialização das estratégias de resolução utilizadas pela turma, para que todos possam discutir suas vantagens e desvantagens, verificando similaridades e diferenças, identificando possíveis erros e aprendendo com eles, já que esse é um movimento de grande auxílio para o desenvolvimento autônomo dos estudantes. Para que a turma seja encorajada a construir essa postura, é importante que as tarefas propostas sejam analisadas e discutidas constantemente, problematizando o que é relevante para a aprendizagem.

Para o desenvolvimento de atividades, o professor pode optar por trabalhar com a turma organizada em duplas predefinidas, por exemplo, para que os estudantes com diferentes graus de compreensão sobre determinado assunto possam se ajudar ao trabalharem juntos para resolver as atividades propostas. Quando há auxílio entre pares, a compreensão do que é estudado ganha uma conotação diferente do que quando o professor intervém no processo de aprendizagem. A proximidade de linguagem entre os colegas de turma favorece a construção da aprendizagem nesta faixa etária.

Seguindo a ideia da troca entre pares, o professor pode organizar a turma em grupos, criando dinâmicas de trabalho que favoreçam a autonomia dos estudantes, ao mesmo tempo que haja a necessidade de colaborar uns com os outros para resolver problemas, formular hipóteses, construir e trocar estratégias de resolução, pensando juntos sobre possibilidades de ação. Os grupos de trabalho podem ser organizados para a resolução de problemas, criando sistemas *gamificados* de pontuação, ranqueando a turma ou ainda pensando em trabalhos por estações, em que os grupos se revezam no desenvolvimento de diferentes atividades. Nessa última proposta, é importante promover um momento de discussão entre os estudantes sobre as dificuldades encontradas, as estratégias de resolução e as aprendizagens, que, quando compartilhadas, ampliam o leque de possibilidades de caminhos para a solução de problemas para toda a turma. Essas estratégias de trabalho em grupos podem favorecer, ainda, o desenvolvimento das atividades em turmas com um número grande de alunos.

Trabalhar em grupo demanda socialização, parte importante do desenvolvimento dos estudantes em relação à vida em sociedade. Conviver é um ato constante, principalmente no ambiente escolar, e, por mais que a individualidade seja respeitada, respeitar regras se torna uma ação que permite que a vida em sociedade possa se tornar mais organizada. Assim, o propósito das ações em grupo é o aprendizado, tornando o envolvimento e o papel de cada participante deste trabalho parte integrante e articulada com os demais para que as habilidades envolvidas sejam desenvolvidas por todos. Delegar funções para os estudantes nos seus respectivos grupos, deixando cada um responsável por uma ação (distribuidor de tarefas, controlador do tempo, redator etc.), revezando as funções de um momento para o outro. Quando os estudantes estão próximos uns dos outros, damos a oportunidade para que as trocas aconteçam.

A interdisciplinaridade e os Temas Contemporâneos Transversais

Para o desenvolvimento da **competência geral 2**, que propõe exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, com base nos conhecimentos das diferentes áreas, é necessário propor, em diferentes momentos da vida escolar, um trabalho interdisciplinar. A interdisciplinaridade propicia aos estudantes que realizem conexões entre as áreas do conhecimento e seus respectivos componentes curriculares, bem como demonstrem criatividade, ampliem a atenção a problemas do entorno e outros, despertando a atenção e levando a uma maior compreensão dos objetos de conhecimento.

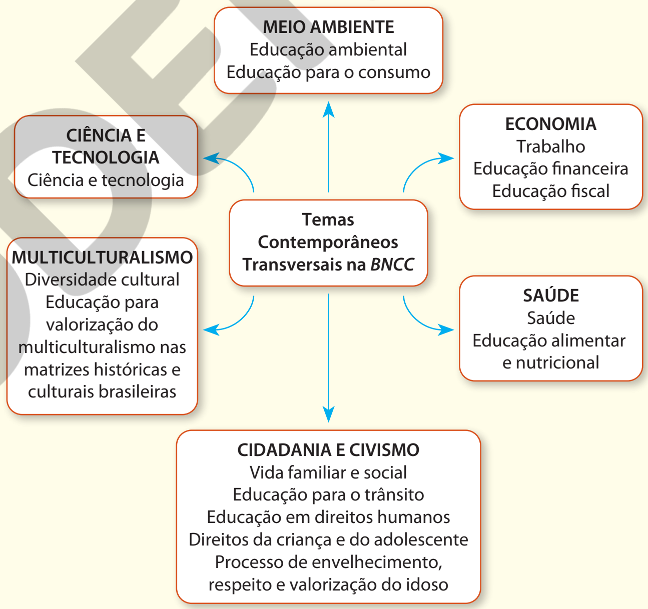
O trabalho interdisciplinar pode ser apoiado no desenvolvimento dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs). Segundo as Diretrizes Curriculares Nacionais,

> A interdisciplinaridade é uma abordagem que facilita o exercício da transversalidade, constituindo-se em caminhos facilitadores da integração do processo formativo dos estudantes, pois ainda permite a sua participação na escolha dos temas prioritários. A interdisciplinaridade e a transversalidade complementam-se [...] (BRASIL, 2013).

Os TCTs são aqueles conteúdos que não pertencem a apenas um componente curricular, uma vez que podem ser trabalhados por todos eles. Dizem respeito a temas relacionados ao mundo contemporâneo e à atualidade, o que favorece a integração dos componentes curriculares em um processo pedagógico com vistas à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores éticos. A BNCC destaca a sua importância quando afirma que:

> [...] cabe aos sistemas e redes de ensino, assim como às escolas, em suas respectivas esferas de autonomia e competência, incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora (BRASIL, 2018, p. 19).

Publicado pelo Ministério da Educação em 2019, o documento *Temas contemporâneos transversais na BNCC: proposta de práticas de implementação* selecionou quinze temas e os distribuiu em seis macroáreas, conforme indicado a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Avaliação

A avaliação e as práticas avaliativas

O cenário de ampla discussão sobre metodologias e práticas pedagógicas que se estabeleceu nos últimos anos trouxe à tona pontos vitais para o surgimento de novas formas de pensar a educação: as concepções de **avaliação da aprendizagem**.

Quanto à importância da avaliação, tomamos emprestadas as palavras de Pavanello e Nogueira:

> Se há um ponto de convergência nos estudos sobre a avaliação escolar é o de que ela é essencial à prática educativa e indissociável desta, uma vez que é por meio dela que o professor pode acompanhar se o progresso de seus estudantes está ocorrendo de acordo com suas expectativas ou se há necessidade de repensar sua ação pedagógica. Quanto ao estudante, a avaliação permite que ele saiba como está seu desempenho do ponto de vista do professor, bem como se existem lacunas no seu aprendizado às quais ele precisa estar atento.
>
> [...] Acreditamos que poucos educadores e educandos têm consciência de que a avaliação é um processo contínuo e natural aos seres humanos, de que os homens se avaliam constantemente, nas mais diversas situações, diante da necessidade de tomar decisões, desde as mais simples até as mais complexas (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 36-7).

As divergências, contudo, têm início quando se pretende redefinir a avaliação escolar e os modos e graus de exigência desse processo. Podemos dizer que, por longo tempo, na maior parte da história da Educação Matemática, o que vigorou foi a chamada avaliação informativa:

> Na prática pedagógica da Matemática, a avaliação tem, tradicionalmente, centrado-se nos conhecimentos específicos e na contagem de erros. É uma avaliação somativa, que não só seleciona os estudantes, mas os compara entre si e os destina a um determinado lugar numérico em função das notas obtidas. Porém, mesmo quando se trata da avaliação informativa, é possível ir além da resposta final, superando, de certa forma, a lógica estrita e cega do "certo ou errado" (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 30, 36).

Alguns autores também concordam que, mesmo na avaliação tradicional, há algum espaço para uma busca mais consciente do processo formativo do estudante.

> De fato, estudos têm mostrado que uma tarefa de avaliação, assim como uma tarefa de aprendizagem, deve envolver conhecimento significativo de matemática; permitir ser resolvida por vários caminhos; incentivar a comunicação por parte dos estudantes; e solicitar alguma análise crítica. Além disso, o processo de avaliação em matemática deveria evidenciar, pelo menos:
>
> - as escolhas feitas pelo estudante, na busca em lidar com a situação;
> - a capacidade do estudante em se comunicar matematicamente, comprovando sua capacidade em expressar ideias matemáticas, oralmente ou por escrito, presentes no procedimento que utilizou para lidar com a situação proposta;
> - os conhecimentos matemáticos que utilizou;
> - o modo como interpretou sua resolução para dar resposta.
>
> Assim, a avaliação em matemática deixaria para trás a memorização e a repetição para ir em direção a problemas de investigação (BURIASCO, 2002, p. 262-263).

Uma concepção de avaliação que tem se configurado nos últimos anos é a que se refere à **avaliação formativa**.

Principalmente a partir da década de 1980, muitos estudiosos têm feito importantes contribuições ao entendimento que devemos ter sobre **avaliação como processo**, **ação contínua**. Entre esses pesquisadores, destacamos o trabalho de Luckesi (2001). Segundo o autor, a avaliação deve ser tomada como instrumento para a compreensão do estágio em que se encontra o estudante, tendo em vista a tomada de decisões, suficientes e satisfatórias, para avançar no processo de aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), divulgados desde fins dos anos 1990, colaboraram para a ampliação do olhar sobre as funções da avaliação. Destacam, por exemplo, a **dimensão social** e a **dimensão pedagógica** da avaliação.

No primeiro caso, a avaliação tem a função de, para os estudantes, informar acerca do desenvolvimento das potencialidades que serão exigidas no contexto social, garantindo sua participação no mercado de trabalho e na esfera sociocultural. Para os professores, a avaliação deve auxiliar na identificação dos objetivos alcançados, com a intenção de reconhecer as capacidades matemáticas dos educandos.

No segundo caso, a avaliação tem a função de informar os estudantes sobre o andamento da aprendizagem propriamente dita, isto é, dos conhecimentos adquiridos, do desenvolvimento de raciocínios, dos valores e hábitos incorporados e do domínio de estratégias essenciais.

A BNCC também preconiza uma avaliação formativa:

> [...] construir e aplicar procedimentos de avaliação formativa de processo ou de resultado que levem em conta os contextos e as condições de aprendizagem, tomando tais registros como referência para melhorar o desempenho da escola, dos professores e dos estudantes; [...] (BRASIL, 2018, p. 17).

Os instrumentos de avaliação (provas, trabalhos, registros de atitudes, entre outros) devem ser capazes de fornecer informações ao professor sobre as condições de cada estudante com relação à resolução de problemas, ao uso adequado da linguagem matemática, ao desenvolvimento de raciocínios e análises e à integração desses aspectos em seu conhecimento matemático. Devem também contemplar as explicações, justificativas e argumentações orais, uma vez que estas revelam aspectos do raciocínio que muitas vezes não se evidenciam em avaliações escritas.

Para Charles Hadji (2001), a avaliação formativa implica, por parte do professor, flexibilidade e vontade de adaptação e de ajuste. O autor ressalta que a avaliação que não é seguida da modificação das práticas pedagógicas tem pouca capacidade de ser formativa. Posição semelhante é defendida pelas educadoras Pavanello e Nogueira (2006):

> É preciso reconhecer [...] que o professor deve selecionar, dentre as informações captadas, apenas o que é realmente importante [...]. Para isso, existem indicadores que, segundo Vergani (1993, p. 155), podem nortear a observação pelo professor, entre os quais poderiam ser citados:
>
> - o interesse com que o estudante se entrega às atividades matemáticas;

- a confiança que tem em suas possibilidades;
- sua perseverança, apesar das dificuldades encontradas;
- se formula hipóteses, sugere ideias, explora novas pistas de pesquisa;
- se avalia criteriosamente a adequação do processo que adotou ou a solução que encontrou;
- se reflete sobre a maneira de planificar uma atividade e de organizar seu trabalho;
- se pede ajuda em caso de dúvida ou de falta de conhecimentos; e
- se comunica suas dificuldades e descobertas aos colegas, de maneira adequada.

No entanto, para que essas atitudes possam ser cultivadas pelo estudante, a prática pedagógica não pode mais se centrar na exposição e reprodução de conteúdos que só privilegiam a memorização e não o desenvolvimento do pensamento (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 38-9).

Afinal, o que deve ser avaliado: conteúdos, habilidades, atitudes?

Tudo deve ser avaliado. O fundamental, porém, é saber **como olhar**, **o que olhar** e **como analisar** as coletas. Para isso, o professor pode recorrer a diversificados instrumentos de coleta de informações, selecionando aqueles que permitam compor o melhor panorama da aprendizagem matemática de seus estudantes.

Desse modo, as avaliações precisam ser planejadas, assim como qualquer situação de ensino. É fundamental estar sempre atento ao processo de avaliação sem perder de vista os objetivos e as expectativas para cada ano escolar. Portanto, durante o uso de instrumentos avaliativos, é importante considerar as habilidades propostas nos documentos curriculares e nos planos de ensino e os trabalhados na coleção.

Diante das diferentes concepções sobre como avaliar e com base nas ideias que a coleção assume, entendemos que a avaliação deve ser um processo contínuo durante o ano letivo, e não apenas momentos estanques, como ao final de cada bimestre, de modo que o desenvolvimento dos estudantes seja acompanhado pelo professor e por ele próprio, e que intervenções possam ser feitas ao longo do caminho.

A organização da coleção em capítulos e o bloco de **Exercícios complementares**, a seção **Verificando** e a seção **Organizando** podem ser indicativos ou funcionar como ferramentas iniciais para a construção de momentos avaliativos.

Porém, ressalta-se a importância de complementar as atividades do livro com outros instrumentos para acompanhar os estudantes em seu processo de aprendizagem.

Desse modo, destacam-se a seguir elementos a se considerar no processo avaliativo:

- o caráter processual, formativo e participativo da avaliação e sua forma contínua, cumulativa e diagnóstica;
- a avaliação como oportunidade para professor e estudante refletirem e ajustarem o desempenho;
- as diferentes estratégias e oportunidades para avaliação, não deixando de considerá-las também situações de aprendizagem;
- a importância de registros constantes dos avanços e dificuldades de observação e acompanhamento diário;
- diferentes propostas de avaliação de aprendizagem coerentes com visões atuais de avaliação (mediadora e dialógica, diagnóstica e formativa);
- instrumentos para registros, como relatórios, portfólios, tabelas, fichas, entre outros com critérios para avaliação.

Instrumentos de avaliação nas aulas de Matemática

Ao diversificar os instrumentos de avaliação e autoavaliação, o professor pode produzir momentos de aprendizagem e atender o maior número de estudantes do grupo. Como sugestão, vamos apresentar aqui, resumidamente, um leque de modalidades de avaliação.

Autoavaliação: em primeiro lugar, o professor deve auxiliar os estudantes a compreenderem os objetivos da autoavaliação, fornecendo-lhes para isso um roteiro de orientação. Os estudantes devem ser motivados a detectar suas dificuldades e a questionar as razões delas.

Prova em grupo seguida de prova individual: nesta modalidade, as questões são resolvidas em grupo, e, em seguida, cada estudante resolve questões do mesmo tipo individualmente. O intuito é colaborar para a metacognição, para que o estudante tenha consciência do próprio conhecimento, de suas potencialidades e dificuldades.

Testes-relâmpago: os testes-relâmpago normalmente propõem poucas questões, uma ou duas apenas. Têm por objetivo não permitir que os estudantes mantenham-se sem estudo durante longos períodos, de modo que se acumule uma grande quantidade de conteúdos. Esse recurso, além de manter os estudantes atentos aos assuntos contemplados em aula, ajuda-os na familiarização com os processos avaliativos.

Testes e/ou provas cumulativas: este instrumento de avaliação traz à tona conteúdos trabalhados em momentos anteriores. Tal prática contribui para que os estudantes percebam as conexões entre os conteúdos e a importância de usar os conhecimentos matemáticos de forma contínua.

Testes em duas fases: este tipo de teste, ou prova, é realizado em duas etapas:

1ª) a prova é realizada em sala de aula, sem a interferência do professor;

2ª) os estudantes refazem a prova dispondo dos comentários feitos pelo professor.

O sucesso desse instrumento depende de alguns fatores, como:

- a escolha das questões deve ser norteada pelos objetivos do teste;
- o conteúdo dos comentários formulados pelo professor entre as duas fases;
- a consciência, por parte dos estudantes, de que a segunda fase não consiste em mera correção do que está errado, mas em uma oportunidade de aprendizagem.

As questões devem ser de dois tipos:

- as que requerem interpretação ou justificação, e problemas de resolução relativamente breve;
- as abertas, e problemas que exijam alguma investigação e respostas mais elaboradas.

Resolução de problemas: chamamos de "problema matemático" aquele que envolve um raciocínio matemático na busca por solução. Pode ser resolvido individualmente ou em grupo. A atividade de resolução de problemas deve envolver, entre outros fatores:

- a compreensão da situação-problema por meio de diferentes técnicas (leitura, interpretação, dramatização etc.);
- a promoção da criação de estratégias pessoais (não haver solução pronta);
- a identificação do problema e a seleção e a mobilização dos conhecimentos matemáticos necessários para sua resolução;
- a avaliação do processo para verificar se, de fato, os objetivos estão sendo atingidos;
- a interpretação e a verificação dos resultados, para que se avaliem sua razoabilidade e sua validade.

Mapa conceitual: durante a fase formal de avaliação, o professor pode solicitar aos estudantes que construam o mapa conceitual sobre um tema já discutido e trabalhado em aula. Este tipo de instrumento propicia a verificação da aprendizagem mais aberta e pode ser usado como autoavaliação.

Trabalho em grupo: para que os estudantes trabalhem de fato como grupo, são fundamentais a orientação e o auxílio do professor no sentido de estimular os estudantes a desempenharem novas funções em sala de aula, em colaboração com os colegas. Um incentivo para isso é o grupo receber uma única folha de papel com as atividades propostas, para que todos resolvam em conjunto. A questão a ser respondida deve ser desafiadora, despertando a curiosidade e a vontade de resolvê-la.

Diálogos criativos: a proposta é que os estudantes produzam diálogos matemáticos em que estejam inseridos conceitos e propriedades de determinado conteúdo.

Histórias em quadrinhos: nesta modalidade, os estudantes criam histórias em quadrinhos para abordar os assuntos estudados em sala de aula. Esse é um recurso que, além de intensificar o interesse pela Matemática, permite ao professor a avaliação do conhecimento assimilado pelos estudantes em contextos diversificados.

Seminários e exposições: são atividades que oferecem oportunidade para os estudantes organizarem seu conhecimento matemático e suas ideias sobre os assuntos trabalhados em aula, além de promover a desinibição e a autonomia dos estudantes.

Portfólios: são coletâneas dos melhores trabalhos, que podem ser escolhidos pelos próprios estudantes. O professor deve orientá-los e sugerir que selecionem, durante um período, as atividades de Matemática que preferirem e que justifiquem as suas escolhas.

É importante reforçar que um processo fecundo de avaliação deverá considerar, além dos instrumentos apropriados, o estabelecimento de critérios de correção alicerçado em objetivos claros e justos. Chamamos a atenção para o tratamento que devemos dar ao *"erro"* nas atividades de Matemática. Ele deve ser analisado criticamente, de modo que forneça indícios de sua natureza e da correção do percurso pedagógico, para o (re)planejamento e a execução das atividades em sala de aula.

> Encarados com naturalidade e racionalmente tratados, os erros passam a ter importância pedagógica, assumindo um papel profundamente construtivo, e servindo não para produzir no estudante um sentimento de fracasso, mas para possibilitar-lhe um instrumento de compreensão de si próprio, uma motivação para superar suas dificuldades e uma atitude positiva para seu futuro pessoal (PAVANELLO; NOGUEIRA, 2006, p. 37).

Por fim, a observação atenta e a percepção aguçada do professor também são relevantes no processo de avaliação, no sentido de detectar as aprendizagens, que muitas vezes não são reveladas pelos instrumentos avaliativos escolhidos.

Sejam quais forem os instrumentos utilizados, é fundamental que o professor estabeleça critérios de avaliação da aprendizagem matemática dos estudantes para cada ano escolar, tomando como referência as habilidades de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental. Desse modo, os objetivos de aprendizagem destacados no planejamento do professor precisam ser explicitados para o estudante, para que ele compreenda aonde se quer chegar, tomando o cuidado de usar uma linguagem compatível com o seu entendimento.

Nas **Orientações específicas** de cada volume, indicamos materiais que podem subsidiar o trabalho docente. Para cada ano escolar, serão indicadas atividades comentadas relacionadas às habilidades do ano anterior e que podem compor avaliações diagnósticas. Essas atividades estão organizadas na seção **Avaliação diagnóstica**.

Além disso, sugerimos que os exercícios das seções **Verificando** de cada capítulo sejam utilizados com a finalidade de preparar os estudantes para avaliações e exames externos, de larga escala.

Uma prática de avaliação formativa também deve ser realizada com a participação dos estudantes em relação ao próprio desempenho. A autorreflexão leva ao compartilhamento, com os professores e demais envolvidos no processo educacional, da responsabilidade pela própria aprendizagem. Analisar rotineiramente aspectos como avanços e fragilidades no desempenho leva à superação de dificuldades e ao compromisso com decisões futuras para aprimoramentos. Todos os itens devem ser previamente combinados com os estudantes e, posteriormente, discutidos em entrevista pessoal. Dessa maneira, sugerimos que uma das utilizações das questões da seção **Organizando**, disponibilizada ao final de cada capítulo, seja utilizada como uma maneira de possibilitar a autoavaliação dos estudantes em relação aos conteúdos de cada capítulo. Também indicamos, a seguir, um modelo de autoavaliação que poderá ser adaptado pelo professor, de acordo com a necessidade de cada etapa do processo de ensino que pretende utilizar, seja no início ou no fim de cada bimestre ou ao final do trabalho com o conteúdo de um capítulo, por exemplo.

AUTOAVALIAÇÃO

Avalie seu desempenho educacional comentando aspectos positivos e negativos relacionados a cada item.

1. DESEMPENHO EM SALA DE AULA

- Em relação ao domínio do conteúdo:

- Interesse e participação:

- Realização das atividades individuais e em grupo:

- Autonomia:

a) Indique as principais dificuldades encontradas e o que foi importante para superá-las.

b) Outras observações:

2. RELACIONAMENTO

- Com os colegas:

- Com o professor:

- Com a equipe técnica e demais funcionários da instituição:

a) Indique as principais dificuldades encontradas e o que foi importante para superá-las.

b) Outras observações:

3. COMPROMISSO E RESPONSABILIDADE

- Assiduidade:

- Pontualidade nas aulas e na entrega dos trabalhos:

- Material didático:

a) Indique as principais dificuldades encontradas e o que foi importante para superá-las.

b) Outras observações:

Autonomia do professor e a prática docente

Como já exposto, entendemos o livro didático como apoio do trabalho pedagógico. Nessa perspectiva, o conhecimento, a experiência e a autonomia profissional fazem do docente um coautor do material publicado. Assim, a despeito das propostas explícitas da coleção, o professor sempre poderá ampliar, complementar e inovar no desenvolvimento e nas discussões dos temas e atividades sugeridos, aproveitando as novas questões que emergem em sala de aula no desenrolar do estudo. O modo como o professor usará os recursos que compõem esta coleção depende da teoria que embasa a sua prática pedagógica e de sua experiência em salas de aula diversas e heterogêneas.

É sempre bom lembrar que o estímulo à imaginação e ao interesse dos estudantes conta com uma gama de recursos didáticos, como: o trabalho com jogos ou com materiais manipulativos, vídeos e ferramentas da informática; a pesquisa em livros paradidáticos, dicionários, periódicos (jornais, boletins, revistas de informação geral e especializada) e internet; ou a realização de feiras, gincanas e exposições.

A gestão da sala de aula também faz parte da autonomia do professor e pode ser um meio de estimular os estudantes a desenvolver responsabilidade pessoal e autodisciplina, tornando o processo de ensino-aprendizagem mais significativo tanto para o professor como para os estudantes.

Ao planejar sua aula, o professor deve refletir sobre o espaço de que dispõe e sobre a melhor maneira de atingir seus objetivos nesse local, com vistas a uma aula o mais inclusiva possível e com a participação de todos os estudantes.

Além disso, o professor deve considerar os perfis variados dos estudantes e das turmas (que podem ser pequenas ou muito grandes). Para dar conta de atender às diferentes necessidades, é necessário que a equipe docente e a de gestão levem em conta tal diversidade, propondo situações diversificadas que respeitem cada indivíduo.

> Uma questão importante a ser considerada quando se resolve debater sobre a heterogeneidade na escola é reconhecer que há diferentes tipos de heterogeneidade e que o modo de tratar cada um deles é bastante específico. A literatura sobre esse tema remete a, pelo menos, três grandes blocos de heterogeneidades a serem abordadas no debate educacional. Um primeiro tipo diz respeito às diferenças socioeconômicas culturais, religiosas, étnico-raciais, de gênero, de orientação sexual, físicas existentes entre as crianças. Um segundo tipo remete às reflexões sobre a inclusão dos estudantes com deficiências físicas e transtornos de aprendizagem. O terceiro diz respeito à heterogeneidade quanto ao nível de escolaridade, idade, conhecimentos (LEAL; SILVA, 2016).

Já destacamos a importância de se respeitar a diversidade, que deve ser tratada como uma oportunidade ao indivíduo de ganhar novas perspectivas, expandir seus horizontes e aprender com as diferenças, valorizando a multiplicidade de culturas e os grupos que formam a sociedade.

Para a inclusão das crianças com deficiência, entendemos que as dificuldades são muitas. Nesses casos é preciso um investimento pedagógico, por parte da gestão escolar e do professor, em busca de subsídios teóricos sobre como abordar os conteúdos, atendendo às necessidades específicas de cada tipo de deficiência ou transtorno.

Em relação aos níveis de conhecimento, devemos considerar que diferentes fatores sociais ou individuais podem influenciar, demandando diferentes tipos de ações didáticas. Além disso,

> é preciso compreender que: (1) a heterogeneidade é constitutiva do processo pedagógico e, portanto, estará sempre presente, mas as turmas são constituídas por identidades sociais (homogeneidades), que precisam ser respeitadas, valorizadas e conhecidas; (2) o currículo escolar traz recortes não neutros do que se ensina e se aprende e, portanto, precisa ser objeto de debate com as próprias comunidades. Por outro lado, é preciso reconhecer que, em decorrência das trajetórias sociais e individuais, sempre haverá heterogeneidade quanto aos níveis de conhecimento, que precisam ser tratados na escola, possibilitando que, ao mesmo tempo, os diferentes saberes sejam valorizados, mas que conteúdos fundamentais sejam garantidos a todos, em condições favoráveis de aprendizagem (LEAL; SILVA, 2016).

Uma das ações para se trabalhar com a heterogeneidade em relação ao nível de conhecimento seria mapear os níveis de conhecimentos dos estudantes em relação aos diversos assuntos. Para isso, pode-se propor uma avaliação diagnóstica no início do ano ou no início de cada etapa. Ações desse tipo podem auxiliar a diagnosticar as facilidades e as fragilidades em relação a cada componente curricular ou ao conteúdo a ser trabalhado.

Uma outra proposta é rever o planejamento a cada etapa do ano, seja bimestral ou trimestralmente. Ao fazer essa revisão é possível fazer ajustes que atendam aos diferentes perfis dos estudantes. Planejar, executar, avaliar e replanejar devem ser ações constantes no trabalho escolar. Com as estratégias de planejamento adequadas, pode-se manter o grupo envolvido e organizado, propiciando um trabalho apropriado a todos.

Formação continuada e desenvolvimento profissional docente

Assim como os estudantes precisam desenvolver habilidades e competências diversificadas, em sintonia com a época em que vivem, nós, professores, mais que outros profissionais, temos a máxima urgência e necessidade de cuidar da continuidade de nossa formação e do consequente desenvolvimento profissional.

O que aprendemos na universidade e a experiência que adquirimos com a prática pedagógica não são suficientes para nos manter longe de atividades de formação. Pesquisas e estudos no campo da Educação Matemática e áreas afins têm nos auxiliado a encontrar as respostas para as muitas dúvidas e angústias inerentes à profissão: “O que ensinar?”, “Por que ensinar?”, “Como ensinar?”…

O desenvolvimento profissional do professor deve ser entendido como um processo contínuo, que se dá ao longo de toda a vida profissional, não ocorre ao acaso, tampouco é espontâneo, mas resultado do processo de busca que parte das necessidades e dos interesses que surgem no percurso.

Na realidade, a formação profissional docente tem início na experiência como estudante e na formação acadêmica específica, do período de iniciação à docência, até edificar-se com a experiência profissional e os processos de formação continuada.

Lembramos que as ações de formação continuada podem ser desenvolvidas por múltiplas modalidades, como leituras atualizadas, cursos, palestras, oficinas, seminários, grupos de estudos, reuniões e encontros com colegas na própria escola.

Para ampliar essa proposta, indicamos algumas de suas publicações, livros e trabalhos científicos que possam contribuir para um aprofundamento do conhecimento do professor e auxiliá-lo na ampliação das atividades propostas no livro.

Algumas publicações de associações e centros de Educação Matemática

- **Bolema** (Boletim de Educação Matemática) – publicado pelo Departamento de Matemática do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (IGCE-Unesp), *campus* de Rio Claro. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/1050. Acesso em: 13 maio 2022.
- **Boletins do Gepem** – publicados pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Disponível em: http://costalima.ufrrj.br/index.php/gepem/issue/view/127. Acesso em: 13 maio 2022.
- **Educação Matemática em Revista** – publicada pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revista Brasileira de História da Matemática** – publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática – publicada pelo Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (UFSC). Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em: 14 maio 2022.
- Revista **Educação e Matemática** e Revista **Quadrante** – publicadas pela Associação de Professores de Matemática de Portugal. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revista de História da Educação Matemática** – publicada pela Sociedade Brasileira de História da Matemática. Disponível em: https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT. Acesso em: 14 maio 2022.
- **Revista do Professor de Matemática** (RPM) – publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: https://www.rpm.org.br/. Acesso em: 14 maio 2022.
- Revista **Zetetiké** – publicada pelo Centro de Estudos Memória e Pesquisa em Educação Matemática (Unicamp). Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike. Acesso em: 14 maio 2022.

Referências bibliográficas

ADICHIE, C. N. **O perigo de uma história única**, 2009. Disponível em: <https://www.ted.com/talks/chimamanda_ngozi_adichie_the_danger_of_a_single_story?language=pt-br>. Acesso em: 30 jun. 2022.

Inicialmente divulgada no TED Talk e depois publicada em livro, a palestra relata as experiências da autora nos Estados Unidos e alerta para os riscos de uma visão estreita e estereotipada de mundo.

AULETE Digital. Rio de Janeiro: Lexicon. Disponível em: https://www.aulete.com.br/empatia. Acesso em: 30 jun. 2022.

Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos**: Uma Perspectiva Cognitiva. Lisboa: Plátano, 2003.

David Ausubel apresenta nesse livro uma visão atualizada da sua teoria da aprendizagem, conhecida como **Teoria da Assimilação**. Ausubel defende que o principal processo de aprendizagem significativa é por recepção, e não por descoberta. E, contrariamente a muitos outros autores, argumenta que a aprendizagem significativa por recepção não é um processo passivo. Pelo contrário, é, necessariamente, um processo ativo, que exige ação e reflexão do aprendiz e que é facilitada pela organização cuidadosa das matérias e das experiências de ensino.

BASE Nacional Comum Curricular: educação é a base. **Competências socioemocionais como fator de proteção à saúde mental e ao *bullying***. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying. Acesso em: 11 maio 2022.

Artigo sobre como o trabalho com as competências socioemocionais pode servir como um fator de prevenção ao *bullying*, apresentando uma atividade como proposta de trabalho.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília: MEC, 2018.

Documento oficial do Ministério da Educação que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio de todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental de 9 (nove) anos**. Brasília: Parecer CNE/CBE nº 11/2010.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares para o Ensino Fundamental de 9 anos em todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1998.

Documento do Ministério da Educação, em 1998, com o objetivo principal de orientar os educadores por meio da normatização de alguns fatores fundamentais concernentes a cada disciplina. Esses parâmetros abrangiam tanto a rede pública, como a rede privada de ensino, conforme o nível de escolaridade dos estudantes.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Elaborado pelo Ministério da Educação, guia prático com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

BURIASCO, R. Sobre avaliação em Matemática: uma reflexão. **Educação em Revista** (UFMG), Belo Horizonte, n. 36, dez. 2002.

O artigo é dedicado à apresentação de considerações e reflexões quanto às práticas avaliativas usuais das escolas, às avaliações em larga escala, à avaliação na perspectiva da resolução de Problemas, às diferentes funções da avaliação, à linha de pesquisa da análise de erros e à diretriz para a avaliação, que possam contribuir de fato para uma educação matemática de melhor qualidade.

COHEN, E. G.; LOTAN, R. A. **Planejando o trabalho em grupo**: estratégias para salas de aula heterogêneas. 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2017.

O livro explica como aplicar com sucesso a aprendizagem cooperativa com base em pesquisas sobre o que torna uma tarefa adequada para grupos, além de mostrar como o trabalho em equipe contribui para o crescimento e o desenvolvimento dos estudantes.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. Campinas: Papirus, 2000.

A proposta dessa obra é a adoção de uma nova postura educacional. Após fazer considerações de caráter geral, abordando aspectos da cognição, da natureza da matemática e questões teóricas da educação, o autor discute inovações na prática docente, propondo reflexões sobre a matemática.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

O autor aprofunda sua teoria-ética de uma vida voltada para a liberdade, a verdade e a autenticidade dos sujeitos. Reflete sobre o que o ato de ensinar exige de educadores e educandos.

HADJI, C. **Avaliação desmistificada**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Ao refletir sobre a possível formatividade da avaliação, o autor pretende permitir aos professores e a todos aqueles que estão envolvidos com a avaliação escolar que vejam o que significa colocar a avaliação a serviço das aprendizagens e como isso pode ser concretamente feito.

INSTITUTO Ayrton Senna. **Mapeamento aponta que 70% dos estudantes de SP relatam sintomas de depressão e ansiedade**. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/conteudos/mapeamento-aponta-que-70-por-cento-dos-estudantes-de-SP-relatam-sintomas-de-depressao.html. Acesso em: 11 maio 2022.

O artigo apresenta o resultado de uma pesquisa realizada em 2021 pela Secretaria da Educação e o Instituto Ayrton Senna que revelou os efeitos da pandemia de Covid-19 na saúde mental e socioemocional dos estudantes do estado de São Paulo.

LEAL, T. F.; SÁ, C. F.; SILVA, E. C. N. (org.). **Heterogeneidade, educação e linguagem em contextos do campo e da cidade**. Recife: Editora Universitária da UFPE, 2016.

As autoras fazem uma síntese de diferentes conceitos de heterogeneidade e seus impactos para a educação, com foco na reflexão sobre as escolas do campo e da zona urbana.

LUCKESI, C. C. **Avaliação da aprendizagem escolar**. São Paulo: Cortez, 2015.

O livro oferece subsídios para ampliar a compreensão sobre o ato de avaliar a aprendizagem dos estudantes e, dessa forma, orientar uma prática mais adequada às suas finalidades. No decorrer de suas páginas, há um movimento constante entre a denúncia de uma situação inadequada e o anúncio de novas possibilidades, uma dialética entre a desconstrução e a reconstrução de conceitos e modos de agir.

MICHAELIS Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. São Paulo: Melhoramentos, 2015. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/empatia/. Acesso em: 30 jun. 2022.

Dicionário eletrônico da Língua Portuguesa.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. Matemática escolar, Matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, Campinas, v. 11, n. 19, 2003.

Nesse artigo, argumenta-se no sentido de mostrar que o processo de constituição da matemática escolar ultrapassa tanto a ideia de transposição didática, regulada pela matemática científica e pelas ciências da educação, quanto a de uma construção totalmente endógena à escola.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

Nesse livro os autores apresentam textos que contribuem para a compreensão a respeito do modo como as crianças trabalham com problemas matemáticos.

ORGANIZAÇÃO DAS NAÇÕES UNIDAS. **Declaração Universal dos Direitos Humanos**, 10 dez. 1948.

Documento aprovado em 1948, na Assembleia Geral da Organização das Nações Unidas (ONU), é a base da luta universal contra a opressão e a discriminação, defendendo a igualdade e a dignidade das pessoas e reconhecendo que os direitos humanos e as liberdades fundamentais devem ser aplicados a cada cidadão do planeta.

PAVANELLO, R. M.; NOGUEIRA, C. M. I. Avaliação em Matemática: algumas considerações. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 17, n. 33, jan./abr. 2006.

O objetivo desse texto é discutir a trajetória a ser considerada quando se pensa na avaliação em matemática. Assim, os autores partem da constatação de que há diferentes modos de conceber a matemática, paradigmas que se filiam a sistemas filosóficos existentes desde a Antiguidade. Esses paradigmas, por sua vez, influenciam o fazer matemática, o fazer pedagógico em matemática e, por conseguinte, a avaliação.

PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. **Currículo de Pernambuco**: ensino fundamental – área de matemática. Recife: Secretaria de Educação e Esportes, 2019. p. 65.

Documento oficial da Secretaria de Educação e Esportes do estado de Pernambuco que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas na área de Matemática, no Ensino Fundamental de todo o estado.

PONTE, J. P. **O ensino da Matemática em Portugal**: uma prioridade educativa? Conferência plenária apresentada no seminário "O Ensino da Matemática: situação e perspectivas". Lisboa: CNE, 2002.

O autor revê alguns dos marcos mais salientes do percurso do ensino da Matemática em Portugal, analisando os elementos fundamentais que caracterizam o ensino dessa disciplina como fenômeno social. Também identifica os fatores que, na sua perspectiva, contribuem para a crise no ensino da Matemática e indica caminhos para a sua resolução.

ROMANATTO, M. C. O livro didático: alcances e limites. **Anais**. VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo.

O presente trabalho discute a utilização do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem.

SÃO PAULO (Município). Secretaria Municipal de Educação. **Currículo da cidade**: ensino fundamental – componente curricular matemática. 2. ed. São Paulo: SME/COPED, 2019. p. 25.

Documento oficial da Secretaria Municipal de Educação do município de São Paulo que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas na área de Matemática, no Ensino Fundamental de todo o município.

UJIIE. N. T. *et al*. Os Conhecimentos Prévios de Matemática de Estudantes do Ensino Fundamental: O que é Matemática? De Onde Ela Veio? Como Seria um Mundo sem Matemática? *In*: **ALEXANDRIA**: R. Educ. Ci. Tec., Florianópolis, v. 10, n. 1, p. 57-73, maio 2017.

Nesse artigo, os autores apresentam os resultados de uma investigação com abordagem quali-quantitativa, realizada com 22 estudantes de sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública de Tijucas, Santa Catarina, acerca do tema matemática.

UNESCO. **Cultura de paz no Brasil** [entre 2017 e 2022]. Disponível em: https://pt.unesco.org/fieldoffice/brasilia/expertise/culture-peace. Acesso em: 11 maio 2022.

Artigo sobre a cultura de paz no Brasil, destacando que é fundamental promover e disseminar valores, atitudes e comportamentos que conduzam ao diálogo, à não violência e à aproximação das culturas.

Referências bibliográficas complementares

- BELLEMAIN, P. M. B.; BIBIANO, M. F. A.; SOUZA, C. F. Estudar grandezas e medidas na educação básica. **EM TEIA** – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. vol. 9, n. 1, 2018.

  Esse texto problematiza o ensino de grandezas e medidas na matemática da educação básica e na interface entre matemática e física. Discutem-se o porquê de ensinar grandezas e medidas, as dificuldades enfrentadas por estudantes e professores no estudo desse campo e alguns caminhos que podem contribuir para a superação dessas dificuldades.

- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Nesse livro, os autores apresentam exemplos do uso de informática com estudantes e professores para, então, debaterem desde temas ligados às políticas governamentais para a informática educativa até questões epistemológicas e pedagógicas relacionadas à utilização de computadores e calculadoras gráficas em Educação Matemática.

- CAZORLA, I. M.; SANTANA, E. S. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. 2. ed. Itabuna/Ilhéus: Via Litterarum, 2009.

  Esse livro apresenta quatro sequências didáticas para trabalhar de forma objetiva e acessível os conceitos básicos de Estatística e Probabilidade, de acordo com as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, da Educação Básica.

- KALEFF, A. M. M. R.; PEREIRA, P. C. (org.). **Educação Matemática**: diferentes olhares e práticas. Curitiba: Appris, 2020.

  Nessa obra os autores tratam de diferentes temáticas, como o ensino de geometria, laboratório de ensino, recursos virtuais, Educação Inclusiva, Etnomatemática, Educação Escolar Indígena, temas que permitem reconhecer ações e a diversidade dos estudantes na sala de aula.

- MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. **Modelagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

  Os autores oferecem aos leitores reflexões sobre aspectos da Modelagem e suas relações com a Educação Matemática. Apresentam a trajetória histórica da Modelagem e provocam discussões sobre suas relações, possibilidades e perspectivas em sala de aula, sobre diversos paradigmas educacionais e sobre a formação de professores.

- MIGUEL, A.; MIORIM, M. A. **História na educação matemática**: propostas e desafios. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

  Nesse livro, os autores abordam temáticas da História da Matemática, História da Educação Matemática e como essas duas regiões de inquérito podem se relacionar com a Educação Matemática.

- NACARATO, A. M.; LOPES, C. E. (org.). **Escritas e leituras na Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

  Os autores apresentam diferentes discussões sobre o trabalho com leitura e escrita nas aulas de Matemática, tais como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados.

- NACARATO, A. M.; GOMES, A. A. M.; GRANDO, R. C. (org.). **Experiências com Geometria na escola básica**: narrativas de professores em (trans)formação. São Carlos: Pedro & João Editores, 2008.

  O livro traz narrativas de professores da escola básica, participantes de um Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria, localizado institucionalmente na Universidade São Francisco. O livro traz as experiências de seus participantes, bem como discussões epistemológicas do pensamento geométrico.

- PEREIRA, C. A.; SANDMANN, A. Dificuldades do ensino da álgebra no ensino fundamental: algumas considerações. **Revista Eletrônica Científica Inovação e Tecnologia**. Curitiba: UTFPR, v. 8, n. 17, 2017.

  Nesse artigo os autores apresentam referenciais teóricos que possibilitam uma reflexão acerca das dificuldades existentes no ensino-aprendizagem da Álgebra.

- RODRIGUES, R. S. **Um estudo sobre os efeitos do pensamento computacional na educação**. Dissertação (Mestrado em Ciência da Computação) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Engenharia Elétrica e Informática, 2017. Campina Grande, 2017.

  O objetivo geral desse trabalho é analisar de forma quantitativa o efeito do Pensamento Computacional desenvolvido pela

programação de computadores na capacidade de resolução de problemas e no desempenho de estudantes no ensino básico.

- ROSA, M.; BAIRRAL, M. A.; AMARAL, R. B. **Educação Matemática, Tecnologias Digitais e Educação a Distância**: pesquisas contemporâneas. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

  Nessa obra os autores apresentam investigações recentes no campo da Educação Matemática em relação às tecnologias digitais e Educação a Distância, de forma a contribuir com professores de matemática e pesquisadores em Educação Matemática.
- SANTOS, J. G.; MONDINI, F. Um estudo sobre o tratamento formal dos números racionais. **ACTIO**: Docência em Ciências. Curitiba: UTFPR, v. 5, n. 2, 2020.

  O artigo tem por objetivo apresentar um estudo sobre o tratamento formal para alguns conceitos referentes aos números racionais, discutidos a partir de demonstrações. A escolha do tema justifica-se também por sua importância, visto que são as demonstrações matemáticas que fundamentam as teorias desta ciência, garantindo sua validade ou não.
- SILVA, G. T. F.; DÍAZ-URDANETA, S. C. **Ensino da Matemática na Educação Especial**: discussões e propostas. Curitiba: Intersaberes, 2021. (Série Pressupostos da Educação Especial).

  Nessa obra, os autores focam no ensino da Matemática na educação especial, principalmente no que se refere à formação do professor, objetivando apresentar alternativas úteis em sala de aula, como estratégias pedagógicas para o ensino de números, álgebra, grandezas e medidas, geometria, probabilidade e estatística na educação especial.
- SKOVSMOSE, O. **Um convite à educação matemática crítica**. Campinas: Papirus, 2014. (Perspectivas em Educação Matemática).

  Nesse livro, o autor aborda uma gama de conceitos cruciais no campo da educação matemática crítica, cenários para investigação e matemática em ação.
- SOUZA, F. C. **Números inteiros e suas operações**: uma proposta de estudo para estudantes do 6º ano com o auxílio de tecnologia. 2015. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

  Esse trabalho tem como objetivo verificar como os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental, que não tiveram contato formal com os números inteiros e suas operações, mobilizam seus conhecimentos prévios para resolver situações que envolvam esse objeto matemático e se eles poderiam se desenvolver de forma autônoma para a sua compreensão.
- VILLAS BOAS, B. M. F.; SOARES, E. R. M. (org.). **Avaliação das aprendizagens, para as aprendizagens e como aprendizagem**: obra pedagógica do professor. Campinas: Papirus, 2022.

  O livro discorre sobre as três funções da avaliação: formativa, diagnóstica e somativa, destacando a formativa, pelo fato de desenvolver-se ao longo do trabalho pedagógico. Esse processo exige a presença do *feedback*, da avaliação informal encorajadora, o envolvimento dos pais/responsáveis, além de recursos avaliativos variados, como o portfólio, a autoavaliação, a avaliação por colegas e outros.
- WING, J. Pensamento computacional. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**. Ponta Grossa, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016.

  Esse artigo, "*Computational Thinking*", de Jeannette Wing, foi publicado originalmente no número 3 da edição 49 do periódico ***Communications of the ACM***, em março de 2006. Nele, a autora define o pensamento computacional como uma habilidade fundamental, que todas as pessoas devem conhecer para atuar na sociedade moderna.

Apresentação da coleção

Estrutura da obra

A coleção é composta de quatro livros do estudante e respectivos manuais do professor. O *Manual do Professor* de cada ano reúne o livro do estudante, as Orientações Gerais, comum a cada um dos volumes da coleção, as Orientações específicas de cada volume e orientações do conteúdo, disponibilizadas página a página. Além disso, contém a resposta de todos os exercícios e atividades.

Cada livro do estudante é organizado em 12 capítulos. Cada capítulo enfatiza conteúdos que compõem os objetos de conhecimento descritos na BNCC.

Os capítulos de cada volume são compostos de:

- **Desenvolvimento teórico**

  O desenvolvimento dos conteúdos propostos é acompanhado de diversificação de estratégias. Apresenta-se intercalado com atividades e seções especiais que ampliam e enriquecem o tema estudado.
- **Blocos de exercícios**

  Os exercícios presentes na coleção – distribuídos entre Exercícios propostos, Exercícios complementares e atividades diferenciadas nas seções especiais – possibilitam o trabalho com as Unidades Temáticas e permitem integrações entre elas. Têm o intuito de estimular o raciocínio lógico, a argumentação e a resolução de problemas, além de propor temáticas atuais relevantes à faixa etária.
- **Seções especiais**

Distribuídas ao longo do capítulo, as seções de variados tipos complementam, ampliam e enriquecem o tema tratado e desafiam os estudantes por meio das atividades propostas. Há pelo menos um tipo dessas seções em cada capítulo.

A seguir, apresentamos os principais elementos que compõem os capítulos e descrevemos as seções especiais que aparecem ao longo de cada volume da coleção.

- **Abertura de capítulo**: compreendida por um conjunto de questões, uma imagem e pequeno texto motivadores do tema do capítulo.

- **Exercícios propostos**: aparecem ao longo do desenvolvimento teórico, trabalham aspectos importantes de cada conteúdo de maneira variada. Por exemplo, nos exercícios com indicação **Hora de criar**, os estudantes são convidados a usar criatividade, imaginação, capacidade de argumentação e colaboração trabalhando em duplas ou em grupos.

- **Exercícios complementares**: podem ser trabalhados de diversas maneiras pelo professor, de acordo com suas necessidades didáticas. Podem servir de base para uma discussão em duplas ou em grupos, sintetizar o tema abordado ou ainda ser aproveitados como tarefa extraclasse ou como fonte de exercícios para uma recuperação paralela, entre outras aplicações.
- **Verificando**: ao final de cada capítulo, apresenta um conjunto de testes que podem ser utilizados para autoavaliação ou como uma avaliação formativa relativa aos conteúdos trabalhados no capítulo. As questões apresentadas no tópico **Organizando** têm como objetivo fazer com que os estudantes retomem e reflitam sobre os conceitos estudados.
- Seção **Pense mais um pouco...**: atividades e desafios de aprofundamento dos conteúdos desenvolvidos no capítulo, que solicitam do estudante um pensamento mais elaborado, exigindo a criação de estratégias pessoais de resolução.
- Seção **Para saber mais**: conteúdos e atividades que, fundamentados em contextos diversos, integram a Matemática a outras áreas do saber ou aos diferentes campos dela própria, como a História da Matemática. Geralmente é finalizada por **Agora é com você!**, que traz uma proposta de questões relacionadas ao tema exposto.
- Seção **Trabalhando a informação**: são trabalhados conteúdos de Probabilidade e Estatística, como interpretação e construção de tabelas e gráficos e cálculo de probabilidades.
- Seção **Diversificando**: atividades que relacionam o conteúdo trabalhado no capítulo a outros contextos, como jogos, aplicações e desafios.

Essa estrutura pretende ser organizadora do trabalho docente sem, contudo, tornar-se um entrave para estudantes e professores. Por isso, os capítulos contemplam aspectos fundamentais a serem trabalhados com os estudantes, mas permitem maleabilidade e flexibilidade em sua abordagem, na tentativa de facilitar o trabalho do professor no momento em que ele precisar fazer as adaptações necessárias a cada turma.

Organização geral da obra

No quadro a seguir apresentamos a configuração dos 12 capítulos em cada volume desta coleção:

	6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Capítulo 1	Números	Números inteiros	Potências e raízes	Números reais
Capítulo 2	Operações com números naturais	Números racionais	Construções geométricas e lugares geométricos	Operações com números reais
Capítulo 3	Estudando figuras geométricas	Operações com números racionais	Estatística e probabilidade	Grandezas proporcionais
Capítulo 4	Divisibilidade	Ângulos	Cálculo algébrico	Proporcionalidade em Geometria
Capítulo 5	Um pouco de Álgebra	Equações	Polinômios e frações algébricas	Semelhança
Capítulo 6	Um pouco de Geometria plana	Inequações	Produtos notáveis e fatoração	Um pouco mais sobre Estatística
Capítulo 7	Números racionais na forma de fração	Sistemas de equações	Estudo dos triângulos	Equações do 2º grau
Capítulo 8	Operações com números racionais na forma de fração	Simetria e ângulos	A Geometria demonstrativa	Triângulo retângulo
Capítulo 9	Números racionais na forma decimal e operações	Razões, proporções e porcentagem	Estudo dos quadriláteros	Razões trigonométricas nos triângulos retângulos
Capítulo 10	Polígonos e poliedros	Estudo dos polígonos	Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas	Estudo das funções
Capítulo 11	Comprimentos e áreas	Sobre áreas e volumes	Área de regiões poligonais	Circunferência, arcos e relações métricas
Capítulo 12	Outras unidades de medida	Estudo da circunferência e do círculo	Geometria e grandezas	Polígonos regulares e áreas

ORIENTAÇÕES ESPECÍFICAS

O livro do 8º ano é composto de doze capítulos em que se desenvolvem as cinco Unidades Temáticas propostas pela BNCC: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística, intercaladas e, sempre que possível, integradas, exploradas no corpo do texto explicativo e nas atividades.

A seguir, apresentamos sugestões de cronogramas para trabalhar com esses conteúdos em bimestre, trimestre e semestre com base nas organizações dos capítulos.

			Capítulos	Conteúdos	Habilidades e competências da BNCC
1º semestre	1º trimestre	1º bimestre	Capítulo 1 – Potências e raízes	• Potências com expoentes inteiros; • Potências de base 10; • Notação científica; • Raízes de números racionais; • Potências com expoente fracionário; • Problemas de contagem e o princípio multiplicativo; • Noção de juro simples; • Sequências numéricas.	Habilidades: (EF08MA01) (EF08MA02) (EF08MA03) (EF08MA04) (EF08MA09) (EF08MA11) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **5**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **4**, **5** e **8**
			Capítulo 2 – Construções geométricas e lugares geométricos	• Construções geométricas: segmentos congruentes, retas paralelas, retas perpendiculares, bissetrizes, ângulos; • Lugares geométricos: circunferência, mediatriz de um segmento e bissetriz de um ângulo; • Gráficos de setores.	Habilidades: (EF08MA15) (EF08MA17) (EF08MA23) (EF08MA27) Competências gerais: **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **5**, **6** e **8**
			Capítulo 3 – Estatística e probabilidade	• Pesquisas estatísticas: coleta, organização e apresentação de resultados; • Gráficos de barras, gráficos de colunas, gráficos de setores, gráficos de linha, pictogramas, cartogramas e infográficos; • Frequência absoluta e frequência relativa; • Medidas estatísticas de tendência central: moda, média aritmética e mediana; • Noções sobre pesquisas amostrais; • Estimativas; • Noções de probabilidade: espaço amostral, evento e probabilidade como medida.	Habilidades: (EF08MA04) (EF08MA22) (EF08MA23) (EF08MA24) (EF08MA25) (EF08MA26) (EF08MA27) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **7**, **8**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **4**, **6**, **7** e **8**
		2º bimestre	Capítulo 4 – Cálculo algébrico	• Incógnita e variável; • Expressões algébricas; • Monômios; • Fração geratriz de uma dízima periódica; • Operações com monômios.	Habilidades: (EF08MA05) (EF08MA06) (EF08MA11) Competências gerais: **1**, **2**, **8**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **5**, **6** e **8**

			Capítulos	Conteúdos	Habilidades e competências da BNCC
1º semestre	2º trimestre	2º bimestre	Capítulo 5 – Polinômios e frações algébricas	• Polinômios; • Operações com polinômios; • Frações algébricas; • Interpolação e extrapolação gráfica: gráficos de colunas duplas e gráficos de linhas duplas.	Habilidades: (EF08MA06) (EF08MA19) (EF08MA23) Competências gerais: **2**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **5** e **8**
1º semestre	2º trimestre	2º bimestre	Capítulo 6 – Produtos notáveis e fatoração	• Produtos notáveis: quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos e cubo da soma e da diferença de dois termos; • Fatoração de polinômios; • Aplicação de produtos notáveis e de fatoração para cálculo de valores numéricos; • Simplificação de frações algébricas; • Resolução de equações envolvendo frações algébricas; • Sequências numéricas recursivas e não recursivas; • Construção de gráfico de barras.	Habilidades: (EF08MA06) (EF08MA10) (EF08MA11) (EF08MA19) (EF08MA23) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **3**, **1**, **3**, **4**, **5** e **8**
2º semestre	2º trimestre	3º bimestre	Capítulo 7 – Estudo dos triângulos	• Cevianas de um triângulo: mediana, bissetriz e altura; • Congruência de triângulos; • Estudo dos casos de congruência de triângulos; • Construção de um hexágono regular com descrição de procedimentos por escrito.	Habilidades: (EF08MA14) (EF08MA16) (EF08MA17) (EF08MA18) Competências gerais: **2**, **3**, **4**, **7**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **5** e **8**
2º semestre	3º trimestre	3º bimestre	Capítulo 8 – A Geometria demonstrativa	• Noções sobre Geometria demonstrativa: noções primitivas, postulados e teoremas; • Utilização de congruência de triângulos para demonstrações geométricas; • Propriedades do triângulo isósceles; • Propriedades de triângulos; • Aplicação dos conceitos de mediatriz e de bissetriz na resolução de problemas.	Habilidades: (EF08MA14) (EF08MA17) Competências gerais: **1**, **2**, **3**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **5** e **8**
2º semestre	3º trimestre	3º bimestre	Capítulo 9 – Estudo dos quadriláteros	• Elementos dos quadriláteros; • Paralelogramos e suas propriedades; • Utilização de congruência de triângulos para demonstrações geométricas relativas a quadriláteros; • Trapézios; • Propriedade dos trapézios isósceles; • Propriedade da base média do triângulo e do trapézio; • Construção de quadriláteros com instrumentos de desenho geométrico.	Habilidades: (EF08MA12) (EF08MA13) (EF08MA14) (EF08MA15) (EF08MA17) (EF08MA19) Competências gerais: **2**, **3**, **6**, **8**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **5**, **6**, **7** e **8**

			Capítulos	Conteúdos	Habilidades e competências da BNCC
2º semestre	4º trimestre	4º bimestre	Capítulo 10 – Sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas	• Métodos de resolução de sistemas de equações do 1º grau; • Grandezas proporcionais; • Representação gráfica de equações do 1º grau; • Classificação de um sistema de equações; • Solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau • Composição de um gráfico de colunas a partir de outros gráficos.	Habilidades: (EF08MA06) (EF08MA07) (EF08MA08) (EF08MA09) (EF08MA12) (EF08MA13) (EF08MA23) (EF08MA26) (EF08MA27) Competências gerais: **2**, **4**, **5**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **5**, **6** e **8**
			Capítulo 11 – Área de regiões poligonais	• Área de paralelogramos: paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados; • Área de triângulos; • Área de trapézios; • Construção de um losango com instrumentos de desenho geométrico; • Cálculo de área por decomposição em triângulos; • Interpretação e construção de pictogramas.	Habilidades: (EF08MA09) (EF08MA15) (EF08MA19) (EF08MA23) Competências gerais: **2**, **4**, **9** e **10** Competências específicas: **2**, **3**, **4**, **6** e **8**
			Capítulo 12 – Geometria e grandezas	• Polígonos regulares inscritos em uma circunferência; • Polígonos regulares circunscritos em uma circunferência; • Propriedades e elementos de polígonos regulares; • Área do círculo; • Volume de cilindros retos; • Volume de prismas retos; • Reconhecimento da relação entre um litro e um decímetro cúbico; • Resolução de problemas envolvendo medidas de volume e de capacidade.	Habilidades: (EF08MA15) (EF08MA16) (EF08MA19) (EF08MA20) (EF08MA21) Competências gerais: **1**, **2**, **4**, **7**, **9** e **10** Competências específicas: **1**, **2**, **3**, **6** e **8**

Considerações iniciais

Cada capítulo aborda objetos de conhecimento, entendidos como conteúdos, conceitos, processos, com a intenção de desenvolver as habilidades relacionadas a eles. Esses conhecimentos são articulados, retomados e ampliados a fim de proporcionar sua apropriação pelos estudantes, considerando a aprendizagem um processo contínuo e integrado.

Os conteúdos matemáticos são desenvolvidos de modo que as habilidades, as Unidades Temáticas, as competências e outras áreas do conhecimento se articulem e se relacionem, e são tratados na perspectiva das aprendizagens dos anos anteriores e posteriores. Assim, no livro do 8º ano do Ensino Fundamental, levamos em conta os objetivos de aprendizagem para o 7º ano, conforme proposto na BNCC, visando preparar os estudantes para se apropriar dos conhecimentos previstos para o 9º ano.

A seguir, são feitas orientações didáticas sobre cada capítulo e o que se pretende que os estudantes desenvolvam neles.

Capítulo 1 – Potências e raízes

Objetivos do capítulo e justificativas

- Retomar cálculos de potenciação com base racional e expoente natural, ampliando para expoente negativo.
- Reconhecer e expressar valores em notação científica.
- Efetuar cálculo com raízes exatas.
- Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação.
- Conceituar potência com expoente fracionário.
- Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo o princípio multiplicativo.
- Resolver problemas envolvendo cálculo de porcentagens e a ideia de juro.
- Resolver problemas que possam ser representados pela equação polinomial do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- Identificar regularidades em sequências numéricas recursivas.
- Utilizar a área de um quadrado no cálculo de raiz quadrada.

Ao retomar cálculos de potenciação ampliando para potências com expoentes inteiros e, associado a isso, ao possibilitar aos estudantes reconhecer e expressar valores em notação científica em diferentes situações, contribui-se para o desenvolvimento da **competência específica 1** e da **competência geral 1**, pois eles poderão compreender que a Matemática é fruto das necessidades humanas e que contribui para analisar, descrever e solucionar problemas científicos e tecnológicos.

Calcular raízes exatas, associar a potenciação e a radiciação e explorar potências com expoentes fracionários favorece o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e da **competência específica 2**, pois os estudantes poderão exercitar a curiosidade intelectual a fim de estabelecer as relações propostas, elaborar e testar hipóteses para verificar a pertinência de propriedades estudadas e, por isso, argumentar e defender ideias com base em fatos.

Ao resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo ou porcentagens e ideias de juro simples, os estudantes mobilizam e desenvolvem aspectos das **competências específicas 4** e **5**, pois precisam fazer observações sobre aspectos quantitativos e qualitativos de situações contextualizadas e significativas, investigando e organizando as informações a fim de interpretá-las adequadamente. Além disso, eles podem utilizar as ferramentas matemáticas para resolver esses problemas, inclusive por meio de tecnologias digitais, como a proposta de utilização de planilhas eletrônicas para organizar os dados sobre o cálculo de juro, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 5**.

Ainda em relação ao desenvolvimento da **competência específica 1**, os estudantes poderão desenvolvê-la ao explorar situações que possibilitam atribuir significados aos conhecimentos teóricos estudados, como a relação entre equações do tipo $ax^2 = b$ e o cálculo da medida da área de um quadrado, associados ao cálculo da raiz quadrada.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** são favorecidos com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA01) Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.

(EF08MA02) Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação, para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.

(EF08MA03) Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

Neste capítulo, são desenvolvidos objetos de conhecimento da Unidade Temática **Números**. Nos conteúdos e atividades propostos foram consideradas as aprendizagens do 6º ano e do 7º ano relativas à potenciação de números naturais e ao reconhecimento e operações de números inteiros, desenvolvendo-se a habilidade (EF08MA01).

Esse é o momento de ampliação dos conhecimentos sobre potenciação com números naturais para abordar potências com expoente negativo e aprofundar radiciação, na perspectiva de que a continuidade desse processo conduza os estudantes a se apropriar da relação entre potenciação e radiciação com a apresentação da potência de expoente fracionário (EF08MA02). Para isso, são trabalhados conceitos e atividades, além de se desenvolver também a notação científica que utiliza potências de base 10.

Ao ampliar os conhecimentos que os estudantes já têm sobre potenciação e radiciação, espera-se prepará-los para outros tipos de número e para a ampliação dos conjuntos numéricos que serão estudados no 9º ano do Ensino Fundamental (EF09MA03 e EF09MA04).

Ainda na Unidade Temática **Números**, desenvolvem-se atividades envolvendo cálculos com porcentagens e problemas de contagem que tratam do princípio multiplicativo, possibilitando o desenvolvimento das habilidades (EF08MA03) e (EF08MA04).

A articulação com a Unidade Temática **Álgebra** é promovida ao apresentar expressões algébricas para o cálculo de juro, ao buscar regularidades em sequência que envolvem potências e ao resolver equações do tipo $ax^2 = b$ com o uso de potências e raízes, mobilizando aspectos das habilidades (EF08MA09) e (EF08MA11).

A articulação com a Unidade Temática **Grandezas e medidas** aparece pelo uso do conceito de área associada à noção de raiz quadrada. A conexão com **Probabilidade e estatística** se dá em atividade que explora a interpretação de gráfico de colunas, retomando conhecimentos construídos em anos anteriores.

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

a) Envolvem potências de 10 os seguintes dados: massa do sol = $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg; o número de vezes que esse valor corresponde à massa da terra = $333 \cdot 10^3$; temperatura do núcleo = $1{,}5 \cdot 10^7$ °C.

b) É maior: se observamos que $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$, o que o texto nos diz é que ela é 333 mil vezes maior.

c) Em 2012, o peso médio da humanidade era de 62 kg. Para comparar, os estudantes devem dividir a massa de H convertido em He, que é $6 \cdot 10^{11}$ kg, por essa medida de massa média, obtendo:

$6 \cdot 10^{11} : 62 = 6 \cdot 10^{11} : 6{,}2 \cdot 10 \simeq 0{,}97 \cdot 10^{11-1} \simeq 1 \cdot 10^{10} = 10^{10}$

O importante é observar que, por estarmos considerando quantidades muito grandes, 0,97 pode ser aproximado por 1 sem prejuízo.

d) Sim, pois podem afetar sistemas eletrônicos e de comunicação. Professores podem mencionar a tempestade solar de 2003 que deixou a Suécia sem energia por uma hora.

Exercícios propostos

1. O número total de apartamentos pode ser calculado multiplicando-se o número de apartamentos por andar (6) pelo número de andares dos prédios (6) e pelo número de prédios (6), ou seja, $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$.

2. a) Falsa. Pelas propriedades da potenciação, $(4^5)^2 = 4^{5 \cdot 2} = 4^{10}$, enquanto 4^{5^2} não pode ser simplificado além de $4^{5^2} = 4^{25}$.
Se julgar conveniente, refaça na lousa o exemplo apresentado no quadro *Observações* que antecede os exercícios, $[(a^3)^2 \neq a^{3^2}]$.

2. b) Verdadeira. Pelas propriedades da potenciação: $(4^5)^2 = 4^{5 \cdot 2} = 4^{2 \cdot 5} = (4^2)^5$.

2. c) Verdadeira. De acordo com a propriedade da potenciação $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, considerando $a = 2$, $b = 3$ e $m = 2$.

2. d) Falsa. $(2 + 3)^2 = (5)^2 = 25$ e $2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$

2. e) Verdadeira. De acordo com a propriedade da potenciação $(a : b)^m = a^m : b^m$ (com $b \neq 0$), considerando $a = 8$, $b = 4$ e $m = 3$.

2. f) Falsa. $(8 - 4)^3 = 4^3 = 64$ e $8^3 - 4^3 = 512 - 64 = 448$

3. a) Pela propriedade da potenciação $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$:
$(2^4 \cdot 2^6) : (2^5 \cdot 2^3) = (2^{4+6}) : (2^{5+3}) = 2^{10} : 2^8$
Pela propriedade da potenciação $a^m : a^n = a^{m-n}$, assim:
$2^{10} : 2^8 = 2^{10-8} = 2^2$

3. b) Pelas propriedades da potenciação:
$(x^4 \cdot x^2 \cdot x^3)^2 : (x^4)^5 = (x^{4+2+3})^2 : x^{4 \cdot 5} =$
$= (x^9)^2 : x^{20} = x^{9 \cdot 2} : x^{20} = x^{18} : x^{20} = x^{18-20} = x^{-2}$

3. c) $\dfrac{2^{5x-1} \cdot 2^{x+2}}{2^{3x-2}} = \dfrac{2^{(5x-1)+(x+2)}}{2^{3x-2}} = \dfrac{2^{6x+1}}{2^{3x-2}} =$
$= 2^{(6x+1)} : 2^{(3x-2)} = = 2^{(6x+1)-(3x-2)} = 2^{(3x+3)}$

3. d) $\dfrac{5^2 \cdot 5^3}{5^1 \cdot 5^0} = (5^2 \cdot 5^3) : (5^1 \cdot 5^0)$
É importante lembrar que $5^0 = 1$. Assim:
$(5^2 \cdot 5^3) : (5^1 \cdot 5^0) = (5^{2+3}) : (5^1 \cdot 1) = 5^5 : 5^1 = 5^{5-1} = 5^4$

5. a) Seguindo o raciocínio de Marina:
- a 5ª linha terá $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ macacos;
- a 6ª linha terá $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ macacos;
- a 7ª linha terá $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ macacos;
- a 8ª linha terá $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ macacos;
- a 9ª linha terá $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ macacos;
- a 10ª linha terá 512 macacos, pois
$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$.

5. b) Lembrando que $a^1 = a$ e $a^0 = 1$ ($a \neq 0$), sendo a um número racional, o número de macacos da 1ª linha é $1 = 2^0$, e o da segunda linha é $2 = 2^1$.

5. c) O seguinte padrão pode ser observado.
- Número de macacos na 1ª linha: 20 = 21 – 1,
- Número de macacos na 2ª linha: 21 = 22 – 1,
- Número de macacos na 3ª linha: $2 \cdot 2 = 2^2 = 2^{3-1}$,

e, assim por diante. Logo, o número de macacos na linha n é dado por 2^{n-1}. Podemos usar o item **a** para reforçar esse raciocínio.

7. a) Como o denominador da fração pode ser escrito como uma potência de 10, $100 = 10^2$, e o numerador é 1, da definição de potência com expoente negativo, temos:
$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

7. b) Analogamente, como $10\,000 = 10^4$, temos:
$$\frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

7. c) Como $1\,000\,000 = 10^6$, temos:
$$\frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$$

7. d) O número 0,1 pode ser representado na forma de fração, como nos itens anteriores.
$$0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$$

7. e) Analogamente: $0{,}01 = \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2} = 10^{-2}$

7. f) $0{,}001 = \dfrac{1}{1000} = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$

11. $m = \left(\dfrac{4}{5} - \dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{3}{10}\right)^{-3} = \left(\dfrac{10}{3}\right)^{3}$

$n = \left(3 + \dfrac{1}{3}\right)^{2} = \left(\dfrac{10}{3}\right)^{2}$

Assim: $m : n = \left(\dfrac{10}{3}\right)^{3} : \left(\dfrac{10}{3}\right)^{2} = \left(\dfrac{10}{3}\right)^{3-2} = \dfrac{10}{3}$

12. a) $2^{-8} = (2^{-1})^{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{8}$

Com uma calculadora, determinamos que $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$ ($1 : 2 = 0{,}5$). Portanto, $2^{-8} = 0{,}5^{8}$.

Multiplicando 0,5 por si mesmo 8 vezes na calculadora, obtemos 0,00390625.

12. b) $4^{-5} = (4^{-1})^{5} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{5}$

Com uma calculadora, determinamos que $\dfrac{1}{4} = 0{,}25$ ($1 : 4 = 0{,}25$). Portanto, $4^{-5} = 0{,}25^{5}$.

Multiplicando 0,25 por si mesmo 5 vezes na calculadora, obtemos 0,0009765625.

12. c) $0{,}4^{-3} = (0{,}4^{-1})^{3} = \left(\dfrac{1}{0{,}4}\right)^{3}$

Com uma calculadora, determinamos que $\dfrac{1}{0{,}4} = 2{,}5$ ($1 : 0{,}4 = 2{,}5$). Portanto, $0{,}4^{-3} = 2{,}5^{3}$.

Multiplicando 2,5 por si mesmo 3 vezes na calculadora, obtemos 15,625.

12. d) $0{,}2^{-6} = (0{,}2^{-1})^{6} = \left(\dfrac{1}{0{,}2}\right)^{6}$

Com uma calculadora, determinamos que $\dfrac{1}{0{,}2} = 5$ ($1 : 0{,}2 = 5$). Portanto, $0{,}2^{-6} = 5^{6}$.

Multiplicando 5 por si mesmo 6 vezes na calculadora, obtemos 15 625.

15. a) É preciso decompor 9 em fatores primos:

$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$

15. b) Note que $81 = 9 \cdot 9 = 3^2 \cdot 3^2 = 3^{2+2} = 3^4$. Alternativamente, podemos decompor 81 em fatores primos dividindo-o por 3 sucessivas vezes.

15. c) Como $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$, logo:

$\dfrac{1}{27} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3} =$

$= (3^{-1})^3 = 3^{-1 \cdot 3} = 3^{-3}$

15. d) É preciso decompor 243 em fatores primos.

$243 = 3 \cdot 81 = 3 \cdot 3^4 = 3^5$.

Logo: $\dfrac{1}{243} = \dfrac{1}{3^5} = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} =$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{5} = (3^{-1})^5 = 3^{-1 \cdot 5} = 3^{-5}$

16. a) Primeiro, vamos escrever 4 e 8 como potências de base 2. Para isso, fazemos a decomposição em fatores primos:

$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ e $8 = 2 \cdot 4 = 2^3$. Assim:

$\dfrac{4^2 \cdot 8^3}{2^{10}} = \dfrac{(2^2)^2 \cdot (2^3)^3}{2^{10}} = \dfrac{2^{2 \cdot 2} \cdot 2^{3 \cdot 3}}{2^{10}} = \dfrac{2^4 \cdot 2^9}{2^{10}} =$

$= \dfrac{2^{4+9}}{2^{10}} = \dfrac{2^{13}}{2^{10}} = 2^{13-10} = 2^3$

16. b) Primeiro, vamos escrever 9, 27 e 81 como potências de base 3. Para isso, fazemos a decomposição em fatores primos:

$9 = 3 \cdot 3 = 3^2$, $27 = 3 \cdot 9 = 3^3$ e $81 = 9 \cdot 9 = 3^4$

Assim: $\dfrac{9^3 \cdot 27^2}{81} = \dfrac{(3^2)^3 \cdot (3^3)^2}{3^4} = \dfrac{3^{2 \cdot 3} \cdot 3^{3 \cdot 2}}{3^4} =$

$= \dfrac{3^6 \cdot 3^6}{3^4} = \dfrac{3^{6+6}}{3^4} = \dfrac{3^{12}}{3^4} = 3^{12-4} = 3^8$

17. a) Para preencher a n-ésima linha da terceira coluna, é preciso multiplicar o número 10 por ele mesmo n vezes.

Expoente inteiro positivo (n)	Potência de base 10 (10^n)	Valor da potência (resultado)	Número de zeros do resultado
1	10^1	10	1
2	10^2	100	2
3	10^3	1 000	3
4	10^4	10 000	4
5	10^5	100 000	5

17. b) $10n$ é o número consistindo em 1 seguido de n zeros.

17. c) Para preencher a terceira coluna, é preciso multiplicar $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$ por ele mesmo $|n|$ vezes.

Expoente inteiro negativo (n)	Potência de base 10 (10^n)	Valor da potência (resultado)	Número de casas decimais do resultado
−1	10^{-1}	0,1	1
−2	10^{-2}	0,01	2
−3	10^{-3}	0,001	3
−4	10^{-4}	0,0001	4
−5	10^{-5}	0,00001	5

17. d) Para n inteiro e negativo, o valor da potência indicada por 10^n é um número formado pelo algarismo 1 antecedido por $|n|$ zeros, com uma vírgula entre o primeiro e o segundo algarismo, ou seja, é um número com $|n|$ casas decimais.

18. Considerando que 10^n é o número formado pelo algarismo 1 seguido de n zeros, para o número 1 000 000 000 000, com 12 zeros, $n = 12$; portanto, a medida da distância média entre o planeta Saturno e o Sol é da ordem de 10^{12} m.

19. a) $10^{-1} = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

19. b) $10^{-2} = (10^{-1})^2 = \left(\dfrac{1}{10}\right)^2 = (0{,}1)^2 = 0{,}01$

19. c) $10^{-3} = (10^{-1})^3 = \left(\dfrac{1}{10}\right)^3 = (0{,}1)^3 = 0{,}001$

19. d) $10^{-5} = (10^{-1})^5 = \left(\dfrac{1}{10}\right)^5 = (0{,}1)^5 = 0{,}00001$

19. e) $10^{-6} = (10^{-1})^6 = \left(\dfrac{1}{10}\right)^6 = (0{,}1)^6 = 0{,}000001$

20. Observando que 10^{-n} é um número com n casas decimais, com o algarismo 1 na última casa decimal e zero nas demais, para o número 0,0001, com 4 casas decimais, n = 4; portanto, a medida do diâmetro de um fio de cabelo fino é, aproximadamente, 10^{-4} m.

21. Espera-se que os estudantes construam um quadro como a seguir.

Prefixos das unidades de medida no SI		
Nome	**Símbolo**	**Fator de multiplicação da unidade**
yotta	Y	10^{24} = 10 000 000 000 000 000 000 000 000
zetta	Z	10^{21} = 10 000 000 000 000 000 000 000
exa	E	10^{18} = 10 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15} = 10 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12} = 10 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 10 000 000 000
mega	M	10^{6} = 10 000 000
quilo	k	10^{3} = 10 000
hecto	h	10^{2} = 1 000
deca	da	10^{1} = 100
nenhum	nenhum	10^{0} = 1
deci	d	10^{-1} = 0,1
centi	c	10^{-2} = 0,01
mili	m	10^{-3} = 0,001
micro	μ	10^{-6} = 0,000001
nano	n	10^{-9} = 0,0000000001
pico	p	10^{-12} = 0,0000000000001
femto	f	10^{-15} = 0,0000000000000001
atto	a	10^{-18} = 0,0000000000000000001
zepto	z	10^{-21} = 0,0000000000000000000001
yocto	y	10^{-24} = 0,0000000000000000000000001

Dados obtidos em: Sistema Internacional de Unidades – SI, tradução luso-brasileira da 9ª edição do BIPM, 2021. Disponível em: https://www.gov.br/inmetro/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/documentos-tecnicos-em-metrologia/si_versao_final.pdf/view. Acesso em: 27 jul. 2022.

22. a) $\dfrac{10^3 \cdot 10^2}{10^7} = \dfrac{10^{3+2}}{10^7} = \dfrac{10^5}{10^7} = 10^{5-7} = 10^{-2} = 0{,}01$

22. b) $\dfrac{10^4 \cdot 10^2}{10^9} = \dfrac{10^{4+2}}{10^9} = \dfrac{10^6}{10^9} = 10^{6-9} = 10^{-3} = 0{,}001$

22. c) $\dfrac{10^{-16}}{10^{-4} \cdot 10^{-8}} = \dfrac{10^{-16}}{10^{-4+(-8)}} = \dfrac{10^{-16}}{10^{-4-8}} = \dfrac{10^{-16}}{10^{-12}} =$

$10^{-16-(-12)} = 10^{-16+12} = 10^{-4} = 0{,}0001$

22. d) $\dfrac{10^{-4} \cdot 10^{-8}}{10^{-9}} = \dfrac{10^{-4+(-8)}}{10^{-9}} = \dfrac{10^{-4-8}}{10^{-9}} = \dfrac{10^{-12}}{10^{-9}} =$

$= 10^{-12-(-9)} = 10^{-12+9} = 10^{-3} = 0{,}001$

23. a) Deslocando a vírgula 4 casas para a direita, temos:
$3{,}6 \cdot 10^4 = 36\,000$

23. b) Deslocando a vírgula 2 casas para a direita, temos:
$0{,}025 \cdot 10^2 = 2{,}5$

23. c) Deslocando a vírgula 2 casas para a esquerda (pois o expoente é um número inteiro negativo), temos:
$0{,}4 \cdot 10^{-2} = 0{,}004$

23. d) Deslocando a vírgula 3 casas para a esquerda (pois o expoente é um número inteiro negativo), temos:
$3\,576 \cdot 10^{-3} = 3{,}576$

24. Para simplificar o cálculo, vamos escrever os números na forma de potência de base 10. Deslocando a vírgula para a direita cinco casas em 0,000025, obtemos: $0{,}000025 = 2{,}5 : 10^5 = 2{,}5 \cdot 10^{-5}$. Da mesma maneira, podemos concluir que $0{,}000000002 = 2 \cdot 10^{-9}$ (pois é preciso avançar 9 casas para obter 2). Logo:
$0{,}000025 \cdot 0{,}000000002 = (2{,}5 \cdot 10^{-5}) \cdot (2 \cdot 10^{-9}) =$
$= 2{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-9} = 5 \cdot 10^{-5-9} = 5 \cdot 10^{-14}$
Alternativa **b**.

25. Para fazer a adição, as potências de base 10 devem ter os mesmos expoentes. Então, considerando que $10^{-23} = 10^{-21-2} = 10^{-21} \cdot 10^{-2}$, temos:
$5{,}24 \cdot 10^{-23} = 5{,}24 \cdot 10^{-21} \cdot 10^{-2} = 0{,}0524 \cdot 10^{-21}$. Assim:
$A = 5{,}24 \cdot 10^{-23} = 8{,}36 \cdot 10^{-21}$
$A = 0{,}0524 \cdot 10^{-21} = 8{,}36 \cdot 10^{-21}$
$A = (8{,}36 - 0{,}0524) \cdot 10^{-21}$
$A = 8{,}4124 \cdot 10^{-21}$
Alternativa **c**.

26. a) Para obter 567 540 a partir de 56,754, é preciso deslocar a vírgula 4 casas para a direita, o que equivale a multiplicar por $a = 10^4$.

26. b) Para obter 30 a partir de 0,003, é preciso deslocar a vírgula 4 casas para a direita, o que equivale a multiplicar por $a = 10^4$.

26. c) Para obter 0,000023 a partir de 23, é preciso deslocar a vírgula 6 casas para a esquerda, o que equivale a multiplicar por $a = 10^{-6}$.

26. d) Para obter 0,00045 a partir de 4,5, é preciso deslocar a vírgula 4 casas para a esquerda, o que equivale a multiplicar por $a = 10^{-4}$.

27. a) O prefixo "centi" equivale a um centésimo, ou $0{,}01 = 10^{-2}$. Logo, $1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$.

27. b) O prefixo "quilo" equivale a mil, ou $1\,000 = 10^3$. Logo, $1\ \text{km} = 10^3\ \text{m}$; portanto, $100\ \text{km} = (100 \cdot 10^3)\ \text{m} = (10^2 \cdot 10^3)\ \text{m} = 10^{3+2}\ \text{m} = 10^5\ \text{m}$.

27. c) 1 kg equivale a 1 000 g. Ou seja, $1\ \text{kg} = 1\,000\ \text{g}$; portanto, $1\ \text{g} = (1 : 1\,000)\ \text{kg} = 10^{-3}\ \text{kg}$.
Logo: $10\ \text{g} = 10^1 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} = 10^{1+(-3)} = 10^{-2}\ \text{kg}$

27. d) Uma tonelada equivale a $1\,000\ \text{kg} = 10^3\ \text{kg}$.

27. e) Como $1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$, temos:
$1\ \text{cm}^2 = (1\ \text{cm}) \cdot (1\ \text{cm}) = (10^{-2}\ \text{m}) \cdot (10^{-2}\ \text{m}) = 10^{-4}\ \text{m}^2$
Portanto, $10\ \text{cm}^2 = (10 \cdot 10^{-4})\ \text{m}^2 = 10^{1-4}\ \text{m}^2 = 10^{-3}\ \text{m}^2$.

27. f) O prefixo "deci" equivale a um décimo.
Logo, $1\ \text{m} = 10\ \text{dm}$.
Como $1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$, temos que $1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m} = 10^{-2} \cdot (10\ \text{dm}) = (10^{-2} \cdot 10)\ \text{dm} = 10^{-2+1}\ \text{dm} = 10^{-1}\ \text{dm}$.
Portanto: $1\ \text{cm}^3 = (1\ \text{cm})^3 = (10^{-1}\ \text{dm})^3 = 10^{-3}\ \text{dm}^3$

28. Como $6{,}7 \cdot 10^9\ \text{m}^3$ corresponde a 37% da capacidade procurada, c, então, fazendo uma proporção:

$$\frac{37}{6{,}7 \cdot 10^9} = \frac{100}{c}$$

$$c = \frac{100 \cdot 6{,}7 \cdot 10^9}{37} = \frac{10^2 \cdot 6{,}7 \cdot 10 \cdot 10^8}{37} =$$

$$c = \frac{67}{37} \cdot 10^{10} = 1{,}\overline{810} \cdot 10^{2+8} \simeq 1{,}811 \cdot 10^{10}$$

Logo, a capacidade total é de aproximadamente $18\,110\,000\,000\ \text{m}^3$.

29. Precisamos determinar quanto de água o rio Amazonas lança no oceano em unidades compatíveis com a do volume do açude (metro cúbico). Por definição, 1 L equivale a $1\ \text{dm}^3$.
Como $1\ \text{dm} = 1 : 10\ \text{m} = 10^{-1}\ \text{m}$, temos que $1\ \text{L} = 1\ \text{dm}^3 = (1\ \text{dm})^3 = (1 \cdot 10^{-1}\ \text{m})^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$. Como um milhão é $1\,000\,000 = 10^6$, conclui-se que o rio Amazonas despeja $5 \cdot 10^4\ \text{m}^3$ por segundo no oceano, pois 50 milhões de litros correspondem a:
$50 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 = 5 \cdot 10 \cdot 10^6 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3 =$
$= 5 \cdot 10^{1+6-3}\ \text{m}^3 = 5 \cdot 10^4\ \text{m}^3$
Fazendo uma proporção simples com a capacidade do açude Orós, determinamos o tempo t, em segundo, que o rio Amazonas leva para lançar o volume de água correspondente no oceano.

$$t = \frac{2 \cdot 10^9}{5 \cdot 10^4} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10^9}{10^4} = 0{,}4 \cdot 10^5 = 40\,000$$

Ou seja, são necessários 40 000 segundos para que o rio Amazonas lance no oceano Atlântico um volume de água igual à capacidade do açude Orós. Como 1 hora tem 3 600 segundos, isso equivale a $11{,}\overline{1}$ horas.

$$\frac{40\,000}{3\,600} = \frac{400 \cdot 10^2}{36 \cdot 10^2} = \frac{400}{36} \cdot \frac{10^2}{10^2} = 11{,}11111\ldots$$

Ou seja, o tempo é maior do que 10 horas e menor do que 20 horas.
Alternativa **d**.

30. a) Para deslocar a vírgula uma casa para a esquerda, precisamos multiplicar por 10^1 e por 10^{-1}, obtendo:
$12{,}6 = 12{,}6 \cdot 10^{-1} \cdot 10^1 = 1{,}26 \cdot 10$
Como um milhão é $1\,000\,000 = 10^6$, 12,6 milhões correspondem a:
$12{,}6 \cdot 10^6 = 1{,}26 \cdot 10 \cdot 10^6 = 1{,}26 \cdot 10^{6+1} = 1{,}26 \cdot 10^7$

30. b) Para deslocar a vírgula duas casas para a esquerda, precisamos multiplicar por 10^2 e por 10^{-2}, obtendo:
$361 = 361 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 3{,}61 \cdot 10^2$
Logo: $361 \cdot 10^6 = 3{,}61 \cdot 10^2 \cdot 10^6 = 3{,}61 \cdot 10^{6+2} = 3{,}61 \cdot 10^8$

30. c) Para deslocar a vírgula uma casa para a esquerda, precisamos multiplicar por 10^1 e por 10^{-1}, obtendo:
$15 = 15 \cdot 10^{-1} \cdot 10^1 = 1{,}5 \cdot 10$
Como um bilhão consiste em mil milhões, temos:
$1\,000 \cdot 1\,000\,000 = 10^3 \cdot 10^6 = 10^9$
Assim: $1{,}5 \cdot 10 \cdot 10^9 = 1{,}5 \cdot 10^{1+9} = 1{,}5 \cdot 10^{10}$

30. d) Para deslocar a vírgula duas casas para a esquerda, precisamos multiplicar por 10^2 e por 10^{-2}, obtendo:
$458{,}6 = 458{,}6 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 4{,}586 \cdot 10^2$
Logo: $458{,}6 \cdot 10^{-5} = 4{,}586 \cdot 10^2 \cdot 10^{-5} = 4{,}586 \cdot 10^{2-5} = 4{,}586 \cdot 10^{-3}$

30. e) Para mudar a vírgula três casas para a esquerda, precisamos multiplicar por 10^3 e por 10^{-3}, obtendo:
$3\,576 = 3\,576 \cdot 10^{-3} \cdot 10^3 = 3{,}576 \cdot 10^3$
Logo: $3\,576 \cdot 10^{-3} = 3{,}576 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 3{,}576 \cdot 10^{3-3} = 3{,}576 \cdot 10^0 = 3{,}576 \cdot 1 = 3{,}576$

30. f) Contamos 12 zeros depois da vírgula, seguidos do algarismo 1.
Logo: $0{,}0000000000001 = 1 \cdot 10^{-13}$

31. A configuração de menor distância possível é aquela na qual os dois planetas (A e B) estão alinhados com a estrela (E) na ordem B, A, E ou E, A, B. Assim, distância entre os planetas é dada por:
$EB - EA = 2{,}3 \cdot 10^8 - 15 \cdot 10^7 = (23 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^8 - 15 \cdot 10^7 = 23 \cdot 10^7 - 15 \cdot 10^7 = (23 - 15) \cdot 10^7 = 8 \cdot 10^7$
Portanto, a medida da distância mínima entre A e B é $8 \cdot 10^7$ km.
Já a configuração de maior distância possível é aquela na qual os dois planetas (A e B) estão alinhados com a estrela (E) na ordem B, E, A ou A, E, B. Nesse caso, a distância entre os planetas é dada por:
$EB + BA = 2{,}3 \cdot 10^8 + 15 \cdot 10^7 = 2{,}3 \cdot 10^8 + (1{,}5 \cdot 10) \cdot 10^7 = 2{,}3 \cdot 10^8 + 1{,}5 \cdot 10^8 = (2{,}3 + 1{,}5) \cdot 10^8 = 3{,}8 \cdot 10^8$
Portanto, a medida da distância máxima entre A e B é $3{,}8 \cdot 10^8$ km.

32. a) Uma tonelada (1 t) equivale a:
$1\,000\ \text{kg} = 10^3\ \text{kg}$
Assim:
$2 \cdot 10^{30}\ \text{kg} = 2 \cdot 10^{27+3}\ \text{kg} = 2 \cdot 10^{27} \cdot 10^3\ \text{kg} = 2 \cdot 10^{27}\ \text{t}$

32. b) Montando uma proporção simples, determinamos a massa de medida m, em quilograma, que é convertida em He por ano no núcleo do Sol. Considerando que a cada 1 segundo são convertidos cerca de $6 \cdot 10^{11}$ kg de H em He e que 1 ano tem aproximadamente $3 \cdot 10^7$ segundos.

$$\frac{m}{6 \cdot 10^{11}} = \frac{3 \cdot 10^7}{1}$$

$m = (6 \cdot 10^{11}) \cdot (3 \cdot 10^7) = 3 \cdot 6 \cdot 10^{11+7}$

$m = 18 \cdot 10^{18} = 1{,}8 \cdot 10^{19}$

Considerando que 1 tonelada equivale a 10^3 quilogramas, temos:

$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$ ou $1 \text{ kg} = 10^{-3} \text{ t}$

$1{,}8 \cdot 10^{19} \text{ kg} = 1{,}8 \cdot 10^{19} \cdot 10^{-3} \text{ t} = 1{,}8 \cdot 10^{19-3} \text{ t} = 1{,}8 \cdot 10^{16} \text{ t}$

Portanto, $1{,}8 \cdot 10^{16}$ toneladas de H são convertidas em He por ano no núcleo do Sol.

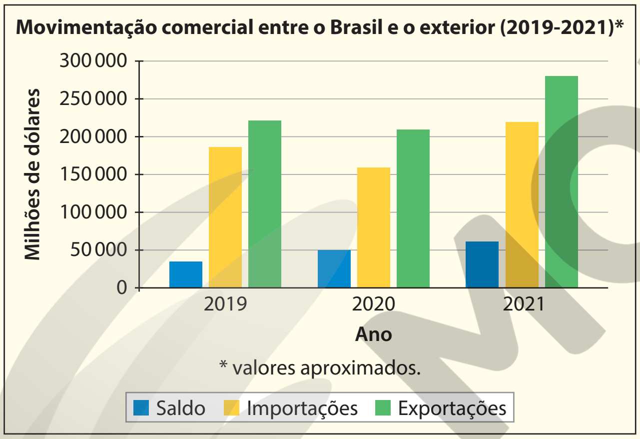
33. Considerando que o prefixo mili corresponde a um fator de multiplicação de 10^{-3}, significa que 1 mililitro corresponde a 10^{-3} litro, ou seja, 1 litro corresponde a 10^3 mililitros.

Portanto, 5,5 litros equivalem a $5{,}5 \cdot 10^3$ mililitros.

Se 1 mililitro contém $5 \cdot 10^3$ glóbulos vermelhos, $5{,}5 \cdot 10^3$ mililitros contêm $2{,}75 \cdot 10^7$ glóbulos vermelhos.

$5{,}5 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^3 = 5{,}5 \cdot 5 \cdot 10^{3+3} = 27{,}5 \cdot 10^6 = 2{,}75 \cdot 10^7$

34. a)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: BRASIL. Resultados do comércio exterior brasileiro: dados consolidados. Disponível em: https://balanca.economia.gov.br/balanca/publicacoes_dados_consolidados/pg.html. Acesso em: 10 mar. 2022.

É importante observar que os dados estão em milhões de dólares. Logo, cada valor precisa ser multiplicado por 10^6 ($1\,000\,000 = 10^6$) antes de ser escrito em notação científica.

Ano	Saldo (dólares)	Importações (dólares)	Exportações (dólares)
2019	$3{,}5 \cdot 10^{10}$	$1{,}86 \cdot 10^{11}$	$2{,}21 \cdot 10^{11}$
2020	$5{,}0 \cdot 10^{10}$	$1{,}59 \cdot 10^{11}$	$2{,}09 \cdot 10^{11}$
2021	$6{,}1 \cdot 10^{10}$	$2{,}19 \cdot 10^{11}$	$2{,}80 \cdot 10^{11}$

34. b) Para 2019:

$2{,}21 \cdot 10^{11} - 1{,}86 \cdot 10^{11} = 0{,}35 \cdot 10^{11} =$

$= 3{,}5 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{11} = 3{,}5 \cdot 10^{10}$

Para 2020:

$2{,}09 \cdot 10^{11} - 1{,}59 \cdot 10^{11} = 0{,}5 \cdot 10^{11} =$

$= 5{,}0 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{11} = 5{,}0 \cdot 10^{10}$

Para 2021:

$2{,}80 \cdot 10^{11} - 2{,}19 \cdot 10^{11} = 0{,}61 \cdot 10^{11} =$

$= 6{,}1 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{11} = 6{,}1 \cdot 10^{10}$

34. c) Para calcular a média do saldo, adicionamos os valores dos três anos e dividimos por três:

$$\frac{3{,}5 \cdot 10^{10} + 5{,}0 \cdot 10^{10} + 6{,}1 \cdot 10^{10}}{3} = \frac{14{,}6 \cdot 10^{10}}{3} =$$

$$= \frac{14{,}6}{3} \cdot 10^{10} \simeq 4{,}9 \cdot 10^{10}$$

Analogamente, para a média das importações, temos:

$$\frac{5{,}64 \cdot 10^{11}}{3} = \frac{5{,}64}{3} \cdot 10^{11} = 1{,}88 \cdot 10^{11}$$

Para a média das exportações, temos:

$$\frac{2{,}21 \cdot 10^{11} + 2{,}09 \cdot 10^{11} + 2{,}80 \cdot 10^{11}}{3} = \frac{7{,}1 \cdot 10^{11}}{3} =$$

$$= \frac{7{,}1}{3} \cdot 10^{11} \simeq 2{,}37 \cdot 10^{11}$$

34. d) Para a exportação atingir a média em 2019, faltaram $1{,}60 \cdot 10^{10}$ dólares.

$2{,}21 \cdot 10^{11} - 2{,}37 \cdot 10^{11} = -0{,}16 \cdot 10^{11} =$

$= -1{,}60 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{11} = -1{,}60 \cdot 10^{10}$

Para a exportação atingir a média em 2020, faltaram $2{,}80 \cdot 10^{10}$ dólares.

$2{,}09 \cdot 10^{11} - 2{,}37 \cdot 10^{11} = -0{,}28 \cdot 10^{11} =$

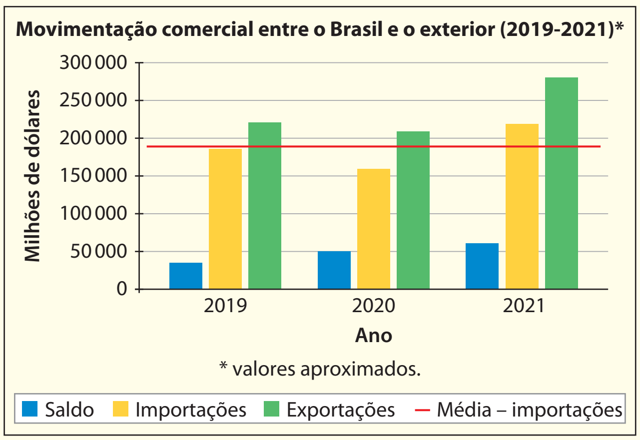
$= -2{,}80 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{11} = -2{,}80 \cdot 10^{10}$

Em 2021, a exportação excedeu a média em $4{,}30 \cdot 10^{10}$ dólares.

$2{,}80 \cdot 10^{11} - 2{,}37 \cdot 10^{11} = 0{,}43 \cdot 10^{11} =$

$= 4{,}30 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{11} = 4{,}30 \cdot 10^{10}$

34. e)



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: BRASIL. Resultados do comércio exterior brasileiro: dados consolidados. Disponível em: https://balanca.economia.gov.br/balanca/publicacoes_dados_consolidados/pg.html. Acesso em: 10 mar. 2022.

Sim. Se o gráfico tiver sido feito em escala no papel, pode-se medir os tamanhos. Analiticamente, pode-se observar que, em 2019, as importações foram quase iguais à média ($1{,}86 \cdot 10^{11} \simeq 1{,}88 \cdot 10^{11}$), enquanto os valores de 2020 e 2021 diferem da média por cerca de $3 \cdot 10^{10}$ para mais e para menos, respectivamente ($0{,}3 \cdot 10^{11} = 3 \cdot 10^{10}$).

35. $\dfrac{9{,}0 \cdot 10^7}{3{,}0 \cdot 10^5} = \dfrac{9}{3} \cdot \dfrac{10^7}{10^5} = 3 \cdot 10^2$

Ou seja, o raio de luz percorre essa distância em 300 s. Como um minuto tem 60 s, são necessários 5 minutos (300 : 60 = 5).

Alternativa **b**.

38. a) Como observado, não existe número negativo cujo quadrado seja negativo. Portanto, a raiz quadrada de –25 não é um número racional.

38. b) $\dfrac{1}{16} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

Portanto, $\sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}$ é um número racional.

38. c) O número $\dfrac{3}{4}$ não é um quadrado perfeito. Portanto, sua raiz quadrada não é um número racional.

38. d) Como observado, não existe número negativo cujo quadrado seja negativo. Portanto, a raiz quadrada de $-\dfrac{1}{9}$ não é um número racional.

38. e) O número $\dfrac{8}{10}$ não é um quadrado perfeito. Portanto, sua raiz quadrada não é racional.

38. f) $\dfrac{25}{9} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2$

Portanto, $\sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3}$ é um número racional.

39. a) Do enunciado, concluímos que $352 \cdot 352 = 123\,904$. Assim:

$-\sqrt{1239{,}04} = -\sqrt{\dfrac{123904}{100}} = -\sqrt{\dfrac{352 \cdot 352}{10 \cdot 10}}$

$= -\dfrac{352}{10} = -35{,}2$

39. b) $\sqrt{12{,}3904} = \sqrt{\dfrac{123904}{10000}} = \sqrt{\dfrac{352 \cdot 352}{100 \cdot 100}} =$

$= \dfrac{352}{100} = 3{,}52$

41. a) Escrevendo $100 = 10 \cdot 10$, vemos que 10 é um número que, elevado ao quadrado, resulta em 100. Porém, $(-10) \cdot (-10) = 100$. Logo, –10 elevado ao quadrado também resulta em 100.

41. b) Convencionou–se que a $\sqrt{a}$ representa a raiz quadrada positiva de a. Assim, $\sqrt{100} = 10$.

42. Um número negativo não pode ser o quadrado de um número racional. Logo, –49 não pode admitir uma raiz quadrada racional.

43. a) Como $441 = 21 \cdot 21 = 21^2$, $\sqrt{441} = 21$; portanto, $-\sqrt{441} = -21$.

43. b) Um número negativo não pode ser o quadrado de um número racional. Logo, –441 não pode admitir uma raiz quadrada racional. Deve-se enfatizar aqui a diferença entre o simétrico da raiz quadrada e a raiz quadrada de um número negativo.

44. a) Falsa, pois $\sqrt{10^2} = \sqrt{100} = 10$, enquanto $\sqrt{-10^2} = \sqrt{-100}$ não é um número racional, pois um número negativo não pode ser o quadrado de um número racional.

44. b) Verdadeira, pois $\sqrt{10^2} = \sqrt{100} = 10$ e $\sqrt{(-10)^2} =$

$= \sqrt{(-10) \cdot (-10)} = \sqrt{100} = 10$.

44. c) Falsa, pois $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{(-7) \cdot (-7)} = \sqrt{49} = 7$, que é diferente de –7.

44. d) Verdadeira, pois $\sqrt{(-7)^2} = \sqrt{(-7) \cdot (-7)} = \sqrt{49} = 7$.

44. e) Falsa, pois $-\sqrt{10^2} = -\sqrt{100} = -10$, enquanto $\sqrt{(-10)^2} = \sqrt{(-10) \cdot (-10)} = \sqrt{100} = 10$.

44. f) Verdadeira, pois $-\sqrt{(-10)^2} = -\sqrt{(-10) \cdot (-10)} =$
$= -\sqrt{100} = -10$.

44. g) Verdadeira, pois $\sqrt[3]{8} = 2$, já que $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$, e, como $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$, temos $\sqrt[3]{-8} = -2$. Portanto, $-\sqrt[3]{-8} = -(-2) = 2$.

44. h) Verdadeira. A raiz enésima de zero é zero, com n natural não nulo. De fato, 0 vezes si mesmo n vezes sempre resulta em zero, qualquer que seja $n \geqslant 2$.

45. a) $900 = 30 \cdot 30 = 30^2$. Portanto, $\sqrt{900} = 30$ e $2 \cdot \sqrt{900} =$
$= 2 \cdot 30 = 60$.

45. b) $2{,}56 = \dfrac{256}{100} = \dfrac{16 \cdot 16}{10 \cdot 10} = \dfrac{16}{10} \cdot \dfrac{16}{10} = \left(\dfrac{16}{10}\right)^2 = (1{,}6)^2$

Portanto, $\sqrt{2{,}56} = 1{,}6$ e $\dfrac{3}{4} \cdot \sqrt{2{,}56} = 0{,}75 \cdot 1{,}6 = 1{,}2$.

45. c) Note que:

$(-1)^5 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) =$

$= [(-1) \cdot (-1)] \cdot [(-1) \cdot (-1)] \cdot (-1) = 1 \cdot 1 \cdot (-1) =$

$= 1 \cdot (-1) = -1$

Logo, $\sqrt[5]{-1} = -1$. Como $\sqrt{0} = 0$, temos:

$\sqrt{0} - \sqrt[5]{-1} = 0 - (-1) = 0 + 1 = 1$

45. d) Começamos pela raiz cúbica:

$$-\frac{8}{27} = \frac{-8}{27} = \frac{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}{3\cdot 3\cdot 3} = \left(\frac{-2}{3}\right)^3$$

Logo, $\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}$. Quanto à raiz quadrada,

$\frac{25}{64} = \frac{5\cdot 5}{8\cdot 8} = \left(\frac{5}{8}\right)^2$. Logo, $\sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$.

Assim, temos:

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{25}{64}} = -\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{-2\cdot 8 - 5\cdot 3}{24} =$$

$$= \frac{-16-15}{24} = \frac{-31}{24} = -\frac{31}{24}$$

46. Se h representa a altura, temos $h = 44{,}1$ m. Assim:

$$t = \sqrt{\frac{h}{4{,}9}} = \sqrt{\frac{44{,}1}{4{,}9}} = \sqrt{9} = 3$$

Portanto, o objeto leva 3 s para atingir o solo.

47. Como $5^2 = 25$, temos $\sqrt{25} = 5$. Logo:

$$\sqrt[3]{18+\sqrt{84-\sqrt{4+\sqrt{25}}}} = \sqrt[3]{18+\sqrt{84-\sqrt{4+5}}} =$$

$$= \sqrt[3]{18+\sqrt{84-\sqrt{9}}}$$

Como $3^2 = 9$, temos $\sqrt{9} = 3$. Logo: $\sqrt[3]{18+\sqrt{84-\sqrt{9}}} =$

$$= \sqrt[3]{18+\sqrt{84-3}} = \sqrt[3]{18+\sqrt{81}}$$

Como $9^2 = 81$, temos $\sqrt{81} = 9$. Logo: $\sqrt[3]{18+\sqrt{81}} =$

$$\sqrt[3]{18+9} = \sqrt[3]{27}$$

Por fim, como $3^3 = 27$, o valor da expressão é $\sqrt[3]{27} = 3$.

48. Fernanda acertou, pois tratou uma radiciação por vez. Daniel errou por cancelar as potências com os radicais antes de simplificar a expressão. Assim, deve-se enfatizar aqui a importância de se trabalhar gradualmente da expressão mais interna para a mais externa, aproveitando para destacar os riscos de simplesmente "cortar" os expoentes das potências e os índices.

49. a) Considerando que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, para

$a = 2$, $m = 2$ e $n = 3$, temos: $\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

49. b) Para $a = 5$, $m = 3$ e $n = 4$, temos: $\sqrt[4]{5^3} = 5^{\frac{3}{4}}$

49. c) Para $a = 10$, $m = 1$ e $n = 3$, temos: $\sqrt[3]{10} = 10^{\frac{1}{3}}$

50. a) Considerando que $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, para

$a = 2$, $m = 3$ e $n = 4$, temos: $2^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3}$

50. b) Para $a = 9$, $m = 1$ e $n = 3$, temos: $9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$

50. c) Para $a = 8$, $m = 1$ e $n = 2$, temos: $8^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{8}$

51. a) Como as propriedades da potenciação continuam válidas para expoentes fracionários, temos:

$$\sqrt{3^6} = 3^{\frac{6}{2}} = 3^3 = 27$$

51. b) $512^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{512}$

Como $512 = 8\cdot 8\cdot 8 = 8^3$, temos: $\sqrt[3]{512} = 8$

51. c) $\sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{8}{4}} = 2^2 = 4$

53. Simplificando a expressão A:

$$A = \left[\frac{1}{2} - \left(1+\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{6}{3}-\frac{2}{3}\right) = \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right]\cdot\left(\frac{4}{3}\right) =$$

$$= \left[\frac{2}{4} - \frac{9}{4}\right]\cdot\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{7}{4}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{7}{3}$$

Simplificando a expressão B:

$$B = \frac{5}{7} : \left[2 - \left(\frac{2}{3}+3\right)\right] = \frac{5}{7} : \left[2 - \frac{11}{3}\right] = \frac{5}{7} : \left[\frac{-5}{3}\right] =$$

$$= \frac{5}{7}\cdot\left[\frac{3}{-5}\right] = \frac{3}{-7} = -\frac{3}{7}$$

Logo: $A\cdot B = -\frac{7}{3}\cdot\left(-\frac{3}{7}\right) = 1$

Concluímos que os valores de A e B são números inversos.

54. De acordo com o item **c**:

$$\underbrace{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}_{=\frac{3}{4}\text{, pelo item } \mathbf{c}} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{4} + \frac{1\cdot 1}{4\cdot 5} = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} =$$

$$= \frac{5\cdot 3+1}{20} = \frac{15+1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

55. É mais fácil começar trabalhando com frações e, apenas no final, escrever na forma decimal. Vale recordar que $a : b^n = a\cdot b^{-n}$.

$$\left(-1+\frac{1}{5}\right)^2 : \left(0{,}4 - \frac{1}{5}\right)^2 - 0{,}7\cdot\sqrt{\frac{36}{49}} =$$

$$= \left(-\frac{5}{5}+\frac{1}{5}\right)^2 : \left(\frac{4}{10}-\frac{1}{5}\right)^2 - 0{,}7\cdot\sqrt{\frac{36}{49}} =$$

$$= \left(-\frac{5}{5}+\frac{1}{5}\right)^2 : \left(\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\right)^2 - 0{,}7\cdot\sqrt{\frac{36}{49}} =$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right)^2 : \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 0{,}7\cdot\sqrt{\frac{36}{49}} =$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - 0{,}7\cdot\sqrt{\frac{36}{49}} =$$

$$= \left(-\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{1}\right)^2 - 0{,}7\cdot\sqrt{\frac{36}{49}} =$$

$$= \frac{16}{25}\cdot\frac{25}{1} - 0{,}7\cdot\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{16}{1} - 0{,}7\cdot\sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2} =$$

$$= 16 - 0{,}7\cdot\frac{6}{7} = 16 - \frac{7}{10}\cdot\frac{6}{7} =$$

$$= 16 - \frac{6}{10} = 16 - 0{,}6 = 15{,}4$$

56. Vale recordar as propriedades da potenciação com mesma base e que $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + 2^{-7} =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{4-3}\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + 2^{-7} = \left(-\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + 2^{-7} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{1+6} + 2^{-7} = \left(-\frac{1}{2}\right)^7 + 2^{-7} = = (-2^{-1})^7 + 2^{-7} =$$

$$= -2^{-7} + 2^{-7} = 0$$

Alternativa **c**.

Pense mais um pouco...

Página 28

1. a) Como $400 = 20 \cdot 20$, concluímos que $x = 20$ é um valor que torna a sentença $x^2 = 400$ verdadeira. Porém, como $(-20) \cdot (-20) = 400$, $x = -20$ é outro valor possível.
Note que números menores do que 20, ao quadrado, resultam em valores menores do que 400; números maiores do que 20, ao quadrado, resultam em valores maiores do que 400.

1. b) Apenas 20, pois uma medida de comprimento precisa ter valor numérico positivo.

2. a) Como $(4{,}8)^2 = 23{,}04$ e $x^2 = 23{,}04$, podemos concluir que $x = 4{,}8$ é um valor que torna a igualdade verdadeira. Como $(-4{,}8) \cdot (-4{,}8) = 23{,}04$, $x = -4{,}8$ é outro valor possível.

2. b) Apenas 4,8, pois a medida do comprimento dos lados precisa ter valor numérico positivo.

Trabalhando a informação

1. Conhecemos o capital $C = 18\,000$, a taxa de juros i, de 8% ao ano, e o tempo t, de 2 anos.
Escrevendo i na forma decimal: $i = 8\% = 8 : 100 = 0{,}08$
Assim, o rendimento para essa aplicação será:
$j = C \cdot i \cdot t = 18\,000 \cdot 0{,}08 \cdot 2 = 2\,880$.
Ou seja, R$ 2 880,00.

2. Neste caso, já sabemos que o rendimento foi de $j = 2\,304$, e o capital inicial $C = 12\,000$ e a taxa mensal $i = 1{,}6\% = 0{,}016$. Resta-nos determinar o tempo t correspondente.

$$j = C \cdot i \cdot t \Rightarrow t = \frac{J}{C \cdot i} = \frac{2304}{12000 \cdot 0{,}016} = \frac{2304}{192} = 12$$

É importante notar que a taxa dada foi mensal; então, o tempo é de 12 meses (ou 1 ano).

Para saber mais

Páginas 32

1. a) O computador calcula 2^3^3 como $(2^3)^3 = 2^9 = 512$.

1. b) Pela explicação dada no texto, o computador calcula primeiro 2^3 como $2^3 = 8$; em seguida 3^(2^3) = 3^8 como $3^8 = 6\,561$; e, por fim, 2^(3^(2^3)) = 2^(6 561). Ou seja, $2^{\left(3^{(2^3)}\right)} = 2^{6\,561}$

Note que esse número contém 1 976 casas decimais; portanto, não pode ser calculado para além da forma de potência com o auxílio de uma calculadora de mão, mas ele pode ser calculado utilizando uma calculadora científica, que fornecerá a resposta em notação científica.

1. c) Como a expressão dentro de parênteses é efetuada antes, o computador calcula primeiro 2^3 como 2^3, depois (2^3)^4 como $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12} = 4\,096$.

1. d) Neste caso, a expressão 3^2 dentro dos primeiros parênteses é calculada como 3^2. Em seguida, essa expressão é elevada ao cubo; por fim, é elevada ao quadrado.
$((3^2)^3)^2 = (3^2)^{3 \cdot 2} = (3^2)^6 = 3^{2 \cdot 6} = 3^{12} = 531\,441$

2. É importante que essa atividade seja corrigida na lousa para que os estudantes indiquem os pontos em que têm dificuldades e para que esclareçam as dúvidas de sintaxe.

3. Assim como na atividade anterior, é importante corrigir as expressões propostas pelos estudantes na lousa, para que eles percebam os equívocos de sintaxe.

Exercícios complementares

1. a) $x \cdot y \cdot z = (2^2)^3 \cdot (2^3)^2 \cdot 2^{3^2} = 2^{2 \cdot 3} \cdot 2^{3 \cdot 2} \cdot 2^9 = 2^6 \cdot 2^6 \cdot 2^9 = 2^{6+6+9} = 2^{21}$

1. b) $x : y = (2^2)^3 : (2^3)^2 = 2^{2 \cdot 3} : 2^{3 \cdot 2} = 2^6 : 2^6 = 2^{6-6} = 2^0 = 1$
$x : z = (2^2)^3 : 2^{3^2} = 2^{2 \cdot 3} : 2^9 = 2^6 : 2^9 = 2^{6-9} = 2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

2. Observe que, passados 30 segundos, uma única célula se divide em duas. Passados mais 30 segundos, cada uma dessas duas células se divide em duas. Ou seja, após $2 \cdot 30$ segundos, temos $2 \cdot 2$ células $= 2^2$ células. Passados mais 30 segundos, cada uma dessas 2^2 células se divide em duas, totalizando 2^3 células ($2 \cdot 2^2 = 2^{2+1} = 2^3$). Ou seja, após $3 \cdot 30$ segundos, temos 2^3 células. Extrapolando, após $n \cdot 30$ segundos, temos 2^n células. Logo, após 20 minutos $= 20 \cdot 2 \cdot 30$ segundos, temos 2^{40} células.

5. a) Lembrando que qualquer número quando elevado a zero resulta 1, temos:

$$a = 5^0 - 2^{-2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$b = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = (2^{-1})^{-1} =$$

$$= 2^{-1 \cdot (-1)} = 2^1 = 2$$

$$c = 12^0 - 3 = 1 - 3 = -2$$

Assim: $a^b = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{9}{16}$

5. b) $(b - a)^c = \left(2 - \dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{8}{4} - \dfrac{3}{4}\right)^{-2} =$

$$= \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

5. c) $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^c = \left(\dfrac{\frac{3}{4} \cdot 2}{-2}\right)^{-2} = \left(\dfrac{\frac{3}{4}}{-1}\right)^{-2} = \left(-\dfrac{3}{4}\right)^{-2} =$

$$= \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

6. a) $(2{,}5)^{-2} = \left(\frac{25}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{25}\right)^{2} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2} = \frac{4}{25}$

6. b) $(0{,}15)^{-3} = \left(\frac{15}{100}\right)^{-3} = \left(\frac{100}{15}\right)^{3} = \left(\frac{20}{3}\right)^{3} = \frac{20^3}{3^3} = \frac{8000}{27}$

6. c) $(0{,}1)^{-4} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-4} = \left(\frac{10}{1}\right)^{4} = 10000$

6. d) $(-0{,}01)^{-2} = \left(-\frac{1}{100}\right)^{-2} = \left(-\frac{100}{1}\right)^{2} = 10000$

7. a) Da relação $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, para $a = 10$ e $n = 2$, temos:

$\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

7. b) $\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4} = 2^{-4}$

7. c) $\left(-\frac{1}{25}\right) = -\left(\frac{1}{25}\right) = -\left(\frac{1}{5^2}\right) = -(5^{-2}) = -5^{-2}$

7. d) $\frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} = 5^{-3}$

7. e) Os divisores de 15 são 5 e 3, com $15 = 5 \cdot 3$. Portanto, 15 não pode ser decomposto em potências positivas de alguma base menor do que ele. Assim:

$\frac{1}{15} = 15^{-1}$

7. f) $\left(-\frac{1}{100}\right) = -\left(\frac{1}{100}\right) = -\left(\frac{1}{10^2}\right) = -(10^{-2}) = -10^{-2}$

8. a) 57,8 milhões equivalem a

$57{,}8 \cdot 10^6 = 5{,}78 \cdot 10^1 \cdot 10^6 = 5{,}78 \cdot 10^7$

8. b) 8,5 bilhões equivalem a $8{,}5 \cdot 10^9$ e

9,7 bilhões equivalem a $9{,}7 \cdot 10^9$

9. $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} : \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right] =$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot (-3)} : \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{1+5+(-3)}\right] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{3} =$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{-6-3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-9} = \left(-\frac{2}{1}\right)^{9} = (-2)^9$

10. Pelas propriedades da potenciação:

$(3^{-1} \cdot 3) - (5^{-1} : 5) = 3^{-1+1} - 5^{-1-1} = 3^0 - 5^{-2} = 1 - 5^{-2}$

Como $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = 0{,}04$, essa expressão vale $1 - 0{,}04 = 0{,}96$; um número racional maior que 0 e menor que 1.

Alternativa **b**.

11. Como x é um produto de potências de mesma base, podemos simplificar.

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 : \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{5+(-3)+8} : \left(\frac{1}{3}\right)^9$

$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{10} : \left(\frac{1}{3}\right)^9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{10-9} = \frac{1}{3}$

Logo, $x^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$.

13. Como o prefixo "quilo" indica $1000 = 10^3$, temos: $1\text{ kg} = 10^3\text{ g}$. Então:

$1{,}99 \cdot 10^{-26}\text{ kg} = 1{,}99 \cdot 10^{-26} \cdot 10^3\text{ g} = 1{,}99 \cdot 10^{-26+3}\text{ g} = 1{,}99 \cdot 10^{-23}\text{ g}$

Então, a medida da massa é aproximadamente $1{,}99 \cdot 10^{-23}$ g.

14. É importante lembrar que dividir por 100 equivale a deslocar a vírgula duas casas decimais para a esquerda.

$\sqrt{\frac{81}{4}} - \sqrt{400} + \sqrt{2{,}25} = \sqrt{\frac{81}{4}} - \sqrt{400} + \sqrt{\frac{225}{100}} =$

$= \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2} - \sqrt{20^2} + \sqrt{\left(\frac{15}{10}\right)^2} = \frac{9}{2} - 20 + \frac{15}{10} =$

$= \frac{45}{10} - \frac{200}{10} + \frac{15}{10} = -\frac{140}{10} = -14$

15. É preciso recordar a relação entre o número de casas decimais e potências de 10.

$\frac{(0{,}1) \cdot (0{,}001) \cdot 10^{-1}}{10 \cdot (0{,}0001)} = \frac{10^{-1} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-1}}{10 \cdot 10^{-4}} =$

$= \frac{10^{-1-3-1}}{10^{1-4}} = \frac{10^{-5}}{10^{-3}} = 10^{-5-(-3)} = 10^{-2}$

Mas $x = 10^{-3} = 10^{-2-1} = 10^{-2} : 10^1$. Assim, $x = \frac{10^{-2}}{10}$, ou seja, $10^{-2} = 10x$. Como 10^{-2} é o valor obtido para a expressão, conclui-se que a expressão é igual a $10x$.

Alternativa **b**.

16. Recordando a relação entre o número de casas decimais e potências de 10, temos:

$\frac{0{,}000036}{80000} = \frac{36 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^4} = \frac{36}{8} \cdot \frac{10^{-6}}{10^4} = 4{,}5 \cdot 10^{-6-4} = 4{,}5 \cdot 10^{-10}$

Como multiplicar por 10^{-1} equivale a deslocar a vírgula uma casa para a esquerda, $4{,}5 = 45 \cdot 10^{-1}$. Assim:

$4{,}5 \cdot 10^{-10} = 45 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-10} = 45 \cdot 10^{-1-10} = 45 \cdot 10^{-11}$

Alternativa **d**.

17. Como $a = 0{,}04 = \frac{4}{100} = \frac{2 \cdot 2}{10 \cdot 10} = \left(\frac{2}{10}\right)^2$, temos:

$\sqrt{a} = \frac{2}{10} = 0{,}2$. Daí, $5\sqrt{a} = 5 \cdot 0{,}2 = 1$ e $2a\sqrt{a} = 2 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}2 = 0{,}016$.

Verificando

1. Como repetições são permitidas, para a primeira casa, temos 10 algarismos possíveis. Para cada um desses algarismos, temos 10 escolhas para a segunda casa, totalizando 10^2 escolhas ($10 \cdot 10 = 10^2$) para as duas primeiras casas. Prosseguindo com esse raciocínio, concluímos que há 10^4 distintas senhas possíveis ($10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$).

Alternativa **d**.

2. Começamos decompondo os números que aparecem na expressão em potências de fatores primos, sempre que possível. Temos $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$, $8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2^2 = 2^3$, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3$ e $49 = 7 \cdot 7 = 7^2$. Assim, substituindo e reordenando a expressão, temos:

$$\frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot 4 \cdot 7^2}{8 \cdot 27 \cdot 49} = \frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot 2^2 \cdot 7^2}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2} = \frac{2^5 \cdot 2^2 \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^3} =$$

$$= \frac{2^{5+2} \cdot 3^5}{2^3 \cdot 3^3} = \frac{2^7}{2^3} \cdot \frac{3^5}{3^3} = 2^{7-3} \cdot 3^{5-3} = 2^4 \cdot 3^2$$

Alternativa **b**.

3. Observe que:

$$x = (0{,}5)^3 = \left(\frac{5}{10}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = (4^{-1})^{-2} = 4^2 = 16$$

Logo, $x \cdot y = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$ e $(x \cdot y)^2 = 2^2 = 4$

Alternativa **c**.

4. Dividindo 3 125 por 5 sucessivas vezes, notamos que $3\,125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$. Sendo $a^{-1} = \frac{1}{a}$, para $a = \frac{1}{5}$, temos $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$. Logo:

$$3\,125 = 5^5 = \left(\frac{1}{5}^{-1}\right)^5 = \left(\frac{1}{5}\right)^{(-1)\cdot 5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-5}$$

Alternativa **a**.

5. Recordando que 10^{-n} é o número com n casas depois da vírgula, sendo a última delas composta do algarismo 1 e as demais por 0, concluímos que 0,0001 m = 10^{-4} m.

Alternativa **c**.

6. Precisamos determinar uma medida de comprimento cujo produto por ela mesma resulte no valor numérico $\frac{121}{144}$.

$$\frac{121}{144} = \frac{11 \cdot 11}{12 \cdot 12} = \frac{11}{12} \cdot \frac{11}{12}$$

Logo, a medida do comprimento do lado é $\frac{11}{12}$ m.

Alternativa **a**.

7. Como $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$, $\sqrt{4} = 2$

Logo: $\sqrt[5]{245 - \sqrt[3]{6 + \sqrt{4}}} = \sqrt[5]{245 - \sqrt[3]{6 + 2}} = \sqrt[5]{245 - \sqrt[3]{8}}$

Porém $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$. Portanto, $\sqrt[3]{8} = 2$. Assim:

$\sqrt[5]{245 - \sqrt[3]{8}} = \sqrt[5]{245 - 2} = \sqrt[5]{243}$

Como a raiz quinta de 243 não é evidente, decompomos 243 em fatores primos.

$243 = 3 \cdot 81 = 3 \cdot 3 \cdot 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3^3 = 3^{1+1+3} = 3^5$

Se $243 = 3^5$, significa que $\sqrt[5]{243} = 3$.

Alternativa **b**.

8. De $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$, para $a = 18$, $n = 12$ e $m = 3$, temos:

$\sqrt[12]{18^3} = 18^{\frac{3}{12}} = 18^{\frac{1}{4}}$

Alternativa **c**.

9. Considerando que $9 = 3^2$ e $175 : 25 = 7$, temos:

$$\sqrt[3]{9 \cdot 3} - \left[\frac{175}{25} + \frac{2^5}{2^4} \cdot (0{,}25)^{-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \sqrt[3]{3^2 \cdot 3} - \left[7 + 2^{5-4} \cdot \left(\frac{25}{100}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \sqrt[3]{3^{2+1}} - \left[7 + 2^1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \sqrt[3]{3^3} - \left[7 + 2 \cdot 4^{\frac{1}{2}}\right] = 3 - \left[7 + 2 \cdot \sqrt{4}\right] =$$

$$= 3 - [7 + 2 \cdot 2] = 3 - [7 + 4] = 3 - 11 = -8$$

Alternativa **d**.

10. $$\frac{3^2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \left[\sqrt{\frac{9}{36}} - \left(-8 + \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= 3^{2-1} - \frac{1}{2^2} \cdot \left[\sqrt{\frac{3^2}{6^2}} - \left(-2^3 + 2^{-1}\right)\right] =$$

$$= 3^1 - 2^{-2} \cdot \left[\frac{3}{6} - \left(-2^{3\cdot(-1)}\right)\right] = 3^1 - 2^{-2} \cdot \left[\frac{3}{2 \cdot 3} - \left(-2^{3\cdot(-1)}\right)\right] =$$

$$= 3 - 2^{-2} \cdot \left[\frac{1}{2} - \left(-2^{-3}\right)\right] = 3 - 2^{-2} \cdot \left[2^{-1} + 2^{-3}\right] =$$

$$= 3 - 2^{-2} \cdot \left[2^{-1\cdot(-3)}\right] = 3 - 2^{-2} \cdot \left(2^3\right) =$$

$$= 3 - 2^{-2+3} = 3 - 2^1 = 1$$

Alternativa **a**.

Diversificando

1. Na segunda linha, Rafael escreve –24 como a diferença de dois números, de duas maneiras distintas.

Na terceira linha, Rafael decompõe os números em produtos de outros números.

Na quarta linha, Rafael completa os quadrados pela adição de 5^2 a ambos os membros.

Na quinta linha, Rafael identifica as diferenças de quadrados.

Na sexta linha, Rafael extrai a raiz quadrada.

Na sétima linha Rafael "cancela" o expoente 2 com o índice 2 da raiz.

Na oitava linha, Rafael adiciona 5 a ambos os membros, "cancelando" –5 e concluindo sua mágica.

2. O erro foi cometido na passagem da sexta para a sétima linha, ao substituir $\sqrt{(4-5)^2}$ por $4 - 5$, pois $4 - 5 = -1$, ou seja, é um número negativo e, por convenção, a raiz quadrada de um radicando resulta em um número positivo cujo quadrado equivale ao radicando.

3. a) Elevando ambas as potências à décima segunda potência, temos:

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} = 3^{\frac{12}{3}} = 3^4 = 81$$

$$\left(\sqrt[4]{4}\right)^{12} = 4^{\frac{12}{4}} = 4^3 = 64$$

Como 81 é maior do que 64, então, $\sqrt[3]{3}$ é maior do que $\sqrt[4]{4}$.

3. b) Como $4 = 2^2$, temos:

$$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = 2^{\frac{2}{4}} == 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Logo, esses números são iguais.

Capítulo 2 – Construções geométricas e lugares geométricos

Objetivos do capítulo e justificativas

- Fazer construções geométricas utilizando instrumentos de desenho.
- Construir segmentos congruentes, retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.
- Construir ângulos com o transferidor.
- Conceituar e construir lugares geométricos: circunferência, mediatriz, bissetriz, par de retas paralelas.
- Aplicar os lugares geométricos estudados na resolução de problemas.
- Construir, ler e interpretar gráficos de setores.

As propostas de construções geométricas apresentadas neste capítulo são importantes, pois favorecem o desenvolvimento da **competência geral 2** e das **competências específicas 2** e **6**. Ao utilizar instrumentos de desenho geométrico para construir segmentos congruentes, retas paralelas, retas perpendiculares e ângulos e, ainda, ao compreender e aplicar o conceito de lugar geométrico, os estudantes mobilizam conhecimentos anteriores e os aplicam, ampliando a compreensão e desenvolvendo o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos. Além disso, eles enfrentam situações-problemas imaginadas contribuindo para que utilizem diferentes tipos de registro e de linguagem. A **competência geral 5** e a **competência específica 5** são favorecidas no trabalho com as atividades envolvendo *softwares* de geometria dinâmica por meio dos quais os estudantes podem mobilizar e ampliar os conhecimentos de geometria. Essas tecnologias digitais favorecem, também, a verificação de hipótese apresentadas pelos estudantes e a validação de seus argumentos, pois facilitam a construção de situações imaginadas que possam ser testadas como contra-argumento, por exemplo.

Construir, ler e interpretar gráficos é um requisito importante para a participação ativa na sociedade atual e, ao estudar os gráficos de setores, os estudantes podem adquirir maior autonomia na análise de informações apresentadas dessa maneira e desenvolver as **competências gerais 1** e **4** e as **competências específicas 3** e **4**, percebendo os conhecimentos matemáticos como ferramentas para compreender e explicar a realidade. A atividade proposta de pesquisa sobre um problema relacionado ao bairro em que os estudantes moram favorece o desenvolvimento da **competência específica 8**, pois, para realizá-la, os estudantes precisam interagir com os colegas e trabalhar de maneira cooperativa no planejamento e no desenvolvimento da pesquisa.

Para o desenvolvimento dos objetivos deste capítulo, as construções geométricas e a associação de necessidades práticas relacionadas ao aprimoramento de conceitos matemáticos, como a ideia de círculo e de circunferência, favorecem aos estudantes desenvolverem aspectos das **competências gerais 3** e **4**. Eles poderão fruir manifestações artísticas antigas e modernas e perceber a importância de valorizar esse tipo de linguagem, como o apresentado na obra do artista Wassily Kandinsky.

O desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8** são favorecidos com as diferentes atividades a serem realizadas em grupos, pois possibilitam aos estudantes exercitar diferentes habilidades socioemocionais ao trabalharem com a diversidade de aprendizagem entre os colegas, interagindo de forma cooperativa.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

Neste capítulo, serão aprofundados os conhecimentos acerca das construções geométricas e dos lugares geométricos, com foco na Unidade Temática **Geometria**, ampliando conhecimentos do 7º ano (EF07MA22 e EF07MA24) e desenvolvendo aspectos relacionados às habilidades (EF08MA15) e (EF08MA17) no que se refere à compreensão de mediatriz de um segmento e de bissetriz de um ângulo como lugares geométricos.

Esperamos que a diversidade de situações envolvendo tais conhecimentos possam subsidiar os assuntos que serão explorados no 9º ano, dentre eles determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer (EF09MA16).

Este capítulo apresenta também articulação com temas das Unidades Temáticas **Geometria**, **Números** e **Probabilidade e estatística** na construção de gráficos de setores envolvendo construção de ângulos e cálculos com porcentagens, ampliando o estudo desse tipo de gráfico feito no 7º ano (EF07MA37) e possibilitando desenvolver aspectos da habilidade (EF08MA23). A atividade proposta para que os estudantes realizem uma pesquisa sobre problemas do bairro em que moram contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF08MA27).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

a) Algumas linhas a se explorar: transporte (de bens e matérias-primas importantes para a sobrevivência das comunidades humanas), agricultura (arado, tração etc.) e mecanismos como moinhos.

b) O desenho que delimita uma roda representa uma circunferência.

Exercícios propostos

3. a) Reta que passa pelos pontos A e B.

3. b) Semirreta de origem A que passa por B.

3. c) Segmento de reta de extremidades A e B.

3. d) Semirreta de origem P que passa por Q.

3. e) Segmento de reta de extremidades P e Q.

4. a) Verdadeira. Como 800 cm $= 8 \cdot 100$ cm e 100 cm $= 1$ m, então, 800 cm $= 8$ m, e ambos os segmentos têm a mesma medida de comprimento, o que significa que são congruentes.

4. b) Verdadeira. Se ambos os segmentos têm a mesma medida de comprimento 3 cm, significa que são congruentes.

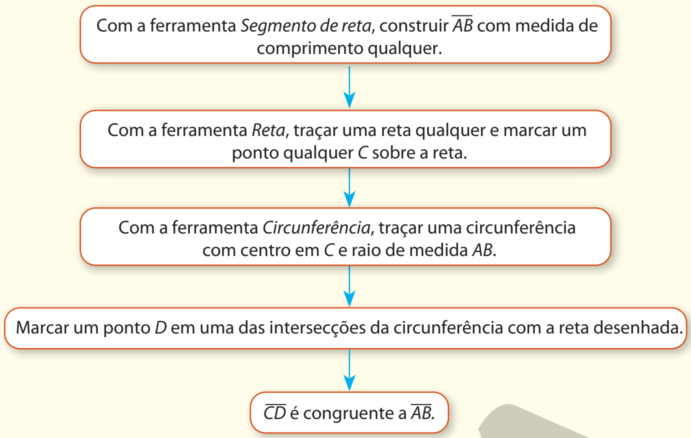
4. c) Verdadeira. Para que $\overline{EF}$ e $\overline{PQ}$ sejam congruentes, a medida EF deve ser igual à medida PQ.

4. d) Falsa. Visto que $AB = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0{,}05 \text{ m}$ e $CD = 5 \text{ dm} = 5 \cdot 10^{-1} \text{ m} = 0{,}5 \text{ m}$. Ou seja, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ têm medidas diferentes e, portanto, não são congruentes.

5. a) Temos que $XZ = XY + YZ$, ou seja, $7{,}5 = XY + 5$. Logo, $XY = 7{,}5 - 5 = 2{,}5$. Portanto, $\overline{XY}$ mede 2,5 cm.

5. b) Como A é ponto médio de $\overline{XY}$, $AY = XY : 2 = 1{,}25$. Analogamente, $YB = YZ : 2 = 2{,}5$.
Então, $\overline{AB} = AY + YB = 3{,}75$; portanto, $AB = 3{,}75$ cm.

6.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

8. a) $AD = AB + BC + CD$
$18 = 2 \cdot CD + 3 \cdot CD + CD = 6 \cdot CD$
Portanto, $CD = \dfrac{18}{6} = 3$. Como $AB = 2 \cdot CD$, temos que a medida de $\overline{AB}$ é 6 cm.

8. b) $BC = 3 \cdot CD = 3 \cdot 3 = 9$
Então, $\overline{BC}$ mede 9 cm.

8. c) $CD = \dfrac{18}{6} = 3$, ou seja, $\overline{CD}$ mede 3 cm.

8. d) Como X é ponto médio de $\overline{AB}$, temos:
$XB = AB : 2 = 6 : 2 = 3$
Como Y é ponto médio de BC, temos:
$BY = BC : 2 = 9 : 2 = 4{,}5$
Portanto, $XY = XB + BY = 3 + 4{,}5 = 7{,}5$, ou seja, $\overline{XY}$ mede 7,5 cm.

8. e) Como Y é ponto médio de BC, temos:
$YC = BY = 4{,}5$
Como Z é o ponto médio de CD, temos:
$CZ = CD : 2 = 3 : 2 = 1{,}5$
Portanto, $YZ = YC + CZ = 4{,}5 + 1{,}5 = 6$, ou seja, $\overline{YZ}$ mede 6 cm.

8. f) $XZ = XB + BC + CZ$
Recuperando os resultados dos itens anteriores, temos:
$XZ = 3 + 9 + 1{,}5 = 13{,}5$
Portanto, $\overline{XZ}$ mede 13,5 cm.

12. Considerando uma reta r e um ponto P fora dela, para traçar em um *software* de Geometria dinâmica uma reta passando por P e paralela a r, é possível seguir estes passos.

Passo 1: Com a ferramenta *Circunferência*, traçar uma circunferência C_1 com centro em P e que corte a reta r em dois pontos. Identificar um dos pontos como M.

Passo 2: Com a ferramenta *Circunferência*, traçar uma circunferência C_2, com mesmo raio $\overline{PM}$ e centro em M, para, assim, encontrar R, a intersecção entre essa segunda circunferência C_2 e a reta r.

Passo 3: Com a ferramenta *Circunferência*, traçar uma circunferência C_3, com mesmo raio $\overline{PM}$ e centro em R, para, assim, encontrar Q, a intersecção entre essa terceira circunferência C_3 e a circunferência C_2.

Passo 4: Com a ferramenta *Reta*, traçar $\overleftrightarrow{PQ}$, que é a reta paralela à reta *r*.

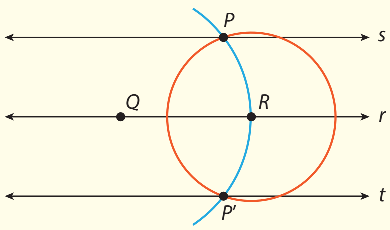
13. a) O maior número possível de retas paralelas a *m* que podem ser traçadas passando por cinco pontos fora de *m* é exatamente cinco, quando esses pontos, tomados três a três, são não colineares.

13. b) Não é possível, pois por cada ponto fora de *m* passa exatamente uma reta paralela a *m*. Se são cinco pontos distintos, no máximo há cinco retas distintas (uma para cada ponto), mas não mais do que isso.

13. c) Sim, aqui se pode explorar os casos em que, por exemplo, mais do que um desses pontos estão sobre uma mesma reta. Nos casos em que os cinco pontos são colineares, há apenas uma reta paralela possível. Sugere-se apresentar na lousa algumas das soluções dos estudantes e, também, explorar outras possibilidades.

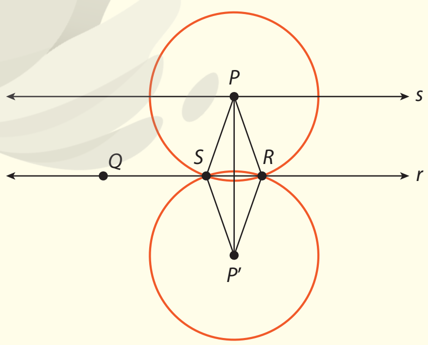
13. d) O menor número de retas paralelas que se pode traçar nessa situação é uma, quando os cinco pontos são todos colineares.

14. a) A figura obtida após as construções será como a imagem a seguir.

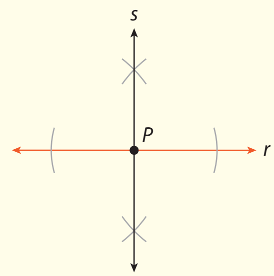


A reta *t* é paralela à reta *s*, pois estão ambas no mesmo plano e, como *t* não tem pontos em comum com *r* (por construção) e *r* não tem pontos em comum com *s* (por hipótese), *t* não tem pontos em comum com *s*, ou seja, as retas *s* e *t* também são paralelas.

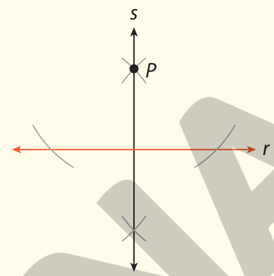
14. b) Ambas as distâncias têm mesma medida. Uma maneira de perceber isso intuitivamente é interpretar o segmento $\overline{PP'}$ como o lado comum a dois triângulos congruentes, $\triangle PSP'$ e $\triangle PRP'$; sendo S um quarto ponto sobre a reta *r*, na intersecção de duas circunferências de centros P e P' e raios $\overline{PR}$ e $\overline{P'R}$, respectivamente.



15. a) Espera-se que os estudantes sigam os passos descritos anteriormente para a construção das retas perpendiculares.



15. b)



16.

Traçar uma reta *r* passando por dois pontos *B* e *C* quaisquer.

↓

Marcar um ponto *A* fora da reta *r*.

↓

Com a ponta-seca do compasso no ponto *A*, traçar uma circunferência C_1 e marcar os pontos *E* e *F* nas intersecções de C_1 com *r*.

↓

Com a ponta-seca do compasso no ponto *E*, traçar uma circunferência C_2 de raio $\overline{AE}$.

↓

Com a ponta-seca do compasso no ponto *F*, traçar uma circunferência C_3 de raio $\overline{AF}$.

↓

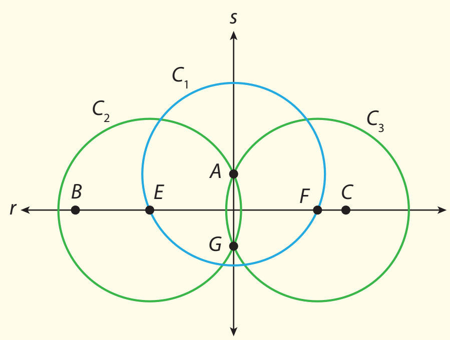
Marcar o ponto *G* na intersecção de C_2 com C_3.

↓

Traçar uma reta s passando pelos pontos *A* e *G*.

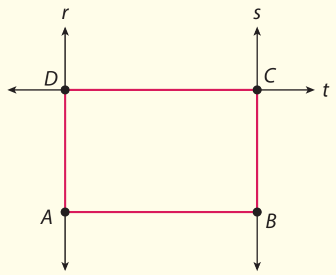
↓

As retas *r* e *s* são perpendiculares.

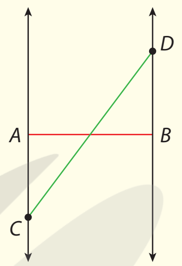


ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

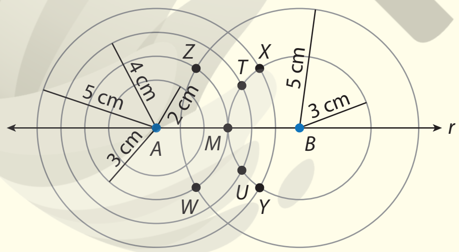
17. Sem requisitos adicionais, como medidas prescritas para os lados, pode-se fazer assim: selecionar a ferramenta *Segmento de reta* e clicar em dois pontos, A e B, para traçar um lado do retângulo; utilizar a ferramenta *Reta perpendicular* para traçar as retas r e s perpendiculares ao segmento $\overline{AB}$ e passando por A e B, respectivamente; demarcar um ponto C sobre a reta s, que será o terceiro vértice do retângulo; utilizar a ferramenta *Reta perpendicular* para traçar uma reta t perpendicular à reta s e passando pelo ponto C; marcar o quarto vértice D na intersecção das retas t e r.



18. Se o desenho tiver sido feito cuidadosamente, com a precisão de uma régua de mão, os estudantes devem obter 10 cm para a medida do segmento $\overline{CD}$. Pelo teorema de Pitágoras, é possível verificar que essa é a medida exata. O julgamento quanto à adequação do uso do teorema fica a cargo do professor.



20. a) O importante, neste exercício, é retomar que o lugar geométrico dos pontos que distam d de um ponto A dado é a circunferência de centro em A e raio d.



Os pontos X e Y na figura estão a 5 cm de A e 3 cm de B.

20. b) Os pontos Z e W na figura estão a 3 cm de A e 5 cm de B.

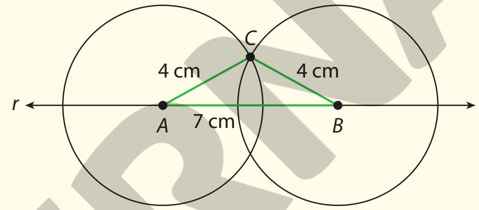
20. c) Os pontos T e U na figura estão a 4 cm de A e 3 cm de B.

20. d) O ponto M na figura está a 3 cm de A e 3 cm de B.

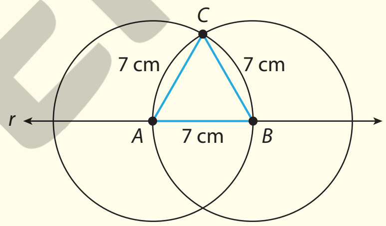
20. e) Não é possível obter esse ponto, pois, como vemos na figura, as circunferências de centro em A e raio medindo 2 cm e centro em B e raio medindo 3 cm não se cruzam.

21. a) Para construir os triângulos, traçamos uma reta r qualquer e marcamos sobre ela dois vértices (A e B) a uma distância igual a uma das medidas indicadas para os lados do triângulo. Em seguida, traçamos uma circunferência centrada em A e outra centrada em B, cada uma delas com raio igual a uma das outras medidas indicadas para os lados. Os possíveis terceiros vértices (C) estarão sobre a intersecção dessas circunferências, se existirem. Para classificar os triângulos quanto aos ângulos, os estudantes podem, por exemplo, medir a abertura dos ângulos com um transferidor ou comparar com um modelo de ângulo reto.

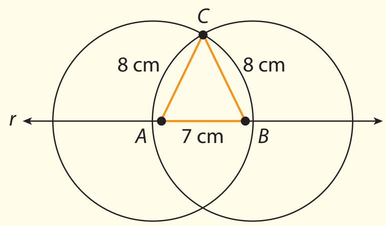
O triângulo a seguir é isósceles e obtusângulo.



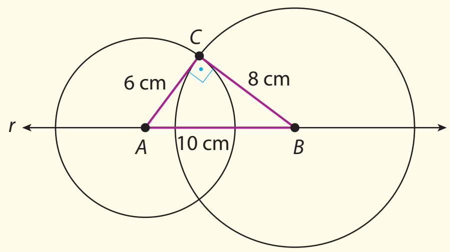
21. b) O triângulo é equilátero e acutângulo.



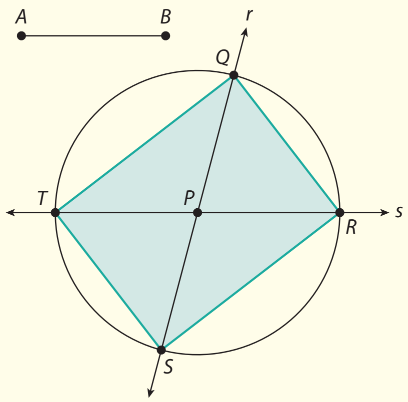
21. c) O triângulo é isósceles e acutângulo.



21. d) O triângulo é escaleno e retângulo.

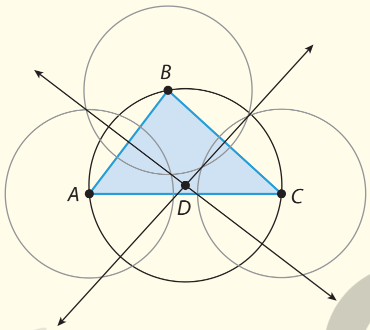


22. a) Para construir os segmentos de reta $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ e $\overline{PT}$, fixamos a ponta-seca do compasso no ponto P e, com uma abertura igual a AB, traçamos uma circunferência de centro P e raio de medida AB. O polígono obtido é um retângulo. Para mostrar que esse polígono, é de fato, um retângulo, pode-se decompô-lo em quatro triângulos isósceles para concluir que seus quatro ângulos são iguais a 90°, o que caracteriza os paralelogramos que são retângulos.

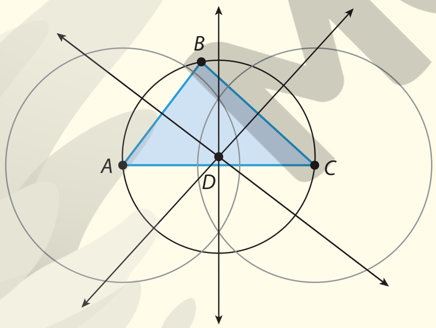


22. b) Como $\overline{PQ} = \overline{PS}$ e $\overline{PT} = \overline{PR}$, pois todos esses segmentos são raios de uma mesma circunferência, vemos que, de fato, $\overline{QS}$ e $\overline{RT}$ se cruzam em seus respectivos pontos médios, que são ambos o ponto P.

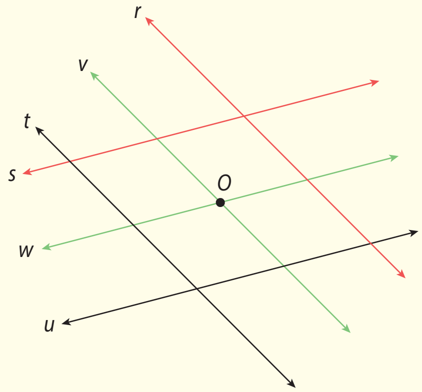
24. a) Sejam A, B e C os vértices do triângulo, traçamos as mediatrizes de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Assim, ao traçar a circunferência pedida a partir do ponto de encontro D, vemos que de fato ela contém os três vértices.



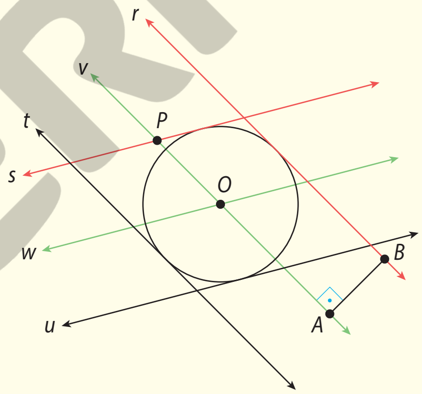
24. b) Ao construir a mediatriz do lado $\overline{AC}$, vemos que as três mediatrizes se encontram em um único ponto, D.



33. Como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de r e t é uma reta v, paralela a r, e o lugar geométrico dos pontos equidistantes de s e u é uma reta w, paralela a s, o lugar geométrico dos pontos equidistantes das quatro retas simultaneamente é aquele constituído por pontos simultaneamente em v e w. Mas, como v e w são ambas retas paralelas a um par de retas originalmente concorrentes, elas também serão concorrentes. Portanto, seu cruzamento consistirá em um único ponto O.



34. É importante comentar com os estudantes que a abertura a ser utilizada no compasso não deve ser igual a OP, na figura a seguir, mas sim à medida AB. É interessante realizar a construção em um *software* para utilizar a ferramenta de ampliação e variar os ângulos entre as retas concorrentes.



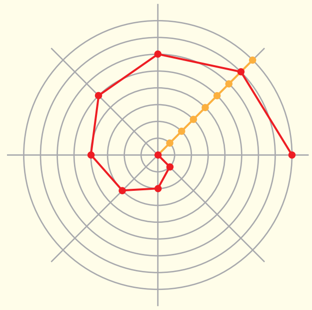
Pense mais um pouco...

Página 57

Após fazer alguns experimentos, os estudantes devem perceber que as bissetrizes se cruzam todas em um mesmo ponto.

Para saber mais

Esta construção é análoga à apresentada. Porém deve-se observar que agora os raios devem ser demarcados de 1 cm em 1 cm, visto que devemos fazer uma subdivisão em 8 partes iguais, em vez de 16.

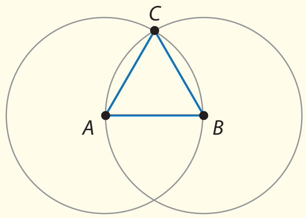


Exercícios complementares

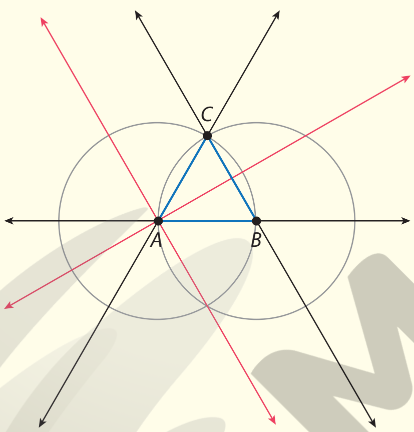
6. O triângulo em questão pode ser desenhado de acordo com os passos a seguir.

Passo 1: Traça-se um segmento $\overline{AB}$ de 4 cm.

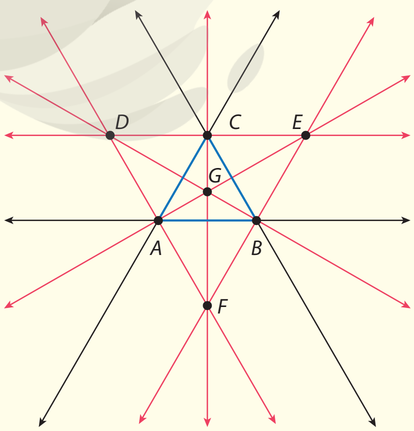
Passo 2: Com o compasso, traçam-se duas circunferências de raio 4 cm, uma centrada no ponto A e a outra centrada no ponto B. Os pontos A e B serão dois vértices do triângulo. O ponto C, na intersecção dessas circunferências, é o terceiro vértice do triângulo.



Passo 3: Agora, para cada par de lados, o lugar geométrico dos pontos que equidistam das respectivas retas suportes é dado pelo par de retas que contém as bissetrizes dos ângulos entre eles. Então, para cada vértice, traçamos as bissetrizes correspondentes. Por exemplo, para o vértice A:

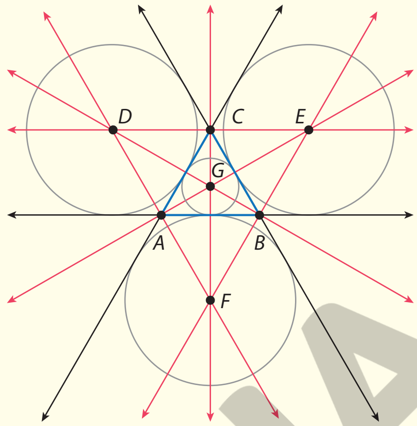


Passo 4: Ao fazermos isso para todos os vértices, obtemos os pontos D, E, F e G, que equidistam das três retas suportes dos lados do triângulo.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

7. O raio de cada circunferência deve ser a distância do respectivo centro ao lado mais próximo do triângulo, dado pelo segmento de bissetriz que cruza tal lado perpendicularmente.



8. **a)** Como os dois ângulos mostrados formam um ângulo reto, a soma de suas medidas deve ser 90°. Assim:

$(x + 15°) + (3x - 5°) = 90°$

$4x + 10° = 90°$

$4x = 90° - 10° = 80°$

$x = \dfrac{80°}{4} = 20°$

8. **b)** Como os dois ângulos mostrados formam um ângulo raso, a soma de suas medidas deve ser 180°. Assim:

$(3x + 20°) + x = 180°$

$4x + 20° = 180°$

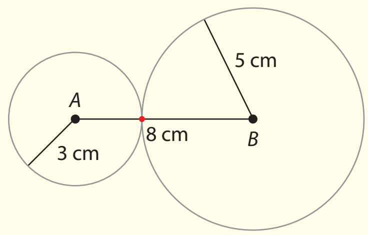
$4x = 180° - 20° = 160°$

$x = \dfrac{160°}{4} = 40°$

Verificando

5. Essas duas circunferências terão exatamente um ponto em comum, pois a soma das medidas de seus raios é exatamente igual a AB.

Alternativa **b**.



6. $\overrightarrow{OP}$ precisa conter a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, o que significa que $A\hat{O}P$ e $B\hat{O}P$ são congruentes. Logo:

$2x + 5° = 3x$

$3x - 2x = 2x + 5° - 2x$

$x = 5°$

Assim:

$m(A\hat{O}P) = 2 \cdot 5° + 5° = 15° = m(B\hat{O}P)$

$m(A\hat{O}B) = m(A\hat{O}P) + m(B\hat{O}P) = 15° + 15° = 30°$

Alternativa **c**.

7. A primeira divisória de raia é uma reta paralela a dois lados da piscina – que são paralelos – e cujos pontos são equidistantes dos lados. As próximas divisórias, por sua vez, são retas equidistantes de um dos lados e da divisória instalada anteriormente. Assim, o professor considerou pontos equidistantes de duas retas paralelas.
Alternativa **a**.

Capítulo 3 – Estatística e probabilidade

Objetivos do capítulo e justificativas

- Trabalhar com coleta, organização e apresentação de dados.
- Reconhecer uma variável estatística e classificá-la como qualitativa ou quantitativa.
- Resolver problemas envolvendo cálculo de porcentagens.
- Determinar a frequência absoluta e a frequência relativa de dados coletados em uma pesquisa.
- Interpretar e organizar tabelas de distribuição de frequências.
- Explorar e avaliar diferentes tipos de gráfico: de colunas, de barras, de setores, de linha, pictograma.
- Organizar dados de uma variável contínua em classes.
- Utilizar a noção de área do quadrado para estimativa de quantidade de pessoas por metro quadrado.
- Conceituar e calcular medidas estatísticas: moda, média aritmética (simples ou ponderada) e mediana.
- Conceituar espaço amostral e evento de um experimento aleatório.
- Conceituar e determinar a probabilidade de eventos de um experimento aleatório.

Os objetivos deste capítulo se justificam à medida que favorecem o desenvolvimento da **competência geral 4** e da **competência específica 4**. Ao mobilizar conceitos sobre variáveis quantitativas e qualitativas e aprofundar conhecimentos sobre pesquisas estatísticas, os estudantes utilizam diferentes linguagens para coletar, analisar e comunicar os dados coletados em pesquisas desse tipo. Além disso, são apresentados aspectos históricos sobre Estatística, possibilitando desenvolver a **competência geral 1** e a **competência específica 1**. Em relação a essas competências, os estudantes poderão valorizar os conhecimentos matemáticos envolvidos neste capítulo, ao perceber que eles são construídos e podem ser utilizados sobre o mundo social para entender e explicar a realidade e para contribuir com uma sociedade justa, inclusiva e democrática.

Ao compreender como trabalhar com coleta, organização e apresentação de dados, reconhecer variáveis estatísticas, determinar frequência absoluta e frequência relativa e, ainda, compreender e utilizar medidas estatísticas, os estudantes desenvolvem as **competências específicas 2**, **3** e **4** e a **competência geral 2**, pois tornam-se cada vez mais capazes de fazer observações sistemáticas, relacionando aspectos quantitativos e qualitativos de diferentes práticas sociais, ampliam a autonomia para investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes e podem expressar suas respostas ou conclusões utilizando diferentes registros e linguagens, especificamente, gráficos e tabelas. Nesse mesmo aspecto, colaboram com o desenvolvimento dessas competências a resolução de problemas envolvendo porcentagens, a interpretação de gráficos de distribuição de frequências, o conhecimento e uso de diferentes tipos de gráfico e a compreensão sobre o cálculo de probabilidades.

Em diferentes momentos do capítulo, apresentam-se atividades para serem realizadas em duplas ou grupos, o que favorece o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8**, pois os estudantes precisam trabalhar com os colegas de maneira cooperativa, exercitar o diálogo e a resolução de conflitos. Além disso, a proposta de realização de uma pesquisa possibilita aos estudantes planejar e desenvolver, coletivamente, as etapas envolvidas para a coleta e apresentação de dados.

Entre as diferentes situações apresentadas, destacamos o trabalho com os dados sobre o desmatamento e com os dados sobre a dengue, temáticas que contribuem para o desenvolvimento das **competências gerais 7** e **8** e as **competências específicas 6** e **7**.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.

(EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

(EF08MA24) Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.

(EF08MA25) Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.

(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).

(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

Os conceitos e atividades envolvendo o estudo de Estatística e de Probabilidade são o foco deste capítulo, desenvolvendo a Unidade Temática **Probabilidade** e **estatística**. No campo da Estatística, são trabalhadas a origem da Estatística, coleta e organização de dados, variáveis, tabela de distribuição de frequências com frequências absolutas e frequências relativas e tipos variados de gráfico (de colunas, de barras, de setores, de linha, pictograma), além de cartograma e infográfico, possibilitando o desenvolvimento das habilidades (EF08MA23), (EF08MA24), (EF08MA26) e (EF08MA27).

Vale ressaltar que atividades relacionadas a gráficos foram desenvolvidas nos anos anteriores do Ensino Fundamental e sua retomada e ampliação pretendem consolidar esse conhecimento, oferecendo suporte ao que será desenvolvido no 9º ano (EF09MA22 e EF09MA23). Tratamos também das medidas estatísticas (moda, média aritmética, média aritmética ponderada e mediana), ampliando o que já foi visto no 7º ano (EF07MA35) e desenvolvendo a habilidade (EF08MA25).

Quanto ao campo da **Probabilidade**, incluem-se as noções de espaço amostral, evento e probabilidade, assim como o cálculo de probabilidades, sistematizando o que já tem sido estudado nos anos anteriores, desenvolvendo a habilidade (EF08MA22) e dando suporte para a continuidade do assunto no 9º ano (EF09MA20).

As articulações são feitas com a Unidade Temática **Números**, na apresentação de problemas que envolvem cálculos com porcentagens (EF08MA04), e com a Unidade Temática **Grandezas e medidas** na seção *Para saber mais*, que trata da estimativa de quantidade de pessoas por metro quadrado, utilizando o conceito de área.

• Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

b) Para calcular 0,001% de 7 800 000 000, pode-se fazer:

$$7{,}8 \cdot 10^9 \cdot \left(\frac{10^{-3}}{10^2}\right) = 7{,}8 \cdot 10^9 \cdot 10^{-5} = 7{,}8 \cdot 10^4 = 78\,000$$

Logo, corresponde à 78 000 pessoas.

c) Como 50% da população correspondem à metade de 210 milhões, fazemos:

210 000 000 : 2 = 105 000 000

Portanto, 50% da população correspondem à 105 000 000 de pessoas.

Já 10% correspondem à décima parte da população total. Portanto, fazemos:

210 000 000 : 10 = 21 000 000

Assim, 10% da população brasileira correspondem à 21 000 000 de pessoas.

Exercícios propostos

1. a) Salário é uma variável quantitativa, pois assume um valor numérico medido em real.

1. b) Gênero é uma variável qualitativa, pois é expresso por um atributo.

1. c) Número de irmãos é uma variável quantitativa, pois é expressa por um número.

1. d) Opinião sobre a qualidade da água é uma variável qualitativa, pois é expressa por atributos como “boa”, “ruim”, “ótima” etc.

1. e) Número do sapato é uma variável quantitativa, pois é expressa por um número.

1. f) Escolaridade é uma variável quantitativa, pois é expressa por atributos como “ensino fundamental completo”, “ensino médio incompleto”, “ensino médio completo” etc.

2. Resposta pessoal. São exemplos de variáveis quantitativas: medida de altura, medida de massa, idade e quantidade de horas de sono. Exemplos de variáveis qualitativas: qualidade do sono e satisfação com serviços em geral (merenda, transporte público etc.).

3. Não, pois a amostra não representa a população da cidade proporcionalmente, focando-se apenas em um dos dez bairros. Ou seja, a amostra não é significativa.

6. Durante a construção da tabela, é importante ordenar os resultados obtidos, o que ajudará na solução dos itens subsequentes.

Batimentos cardíacos										
Batimentos por minuto	75	76	77	78	79	80	85	88	90	92
Frequência absoluta	3	9	5	7	2	3	6	3	7	5

Dados obtidos por Cláudio.

6. a) Segundo os dados do enunciado, a população da pesquisa é a dos 120 estudantes de Medicina. A amostra foi composta de 50 pessoas.

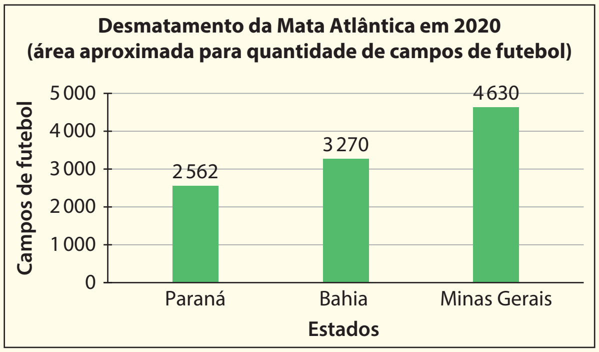
6. b) A amplitude é a diferença entre o maior valor (92) e o menor valor (75) da amostra. Ou seja, 17 batimentos por minuto, pois 92 − 75 = 17.

6. c) Somando as frequências absolutas referentes aos valores superiores a 79 batimentos por minuto, obtemos 24 estudantes (3 + 6 + 3 + 7 + 5 = 24).

6. d) Pela tabela, vemos que o valor de maior frequência absoluta foi 76 batimentos por minuto.

8. a) Ao estabelecer a razão entre a medida de área de um campo de futebol com 1 hectare $\left(\frac{10\,800}{10\,000}\right)$, determinamos que 1 campo de futebol equivale à 1,08 hectare. Assim, em medidas aproximadas: no Paraná, foram desmatados 2 562 campos de futebol $\left(\frac{2767}{1{,}08} \simeq 2562\right)$; na Bahia, foram desmatados 3 270 campos de futebol $\left(\frac{3532}{1{,}08} \simeq 3270\right)$; em Minas Gerais, foram desmatados 4 630 campos de futebol $\left(\frac{5000}{1{,}08} \simeq 4630\right)$.

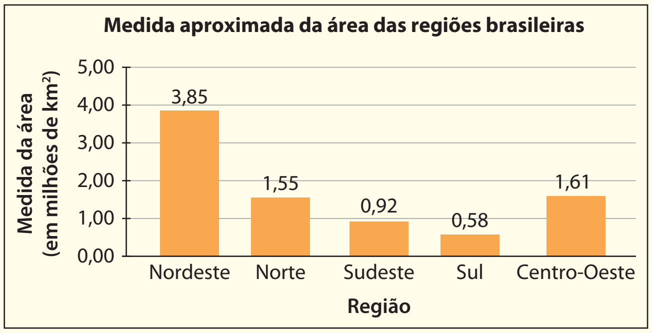
8. b)



Dados obtidos em: RELATÓRIO anual 2020. SOS Mata Atlântica. Disponível em: https://cms.sosma.org.br/wp-content/uploads/2021/07/Relat%C3%B3rio_SOSMA_2020_01_COM-REVIS%C3%95E_12_07_2021.pdf. Acesso em: 23 maio 2022.

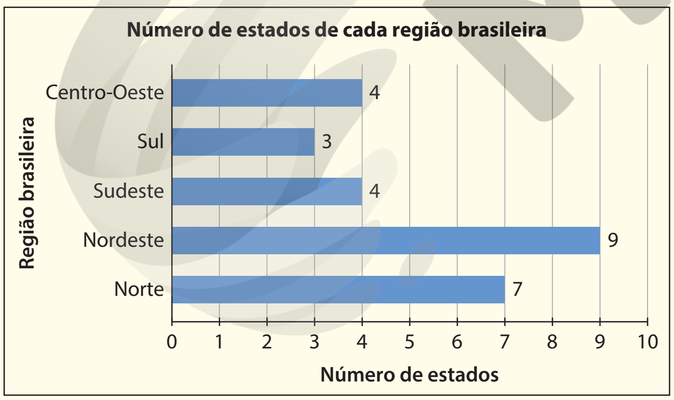
8. c) A resposta depende dos dados pesquisados pelos estudantes.

9. a)



Dados obtidos em: IBGE. ÁREAS territoriais. IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/geociencias/organizacao-do-territorio/estrutura-territorial/15761-areas-dos-municipios?=&t=acesso-ao-produto. Acesso em: 21 jun. 2022.

9. b) Para elaborar o gráfico pedido, é necessária uma breve pesquisa para obter os dados mostrados a seguir:

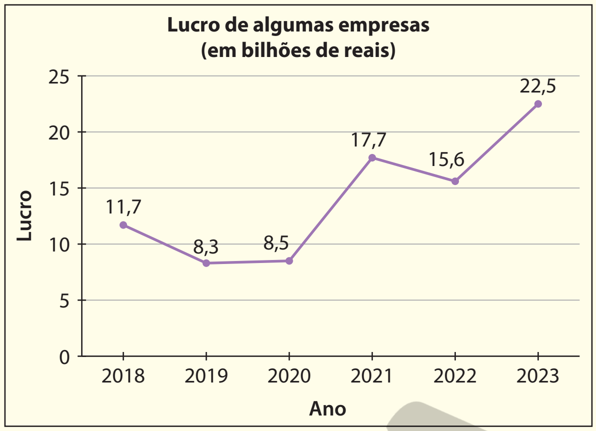


Dados obtidos em: IBGE. IBGE Educa: crianças. Nosso território. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/criancas/brasil/nosso%E2%80%92territorio/19637%E2%80%92divisao%E2%80%92territorial.html. Acesso em: 29 jul. 2022.

9. c) A região de maior medida de área é a região Norte.

9. d) Não é correto, pois a região com mais estados (Nordeste) não é a de maior medida de área.

11. a)



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pela empresa de consultoria.

11. b) O lucro foi maior no ano de 2023, de 22,5 bilhões de reais.

11. c) Embora tenha oscilado, o lucro parece ter apresentado tendência de aumento.

12. a) Multiplicando a quantidade de ícones por 4, concluímos que há 72 funcionários no departamento de produção ($18 \cdot 4 = 72$).

12. b) No departamento de limpeza, há 12 funcionários ($3 \cdot 4 = 12$).

12. c) O enunciado sugere que há outros departamentos na empresa além desses dois; então, um gráfico de setores não seria adequado, pois desconhecemos o universo total de funcionários da empresa.

13. A resposta depende de pesquisa pessoal dos estudantes.

14. b) Precisamos contar, dentre os resultados, aqueles que são estritamente maiores do que 3,0: temos 5 ocorrências de 4,0 e 3 ocorrências de 4,5, totalizando 8.

14. c) Dentre os resultados obtidos, aqueles que gastam exatamente 3 horas são 6 pessoas. Logo, a frequência relativa é de $6 : 20 = 0{,}3 = 30\%$.

14. d) As pessoas que gastam de 4 a 5 horas ouvindo músicas durante um dia.

14. e) Não, pois segundo a tabela, a frequência relativa dos jovens que passam mais de 3 horas por dia ouvindo música é de 40%, pois: $8 : 20 = 0{,}4 = 40\%$.

15. b) De acordo com os dados da tabela concluímos que a frequência relativa dos participantes do Enem com 18 anos é de 15%.

15. c) Os estudantes com idade estritamente superior a 17 anos são aqueles de 18 a 19 anos. Considerando os dados da tabela, a quantidade de estudantes corresponde a uma porcentagem de: $15\% + 10\% = 25\%$.

15. d) De acordo com os dados do gráfico, é possível concluir que a quantidade de participantes do Enem diminui.

16. a) Pela tabela, concluímos que 3 meninos, de um total de 30, acessam a internet de 3 a 4 horas semanalmente. Isso equivale a 10% do total de meninos, pois $5 : 30 \simeq 0{,}167 \simeq 16{,}7\%$. Em relação ao total de meninas, temos que 4 de 24 meninas acessam a internet de 3 a 4 horas semanalmente. Isso equivale a um percentual de: $5 : 24 \simeq 0{,}208 \simeq 20{,}8\%$. Portanto, não são iguais.

16. b) Espera-se que os estudantes concluam que o percentual não é igual. Portanto, a resposta ao **item a** estaria correta.

24. a) O número médio de automóveis vendidos é dado por: $\frac{38 + 22 + 42}{3} = 34$

Portanto, em média, foram vendidos 34 automóveis.

24. b) Em março, foram vendidos 42 automóveis. Como a média foi de 34 automóveis, isso corresponde a 8 automóveis acima da média, pois $42 - 34 = 8$.

24. c) Se o número médio de automóveis vendidos por mês é de 34 , em um semestre espera-se que a venda seja de 204 automóveis ($6 \cdot 34 = 204$).

24. d) Uma maneira é extrapolar o valor da média para os 6 meses, ou seja, $6 \cdot 34 = 204$. Outra forma é utilizar os valores reais dos três meses iniciais para os meses subsequentes: $38 + 22 + 42 + 38 + 22 + 42 = 204$.

27. b) A distribuição dos salários é bimodal, com moda 2 200 reais e 2 320 reais, pois ambos os valores aparecem com a mesma frequência, maior do que a dos demais salários.

27. c) Neste caso, calculamos a média ponderada:

$$\frac{2 \cdot 2050 + 3 \cdot 2200 + 3 \cdot 2320 + 2780 + 5970}{2 + 3 + 3 + 1 + 1} =$$

$$= \frac{4100 + 6600 + 6960 + 2780 + 5970}{10} = \frac{26410}{10} =$$

$$= 2641$$

Portanto, a média é de 2 641 reais.

27. d) Os funcionários que recebem até 2 320 reais recebem abaixo do salário mensal médio. Portanto, são 8 funcionários ($2 + 3 + 3 = 8$). Como há 10 funcionários, esse valor corresponde a 80% do total ($8 : 10 = 0{,}8 = 80\%$).

28. Calculando a média ponderada pelos pesos descritos, temos:

$$\text{média} = \frac{3 \cdot 8 + 2 \cdot 5}{3 + 2} = \frac{24 + 10}{5} = \frac{34}{5} = 6{,}8$$

29. Calculando a média ponderada, temos:

$$\frac{1 \cdot 4{,}0 + 2 \cdot 7{,}0 + 3 \cdot 8{,}0}{1 + 2 + 3} = \frac{4 + 14 + 24}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

30. Fazemos uma média ponderada com o número de ocorrências de cada valor:

$$\frac{5 \cdot 48000{,}00 + 10 \cdot 45000{,}00}{5 + 10} =$$

$$= \frac{240000{,}00 + 450000{,}00}{15} = \frac{690000{,}00}{15} = 46000$$

Assim, o valor médio dos terrenos vendidos é R$ 46 000,00

31. Oriente os estudantes na elaboração dos problemas sobre média aritmética ponderada.

34. a) O número total de jovens que vivem no edifício é obtido adicionando as quantidades correspondentes a cada idade: $6 + 7 + 4 + 8 = 25$.

Portanto, há 25 jovens.

34. b) A idade média é obtida por:

$$\text{idade média} = \frac{6 \cdot 20 + 7 \cdot 19 + 4 \cdot 18 + 8 \cdot 17}{25} =$$

$$= \frac{120 + 133 + 72 + 136}{25} = \frac{461}{25} = 18{,}44$$

Logo, a idade média é de 18,44 anos.

34. c) A idade modal é aquela com a maior frequência absoluta. Portanto, 17 anos.

34. d) Para calcular a idade mediana, observamos antes que há 25 dados, uma quantidade ímpar. Logo, precisamos obter a idade correspondente à posição central da lista ordenada de todas as idades registradas, que é a posição 13. Assim, temos:

- posições 1 a 8: 17 anos
- posições 9 a 12: 18 anos
- posição 13: 19 anos.

Portanto, a idade mediana é de 19 anos.

34. e) Acrescentando-se dois jovens de 16 anos aos dados, o número total de jovens aumenta de 25 para 27. Desse modo, o número de jovens de 16 anos passa a ser 2. Os novos cálculos passam a ser:

$$\text{média} = \frac{6 \cdot 20 + 7 \cdot 19 + 4 \cdot 18 + 8 \cdot 17 + 2 \cdot 16}{27} =$$

$$= \frac{120 + 133 + 72 + 136 + 32}{27} = \frac{493}{27} \simeq 18{,}26$$

Assim, a média passa a ser de aproximadamente 18,26 anos.

A moda continua igual, pois 17 anos continua sendo a idade de maior frequência.

Como agora há 27 dados, a mediana passa a ser a idade correspondente à posição central, 14ª da lista ordenada. Então, temos:

- posições 1 e 2: 16 anos
- posições 3 a 10: 17 anos
- posições 11 a 14: 18 anos

Assim, a nova mediana é de 18 anos.

35. a) Ordenando os valores registrados por Marta, temos: 10, 15, 15, 15, 20, 20, 20, 25, 30, 30, 30, 35, 35, 40, 40, 50, 60, 60, 90, 90, 120. Como há 21 valores, que é um número ímpar, a mediana é o termo que ocupa a posição central, que é a 11ª. Logo, a mediana é 30 minutos.

35. b) Para encontrar a moda, é conveniente organizar os dados em uma tabela de frequência:

Tempo gasto no percurso até a escola

Tempo (min)	10	15	20	25	30	35	40	50	60	90	120
Frequência absoluta	1	3	3	1	3	2	2	1	2	2	1

Dados fictícios.

Nela, vê-se que a sequência dos valores obtidos é trimodal, com modas 15, 20 e 30 minutos.

35. c) O tempo médio é calculado ponderando os valores registrados pelo respectivo número de ocorrências. Adicionando os valores: $1 \cdot 10 + 3 \cdot 15 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 25 +$ $+ 3 \cdot 30 + 2 \cdot 35 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 50 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 90 +$ $+ 1 \cdot 120 = 850$

tempo médio $= \dfrac{850}{21} \simeq 40{,}5$ (40,5 minutos)

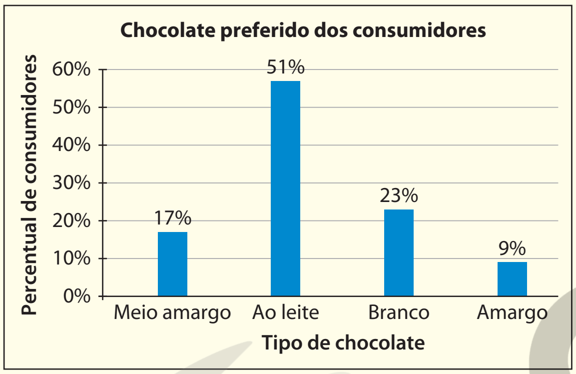
35. d) O mais importante aqui é despertar nos estudantes a reflexão de que fatores podem influenciar as medidas de tendência central.

36. a) Como "tipo de chocolate" não é uma variável quantitativa (isto é, que assume valores numéricos), a única medida estatística que faz sentido neste caso é a moda, que indica o chocolate preferido pela maioria dos consumidores.

36. b) Primeiro, calculamos o número total de consumidores: $255 + 765 + 345 + 135 = 1\,500$. Depois, calculamos as porcentagens de cada tipo:

- Meio amargo: $255 : 1\,500 = 0{,}17 = 17\%$
- Ao leite: $765 : 1\,500 = 0{,}51 = 51\%$
- Branco: $345 : 1\,500 = 0{,}23 = 23\%$
- Amargo: $135 : 1\,500 = 0{,}09 = 9\%$

36. c)



Dados obtidos pela empresa.

37. Sim, pois, a princípio, qualquer tipo de sorteio honesto apresenta um resultado imprevisível e, portanto, constitui um experimento aleatório.

38. O espaço amostral contém 17 resultados possíveis, pois $9 + 5 + 3 = 17$. Os resultados favoráveis são aqueles correspondentes à retirada de uma das 5 bolas amarelas. Logo, a probabilidade buscada é dada pela razão:

$\dfrac{5}{17} \simeq 0{,}29 \simeq 29\%$

39. O espaço amostral consiste em todos os 30 estudantes da sala. Como há 18 meninas na sala, isso significa que a probabilidade de sortear uma menina é dada pela razão $\dfrac{18}{30} = 0{,}6 = 60\%$. Por outro lado, o número de meninos é $30 - 18 = 12$. Portanto, a probabilidade de sortear um menino é dada pela razão $\dfrac{12}{30} = 0{,}4 = 40\%$. Observamos que as probabilidades somam $60\% + 40\% = 100\%$.

40. Já vimos na Situação 2, descrita antes deste exercício, que o espaço amostral do lançamento de dois dados consiste em 36 elementos.

40. a) Dentre todos os resultados possíveis, aqueles cuja soma é 8 são: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3) e (6, 2). Portanto, há 5 casos favoráveis, e a probabilidade buscada é dada pela razão: $\dfrac{5}{36} \simeq 0{,}14 \simeq 14\%$

40. b) Dentre todos os resultados possíveis, aqueles cuja soma é par são: (1, 1), (3, 1), (5, 1), (2, 2), (4, 2), (6, 2), (1, 3), (3, 3), (5, 3), (2, 4), (4, 4), (6, 4), (1, 5), (3, 5), (5, 5), (2, 6), (4, 6) e (6, 6). Portanto, há 18 casos favoráveis, e a probabilidade buscada é dada pela razão:

$\dfrac{18}{36} = 0{,}5 = 50\%$

40. c) Dentre todos os resultados possíveis, aqueles cuja soma é maior que 10 são (5, 6), (6, 5) e (6, 6). Portanto, há 3 casos favoráveis, e a probabilidade buscada é dada pela razão:

$\dfrac{3}{36} \simeq 0{,}08 \simeq 8\%$

41. Esta questão é de resposta pessoal. Os estudantes devem considerar a razão entre o número de meninos e o total de estudantes na sala para determinar a probabilidade buscada.

Pense mais um pouco...

Página 80

a) Os pontos totais de cada equipe são obtidos pela soma dos pontos obtidos individualmente por cada uma de suas integrantes. Assim, temos:
Equipe A:
420 pontos, pois $60 + 70 + 70 + 70 + 80 + 70 = 420$
Equipe B:
420 pontos, pois $120 + 120 + 40 + 70 + 70 + 0 = 420$

b) Ambas as equipes têm seis integrantes.

c) A média é dada pela divisão do total de pontos pelo número de integrantes. Logo, a média da **Equipe A** foi de 70 pontos $\left(\dfrac{420}{6} = 70\right)$, e a média da **Equipe B** foi de 70 pontos $\left(\dfrac{420}{6} = 70\right)$.

d) Ambas as equipes obtiveram a mesma média.

e) Nesse caso, a média não traduz o perfil de cada equipe: no caso da **Equipe A**, as notas individuais concentram-se em torno do valor médio. Entretanto, no caso da **Equipe B**, algumas atletas receberam notas muito altas, enquanto Rute e Bete receberam notas muito baixas, revelando desempenhos desiguais entre as integrantes.

Trabalhando a informação

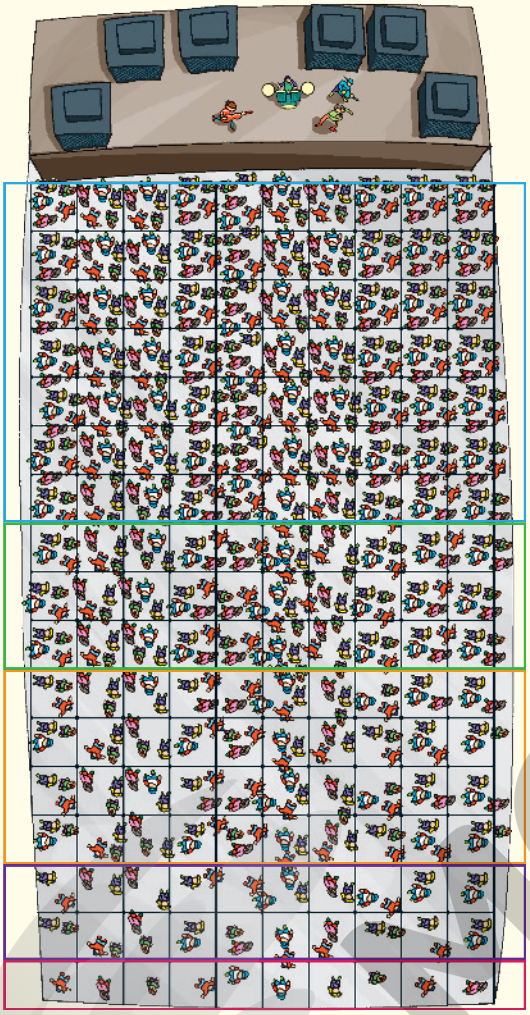
Página 83

Esta é uma questão cuja abordagem será bastante dependente das escolhas feitas pelos estudantes. Além da questão discutida no quadro de como fazer uma boa seleção de amostra, é importante discutir como fazer uma coleta de dados imparcial (evitando julgamentos na hora de formular as perguntas e reações ao escutar as respostas, por exemplo) e quais serão as medidas estatísticas relevantes. Por exemplo, grupos que escolherem variáveis qualitativas deverão usar a moda. Já grupos que escolherem variáveis quantitativas deverão fazer gráficos para verificar se a dispersão dos dados obtidos justifica o uso da média. Pode ser uma boa oportunidade para abordar planilhas eletrônicas e suas funções estatísticas e gráficas.

Para saber mais

1. Analisando a figura, distinguimos cinco regiões principais de densidades diferentes:

JOSÉ LUÍS JUHAS//ARQUIVO DA EDITORA



A região 1 contém 70 ladrilhos, a região 2 contém 30 ladrilhos, a região 3 contém 40 ladrilhos, a região 4 contém 20 ladrilhos e a região 5 contém 10 ladrilhos. Logo, deve haver aproximadamente 640 pessoas, pois:

$5 \cdot 70 + 4 \cdot 30 + 3 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 10 =$

$= 350 + 120 + 120 + 40 + 10 = 640$

2. Os estudantes devem perceber que, se a avenida for supostamente reta, sua área é dada pelo produto entre as medidas de comprimento e largura: $1\,000 \text{ m} \cdot 26 \text{ m} = 26\,000 \text{ m}^2$. Assim, se 300 000 pessoas estiveram ao mesmo tempo na avenida, isso daria uma densidade de aproximadamente 11,5 pessoas por metro quadrado ($300\,000 : 26\,000 \simeq 11{,}5$).

3. A resposta é pessoal e depende das pesquisas dos estudantes.

Exercícios complementares

2. Localizando 32 na lista de idades, vemos que há 18 registros de idades inferiores a 32:

18 - 19 - 20 - 20 - 20 - 24 - 24 - 24
24 - 24 - 28 - 28 - 28 - 30 - 30 - 30
30 - 30 - 32 - 32 - 35 - 35 - 35 - 35
36 - 36 - 36 - 36 - 36 - 40 - 40 - 40
42 - 45 - 45 - 48 - 48 - 50 - 50 - 60

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, a porcentagem dos funcionários com idade inferior a 32 anos é de $\frac{18}{40} = 0{,}45 = 45\%$. Alternativa **a**.

3. O espaço amostral consiste em todos os 40 funcionários, enquanto o número de casos favoráveis é igual ao número de funcionários com menos de 25 anos. A partir da lista de idades, vemos que há 10 funcionários com essas características:

18 - 19 - 20 - 20 - 20 - 24 - 24 - 24
24 - 24 - 28 - 28 - 28 - 30 - 30 - 30
30 - 30 - 32 - 32 - 35 - 35 - 35 - 35
36 - 36 - 36 - 36 - 36 - 40 - 40 - 40
42 - 45 - 45 - 48 - 48 - 50 - 50 - 60

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a probabilidade buscada é dada pela razão: $\frac{10}{40} = \frac{2}{8}$. Alternativa **b**.

4. Se o total de árvores frutíferas é de 350, essa quantidade corresponde a 100% das árvores. Assim, se *x* laranjeiras respondem por 40% das árvores, temos a proporção:

$$350 \text{ — } 100\%$$
$$x \text{ — } 40\%$$

Segue, $100x = 14\,000$, ou, ainda, $x = 140$. Analogamente, se há y mangueiras, temos a proporção:

$$350 \text{ — } 100\%$$
$$y \text{ — } 10\%$$

Segue, $100y = 3\,500$ ou, ainda, $y = 35$. Portanto, há 140 laranjeiras e 35 mangueiras. Alternativa **a**.

5. Pelo enunciado, a condição mínima de permanência do gerente é atingida quando a média aritmética dos lucros mensais ao longo do semestre for de 30 mil reais. Assim, o lucro *x* necessário no mês de junho para que isso aconteça deve cumprir a seguinte condição:

$$\frac{21 + 35 + 21 + 30 + 38 + x}{6} = 30\text{, ou, ainda, } \frac{145 + x}{6} = 30$$

Multiplicando ambos os lados desta última equação por 6, temos:

$$6 \cdot \left(\frac{145 + x}{6}\right) = 6 \cdot 30 \Rightarrow 145 + x = 180 \Rightarrow x = 180 - 145 = 35$$

Assim, a empresa precisa alcançar um lucro de pelo menos 35 mil reais em junho para que o gerente permaneça no cargo. Alternativa **e**.

6. a) Vemos que o menor valor obtido na pesquisa foi de 10 minutos, e o maior foi de 100. Assim, uma forma de satisfazer à proposta do enunciado é adotar classes de 1 a 21 até 81 a 101 (a adoção do 1 pode ser justificada pelo fato de que 0 não é um valor esperado para essa amostra).

6. b) Ordenando os dados, temos: 10, 15, 15, 15, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 25, 25, 25, 30, 30, 30, 30, 30, 30, 35, 35, 35, 35, 40, 40, 40, 60, 60, 60, 60, 90, 90, 90, 100, 100, 100, 100, 100.

A média aritmética é obtida ponderando cada valor pelo número de ocorrências:

$$\text{média} = \frac{10 + 3 \cdot 15 + 8 \cdot 20 + 3 \cdot 25 + 6 \cdot 30 + 4 \cdot 35 + 3 \cdot 40 + 4 \cdot 60 + 3 \cdot 90 + 5 \cdot 100}{40} = \frac{1740}{40} = 43{,}5 \text{ (43,5 minutos)}$$

A moda é o valor registrado com maior frequência. Portanto, 20 minutos. Por fim, como há um número par (40) de valores, a mediana é a média aritmética dos valores centrais ocupando a 20ª e a 21ª posição: $\frac{30 + 30}{2} = 30$ (30 minutos).

6. c) O espaço amostral é composto dos 40 trabalhadores selecionados. Dentre estes, 3 gastam 90 minutos no trajeto. Assim, o número de casos favoráveis é 3, e a probabilidade pedida é dada pela razão: $\frac{3}{40} = 0{,}075 = 7{,}5\%$

7. a) Obtemos a quantidade total de pessoas que se filiaram durante o mês de julho somando os valores referentes a cada idade: $30 + 7 + 2 + 10 + 12 + 18 + 21 = 100$.

Assim: $\text{idade média} = \frac{30 \cdot 14 + 7 \cdot 16 + 2 \cdot 18 + 10 \cdot 20 + 12 \cdot 21 + 18 \cdot 27 + 21 \cdot 30}{100} =$

$= \frac{420 + 112 + 36 + 200 + 252 + 486 + 630}{100} = \frac{2136}{100} = 21{,}36$ (21,36 anos)

7. b) A idade modal é 30 anos, pois foi a que registrou o maior número de ocorrências. Como há um número par de dados, a mediana é dada pela média aritmética das duas posições centrais da sequência ordenada dos dados. Como há 100 dados, essas posições são a 50ª e a 51ª.

- as posições 1 a 30 são ocupadas pelo valor 14;
- as posições 31 a 37 são ocupadas pelo valor 16;
- as posições 38 e 39 são ocupadas pelo valor 18;
- as posições 40 a 49 são ocupadas pelo valor 20;
- as posições 50 e 51 são ocupadas pelo valor 21.

Logo, a idade mediana é 21 anos.

8. O total de pessoas consultadas foi de 4500, e esse valor corresponde ao todo. Como o candidato recebeu 1050 indicações de votos, podemos estabelecer a seguinte relação: $\frac{350}{1500} \cdot 360 = \frac{126000}{1500} = 84$. Logo, a medida do ângulo central do setor que representará esse candidato é de 84°. Alternativa **b**.

9. Interpretando o local exato da queda do paraquedista como um experimento aleatório, a probabilidade de ele pousar na região quadrada é dada pela proporção que ela ocupa em relação ao terreno maior. Recordando que a área de uma região retangular é dada pelo produto da medida dos lados, temos:

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{área da região quadrada}}{\text{área do terreno retangular}} = \frac{8 \cdot 8}{24 \cdot 16} = \frac{64}{384} \simeq 0{,}17 \simeq 17\%$$

10. Seja x a idade do funcionário que se demitiu. Se a média das idades dos funcionários inicialmente era m, temos:

$$m = \frac{x + (\text{soma das idades dos demais funcionários})}{18}$$

Após esse funcionário se demitir, as soma das idades dos demais funcionários não se altera, mas, com a contratação do novo funcionário de 22 anos, a média das idades passa a ser dada por:

$$\frac{22 + (\text{soma das idades dos demais funcionários})}{18}$$

É informado que essa nova média é igual à anterior, diminuída de 2 anos, assim:

$$\frac{22 + (\text{soma das idades dos demais funcionários})}{18} = m - 2$$

Igualando as expressões, temos:

$$\frac{22 + (\text{soma das idades dos demais funcionários})}{18} = \frac{x + (\text{soma das idades dos demais funcionários})}{18} - 2$$

Multiplicando os dois lados da equação por 18:

$22 + (\text{soma das idades dos demais funcionários}) = x + (\text{soma das idades dos demais funcionários}) - 36$

Note que a soma das idades dos demais funcionários, embora desconhecida, pode ser subtraída dos dois lados da equação. Assim, obtemos:

$22 = x - 36$, ou, ainda, $x = 22 + 36 = 58$

Então, a idade do funcionário é 58 anos. Alternativa **e**.

Verificando

1. Uma amostra deve ser imparcial e, portanto, integrar as características da população que ela representa. Assim, uma amostra de estudantes de uma escola deve conter alunos das diferentes turmas e dos diferentes períodos. Alternativa **c**.

2. Vejamos o que se pode afirmar sobre a veracidade de cada sentença:

2. a) Falsa: como 1 000 pessoas participaram da pesquisa, a porcentagem de 41,60% = 0,416 dos que preferem *smartphones* equivale a $0{,}416 \cdot 1000 = 416$ pessoas. Portanto, esta alternativa é falsa.

2. b) Falsa: pelo gráfico, vemos que a opção *tablet* recebeu 2,20% dos votos, menos do que a opção “outros”, que recebeu 2,90%. Portanto, esta alternativa é falsa.

2. c) **Verdadeira**: somando os 9,20% que preferem *notebook* aos 18,30% que preferem computador, obtemos 27,50% dos pesquisados, mais do que 25%.

2. d) Falsa: Esta alternativa é falsa, pois o console foi a segunda opção mais votada.

3. Obtemos o total de clientes consultados na pesquisa somando a quantidade referente a cada marca: $205 + 103 + 92 = 400$. As frequências relativas são obtidas dividindo-se a quantidade de clientes que preferem cada marca pelo total:

- Marca A: $\dfrac{205}{400} = 0{,}5125 \simeq 0{,}51$
- Marca B: $\dfrac{103}{400} = 0{,}2575 \simeq 0{,}26$
- Marca C: $\dfrac{92}{400} = 0{,}23$

Logo, a correta é a alternativa **c**.

4. A moda dos dados corresponde ao tipo de livro com maior ocorrência nos resultados da pesquisa. Como quadrinhos teve maior ocorrência, a moda dos dados é quadrinhos. Alternativa **a**.

5. Somando as notas ponderadas pelos pesos prescritos, temos:

$$\text{média} = \frac{1 \cdot 8 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{1 + 2 + 3} = \frac{8 + 10 + 21}{6} = \frac{39}{6} = 6{,}5$$

Alternativa **a**.

6. Ordenando a sequência, temos: 1 200, 1 500, 1 500, 1 800, 2 300, 2 700, 3 000, 4 500, 5 000, 6 000. Como há 10 dados, uma quantidade par, a mediana é dada pela média aritmética dos dois valores centrais, na 5ª e na 6ª posição: $\dfrac{2300 + 2700}{2} = \dfrac{5000}{2} = 2500$ (2 500 reais). Alternativa **b**.

Capítulo 4 – Cálculo algébrico

Objetivos do capítulo e justificativas

- Conceituar variável e incógnita.
- Conceituar expressão algébrica.
- Determinar o valor numérico de uma expressão algébrica.
- Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo do valor numérico de expressões algébricas e fórmulas.
- Conceituar monômios e operar com eles.
- Reconhecer procedimentos para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica.
- Determinar a fração geratriz de uma dízima periódica.
- Identificar regularidades em sequências recursivas.
- Resolver problemas que envolvem área de retângulos.

O cálculo algébrico, no que se refere à compreensão de variável e incógnita, de monômios e de operações com monômios, é necessário para que os estudantes possam continuar os estudos envolvendo conteúdos matemáticos essenciais, como a resolução de equações e a compreensão de funções. Nesse sentido, o estudo de fração geratriz favorece a ampliação e aprofundamento da compreensão dos números racionais e é importante para, no 9º ano, os estudantes compreenderem os números irracionais e a reta real. Desse modo, contribuímos para o trabalho com a **competência geral 2** e as **competências específicas 2** e **3**.

Além disso, resolver problemas que envolvem o cálculo algébrico e o valor numérico de expressões algébricas possibilita desenvolver as **competências específicas 5** e **6**, pois contribui-se para o aprimoramento de ferramentas matemáticas e da utilização de tecnologias digitais, visto que envolve a modelagem de situações reais ou imaginadas por meio de expressões de cálculo, com incógnitas ou variáveis.

A identificação de regularidades de sequências recursivas e a resolução de problemas envolvendo área de retângulos favorecem o estudo dos conteúdos do capítulo, pois possibilitam relacionar as Unidades Temáticas **Números** e **Geometria** à **Álgebra**, desenvolvendo, assim, a **competência específica 3**.

Em diferentes momentos do capítulo, apresentam-se atividades para serem realizadas em duplas ou grupos, o que favorece o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e da **competência específica 8**, pois os estudantes precisam trabalhar com os colegas de maneira cooperativa e exercitar o diálogo e a resolução de conflitos. Além disso, a proposta de realização de uma pesquisa possibilita aos estudantes planejar e desenvolver, coletivamente, as etapas envolvidas para a coleta e apresentação de dados.

Na *Abertura* de capítulo, apresentamos aos estudantes a equação sobre a teoria da relatividade; em seguida, trabalhamos com a fórmula de Young, utilizada para calcular a dosagem dos remédios dados a uma criança. Deste modo, contribui-se para o trabalho com as **competências gerais 1** e **8**.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

O foco deste capítulo é a Unidade Temática **Álgebra**, no qual se amplia o trabalho já feito no 7º ano com expressões algébricas (EF07MA13 e EF07MA15). Este é o primeiro capítulo do livro em que esse estudo será desenvolvido, envolvendo as noções de variável e incógnita, valor numérico de expressões algébricas, operações com monômios, entre outros; assim, desenvolve-se a habilidade (EF08MA06), além de promover articulação com a Unidade Temática **Grandezas e medidas**, e utiliza-se a noção de área de retângulos associada a expressões algébricas.

Abordam-se em uma seção *Pense mais um pouco...* a busca de regularidades em sequências, mobilizando aspectos da habilidade (EF08MA11) e, na seção *Para saber mais*, um procedimento algébrico para determinar a fração geratriz de uma dízima periódica, nesse caso articulando-se com a Unidade Temática **Números** e desenvolvendo a habilidade (EF08MA05).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. Em um dos pratos da balança, temos 900 g, pois 200 + 200 + + 500 = 900. No outro, temos cinco vezes a massa x de cada maçã, ou seja, $5x$. Se a balança está em equilíbrio, as massas em ambos os pratos são iguais. Assim:
$5x = 900$

2. a) A diferença entre x e y é dada por: $x - y$

2. b) O triplo do número n é $3n$. Assim, a soma de m com o triplo do número n é: $m + 3n$

2. c) O quociente do número a pelo número b é: $\dfrac{a}{b}$

2. d) A adição de a e b é $a + b$. As parcelas dessa adição são cada um dos termos a e b. Assim, trocar a sua ordem significa fazer $b + a$. Dizer que essa troca de ordem não altera a soma significa dizer que ambas as operações resultam iguais:
$a + b = b + a$

2. g) O cubo de um número y é representado por: y^3

3. a) Por convenção, sabemos que os algarismos lidos da direita para a esquerda representam unidades, dezenas, centenas e milhares, respectivamente. Assim, d é o algarismo das unidades, c o das dezenas, b o das centenas e a o dos milhares.

4. Observa-se que a divisão com resto corresponde a:
dividendo = quociente · divisor + resto
Nesse caso, o resto pode assumir qualquer valor entre 0 e uma unidade a menos do que o divisor. Assim, se o divisor é x, o maior valor possível para o resto é $x - 1$. Queremos determinar o dividendo conhecendo o quociente y, o divisor x e o resto $x - 1$. Logo, temos:
$xy + (x - 1) = xy + x - 1$

7. a) A medida do perímetro de uma figura corresponde à soma das medidas dos lados.
Desse modo, para a figura dada, a soma da medida corresponde a: $5a + 5a + 2a + 2a = 14a$

7. b) Substituindo $a = 3{,}6$ na expressão $14a$, obtém-se:
$14 \cdot 3{,}6 = 50{,}4$

7. c) A figura se decompõe em dez quadrados congruentes. Como cada quadrado tem medida de lado a, a medida de sua área é a^2, pois $a \cdot a = a^2$. Como a figura é formada por dez desses quadrados, sua área total é dez vezes esse valor: $10a^2$

7. d) Substituindo $a = 5$ na expresão $10a^2$, obtém-se:
$10 \cdot (5)^2 = 10 \cdot 25 = 250$

8. a) Substituindo $a = \dfrac{5}{2}$ e $b = \dfrac{2}{3}$, temos:

$$2a + 3b = 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2 \cdot 5}{2} + \frac{3 \cdot 2}{3} = 5 + 2 = 7$$

8. b) Substituindo $x = -5$ em $x^2 + 2x$, temos:
$(-5)^2 + 2 \cdot (-5) = 25 - 10 = 15$

8. c) Substituindo $x = 4$ e $y = 2$, temos:

$$\frac{x + y}{x - y} = \frac{4 + 2}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

8. d) Substituindo $a = 2$, $b = -10$ e $c = 12$, temos:

$$\frac{2b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \cdot (-10) + \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} =$$

$$= \frac{-20 + \sqrt{100 - 8 \cdot 12}}{4} = \frac{-20 + \sqrt{100 - 96}}{4} =$$

$$= \frac{-20 + \sqrt{4}}{4} = \frac{-20 + 2}{4} = \frac{-18}{4} = -\frac{9}{2}$$

9. Este é um exercício com infinitas respostas possíveis. A ideia é levar os estudantes a perceber que cada escolha de valor de y determina um único valor de x, pois $x^2 - y = 0$ é o mesmo que $y = x^2$. Assim, $x = 0$ e $y = 0$, ou $x = 1$ e $y = 1$, ou $x = -1$ e $y = 1$, ou $x = -17$ e $y = 289$ são algumas possibilidades de resposta.

10. Uma fração não tem valor numérico determinado quando seu denominador for zero, pois não é possível dividir por zero.

10. a) Igualando o denominador a zero, segue que $a + 5 = 0$. Resolvendo a equação, temos:

$a + 5 = 0 \Rightarrow a = -5$

10. b) Igualando o denominador a zero, segue que $2a - 4 = 0$. Resolvendo a equação, temos:

$$2a - 4 = 0 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = \frac{4}{2} \Rightarrow a = 2$$

11. a) Igualando o denominador a zero, segue que $a - b = 0$. Resolvendo a equação, temos:

$a - b = 0 \Rightarrow a = b$

11. b) Igualando o denominador a zero, segue que $2a + 3b = 0$. Resolvendo a equação, temos:

$$2a + 3b = 0 \Rightarrow 2a = -3b \Rightarrow a = -\frac{3b}{2}$$

12. a) Se $A = 1$, temos: $1 = B \cdot C$

Como A, B e C são números naturais, para que essa igualdade seja verdadeira, B e C devem ser iguais a 1.

12. b) Se $A = 0$, temos: $0 = B \cdot C$

Como A, B e C são números naturais, para que essa igualdade seja verdadeira, B ou C deve ser igual a 0.

13. a) Se José cobra R$ 6,00 por quilômetro rodado, a cada x quilômetros rodados ele acrescenta à taxa inicial de R$ 50,00 o valor de 6 vezes x. Assim, o preço é dado pela expressão $50 + 6x$.

13. b) Um frete de 6 quilômetros significa utilizar $x = 6$ em $50 + 6x$. Portanto, José cobra 86 reais pois: $50 + 6 \cdot 6 = 50 + 36 = 86$

14. a) Aqui, é preciso reconhecer os dados e relacioná-los ao enunciado: 100 W é a potência da lâmpada ($p = 100$). O uso é de 3 horas por dia ($h = 3$). Por fim, é pedido o consumo referente a um número de dias igual a 30 ($d = 30$). Portanto:

$$C = \frac{p \cdot h \cdot d}{1000} = \frac{100 \cdot 3 \cdot 30}{1000} = \frac{9000}{1000} = 9$$

Logo, o consumo é de 9 kWh.

14. b) Novamente, é preciso reconhecer os dados e relacioná-los ao enunciado: 4000 W é a potência do chuveiro ($p = 4000$). O uso é de 1 hora por dia ($h = 1$). Por fim, é pedido o consumo referente a um número de dias igual a 30 ($d = 30$). Portanto:

$$C = \frac{p \cdot h \cdot d}{1000} = \frac{4000 \cdot 1 \cdot 30}{1000} = \frac{12000}{1000} = 120$$

Logo, o consumo é de 120 kWh.

15. O valor numérico da expressão não pode ser ímpar, pois ela é da forma $2x + 4y$. Sabemos que, ao multiplicar por 2 (e, consequentemente, também por 4) qualquer número, o resultado é sempre par, bem como a soma de dois números pares é sempre par.

16. a) Substituindo $x = 6$, na expressão:

$$\frac{3x^2 - 12}{(x+2)\cdot(x-2)} = \frac{3\cdot(6)^2 - 12}{(6+2)\cdot(6-2)} = \frac{3 \cdot 36 - 12}{8 \cdot 4} =$$

$$\frac{108 - 12}{32} = \frac{96}{32} = 3$$

Substituindo $x = -4$, obtém-se:

$$\frac{3x^2 - 12}{(x + 2) \cdot (x - 2)} = \frac{3 \cdot (-4)^2 - 12}{(-4 + 2) \cdot (-4 - 2)} = \frac{3 \cdot 16 - 12}{(-2) \cdot (-6)} =$$

$$= \frac{48 - 12}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

Substituindo $x = \frac{2}{3}$, obtém-se:

$$\frac{3x^2 - 12}{(x + 2) \cdot (x - 2)} = \frac{3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 12}{\left(\frac{2}{3} + 2\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - 2\right)} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{4}{9} - 12}{\left(\frac{2}{3} + \frac{6}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{6}{3}\right)} = \frac{\frac{3 \cdot 4}{9} - 12}{\left(\frac{2+6}{3}\right) \cdot \left(\frac{2-6}{3}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{12}{9} - 12}{\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{-4}{3}\right)} = \frac{\frac{12}{9} - \frac{108}{9}}{\frac{8 \cdot (-4)}{3 \cdot 3}} = \frac{\frac{12 - 108}{9}}{\frac{-32}{9}} =$$

$$= \frac{\frac{-96}{9}}{-\frac{32}{9}} = \frac{\frac{96}{9}}{\frac{32}{9}} = \frac{96}{9} \cdot \frac{9}{32} = \frac{96}{32} = 3$$

Substituindo $x = -\frac{3}{2}$, obtém-se:

$$\frac{3x^2 - 12}{(x + 2) \cdot (x - 2)} = \frac{3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 12}{\left(-\frac{3}{2} + 2\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} - 2\right)} =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{9}{4} - 12}{\left(-\frac{3}{2} + \frac{4}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2} - \frac{4}{2}\right)} = \frac{\frac{3 \cdot 9}{4} - 12}{\left(\frac{-3+4}{2}\right) \cdot \left(\frac{-3-4}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{27}{4} - 12}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-7}{2}\right)} = \frac{\frac{27}{4} - \frac{48}{4}}{\frac{1 \cdot (-7)}{2 \cdot 2}} = \frac{\frac{27 - 48}{4}}{\frac{-7}{4}} =$$

$$= \frac{\frac{-21}{4}}{-\frac{7}{4}} = \frac{-\frac{21}{4}}{-\frac{7}{4}} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{21}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

16. b) Uma fração apenas não tem valor numérico quando seu denominador é zero, pois não é possível dividir por zero. Por outro lado, um produto de dois fatores só é zero se pelo menos um dos dois for zero. Assim, os valores de x para os quais não existe o valor numérico da expressão são aqueles para os quais um dos fatores do denominador se anula. Como os fatores são $x + 2$ e $x - 2$, temos as condições $x + 2 = 0$ e $x - 2 = 0$, que são resolvidas por $x = -2$ e $x = 2$, respectivamente.

16. d) Sim, pois $3x^2 - 12 = 3x^2 - 3 \cdot 4 = 3 \cdot (x^2 - 4)$ e, ainda, $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$ (produto notável). Assim, essa expressão vale sempre 3.

17. Resposta pessoal. Algumas questões que podem ser abordadas pelos estudantes são expressões que definem o custo de alguma fatura em termos do consumo ou a média final em termos das notas intermediárias.

18. a) A expressão $2x + 5$ não pode ser considerada um monômio por envolver a operação de adição.

18. b) A expressão $2\dfrac{a}{b}$ não pode ser considerada um monômio por envolver uma variável no denominador.

19. Recordando de que o coeficiente é a parte numérica do monômio, ou seja, tudo o que não é variável (ou incógnita), tem-se:

19. a) O coeficiente de $-2xy$ é -2.

19. b) O coeficiente de $\dfrac{3}{5}a$ é $\dfrac{3}{5}$.

19. e) O coeficiente de $\dfrac{xy^2}{5} = \dfrac{1}{5}xy^2$ é $\dfrac{1}{5}$.

19. f) O coeficiente de $-\dfrac{a}{3} = -\dfrac{1}{3}a$ é $-\dfrac{1}{3}$.

20. a) Como a metade de x é obtida dividindo x por 2, a quantidade de selos de Glaucia é a quantidade x de selos de João dividida por 2, ou seja, $\dfrac{x}{2}$.

20. b) Como o dobro de x é obtido multiplicando x por 2, a quantidade de selos de Ricardo é a quantidade x de selos de João multiplicada por 2, ou seja, $2x$.

20. c) Como dois terços de x são obtidos multiplicando x por $\dfrac{2}{3}$, a quantidade de selos de Gabriel é a quantidade x de selos de João multiplicada por $\dfrac{2}{3}$, ou seja, $\dfrac{2}{3}x$.

22. a) A medida do perímetro é dada por:
$7x + 7x + 5x + 5x = 24x$

22. b) Substituindo $x = 1{,}2$ na expressão $24x$, obtém-se 28,8, pois: $24 \cdot 1{,}2 = 28{,}8$

22. c) A figura se decompõe em 35 quadrados congruentes $(7 \cdot 5 = 35)$. Como cada quadrado tem lado de medida x, sua área mede x^2 $(x \cdot x = x^2)$. Como a figura é formada por 35 desses quadrados, $35x^2$ é a medida de sua área total.

22. d) Substituindo $x = 4{,}5$ na expressão $35x^2$, obtém-se 708,75, pois: $35 \cdot (4{,}5)^2 = 35 \cdot 20{,}25 = 708{,}75$

23. Recordando que monômios são semelhantes quando apresentam mesma parte literal, temos:

23. a) $4x$ e $-7x$ são semelhantes, pois apresentam mesma parte literal x.

23. b) $5ab$, $3ab$ e $2ab$ são semelhantes, pois apresentam mesma parte literal ab.

23. c) $\dfrac{a}{3}$ e $5a$ são semelhantes, pois apresentam mesma parte literal a.

23. d) $2a$ e $2b$ não são semelhantes, pois apresentam partes literais diferentes, $a \neq b$.

23. e) $8a^2$ e $-5a$ não são semelhantes, pois apresentam partes literais diferentes, $a^2 \neq a$.

23. f) -6, -2 e $10{,}4$ são semelhantes, pois os três não apresentam parte literal.

23. g) $7x^2y$ e $9xy^2$ não são semelhantes, pois apresentam partes literais diferentes, $x^2y \neq xy^2$ (as potências em x e y não são as mesmas).

23. h) $12xy$ e $-21yx$ são semelhantes, pois suas partes literais são as mesmas, xy e yx, que são equivalentes, pois a ordem dos fatores não altera o produto.

24. a) A medida do perímetro é dada por:
$3x + 3x + 3x + 3x = 4 \cdot (3x) = 12x$
Já a medida da área de um quadrado é dada por:
$(3x)^2 = 3^2x^2 = 9x^2$

24. b) Os monômios $12x$ e $9x^2$ não são semelhantes, pois não têm a mesma parte literal: $x \neq x^2$.

25. Resposta pessoal. Algumas questões que podem ser abordadas pelos estudantes são expressões que definem o valor final de alguma fatura em termos de alguma outra variável.

27. a) $(-10x) + (+6x) = -10x + 6x = -4x$

27. b) $(0{,}8x^2y) + (-3{,}5x^2y) = 0{,}8x^2y - 3{,}5x^2y = -2{,}7x^2y$

27. c) $\left(-\dfrac{2}{5}ab\right) + \left(-\dfrac{3}{10}ab\right) = -\dfrac{7}{10}ab$

27. d) $(-9ay) - (-3ay) = -9ay + 3ay = -6ay$

27. e) Se $x = 0{,}\overline{2}$, então $10x = 2{,}\overline{2}$; assim, temos:

$10x - x = 2{,}\overline{2} - 0{,}\overline{2} = 9x = 2$

$x = \dfrac{2}{9}$

Ou seja, $0{,}\overline{2}$ tem como fração geratriz $\dfrac{2}{9}$. Analogamente, $0{,}\overline{5}$ tem como fração geratriz $\dfrac{5}{9}$.

Portanto, como:

$$0{,}\overline{2} - \left(-0{,}\overline{5}\right) = \frac{2}{9} - \left(-\frac{5}{9}\right) = \frac{2}{9} + \frac{5}{9} = \frac{2+5}{9} = \frac{7}{9}$$

segue que:

$$\left(0{,}\overline{2}a^3\right) - \left(-0{,}\overline{5}a^3\right) = \frac{7}{9}a^3$$

28. A medida do segmento $\overline{AB}$ é dada por:

$$AB = AC + CD + DE + EB = y + 2y + \frac{3}{2}y + \frac{5}{4}y = \frac{23}{4}y$$

29. Seja x a quantidade vendida no primeiro mês. Então, no segundo mês, vendeu–se o dobro de x, isto é, 2x. Assim, ao longo dos dois primeiros meses, a quantidade total vendida foi de 3x. De acordo com o enunciado, no terceiro mês, vendeu-se o triplo disso. Ou seja:

$3 \cdot (3x) = 9x$

Portanto, $x + 2x + 9x = 12x$ é o total das vendas.

30. A medida do segmento $\overline{MP}$ é dada por: $MN = MP + MN$. Portanto:

$6{,}5x = MP + 2{,}3x$

$MP = 6{,}5x - 2{,}3x = 4{,}2x$

31. a) $-4xy + 6xy - 5xy = 6xy - 9xy = -3xy$

31. b) $5a^3 + 7a^3 - 9a^3 + 3a^3 = 15a^3 - 9a^3 = 6a^3$

31. c) $-3x - 5x + 2x - x + 4x = 6x - 9x = -3x$

31. d) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{6}x^2 = \frac{9+4-7}{6}x^2 = \frac{6}{6}x^2 = x^2$

31. e) $m^3n^2 + \frac{4}{5}m^3n^2 - \frac{5}{3}m^3n^2 - \frac{1}{9}m^3n^2 =$

$= \frac{45+36-75-5}{45}m^3n^2 = \frac{1}{45}m^3n^2$

33. a) $(4a^2x^3) \cdot (-5ax^2) = 4 \cdot (-5) \cdot (a^2x^3 \cdot ax^2) = (-20) \cdot (a^{2+1}x^{3+2}) =$
$= -20a^3x^5$

33. b) $(-6xy) \cdot (-3y) = (-6) \cdot (-3) \cdot (xy \cdot y) = 18 \cdot x \cdot y^{1+1} = 18xy^2$

33. c) $(0{,}5x) \cdot (2{,}4x^2) = 0{,}5 \cdot 2{,}4 \cdot (x \cdot x^2) = 1{,}2 \cdot x^{1+2} = 1{,}2x^3$

33. d) $\left(-\frac{7}{11}a\right) \cdot (+2ab) \cdot (-11a) = \left[\left(-\frac{7}{11}\right) \cdot (+2) \cdot (-11)\right] \cdot (a \cdot ab \cdot a) =$

$= [(-7) \cdot (+2) \cdot (-1)] \cdot (a^{1+1+1}) \cdot b = 14a^3b$

33. e) $(-2ax) \cdot \left(\frac{3}{2}ax^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right) = (-2) \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (ax \cdot ax^2 \cdot a) =$

$= \frac{(-2) \cdot 3 \cdot (-1)}{2 \cdot 2} \cdot (a^{1+1+1} \cdot x^{1+2}) = \frac{6}{4} \cdot (a^3 \cdot x^3) =$

$= \frac{3}{2}a^3x^3$

34. a) $(16x^5) : (-4x^2) = -4x^3$, pois $16 : (-4) = -4$ e $x^5 : x^2 = x^{5-2} = x^3$

34. b) $(36xy^4) : (-6xy) = -6y^3$, pois $36 : (-6) = -6$, $x : x = 1$ e $y^4 : y = y^{4-1} = y^3$

34. c) $(-35a) : (+7a) = -5$, pois $-35 : 7 = -5$ e $a : a = 1$

34. d) $(+3ab^2) : \left(-\frac{10}{5}\right) = -\frac{3}{2}ab^2$, pois $3 : \left(-\frac{10}{5}\right) =$

$= 3 \cdot \left(-\frac{5}{10}\right) = -\frac{3 \cdot 5}{10} = -\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = -\frac{3}{2}$ e

$ab^2 : 1 = ab^2$

34. e) $\left(-\frac{4}{5}x^5y\right) : \left(+\frac{4}{3}x^2y\right) = -\frac{3}{5}x^3$, pois $\left(-\frac{4}{5}\right) : \left(\frac{4}{3}\right) =$

$= -\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = -\frac{3}{5}$, $x^5 : x^2 = x^3$ e $y : y = 1$

35. Primeiro, adicionamos os termos semelhantes:

$5ax^2 - 2ax^2 - 7ax^2 = -4ax^2$ e $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$

Assim:

$(5ax^2 - 2ax^2 - 7ax^2) \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x\right) = (-4ax^2) \cdot \left(\frac{3}{4}x\right) =$

$= (-4) \cdot \left(\frac{3}{4}\right) \cdot (a \cdot x^2 \cdot x) = -3 \cdot (a \cdot x^{2+1}) = -3ax^3$

Agora, substituindo no monômio $-3ax^3$, os valores $a = 2$ e $x = -2$, obtemos:

$-3 \cdot 2 \cdot (-2)^3 = -3 \cdot 2 \cdot (-8) = 48$

36. Primeiro, adicionamos os termos semelhantes:

$\left(\frac{3}{4}x^3y + \frac{2}{3}x^3y - \frac{1}{6}x^3y\right) = \left(\frac{5}{4}x^3y\right)$

Assim:

$\left(\frac{3}{4}x^3y + \frac{2}{3}x^3y - \frac{1}{6}x^3y\right) : \left(\frac{3}{2}x\right) = \left(\frac{5}{4}x^3y\right) : \left(\frac{3}{2}x\right)$

Dividindo-se os coeficientes e as partes literais separadamente, temos:

$\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 3} = \frac{10}{12} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{5}{6}$

$x^3 : x = x^{3-1} = x^2$

Portanto, $\left(\frac{5}{4}x^3y\right) : \left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{5}{6}x^2y$. Substituindo nesse monômio os valores $x = -3$ e $y = 6$, obtemos:

$\frac{5}{6} \cdot (-3)^2 \cdot (6) = \frac{5 \cdot (-3)^2 \cdot 6}{6} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 6}{6} = 5 \cdot 9 = 45$

37. a) Identificamos no triângulo que a base mede x e a altura mede y. Assim, o semiproduto da medida da base pela altura é $\frac{1}{2}xy$. Além disso, a área do retângulo é dada pelo produto das medidas de seus dois lados:

$(2x) \cdot \left(\frac{y}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x \cdot y) = xy$

Logo, a soma de ambas as medidas de área é:

$\frac{1}{2}xy + xy = \frac{3}{2}xy$

37. b) Substituindo no monômio $\frac{3}{2}xy$ os valores $x = 0{,}5$ e $y = 1{,}2$, obtemos:

$\frac{3}{2} \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2 = 1{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 1{,}2 = 0{,}9$

38. a) Pela figura, percebemos que os lados da piscina medirão $2a$ e $3a$. Logo, a medida da área da piscina é dada pelo produto:

$(2a) \cdot (3a) = 2 \cdot 3 \cdot (a \cdot a) = 6 \cdot a^{1+1} = 6a^2$

38. b) O gramado ocupará a parte do terreno que não é ocupada pela piscina. Percebemos que os lados do terreno medem $5a$ e $4a$ ($a + 3a + a = 5a$ e $a + 2a + a = 4a$). Logo, a medida da área total do terreno é dada pelo produto:

$(5a) \cdot (4a) = 20a^2$

Logo, a medida da área de gramado é $14a^2$, pois:

$20a^2 - 6a^2 = 14a^2$

38. c) Substituindo a por 3,2 m na expressão obtida anteriormente, temos:

$14 \cdot (3{,}2)^2 = 14 \cdot 10{,}24 = 143{,}36$

Logo, 143,36 m² é a medida da área de grama utilizada.

39. a) $(+2x)^2 = (+2)^2 \cdot x^2 = 4 \cdot x^2 = 4x^2$

39. b) $(-3a^2)^3 = (-3)^3 \cdot (a^2)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot a^{2 \cdot 3} = -27a^6$

39. c) $(+2x^2y)^3 = (+2)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = 8 \cdot x^{2 \cdot 3} \cdot y^3 = 8x^6y^3$

39. d) $(-xy^2)^4 = (-1)^4 \cdot x^4 \cdot (y^2)^4 = 1 \cdot x^4 \cdot y^{2 \cdot 4} = x^4y^8$

39. e) $(-5x^4y)^1 = -5x^4y$

39. f) $\left(-\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot a^2 = \frac{1}{4}a^2$

40. A medida de área de um quadrado pode ser calculada elevando-se a medida de seu lado ao quadrado. Desse modo, o quadrado de lado medindo $\frac{5}{3}a$ tem medida de área igual a $\frac{25}{9}a^2$, pois:

$$\left(\frac{5}{3}a\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot a^2 = \left(\frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot a^2 = \frac{25}{9}a^2$$

41. a) A medida de volume de um cubo pode ser calculada elevando-se a medida de seu lado ao cubo (ou seja, à terceira potência). Logo, para um cubo de lado medindo $\frac{x}{2}$ cm, a medida de seu volume será:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot x^3 = \left(\frac{1^3}{2^3}\right) \cdot x^3 = \frac{1}{8}x^3$$

41. b) A superfície do cubo é composta de seis faces quadradas. A medida da área de cada superfície é dada por:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot x^2 = \frac{1}{4}x^2$$

Como há seis dessas faces, a área total é dada por:

$$6 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2\right) = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot x^2 = \frac{6 \cdot 1}{4} \cdot x^2 = \frac{3}{2}x^2$$

Pense mais um pouco...

Página 97

a) $9 \cdot 1 + 2 = 9 + 2 = 11$

$9 \cdot 12 + 3 = 108 + 3 = 111$

$9 \cdot 123 + 4 = 1\,107 + 4 = 1\,111$

$9 \cdot 1\,234 + 5 = 11\,106 + 5 = 11\,111$

b) Extrapolando o padrão das expressões anteriores, conclui-se que o valor de $9 \cdot 12\,345 + 6$ é 111 111.

c) $9 \cdot 123\,456 + 7 = 1\,111\,104 + 7 = 1\,111\,111$

Para saber mais

Página 100

a) Considerando $x = 0{,}777\ldots$, temos

$10x - x = 7{,}777\ldots - 0{,}777\ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x = 7{,}000\ldots \Rightarrow 9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9}$

Logo, $\frac{7}{9}$ é a fração geratriz.

b) $7{,}7777\ldots = 10 \cdot 0{,}7777\ldots$

Pelo item **a**, já sabemos que:

$0{,}7777\ldots = \frac{7}{9}$

Portanto: $7{,}7777\ldots = 10 \cdot \frac{7}{9} = \frac{70}{9}$

c) Considerando $x = 0{,}525252\ldots$, temos

$100x - x = 52{,}525252\ldots - 0{,}525252\ldots \Rightarrow 99x = 52{,}000000\ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow 99x = 52 \Rightarrow x = \frac{52}{99}$

Logo, $\frac{52}{99}$ é a fração geratriz.

d) Como $0{,}525252\ldots = \frac{52}{99}$, temos que:

$52{,}525252\ldots = 100 \cdot \frac{52}{99} = \frac{5200}{99}$

Exercícios complementares

1. Se a dosagem do medicamento Y anterior estava correta, sabe-se que, para ele, a fórmula de Young foi aplicada com sucesso. Como para o medicamento Y a dose de adulto é de 42 mg e a da criança é 14 mg, chamando x a idade da criança, podemos escrever:

$$14 = \left(\frac{x}{x + 12}\right) \cdot 42$$

Desenvolvendo:

$$14 = \left(\frac{x}{x + 12}\right) \cdot 42 \Rightarrow 14 = \frac{42x}{x + 12} \Rightarrow 14 \cdot (x + 12) = 42x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14x + 168 = 42x \Rightarrow 42x - 14x = 168 \Rightarrow 28x = 168 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{168}{28} = 6$$

Assim, a criança tem 6 anos. A fórmula de Young, aplicada agora ao medicamento X, fica:

$$\text{dose de criança} = \left(\frac{6}{6 + 12}\right) \cdot 60 = \frac{6}{18} \cdot 60 = \frac{6}{6 \cdot 3} \cdot 60 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 60 = \frac{60}{3} = 20$$

Portanto, a dose é de 20 mg. Alternativa **b**.

2. a) Os lados do retângulo medem $2y$ cm e $10\,y$ cm. Assim, o perímetro é dado, em cm, por:

$10y + 10y + 2y + 2y = 24y$

2. b) O retângulo se decompõe em 20 quadrados equivalentes. Como cada quadrado tem lado medindo y cm, sua área mede, em cm²: $y \cdot y = y^2$. Como o retângulo é formado por 20 desses quadrados, $20y^2$ cm² é sua área total.

2. c) A área pintada de amarelo é formada por sete dos quadrados de área medindo y^2 cm². Portanto, sua área mede $7y^2$ cm².

3. a) $(-3x) + (-8x) = -3x - 8x = -11x$

3. b) $(-12y) + (+6y) = -12y + 6y = -6y$

3. c) $(+5ab) - (-7ab) = 5ab + 7ab = 12ab$

3. d) $(+2xy) + (+13xy) = 2xy + 13xy = 15xy$

4. a) $13,75 = 13,75 \cdot \frac{100}{100} = \frac{1375}{100} = \frac{55}{4}$

$x = 12,833\ldots \Rightarrow 10x = 128,333\ldots \Rightarrow 10x - x = 128,333\ldots -$

$-12,833\ldots \Rightarrow 9x = 115,5 \Rightarrow 9x = \frac{1155}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1155}{10 \cdot 9} \Rightarrow x = \frac{77}{6}$

Assim:

$13,65 + \frac{3}{4} - 12,8333\ldots = \frac{55}{4} + \frac{3}{4} - \frac{77}{6} =$

$= \frac{165 + 9 - 154}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$

4. b) $x = 14,166\ldots \Rightarrow 10x = 141,666\ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x - x = 141,666\ldots - 14,166\ldots \Rightarrow 9x = 127,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x = \frac{1275}{10} \Rightarrow x = \frac{1275}{10 \cdot 9} \Rightarrow x = \frac{85}{6}$

Assim:

$(14,1666\ldots) \cdot \frac{7}{5} : \frac{5}{3} = \left(\frac{85}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{3} : \frac{5}{3}\right) =$

$= \left(\frac{85}{6}\right) \cdot \left(\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{5}\right) = \frac{85}{6} \cdot \frac{7}{5} =$

$= \frac{(5 \cdot 17) \cdot 7}{6 \cdot 5} = \frac{17 \cdot 7}{6} = \frac{119}{6}$

5. a) $-12a + 9a + 5a = -12a + 14a = 2a$

5. b) $15y - 10y - 6y = 15y - 16y = -y$

5. c) $-\frac{3}{4}ax + \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2}ax = \frac{-9 + 4 - 6}{12}ax = -\frac{11}{12}ax$

6. a) $(+2x) \cdot (+3x^2) = 2 \cdot 3 \cdot (x \cdot x^2) = 6 \cdot x^{1+2} = 6x^3$

6. b) $(-3y) \cdot (4y^2) = (-3) \cdot 4 \cdot (y \cdot y^2) = -12 \cdot y^{1+2} = -12y^3$

6. c) $(-4x^2y) \cdot (-3xy^2) = (-4) \cdot (-3) \cdot (x^2y \cdot xy^2) = 12 \cdot (x^{2+1} \cdot y^{1+2}) =$
$= 12x^3y^3$

6. d) $(-5ab) \cdot (+3a) = (-5) \cdot (3) \cdot (ab \cdot a) = -15 \cdot (a^{1+1} \cdot b) = -15\,a^2b$

7. a) Como $-20 : 4 = -5$ e
$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3$, temos: $(-20a^5) : (+4a^2) = -5a^3$

7. b) Como $3 : 4 = \frac{3}{4}$ e
$(xy^3) : y = xy^{3-1} = xy^2$, temos: $(+3xy^3) : (4y) = \frac{3}{4}\,xy^2$

7. c) Como $-24 : 4 = -6$ e
$(a^3b^2) : ab = a^{3-1}b^{2-1} = a^2b$, temos:
$(-24a^3b^2) : (4ab) = -6a^2b$

7. d) Como $-3,2 : 0,5 = -6,4$ e
$(a^3b) : a = a^{3-1}b = a^2b$, temos: $(-3,2a^3b) : (0,5a) = 6,4a^2b$

8. a) $(-3x^2y^3)^2 = (-3)^2 \cdot (x^2)^2 \cdot (y^3)^2 = 9 \cdot x^{2 \cdot 2} \cdot y^{3 \cdot 2} = 9x^4y^6$

8. b) $\left(\frac{6}{3}a^2b^4\right)^3 = (2a^2b^4)^3 = (2)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot (b^4)^3 =$

$= 8 \cdot a^{2 \cdot 3} \cdot b^{4 \cdot 3} = 8a^6b^{12}$

8. c) $\left(-\frac{2}{5}x\right)^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot x^2 = \frac{4}{25}x^2$

8. d) $(-0,4a)^3 = (-0,4)^3 \cdot a^3 = -0,064a^3$

Verificando

5. $-2x^2 + 8xy - 3y^2 + y^2 + 2x^2 - 5xy + x^2y =$
$= -2x^2 + 2x^2 - 3y^2 + y^2 + 8xy - 5xy + x^2y =$
$= -2y^2 + 3xy + x^2y$
Alternativa **c**.

6. Comparando as partes literais, temos:

6. a) Ambas são iguais a a^2b.

6. b) $ab \neq b$

6. c) $x^3 \neq x$

6. d) $m^2n^3 \neq m^3n^2$
Alternativa **a**.

7. Como a quadra é retangular, a medida de sua área é dada pelo produto:

$(8b) \cdot \left(\frac{9}{2}a^2b\right) = 8 \cdot \frac{9}{2} \cdot (b \cdot a^2b) = \frac{8 \cdot 9}{2} \cdot (a^2 \cdot b^{1+1}) = 36a^2b^2$

Alternativa **a**.

8. $\left(\frac{2}{3}xy^3\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot x^5 \cdot (y^3)^5 = \frac{2^5}{3^5} \cdot x^5 \cdot y^{3 \cdot 5} =$

$= \frac{32}{243} \cdot x^5 \cdot y^{15} = \frac{32}{243}x^5y^{15}$

Alternativa **b**.

9. A medida do volume de um prisma é dada pelo produto entre as medidas da área da base e da altura. Se a base é quadrada, a medida de sua área é igual ao quadrado da medida das arestas dessa base. Assim, temos:

$\left(\frac{1}{2}abc^3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot (c^3)^2 = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^{3 \cdot 2} = \frac{1}{4}\,a^2b^2c^6$

Como nos foi dada a medida de volume $\left(\frac{3}{16}a^2b^4c^7\right)$ considerando h a medida da altura, temos:

$\frac{3}{16}a^2b^4c^7 = \left(\frac{1}{4}a^2b^2c^6\right) \cdot h \Rightarrow \left(\frac{3}{16}a^2b^4c^7\right) : \left(\frac{1}{4}a^2b^2c^6\right) =$

$= \left(\frac{3}{16} : \frac{1}{4}\right)(a^2 : a^2) \cdot (b^4 : b^2) \cdot (c^7 : c^6) \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \left(\frac{3}{16} \cdot \frac{4}{1}\right) \cdot 1 \cdot b^{4-2} \cdot c^{7-6} \Rightarrow h = \left(\frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4}\right) \cdot b^2 \cdot c^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \frac{3}{4}\,b^2c$

Alternativa **c**.

Capítulo 5 – Polinômios e frações algébricas

Objetivos do capítulo e justificativas

- Conceituar polinômios e operar com eles.
- Conceituar fração algébrica.
- Resolver problemas envolvendo o cálculo de valor numérico de polinômios e frações algébricas.
- Utilizar o conceito de perímetro de polígonos e de área de retângulos para compor expressões algébricas.
- Explorar gráficos de colunas duplas e de linhas duplas.
- Aplicar os conceitos de interpolação e de extrapolação gráfica.

Neste capítulo, amplia-se o estudo de conteúdos da unidade temática Álgebra e são explorados problemas envolvendo polinômios e frações algébricas. Os objetivos relacionados a esses conteúdos se justificam à medida que são trabalhados de maneira a associar Geometria, Números e Álgebra, a fim de que os estudantes assimilem os procedimentos e operações envolvendo polinômios. Deste modo, a **competência específica 3** é desenvolvida. Além disso, os objetivos desse capítulo, principalmente os relacionados ao estudo de polinômios, contribuem para mobilizar e desenvolver a **competência específica 5**, pois os estudantes poderão adquirir mais autonomia para modelar e resolver situações e problemas do cotidiano, por meio de expressões algébricas.

Desenvolvem-se, ainda, as **competências gerais 2** e **4** e a **competência específica 2**, pois os estudantes são incentivados a exercitar a curiosidade intelectual, a argumentar e a desenvolver o raciocínio lógico à medida que precisam expressar situações-problema, por meio de polinômios.

Ao possibilitar que os estudantes explorem e apliquem conceitos relacionados à interpolação e extrapolação gráficas, analisando gráficos de colunas duplas e gráficos de linhas duplas, eles desenvolvem a **competência específica 4**.

O contexto utilizado para explorar pesquisas censitárias e pesquisas amostrais, neste capítulo, favorece o desenvolvimento das **competências gerais 9 e 10** e a **competência específica 8**, pois os estudantes deverão, em grupos, pesquisar e discutir sobre a importância de agir e tomar decisões com base em princípios democráticos, solidários e inclusivos.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

Na Unidade Temática **Álgebra**, situações que exploram o pensamento algébrico também são o foco deste capítulo, em que são abordados polinômios e suas operações e frações algébricas e que desenvolve a habilidade (EF08MA06), ampliando e aprofundando os conhecimentos abordados no capítulo anterior.

As Unidades Temáticas **Grandezas e medidas** e **Probabilidade e estatística** articulam-se, respectivamente, com a presença do conceito de área de retângulos associados a expressões algébricas, mobilizando a habilidade (EF08MA19) e na seção *Trabalhando a informação*, com a interpretação de gráficos de colunas duplas e de linhas duplas e noções de interpolação e extrapolação gráfica que desenvolve aspectos da habilidade (EF08MA23).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

3\. a) Como o lucro é a diferença entre o valor de venda e o valor de compra, conclui-se que o lucro por caderno pode ser expresso algebricamente por: $y - x$. E o lucro, por uma quantidade z de cadernos, que pode ser expresso por: $z \cdot (y - x)$ ou $z \cdot y - z \cdot x$

3\. b) Substituindo $x = 3{,}2$, $y = 8{,}7$ e $z = 24$, temos:
$24 \cdot (8{,}7 - 3{,}2) = 24 \cdot 5{,}5 = 132$
O lucro é de R$ 132,00.

4\. a) Como a medida da área do retângulo é igual ao produto entre as medidas de largura e altura, a medida da área do ladrilho é expressa algebricamente por $a \cdot b$ ou ab.

4\. b) Basta multiplicar a medida da área de um ladrilho pela quantidade de ladrilhos; portanto, $120 \cdot ab$ ou $120ab$.

4\. c) Considerando $a = 15$ cm $= 0{,}15$ m e $b = 20$ cm $= 0{,}2$ m, temos: $120 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}20 = 3{,}6$.
Então, a medida da área é 3,6 m².

6\. b) Como cada espelho fica abaixo de um degrau ou do patamar, o número total de espelhos é $14 + 1 = 15$. Portanto, a medida da altura da escada é expressa por: $15 \cdot E$. Então, com $E = 17$ cm, conclui-se que a altura da escada mede 2,55 m, pois: $15 \cdot E = 15 \cdot 17 = 255$ e 255 cm = 2,55 m.

6\. c) Com um patamar de 65 cm e 14 degraus, tem-se que o comprimento horizontal da escada mede: $14 \cdot P + 65$. A medida do comprimento é calculada fazendo $P = 30 \Rightarrow 14 \cdot 30 + 65 = 485$; e como 485 cm = 4,85 m, a medida do comprimento horizontal–lateral é 4,85 m.

7\. a) $(2x + y + 3) + (-5x + y - 1) = 2x + y + 3 - 5x + y - 1 = 2x - 5x + y + 3 - 1 = -3x + 2y + 2$

7\. b) $\left(\frac{7a}{5} - 2ab + \frac{b^2}{3}\right) + \left(4ab - \frac{b^2}{3}\right) = \frac{7a}{5} - 2ab + \frac{b^2}{3} + 4ab - \frac{b^2}{3} = \frac{7a}{5} - 2ab + 4ab + \frac{b^2}{3} - \frac{b^2}{3} = \frac{7a}{5} + 2ab$

7\. c) $3ab - 6a^2 + a^2 - 4ab + 2b^2 + 5a^2 - 3b^2 = (3ab - 4ab) + (-6a^2 + a^2 + 5a^2) + (2b^2 - 3b^2) = -ab + 0a^2 + (-b^2) = -ab - b^2$

7\. d) $\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2x^2}{3} - \frac{1}{4} = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x^2}{3}\right) + \left(\frac{2x}{5}\right) + \left(\frac{2x}{5}\right) + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{2}{4} = x^2 + \frac{2x}{5} - \frac{1}{2}$

8. a) $(x^2 - 3x + 5) + (x^2 + 2x - 4) = x^2 - 3x + 5 + x^2 + 2x - 4 =$
$= x^2 + x^2 - 3x + 2x + 5 - 4 = 2x^2 - x + 1$

8. b) $(x^2 - 3x + 5) + (x^2 + 2x - 4) + (x^2 + 5x - 1) =$
$= x^2 - 3x + 5 + x^2 + 2x - 4 + x^2 + 5x - 1 =$
$= x^2 + x^2 + x^2 - 3x + 2x + 5x + 5 - 4 - 1 = 3x^2 + 4x$

8. c) $(x^2 - 3x + 5) + (x^2 + 5x - 1) = x^2 - 3x + 5 + x^2 +$
$+ 5x - 1 = x^2 + x^2 - 3x + 5x + 5 - 1 = 2x^2 + 2x + 4$

8. d) $(x^2 + 2x - 4) + (x^2 + 5x - 1) = x^2 + 2x - 4 + x^2 +$
$+ 5x - 1 = x^2 + x^2 + 2x + 5x - 4 - 1 = 2x^2 + 7x - 5$

9. a) $(5x^2 - 3x + 4) - (2x^2 + 4x - 3) = 5x^2 - 3x +$
$+ 4 - 2x^2 - 4x + 3 = 5x^2 - 2x^2 - 3x - 4x + 4 + 3 =$
$= 3x^2 - 7x + 7$

9. b) $(2x^2 + 4x - 3) - (5x^2 - 3x + 4) = 2x^2 + 4x - 3 - 5x^2 +$
$+ 3x - 4 = 2x^2 - 5x^2 + 4x + 3x - 3 - 4 = -3x^2 + 7x - 7$

9. c) $(5x^2 - 3x + 4) + (x^2 - 3x) - (2x^2 + 4x - 3) = 5x^2 - 3x +$
$+ 4 + x^2 - 3x - 2x^2 - 4x + 3 = 5x^2 + x^2 - 2x^2 - 3x - 3x -$
$- 4x + 4 + 3 = 4x^2 - 10x + 7$

9. d) $(5x^2 - 3x + 4) - (x^2 - 3x) + (2x^2 + 4x - 3) = 5x^2 - 3x +$
$+ 4 - x^2 + 3x + 2x^2 + 4x - 3 = 5x^2 - x^2 + 2x^2 - 3x +$
$+ 3x + 4x + 4 - 3 = 6x^2 + 4x + 1$

10. Como em uma adição de 2 parcelas, a soma menos uma das parcelas é igual à outra, temos:
$(-3x + 2y + 2) - (2x + y + 3) = -3x + 2y + 2 - 2x - y - 3 =$
$= -3x - 2x + 2y - y + 2 - 3 = -5x + y - 1$

11. Como em uma subtração, o minuendo menos o resto é igual ao subtraendo, temos:
$(2x^3 - 3x^2 + x - 4) - (-3x^3 - 5x^2 + 4x + 1) =$
$= 2x^3 - 3x^2 + x - 4 + 3x^3 + 5x^2 - 4x - 1 =$
$= 2x^3 + 3x^3 - 3x^2 + 5x^2 + x - 4x - 4 - 1 =$
$= 5x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

12. a) $10x^2 - (5x + 6) - [2x - (3x^2 - 2)] =$
$= 10x^2 - 5x - 6 - [2x + 3x^2 + 2] =$
$= 10x^2 - 5x - 6 - 2x + 3x^2 - 2 =$
$= 10x^2 + 3x^2 - 5x - 2x - 6 - 2 = 13x^2 - 7x - 8$

12. b) $5a - [3b + 7 - (4a - 5b) + (2 - a)] = 5a - [3b + 7 - 4a +$
$+ 5b + 2 - a] = 5a - 3b - 7 + 4a - 5b - 2 + a = 5a +$
$+ 4a + a - 3b - 5b - 7 - 2 = 10a - 8b - 9$

12. c) $x^2 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right) - \left(-\frac{1}{2} + x + \frac{1}{3}x^2\right) = x^2 + \frac{1}{2}x - 2 +$
$+ \frac{1}{2} - x - \frac{1}{3}x^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - x - 2 + \frac{1}{2} =$
$= \frac{3-1}{3}x^2 + \frac{1-2}{2}x + \frac{-4+1}{2} = \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

13. Do enunciado é possível encontrar algumas informações e preencher o seguinte quadro:

	Quantidade de moedas de *x* centavos	Quantidade de moedas de *y* centavos	Quantidade de moedas de *z* centavos	Total em centavos
a) Início	18	30	40	18x + 30y + + 40z
b) 1º mês	18 + 8 = 26	30 + 10 = 40	40	26x + 40y + + 40z
c) mês seguinte	26	40 – 12 = 28	40 – 8 = 32	26x + 28y + + 32z

14. a) $(2x + 1) + (3x - 2) = 2x + 3x + 1 - 2 = 5x - 1$

14. b) $(3x - 2) + (2x) = 3x + 2x - 2 = 5x - 2$

14. c) $(2x + 1) + (3x - 2) + (2x) = 2x + 3x + 2x + 1 - 2 = 7x - 1$

16. a) $7x \cdot (2x - 5) = 7x \cdot 2x - 7x \cdot 5 = 14x^2 - 35x$

16. b) $(3a^2 - 2a - 1) \cdot 5a = 3a^2 \cdot 5a - 2a \cdot 5a - 1 \cdot 5a =$
$= 15a^3 - 10a^2 - 5a$

16. c) $-3x \cdot (4x^2 - 3x + 1) = -3x \cdot 4x^2 - 3x \cdot (-3x) - 3x \cdot 1 =$
$= -12x^3 + 9x^2 - 3x$

16. d) $\frac{2}{5}a \cdot \left(a - \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{5}a \cdot a - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot a = \frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{10}a$

16. e) $(0{,}3x^2 - 1{,}4x) \cdot (-0{,}2x^3) = 0{,}3x^2 \cdot (-0{,}2x^3) - 1{,}4x \cdot (-0{,}2x^3) =$
$= -0{,}06x^5 + 0{,}28x^4$

16. f) $\left(\frac{1}{3}y^2 + \frac{4}{7}y^3\right) \cdot (-3y) = \frac{1}{3}y^2 \cdot (-3y) + \frac{4}{7}y^3 \cdot (-3y) =$
$= -y^3 - \frac{12}{7}y^4$

17. a) A soma das medidas das áreas é $(6x^2 + x)$, pois:
$(2x + 1) \cdot x + 2x \cdot 2x = 2x \cdot x + 1 \cdot x + 4x^2 =$
$= 2x^2 + x + 4x^2 = 6x^2 + x$

17. b) Com $x = 5$, temos: $6x^2 + x = 6 \cdot 5\ (5)^2 + (5) = 6 \cdot 25 + 5 =$
$= 150 + 5 = 155$
Então, esse é o valor numérico do binômio.

17. c) Como $100 = 10 \cdot 10$, tem-se que o lado do quadrado mede 10. Então: $2x = 10 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{10}{2} \Rightarrow x = 5$

19. a) $(5x - 1) \cdot (5x + 1) = 5x \cdot 5x + 5x \cdot 1 - 1 \cdot 5x - 1 \cdot 1 =$
$= 25x^2 + 5x - 5x - 1 = 25x^2 - 1$

19. b) $(a + b) \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b =$
$= a^2 + 2ab + b^2$

19. c) $(2x^2 - 3x - 6) \cdot (5x - 2) =$
$= 2x^2 \cdot 5x - 2x^2 \cdot 2 - 3x \cdot 5x + 3x \cdot 2 - 6 \cdot 5x + 6 \cdot 2 =$
$= 10x^3 - 4x^2 - 15x^2 + 6x - 30x + 12 =$
$= 10x^3 - 19x^2 - 24x + 12$

19. d) $\left(2a + \frac{3}{5}b\right) \cdot \left(a - \frac{1}{2}b\right) =$
$= 2a \cdot a - 2a \cdot \frac{1}{2}b + \frac{3}{5}b \cdot a - \frac{3}{5}b \cdot \frac{1}{2}b =$
$= 2a^2 - ab + \frac{3}{5}ab - \frac{3}{10}b^2 =$
$= 2a^2 + \frac{-5+3}{5}ab - \frac{3}{10}b^2 =$
$= 2a^2 - \frac{2}{5}ab - \frac{3}{10}b^2$

21. a) $A \cdot B = (x^2 + 3x - 2)(x + 2) =$
$= x^2 \cdot x + x^2 \cdot 2 + 3x \cdot x + 3x \cdot 2 - 2 \cdot x - 2 \cdot 2 =$
$= x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 6x - 2x - 4 = x^3 + 5x^2 + 4x - 4$
$A \cdot C = (x^2 + 3x - 2)(x - 3) =$
$= x^2 \cdot x - x^2 \cdot 3 + 3x \cdot x - 3x \cdot 3 - 2 \cdot x + 2 \cdot 3 =$
$= x^3 - 3x^2 + 3x^2 - 9x - 2x + 6 = x^3 - 11x + 6$
$A \cdot B + A \cdot C = (x^3 + 5x^2 + 4x - 4) + (x^3 - 11x + 6) =$
$= x^3 + x^3 + 5x^2 + 4x - 11x - 4 + 6 = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$

21. b) $B + C = (x + 2) + (x - 3) = x + x + 2 - 3 = 2x - 1$

$A \cdot (B + C) = (x^2 + 3x - 2) \cdot (2x - 1) =$

$= x^2 \cdot 2x - x^2 \cdot 1 + 3x \cdot 2x - 3x \cdot 1 - 2 \cdot 2x + 2 \cdot 1 =$

$= 2x^3 - x^2 + 6x^2 - 3x - 4x + 2 = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$

22. a) $3x \cdot (2x - 3) \cdot (x + 2) = (3x \cdot 2x - 3x \cdot 3) \cdot (x + 2) =$

$= (6x^2 - 9x) \cdot (x + 2) = 6x^2 \cdot x + 6x^2 \cdot 2 - 9x \cdot x - 9x \cdot 2 =$

$= 6x^3 + 12x - 9x^2 - 18x = 6x^3 + 3x^2 - 18x$

22. b) $-2x \cdot (x + 5) \cdot (2x - 5) = (-2x \cdot x - 2x \cdot 5) \cdot (2x - 5) =$

$= (-2x^2 - 10x) \cdot (2x - 5) = -2x^2 \cdot 2x + 2x^2 \cdot 5 - 10x \cdot 2x + 10x \cdot 5 =$

$= -4x^3 + 10x^2 - 20x^2 + 50x = -4x^3 - 10x^2 + 50x$

22. c) $(a - 2b) \cdot (a + 2b) \cdot (a - b) =$

$= (a \cdot a + a \cdot 2b - 2b \cdot a - 2b \cdot 2b) \cdot (a - b) =$

$= (a^2 + 4ab - 4ab - 4b^2) \cdot (a - b) = (a^2 - 4b^2) \cdot (a - b) =$

$= a^2 \cdot a - a^2 \cdot b - 4b^2 \cdot a + 4b^2 \cdot b = a^3 - a^2b - 4ab^2 + 4b^3$

22. d) $(a - b) \cdot (a + b) \cdot (3a - b) =$

$= (a \cdot a + a \cdot b - b \cdot a - b \cdot b) \cdot (3a - b) =$

$= (a^2 + ab - ab - b^2) \cdot (3a - b) = (a^2 - b^2) \cdot (3a - b) =$

$= a^2 \cdot 3a - a^2 \cdot b - b^2 \cdot 3a + b^2 \cdot b = 3a^3 - a^2b - 3ab^2 + b^3$

22. e) $\frac{x}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x}{2} \cdot x + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) =$

$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x \cdot 1}{2 \cdot 3}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right) =$

$= \frac{x^2}{2} \cdot 2x + \frac{x}{6} \cdot 2x - \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{x}{6} \cdot \frac{1}{2} =$

$= x^3 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{12} = x^3 + \frac{4x^2}{12} - \frac{3x^2}{12} - \frac{x}{12} =$

$= x^3 + \frac{x^2}{12} - \frac{x}{12}$

24. a) $(8x^5 + 6x^3) : (+2x^2) = 8x^5 : (+2x^2) + 6x^3 : (+2x^2) =$

$= (8 : 2)\, x^{5-2} + (6 : 2)\, x^{3-2} = 4x^3 + 3x$

24. b) $(12ab + 15a^2b + 9ab^2) : (3ab) =$

$= 12ab : (3ab) + 15a^2b : (3ab) + 9ab^2 : (3ab) = 4 + 5a + 3b$

24. c) $(20x - 10x^2) : (-5x) = 20x : (-5x) - 10x^2 : (-5x) = -4 + 2x$

24. d) $(a^3 + a^2 + a) : (a) = a^3 : a + a^2 : a + a : a = a^2 + a + 1$

24. e) $(x^5 + x^2) : (-x^2) = x^5 : (-x^2) + x^2 : (-x^2) = -x^3 - 1$

24. f) $(7x^2 - 8x + 5) : (-1) = 7x^2 : (-1) - 8x : (-1) + 5 : (-1) =$

$= -7x^2 + 8x - 5$

25. $(21x^3 - 28x^2 + 14x) : (-7x) = 21x^3 : (-7x) - 28x^2 : (-7x) + 14x : (-7x) = -3x^2 + 4x - 2$

26. $(-8xy + 9x^2y - 6xy^2) : (-4xy) =$

$= -8xy : (-4xy) + 9x^2y : (-4xy) - 6xy^2 : (-4xy) = 2 - 2{,}25x + 1{,}5y$

27. $\left(\frac{7}{3}x^2 + \frac{1}{4}x\right) : \left(-\frac{1}{2}x\right) = \frac{7}{3}x^2 : \left(-\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4}x : \left(-\frac{1}{2}x\right) =$

$= -\frac{7}{3} \cdot \frac{2}{1}x - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} = -\frac{14}{3}x + \frac{1}{2}$

28. $[(25x^2 - 15x) : (-5x)] \cdot (5x + 3) =$

$= [25x^2 : (-5x) - 15x : (-5x)] \cdot (5x + 3) = [-5x + 3] \cdot (5x + 3) =$

$= -5x \cdot 5x + (-5x) \cdot 3 + 3 \cdot 5x + 3 \cdot 3 =$

$= -25x^2 - 15x + 15x + 9 = -25x^2 + 9$

32. $M \cdot (2x - 1) = 6x^2 - 7x + 2$

$M = (6x^2 - 7x + 2) : (2x - 1) = 3x - 2$, pois:

$$\begin{array}{rrr|l}
6x^2 & -7x & +2 & 2x - 1 \\ \cline{4-4}
-6x^3 & +3x & & 3x - 2 \\ \cline{1-2}
 & -4x & +2 & \\
 & +4x & -2 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

33. a) $x + 4$, pois:

$$\begin{array}{rrr|l}
x^2 & +7x & +12 & x + 3 \\ \cline{4-4}
-x^3 & -3x & & x + 4 \\ \cline{1-2}
 & +4x & +12 & \\
 & -4x & -12 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

33. b) $2x - 5$, pois:

$$\begin{array}{rrr|l}
6x^2 & -11x & -10 & 3x + 2 \\ \cline{4-4}
-6x^3 & -4x & & 2x - 5 \\ \cline{1-2}
 & -15x & -10 & \\
 & +15x & +10 & \\ \cline{2-3}
 & & 0 &
\end{array}$$

33. c) $2x^2 - 3x$, pois:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^4 & -11x^3 & +16x^2 & -6x & x^2 - 4x + 2 \\ \cline{5-5}
-2x^4 & +8x^3 & -4x^2 & & 2x^2 - 3x \\ \cline{1-3}
 & -3x^3 & +12x^2 & -6x & \\
 & +3x^3 & -12x^2 & +6x & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

34. a) O quociente é $2x^2 - 5x - 7$ e o resto é -20, pois:

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -9x^2 & +3x & -6 & x + 2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & +4x^2 & & & 2x^2 - 5x - 7 \\ \cline{1-2}
 & -5x^2 & +3x & & \\
 & +5x^2 & -10x & & \\ \cline{2-3}
 & & -7x & -6 & \\
 & & +7x & -14 & \\ \cline{3-4}
 & & & -20 &
\end{array}$$

34. b) O quociente é $2a + 1$ e o resto é $a - 2$, pois:

$$\begin{array}{rrrr|l}
6a^3 & -7a^2 & +2a & +1 & 3a^2 - 5a + 3 \\ \cline{5-5}
-6a^3 & +10a^2 & -6a & & 2a + 1 \\ \cline{1-3}
 & +3a^2 & -4a & +1 & \\
 & -3a^2 & +5a & -3 & \\ \cline{2-4}
 & & a & -2 &
\end{array}$$

35. O polinômio A desejado é tal que:

$A \cdot (a^2 + 2a - 5) = 3a^3 + 2a^2 - 23a + 20$

Portanto, $A = (3a^3 + 2a^2 - 23a + 20) : (a^2 + 2a - 5) = 3a - 4$, pois:

$$\begin{array}{rrrr|l}
3a^3 & +2a^2 & -23a & +20 & a^2 + 2a - 5 \\ \cline{5-5}
-3a^3 & -6a^2 & +15a & & 3a - 4 \\ \cline{1-3}
 & -4a^2 & -8a & +20 & \\
 & +4a^2 & +8a & +20 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

36. O polinômio que representa a medida da altura é tal que pode ser calculado da maneira apresentada a seguir.
$(5x^2 + 2x - 3) : (5x - 3) = x + 1$, pois:

$$\begin{array}{rl|l}
5x^2 + 2x & -\ 3 & 5x - 3 \\ \cline{3-3}
-5x^2 + 3x & & x + 1 \\ \cline{1-1}
+5x & -\ 3 & \\
-5x & +\ 3 & \\ \cline{1-2}
 & 0 &
\end{array}$$

38. a) Se a largura mede x, o dobro da medida da largura, em metro, é $2x$ e, com 15 m, tem-se que a medida do comprimento do terreno fica algebricamente expressa por $2x + 15$. Portanto, a razão entre as medidas é $\dfrac{2x + 15}{x}$.

38. b) Como $x = 12$, temos:
$$\frac{2x + 15}{x} = \frac{2 \cdot 12 + 15}{12} = \frac{24 + 15}{12} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4}$$

39. a) Como o consumo é a razão entre a medida da distância percorrida e a medida de volume de combustível, conclui-se que essa razão, em quilômetro por litro, é algebricamente expressa por $\dfrac{x}{y}$.

39. b) O dobro da medida da distância percorrida pela primeira moto é $2x$ e, como a segunda moto percorreu essa medida de distância com $(y + 5)$ litros de gasolina, a razão na segunda moto é expressa por $\dfrac{2x}{y + 5}$.

40. O polinômio do denominador deve ser zero. A condição $y - 6 = 0$ implica $y = 6$.

41. Só não podem ser atribuídos valores para x que façam o valor numérico do denominador ser zero. A condição $2x - 3 \neq 0$ implica $2x \neq 3$, que, por sua vez, implica $x \neq \dfrac{3}{2}$ (ou $x \neq 1{,}5$).

42. A condição $b - 2a \neq 0$ implica $b \neq 2a$.

43. Sendo x o saldo da poupança ontem, então o depósito do meu avô foi $4 \cdot x + 200$ e a razão pedida é:
$$\frac{x}{x + (4x + 200)} = \frac{x}{5x + 200}$$

Pense mais um pouco...

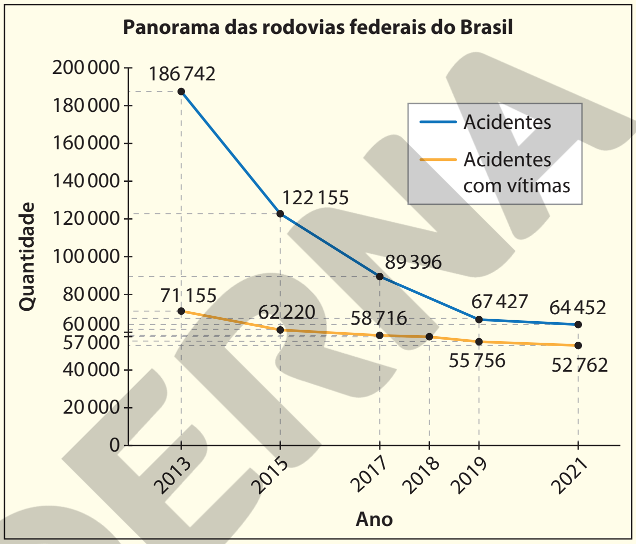
Resposta pessoal. Observe se os estudantes percebem que, como todo número pode ser decomposto em suas ordens utilizando potências de 10, então essa decomposição pode ser usada para efetuar operações, como a divisão, de modo que essa maneira de dividir se assemelha ao método da divisão de polinômios.

Trabalhando a informação

a) O gráfico de colunas é primeiro nessa seção *Trabalhando a informação*, o que fornece dados panorâmicos sobre ocorrências nas rodovias federais do Brasil; portanto, a resposta esperada é o segundo gráfico dessa seção, com os mesmos dados, porém representados utilizando um gráfico de linhas duplas.

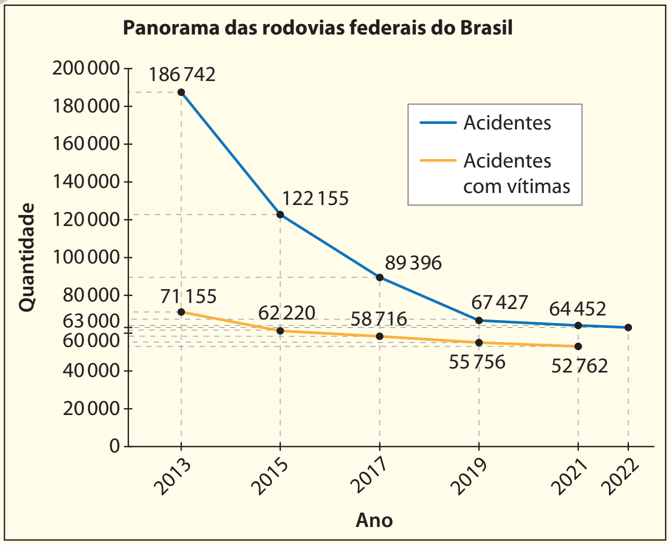
d) Podemos aproximar essa quantidade fazendo uma média, ou seja, pegando o valor intermediário entre o número de acidentes de 2017 e o de 2019; portanto, será aproximadamente 78 mil acidentes, pois:
$$\frac{89\,396 + 67\,427}{2} = \frac{156\,823}{2} = 78\,411{,}5 \simeq 78\,000$$

e) O procedimento descrito por interpolação gráfica é traçar duas retas como as observadas na figura a seguir, concluindo que a quantidade aproximada de acidentes com vítimas em 2018 é de 57 000.



Dados obtidos em: CONFEDERAÇÃO Nacional do Transporte. **Painel CNT de acidentes rodoviários**. Brasília, DF: CNT, dez. 2021. Disponível em: https://www.cnt.org.br/painel-acidente. Acesso em: 23 jun. 2022.

f) Uma estimativa para a quantidade total de acidentes em 2022 é 63 000. Observe a seguir o prolongamento da linha.

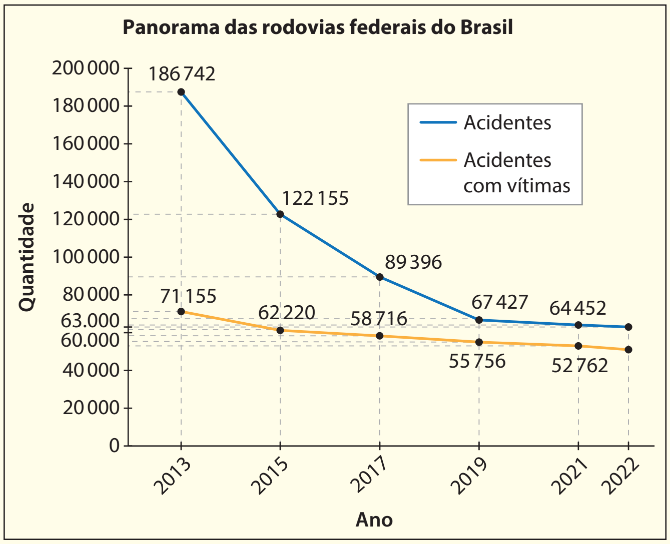


ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: CONFEDERAÇÃO Nacional do Transporte. Painel CNT de acidentes rodoviários. Brasília, DF: CNT, dez. 2021. Disponível em: https://www.cnt.org.br/painel-acidente.Acesso em: 23 jun. 2022.
*Dados de 2022 é uma estimativa.

g) Uma estimativa para acidentes com vítimas para 2022 é 51 000 acidentes.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos em: CONFEDERAÇÃO Nacional do Transporte. Painel CNT de acidentes rodoviários. Brasília, DF: CNT, dez. 2021. Disponível em: https://www.cnt.org.br/painel-acidente.Acesso em: 23 jun. 2022.
*Dados de 2022 é uma estimativa.

Exercícios complementares

1. a) $a = 1$, $b = 1$ e $c = 2$, então:
$a + 2b - 4c = 1 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 1 + 2 - 8 = -5$

1. b) Para a expressão $a + 2b - 4c$ assumir seu valor máximo, as parcelas a e $2b$ devem ser as maiores possíveis, enquanto o subtraendo $4c$ deve ser o menor possível. Assim, atribuindo $a = 2$, $b = 2$ e $c = 0$, temos:
$a + 2b - 4c = 2 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = 2 + 4 - 0 = 6$

1. c) Fazendo um quadro com as 6 possibilidades:

a	b	c	$a + 2b - 4c$
0	1	2	$0 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = 0 + 2 - 8 = \mathbf{-6}$
0	2	1	$0 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0 + 4 - 4 = \mathbf{0}$
1	0	2	$1 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 2 = 1 + 0 - 8 = \mathbf{-7}$
1	2	0	$1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0 = 1 + 4 - 0 = \mathbf{5}$
2	0	1	$2 + 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = 2 + 0 - 4 = \mathbf{-2}$
2	**1**	**0**	$2 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 0 = 2 + 2 - 0 = \mathbf{4}$

Da última linha do quadro obtêm-se: $a = 2$, $b = 1$ e $c = 0$

2. a) $(3a^2 - 5b) + (5a^2 + 5b) = 3a^2 + 5a^2 - 5b + 5b = 8a^2$

2. b) $(3x^2 - 5x + 2) - (x^2 + 6x - 4) + (5x - 7) =$
$= 3x^2 - 5x + 2 - x^2 - 6x + 4 + 5x - 7 =$
$= 3x^2 - x^2 - 5x - 6x + 5x + 2 + 4 - 7 = 2x^2 - 6x - 1$

2. c) $(a^2 - ab) + (b^2 - ab) - (a^2 + b^2) =$
$= a^2 - ab + b^2 - ab - a^2 - b^2 =$
$= a^2 - a^2 - ab - ab + b^2 - b^2 = -2ab$

2. d) $\left(-\frac{1}{2}a - 2b\right) - \left(\frac{3}{5}b + 2a\right) = -\frac{1}{2}a - 2b - \frac{3}{5}b - 2a =$

$= -\frac{1}{2}a - \frac{4}{2}a - \frac{10}{5}b - \frac{3}{5}b = \frac{-a - 4a}{2} + \frac{-10b - 3b}{5} =$

$= \frac{-5}{2}a - \frac{13}{5}b$

3. a) $3a - (b - a) + (5b - 2a) = 3a - b + a + 5b - 2a =$
$= 3a + a - 2a - b + 5b = 2a + 4b$

3. b) $x^2 - \{3x - [(x + 3) + (x^2 - 1)]\} =$
$= x^2 - \{3x - [x + 3 + x^2 - 1]\} =$
$= x^2 - \{3x - [x^2 + x + 2]\} =$
$= x^2 - \{3x - x^2 - x - 2\} =$
$= x^2 - \{-x^2 + 2x - 2\} =$
$= x^2 + x^2 - 2x + 2 =$
$= 2x^2 - 2x + 2$

3. c) $2y - [-3xy + (-2x + 5y) - (-4xy + x)] =$
$= 2y - [-3xy - 2x + 5y + 4xy - x] =$
$= 2y - [-3xy + 4xy - 2x - x + 5y] =$
$= 2y - [+xy - 3x + 5y] = 2y - xy + 3x - 5y =$
$= -xy + 3x - 3y$

5. a) $(x - 2) \cdot (x + 5) = x \cdot x + x \cdot 5 - 2 \cdot x - 2 \cdot 5 =$
$= x^2 + 5x - 2x - 10 = x^2 + 3x - 10$

5. b) $(2x - 4) \cdot (3x + 1) = 2x \cdot 3x + 2x \cdot 1 - 4 \cdot 3x - 4 \cdot 1 =$
$= 6x^2 + 2x - 12x - 4 = 6x^2 - 10x - 4$

5. c) $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) =$
$= x \cdot x^2 + x \cdot x + x \cdot 1 - 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 1 \cdot 1 =$
$= x^3 + x^2 - x^2 + x - x - 1 = x^3 - 1$

5. d) $(a - 1) \cdot (a^2 - 1)(a + 1) =$
$= [a \cdot a^2 + a \cdot (-1) - 1 - a^2 - 1 \cdot (-1)]\ (a + 1) =$
$= [a^3 - a^2 - a + 1]\ (a + 1) =$
$= a^3 \cdot a + a^3 \cdot 1 - a^2 \cdot a - a^2 \cdot 1 - a \cdot a - a \cdot 1 + 1 \cdot a + 1 \cdot 1 =$
$= a^4 + a^3 - a^3 - a^2 - a^2 - a + a + 1 = a^4 - 2a^2 + 1$

6. O polinômio é tal que será (quociente) · (divisor) + (resto), portanto:
$(5x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 + 2x - 3) + (-5x + 2) =$
$= 5x^2 \cdot x^2 + 5x^2 \cdot 2x + 5x^2 \cdot (-3) - 3x \cdot x^2 - 3x \cdot 2x -$
$- 3x \cdot (-3) + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot (-3) - 5x + 2 =$
$= 5x^4 + 10x^3 - 15x^2 - 3x^3 - 6x^2 + 9x + x^2 + 2x - 3 - 5x + 2 =$
$= 5x^4 + 10x^3 - 3x^3 - 15x^2 - 6x^2 + x^2 + 9x + 2x - 5x - 3 + 2 =$
$= 5x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 6x - 1$

7. O polinômio que satisfaz
$A \cdot (2x - 1) = (8x^3 - 14x + 11x - 3)$ é tal que:
$A = (8x^3 - 14x + 11x - 3) : (2x - 1) = 4x^2 - 5x + 3$, pois:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8x^3 & -\,14x^2 & +\,11x & -\,3 & 2x \quad 1 \\
\cline{5-5}
-8x^3 & +\,4x^2 & & & 4x^2 - 5x + 3 \\
\cline{1-2}
 & -\,10x^2 & +\,11x & & \\
 & +\,10x^2 & -\,5x & & \\
\cline{2-3}
 & & 6x & -\,3 & \\
 & & -6x & +\,3 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 & \\
\end{array}
$$

8. a) $B \cdot C = (2x^2 + 5x - 12) \cdot (2x - 3) =$
$= 2x^2 \cdot 2x + 2x^2 \cdot (-3) + 5x \cdot 2x + 5x \cdot (-3) - 12 \cdot 2x - 12 \cdot (-3) =$
$= 4x^3 - 6x^2 + 10x^2 - 15x - 24x + 36 =$
$= 4x^3 + 4x^2 - 39x + 36$

8. b) $D^2 = (x + 4) \cdot (x + 4) = x \cdot x + x \cdot 4 + 4 \cdot x + 4 \cdot 4 =$
$= x^2 + 8x + 16$

8. c) $B : C = x + 4$, pois:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + 5x - 12 & 2x - 3 \\ \hline \underline{-2x^2 + 3x} & x + 4 \\ \quad + 8x - 12 & \\ \quad \underline{-8x + 12} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

8. d) $([6x^2 - 5x - 6\,] + [\,2x^2 + 5x - 12]) \cdot (2x - 3) =$
$= (6x^2 + 2x^2 - 5x + 5x - 6 - 12) \cdot (2x - 3) =$
$= (8x^2 - 18) \cdot (2x - 3) = 8x^2 \cdot 2x + 8x^2 \cdot (-3) - 18 \cdot 2x -$
$- 18 \cdot (-3) = 16x^3 - 24x^2 - 36x + 54$

9. Como $5x \cdot (x - 3) = 5x \cdot x + 5x \cdot (-3) = 5x^2 - 15x$ então a divisão é $(5x^3 + 5x^2 - 60x) : (5x^2 - 15x) = x + 4$, pois:

$$\begin{array}{l|l} 5x^3 + 5x^2 - 60x & 5x^2 - 15x \\ \hline \underline{-5x^3 + 15x^2} & x + 4 \\ \quad + 20x^2 - 60x & \\ \quad \underline{- 20x^2 + 60x} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

10. $(x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x^2 - 1) = (x - 2)$; como é uma divisão exata, o resto é zero. Considere a divisão a seguir.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - x + 2 & x^2 - 1 \\ \hline \underline{-x^3 \qquad\quad + x} & x - 2 \\ \quad - 2x^2 + 0x + 2 & \\ \quad \underline{+ 2x^2 \qquad - 2} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

11. Para que a fração $\frac{E}{P}$ seja mínima, o numerador E deve ser mínimo, enquanto o denominador P deve ser máximo. Assim, o menor valor de $\frac{E}{P}$ é $\frac{16}{30} = \frac{8}{15} \simeq 0{,}53$. Para que a fração $\frac{E}{P}$ seja máxima, o numerador E deve ser máximo, enquanto o denominador P deve ser mínimo. Assim, o menor valor de $\frac{E}{P}$ é $\frac{18}{25} = 0{,}72$.

Verificando:

2. A medida do perímetro é $4a + 4b$, pois:
$a + b + a + b + a + b + a + b = a + a + a + a + b + b + b + b =$
$= 4a + 4b$
Alternativa **c**.

3. A medida da área é $2x^2 + 4x$, pois:
$2x \cdot (x + 2) = 2x \cdot x + 2x \cdot 2 = 2x^2 + 4x$
Alternativa **d**.

4. $(a^3 - a^2 + a) \cdot (a + 1) = a^3 \cdot a - a^2 \cdot a + a \cdot a + a^3 \cdot 1 - a^2 \cdot 1 +$
$+ a \cdot 1 = a^4 - a^3 + a^2 + a^3 - a^2 + a =$
$= a^4 - a^3 + a^3 + a^2 - a^2 + a = a^4 + a$
Alternativa **a**.

5. Efetuando a divisão:

$$\begin{array}{l|l} 4a^4 + 0a^3 - 5a^2 + a - 2 & 2a^2 - a + 1 \\ \hline \underline{-4a^4 + 2a^3 - 2a^2} & 2a^2 + a - 3 \\ \quad + 2a^3 - 7a^2 + a & \\ \quad \underline{-2a^3 + a^2 \quad - a} & \\ \qquad - 6a^2 + 0a - 2 & \\ \qquad \underline{+6a^2 - 3a + 3} & \\ \qquad\quad -3a + 1 & \end{array}$$

Então $R = -3a + 1$. Com $a = \frac{1}{3}$, tem-se:
$R = -3a + 1 = -3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = -1 + 1 = 0$.
Alternativa **a**.

6. Com quociente exato, verifica-se que o resto é zero. Portanto, o polinômio procurado é:
$(5a^2 - 2a - 3) \cdot (3a - 4) =$
$= 5a^2 \cdot 3a - 5a^2 \cdot 4 - 2a \cdot 3a + 2a \cdot 4 - 3 \cdot 3a + 3 \cdot 4 =$
$= 15a^3 - 20a^2 - 6a^2 + 8a - 9a + 12 = 15a^3 - 26a^2 - a + 12$
Alternativa **a**.

7. Contando 10 vezes os juros de 80 reais, conclui-se que o total gasto é expresso pela soma do valor à vista com o total de juros pago: $x + 10 \cdot 80 = x + 800$. Dividindo o valor da entrada em 10 partes iguais, obtemos cada parcela, expressa por $\frac{x}{10} + 80$.
Alternativa **c**.

8. Como medida da área = medida da base · medida da altura, então a medida da altura é obtida dividindo-se a expressão que determina a medida da área pela da medida da base. O quociente é a expressão da medida da altura. Portanto, $x + 3$.

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 + 11x + 15 & 2x + 5 \\ \hline \underline{-2x^3 - 5x} & x + 3 \\ \quad + 6x + 15 & \\ \quad \underline{- 6x - 15} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

Alternativa **a**.

Capítulo 6 – Produtos notáveis e fatoração

Objetivos do capítulo e justificativas

- Ampliar o cálculo algébrico com os processos de produtos notáveis e fatoração.
- Reconhecer e aplicar os produtos notáveis e os casos de fatoração estudados.
- Resolver equações do tipo $ax^2 = b$ por meio de fatoração.
- Simplificar expressões envolvendo frações algébricas.
- Resolver equações envolvendo frações algébricas.
- Identificar regularidades em sequências recursivas e em sequências não recursivas.
- Analisar e construir fluxograma que permite indicar os números seguintes em determinada sequência numérica.

- Utilizar as noções de área de retângulos e de volume de blocos retangulares no estudo de produtos notáveis e fatoração.
- Interpretar e construir gráfico de barras.

Dando continuidade ao trabalho dos capítulos anteriores, a Unidade Temática **Álgebra** é foco neste capítulo e favorece a mobilização e aprofundamento do desenvolvimento da **competência específica 5**. Ao apresentar aos estudantes novas ferramentas e conceitos algébricos, como produtos notáveis e fatoração e sua utilização em simplificação de expressões algébricas ou de equações, bem como o estudo de sequências recursivas e de sequências não recursivas, contribuímos para que eles mobilizem conhecimentos que os favoreçam a modelar e resolver situações do cotidiano.

O trabalho com áreas de retângulos e volume de blocos retangulares favorece a compreensão do estudo de produtos notáveis e de fatoração e possibilitam aos estudantes estabelecer conexões e relações com as Unidades Temáticas **Álgebra** e **Geometria**. Dessa maneira, eles desenvolvem a **competência específica 3**.

O estudo sobre gráficos de barras e ressaltando a importância de que as barras sejam proporcionais aos valores numéricos que indicam, desenvolve a **competência específica 4** e as **competências gerais 2** e **4**, pois os estudantes podem adquirir mais autonomia na leitura e interpretação de informações que são veiculadas no dia a dia nos diferentes meios de comunicação, analisando aspectos qualitativos e quantitativos de cada contexto. Também é mobilizada e ampliada a capacidade de argumentar com base em dados e informações precisas.

Em diferentes momentos do capítulo, como na abertura ou na primeira seção *Para saber mais* apresentamos conteúdos que favorecem o desenvolvimento da **competência geral 1** e a **competência específica 1**, à medida em que os estudantes podem compreender os conhecimentos matemáticos como historicamente construídos e que podem ser aplicados para resolver situações reais.

O contexto utilizado para explorar pesquisas censitárias e pesquisas amostrais, neste capítulo, favorece o desenvolvimento das **competências gerais 9 e 10** e a **competência específica 8**, pois os estudantes deverão, em grupos, pesquisar e discutir sobre a importância de agir e tomar decisões com base em princípios democráticos, solidários e inclusivos.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes.

(EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

Este capítulo amplia e aprofunda os conhecimentos acerca das expressões algébricas trabalhados em capítulos anteriores, tratando de produtos notáveis e de fatoração relativos à Unidade Temática **Álgebra** e desenvolvendo a habilidade (EF08MA06).

Os conhecimentos deste capítulo constituem subsídios para a compreensão dos estudos a serem desenvolvidos no 9º ano (EF09MA09). Além disso, ainda relacionado à Unidade Temática **Álgebra**, o capítulo desenvolve aspectos da habilidade (EF08MA09) ao tratar da resolução de equações do tipo $ax^2 = b$ por meio de fatoração e, desenvolve também, as habilidades (EF08MA10) e (EF08MA11) ao explorar sequências recursivas e sequências não recursivas.

A articulação com a Unidade Temática **Grandezas e medidas** é promovida por meio da associação de noções de área de retângulos e volume de blocos retangulares a expressões algébricas mobilizando, assim, a habilidade (EF08MA19).

Com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística**, a articulação se dá na seção *Trabalhando a informação*, que trata da construção de gráfico de barras e favorece o desenvolvimento de aspectos da habilidade (EF08MA23), que é trabalhada em diferentes situações neste volume.

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

c) Como s é a medida do semiperímetro, nesse triângulo será:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+4+5}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Portanto, pela fórmula de Heron temos:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} =$$
$$= \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \sqrt{36} = 6$$

A medida da área é 6.

Exercícios propostos

3. **a)** O lado do quadrado maior mede 9 unidades de comprimento; então, sua área mede 81 unidades de área ($9 \cdot 9 = 81$); o lado do quadrado menor mede a, pois sua área mede a^2 e $a \cdot a = a^2$; então, as regiões I e II são retângulos de lados de medidas 9 e a; portanto, cada um tem área de medida $9a$ ($9 \cdot a = 9a$).

3. **b)** A medida da área total pode ser calculada pela soma das medidas das áreas de cada parte. Assim: $a^2 + 9a + 9a + 81 = a^2 + 18a + 81$

3. **c)** A medida do lado do quadrado maior é dada pela soma das medidas dos lados dos dois quadrados coloridos, isto é, $a + 9$.

3. **d)** $(a + 9)^2 = (a)^2 + 2 \cdot a \cdot 9 + 9^2 = a^2 + 18a + 81$
Essa é a mesma expressão para a medida da área total da figura determinada no item **b**.

4. **a)** Falsa. $(x + 8)^2 = (x)^2 + 2 \cdot x \cdot 8 + 8^2 = x^2 + 16x + 64$

4. **c)** Falsa. $(x + 3y)^2 = (x)^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

5. **a)** $(3x + y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot y + y^2 = 9x^2 + 6xy + y^2$

5. **b)** $(3a + 2)^2 = (3a)^2 + 3a \cdot 2 + 2^2 = 9a^2 + 12a + 4$

5. **c)** $(4a + y^3)^2 = (4a)^2 + 2 \cdot 4a \cdot y^3 + (y^3)^2 =$
$= 16a^2 + 8ay^3 + y^6$

5. **d)** $\left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y\right)^2 = \left(\frac{3}{4}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}x \cdot \frac{2}{5}y + \left(\frac{2}{5}y\right)^2 =$
$= \frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{5}xy + \frac{4}{25}y^2$

6. **a)** $a\,(5a - 1) + (a + 2)^2 =$
$= a \cdot 5a - a \cdot 1 + a^2 + 2 \cdot a \cdot 2 + 2^2 =$
$= 5a^2 - a + a^2 + 4a + 4 = 6a^2 + 3a + 4$

6. **b)** $(2x + 3)^2 - x(x - 4) =$
$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 - x \cdot x - x \cdot (-4) =$
$= 4x^2 + 12x + 9 - x^2 + 4x = 3x^2 + 16x + 9$

6. **c)** $(y - 3)(y + 2) - (y + 1)^2 =$
$= y \cdot y + y \cdot 2 - 3 \cdot y - 3 \cdot 2 - (y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2) =$
$= y^2 + 2y - 3y - 6 - (y^2 + 2y + 1) =$
$= -y - 6 - 2y - 1 = -3y - 7$

6. **d)** $(9y + 1)^2 - (y + 9)^2 =$
$= (9y)^2 + 2 \cdot 9y \cdot 1 + 1^2 - (y^2 + 2 \cdot y \cdot 9 + 9^2) =$
$= 81y^2 + 18y + 1 - (y^2 + 18y + 81) =$
$= 81y^2 + 18y + 1 - y^2 - 18y - 81 = 80y^2 - 80$

6. **e)** $(2a + 3b)^2 - 4a(a + 3b) =$
$= (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 3b + (3b)^2 - 4a \cdot a - 4a \cdot 3b =$
$= 4a^2 + 12ab + 9b^2 - 4a^2 - 12ab = 9b^2$

6. **f)** $(1 + 5a)^2 + 25(1 - a^2) =$
$= 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 5a + (5a)^2 + 25 \cdot 1 + 25 \cdot (-a^2) =$
$= 1 + 10a + 25a^2 + 25 - 25a^2 = 10a + 26$

8. **a)** $(-x + 6)^2 = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) \cdot 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$

8. **b)** $\left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{-x}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{-x}{2}\right) \cdot \frac{y}{3} + \left(\frac{y}{3}\right)^2 =$
$= \frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$

10. **a)** $(3a - 5)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 5 + 5^2 = 9a^2 - 30a + 25$

10. **b)** $(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$

10. **c)** $(3a^2 - 1)^2 = (3a^2)^2 - 2 \cdot 3a^2 \cdot 1 + 1^2 = 9a^4 - 6a^2 + 1$

10. **d)** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

11. **a)** $(2x + 1)^2 + (x - 5)^2 =$
$= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 =$
$= 4x^2 + 4x + 1 + x^2 - 10x + 25 = 5x^2 - 6x + 26$

11. **b)** $(x - 1)^2 - (x + 1)^2 =$
$= x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - [x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2] =$
$= x^2 - 2x + 1 - [x^2 + 2x + 1] =$
$= x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1 = -4x$

11. **c)** $x(x - 3)^2 - 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 =$
$= x[x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2] - 4 \cdot \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] =$
$= x \cdot [x^2 - 6x + 9] - 4 \cdot \left[x^2 + x + \frac{1}{4}\right] =$
$= x^3 - 6x^2 + 9x - 4x^2 - 4x - 1 = x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

12. **a)** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} =$
$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2 = 5 + 2 = 7$

12. **b)** $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} =$
$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2 = 5 - 2 = 3$

15. $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + (1)^2 = (2x - 1)^2$
Portanto o lado do quadrado mede $2x - 1$; assim, a medida do perímetro é dada por:
$4(2x - 1) = 4 \cdot 2x - 4 \cdot 1 = 8x - 4$

16. **b)** Falsa. $(4a^2 + 7b) \cdot (4a^2 - 7b) = (4a^2)^2 - (7b)^2 =$
$= 4^2\,a^4 - 7^2b^7 = 16a^4 - 49b^2$

16. **c)** Falsa. $(0,3x + 0,4y) \cdot (0,3x - 0,4\,y) = (0,3x)^2 - (0,4y)^2 =$
$= 0,09x^2 - 0,16\,y^2$

17. **a)** $(x + 11) \cdot (x - 11) = x^2 - 11^2 = x^2 - 121$

17. **b)** $(5 - a^3) \cdot (5 + a^3) = 5^2 - (a^3)^2 = 25 - a^6$

17. **c)** $(a^2 - 5) \cdot (a^2 + 5) = (a^2)^2 - 5^2 = a^4 - 25$

17. **d)** $\left(\frac{3}{4}x + y\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x - y\right) = \left(\frac{3}{4}x\right)^2 - y^2 = \frac{9}{16}x^2 - y^2$

18. **a)** $(3x + 2) \cdot (3x - 2) + (x + 2)^2 =$
$= (3x)^2 - 2^2 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 =$
$= 9x^2 - 4 + x^2 + 4x + 4 = 10x^2 + 4x$

18. **b)** $(5x - 6)^2 - (5x + 4)(5x - 4) =$
$= (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 6 + 6^2 - [(5x)^2 - 4^2] =$
$= 25x^2 - 60x + 36 - 25x^2 + 16 = -60x + 52$

18. **c)** $32m^2 + 16m - 2 \cdot (4m + 1)^2 =$
$= 32m^2 + 16m - 2 \cdot [(4m)^2 + 2 \cdot 4m \cdot 1 + 1^2] =$
$= 32m^2 + 16m - 2 \cdot [16m^2 + 8m + 1] =$
$= 32m^2 + 16m - 32m^2 - 16m - 2 = -2$

19. **b)** O antecessor de x é $x - 1$ e o sucessor de x é $x + 1$, portanto a multiplicação será $(x + 1) \cdot (x - 1)$.

19. **c)** Ao adicionar 1 ao resultado, temos:
$(x + 1) \cdot (x - 1) + 1 = x^2 - 1 \cdot x + 1 \cdot x - 1 \cdot 1 + 1 =$
$= x^2 - x + x - 1 + 1 = x^2$
A raiz quadrada será $\sqrt{x^2} = x$, de fato o número pensado.

20. a) $(25 + 1) \cdot (25 - 1) = 25^2 - 1^2 = 625 - 1 = 624$

Portanto: $(25 + 1) \cdot (25 - 1) = 624$

20. b) $21 \cdot 19 = (20 + 1) \cdot (20 - 1) = 20^2 - 1^2 = 400 - 1 = 399$

Portanto: $20^2 - 1^2 = 399$

20. c) Os dois números x e y são tais que $x + y = 28$ e $x - y = 10$. Procura-se $x^2 - y^2$. Aplicando o produto da soma pela diferença, temos:

$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$

Então: $x^2 - y^2 = 28 \cdot 10 = 280$

Ou seja, a diferença entre os quadrados é 280. Também podemos testar hipóteses para os valores de x e y.

x	*y*	*x + y*	*x – y*	Conclusão
5	5	5 + 5 = 10	5 – 5 = 0	✗
18	10	18 + 10 = 28	18 – 10 = 8	só *x* + *y* = 28 ✗
20	10	20 + 10 = 30	20 – 10 = 10	só *x* – *y* = 10 ✗
19	9	19 + 9 = 28	19 – 9 = 10	*x* – *y* = 10 e *x* + *y* = 28 ✓

Então, $x + y = 28$ e $x - y = 10$ é verdadeiro para $x = 19$ e $y = 9$; portanto, esses são os números procurados.

20. d) Os dois números são $x + y = 30$ e $x - y = 20$; procura-se $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 30 \cdot 20 = 600$.

20. f) $m + h = 4$ e $m^2 - h^2 = 80$

$m^2 - h^2 = (m + h)(m - h) \Rightarrow 80 = 4 \cdot (m - h) \Rightarrow$

$\Rightarrow m - h = \dfrac{80}{4} = 20$

22. a) $(x + 1)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 1 + 3 \cdot x \cdot 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

22. b) $(2a + 3)^3 = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2a \cdot 3^2 + 3^3 =$

$= 8a^3 + 3 \cdot 4a^2 \cdot 3 + 3 \cdot 2a \cdot 9 + 27 =$

$= 8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

22. c) $(1 - x)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot x + 3 \cdot 1 \cdot x^2 - x^3 = 1 - 3x + 3x^2 - x^3$

22. d) $(3a - 2)^3 = (3a)^3 - 3 \cdot (3a)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3a \cdot 2^2 - 2^3 =$

$= 27a^3 - 3 \cdot 9a^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3a \cdot 4 - 8 =$

$= 27a^3 - 54a^2 + 36a - 8$

23. $(4a - b)^3 = (4a)^3 - 3 \cdot (4a)^2 \cdot b + 3 \cdot 4a \cdot b^2 - b^3 =$

$= 64a^3 - 48a^2b + 12a^2b - b^3$ 4a + b) é: $(4a + b)^3 =$

$= (4a)^3 + 3 \cdot (4a)^2 \cdot b + 3 \cdot 4a \cdot b^2 + b^3 =$

$= 16a^3 + 48a^2 + 12ab^2 + b^3$

Portanto, $16a^3 - 48a^2b + 12a^2b - b^3 - [64a^3 + 48a^2 + 12ab^2 + b^3] = 64a^3 - 48a^2b + 12a^2b - b^3 - 64a^3 - 48a^2 - 12ab^2 - b^3 = -96a^2b - 2b^3$

24. a) $(2a + 1)^3 - 6a(2a + 1) = (2a)^3 + 3 \cdot (2a)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2a \cdot 1^2 + 1^3 - 6a \cdot 2a - 6a \cdot 1 = 8a^3 + 12a^2 + 6a + 1 - 12a^2 - 6a = 8a^3 + 1$

24. b) $(a - b)^3 - 3ab(b - a) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3ab^2 + 3a^2b = a^3 - b^3$

24. c) $(x - 2y)^3 + 6xy(x - 2y) =$

$= x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 + 6x^2y - 12xy^2 = x^3 - 8y^3$

25. $(a + 5)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot 5 + 3 \cdot a \cdot 5^2 + 5^3 =$

$= a^3 + 15a^2 + 75a + 125$

26. a) Os fatores do 1º termo são: 3, 5, *a*, x e x; os fatores do 2º termo são: 2, 5, *a*, *a* e x; portanto, os fatores comuns são 5, *a* e x, ou 5*ax*.

26. b) Como $15ax^2 : 5ax = 3x$ e $10a^2x : 5ax = 2a$, então:

$15ax^2 - 10a^2x = 5ax(3x - 2a)$

27. a) O fator comum aos termos é *a*, então:

$\begin{cases} ab : a = b \\ ac : a = c \end{cases} \Rightarrow ab + ac = a(b + c)$

27. b) O fator comum aos termos é x, então:

$\begin{cases} x^2 : x = x \\ 3x : x = 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 3x = x(x + 3)$

27. c) O fator comum aos termos é *a*, então:

$\begin{cases} a^2 : a = a \\ a : a = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 + a = a(a + 1)$

27. d) O fator comum aos termos é 5, então:

$\begin{cases} 5x : 5 = x \\ 20 : 5 = 4 \end{cases} \Rightarrow 5x + 20 = 5(x + 4)$

27. e) O fator comum aos termos é 7*ab*, então:

$\begin{cases} 14a^2b : 7ab = 2a \\ 21ab^3 : 7ab = 3b^2 \end{cases} \Rightarrow 14a^2b + 21ab^3 = 7ab(2a + 3b^2)$

27. f) O fator comum aos termos é $5x^2$, então:

$\begin{cases} 15x^3 : 5x^2 = 3x \\ 10x^2 : 5x^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 15x^3 - 10x^2 = 5x^2(3x - 2)$

28. a) Representando o número por x, do enunciado obtém-se a equação $2x^2 = 3x$, que equivale a $2x^2 - 3x = 0$. Observando que x é o fator comum aos termos do polinômio $2x^2 - 3x$, na forma fatorada, temos:

$\begin{cases} 2x^2 : x = 2x \\ 3x : x = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 3x = x(2x - 3) = 0$

Como o produto é nulo, então um dos seus fatores também deve ser. Assim, ou $x = 0$ ou $2x - 3 = 0$. Resolvendo a segunda equação:

$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \dfrac{2x}{2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Portanto, o número procurado é 0 ou $\dfrac{3}{2}$.

28. b) Nesse caso, se o número é y, então $3y^2 = 2y$, que equivale a $3y^2 - 2y = 0$, em cujo 1º membro y é fator comum aos termos.

$$\begin{cases} 3y^2 : y = 3y \\ 2y : y = 2 \end{cases} \Rightarrow 3y^2 = 2y \Rightarrow 3y^2 - 2y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(3y - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou} \\ 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

Como $y \neq 0$, temos $y = \frac{2}{3}$, pois:

$$3y - 2 = 0 \Rightarrow 3y = 2 \Rightarrow \frac{3y}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

28. c) A medida da área da figura 1 é dada por:

$2 \cdot (x^2) = 2x^2$

A medida da área da figura 2 é dada por:

$5 \cdot x = 5x$

Como as medidas são iguais, logo:

$2x^2 = 5x \Rightarrow 2x^2 - 5x = 0.$

Fatorando o 1º membro, cujo fator comum é x:

$$\begin{cases} 2x^2 : x = 2x \\ 5x : x = 5 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(2x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 5 = 0 \end{cases}$$

Como x é a medida do lado de um quadrado, então $x \neq 0$; portanto, a única solução é $x = 2{,}5$.

$$2x - 5 = 0 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

29. a) O fator comum aos termos é a, então:

$$\begin{cases} a^3 : a = a^2 \\ a^2 : a = a \\ a : a = 1 \end{cases} \Rightarrow a^3 + a^2 + a = a(a^2 + a + 1)$$

29. b) O fator comum aos termos é 3, então:

$$\begin{cases} 6x^2 : 3 = 2x^2 \\ 9x : 3 = 3x \\ 12 : 3 = 4 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 - 9x + 12 = 3(2x^2 - 3x + 4)$$

29. c) O fator comum aos termos é 3x, então:

$$\begin{cases} 3x : 3x = 1 \\ 6x^2 : 3x = 2x \\ 9x^3 : 3x = 3x^2 \end{cases} \Rightarrow 3x + 6x^2 + 9x^3 = 3x(1 + 2x + 3x^2)$$

29. d) O fator comum aos termos é 5x, então:

$$\begin{cases} 10x^3 : 5x = 2x^2 \\ 15x^2 : 5x = 3x \\ 20x : 5x = 4 \end{cases} \Rightarrow 10x^3 - 15x^2 + 20x = 5x(2x^2 - 3x + 4)$$

29. e) O fator comum aos termos é $\frac{a}{2}$, então:

$$\begin{cases} \frac{a}{2} : \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} = 1 \\ \frac{a^2}{4} : \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{2}{a} = \frac{a}{2} \\ \frac{a^3}{6} : \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6} \cdot \frac{2}{a} = \frac{a^2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{6} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3}\right)$$

29. f) O fator comum aos termos é $\frac{m}{3}$, então:

$$\begin{cases} \frac{m}{12} : \frac{m}{3} = \frac{m}{12} \cdot \frac{3}{m} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ \frac{5m^2}{6} : \frac{m}{3} = \frac{5m^2}{6} \cdot \frac{3}{m} = \frac{5m}{2} \\ \frac{2m^3}{9} : \frac{m}{3} = \frac{2m^3}{9} \cdot \frac{3}{m} = \frac{2m^2}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{m}{12} - \frac{5m^2}{6} + \frac{2m^3}{9} = \frac{m}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{5m}{2} + \frac{2m^2}{3}\right)$$

30. $$\begin{cases} x(y - 2) : (y - 2) = x \\ 7(y - 2) : (y - 2) = 7 \\ a(y - 2) : (y - 2) = a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(y - 2) - 7(y - 2) + a(y - 2) = (y - 2)(x - 7 + a)$$

31. 2xy é o fator comum dos dois termos, então:

$$\begin{cases} 6x^2y : 2xy = 3x \\ -2xy^2 : 2xy = -y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x^2y - 2xy^2 = 2xy \cdot (3x - y) = 12 \cdot 3 = 36$$

33. a) $5x - xy + 15 - 3y = x(5 - y) + 3(5 - y) = (5 - y)(x + 3)$

33. b) $2ax + 3a + 4bx + 6b = a(2x + 3) + 2b(2x + 3) = (2x + 3)(a + 2b)$

33. c) $ax - 2a + x - 2 = a(x - 2) + 1(x - 2) = (x - 2)(a + 1)$

33. d) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6 = x^2(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x^2 + 2)$

33. e) $10x^2 - 15xy - 4x + 6y = 5x(2x - 3y) - 2(2x - 3y) = (2x - 3y)(5x - 2)$

33. f) $a^3 - a^2 + a - 1 = a^2(a - 1) + 1(a - 1) = (a - 1)(a^2 + 1)$

34. a) As medidas das áreas dos quatro retângulos que compõem a figura são:

$3 \cdot x = 3x$ (superior esquerdo)

$3 \cdot 2 = 6$ (inferior esquerdo)

$x \cdot y = xy$ (superior direito)

$2 \cdot y = 2y$ (inferior direito)

Portanto, a medida da área da figura toda é expressa por:

$3x + 6 + xy + 2y$

34. b) Outra maneira de calcular a medida da área é por meio da multiplicação $(x + 2) \cdot (3 + y)$.

34. c) $3x + 6 + xy + 2y = 3(x + 2) + y(x + 2) = (x + 2)(3 + y)$

35. a) $mx - my + nx - ny = m(x - y) + n(x - y) = (x - y)(m + n) =$
$= 2 \cdot 10 = 20$

37. a) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$

37. b) $a^2 - 36 = a^2 - 6^2 = (a + 6)(a - 6)$

37. c) $y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y + 1)(y - 1)$

37. d) $25x^2 - 4 = (5x)^2 - 2^2 = (5x + 2)(5x - 2)$

37. e) $\frac{1}{100}a^2 - \frac{1}{49} = \left(\frac{1}{10}a\right)^2 - \left(\frac{1}{7}\right)^2 =$

$= \left(\frac{1}{10}a + \frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{10}a - \frac{1}{7}\right)$

37. f) $x^2y^2 - \frac{1}{9} = (xy)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(xy + \frac{1}{3}\right)\left(xy - \frac{1}{3}\right)$

38. a) Como o fator comum aos dois termos é 3x, temos:

$$\begin{cases} 15xy : 3x = 5y \\ 9x \; : 3x = 3 \end{cases} \Rightarrow 15xy + 9x = 3x(5y + 3)$$

38. b) $15xy + 9x + 10y + 6 = 3x\,(5y + 3) + 2(5y + 3) =$
$= (5y + 3)(3x + 2)$

38. c) $100x^2 - 1 = (10x)^2 - 1^2 = (10x + 1)(10x - 1)$

38. d) Como o fator comum aos dois termos é $12ab$, temos:

$$\begin{cases} 36a^2b \; : 12ab = 3a \\ -48ab^2 : 12ab = -4b \end{cases} \Rightarrow 36a^2b - 48ab^2 = 12ab(3a - 4b)$$

38. e) $(x - 1)^2 - 1 = (x - 1)(x - 1) - 1 =$

$= x^2 - 1x - 1x + (-1)^2 - 1 = x^2 - 2x = x(x - 2)$

38. f) $(x + 5)^2 - 9 = (x + 5)^2 - 3^2 = (x + 5 + 3)(x + 5 - 3) =$
$= (x + 8)(x + 2)$

38. g) $25 - (x + y)^2 = 5^2 - (x + y)^2 = [5 + (x + y)] \cdot [5 - (x + y)] =$
$= (5 + x + y)(5 - x - y)$

38. h) $9a^2 - (a - 5)^2 = (3a)^2 - (a - 5)^2 = [3a + (a - 5)] \cdot [3a - (a - 5)] =$
$= (3a + a - 5)(3a - a + 5) = (4a - 5)(2a + 5)$

39. a) $a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a + 1)(a - 1)$

39. b) $12x^3 - 3xy^2 = 3x(4x^2 - y^2) = 3x(2x + y)(2x - y)$

39. c) $a^2b - b^3 = b(a^2 - b^2) = b(a + b)(a - b)$

39. d) $a^3 - 9a = a(a^2 - 9) = a(a + 3)(a - 3)$

40. a) $x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (x + 5)(x - 5) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$$

40. b) $x^2 - 64 = 0 \Rightarrow (x + 8)(x - 8) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8 \\ x - 5 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases}$$

40. c) $81x^2 - 49 = 0 \Rightarrow (9x + 7)(9x - 7) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x + 7 = 0 \Rightarrow 9x = -7 \Rightarrow x = -\frac{7}{9} \\ 9x - 7 = 0 \Rightarrow 9x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{9} \end{cases}$$

40. d) $25x^2 - 36 = 0 \Rightarrow (5x + 6)(5x - 6) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5x + 6 = 0 \Rightarrow 5x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \\ 5x - 6 = 0 \Rightarrow 5x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \end{cases}$$

40. e) $9x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (3x + 1)(3x - 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ 3x - 1 = 0 \Rightarrow 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

40. f) $x^2 - \frac{9}{16} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \\ x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{4} \end{cases}$$

41. a) Como a área do quadrado maior mede m^2, pois $m \cdot m = m^2$, e a área do quadrado menor mede n^2, pois $n \cdot n = n^2$, tem-se que a área da parte pintada mede $m^2 - n^2$.

41. b) Como a região I é um retângulo de base m e altura $(m - n)$, a medida de sua área pode ser expressa por $m(m - n)$.

41. c) Como a região II é um retângulo de base $(m - n)$ e altura n, a medida de sua área pode ser expressa por $(m - n)n$.

41. d) A expressão que dá a soma das medidas das áreas das regiões I e II é:

$m(m - n) + (m - n)n$

41. e) Como $m - n$ é o fator comum:

$$\begin{cases} m(m - n) : (m - n) = m \\ n(m - n) : (m - n) = n \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m(m - n) + n(m - n) = (m + n)(m - n)$

43. a) Sim, pois o dobro do produto das raízes dos termos extremos é $2 \cdot x \cdot 2$, que coincide com o termo central $4x$.

43. b) Não é, pois o dobro do produto das raízes dos termos extremos é $2 \cdot y \cdot 10 = 20y$, diferente do termo central $5y$. Uma possível modificação para formar um quadrado perfeito é $y^2 + 20y + 100$.

43. c) Sim, pois o dobro do produto das raízes dos termos extremos é $2 \cdot a \cdot 5$, que coincide com o termo central $10a$.

43. d) Não é, pois, o dobro do produto das raízes dos termos extremos é $2 \cdot 4a \cdot 3b = 24ab$, diferente do termo central $36ab$. Uma possível modificação para formar um quadrado perfeito é $16a^2 + 24ab + 9b^2$.

43. e) Sim, reescrevendo a expressão como $m^2 + 2mm + n^2$, verifica-se que o dobro do produto das raízes dos termos extremos é $2 \cdot m \cdot n$, que coincide com o termo central $2mn$.

43. f) Sim, pois o dobro do produto das raízes dos termos extremos é $2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$, que coincide com o oposto do termo central $-x$.

44. a) $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2$

44. b) $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$

44. c) $x^4 - 4x^2 + 4 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 2 + 2^2 = (x^2 - 2)^2$

44. d) $x^2y^2 - 10xy + 25 = (xy)^2 - 2 \cdot xy \cdot 5 + 5^2 = (xy - 5)^2$

44. e) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{21}x + \frac{1}{49} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{7}\right)^2 =$
$= \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{7}\right)^2$

44. f) $0{,}25a^2 - 0{,}30a + 0{,}09 = (0{,}5a)^2 - 2 \cdot 0{,}5a \cdot 0{,}3 + 0{,}3^2 =$
$= (0{,}5a - 0{,}3)^2$

45. Como $81 + 90a + 25a^2 = 9^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5a + (5a)^2 = (9 + 5a)$, obtemos o binômio $9 + 5a$.

46. $A = y^2 + 14ya + 49a^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 7a + (7a)^2 = (y + 7a)^2$
A medida A da área é o quadrado da medida do lado, então o lado mede $y + 7a$.

49. a) De $(a + b)^2 = 64$, tem-se:
$a^2 + 2ab + b^2 = 64 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 64$
Substituindo ab por 12 nessa equação:
$a^2 + b^2 + 2 \cdot 12 = 64 \Rightarrow a^2 + b^2 = 64 - 24 \Rightarrow a^2 + b^2 = 40$

49. b) De $(a + b)^2 = 81$ tem-se:
$a^2 + 2ab + b^2 = 81 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 81$
Substituindo $a^2 + b^2$ por 53 nessa equação:
$53 + 2ab = 81 \Rightarrow 2ab = 28 \Rightarrow ab = \frac{28}{2} \Rightarrow ab = 14$

49. c) $(a = b)^2 = a^2 + b^3 = 2ab$
Substituindo $a^2 + b^2$ por 13 e ab por 12, tem-se:
$13 + 2 \cdot 12 = 13 + 24 = 37$

52. a) $a^3 - 1 = a^3 - 1^3 = (a - 1)(a^2 + a \cdot 1 + 1^2) =$
$= (a - 1)(a^2 + a + 1)$

52. b) $8a^3 + 1 = (2a)^3 + 1^3 = (2a + 1)[(2a)^2 - 2a \cdot 1 + 1^2] =$
$= (2a + 1)(4a^2 - 2a + 1)$

52. c) $x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + x \cdot 3 + 3^2) =$
$= (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

52. d) $x^3 + 64 = x^3 + 4^3 = (x + 4)(x^2 - x \cdot 4 + 4^2) =$
$= (x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

52. e) $1 - x^3 = 1^3 - x^3 = (1 - x)(1^2 + 1 \cdot x + x^2) =$
$= (1 - x)(1 + x + x^2)$

52. f) $27a^3 + 8y^3 = (3a)^3 + (2y)^3 =$
$= (3a + 2y)[(3a)^2 - 3a \cdot 2y + (2y)^2] =$
$= (3a + 2y)(9a^2 - 6ay + 4y^2)$

53. a) Falsa. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

53. b) Verdadeira. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a^2 - ab + b^2)(a + b)$

53. c) Falsa. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

53. d) Verdadeira. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a^2 + ab + b^2)(a - b)$

54. a) $\frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1$

54. b) $\frac{4x + 2}{-4x - 2} = \frac{4x + 2}{-(4x + 2)} = -\frac{4x + 2}{4x + 2} = -1$

55. a) $\frac{a^2 - a}{a} = \frac{a(a - 1)}{a} = a - 1$

55. b) $\frac{x^2 - 16}{x + 4} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{x + 4} = x - 4$

55. c) $\frac{3x^2 + 6x + 3}{x + 1} = \frac{3(x^2 + 2x + 1)}{x + 1} = \frac{3(x + 1)^2}{x + 1} =$
$= \frac{3(x + 1)(x + 1)}{(x + 1)} = 3(x + 1) = 3x + 3$

55. d) $\frac{5a^2 - 20}{a - 2} = \frac{5(a^2 - 4)}{a - 2} = \frac{5(a + 2)(a - 2)}{(a - 2)} =$
$= 5(a + 2) = 5a + 10$

56. $\frac{10a + 5b}{2a + b} = \frac{5(2a + b)}{(2a + b)} = \frac{5}{1} = 5$

57. a) $\frac{15a^5b}{4a^2b^3} = \frac{15a^{5-2}}{4b^{3-1}} = \frac{15a^3}{4b^2}$

57. b) $\frac{15(-2)^3}{4(2)^2} = \frac{15 \cdot (-8)}{4 \cdot 4} = \frac{-15}{2}$

57. c) Como não existe divisão por zero, para existir é necessário verificar: $4b^2 \neq 0 \Rightarrow b^2 \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$. Portanto, com $b = 0$, a fração não representa número real.

58. a) $\frac{10xy}{10x^2 + 20xy} = \frac{10xy}{10x(x + 2y)} = \frac{y}{x + 2y}$ (cartão azul)

58. b) $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{3x - 3y} = \frac{(x - y)^2}{3(x - y)} = \frac{x - y}{3}$ (cartão verde)

58. c) $\frac{x - 2}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{1}{x + 2}$ (cartão vermelho)

58. d) $\frac{x^2 - 10x + 25}{2x - 10} = \frac{(x - 5)^2}{2(x - 5)} = \frac{x - 5}{2}$ (cartão amarelo)

59. a) É $3x - 2$, pois:

$$\begin{array}{rrr|l} 6x^2 & +11x & -10 & 2x+5 \\ \cline{4-4} -6x^2 & -15x & & 3x-2 \\ \cline{1-2} & -4x & -10 & \\ & +4x & +10 & \\ \cline{2-3} & & 0 & \end{array}$$

59. b) $x = 0 \Rightarrow 3x - 2 = 3 \cdot 0 - 2 = -2$

59. c) $x = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x - 2 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 2 - 2 = 0$

59. d) Pode assumir qualquer valor racional desde que $2x + 5 \neq 0 \Rightarrow 2x \neq -5 \Rightarrow x \neq -\dfrac{5}{2}$

60. A simplificação correta seria: $\dfrac{x^2 + x}{x} = \dfrac{x(x+1)}{x} = x + 1$

61. a) $x \neq 0$

61. b) $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

61. c) $x \neq 0$

61. d) $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

62. a) Simplificando os numeradores por 4, temos:

$\dfrac{3}{x} = \dfrac{1}{x-2}$

Considerando $x \neq 0$ e $x \neq 2$, multiplicamos os termos da equação por $x(x - 2)$, obtendo:

$\left(\dfrac{3}{x}\right) \cdot x(x-2) = \left(\dfrac{1}{x-2}\right) \cdot x(x-2) \Rightarrow 3(x-2) = x \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x - 6 = x \Rightarrow 3x - x = 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{6}{2} \Rightarrow x = 3$

Portanto, 3 é a solução da equação.

62. b) Simplificando os numeradores por 4, temos:

$\dfrac{-1}{x} = \dfrac{1}{x-2}$

Considerando $x \neq 0$ e $x \neq 2$, multiplicamos os termos da equação por $x(x - 2)$, obtendo:

$\dfrac{-1}{x} \cdot x(x \quad 2) = \dfrac{1}{x-2} \cdot x(x-2) \Rightarrow x = -(x-2) \Rightarrow x = -x$

$+ 2 \Rightarrow x + x = 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{2}{2} \Rightarrow x = 1$

Portanto, 1 é a solução da equação.

63. a) Sendo x o número de famílias inicialmente previsto, então $40 = \dfrac{720}{x-2}$. Considerando $x \neq 2$, multiplicamos os termos da equação por $x(x - 2)$, obtendo:

$40 \cdot (x-2) = \left(\dfrac{720}{x-2}\right) \cdot (x-2) \Rightarrow 40(x-2) = 720 \Rightarrow$

$\Rightarrow 40x - 80 = 720 \Rightarrow 40x = 720 + 80 \Rightarrow 40x = 800 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{800}{40} \Rightarrow x = 20$

Portanto, o número inicial era 20 famílias.

63. b) Compareceram 18 famílias.
$x - 2 = 20 - 2 = 18$

63. c) Cada família teria recebido 36 kg, pois 720 : 20 = 36.

64. a) Sendo x o número pensado, o enunciado sugere a equação $\dfrac{x+4}{x-2} = \dfrac{x-6}{x-9}$. Considerando $x \neq 2$ e $x \neq 9$, multiplicamos os termos da equação por $(x-2)(x-9)$, obtendo:

$\left(\dfrac{x+4}{x-2}\right) \cdot (x-2)(x-9) \cdot \left(\dfrac{x-6}{x-9}\right) \cdot (x-2)(x-9) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+4) \cdot (x-9) = (x-6)(x-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 9x - 36 = x^2 - 6x - 2x + 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow -5x - 36 = -8x + 12 \Rightarrow 8x - 5x = 36 + 12 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = 48 \Rightarrow x = \dfrac{48}{3} \Rightarrow x = 16$

Lúcia pensou no número 16.

64. b) Substituindo $x = 16$ em um dos membros da equação do item anterior, temos:

$\dfrac{x+4}{x-2} = \dfrac{16+4}{16-2} = \dfrac{20}{14} = \dfrac{10}{7}$

65. a) Sendo x o número de lotes da chácara menor e y a medida de área de cada lote, temos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2880}{x} \\ y = \dfrac{5040}{2x-2} \end{cases}$$

Comparando as expressões de y, temos:

$\dfrac{2880}{x} = \dfrac{5040}{2x-2}$

Simplificando os numeradores por mdc(2 880, 5 040) = = 144, temos:

$20 = \dfrac{35}{2}$

Considerando $x \neq 0$ e $x \neq 1$, multiplicamos os termos da equação por $x(2x - 2)$, obtendo:

$\left(\dfrac{20}{x}\right) \cdot x\,(2x-2) = \left(\dfrac{35}{2x-2}\right) \cdot x\,(2x-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow 20\,(2x-2) = 35x \Rightarrow\Rightarrow 40x - 40 = 35x \Rightarrow$

$\Rightarrow 40x - 35x = 40 \Rightarrow 5x = 40 \Rightarrow x = \dfrac{40}{5} = 8$

Portanto a chácara menor ficou dividida em 8 lotes.

65. b) A chácara maior ficou dividida em 14 lotes.
$2 \cdot 8 - 2 = 16 - 2 = 14$

65. c) 360 m², pois 2 880 : 8 = 360.

66. Resposta pessoal. Um exemplo de sequência não recursiva são esses números quaisquer que foram escolhidos sem critério específico: 3, 56, 546, 65, 60, 960, 18. Uma sequência recursiva são os primeiros múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18.

67. $x = 1, y = 2, 9x + y = 9 \cdot 1 + 2 = 11$
$x = 2, y = 3, 9x + y = 9 \cdot 2 + 3 = 21$
$x = 3, y = 4, 9x + y = 9 \cdot 3 + 4 = 31$
$x = 4, y = 5, 9x + y = 9 \cdot 4 + 5 = 41$
$x = 5, y = 6, 9x + y = 9 \cdot 5 + 6 = 51$
$x = 6, y = 7, 9x + y = 9 \cdot 6 + 7 = 61$
$x = 7, y = 8, 9x + y = 9 \cdot 7 + 8 = 71$
$x = 8, y = 9, 9x + y = 9 \cdot 8 + 9 = 81$
$x = 9, y = 10, 9x + y = 9 \cdot 9 + 10 = 91$
Sim, é uma sequência recursiva.

69. a) Considerando n um número natural, temos:
$(n + 1)^2 - n^2 = [(n + 1) + n] \cdot [(n + 1) - n] = (n + 1) + n$
Note que $(n + 1) + n$ é um
número ímpar.

69. b) $(n + 1)2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$
Note que $2n + 1$ é um número ímpar.

Pense mais um pouco...

Página 130

a) $12 = (10 + 2)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 2 + 2^2 = 100 + 40 + 4 = 144$

b) $24 = (20 + 4)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 4 + 4^2 = 400 + 160 + 16 = 576$

c) $35 = (30 + 5)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 5 + 5^2 = 900 + 300 + 25 = 1\,225$

d) $52 = (50 + 2)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2\,500 + 200 + 4 = 2\,704$

Página 133

a) $29 = (30 - 1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

b) $38 = (40 - 2)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 2 + 2^2 = 1\,600 - 160 + 4 = 1\,444$

c) $99 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 =$
$= 9\,801$

d) $57 = (60 - 3)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 3 + 3^2 = 3\,600 - 360 + 9 = 3\,249$

Página 152

Sendo x o número de filhos de José, conclui-se que o número de filhos de Luís é $(x + 1)$, pelas informações do enunciado. Pelo diálogo entre os irmãos, $\frac{960}{x+1} = \frac{720}{x}$.
Simplificando os numeradores por $mdc(720, 960) = 240$, então $\frac{4}{x+1} = \frac{3}{x}$. Considerando $x \neq 0$ e $x \neq -1$, multiplicamos os termos da equação por $x\,(x+1)$, obtendo:

$$\left(\frac{4}{x+1}\right) \cdot x\,(x+1) = \left(\frac{3}{x}\right) \cdot x\,(x+1) \Rightarrow 4x = 3(x+1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x = 3x + 3 \Rightarrow 4x - 3x = 3 \Rightarrow x = 3$$

Então, José tem 3 filhos, e cada um ficou com um terreno de medida 240 m², pois $720 : 3 = 240$.

Para saber mais

Páginas 138 e 139

2. $0{,}21 \cdot 7 + 0{,}21 \cdot 3 = 0{,}21 \cdot (7 + 3) = 0{,}21 \cdot 10 = 2{,}1$

3. a) $15 \cdot 18 + 15 \cdot 2 = 15 \cdot (18 + 2) = 15 \cdot 20 = 300$

3. b) $5{,}4 \cdot 13 - 5{,}4 \cdot 3 = 5{,}4 \cdot (13 - 3) = 5{,}4 \cdot 10 = 54$

3. c) $12 \cdot \frac{7}{13} + 12 \cdot \frac{6}{13} = 12 \cdot \left(\frac{7}{13} + \frac{6}{13}\right) = 12 \cdot \frac{13}{13} = 12$

3. d) $4{,}5 \cdot 8 + 4{,}5 \cdot 7 - 4{,}5 \cdot 5 = 4{,}5 \cdot (8 + 7 - 5) = 4{,}5 \cdot 10 = 45$

3. e) $3{,}8 \cdot 4{,}2 + 3{,}8 \cdot 4{,}6 + 3{,}8 \cdot 1{,}2 = 3{,}8 \cdot (4{,}2 + 4{,}6 + 1{,}2) =$
$= 3{,}8 \cdot 10 = 38$

3. f) $10 \cdot \frac{17}{11} - 10 \cdot \frac{6}{11} = 10\left(\frac{17}{11} - \frac{6}{11}\right) = 10 \cdot \frac{11}{11} = 10$

Trabalhando a informação

1. Considerando as informações do enunciado sobre os anos de nascimento de cada geração, é possível calcular a idade das pessoas de cada geração conforme o ano em que se realiza a atividade.

3. A medida da maior barra (que representa 97) deve ser menor do que a medida de comprimento de uma folha A4 (297 mm = 29,7 cm) para que o gráfico fique adequado. A escala escolhida precisa ser tal que a menor barra fique visível.

Exercícios complementares

1. a) $(3a - 2b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

1. b) $(5a + 7)(5a - 7) = (5a)^2 - 7^2 = 25a^2 - 49$

1. c) $(3x^2 + y^3)^2 = (3x^2)^2 + 2 \cdot 3x^2 \cdot y^3 + (y^3)^2 = 9x^4 + 6x^2y^3 + y^6$

1. d) $(-5 - 2y)^2 = (-5)^2 + 2 \cdot (-5) \cdot (-2y) + (-2y)^2 =$
$= 25 + 20y + 4y^2$

2. $(5a + 9b)(5a - 9b) = (5a)^2 - (9b)^2 = 25a^2 - 81b^2$

3. $A^2 - B + C = (x - 3)^2 - (x^2 + 3) + 9x = x^2 - 6x + 9 - x^2 - 3 +$
$+ 9x = 3x + 6 = 3(x + 2)$
Alternativa **c**.

4. Fazendo a operação inversa para descobrir:
$(x + 10)^2 - (x^2 + 5x + 70) = x^2 + 20x + 100 - x^2 - 5x - 70 =$
$= 15x + 30$

5. Como $9x^2 + 24x + 16 = (3x + 4)^2$, tem-se $a = 3$ e $b = 4$.
Portanto: $a + b = 3 + 4 = 7$

6. a) Como $(a^2 + b^2) - (a - b)^2 = a^2 + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 2ab$, deve-se subtrair a expressão $2ab$.

6. b) $(a + b)^2 - (a^2 + 2ab) = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - 2ab = b^2$
Portanto, deve-se adicionar b^2.

6. c) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a^2 + b^2) + 2 \cdot (ab) = 34 + 2 \cdot 15 =$
$= 34 + 30 = 64$

6. d) Para $(a + b)^2 = 196$, temos:
$a^2 + 2ab + b^2 = 196 \Rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 196$
Substituindo $(a^2 + b^2)$ por 100 nessa equação, temos:
$100 + 2ab = 196 \Rightarrow 2ab = 196 - 100 \Rightarrow 2ab = 96 \Rightarrow$
$\Rightarrow ab = \frac{96}{2} \Rightarrow ab = 48$

7. $375^2 - 374^2 = (375 + 374)(375 - 374) = 749 \cdot 1 = 749$
A soma dos algarismos do resultado é 20 $(7 + 4 + 9 = 20)$.
Alternativa **c**.

8. a) $3x^2 - 75 = 3(x^2 - 25) = 3(x + 5)(x - 5)$

8. b) $a^3 - ab^2 = a(a^2 - b^2) = a(a + b)(a - b)$

8. c) $x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

8. d) $a^2 - x^2 + a + x = (a + x)(a - x) + 1 \cdot (a + x) =$
$= (a + x) \cdot [(a - x) + 1] = (a + x) \cdot (a - x + 1)$

8. e) $x^2 - y^2 + 2x + 2y = (x + y)(x - y) + 2 \cdot (x + y) =$
$= (x + y) \cdot [(x - y) + 2] = (x + y) \cdot (x - y + 2)$

8. f) $2x^2 - 12x + 18 = 2(x^2 - 6x + 9) = 2(x - 3)^2$

9. a) $(a + b)^2 = 18^2 = 324$

9. b) $(a - b)^2 = 2^2 = 4$

9. c) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = 18 \cdot 2 = 36$

10. a) $(x + y)^2 = 14^2 = 196$

10. b) Para $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, temos:
$(x^2 + y^2) + 2xy = 14^2$
Então, substituindo $(x^2 + y^2)$ por 116, temos:
$116 + 2xy = 14^2 \Rightarrow 2xy = 196 - 116 \Rightarrow 2xy = 80 \Rightarrow$
$\Rightarrow xy = \frac{80}{2} \Rightarrow xy = 40$

10. c) Como $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = (x^2 + y^2) - 2(xy)$, substituindo os resultados dos itens anteriores, tem-se:
$(x - y)^2 = 116 - 2 \cdot 40 = 116 - 80 = 36$

11. a) $x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x\,(x + 12) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 12 = 0 \Rightarrow x = -12 \end{cases}$$

As soluções da equação são 0 e –12.

11. b) $6x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x\,(6x - 5) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 6x - 5 = 0 \Rightarrow 6x = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{6} \end{cases}$$

As soluções da equação são 0 e $\dfrac{5}{6}$.

11. c) $4x^2 - 14x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

11. d) $9x^2 + 6x + 1 = 0 \Rightarrow (3x + 1)^2 = 0 \Rightarrow 3x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

13. $(3a - 2b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$
A soma dos coeficientes da expressão desenvolvida é:
$9 + (-12) + 4 = 1$
Alternativa **c**.

14. $2(x^2 + 3y)(x^2 - 3y) = 2[(x^2)^2 - (3y)^2] = 2(x^4 - 9y^2) = 2x^4 - 18y^2$
Alternativa **b**.

15. $(2x + 9y)^2 - 36xy = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 9y + (9y)^2 - 36xy =$
$= 4x^2 + 36xy + 81y^2 - 36xy = 4x^2 + 81y^2$
Então, com $x = -1$ e $y = 1$, tem-se:
$4x^2 + 81y^2 = 4 \cdot (-1)^2 + 81 \cdot (1)^2 = 4 + 81 = 85$
Alternativa **c**.

16. $x^2 + 6xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 4xy = (x + y)^2 + 4xy$
Então, com $x + y = 8$ e $xy = 15$, tem-se:
$(x + y)^2 + 4xy = 8^2 + 4 \cdot 15 = 64 + 60 = 124$
Alternativa **d**.

17. $(x + 3)(x - 3) - x^2 = x^2 - 9 - x^2 = -9$
Alternativa **b**.

18. $y^4 - 4y^2 + 4 = (y^2 - 2)^2$
Alternativa **a**.

19. $ab + 2b - 3a - 6 = b(a + 2) - 3(a + 2) = (a + 2) \cdot (b - 3)$
Alternativa **b**.

20. a) $\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \dfrac{x(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = \dfrac{x}{x - 1}$

20. b) $\dfrac{b - a}{a^2 - b^2} = \dfrac{-1(a - b)}{(a + b)(a - b)} = \dfrac{-1}{a + b}$

Verificando

1. $(x + 4)^2 - (2x - 3)^2 =$
$x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 - [(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2] =$
$= x^2 + 8x + 16 - 4x^2 + 12x - 9 = -3x^2 + 20x + 7$
Alternativa **b**.

2. A medida da área do pedaço inicial é 12^2 cm², pois é um quadrado de lado medindo 12 cm. A medida da área do pedaço retirado é x^2 cm², pois o lado mede x cm. Portanto, a medida da área que sobrou é $12^2 - x^2 = 144 - x^2$.
Alternativa **d**.

3. $(5x - 3)^3 = (5x)^3 - 3 \cdot (5x)^2 \cdot 3 + 3 \cdot 5x \cdot 3^2 - 3^3 =$
$= 125x^3 - 225x^2 + 135x - 27$
Alternativa **a**.

4. O fator comum é $4xy$, portanto:
$24x^2y + 32xy^2 - 12xy = 4xy(6x + 8y - 3)$
Alternativa **d**.

5. $3ab + 3ac - 5b - 5c = 3a(b + c) - 5(b + c) =$
$= (b + c) \cdot (3a - 5) = (3a - 5)(b + c)$
Alternativa **b**.

6. Como a área media x^2 m², o lado do terreno quadrado media x m. Após a alteração, sua nova área pode ser fatorada como $x^2 - 4a^2 = (x + 2a) \cdot (x - 2a)$, então uma possibilidade é que um dos lados tenha aumentado $2a$ metros e o outro tenha diminuído $2a$ metros. Alternativa **a**.

7. $25x^2 - 60xy + 36y^2 = (5x)^2 - 2 \cdot 5x \cdot 6y + (6y)^2 = (5x - 6y)^2$
Alternativa **b**.

8. $\dfrac{(3a + 2b)(3a - 2b)^2}{18a^2 - 8b^2} = \dfrac{(3a + 2b)(3a - 2b)^2}{2(9a^2 - 4b^2)} =$
$= \dfrac{(3a + 2b)(3a - 2b)(3a - 2b)}{2(3a + 2b)(3a - 2b)} = \dfrac{3a - 2b}{2}$
Alternativa **d**.

9. Sendo n um número natural, a expressão $2n$ representa necessariamente um número par; logo, a expressão $2n + 1$ representa necessariamente um número ímpar. Então, a sequência formada será a dos números ímpares. Alternativa **d**.

Capítulo 7 – Estudo dos triângulos

Objetivos do capítulo e justificativas

- Conceituar cevianas de um triângulo: mediana, bissetriz e altura.
- Estudar e aplicar as cevianas de um triângulo.
- Conceituar e estudar os casos de congruência de triângulos.
- Aplicar congruência de triângulos em demonstrações de propriedades geométricas.
- Analisar a construção de um hexágono regular com descrição do procedimento por escrito.
- Construir um dodecaedro regular a partir da medida do ângulo central associado a ele.
- Identificar simetria em figuras obtidas por composição de transformações geométricas.

Os objetivos desse capítulo, que aborda os elementos do triângulo e dos casos de congruência de triângulos, são importantes para desenvolver as **competências gerais 2, 4** e **7** e a **competências específicas 2** e **5**, pois são apresentadas atividades em que os estudantes devem exercitar a curiosidade intelectual, o espírito de investigação, aplicar métodos lógico-dedutivos para demonstrar propriedades e argumentar sobre a validade deles.

Do mesmo modo, essas competências são mobilizadas e desenvolvidas nas atividades de construção geométrica propostas, pois os estudantes são incentivados a justificar os procedimentos envolvidos nas construções geométricas, além de utilizar diferentes ferramentas para concretizá-las.

A **competência geral 3** também é desenvolvida neste capítulo, pois eles têm a oportunidade de fruir uma manifestação artística envolvendo triângulos, nas situações apresentadas na página de *Abertura* e na seção *Para saber mais* que explora o grafite.

Diferentes atividades e contextos, neste capítulo, favorecem o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e a **competência específica 8**, pois os estudantes deverão, em grupos, pesquisar, discutir e interagir com os colegas a fim de comunicar respostas ou comentar estratégias de resoluções.

• Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

Objetos de conhecimento da Unidade Temática **Geometria** são estudados com a ampliação do estudo dos triângulos, visando a preparar os estudantes para a continuidade desse estudo ao apresentar-lhes conteúdos que desenvolverão a habilidade (EF08MA14) em capítulos seguintes e, ainda, no 9º ano (EF09MA12, EF09MA13 e EF09MA14).

Os conteúdos e atividades propostos exploram, inicialmente, as cevianas (mediana, bissetriz e altura) de um triângulo e suas aplicações em situações diversas e favorecem o desenvolvimento da habilidade (EF08MA17). Em seguida, aborda-se a congruência de triângulos, conteúdo base para a demonstração de várias propriedades geométricas. Também neste capítulo, são descritos procedimentos por escrito da construção de um hexágono regular em uma seção *Para saber mais* e que favorece o desenvolvimento da habilidade (EF08MA16). Na seção *Diversificando*, exploram-se aspectos da habilidade (EF08MA18) ao abordar a identificação de simetria em figuras obtidas por composição de transformações geométricas.

• Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Abertura

a) Os triângulos são retângulos, pois apresentam um ângulo reto.

Exercícios propostos

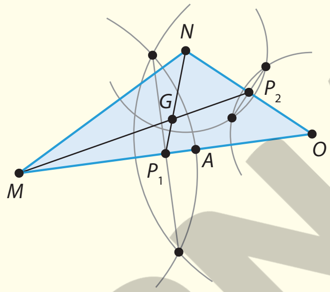
1. a) Altura: é a ceviana que une perpendicularmente um dos vértices ao seu lado oposto (ou ao seu prolongamento.

1. b) Bissetriz: é a ceviana que divide um dos ângulos internos do triângulo em dois ângulos congruentes.

1. c) Mediana, bissetriz e a altura: segmento de reta que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele, divide um dos ângulos interno do triângulo em dois ângulos congruentes e une perpendicularmente um dos vértices ao seu lado oposto, portanto, a ceviana coincide com as três definições.

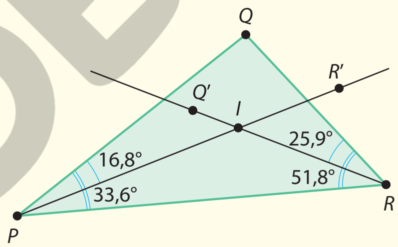
1. d) Bissetriz: é a ceviana que divide um dos ângulos internos do triângulo em dois ângulos congruentes.

2. a) O ponto formado pela intersecção das medianas é chamado de baricentro. Para traçar a mediana, liga-se um vértice ao ponto médio do lado oposto; observe um esboço a seguir.

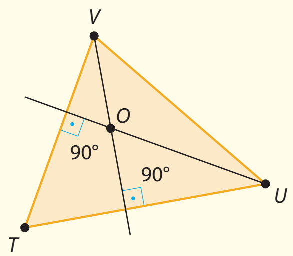


ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

2. b) O ponto obtido pela intersecção das bissetrizes é chamado de incentro. Para traçar uma bissetriz, basta medir o ângulo com transferidor e dividir sua medida pela metade, então encontrar o ponto por onde passa a semirreta desejada, de forma a traçar um ângulo com metade da medida do original.



2. c) O ponto formado pela intersecção das alturas é chamado de ortocentro. Para traçar, com o esquadro, posicionar de modo que um lado dele passe por um vértice (por exemplo *V*) e o lado perpendicular da ferramenta acompanhe o lado oposto (nesse exemplo, $\overline{TU}$).

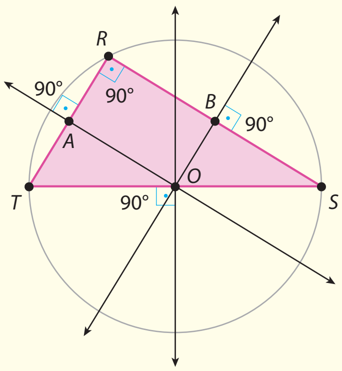


3. Para traçar a bissetriz de um ângulo $\widehat{A}$ em um triângulo ABC, deve-se fixar a ponta-seca do compasso no ponto A, traçar um arco de circunferência intersectando os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, no ponto *M* e no ponto *N*; determina-se o ponto médio do segmento $\overline{MN}$ e obtém-se a reta suporte da bissetriz que passa por A e por esse ponto médio. O ponto A e o ponto de intersecção dessa reta suporte com o lado oposto a $\widehat{A}$ determinam a bissetriz desse vértice.

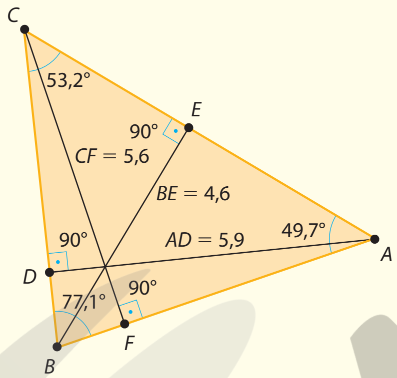
Para traçar a mediatriz do lado $\overline{AB}$, deve-se determinar o ponto médio M desse lado e traçar um segmento partindo de M até o vértice C do triângulo.

4. Como o segmento $\overline{AM}$ é a mediana, M é ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Assim, os segmentos $\overline{BM}$ e $\overline{MC}$ têm a mesma medida. Portanto, a medida BC é 3,8 cm (1,9 + 1,9 = = 3,8). Assim, obtemos o perímetro do triângulo ABC, que mede 9,5 cm (2,2 + 3,8 + 3,5 = 9,5).

5.



6. A maior altura será a altura relativa ao menor lado. O triângulo escaleno acutângulo, ABC pode ser qualquer e a conclusão será a mesma.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

8. O triângulo ABC é um triângulo retângulo, portanto, os lados $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ também são alturas relativas aos seus respectivos lados e têm o ponto B em comum. Deste modo, construindo a altura relativa ao lado $\overline{AC}$, verificamos que o ortocentro coincide com o vértice B.

9. Como é afirmado que em cada item os triângulos são congruentes, então:

9. a) Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{ED}$ são congruentes, pois são lados opostos aos ângulos congruentes $\hat{C}$; os lados $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, pois são lados opostos aos ângulos congruentes $\hat{E}$ e $\hat{B}$; os lados $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ são congruentes, pois são lados opostos aos ângulos congruentes $\hat{A}$ e $\hat{D}$.

9. b) Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{QP}$ são congruentes, pois são lados opostos aos ângulos congruentes, $\hat{C}$ e $\hat{R}$; os lados $\overline{AC}$ e $\overline{QR}$ são congruentes, pois são lados opostos aos ângulos congruentes, $\hat{B}$ e $\hat{P}$; os lados $\overline{BC}$ e $\overline{PR}$ são congruentes, pois são lados opostos aos ângulos congruentes $\hat{A}$ e $\hat{Q}$.

10. a) Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são congruentes, pois são ângulos opostos aos lados congruentes, $\overline{CE}$ e $\overline{CB}$; os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são congruentes, pois são ângulos opostos aos lados congruentes, $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$; os ângulos $\hat{C}_1$ e $\hat{C}_2$ são congruentes, pois são ângulos opostos aos lados congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$.

10. b) Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{M}$ são congruentes, pois são ângulos opostos aos lados congruentes $\overline{BC}$ e $\overline{NP}$; os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{N}$ são congruentes, pois são ângulos opostos aos lados congruentes, $\overline{AB}$ e $\overline{MP}$; os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{P}$ são congruentes, pois são ângulos opostos aos lados congruentes $\overline{AC}$ e $\overline{MN}$.

11. Os triângulos são congruentes, então os lados $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ são congruentes, assim, $5x + 13 = 7x - 3$. Então, $7x - 5x = 13 + 3$, resultando em $2x = 16$ e, por fim, $x = 8$. Pela congruência de $\overline{AC}$ e $\overline{PM}$, temos $x + 12y = 6x + 4y$, portanto $(8) + 12y = 6(8) + 4y$, resultando em $12y - 4y =$ $= 48 - 8$, logo $8y = 40$, $y = 5$.

12. Os triângulos são congruentes e então, os ângulos $\hat{T}$ e $\hat{C}$ são congruentes, assim $3y = 45$; logo, $y = 15°$. Como $7x + 2y = 58$, temos $7x + 2 \cdot (15) = 58$. Então, $7x = 58 - 30 =$ $= 28 \Rightarrow x = 4°$. Portanto, as medidas são $x = 4°$ e $y = 15°$.

13. a) Os lados $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ são congruentes. O ângulo $\hat{A}$ é congruente em ambos os triângulos e o lado $\overline{AC}$ é comum aos dois triângulos. O caso de congruência é LAL.

13. b) Como as retas r e s são paralelas, o ângulo $\hat{O}$ é congruente em ambos os triângulos, bem como o ângulo $\hat{P}$ e $\hat{N}$ são congruentes (ângulos alternos internos) e, ainda, M e Q são congruentes (alternos internos); então, os triângulos são congruentes pelos casos ALA ou LAA_O.

13. c) Os lados $\overline{TR}$ e $\overline{SU}$ são congruentes. O lado $\overline{RS}$ é comum aos dois triângulos; portanto, como os ângulos $\hat{R}$ e $\hat{S}$ são congruentes, o caso de congruência é o LAL.

14. a) Pelo caso de congruência LAL, temos que $x = 78°$ e $y = 40°$.

14. b) Pelo caso de congruência ALA, temos que $y = 20$ e $x = 15$.

14. c) Pelo caso de congruência ALA, temos que $y + 7 = 13$, $y = 6$ e $x + y = 9 \Rightarrow x + 6 = 9 \Rightarrow x = 3$.

15. Sabemos que os lados $\overline{BA}$, $\overline{AD}$ e $\overline{CA}$, $\overline{AE}$ são congruentes; além disso, o ângulo $\hat{A}$ é congruente em ambos os triângulos, pois são ângulos opostos pelo vértice. Desse modo, os triângulos DAC e BAE são congruentes.

16. a) A mediana (segmento $\overline{AM}$) é comum aos dois triângulos. Os lados $\overline{BM}$ e $\overline{MC}$ são congruentes, pois M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$. Além disso, o triângulo ABC é equilátero, portanto os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes. O caso de congruência é LLL.

16. b) A bissetriz (segmento $\overline{AD}$) divide o $\hat{A}$ em dois ângulos congruentes; além disso, o segmento $\overline{AD}$ é comum aos dois triângulos. Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes, pois o triângulo ABC é equilátero. O caso de congruência é LAL.

16. c) A altura (segmento $\overline{AH}$) é comum aos dois triângulos, além disso os ângulos $\widehat{H_1}$ e $\widehat{H_2}$ são retos. Os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são congruentes, pois o triângulo *ABC* é equilátero. O caso de congruência é LAA_o.

16. d) Sim, pois em triângulos equiláteros a altura, mediana e bissetriz são segmentos que coincidem.

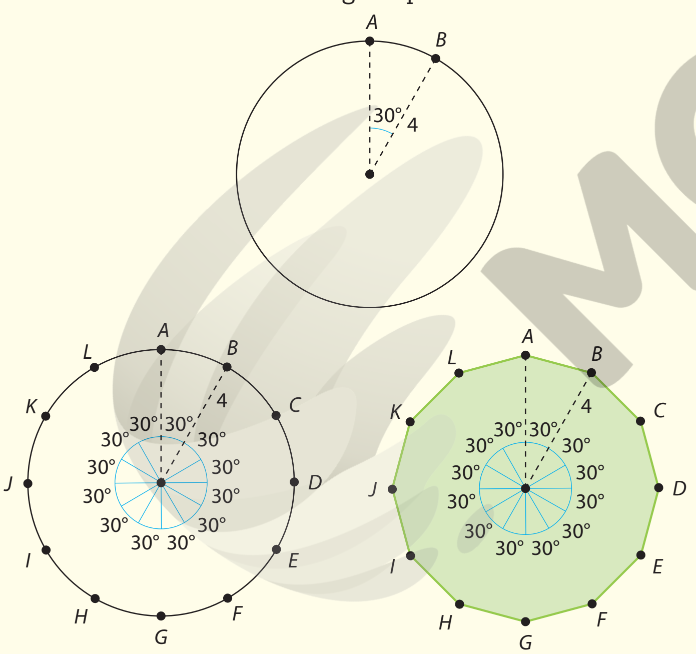
17. a) O segmento $\overline{CD}$ é o diâmetro da circunferência de centro *O*. Assim, os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{EB}$ são congruentes, pois o ponto *E* é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ (o diâmetro corta perpendicularmente uma corda passando por seu ponto médio). Os segmentos $\overline{BO}$ e $\overline{AO}$ são congruentes, pois são raios da circunferência de centro *O*. Desse modo, pelo caso de congruência entre triângulos retângulos, os triângulos *OAE* e *OBE* são congruentes. Outro caso possível é LAL, uma vez que o segmento *OE* é comum aos dois triângulos.

17. c) *O* é o centro da circunferência, portanto $x + 3y = 2x + 4$, reduzindo em $x = 3y - 4$. Além disso, $x + y = 2x - y$, reduzindo em $2y = x$. Assim, pela igualdade $2y = 3y - 4 \Rightarrow y = 4$ e, então, $x = 2 \cdot 4 = 8$. Portanto, o diâmetro é 40, pois $x + 3y + 2x + 4 = 8 + 3 \cdot (4) + 2 \cdot (8) + 4 = 40$. O raio equivale a 20 (pois $40 : 2 = 20$) e a corda $\overline{AB}$ equivale a 24, pois $2(x + y) = 2 \cdot 12 = 24$.

Para saber mais

Páginas 172 e 173

2. Traçando ângulos centrais de 30°, é possível encontrar os 12 vértices do dodecágono procurado.



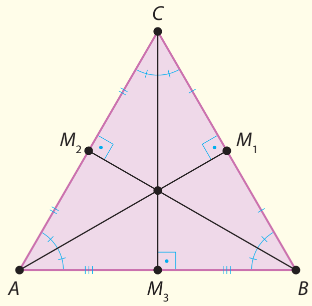
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Exercício complementares

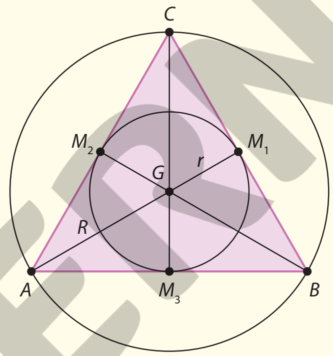
1. a) Falsa. Resposta possível: o ponto de encontro da medianas de um triângulo chama-se baricentro.

1. d) Falsa. Resposta possível: o lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo chama-se hipotenusa.

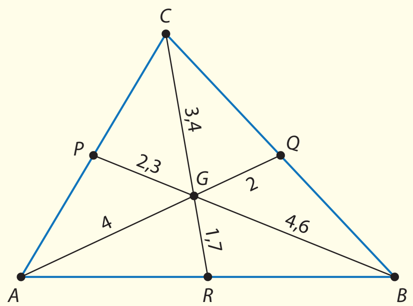
2. O triângulo é equilátero; portanto, as medianas, alturas e bissetrizes se coincidem. Desse modo, a intersecção formada pelas cevianas são o ortocentro, o baricentro e o incentro.



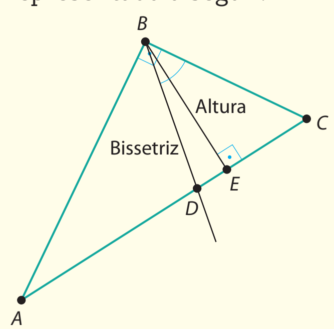
3. Construção da figura; por exemplo, no caso das bissetrizes, a figura a seguir. O ponto *E* encontrado é baricentro, incentro e ortocentro desse triângulo, porque *ABC* é equilátero por construção.



4. Construindo conforme a descrição e medindo os segmentos, conforme representado na imagem a seguir, é possível concluir que, sempre, o segmento de extremos no ponto médio e no baricentro (por exemplo, $\overline{PG}$) cabe duas vezes no respectivo segmento de extremos no baricentro e no vértice (por exemplo, $\overline{GB}$).



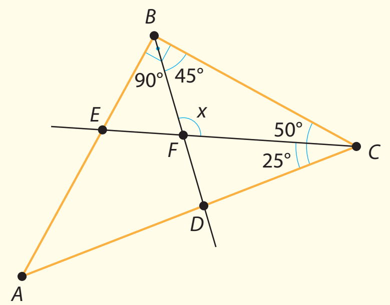
5. Alternativa **e.** A bissetriz do ângulo reto divide o ângulo em dois ângulos que medem 45°. O ângulo formado entre a bissetriz e a altura é 25°; desse modo, a situação descrita está representada a seguir.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

O ângulo $E\hat{B}C$ mede 20°, pois é a diferença entre os ângulos $D\hat{B}C$ e $D\hat{B}E$ e 45 – 25 = 20. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, em *EBC*, se $m(B\hat{C}A) = x$; logo, $90 + 20 + x = 180 \Rightarrow x = 180 - 110 = 70$, então $m(B\hat{C}A) = 70°$. Então, pela mesma propriedade, $90° + 70° + m(B\hat{A}C) = 180°$, portanto $m(B\hat{A}C) = 180° - 160° = 20°$. Alternativa **e**.

6. As bissetrizes dividem os ângulos, respectivamente em 25° e 45°. Assim, no triângulo *ABC*, com $m(A\hat{B}C) = 90°$ e $m(B\hat{C}A) = 50°$, se o ponto de encontro entre as bissetrizes é *F*, o triângulo *BCF* possui ângulos de 25°, 45° e *x*, que é a medida do ângulo procurado. Como soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então: $25° + 45° + x = 180° \Rightarrow x = 180° - 70° = 110°$



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Verificando

1. Alternativa **d**. O é o baricentro; desse modo, incide no lado pelo ponto médio, então o segmento $\overline{BC}$ mede 36 cm, $\overline{AC}$ mede 30 cm e $\overline{BA}$ mede 24 cm. Assim, o perímetro tem medida 90 cm, pois: 36 + 30 + 24 = 90
2. Alternativa **b**. O baricentro é o centro de gravidade do triângulo, pois é formado pelo encontro das medianas.
3. Alternativa **b**. O ângulo $\hat{B}$ mede 32°, pois $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{B}$. Pela soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, temos que $32 + 90 + m(\hat{C}) = 180 \Rightarrow m(\hat{C}) = 58$. Logo, o ângulo $\hat{C}$ mede 58°.
4. Alternativa **c**. O incentro é o ponto equidistante dos vértices do triângulo.
5. Alternativa **a**. O segmento $\overline{AE}$ é a altura relativa à base $\overline{CB}$, pois a ceviana $\overline{AE}$ forma um ângulo reto com a reta suporte da base $\overline{CB}$.
6. Alternativa **d**. O ortocentro é formado pela intersecção das retas suporte das alturas dos triângulos; portanto, se esse triângulo for obtusângulo, ou seja, um dos ângulos do triângulo medir mais que 90°, a intersecção das alturas relativas aos seus respectivos lados estará na região externa do triângulo.
7. Alternativa **a**. Os triângulos são congruentes, portanto, $\hat{C}$ é congruente a $\hat{F}$, que mede 36°. Pela soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, o ângulo $\hat{D}$, que é congruênte ao ângulo $\hat{A}$, mede 54°, pois 54 + 36 + 90 = 180. Pelo mesmo argumento, os lados $\overline{EF}$ e $\overline{BC}$ são congruentes; logo, o perímetro mede 14,8 cm, pois 5 + 3,6 + 6,2 = 14,8
8. Alternativa **c**. Considerando somente um lado e um ângulo ou somente as medidas dos ângulos, não é possível afirmar que dois triângulos são congruentes.

Diversificando

1. É interessante questionar, por exemplo, qual seria o menor e o maior caminho que o robô poderia percorrer.
2. O labirinto não apresenta simetria, pois, construindo o eixo de simetria no centro da figura, não é possível obter um caminho que seja simétrico. Por outro lado, existem caminhos que são simétricos, por exemplo, o caminho mais curto. Dê 1 passo e vire 90° à direita. Dê 3 passos e vire 90° à esquerda. Dê 12 passos e vire 90° a esquerda. Dê 3 passos e vire 90° à direita. Dê um passo à frente.
3. Em ambos os casos, existem duas combinações. Os dois desenhos são formados apenas com dois tipos de azulejo: um inteiro branco e outro com metade azul e metade branco.
4. A primeira combinação não possui eixo de simetria, pois as partes não são simétricas. Já na segunda combinação, é possível obter quatro eixos de simetria, todos passando pelo centro da figura: um no eixo vertical, um no eixo horizontal e dois eixos nas diagonais do quadrado.

Capítulo 8 – A Geometria demonstrativa

Objetivos do capítulo e justificativas

- Compreender o que são demonstrações geométricas.
- Aplicar congruência de triângulos em demonstrações geométricas.
- Resolver problemas com base no conceito de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos.
- Construir reta perpendicular a uma reta dada.
- Reconhecer figuras obtidas por composições de transformações geométricas.

As demonstrações geométricas apresentadas neste capítulo e os problemas envolvendo as demonstrações de propriedades de triângulos, mobilizam conhecimentos sobre mediatriz de um segmento e bissetriz de ângulo e favorecem o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e da **competência específica 2**, pois os estudantes devem investigar a validade de propriedades e apresentar argumentos que justifiquem as demonstrações. As demonstrações das propriedades também mobilizam aspectos da **competência específica 5**, já que os estudantes devem utilizar procedimentos e ferramentas matemáticas nas demonstrações.

Além disso, desenvolvem-se a **competência geral 1** e a **competência específica 1**, ao explorar aspectos históricos sobre a geometria empírica e a geometria demonstrativa, o que contribui para os estudantes perceberem que os conhecimentos matemáticos são fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas em diferentes momentos históricos.

Ao trabalhar com obras de arte como a proposta na abertura ou com noções sobre fractais, os estudantes têm a oportunidade de fruir diferentes manifestações artísticas e podem desenvolver a **competência geral 3**.

O contexto utilizado para explorar pesquisas censitárias e pesquisas amostrais, neste capítulo, favorece o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e a **competência específica 8**, pois os estudantes deverão, em grupos, pesquisar e discutir sobre a importância de agir e tomar decisões com base em princípios democráticos, solidários e inclusivos.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

Este capítulo dá continuidade ao capítulo anterior, aplicando os conceitos de mediatriz de um segmento e bissetriz de um ângulo e a congruência de triângulos em demonstrações de algumas propriedades e na resolução das atividades, vinculadas à Unidade Temática **Geometria**; dessa maneira, os estudantes antecipam aspectos relacionados ao desenvolvimento da habilidade (EF08MA14) e aplicam os conhecimentos associados ao desenvolvimento da habilidade (EF08MA17).

A articulação com a Unidade Temática **Álgebra** é feita na seção *Diversificando*, que aborda a regularidade existente nos fractais. O trabalho com este capítulo visa embasar os conhecimentos que serão construídos no 9º ano relativo a demonstrações (EF09MA10 e EF09MA13).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. Medindo com uma régua ou usando outro instrumento, como um barbante ou tira de papel, é possível concluir que os segmentos são congruentes e, por isso, nenhum deles é maior.

2. b) Falso, pois há aves que não são galos, como os patos.

3. Os teoremas são propriedades que podem ser demonstradas, um teorema é composto de duas partes: hipótese é a parte que se supõe conhecida, e tese é a parte que se deseja provar.

3. a) Hipótese: um número é múltiplo de 3 e de 5; tese: esse número é múltiplo de 15.

3. b) Hipótese: uma altura de um triângulo é bissetriz; tese: esse triângulo é isósceles.

3. c) Hipótese: duas retas cortadas por uma reta transversal são paralelas; tese: essas retas determinam ângulos alternos internos de mesma medida.

4. a) Falsa. O triângulo pode ser equilátero.

4. b) Verdadeira, pois triângulos retângulos têm um ângulo interno de medida 90°, e todos os ângulos internos dos triângulos equiláteros medem 60°.

4. c) Falsa. As bissetrizes formam um ângulo de medida 120°.

10. Como os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, sendo x a medida dos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$:

$$x + x + 72° = 180° \Rightarrow 2x = 180° - 72° \Rightarrow x = \frac{108°}{2} \Rightarrow x = 54°$$

11. Como $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, conclui-se que $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{BC}$.

11. a) Como a altura relativa à base de um triângulo isósceles coincide com sua mediana, tem-se que $\overline{BH} \cong \overline{CH}$. Portanto:
$m(\overline{CH}) = m(\overline{BH}) = 2$
$m(\overline{BC}) = m(\overline{BH}) + m(\overline{CH}) = 2 + 2 = 4$ (4 cm)

11. b) Como a altura relativa à base de um triângulo isósceles coincide com sua bissetriz interna, conclui-se que $m(\widehat{A_1}) = 40°$.

11. c) Como os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes, sendo $x = m(\hat{B}) = m(\hat{C})$, no $\triangle ABC$ tem-se:
$$(40° + 40°) + x + x = 180° \Rightarrow 2x = 180° - 80° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{100°}{2} \Rightarrow x = 50°$$

12. Com as informações do enunciado, e como a altura relativa à base de um triângulo isósceles coincide com sua mediana, tem-se que $\overline{BH} \cong \overline{HC}$. Portanto: $m(\overline{HC}) = m(\overline{BH}) = 3{,}5$ cm

13. a) No triângulo maior: $2x + 2x + 62° = 180° \Rightarrow$
$$\Rightarrow 4x = 180° - 62° \Rightarrow x = \frac{118°}{4} \Rightarrow x = \left(\frac{59}{2}\right)^{\circ} = 29°30'$$
E no triângulo menor: $x + x + y = 180° \Rightarrow 2x + y = 180°$

Então, substituindo x por $\left(\frac{59}{2}\right)^{\circ}$ nessa última equação:
$$2 \cdot \left(\frac{59}{2}\right)^{\circ} + y = 180° \Rightarrow 59° + y = 180° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 180° - 59° \Rightarrow y = 121°$$

13. b) No triângulo maior: $75° + 62° + y = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow 137° + y = 180° \Rightarrow y = 180° - 137° \Rightarrow y = 43°$

Como o triângulo menor é isósceles, com seus ângulos da base medindo y, então: $x + y + y = 180° \Rightarrow x + 2y = 180°$

Então, substituindo y por 43° nessa última equação: $x + 2 \cdot 43° = 180° \Rightarrow x + 86° = 180° \Rightarrow x = 180° - 86° \Rightarrow x = 94°$

13. c) Como o triângulo maior possui dois ângulos de mesma medida, esse triângulo é isósceles. Então, comparando os lados congruentes, opostos a cada ângulo de 65°, tem-se:
$$5x - 3° = 12° \Rightarrow 5x = 12° + 3° \Rightarrow x = \frac{15°}{3} \Rightarrow x = 3°$$
Como a altura relativa à base de um triângulo isósceles coincide com sua mediana, então $y = \frac{3x + 1}{2}$.

Com $x = 3°$, temos: $y = \frac{3 \cdot 3° + 1°}{2} = \frac{10°}{2} \Rightarrow y = 5°$

16. a) Os ângulos internos da base do triângulo isósceles maior medem 75°, pois $180 - 105 = 75$. Portanto, nesse triângulo maior verifica-se que a soma de seus ângulos internos é:
$$3x + 75 + 75 = 180 \Rightarrow 3x = 180 - 150 \Rightarrow x = \frac{30}{3} \Rightarrow x = 10$$
Então, como os ângulos internos da base do triângulo menor que é isósceles medem y, e o ângulo do

vértice oposto mede $x = 10°$, nesse triângulo tem-se:

$10 + y + y = 180 \Rightarrow 2\,y = 180 - 10 \Rightarrow y = \frac{170}{2} \Rightarrow y = 85$

Logo, a medida y é 85°.

16. b) Os ângulos internos da base do triângulo isósceles medem x, e o ângulo do vértice oposto mede 120°; então, nesse triângulo tem-se:

$120 + x + x = 180 \Rightarrow 2x = 180 - 120 \Rightarrow x = \frac{60}{2} \Rightarrow x = 30$

Logo, $x = 30°$; assim, conclui-se que o triângulo maior tem os ângulos medindo 80°, x e $x + y$, ou seja:

$80 + x + (x + y) = 180 \Rightarrow 80 + 30 + (30 + y) = 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow 140 + y = 180 \Rightarrow y = 180 - 140 \Rightarrow y = 40$

Logo, y = 40°.

17. Incentive os estudantes a elaborarem situações-problema envolvendo diferentes contextos, inclusive geométricos; depois, solicite-lhes que compartilhem com os colegas os problemas elaborados. Desenvolva a resolução de alguns deles na lousa.

19. a) O lado de maior medida opõe-se ao ângulo de maior medida. O ângulo interno de vértice B do triângulo mede 90°, por isso ele é o maior ângulo interno do triângulo. Logo, $\overline{AC}$ é o maior lado, e $\overline{AB}$, o menor lado.

19. b) O ângulo interno de vértice B do triângulo mede 120°, pois 180 – 60 = 120, por isso ele é o maior ângulo interno do triângulo. Logo, $\overline{AC}$ é o maior lado, e $\overline{BC}$, o menor lado.

20. Como o maior lado é o que mede 5,5 cm, conclui–se que o maior ângulo interno é o do vértice oposto B, mesmo que a figura não aparente esse resultado. Como o menor lado é o que mede 3 cm, conclui–se que o menor ângulo interno é o do vértice oposto A, mesmo que a figura não aparente esse resultado.

21. O ângulo de 100° é obtuso e, portanto, o maior dos três ângulos internos do triângulo. Assim, o lado oposto a esse ângulo é o maior lado do triângulo, que mede 5,5 cm.

22. Como 60 > 40, o lado oposto ao ângulo de 60° é maior que o lado oposto ao ângulo de 40°. Portanto, Ana mora mais longe da lanchonete do que Renata.

23. a) Não é possível, pois ao ângulo de maior medida deve se opor o lado de maior medida, e isso não ocorreu.

23. b) Não é possível, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, e isso não ocorreu.

24. No vértice onde está Marcos, o ângulo interno do triângulo mede 75°, pois 180 – 105 = 75, e sendo y a medida do ângulo interno no vértice onde está Daniel:

$y + 75 + 60 = 180 \Rightarrow y + 135 = 180 \Rightarrow y = 180 - 135 \Rightarrow y = 45$

Portanto, $x = 75°$ e y = 45°.

25. a) O ângulo interno de vértice D do $\triangle CDE$ mede 60°, pois 180 – 120 = 60. Então, y = 60°, pois $y + 60 + 60 =$ $= 180 \Rightarrow y + 120 = 180 \Rightarrow y = 180 - 120 \Rightarrow y = 60$

Como as retas AB e CD são paralelas, o ângulo x corresponde ao ângulo interno de vértice D do triângulo CDE. Logo, $x = 60°$.

25. b) Como as retas AB e CD são paralelas, o ângulo x é alterno interno em relação ao ângulo dado de medida 48°. Portanto, $x = 48°$. Do mesmo paralelismo, o ângulo interno de vértice D do triângulo CDE é correspondente ao ângulo interno de vértice B do triângulo ABE, que mede 80°. Assim, y = 52°, pois: $y + 48 + 80 = 180 \Rightarrow$ $\Rightarrow y + 128 = 180 \Rightarrow y = 180 - 128 \Rightarrow y = 52°$

Exercícios complementares

1. Os ângulos internos do lado oposto ao ângulo b do triângulo medem:

- $180° - a = 180° - 105° = 75°$
- $180° - x$

Portanto, nesse triângulo, a soma dos ângulos internos é dada por

$40 + 75 + 180 - x = 180$

$115 - x = 0$

$x = 115$

Portanto, $x = 115°$.

Alternativa **e**.

2. Sejam z igual a metade do ângulo reto e w igual à metade do ângulo agudo desconhecido do triângulo maior. No vértice do ângulo reto tem-se:

$z + z = 90 \Rightarrow 2z = 90 \Rightarrow z = \frac{90}{2} \Rightarrow z = 45$

No triângulo maior: $90 + 50 + 2w = 180 \Rightarrow 140 + 2w =$ $= 180 \Rightarrow 2w = 180 - 140 \Rightarrow w = \frac{40}{2} \Rightarrow w = 20$

Logo, z = 45° e $w = 20°$.

No triângulo menor, verificamos que a soma dos ângulos internos é dada por: $x + z + w = 180 \Rightarrow x + 45 + 20 = 180 \Rightarrow$ $\Rightarrow x = 180 - 65 \Rightarrow x = 115$

Finalmente, no vértice do ângulo agudo da base:

$w + w + y = 180 \Rightarrow 20 + 20 + y = 180 \Rightarrow y = 180 - 40 \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 140$

Logo, $x = 115°$ e y = 140°.

3. Os ângulos internos do do triângulo cujos vértices são as intersecções entre as retas t e u, entre as retas s e u e entre as retas s e t medem: 35° (oposto pelo vértice ao ângulo dado); 70° (oposto pelo vértice ao ângulo dado); $180° - x$ (suplementar de x). Assim, nesse triângulo:

$35 + 70 + (180 - x) = 180 \Rightarrow 105 + 180 - x = 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow 105 - x = 0 \Rightarrow 105 = x$

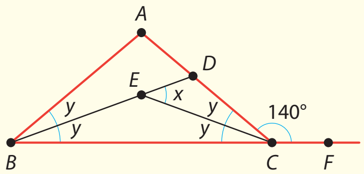
Logo, $x = 105°$. Alternativa **e**.

4. O triângulo $BA'E$ é isósceles, pois, do enunciado, $\overline{BE} \cong \overline{BA'}$. Sendo x a medida dos ângulos congruentes internos da base $\overline{EA'}$, como B é vértice de um ângulo reto:

$90 + x + x = 180 \Rightarrow 2x = 180 - 90 \Rightarrow x = \frac{90}{2} \Rightarrow x = 45$

Logo, a medida do ângulo é 45°.

6. Sendo x a medida do ângulo procurado, $m(D\hat{E}C) = x$, e y as medidas dos ângulos determinados pelas bissetrizes dos ângulos da base do triângulo ABC, então $m(D\hat{C}E) = m(E\hat{C}B) = y$; como triângulo ABC é isósceles, então $m(A\hat{C}B) = m(A\hat{B}C) = 2y$; e como $\overline{BD}$ é bissetriz, tem-se que $m(A\hat{B}D) = m(D\hat{B}C) = \dfrac{m(A\hat{B}C)}{2} = \dfrac{2y}{2} = y$. A figura a seguir indica todos esses ângulos.



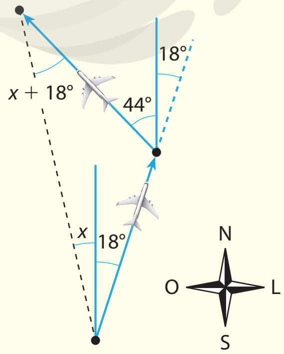
Do vértice C, conclui-se que y = 20°, pois: $2y + 140 = 180 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2y = 180 - 140 \Rightarrow y = \dfrac{40}{2} \Rightarrow y = 20$. Notando que o ângulo de medida x é externo do triângulo BCE no vértice E, tem-se: $x = y + y = 20 + 20 = 40$. Logo, $x = 40°$. Alternativa **c**.

7. Como x é a medida de um ângulo externo do $\triangle ABC$ no vértice B: $x = 33° + 45° = 78°$. Como as retas $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, os ângulos agudos de vértices D e C se correspondem. Portanto: $y + 45° = 180° \Rightarrow y = 180° - 45° \Rightarrow$ $\Rightarrow y = 135°$.

8. Como $AC = BC$, então $\triangle ABC$ é isósceles de base $\overline{AB}$ e, portanto, os ângulos de sua base têm a mesma medida de 25°. Como $BC = BD$, então $\triangle BCD$ é isósceles de base $\overline{CD}$ e, portanto, os ângulos de sua base têm a mesma medida y. Como o ângulo de medida y no vértice C é ângulo externo do $\triangle ABC$, tem-se: $y = 25° + 25° = 50°$. Como o ângulo de medida x no vértice B é ângulo externo do $\triangle ABD$, tem-se: $x = 25° + y = 25° + 50° = 75°$. Alternativa **d**.

9. Supondo que as linhas pontilhadas sejam paralelas, os ângulos de medidas α e 150° são colaterais internos, então: $\alpha + 150° = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 150° \Rightarrow \alpha = 30°$. Substituindo α por 30° na equação dada pelo enunciado: $\alpha + \beta = 135° \Rightarrow 30° + \beta = 135° \Rightarrow \beta = 135° - 30° \Rightarrow \beta = 105°$. Como os ângulos de medida θ e $\alpha + \beta = 135°$ também são colaterais internos em relação às retas pontilhadas: $\theta + 135° = 180° \Rightarrow \theta = 180° - 135° \Rightarrow \theta = 45°$. Alternativa **c**.

10. Sendo x a medida do ângulo procurado, como os dois trechos têm o mesmo comprimento, o triângulo na figura é isósceles e, portanto, possui 2 ângulos internos de medida $(x + 18)°$. Então, prolongando a trajetória do primeiro trecho, obtemos um ângulo correspondente ao de 18° entre a primeira trajetória do avião e a direção norte, conforme a figura a seguir:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Como o ângulo de medida 62° (44 + 18 = 62) é ângulo externo do triângulo isósceles:

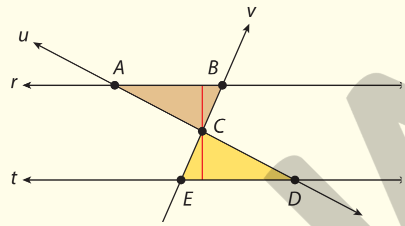
$(x + 18) + (x + 18) = 62 \Rightarrow 2x + 36 = 62 \Rightarrow 2x = 62 - 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{26}{2} \Rightarrow x = 13$. Assim, $x = 13°$. Alternativa **b**.

Verificando

1. Triângulos congruentes têm elementos correspondentes de medidas iguais. Alternativa **d**.

2. Do enunciado constrói-se a figura:



Como $\triangle ABC \cong \triangle DCE$, as alturas relativas ao vértice C de ambos os triângulos têm a mesma medida. Assim, o ponto C é equidistante das retas r e t. Alternativa **a**.

3. Como os triângulos equiláteros são triângulos isósceles em que qualquer lado pode ser considerado como sendo a base, a propriedade da coincidência entre bissetriz interna, altura e mediana relativas à base dos triângulos isósceles vale para todos os lados dos triângulos equiláteros. Alternativa **c**.

4. $\triangle ABC$ e $\triangle ADC$ são congruentes pelo caso ALA, pois:

$C\hat{A}B \cong C\hat{A}D$ ($\overline{AC}$ é bissetriz de $B\hat{A}D$)

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado comum aos triângulos)

$A\hat{C}B \cong A\hat{C}D$ ($\overline{AC}$ é bissetriz de $B\hat{A}D$)

Alternativa **d**.

5. Sendo θ a medida do ângulo interno de vértice A do triângulo ABC, obtemos $\triangle ABC$:

$\theta + \alpha + \beta = 180° \Rightarrow \theta + 82° + 69° = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = 180° - 151° \Rightarrow \theta = 29°$

Como $m(\overline{AD}) = m(\overline{DE})$, o $\triangle ADE$ é isósceles de base $\overline{AE}$, então $m(D\hat{A}E) = m(D\hat{E}A) = \theta$; assim: $\gamma + \theta + \theta = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma + 29° + 29° = 180° \Rightarrow \gamma + 58° = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - 58° \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma = 122°$.

Alternativa **d**.

6. Assim como nos triângulos isósceles, a altura de um triângulo equilátero coincide com sua mediana e com sua bissetriz interna. Portanto: $m(\overline{CD}) = 25$ cm, pois o lado mede 50 cm e 50 : 2 = 2; $m(D\hat{A}C) = 30°$, pois a medida do ângulo interno de um triângulo equilátero é 60° e 60 : 2 = 30. Alternativa **c**.

7. Como o triângulo é isósceles de base $\overline{AC}$, obtemos $m(\hat{A}) = m(\hat{C}) = 22°$. Então, como α é a medida do ângulo externo oposto à base do triângulo, $\alpha = 22° + 22° = 44°$. Alternativa **b**.

Capítulo 9 – Estudo dos quadriláteros

Objetivo do capítulo e justificativas

- Utilizar congruência de triângulos para demonstrações de propriedades de quadriláteros.
- Construir quadriláteros utilizando instrumentos de desenho.
- Reconhecer que a soma das medidas dos ângulos internos (e a dos ângulos externos) e o número de lados de um polígono não são grandezas proporcionais.
- Resolver problemas com base no conceito de mediatriz e de bissetriz como lugares geométricos.
- Resolver problemas envolvendo o conceito de área e de volume.
- Analisar informações contidas em rótulos de embalagens.

Neste capítulo, o estudo de quadriláteros se apoia, principalmente, no desenvolvimento da **competência geral 2** e das **competências específicas 2** e **5**. Ao explorar os elementos e propriedades dos quadriláteros, mobilizam-se conhecimentos e conteúdos trabalhados anteriormente a fim de validar ou de demonstrar tais propriedades. Os estudantes também enfrentam situações-problemas em diferentes contextos e em situações imaginadas e, ao expor seus argumentos ou conclusões aos colegas, desenvolvem a **competência específica 6**.

O contexto do capítulo possibilita apresentar obras de arte e desenvolver a **competência geral 3**, pois os estudantes podem fruir diferentes manifestações artísticas.

Os problemas envolvendo medidas de ângulos, medidas de área e medidas de comprimento, associados às propriedades de quadriláteros, possibilitam desenvolver aspectos da **competência específica 3**, de maneira que os estudantes podem relacionar conhecimentos da Unidade Temática **Grandezas e Medidas** e de **Geometria**.

O Trabalho com a análise de informações em rótulos de embalagens na seção *Trabalhando a informação* possibilita aos estudantes refletir sobre as diferentes informações apresentadas em rótulos de produtos alimentícios, o que favorece o desenvolvimento da **competência geral 8** e da **competência específica 7**.

Na seção *Para saber mais*, ao trabalhar com a aplicação de conteúdos matemáticos no ramo da construção, contribuímos para o desenvolvimento da **competência geral 6**.

O contexto utilizado para explorar pesquisas censitárias e pesquisas amostrais, neste capítulo, favorece o desenvolvimento das **competências gerais 9 e 10** e a **competência específica 8**, pois os estudantes deverão, em grupos, pesquisar e discutir sobre a importância de agir e tomar decisões com base em princípios democráticos, solidários e inclusivos.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

(EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

O foco deste capítulo é a Unidade Temática **Geometria**, em que ampliamos os temas abordados em capítulos anteriores deste livro, a fim de consolidar e aprofundar os conhecimentos construídos e visando dar subsídios para o que será estudado no 9º ano (EF09MA12 e EF09MA13).

Desenvolvem-se atividades com novas construções geométricas e novas aplicações da congruência de triângulos para demonstrações de propriedades de quadriláteros, o que se relaciona ao desenvolvimento da habilidade (EF08MA14) e mobiliza conhecimentos relativos às habilidades (EF08MA15) e (EF08MA17). A aplicação de expressões de cálculo de medidas de área de figuras geométricas e a resolução e elaboração de problemas envolvendo medidas de área possibilitam o desenvolvimento da habilidade (EF08MA19).

A relação entre o número de lados de um polígono e a soma das medidas dos ângulos internos exemplifica a não proporcionalidade, o que, por contraposição, reforça o desenvolvimento das habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13).

Articulam-se as Unidades Temáticas **Álgebra**, com a identificação de grandezas não proporcionais na seção *Para saber mais* (Polígonos e proporcionalidade), **Grandezas e medidas**, na resolução de atividades que envolvem a noção de área e volume, e **Probabilidade e estatística**, com a análise de informações em rótulos de embalagens na seção *Trabalhando a informação*.

Comentários e resoluções

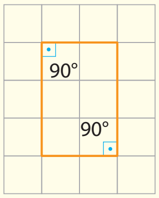
Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

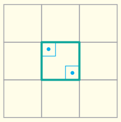
2. **a)** No quadrilátero *MNPQ*, tem-se:
$80° + 108° + 105° + x = 360° \Rightarrow 293° + x = 360°$
$x = 360° - 293° \Rightarrow x = 67°$

2. **b)** No vértice Q, tem-se:
$y = 180° - 108° = 72°$

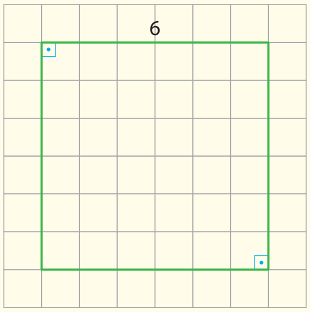
3. a)



3. b)



3. c)



4. Sendo x a medida do quarto ângulo:
$104° + 97° + 53° + x = 360° \Rightarrow x = 360° - 254° = 106°$

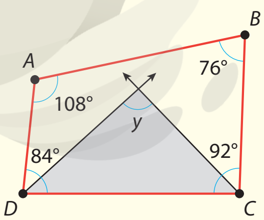
5. Como a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°, tem-se:
$x + (x + 40°) + (x + 80°) + 3x = 360°$
$6x + 120° = 360° \Rightarrow 6x = 240° \Rightarrow x = 40°$

6. Sendo $x = m(\hat{C})$, tem-se: $m(\hat{D}) = 2x$ e $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = 3x$. Assim:

$$3x + 3x + x + 2x = 360° \Rightarrow 9x = 360° \Rightarrow x = \frac{360°}{9} \Rightarrow x = 40°$$

Portanto: $m(\hat{C}) = 40°$ e $m(\hat{A}) = 120°$ $(3 \cdot 40° = 120°)$.

7. Sendo x a medida do ângulo de vértice D:
$108° + 76° + 92° + x = 360° \Rightarrow 276° + x = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 360° - 276° \Rightarrow x = 84°$
Então, sendo y a medida do ângulo formado pelas duas bissetrizes:

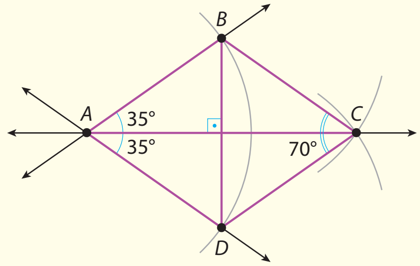


Para o triângulo em destaque:

$$\frac{84°}{2} + y + \frac{92°}{2} = 180° \Rightarrow 42° + y + 46° = 180° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 88° + y = 180° \Rightarrow y = 180° - 88° \Rightarrow y = 92°$$

Portanto, o ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ mede 92°.

8. a)



Ao construir um quadrilátero com todos os lados congruentes e um dos ângulos medindo 70°, os estudantes obterão um quadrilátero com mais um ângulo de medida 70°. Sendo os outros dois ângulos de medidas e considerando que a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°, temos:
$70° + 70° + x + x = 360° \Rightarrow 2x = 360° - 140° \Rightarrow x = 110°$

8. b) Ao traçar as diagonais, formam-se quatro triângulos congruentes. Tomando um deles, por exemplo, $\triangle ABM$, tem-se: $m(B\hat{A}M) = 55°$; $m(A\hat{B}M) = 35°$. Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos:
$m(A\hat{M}B) = 180° - 90° = 90°$

10. Sendo x a medida dos ângulos obtusos do paralelogramo, temos:
$74° + x + 74° + x = 360° \Rightarrow 148° + 2x = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 212° \Rightarrow x = 106°$

11. Sendo x a medida dos ângulos agudos do losango, temos:
$125° + x + 125° + x = 360° \Rightarrow 250° + 2x = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 360° - 250° \Rightarrow 2x = 110° \Rightarrow x = 55°$

12. a) Como os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes, então:
$5x - 20° = 4x + 10° \Rightarrow 5x - 4x = 30° \Rightarrow x = 30°$
Assim, os ângulos obtusos medem 130°, pois:
$4 \cdot 30° + 10° = 130°$
Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°, temos:
$130° + y + 130° + y = 360° \Rightarrow 2y = 360° - 260° \Rightarrow$
$\Rightarrow 2y = 100° \Rightarrow y = 50°$

12. b) $y + 30° + 83° = 180° \Rightarrow y + 113° = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow y = 180° - 113° \Rightarrow y = 67°$
Como os ângulos de medidas x e y são alternos internos, $x = y = 67°$.

13. O ângulo suplementar adjacente ao ângulo externo de medida 108° é o ângulo interno de medida 72° $(180° - 108° = 72°)$. Assim, sendo os dois ângulos agudos do paralelogramo de medidas 72° e os dois ângulos obtusos de medidas iguais a x, considerando que a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°, temos:
$72° + x + 72° + x = 360° \Rightarrow 2x = 360° - 144° \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 216° \Rightarrow x = 108°$
Portanto, no paralelogramo há dois ângulos internos de medida 108° e dois ângulos internos de medida 72°.

19. a) As diagonais de um retângulo são congruentes e, como os retângulos também são paralelogramos, suas diagonais interceptam-se em seus pontos médios. Então, $x = 5$ cm e $y = 10$ cm ($y = 5$ cm $+ 5$ cm $= 10$ cm).

19. b) Como os losangos também são paralelogramos, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos; portanto, os ângulos de medidas y e $50°$ são alternos internos. Logo, $y = 50°$. As diagonais do paralelogramo são perpendiculares entre si e o $\triangle ACD$ é isósceles de base $\overline{AC}$. Então, como a altura de um triângulo isósceles coincide com sua bissetriz interna, tem-se que $m\left(B\hat{D}C\right) = x$. Sendo M o ponto de interseção das diagonais do losango, no $\triangle DMC$:

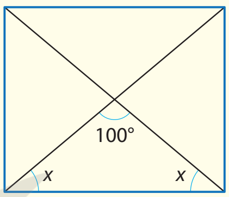
$x + 90° + 50° = 180° \Rightarrow x = 180° - 140° = 40°$

19. c) Como os quadrados também são losangos, $x = 90°$. Como as diagonais de um losango também são bissetrizes de seus ângulos internos, $y = 45°$, pois $y = 90° : 2 = 45°$.

20. Sendo x a medida do ângulo desconhecido e, como as diagonais de um retângulo determinam quatro triângulos isósceles em seu interior, considerando que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$, temos:

$x + x + 100° = 180° \Rightarrow 2x = 180° - 100° \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 80° \Rightarrow x = 40°$



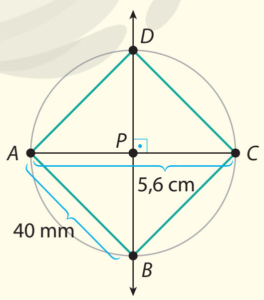
22. As diagonais do losango são bissetrizes de seus ângulos internos, então dois dos ângulos desse losango medem $70°$, pois $2 \cdot 35° = 70°$. Então, sendo x a medida dos outros dois ângulos internos:

$x + 70° + x + 70° = 360° \Rightarrow 2x = 360° - 140° \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 220° \Rightarrow x = 110°$

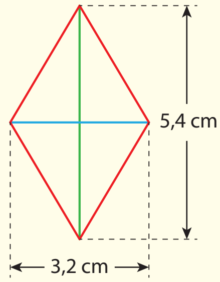
Portanto, no losango há dois ângulos de medida $70°$ e dois ângulos de medida $110°$.

23. Ao construir um quadrado com duas diagonais de medida 5,6 cm, serão formados lados de aproximadamente 4 cm, ou 40 mm.

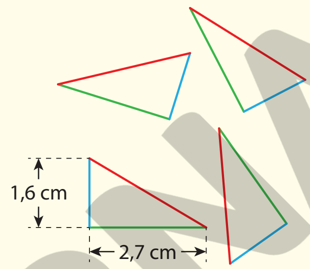


Assim, a área será 16 cm² ($4 \cdot 4 = 16$). Como 1 cm² $=$ 100 mm², então 16 cm² $=$ 1 600 mm².

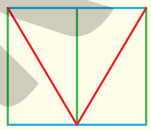
25.



Construção do losango.



Recorte segundo as diagonais.



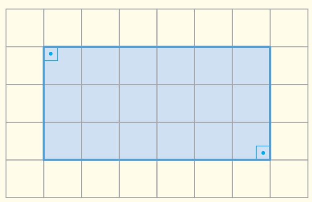
Construção do retângulo.

As áreas do losango e do retângulo têm a mesma medida, pois são formadas pelas mesmas partes. Como a medida da área do losango é igual à medida da área do retângulo de lados medindo 3,2 cm (uma diagonal menor) e 2,7 cm (metade da diagonal maior), temos:

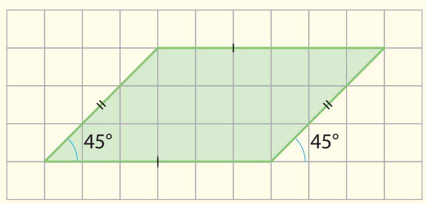
$A = 3{,}2 \cdot 2{,}7 = 8{,}64$

Portanto, a área do losango mede 8,64 cm².

26. a)

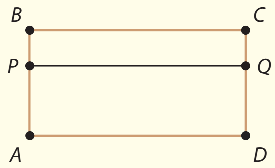


26. b)



26. c) Não é possível construir esse quadrilátero.

29.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Por se tratar de um retângulo, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$. Como, por construção, $\overline{PQ} \parallel \overline{AD}$, teremos $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$.

30. a) Como a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, temos:

$x + 4x + 3x + 2x = 360° \Rightarrow 10x = 360° \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{360°}{10} \Rightarrow x = 36°$

No vértice superior direito do trapézio, por se tratar de ângulos suplementares, $3x + y = 180°$. Então:

$3 \cdot 36° + y = 180° \Rightarrow 108° + y = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 180° - 108° \Rightarrow y = 72°$

30. b) Como os ângulos da base maior são congruentes e o ângulo interno do vértice inferior esquerdo é alterno interno do ângulo de medida 70°, concluímos que a medida de x é 70°. O ângulo de medida x é suplementar ao ângulo de medida y, então:

$x + y = 180° \Rightarrow 70° + y = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 180° - 70° \Rightarrow y = 110°$

31. a) Seja x a medida do ângulo agudo do trapézio, como a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 360°, temos:

$x + 3x + 90° + 90° = 360° \Rightarrow 4x = 360° - 180° \Rightarrow x = 45°$

Desse modo, o ângulo obtuso medirá 135°
$(3 \cdot 45° = 135°)$.

31. b) O ângulo agudo mede 45°.

35. Sendo x a medida do ângulo agudo do trapézio, temos:

$x + 2x + 90° + 90° = 360° \Rightarrow 3x = 180° \Rightarrow x = 60°$

Portanto, os ângulos medem 90°, 90°, 60° e 120°
$(2x = 2 \cdot 60° = 120°)$.

36. É preciso recordar que os paralelogramos têm os lados opostos paralelos. Quando Fabiana escreve “pelo menos dois”, isso implica que podem ser mais de dois; portanto, Fabiana inclui os paralelogramos em sua definição, que não está de acordo com a definição apresentada no capítulo.

39. a) $\dfrac{5{,}4 + 8{,}6}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$

Então, $x = 7$ cm.

39. b) $\dfrac{x + 9}{2} = 6 \Rightarrow x + 9 = 2 \cdot 6 \Rightarrow x = 12 - 9 \Rightarrow x = 3$

Logo, $x = 3$ cm.

39. c) $\dfrac{x + 4{,}8}{2} = 5{,}6 \Rightarrow x + 4{,}8 = 2 \cdot 5{,}6 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 11{,}2 - 4{,}8 \Rightarrow x = 6{,}4$

Logo, $x = 6{,}4$ cm.

40. a) Os lados do $\triangle MNP$ medem: $MN = 4{,}5$ cm $(9 : 2 = 4{,}5)$; $MP = 5$ cm $(10 : 2 = 5)$; $NP = 3$ cm $(6 : 2 = 3)$. Portanto, o perímetro do $\triangle MNP$ mede 12,5 cm, pois $4{,}5 + 5 + 3 = 12{,}5$.

40. b) $BC = 11$ cm $(2 \cdot 5{,}5 = 11)$; $AB = 7$ cm $(2 \cdot 3{,}5 = 7)$; $BC = 8$ cm $(2 \cdot 4 = 8)$. Portanto, o perímetro do $\triangle ABC$ mede 26 cm $(11 + 7 + 8 = 26)$.

41. a) Traçando a diagonal $\overline{AC}$ do quadrilátero, tem-se que $\overline{MN}$ é base média relativa à base $\overline{AC}$ do $\triangle BAC$. Portanto: $\overline{MN} \parallel \overline{PQ}$.

41. b) Traçando a diagonal $\overline{BD}$ do quadrilátero, tem-se que $\overline{QM}$ é base média relativa à base $\overline{BD}$ do $\triangle BCD$. Portanto: $\overline{QM} \parallel \overline{PN}$.

41. c) Como PQ é base média relativa à base AC do $\triangle BAC$, tem-se: $PQ \parallel \overline{AC} \parallel \overline{MN}$. Como $\overline{PN}$ é base média relativa à base $\overline{BD}$ do $\triangle BCD$, tem-se:

$\overline{PN} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{QM}$

Como $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$ e $\overline{PN} \parallel \overline{QM}$, o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

41. d) Neste caso, $MN = 6$ cm, pois $12 : 2 = 6$.

41. e) Neste caso, $QM = 8$ cm, pois $16 : 2 = 8$.

41. f) Neste caso, $BD = 40$ cm, pois $2 \cdot 20 = 40$.

44. a) Sendo x e y as medidas das bases do trapézio, temos:

$\dfrac{x + y}{2} = 20 \Rightarrow x + y = 2 \cdot 20 = 40$

A medida do perímetro do trapézio é 64 cm $(12 + 12 + x + y = 24 + 40 = 64)$.

44. b) Sendo $x < y$, temos:

$y = 32$ cm $(8 + y = 40 \Rightarrow y = 32)$

Para saber mais

Página 195

1.

Soma das medidas dos ângulos de polígonos			
Polígono	n	S_i	S_e
Triângulo	3	$S_{i3} = (3 - 2) \cdot 180° = 180°$	$S_{e3} = 360°$
Quadrilátero	4	$S_{i4} = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$	$S_{e4} = 360°$
Pentágono	5	$S_{i5} = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$	$S_{e5} = 360°$
Hexágono	6	$S_{i6} = (6 - 2) \cdot 180° = 720°$	$S_{e6} = 360°$
Heptágono	7	$S_{i7} = (7 - 2) \cdot 180° = 900°$	$S_{e7} = 360°$
Octógono	8	$S_{i8} = (8 - 2) \cdot 180° = 1\,080°$	$S_{e8} = 360°$
Eneágono	9	$S_{i9} = (9 - 2) \cdot 180° = 1\,260°$	$S_{e9} = 360°$
Decágono	10	$S_{i10} = (10 - 2) \cdot 180° = 1\,440°$	$S_{e10} = 360°$

2. a) $2 \cdot S_{i3} = 2 \cdot 180° = 360° = S_{i4}$, ou seja, o polígono é um quadrilátero.

$2 \cdot S_{e3} = 2 \cdot 360° = 720°$, ou seja, nenhum polígono.

2. b) $2 \cdot S_{i3} = 3 \cdot 180° = 540° = S_{i5}$, ou seja, o polígono é um pentágono.
$3 \cdot S_{e3} = 3 \cdot 360° = 1\,080°$, ou seja, nenhum polígono.

3. a) $2 \cdot S_{i3} = 2 \cdot 180° = 360° = S_{i4}$
$2 \cdot S_{e3} = 2 \cdot 360° = 720°$; $S_{e6} = 360°$

3. b) $2 \cdot S_{i4} = 2 \cdot 360° = 720° = S_{i6}$
$2 \cdot S_{e4} = 2 \cdot 360° = 720°$; $S_{e8} = 360°$

3. c) $2 \cdot S_{i5} = 2 \cdot 540° = 1\,080° = S_{i8}$
$2 \cdot S_{e5} = 2 \cdot 360° = 720°$; $S_{e10} = 360°$

3. d) Dois lados não são suficientes para compor um polígono.

3. e) $3 \cdot S_{i3} = 3 \cdot 180° = 540° = S_{i5}$
$3 \cdot S_{e3} = 3 \cdot 360° = 1\,080°$; $S_{e9} = 360°$

4. Espera-se que os estudantes concluam que nem as grandezas S_i *e* n, nem as grandezas S_e *e* n formam proporções.

Trabalhando a informação

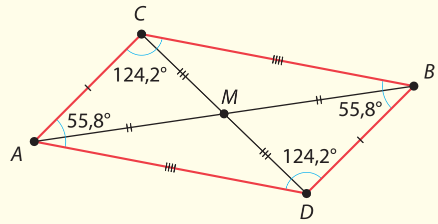
1. Resposta possível: sabor uva, não contém glúten, ingredientes, zero de açúcar, 15 g, código de barras, modo de preparo, validade, lote.
2. Sim, a gelatina não contém glúten.
3. A resposta depende da data em que a atividade é realizada.
4. Ela usou três caixinhas de 15 g, o que equivale a 45 g, pois $3 \cdot 15 = 45$. Na caixinha, informa-se que não é necessário usar açúcar, então Valentina não usou açúcar.
5. Para cada caixinha, é necessário usar 250 mL de água, então Valentina precisou de 750 mL de água ($3 \cdot 250 = 750$). Ao todo, Valentina precisa de 1 500 mL de água ($750 + 750 = 1\,500$), ou 1,5 L.
6. Espera-se que os estudantes respondam que sim, no contorno das imagens da uva.
7. Medida do comprimento: 6,0 cm; medida da altura: 5,0 cm; medida da largura: 1,5 cm.
8. 8 retângulos e 5 trapézios.
9. Espera-se que os estudantes respondam que ela deve separar para reciclagem.
10. Resposta pessoal.

Exercícios complementares

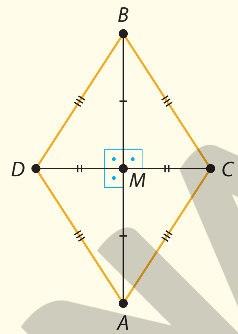
1. a) Retângulo.
1. b) Trapézio isósceles.
1. c) Trapézio retângulo.
1. d) Quadrado.

2. $90° + 50° + x + 2x + 10° = 360° \Rightarrow 3x + 150° = 360° \Rightarrow$
$\Rightarrow 3x = 210° \Rightarrow x = 70°$

3. *ABCD* é um paralelogramo, porque suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.



4.

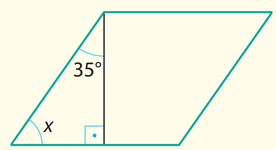


Como suas diagonais são perpendiculares entre si, então seus quatro lados são congruentes. Desse modo, trata-se de um losango.

5. a) Como os ângulos opostos de um paralelogramo são congruentes:
$5x - 56° = 3x + 16° \Rightarrow 5x - 3x = 16° + 56° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 72° : 2 \Rightarrow x = 36°$

5. b) Os ângulos adjacentes a um mesmo lado do paralelogramo são suplementares. Assim:
$5x + 12° + 2x = 180° \Rightarrow 7x = 180° - 12° \Rightarrow$
$\Rightarrow 7x = 168° \Rightarrow x = 168° : 7 \Rightarrow x = 24°$

6.



Sendo x a medida dos ângulos agudos desse paralelogramo, no vértice superior esquerdo do paralelogramo, seus ângulos obtusos medem 125° (35° + 90° = 125°).
Do triângulo retângulo indicado na figura, temos:
$x + 35° + 90° = 180° \Rightarrow x + 125° = 180° \Rightarrow x = 55°$

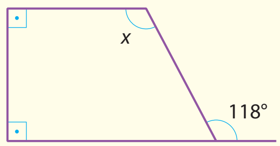
7. Como as diagonais de um losango são bissetrizes de seus ângulos internos, seus dois ângulos agudos medem 56°, pois $2 \cdot 28° = 56°$. Como os ângulos adjacentes a um mesmo lado de um losango são suplementares, seus dois ângulos obtusos medem 124°, pois $180° - 56° = 124°$.

8. a) Como os ângulos da base de um trapézio isósceles são congruentes, então suas medidas são iguais; assim:
$3x + 10° = x + 40° \Rightarrow 3x - x = 40° - 10° \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x = 30° \Rightarrow x = 15°$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

8. b) Como os ângulos adjacentes a um mesmo lado não paralelo de um trapézio são suplementares, então: $2x + 7° + 2x - 27° = 180° \Rightarrow 4x = 200° \Rightarrow x = 50°$

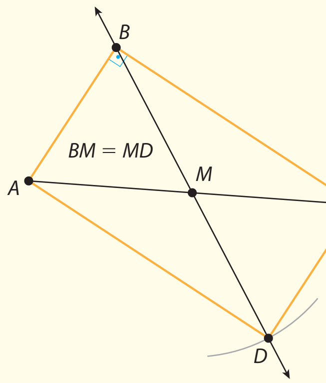
9. Considere x a medida do ângulo pedido.



Por x ser alterno interno ao ângulo externo de medida 118°, a medida de x é igual a 118°.

11. Como a base média mede 30 cm, $\frac{x+y}{2} = 30 \Rightarrow x + y = 60$.
Então, para a medida do perímetro, temos:
$x + y + 10 + 10 = 60 + 20 = 80$
Portanto, a medida do perímetro do trapézio é 80 cm.

12.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

$\triangle DMA$ pelo caso LAL, pois:

- $\overline{BM} \cong \overline{MD}$ (D é simétrico de B em relação a M)
- $B\hat{M}C \cong D\hat{M}A$ (opostos pelo vértice)
- $\overline{AM} \cong \overline{MC}$ (M é ponto médio de $\overline{AC}$)

Então, os ângulos $C\hat{B}M$ e $A\hat{D}M$ são congruentes e, como eles também são alternos internos, conclui-se que os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos.

O mesmo raciocínio aplicado aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ garante que o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

Verificando

1. Sendo x a medida do ângulo obtuso do trapézio, temos:
$x + 55° + 90° + 90° = 360° \Rightarrow x + 235° = 360° \Rightarrow x = 125°$
Alternativa **c**.

2. Como os ângulos adjacentes a um mesmo lado de um paralelogramo são suplementares, no paralelogramo laranja, tem-se:
$a + 70° = 180° \Rightarrow a = 180° - 70° \Rightarrow a = 110°$
Como os paralelogramos amarelo e azul são congruentes, em torno do vértice do ângulo de medida 70° tem-se:
$c + c + 70° = 360° \Rightarrow 2c = 360° - 70° \Rightarrow c = 190° : 2 \Rightarrow c = 145°$
$b + 145° = 180° \Rightarrow b = 35°$
Alternativa **b**.

3. Como as diagonais de um paralelogramo interceptam-se nos seus pontos médios, $m(\overline{CM}) = m(\overline{AM}) = 5$ cm e $m(\overline{DM}) = m(\overline{BM}) = 7$ cm.
Assim, $m(\overline{AC}) = 10$ cm, pois $m(\overline{AC}) = m(\overline{AM}) + m(\overline{CM}) = 5$ cm $+ 5$ cm $= 10$ cm, e $m(\overline{BD}) = 14$ cm, pois $m(\overline{BD}) = m(\overline{BM}) + m(\overline{DM}) = 7$ cm $+ 7$ cm $= 14$ cm. Então, a soma das medidas dessas diagonais é 24 cm ($10 + 14 = 24$).
Alternativa **c**.

4. Todo retângulo tem diagonais congruentes.
Apenas os losangos que são quadrados têm diagonais congruentes.
Apenas os paralelogramos que são retângulos têm diagonais congruentes.
Alternativa **b**.

5. Como $m(\overline{CE}) = m(\overline{AE}) = 6{,}5$ cm, conclui-se que $m(\overline{AC}) = 13$ cm, pois $m(\overline{AC}) = m(\overline{AE}) + m(\overline{CE}) = 6{,}5$ cm $+ 6{,}5$ cm $= 13$ cm. Sabendo que $m(\overline{BC}) = m(\overline{DA}) = 20$ cm; $m(\overline{CD}) = m(\overline{AB}) = 12$ cm, conclui-se que a medida do perímetro do triângulo ACD é 45 cm: $m(\overline{CD}) + m(\overline{DA}) + m(\overline{AC}) = 12$ cm $+ 20$ cm $+ 13$ cm $= 45$ cm
Alternativa **c**.

6. Os ângulos adjacentes à mesma base de um trapézio isósceles são congruentes.
Os trapézios isósceles têm dois ângulos agudos e dois ângulos obtusos.
As bases de todo trapézio são paralelas e têm medidas diferentes; portanto, os lados de um trapézio não são todos congruentes.
Alternativa **a**.

7. Sendo x a medida da base maior:
$\frac{x+5}{2} = 10 \Rightarrow x + 5 = 2 \cdot 10 \Rightarrow x = 20 - 5 \Rightarrow x = 15$
Logo, a base maior mede 15 cm.
Alternativa **b**.

8. Sendo x e y as medidas das bases, do valor da base média tem-se:
$\frac{x+y}{2} = 24 \Rightarrow x + y = 2 \cdot 24 \Rightarrow x + y = 48$
Sendo z a medida dos lados não paralelos, da medida do perímetros tem-se:
$x + y + z + z = 88 \Rightarrow 48 + 2z = 88 \Rightarrow 2z = 88 - 48 \Rightarrow$
$\Rightarrow z = \frac{40}{2} \Rightarrow z = 20$
Portanto, cada um dos lados não paralelos do trapézio mede 20 cm.
Alternativa **b**.

Diversificando

1. Três tipos: retângulo (B, D, E, F e H, sendo D e F quadrados) e trapézio (A, C, G e I).

2. a) Se os livros ficarem totalmente dentro da caixa, caberão nela 10 livros (20 : 2 = 10). Se Gabriela deixar uma parte de cada livro para fora, caberão 13 livros (26 : 2 = 13).

2. b) $13 \cdot 20\text{ cm} \cdot 2\text{ cm} \cdot (26\text{ cm} - 20\text{ cm}) = 520\text{ cm}^2 \cdot 6\text{ cm} = 3\,120\text{ cm}^3$

3. Resposta possível: Sim, basta imaginar um prisma de base triangular sem uma das bases.

4. a) Sim, o triângulo terá cada lado composto de 4 palitos de sorvete.

4. b) O retângulo. O retângulo de maior medida de área é o quadrado cujo lado é formado por 3 palitos de sorvete.

Capítulo 10 – Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Objetivos do capítulo e justificativas

- Conceituar e resolver sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas.
- Resolver problemas envolvendo valor numérico de expressões algébricas.
- Reconhecer e aplicar os métodos de resolução de um sistema de equações do 1º grau.
- Representar geometricamente uma equação linear do 1º grau com duas incógnitas, associando-a a uma reta do plano cartesiano.
- Obter graficamente a solução de um sistema de equações do 1º grau representando suas equações lineares no plano cartesiano.
- Classificar um sistema de equações do 1º grau como sistema determinado, indeterminado ou impossível.
- Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- Identificar a natureza da variação de duas grandezas expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.
- Interpretar gráfico de setores e gráfico de colunas compostas.
- Analisar gráfico para representar dados envolvendo a média aritmética.

Neste capítulo, a Unidade Temática **Álgebra** é ampliada e aprofundada com conteúdos que retomam a modelagem de situações por meio de expressões algébricas, a resolução de equações e de sistemas de equações de 1º grau que favorecem o desenvolvimento da **competência geral 2** e **competência específica 5**, pois, mais uma vez, os estudantes utilizam ferramentas matemáticas para modelar e resolver problemas.

O estudo da representação geométrica de equação do 1º grau com duas incógnitas e a de sistemas de equações desse mesmo tipo possibilita aos estudantes desenvolverem a **competência geral 4** e as **competências específicas 3** e **6**, pois são feitas inter-relações entre **Álgebra** e **Geometria** e podem-se enfrentar situações-problema que permitem aos estudantes utilizarem diferentes registros e linguagens.

De maneira semelhante, os objetivos que envolvem interpretação de gráficos se justificam à medida que possibilitam desenvolver a **competência geral 4** e a **competência específica 4**, pois os estudantes se apropriam de diferentes maneiras para divulgar informações e adquirem condições de observar e analisar aspectos qualitativos e quantitativos em diferentes situações.

Propomos em algumas atividades o uso de *software* para representações gráficas, com o objetivo de observarem padrões e regularidades entre as variáveis, o que contribui para o desenvolvimento da **competência geral 5** e da **competência específica 2**.

O contexto utilizado para explorar pesquisas censitárias e pesquisas amostrais, neste capítulo, favorece o desenvolvimento das **competências gerais 9** e **10** e a **competência específica 8**, pois os estudantes deverão, em grupos, pesquisar e discutir sobre a importância de agir e tomar decisões com base em princípios democráticos, solidários e inclusivos.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-lo, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano.

(EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

(EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada).

(EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos

Os conceitos e as atividades ligados à Unidade Temática **Álgebra**, foco deste capítulo, utilizam como base os conhecimentos já construídos nos capítulos 4, 5 e 6 deste livro e aqueles trazidos do 7º ano (EF07MA13 e EF07MA18). Exploram-se situações e resoluções de problemas que envolvem sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas e os métodos de resolução desses sistemas (método da substituição e da adição) retomando e mobilizando a habilidade (EF08MA06) e desenvolvendo as habilidades (EF08MA07) e (EF08MA08).

São abordadas também a representação gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas, a solução gráfica de um sistema de duas equações do 1º grau e a classificação desses sistemas. Além disso, exploram-se ideias sobre grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, associadas a gráficos no plano cartesiano mobilizando as habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13).

Desse modo, espera-se que esses conteúdos constituam embasamento necessário, entre outros assuntos, ao estudo de funções, durante o 9º ano (EF09MA06). Ainda na Unidade Temática **Álgebra**, este capítulo trata da resolução de equações do tipo $ax^2 = b$, por exemplo, na seção *Para saber mais* com o tema "Raiz quadrada ou diferença de dois quadrados", contribuindo para a mobilização da habilidade (EF08MA09).

Algumas das atividades vinculam-se também à Unidade Temática **Probabilidade e estatística**, caso da seção *Trabalhando a informação*, que apresenta a "Composição de um gráfico de colunas formadas a partir de outros gráficos", que explora gráficos de setores e gráfico de colunas compostas e desenvolve a habilidade (EF08MA23); na última seção *Trabalhando a informação* do capítulo, desenvolvem-se as habilidades (EF08MA26) e (EF08MA27), ao propor a realização de uma pesquisa.

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

2. a) Pelo método da substituição, isolando x na 2ª equação temos: $x - 3y = -5 \Rightarrow x = 3y - 5$. Substituindo x por $(3y - 5)$ na 1ª equação, temos:

$3 \cdot (3y - 5) + 2y = 40 \Rightarrow 9y - 15 + 2y = 40 \Rightarrow$
$\Rightarrow 11y = 55 \Rightarrow y = 5$

Substituindo y por 5 na equação em que x está isolado, temos:

$x = 3 \cdot 5 - 5 \Rightarrow x = 10$

Portanto, o par ordenado (10, 5) é a solução do sistema.

Pelo método da adição, multiplicando a 2ª equação por (–3) e adicionando, membro a membro, as duas equações, obtemos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 40 \\ -3x + 9y = 15 \end{cases} \Rightarrow 11y = 55 \Rightarrow \frac{11y}{11} = \frac{55}{11} \Rightarrow y = 5$$

Substituindo y por 5 na 1ª equação, obtemos:

$3x + 2 \cdot 5 = 40 \Rightarrow 3x + 10 = 40 \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = 10$

Portanto, o par (10, 5) é a solução do sistema.

2. b) Pelo método da substituição, isolando x na 2ª equação, obtendo:

$$5x = 2y + 29 \Rightarrow x = \frac{2y + 29}{5} \Rightarrow x = 0{,}4y + 5{,}8$$

Substituindo x por $(0{,}4y + 5{,}8)$ na 1ª equação, obtemos:

$4 \cdot (0{,}4y + 5{,}8) + 3y = 14 \Rightarrow 1{,}6y + 23{,}2 + 3y = 14 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4{,}6y = -9{,}2 \Rightarrow y = -2$

Substituindo y por -2 na equação em que x está isolado, obtemos:

$x = 0{,}4 \cdot (-2) + 5{,}8 \Rightarrow x = -0{,}8 + 5{,}8 \Rightarrow x = 5$

Portanto, o par (5, –2) é a solução do sistema. Pelo método da adição, multiplicando a 1ª equação por 2 e a 2ª equação por 3, obtemos:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 14 \ \cdot (2) \\ 5x - 2y = 29 \ \cdot (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 6y = 28 \\ 15x - 6y = 87 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as equações, obtemos:

$23x = 115 \Rightarrow x = 5$

Substituindo x por 5 na 1ª equação, temos:

$4 \cdot 5 + 3y = 14 \Rightarrow 3y = 14 - 20 \Rightarrow y = -2$

Portanto, o par (5, –2) é a solução do sistema.

3. a) Subtraindo a 1ª equação da 2ª equação, teremos:

$-y = -5 + 1 = -4$

Logo, $y = 4$.

Substituindo o valor de y na segunda equação, temos:

$x = 2 \cdot 4 + 1 \Rightarrow x = 9$

Logo, o par (9, 4) é solução do sistema.

3. b) Como $y = x - 5$, temos:

$x + x - 5 = 9 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$

Assim, $y = 7 - 5 = 2$. Logo, o par (7, 2) é solução do sistema.

4. Sendo p e f as idades atuais do pai e do filho, respectivamente, hoje, temos: $p = 20 + f$. Daqui a 5 anos, $p + 5 = 2(f + 5)$. Substituindo p por $(20 + f)$ na 2ª equação, obtemos:

$(20 + f) + 5 = 2(f + 5) \Rightarrow 25 + f = 2f + 10 \Rightarrow f = 15$

Substituindo f por (15) na 1ª equação, obtemos:

$p = 20 + 15 \Rightarrow p = 35$

Assim, a idade do filho é 15 anos e a idade do pai é 35 anos.

5. Sendo d o algarismo das dezenas e u o algarismo das unidades, o número considerado fica expresso por:

$10d + u$

Então, temos o sistema:

$$\begin{cases} u = 5 + d \\ 10d + u = 3(d + u) \end{cases}$$

Substituindo u por $(5 + d)$ na 2ª equação, obtemos:

$10d + 5 + d = 3(d + 5 + d) \Rightarrow 11d + 5 = 6d + 15 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5d = 10 \Rightarrow d = 2$

Substituindo d por 2 na 1ª equação, obtemos:

$u = 5 + 2 \Rightarrow u = 7$

Portanto, trata-se do número 27, pois $(10 \cdot 2) + 7 = 27$.

6. a) Efetuando a propriedade distributiva e isolando os termos literais das equações, obtemos:

$$\begin{cases} 2(x - 2) + 3y = -7 \\ 3x - 2(y - 4) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 + 3y = -7 \\ 3x - 2y + 8 = -3 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 3x - 2y = -11 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por 2 e a 2ª equação por 3, obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ 3x - 2y = -11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = -6 \\ 9x - 6y = -33 \end{cases}$$

Fazendo a adição das duas equações, obtemos:

$13x + 0y = -39 \Rightarrow x = -3$

Substituindo x por -3 na 1ª equação, temos:

$2 \cdot (-3) + 3y = -3 \Rightarrow -6 + 3y = -3 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$

Portanto, o par ordenado (–3, 1) é a solução do sistema.

6. **b)** $\begin{cases} 2{,}4x - 0{,}6y = 2{,}4 \\ 3{,}6x + y = 7{,}4 \end{cases}$

Isolando y na 2ª equação, temos:

$y = 7{,}4 - 3{,}6x$

Substituindo y por $7{,}4 - 3{,}6x$ na 1ª equação, obtemos:

$2{,}4x - 0{,}6(7{,}4 - 3{,}6x) = 2{,}4 \Rightarrow 2{,}4x - 4{,}44 + 2{,}16x = 2{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4{,}56x = 2{,}4 + 4{,}44 \Rightarrow 4{,}56x = 6{,}84 \Rightarrow x = 1{,}5$

Substituindo x por 1,5 na equação em que y está isolado, obtemos:

$y = 7{,}4 - 3{,}6 \cdot 1{,}5 \Rightarrow y = 7{,}4 - 5{,}4 \Rightarrow y = 2$

Portanto, o par ordenado (1,5; 2) é a solução do sistema.

7. Sendo b a medida da base e h a medida da altura do retângulo, em centímetro, dos dados do enunciado, podemos montar o seguinte sistema.

$$\begin{cases} 2b + 2h = 22 \\ b - \dfrac{h}{2} = 5 \end{cases}$$

Multiplicando a 2ª equação por 4, obtém-se:

$$\begin{cases} 2b + 2h = 22 \\ 4b - 2h = 20 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, obtemos:

$$6b = 42 \Rightarrow \frac{6b}{6} = \frac{42}{6} \Rightarrow b = 7$$

Substituindo b por 7 na 1ª equação, obtemos:

$2 \cdot 7 + 2h = 22 \Rightarrow 14 + 2h = 22 \Rightarrow 2h = 8 \Rightarrow h = 4$

Portanto, a medida da área do retângulo é 28 cm² ($7 \cdot 4 = 28$).

9. Sendo x a quantidade de notas de 5 reais e y a quantidade de notas 2 reais, pelas informações do enunciado podemos montar o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 89 \\ x + y = 22 \end{cases}$$

Multiplicando a 2ª equação por –2, obtemos:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 89 \\ -2x - 2y = -44 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, obtemos:

$3x + 0y = 45 \Rightarrow x = 15$

Substituindo x por 15 na 2ª equação, obtemos:

$15 + y = 22 \Rightarrow y = 7$

Portanto, foram 15 notas de R$ 5,00 e 7 notas de R$ 2,00.

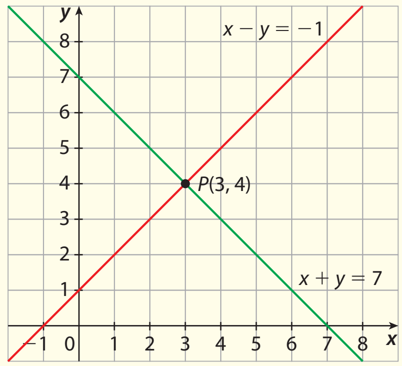
13. **a)** Resposta possível: $\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$

Solução: (0, 0)

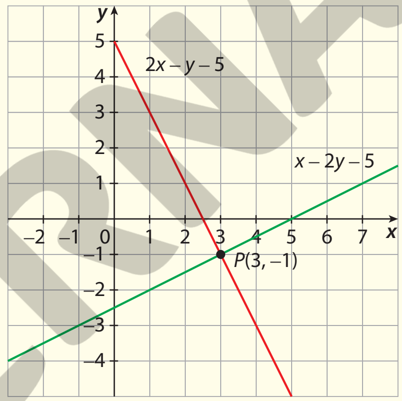
13. **b)** Resposta possível: $\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$

Não há par ordenado que seja solução do sistema.

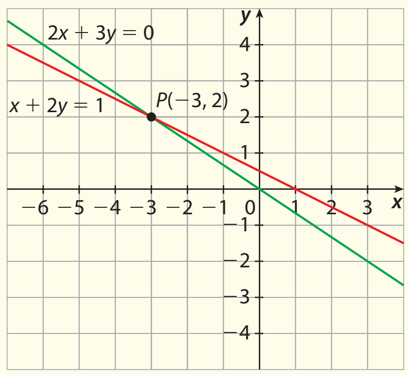
14. **a)** O par ordenado (3, 4) é a solução do sistema.



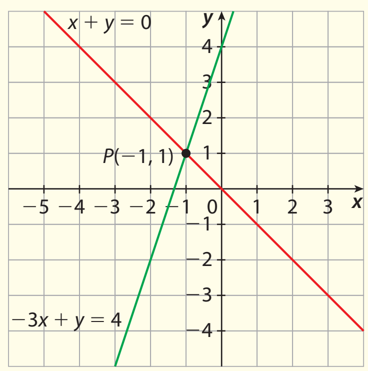
14. **b)** O par ordenado (3, –1) é a solução do sistema.



14. **c)** O par ordenado (–3, 2) é a solução do sistema.

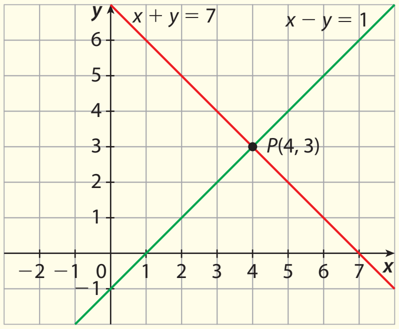


14. **d)** O par ordenado (–1, 1) é a solução do sistema.

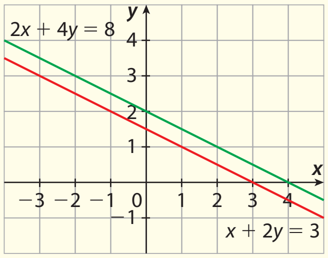


ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

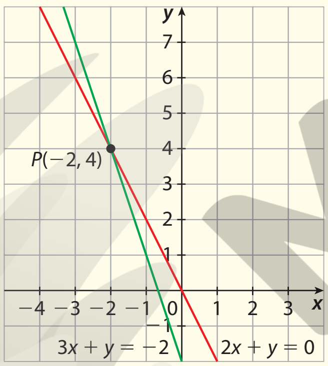
15. a) Observando que as retas são concorrentes, conclui-se que o sistema é determinado. O par ordenado (4, 3) é a solução do sistema.



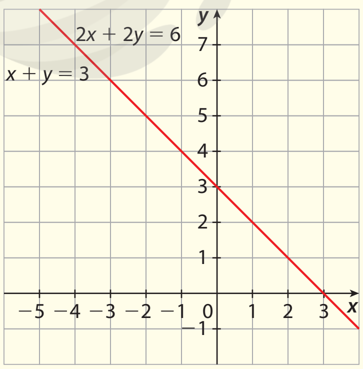
15. b) Observando que as retas são paralelas, conclui-se que o sistema é impossível.



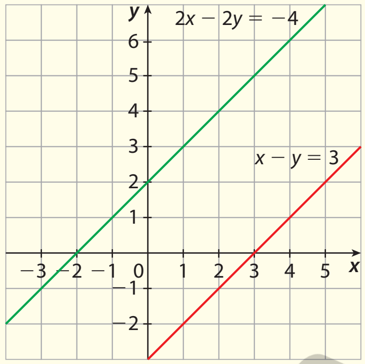
15. c) Observando que as retas são concorrentes, conclui-se que o sistema é determinado. O par ordenado (–2, 4) é a solução do sistema.



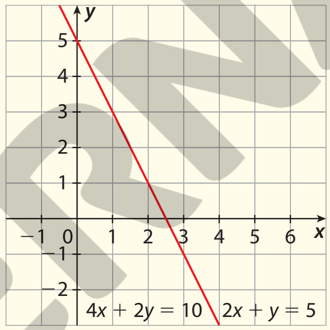
15. d) Observando que as retas são coincidentes, conclui-se que o sistema é indeterminado.



15. e) Observando que as retas são paralelas, conclui-se que o sistema é impossível.



15. f) Observando que as retas são coincidentes, conclui-se que o sistema é indeterminado.



Exercícios complementares

1. Sendo x a quantidade de notas de 50 reais e y a quantidade de notas de 100 reais, podemos escrever o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} 50x + 100y = 700 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

Dividindo a 1ª equação por 50 e multiplicando a 2ª equação por –1, obtemos:

$$\begin{cases} 50x + 100y = 700 \\ x + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 14 \\ -x - y = -10 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, obtemos $y = 4$. Substituindo y por 4 na 2ª equação do sistema original, obtemos:

$x + 4 = 10 \Rightarrow x = 10 - 4 \Rightarrow x = 6$

Portanto, Cristina retirou 6 notas de R$ 50,00 e 4 notas de R$ 100,00.

2. Seja x o número de moças e y o número de rapazes, com os dados informados no enunciado podemos escrever o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} y = 4x + 3 \\ y - 1 = 5x \end{cases}$$

Substituindo y por $(4x + 3)$ na 2ª equação, obtemos:

$4x + 3 - 1 = 5x \Rightarrow 2 = 5x - 4x \Rightarrow x = 2$

Substituindo x por 2 na 1ª equação, obtemos:

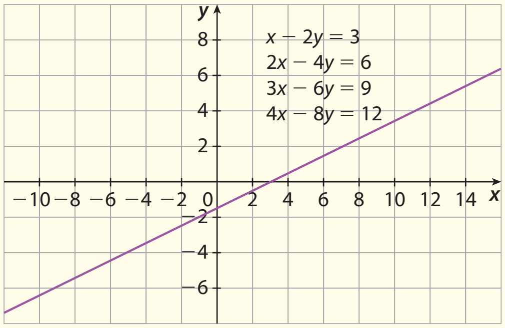
$y = 4 \cdot 2 + 3 \Rightarrow y = 11$

Portanto, a quantidade total de jovens é 13, pois:

$x + y = 2 + 11 = 13$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

4. a)



4. b) Da representação no plano cartesiano, percebemos que as retas são coincidentes.

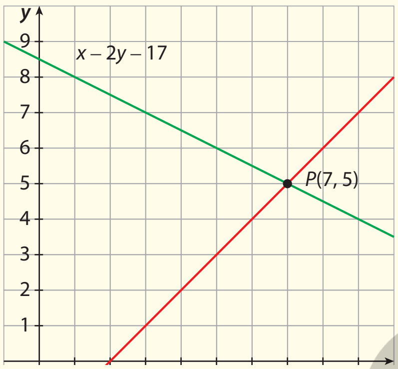
4. c) Ao multiplicar ambos os membros da equação $x - 2y = 3$ por 2, ou por 3 ou por 4, obtemos, respectivamente:

$2x - 4y = 6$

$3x - 6y = 9$

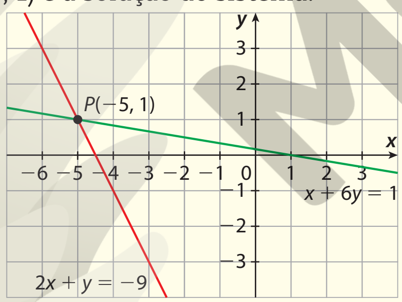
$4x - 8y = 12$

5. a) Observando que as retas são concorrentes, conclui-se que o sistema é determinado. Assim, o par ordenado (7, 5) é a solução do sistema.

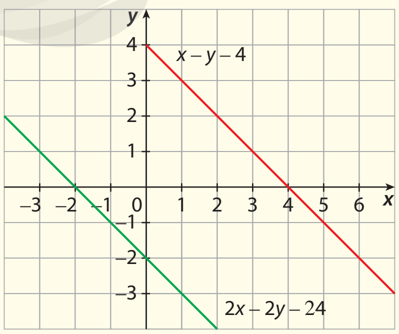


ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

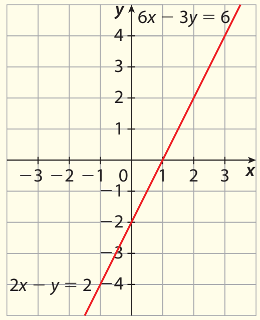
5. b) Observando que as retas são concorrentes, conclui-se que o sistema é determinado. Assim, o par ordenado (–5, 1) é a solução do sistema.



5. c) Observando que as retas são paralelas, conclui-se que o sistema é impossível.



5. d) Observando que as retas são coincidentes, conclui-se que o sistema é indeterminado.



6. Multiplicando a 1ª equação por 6, e a 2ª equação por 15 e simplificando as frações, obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{2x - y}{3} - \dfrac{x + 3y}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6x}{2} + \dfrac{6y}{3} = \dfrac{24}{3} \\ \dfrac{15(2x - y)}{3} - \dfrac{15(x + 3y)}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 5(2x - y) - 3(x + 3y) = 0 \end{cases}$$

Aplicando a propriedade distributiva, obtemos:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 10x - 5y - 3x - 9y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 7x - 14y = 0 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por 7 e adicionando as duas equações membro a membro, obtemos:

$$28x = 56 \Rightarrow x = \frac{56}{28} \Rightarrow x = 2$$

Substituindo x por 2 na equação: $3x + 2y = 8$, temos:

$3 \cdot 2 + 2y = 8 \Rightarrow 6 + 2y = 8 \Rightarrow 2y = 8 - 6 \Rightarrow 2y = 2 \Rightarrow y = 1$

Assim, $x : y = 2$, pois $2 : 1 = 2$.

7. Sendo A a quantidade de grampos dos processos de André e C a quantidade de grampos dos processos de Carlos, com os dados do problema podemos escrever o seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} A + C = 78 \\ A + 2C = 110 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por –1 e adicionando as equações membro a membro, obtemos C = 32. Assim, a quantidade de processos de Carlos é igual a 32.

Alternativa **d**.

8. O problema apresentado pode ser descrito pelo seguinte sistema de equações.

$$\begin{cases} x + y = 84 \\ 3x = 4y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 84 \\ x = \dfrac{4}{3}y \end{cases}$$

Substituindo x por $\dfrac{4}{3}y$ na equação $x + y = 84$, temos:

$$\frac{4}{3}y + y = 84 \Rightarrow \frac{7}{3}y = 84 \Rightarrow 7y = 84 \cdot 3 \Rightarrow y = \frac{252}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 36$$

Substituindo y por 36 na equação $x + y = 84$, temos:
$x + 36 = 84$ $x = 48$
Como o viaduto mede 84 metros, o centro do viaduto está a 42 metros de cada uma das extremidades (pois 84 : 2 = 42); portanto, Eduarda e Carlos se encontraram a 6 metros do centro do viaduto (48 – 42 = 6).

Verificando

1. Substituindo x por $y + 30$ na 2ª equação, temos:
$y + 30 + 5 = 2(y + 10) \Rightarrow y + 35 = 2y + 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow 35 - 20 = 2y - y \Rightarrow y = 15$
Substituindo y por 15 na 1ª equação, obtemos:
$x = 15 + 30 \Rightarrow x = 45$
Alternativa **d**.

2. Sejam x a quantidade de embalagens de coco ralado e y a quantidade de caixas de chocolate em pó. Com os dados do problema, podemos escrever o seguinte sistema de equações.
$$\begin{cases} 4x + 5y = 54 \\ 100x + 200y = 1\,800 \end{cases}$$
Multiplicando a 1ª equação por –1 e dividindo a 2ª equação por 25, obtemos:
$$\begin{cases} -4x - 5y = -54 \\ 4x + 8y = 72 \end{cases}$$
Adicionando as equações, membro a membro, temos:
$3y = 18 \Rightarrow y = 6$
Substituindo y por 6 na 1ª equação, obtemos:
$4x + 5 \cdot 6 = 54 \Rightarrow 4x + 30 = 54 \Rightarrow 4x = 54 - 30 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x = 24 \Rightarrow x = 6$
Então, Jorge comprou 6 embalagens de coco ralado e 6 caixas de chocolate em pó.
Alternativa **b**.

3. Sendo x a quantidade de cédulas de R$ 50,00 e y a quantidade de cédulas de R$ 100,00, com os dados do problema obtemos o seguinte sistema:
$$\begin{cases} 50x + 100y = 9450 \\ x + y = 120 \end{cases}$$
Dividindo a 1ª equação por 50 e multiplicando a 2ª equação por –1, obtemos:
$$\begin{cases} x + 2y = 189 \\ -x - y = -120 \end{cases}$$
Adicionando as equações, membro a membro, obtemos $y = 69$. Substituindo y por 69 na 2ª equação, obtemos:
$x + 69 = 120 \Rightarrow x = 51$
Assim, a quantidade de cédulas de R$ 100,00 é 69 e a quantidade de cédulas de R$ 50,00 é 51.
Alternativa **c**.

4. Vamos testar os pontos dados em cada alternativa nas equações: **(I)** $2x - 4y = 10$ e **(II)** $x - 2y = 5$

4. a) **(I)** $2 \cdot 7 - 4 \cdot 1 = 10 \Rightarrow 10 = 10$
(II) $7 - 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow 5 = 5$
Então (7, 1) é solução.
(I) $2 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 10 \Rightarrow 10 = 10$
(II) $3 - 2 \cdot (-1) = 5 \Rightarrow 5 = 5$
Então (3, –1) é solução.

4. b) **(I)** $2 \cdot 5 - 4 \cdot 0 = 10 \Rightarrow 10 = 10$
(II) $5 - 2 \cdot 0 = 5 \Rightarrow 5 = 5$
Então (5, 0) é solução.
(I) $2 \cdot 9 - 4 \cdot 2 = 10 \Rightarrow 10 = 10$
(II) $9 - 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow 5 = 5$
Então (9, 2) é solução.

4. c) **(I)** $2 \cdot 0 - 4 \cdot (-2{,}5) = 10 \Rightarrow 10 = 10$
(II) $0 - 2 \cdot (-2{,}5) = 5 \Rightarrow 5 = 5$
Então (0, –2,5) é solução.
(I) $2 \cdot 11 - 4 \cdot 3 = 10 \Rightarrow 10 = 10$
(II) $11 - 2 \cdot 3 = 5 \Rightarrow 5 = 5$
Então (11, 3) é solução.

4. d) **(I)** $2 \cdot -4 - 4 \cdot (-3) = 10 \Rightarrow 4 \neq 10$
(II) $-4 - 2 \cdot (-3) = 5 \Rightarrow 2 \neq 5$
Então (–4, –3) não é solução.
(I) $2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1) = 10 \Rightarrow -2 \neq 10$
(II) $-4 - 2 \cdot (-3) = 5 \Rightarrow 2 \neq 5$
Então (–3, –1) não é solução.
Alternativa **d**.

5. Os pontos (–1, 0) e (0, 1) pertencem à reta de equação $y = x + 1$. Os pontos (–1, 0) e (0, –1) pertencem à reta de equação $y = -x - 1$. Os pontos (0, 0) e (1, 2) pertencem à reta de equação $y = 2x$. Portanto, a equação $y = -2x - 2$ não está representada no gráfico.
Alternativa **b**.

6. A reta de equação $y = 2x$ passa pelos pontos (0, 0) e (1, 2) e a reta de equação $y = x + 1$ passa pelos pontos (–1, 0) e (0, 1).
Alternativa **a**.

Capítulo 11 – Área de regiões poligonais

Objetivos do capítulo e justificativas

- Determinar expressões para o cálculo da área de figuras planas poligonais: área de paralelogramo, de triângulo, de losango e de trapézio.
- Retomar e aplicar a área de retângulos (quadrados ou não).
- Resolver problemas envolvendo valor numérico de expressões algébricas.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo o cálculo de áreas.
- Reconhecer o cálculo de área por meio da decomposição em triângulos.
- Aplicar congruência de triângulos em demonstrações geométricas.
- Analisar a construção de um losango e explorar suas características.
- Reconhecer transformações geométricas: reflexão, translação e rotação.
- Interpretar e construir pictogramas.

Neste capítulo, os estudantes retomam, ampliam e aplicam diferentes conteúdos trabalhados nos capítulos anteriores explorando a Unidade Temática **Geometria** associada à **Álgebra** e, assim, desenvolvendo a **competência específica 3**. São propostas atividades em que é necessário argumentar, exercitar a curiosidade intelectual e o raciocínio lógico, a fim de demonstrar a validade de expressões algébricas para o cálculo da medida de área de algumas figuras planas e, dessa maneira, desenvolvem-se as **competências gerais 2** e **4** e as **competências específicas 2** e **6**.

Ao explorar pictogramas, os estudantes podem ampliar a compreensão de diferentes tipos de representações gráficas e, portanto, desenvolver a **competência geral 4** e a **competência específica 4**, à medida que utilizam diferentes linguagens para se expressar ou comunicar informações e que analisam aspectos qualitativos e quantitativos nos contextos apresentados. Além disso, ao desenvolver pesquisas, os estudantes precisam interagir entre si de maneira cooperativa e mobilizam a **competência específica 8**.

A contextualização na abertura do capítulo possibilita desenvolver as **competências gerais 9** e **10** e a **competência específica 8**, pois os estudantes podem exercitar a empatia, dialogar em respeito a situações que tratam sobre a saúde e a importância de bancos de transplante de órgãos, por exemplo.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.

(EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.

Neste capítulo, serão aprofundados os estudos relativos à Unidade Temática **Grandezas e medidas** envolvendo a grandeza área, levando-se em conta os conhecimentos desenvolvidos nos anos anteriores, em especial no 7º ano (EF07MA29, EF07MA31 e EF07MA32), aportes para a compreensão dos temas aqui tratados. Os conhecimentos que abrangem medidas de área promovem o estabelecimento de expressões algébricas de cálculo de área de regiões poligonais: paralelogramo, triângulo, losango e trapézio; dessa maneira, desenvolvem a habilidade (EF08MA19).

A Unidade Temática **Números** também está presente neste capítulo com atividades que abordam áreas e cálculo de porcentagens. A conexão com a Unidade Temática **Álgebra** se concretiza pela resolução de problemas que envolvem o cálculo do valor numérico das expressões que determinam a área das regiões poligonais estudadas mobilizando, por vezes, a habilidade (EF08MA09).

Com a Unidade Temática **Geometria**, a conexão se concretiza por meio de atividades da seção *Para saber mais*, que mobiliza a habilidade (EF08MA15) e promove a aplicação da congruência de triângulos para demonstrações de propriedades de quadriláteros e a construção de um losango. A seção *Trabalhando a informação*, cujo tema é pictogramas, promove a articulação com a Unidade Temática **Probabilidade e estatística** e desenvolve a habilidade (EF08MA23).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. Como $A_{paralelogramo} = b \cdot h = x \cdot y$ e a ordem dos fatores não altera o produto, as áreas dos dois paralelogramos têm a mesma medida, ou seja, $A_{paralelogramo} = y \cdot x = 80$ m².

2. Sendo h a medida da altura do paralelogramo, temos:
$A_{paralelogramo} = b \cdot h \Rightarrow 56 = 8 \cdot h \Rightarrow h = 56 : 8 \Rightarrow h = 7$
Assim, a medida da altura é 7 cm.

4. Então, podemos dividir a altura total do mosaico em três partes iguais a 2,12 cm, que corresponde à medida de altura de um paralelogramo verde. Desse modo, a área de cada um desses paralelogramos mede 10,6 cm², pois:
$A_{paralelogramo} = b \cdot h \Rightarrow A_{paralelogramo} = 5 \cdot 2{,}12 = 10{,}6$
A área do quadrado mede 9 cm², pois:
$A_{quadrado} = b \cdot h \Rightarrow A_{quadrado} = 3 \cdot 3 = 9$
Então, podemos concluir que a medida total da área da superfície do mosaico corresponde à soma das medidas da áreas de todas as figuras, ou seja, $A_{total} =$ $= 3 \cdot 10{,}6 + 2 \cdot 9 = 49{,}8$. Assim, a área da superfície do mosaico mede 49,8 cm².

5. a) De acordo com a figura, os paralelogramos têm bases e alturas de medidas iguais; portanto, as medidas de suas áreas também são iguais. Desse modo, a área de cada paralelogramo mede 6 cm² ($4 \cdot 1{,}5 = 6$) e a área total da figura mede 12 cm² ($2 \cdot 6 = 12$).

5. b) De acordo com a figura, os paralelogramos têm bases e alturas de medidas iguais; portanto, as medidas de suas áreas também são iguais. Desse modo, a área de cada paralelogramo mede 4 cm² ($2 \cdot 2 = 4$) e a área total da figura mede 8 cm² ($2 \cdot 4 = 8$).

6. a) $A_{paralelogramo} = b \cdot h \Rightarrow 34{,}2 = 7{,}6 \cdot h \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 34{,}2 : 7{,}6 \Rightarrow h = 4{,}5$
Assim, a altura mede 4,5 cm.

6. b) $A_{paralelogramo} = b \cdot h \Rightarrow 27{,}3 = b \cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = 27{,}3 : 3 \Rightarrow b = 9{,}1$
Assim, a base mede 9,1 cm.

7. Supondo que a figura central azul seja um quadrado sobreposto pelos quadrados amarelos, precisamos obter a parte que está faltando para completar o quadrado. Pela leitura da figura, os quadrados amarelos estão posicionados de modo que os pontos médios de seus lados interceptam o lado do quadrado azul. Desse modo, pode-se concluir que o lado do suposto quadrado azul mede 2 cm ($1 + 0{,}5 +$ $+ 0{,}5 = 2$) e, portanto, sua área mede 4 cm² ($A_{quadrado} = 2 \cdot 2 = 4$). Agora, é preciso descontar a quantidade adicionada que equivale a um quadrado amarelo, de área medindo 1 cm². Assim, a área da região pintada de azul mede 3 cm² ($4 - 1 = 3$).

9. A área do dormitório mede 10,5 m² (3,5 · 3,0 = 10,5). A sala tem lados de medida 5,5 m ($lado_1$ = 3,5 + 2 = 5,5; $lado_2$ = 3,0 + 2,5 = 5,5). Desse modo, a área da sala mede 26,25 m² [(5,5 · 5,5) – 4 = 26,25]. Assim, o carpete será colocado sobre uma área de 36,75 m² (26,25 + 10,5 = = 36,75) . Portanto, o dono do apartamento deverá gastar R$ 1 764,00 (48 · 36,75 = 1 764).

15. A base e a altura do triângulo verde coincidem com a base e a altura do paralelogramo. Desse modo, a área da região pintada de verde tem a mesma medida da área do triângulo de base medindo 4,5 m e altura medindo 2,4 m, ou seja, 5,4 m².

$$A = \frac{4{,}5 \cdot 2{,}4}{2} = 5{,}4$$

16. A medida da área da região pintada de azul é igual à medida da área do paralelogramo subtraída da medida da área do triângulo branco. As bases e alturas das duas figuras têm mesmas medidas.

A área do triângulo mede 6 cm².

$$A_{triângulo} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{triângulo} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

A área do paralelogramo mede 12 cm².

$$A_{paralelogramo} = b \cdot h \Rightarrow A_{paralelogramo} = 3 \cdot 4 = 12$$

Então, a área da região pintada de azul mede 6 cm² (12 – 6 = 6).

17. O hexágono é formado por 6 triângulos iguais. A área de cada um desses triângulos mede 1,7 cm².

$$A_{triângulo} = \frac{2{,}0 \cdot 1{,}7}{2} = 1{,}7$$

Portanto, a área do hexágono mede 10,2 cm² (6 · 1,7 = 10,2).

18. a) A medida da área da figura é dada pela soma das medidas das áreas do retângulo e do triângulo. A medida da área do retângulo é 9 cm² (6 · 1,5 = 9). A medida da área do triângulo é 4,5 cm².

$$A_{triângulo} = \frac{6{,}0 \cdot 1{,}5}{2} = 4{,}5$$

Assim, a área da figura mede 13,5 cm² (9 + 4,5 = 13,5).

18. b) A figura é formada por três triângulos congruentes. Assim, as áreas dos três triângulos têm a mesma medida; portanto, a área da figura mede aproximadamente 22,31 cm².

$$3 \cdot \left(\frac{4{,}25 \cdot 3{,}5}{2}\right) = 3 \cdot 7{,}4375 \simeq 22{,}31$$

20. A área do triângulo *ABC* mede 31,15 cm².

$$A_{triângulo} = \frac{7 \cdot 8{,}9}{2} = 31{,}15$$

A medida do lado $\overline{BC}$ é dada por:

$$\frac{BC \cdot 6{,}2}{2} = 31{,}15 \Rightarrow BC = \frac{2 \cdot 31{,}15}{6{,}2} \Rightarrow BC \simeq 10$$

Logo, o lado $\overline{BC}$ mede aproximadamente 10 cm.

Usando o mesmo raciocínio, sendo h a altura relativa ao lado $\overline{AB}$, h mede aproximadamente 6,9 cm.

$$\frac{9 \cdot h}{2} = 31{,}15 \Rightarrow h = 62{,}3 : 9 \Rightarrow h \simeq 6{,}9$$

21. A área do losango mede 97,2 cm².

$$A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A_{losango} = \frac{14{,}4 \cdot 13{,}5}{2} = 97{,}2$$

23. A medida da base do retângulo coincide com a medida da diagonal maior do losango (*D*) e a medida da altura do retângulo coincide com a medida da diagonal menor do losango (*d*).

Portanto, a área do losango mede 27,9 m².

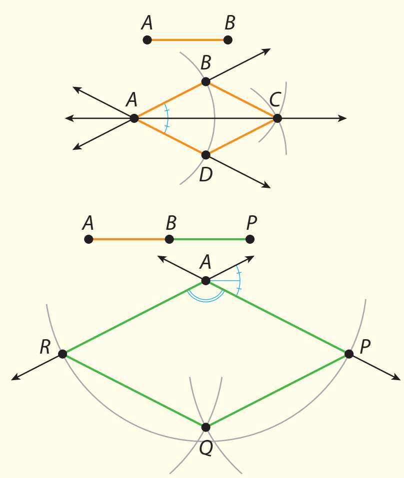
$$A_{losango} = \frac{12{,}4 \cdot 4{,}5}{2} = 27{,}9$$

24. a) A medida da área do losango é quatro vezes a medida da área do triângulo em destaque. Portanto, a área do losango mede 48 cm².

$$A_{losango} = 4 \cdot 12 = 48$$

24. b) Juntas, as duas regiões pintadas de verde têm a mesma medida de área de um quarto do losango, que corresponde à medida da área do triângulo retângulo; assim, a medida da área do losango é quatro vezes a medida da área do triângulo em destaque. Portanto, a área do losango mede 48 cm² (4 · 12 = 48).

25.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

A medida da área do primeiro losango é quatro vezes menor que a medida da área do segundo losango; logo, ele caberá 4 vezes dentro do segundo losango.

26. Como a área do losango tem medida igual a 48 cm², precisamos obter dois números que multiplicados resultem em 96, uma vez que a medida da área do losango é calculada por:

$$A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow 48 \cdot 2 = D \cdot d \Rightarrow D \cdot d = 96$$

Como D e d são números naturais, podemos decompor o número 96, obtendo as seguintes possibilidades para D e d: 1 cm e 96 cm, 2 cm e 48 cm, 3 cm e 32 cm, 4 cm e 24 cm, 6 cm e 16 cm, 8 cm e 12 cm.

27. Os lados do quadrado $ABCD$ coincidem com as diagonais do losango $FGHE$. Assim, a área do losango $FGHE$ mede 72 cm².

$$A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow \frac{12 \cdot 12}{2} = 72$$

Para o losango $F'G'H'E'$, o lado maior do retângulo coincide com a diagonal maior do losango, ou seja, eles têm mesma medida.

$$A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow 72 = \frac{16 \cdot d}{2} \Rightarrow d = 9$$

Logo, a diagonal menor do losango $F'G'H'E'$ mede 9 cm. De 12 cm para 9 cm foram reduzidos 3 cm (12 – 9 = 3).

28. Oriente os estudantes na elaboração dos problemas.

29. a) Como $(B + b) = 15{,}5$, a medida da área do trapézio é 96,1 cm².

$$A_{trapézio} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow A_{trapézio} = \frac{15{,}5 \cdot 12{,}4}{2} = 96{,}1$$

29. b) Seja S a soma das medidas das bases do trapézio, temos:

$$\frac{S \cdot 12{,}4}{2} = 155 \Rightarrow S = \frac{155 \cdot 2}{12{,}4} = 25$$

Então a soma das medidas das bases do trapézio é 25 cm.

30. A medida da área é dada por:

$$A_{trapézio} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow A_{trapézio} \frac{(5+3) \cdot 2}{2} = 8$$

Portanto, a área mede 8 cm².

31. A figura é formada por dois trapézios equivalentes, pois as medidas de seus lados são iguais. Desse modo, a medida da área total é 88 m². Portanto, serão necessários 88 m² de grama para cobrir esse terreno.

$$A_{trapézio} = 2 \cdot \frac{(13+9) \cdot 4}{2} = 44$$

$$A_{total} = 2 \cdot 44 = 88$$

32. A medida do perímetro do trapézio é 22 cm e os lados não paralelos medem 5 cm; então, a soma das medidas das bases tem que ser 12 cm.

$5 + 5 + b + B = 22 \Rightarrow B + b = 22 - 10 \Rightarrow B + b = 12$

Portanto, a área desse trapézio isósceles mede 24 cm².

$$\frac{12 \cdot 4}{2} = 24$$

33. A medida da área do paralelogramo é 400 cm².

$20 \cdot 20 = 400$

A medida da área do triângulo é 200 cm².

$$\frac{20 \cdot 20}{2} = 200$$

A medida da área do trapézio é 400 cm².

$$\frac{(27+13) \cdot 20}{2} = 400$$

34. $$A_{trapézio} = \frac{(B+b) \cdot h}{2} \Rightarrow 260 = \frac{(B+12) \cdot 10}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10B + 120 = 520 \Rightarrow B = \frac{400}{10} \Rightarrow B = 40$$

Logo, a base maior mede 40 cm.

35. O escritório pode ser dividido em um trapézio e um triângulo. No trapézio, a medida da base maior é 3,10 m, da base menor é 2,70 m e da altura é 3,10 m. No triângulo retângulo, a base mede 2,50 m e a altura mede 1,90 m.

A medida da área do trapézio pode ser estimada em 9 m².

$$A_{trapézio} = \frac{(3{,}10 + 2{,}70) \cdot 3{,}10}{2} = 8{,}99$$

A medida da área do triângulo pode ser estimada em 2,5 m².

$$A_{triângulo} = \frac{2{,}50 \cdot 1{,}90}{2} = 2{,}375$$

Portanto, a área total mede 11,365 m² (2,375 + 8,99 = = 11,365).

A área total estimada mede aproximadamente 11,5 m² (9 + 2,5 = 11,5). O erro de aproximação depende da estimativa. Comparando o valor aproximado de 11,5 m² com o valor calculado de 11,365 m², temos uma diferença de 0,135 m², o que representa aproximadamente 1,2% da medida da área total de 11,365 m².

36. a) A medida da área do terreno A é dada por:

$$A_{trapézio\ A} = \frac{(34+30) \cdot 25}{2} = 800$$

Logo, a área do terreno A mede 800 m².

36. b) A medida das áreas dos terrenos A e B são iguais. Então, temos:

$$A_{trapézio\ B} = \frac{(30+20) \cdot x}{2} \Rightarrow 800 = 25x \Rightarrow x = 32$$

A medida do lado representado por x é 32 m.

Pense mais um pouco...

Página 236

1. a) Sim, pois os triângulos foram obtidos do recorte da diagonal do mesmo retângulo, consequentemente, as áreas deles têm medidas iguais.

1. b) A medida da área do triângulo corresponde à metade da medida da área do retângulo; portanto, sua área mede 9 unidades de medida de área (18 : 2 = 9).

1. c) Será $2x$, pois a medida da área do retângulo será o dobro da medida da área do triângulo.

2. a) Sim, pois foram obtidos a partir da diagonal do mesmo paralelogramo; portanto, são equivalentes.

2. b) Sim, pois foram obtidos a partir da diagonal do mesmo paralelogramo; portanto, são equivalentes.

2. c) Não, pois o triângulo de **I** foi obtido do corte pela diagonal menor do paralelogramo **I**, e o triângulo de **II** foi obtido pelo corte da diagonal maior do paralelogramo **II**.

2. d) Se a área de **I** mede x, a área de **II** também mede x. A medida da área será a mesma, pois, mesmo que os triângulos sejam obtidos por cortes de diagonais diferentes, os triângulos de **I** e de **II** têm medida de área que é igual à metade da medida da área do paralelogramo. Como as áreas dos paralelogramos têm medidas iguais, as metades das medidas das áreas (área dos triângulos) também são iguais. Desse modo, a medida da área equivale à metade, ou seja, $\frac{x}{2}$.

2. e) Pela definição de equivalência, as medidas das áreas devem ser iguais, então **I** e **II** são equivalentes.

Página 243

Para obter a medida da área da parte verde, basta calcular a medida da área do retângulo e subtrair a medida da área do losango.

A área do retângulo mede 25,20 cm² ($4{,}20 \cdot 6{,}00 = 25{,}20$).

No losango, a diagonal maior mede 4,98 cm ($6 - 2 \cdot 0{,}51 = 4{,}98$) e a diagonal menor mede 3,18 cm ($4{,}20 - 2 \cdot 0{,}51 = 3{,}18$).

Assim, a medida da área do losango é aproximadamente 7,92 cm².

$$A_{losango} = \frac{4{,}98 \cdot 3{,}18}{2} = 7{,}92$$

Concluímos que a área da parte verde mede aproximadamente 17,28 cm².

$25{,}20 - 7{,}92 = 17{,}28$.

Trabalhando a informação

1. De acordo com o texto, a cada 100 habitantes, 45 viviam em áreas rurais (campo), o que representa 45%; portanto, aproximadamente 3,4 bilhões dos 7,6 bilhões de habitantes viviam no campo.

2. De acordo com o texto, 1 em cada 160 crianças são autistas; portanto, de 2 bilhões de crianças, aproximadamente 12,5 milhões são autistas.
   $2\,000\,000\,000 : 160 = 12\,500\,000$

3. São 120 estudantes no total; 40 preferem vôlei, o que representa um terço da quantidade total, ou seja, aproximadamente 33,3%.

4. A resposta depende da pesquisa realizada pelos estudantes.

Exercícios complementares

3. A área de um losango mede 600 cm².
   $$\frac{D \cdot d}{2} = \frac{40 \cdot 30}{2} = 600$$
   A área de um triângulo mede 300 cm².
   $$\frac{b \cdot h}{2} = \frac{30 \cdot 20}{2} = 300$$
   A área total mede 6 000 cm² ($6 \cdot 600 + 8 \cdot 300 = 6\,000$).

4. A medida da área do trapézio é 70 cm².
   $$\frac{(18 + 10) \cdot 5}{2} = 70$$

5. A medida da área do losango é 4 cm².
   $$\frac{4 \cdot 2}{2} = 4$$
   Os quatro paralelogramos são congruentes. Assim, a área da região cinza mede 24 cm² ($4 \cdot 6 = 24$). Desse modo, o preço da parte composta de ouro é R$ 360,00 ($90 \cdot 4 = 360$), e o preço da parte composta de prata é R$ 96,00, ($4 \cdot 24 = 96{,}00$). Logo, o preço da placa é R$ 456,00 ($360 + 96 = 456$).

6. A medida da área do losango é 54,4 cm².
   $$\frac{12{,}8 \cdot 8{,}5}{2} = 54{,}4$$
   Como as medidas da área do losango e do triângulo são iguais, sendo h a altura relativa à base do triângulo, temos $h = 8{,}0$ cm.
   $$\frac{13{,}6 \cdot h}{2} = 54{,}4 \Rightarrow h = \frac{54{,}4 \cdot 2}{13{,}6} \Rightarrow h = 8$$

8. Temos um retângulo de base medindo 12 cm e altura medindo 10 cm. Também é possível identificar dois triângulos de bases medindo 12 cm e alturas medindo x cm e $(10 - x)$ cm.
   A medida da área do quadrilátero é dada por $A_1 + A_2$.
   $$A_1 = \frac{12 \cdot x}{2}$$
   $$A_2 = \frac{12 \cdot (10 - x)}{2}$$
   $$A_1 + A_2 = \frac{12x + 120 - 12x}{2} = \frac{120}{2} = 60$$
   Portanto, a medida da área do quadrilátero é 60 cm².
   Alternativa **b**.

9. Do quadrilátero $ABDE$, podemos obter dois triângulos traçando o segmento $\overline{DA}$. Assim, podemos calcular a medida da área do quadrilátero $ACDF$ pela soma das medidas das áreas dos triângulos ADF e ACD. O triângulo ADF tem área de medida 21 u² $\left(\frac{6 \cdot 7}{2} = 21\right)$. A base do triangulo ACD mede 2 u; e sua altura mede 10 u, portanto, sua área medirá 10 u² $\left(\frac{2 \cdot 10}{2} = 10\right)$. Logo, a área do quadrilátero $ACDF$ mede 31 u² ($21 + 10 = 31$).
   Alternativa **c**.

Verificando

3. Vamos considerar que a medida da área dessa face seja igual à medida da área de um triângulo de base medindo 36 cm e altura medindo 18 cm, subtraído da medida da área de um triângulo cuja base mede 20 cm e a altura mede 10 cm. Assim:

$$A = \frac{36 \cdot 18}{2} - \frac{20 \cdot 10}{2} \Rightarrow A = 324 - 100 \Rightarrow A = 224$$

A área mede 224 cm².

Alternativa **a**.

4. O triângulo é retângulo, então um dos seus lados coincide com sua altura. Precisamos descartar a medida de lado 5 cm, pois a maior medida de um triângulo é a hipotenusa. Assim, a área mede 6 cm².

$$\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

Alternativa **c**.

5. Sendo D a diagonal maior do losango, a medida da área do losango é dada por:

$$\frac{D \cdot 7{,}0}{2} = 45{,}5 \Rightarrow D = 91 : 7 \Rightarrow D = 13$$

Assim, a diagonal mede 13 cm.

Alternativa **b**.

6. A área da tela mede 576 cm².

$$A_{losango} = \frac{D \cdot d}{2} \Rightarrow A_{losango} = \frac{48 \cdot 24}{2} = 576$$

Alternativa **a**.

7. A medida da área total é dada pela soma das medidas das áreas de cada trapézio lateral, da medida da área da base quadrada e da medida da área da tampa da urna. Assim:

$$A_{total} = 4 \cdot \frac{(18 + 10) \cdot 30}{2} + 18 \cdot 18 + 10 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_{total} = 1\,680 + 324 + 100 = 2\,104$$

Logo, a área total do papelão usado para a construção da urna mede 2 104 cm².

Alternativa **b**.

8. A figura tem a forma de um trapézio. A medida da área do quadrado é 16 cm² (4 · 4 = 16). Como o triângulo retângulo é isósceles, um de seus lados coincide com sua altura; portanto, a medida de sua área é 8 cm² ($\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$). Consequentemente, a medida da área do trapézio formado é 24 cm² (16 + 8 = 24).

Alternativa **b**.

Capítulo 12 – Geometria e grandezas

Objetivos do capítulo e justificativas

- Reconhecer polígono regular e suas propriedades: ser inscritível em uma circunferência e ser circunscritível a uma circunferência.
- Reconhecer os elementos de um polígono regular.
- Analisar a descrição de procedimentos para construção de um polígono regular.
- Construir polígonos regulares.
- Determinar a área de um círculo.
- Resolver e elaborar problemas envolvendo a área de um círculo.
- Estabelecer uma expressão para o cálculo do volume de um cilindro circular reto.
- Relacionar volume e capacidade.
- Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico.
- Resolver problemas envolvendo medidas de volume e de capacidade.

Este capítulo aborda conteúdos de **Álgebra**, **Geometria** e **Grandezas e Medidas**, possibilitando aos estudantes aplicar conhecimentos trabalhados anteriormente e perceber a relação entre eles; assim, desenvolvem a **competência específica 3**.

Reconhecer os elementos dos polígonos regulares e suas propriedades e estabelecer expressões algébricas para a medida da área de um círculo ou para a medida do volume de prisma e cilindro retos favorecem o desenvolvimento das **competências gerais 2** e **4** e da **competência específica 2**, pois os estudantes precisam argumentar, defender ideias e justificar procedimentos nas diferentes atividades propostas no capítulo.

Para determinar a expressão que relaciona a medida da área ao raio de um círculo, exploram-se elementos da história da Matemática, favorecendo o desenvolvimento da **competência geral 1** e da **competência específica 1**.

O exercício 24 da seção *Exercícios propostos* explora o uso consciente da água, propondo aos estudantes que reflitam sobre ações que podem ser planejadas para evitar o aumento no uso de água e não gerar uma crise hídrica no país, contribuindo para o trabalho com a **competência geral 7** e a **competência específica 6**.

Diferentes atividades propostas no decorrer do capítulo favorecem o desenvolvimento das **competências gerais 9 e 10** e da **competência específica 8**, pois os estudantes deverão, em grupos, pesquisar e discutir diferentes estratégias de resolução de problemas, bem como expor opiniões e ideias e respeitar as dos colegas, interagindo com eles.

Habilidades trabalhadas no capítulo

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares.

(EF08MA16) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.

(EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações.

(EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes.

(EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

Os conhecimentos abordados neste capítulo também se referem à Unidade Temática **Grandezas e medidas**, oportunidade para ampliar o trabalho com medidas de área (com a área do círculo) e as ideias que envolvem medidas de volume e de capacidade, destacando a relação entre um decímetro cúbico e um litro, além de apresentar o volume de um cilindro reto; dessa maneira, desenvolvem-se as habilidades (EF08MA19), (EF08MA20) e (EF08MA21). Os conhecimentos acerca de medida de volume e de capacidade estão embasados nos anos anteriores, em especial no 7º ano (EF07MA30), que, por sua vez, visam preparar o estudante para o conhecimento acerca de medidas de volume a ser desenvolvido no 9º ano (EF09MA19).

As conexões com outras Unidades Temáticas estão presentes nas diversas atividades propostas que compreendem medidas. A relação com a Unidade Temática **Álgebra** aparece quando as propostas envolvem o cálculo de valor numérico de expressões algébricas tratadas no capítulo; e a articulação com a Unidade Temática **Geometria** ocorre por meio de atividades que promovem o reconhecimento de polígono regular, seus elementos e a relação entre a soma das medidas de seus ângulos (internos ou externos) e a quantidade de lados do polígono, na descrição de procedimentos para a construção de polígono regular e em construções de polígonos inscritos ou circunscritos a uma circunferência mobilizando as habilidades (EF08MA15) e (EF08MA16).

Comentários e resoluções

Apresentaremos a seguir as resoluções de alguns exercícios e atividades propostos neste capítulo. As resoluções que não constam nesta parte específica estão nas *Orientações didáticas* que acompanham as reproduções das páginas do livro do estudante.

Exercícios propostos

1. Lembrando que um polígono inscrito tem todos os seus vértices pertencentes à circunferência, e um polígono circunscrito tem uma circunferência que tangencia todos os lados do polígono em seus pontos médios.

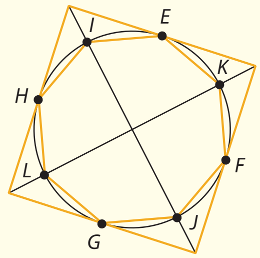
1. **a)** Os quatro vértices pertencem à circunferência, portanto o polígono é inscrito.

1. **b)** Apenas quatro dos cinco vértices pertencem à circunferência, portanto ele não é inscrito nem circunscrito.

1. **c)** A circunferência tangencia todos os lados do polígono, portanto, o polígono é circunscrito.

1. **d)** Apenas dois dentre os quatro vértices do polígono pertencem à circunferência, portanto ele não é inscrito nem circunscrito.

2.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

O polígono (octógono) será inscrito.

3. **b)** Não é polígono regular, pois não tem todos os ângulos congruentes.

3. **d)** Não é polígono regular, pois não tem todos os lados congruentes.

4. Uma sugestão de resposta é um fluxograma como o que segue.

Dada uma circunferência *C* de centro *O*.

↓

Traçar uma reta que passe pelo centro *O* e por quaisquer 2 pontos da circunferência, determinando os pontos *A* e *B* que são vértices do hexágono.

↓

Com o transferidor, determinar um ângulo $A\hat{O}D$ medindo 60°, com lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OD}$.

↓

Com o transferidor, determinar um ângulo $D\hat{O}E$ medindo 60°, com lados $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$.

↓

Com o transferidor, determinar um ângulo $B\hat{O}F$ medindo 60°, com lados $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OF}$.

↓

Com o transferidor, determinar um ângulo $F\hat{O}G$ medindo 60°, com lados $\overrightarrow{OF}$ e $\overrightarrow{OG}$.

↓

Com a régua, traçar os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EB}$, $\overline{BF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GA}$, obtendo o hexágono *ADEBFG*.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

5. Em um triângulo equilátero, temos:

$$a_c = \frac{360}{n} \Rightarrow a_c = \frac{360}{3} \Rightarrow a_c = 120$$

Assim, o ângulo central mede 120°.

6. Para que o ângulo interno (a_i) seja igual ao ângulo externo (a_e) é necessário que $a_i = a_e = 90°$ (pois juntos eles medem 180°). Para que o ângulo central também tenha medida 90°, temos $a_c = \frac{360}{n} \Rightarrow 90 = \frac{360}{n} \Rightarrow$ $\Rightarrow n = 4$, ou seja, o número de lados tem de ser igual a 4. Desse modo, o polígono tem de ser um quadrado.

7. **a)** $a_c = \frac{360}{n} \Rightarrow a_c = \frac{360}{20} \Rightarrow a_c = 18$

Assim, o ângulo central mede 18°.

7. **b)** $a_i = \dfrac{S_i}{n} \Rightarrow a_i = \dfrac{(n-2)\cdot 180}{n} \Rightarrow a_i = \dfrac{(20-2)\cdot 180}{20} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_i = 162$

Portanto, o ângulo interno mede 162°. Agora, considerando que o ângulo interno a_i e o ângulo externo a_e são ângulos suplementares, temos a relação:

$a_i + a_e = 180 \Rightarrow a_e = 180 - 162 \Rightarrow a_e = 18$

Portanto, o ângulo externo mede 18°.

8. **a)** $a_i = \dfrac{S_i}{n} \Rightarrow 144 = \dfrac{(n-2)\cdot 180}{n} \Rightarrow 144 = \dfrac{180n - 360}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow 144n = 180n - 360 \Rightarrow 36n = 360 \Rightarrow n = 10$

Portanto, o polígono tem 10 lados.

8. **b)** Como a_i e a_e são suplementares, temos:

$a_i = 180 - a_e \Rightarrow a_i = 180 - 30 \Rightarrow a_i = 150$

Assim, o ângulo interno mede 150°. Usando a propriedade dos ângulos internos:

$a_i = \dfrac{(n-2)\cdot 180}{n} \Rightarrow 150 = \dfrac{180n - 360}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow 150n = 180n - 360 \Rightarrow 30n = 360 \Rightarrow n = 12$

Portanto, o polígono tem 12 lados.

8. **c)** Para encontrarmos o número de lados n, podemos usar a relação entre o ângulo central e o número de lados de um polígono, assim:

$a_c = \dfrac{360}{n} \Rightarrow 10 = \dfrac{360}{n} \Rightarrow n = \dfrac{360}{10} \Rightarrow n = 36$

Assim, o polígono tem 36 lados.

11. A partir dos dados do exercício, por tratar-se de um hexágono regular, concluímos que $n = 6$. Desse modo, podemos usar a relação entre o ângulo central e o número de lados:

$a_c = \dfrac{360}{n} \Rightarrow a_c = \dfrac{360}{6} \Rightarrow a_c = 60$

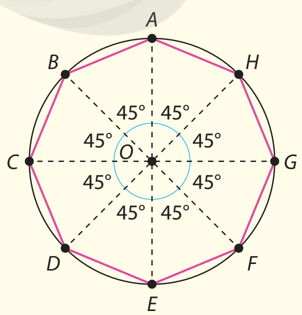
O ângulo central mede 60°. Assim, a medida do ângulo interno é dada por:

$a_i = \dfrac{S_i}{n} \Rightarrow a_i = \dfrac{(n-2)\cdot 180}{n} \Rightarrow a_i = \dfrac{(6-2)\cdot 180}{6} \Rightarrow$

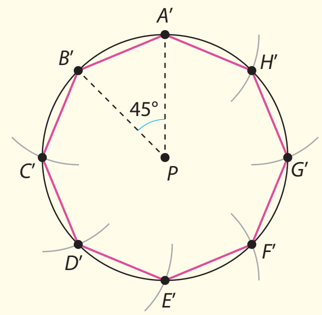
$\Rightarrow a_i = \dfrac{720}{6} \Rightarrow a_i = 120$

Ou seja, o ângulo interno mede 120°. Como a_e e a_i são suplementares, podemos usar a relação $a_e = 180 - 120 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_e = 60$, ou seja, o ângulo externo mede 60°.

13. As respostas dependem do total de lados do polígono escolhido. Considerando $n = 8$ como exemplo, temos:



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

14. **a)** O raio de um polígono regular tem a mesma medida do raio da circunferência circunscrita a ele. Além disso, um hexágono regular *ABCDEF*, com centro no ponto O, pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, congruentes ao triângulo *AOB*. Assim, $AO = OB = AB = 9$; portanto, o raio mede 9 cm.

14. **b)** $C = 2\pi r \Rightarrow C = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9 \Rightarrow C = 56{,}52$

Portanto, o comprimento da circunferência mede 56,52 cm.

14. **c)** Vamos encontrar a área do círculo usando a aproximação $\pi \simeq 3{,}1416$. Assim:

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = \pi \cdot 9^2 \Rightarrow A = 3{,}1415 \cdot 81 \simeq 254{,}47$

Portanto, a área dessa circunferência mede aproximadamente 254,47 cm².

15. Sejam x e $2r$, respectivamente, as medidas do comprimento e do raio da circunferência maior. Assim:

$x = 2\pi(2r) = 2 \cdot (2\pi r) = 2 \cdot C$

Portanto, alternativa **c**.

18. Oriente os estudantes na realização da atividade incentivando-os a elaborar problemas contextualizados. Após realizarem a atividade, solicite aos estudantes que apresentem o problema elaborado aos demais colegas e, se possível, que resolvam na lousa alguns deles.

20. A resposta dependerá das embalagens pesquisadas pelos estudantes. Ressalte que, por imprecisão dos instrumentos utilizados, as medidas de volume obtidas serão aproximadas.

22. **a)** Como 1 L = 1 dm³, temos que:

12 dm³ = 12 L

22. **b)** Como 1 m³ = 1 000 L, temos que:

5,4 m³ = (5,4 · 1 000) L = 5 400 L

22. **c)** Como 1 dm³ = 1 000 cm³, temos que:

30 cm³ = (30 : 1 000) L = 0,03 L

22. **d)** Como 1 dm³ = 1 000 cm³, temos que:

30 cm³ = (30 : 1 000) dm³ = 0,03 dm³

Como 1 dm³ = 1 L, temos que:

0,03 dm³ = 0,03 L

Agora, como 1 L = 1 000 mL, temos que:

0,03 L = (0,03 · 1 000) mL = 30 mL

22. e) Como $1\ m^3 = 1\,000\,000\,000\ mm^3$, temos que:
$500\ mm^3 = (500 : 1\,000\,000\,000)\ m^3 = 0{,}0000005\ m^3$
Agora, como $1\ m^3 = 1\,000\ L$, temos que:
$0{,}0000005\ m^3 = (0{,}0000005 \cdot 1\,000)\ L = 0{,}0005\ L$
Finalmente como $1\ L = 1\,000\ mL$, temos que:
$0{,}0005\ L = (0{,}0005 \cdot 1\,000)\ mL = 0{,}5\ mL$.

22. f) Como $1\ m^3 = 1\,000\ L$, temos que:
$0{,}25\ m^3 = (0{,}25 \cdot 1\,000)\ L = 250\ L$

23. Como a caixa é cúbica e tem arestas medindo 0,80 m, vamos determinar a medida de seu volume (V):
$V = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 \Rightarrow V = 0{,}512$
Assim, a medida do volume é $0{,}512\ m^3$.
Como $1\ m^3 = 1\,000\ L$, então:
$0{,}512\ m^3 = (0{,}512 \cdot 1\,000)\ L = 512\ L$
Portanto, a medida da capacidade é 512 L.

25. Se o consumo mensal foi de $22\ m^3$, e sabendo-se que $1\ m^3$ equivale a 1 000 L, teremos:
$22\ m^3 = (22 \cdot 1\,000)\ L = 22\,000\ L$
Portanto, foram gastos 22 000 L de água.

26. A resposta depende do número de habitantes da cidade, mas, para esboçar uma resolução generalizada, usaremos n para designar o número de habitantes do município.
Então, $q = \dfrac{n}{2{,}9}$ é a quantidade média de domicílios, ou seja, quantidade média de caixas-d'água desse município. A medida de tempo para encher uma caixa-d'água, visto que uma caixa-d'água tem 500 L ($0{,}5\ m^3$), será dada, em segundo, por:
$t = 0{,}5 : 56 \Rightarrow t \simeq 0{,}009$
Então, basta fazer $t = 0{,}009 \cdot q$ para obter a medida de tempo que o sistema levaria para encher todas as caixas-d'água da cidade, considerando que, inicialmente, todas estejam vazias.

28. Inicialmente, a piscina contém $48\ m^3$ de água, ou seja, 48 000 L de água (pois $8 \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 48$).
Ao entrarem as 10 pessoas, o nível de água sobe 2 cm, então, a nova medida de volume é $48{,}64\ m^3$ (pois $8 \cdot 4 \cdot 1{,}52 = 48{,}64$). Como $1\ m^3 = 1\,000\ L$, a medida do volume é 48 640 L. Ou seja, o volume aumentou 640 litros ($48\,640 - 48\,000 = 640$). Como $1\ L = 1\ dm^3$, então a medida do volume aumentou $640\ dm^3$. Como $640 : 10 = 64$, temos que a medida do volume médio do corpo de cada pessoa é $64\ dm^3$.

29. Como foram 3 etapas por 10 dias, a quantidade total de etapas foi 30 ($3 \cdot 10 = 30$). Visto que, em cada uma dessas etapas, foram acrescentados 3 mL, a medida total acrescentada foi 90 mL ($30 \cdot 3 = 90$). Como $1\ cm^3 = 1\ mL$, então 90 mL correspondem a $90\ cm^3$.

30. A medida de tempo que essa quantidade de água seria suficiente para uma pessoa beber é 75 dias (pois $150 : 2 = 75$).

31. a) Basta fazer a medida do volume de álcool produzido com a cana-de-açúcar dividida pela medida do volume de álcool produzido com o milho, ficando $7\,500 : 3\,000 = 2{,}5$. Assim, cana-de-açúcar rende 2,5 vezes mais etanol que o milho.

31. b) A partir da leitura do texto, é dado que 1 hectare de cana-de-açúcar rende 7,5 mil litros de etanol, portanto 4,3 milhões de hectares renderá 32 250 000 000 L, pois: $4\,300\,000 \cdot 7\,500 = 32\,250\,000\,000$

Pense mais um pouco...

Página 266

a) Seja V_m a medida do volume (em litro) de água despejada a cada m minuto, então, para $m > 1$, m natural, e com $V_1 = 1$, temos:
$V_m = 2 \cdot (V_{m-1})$
$V_5 = 2 \cdot V_4 = 2 \cdot 8 = 16$
$V_6 = 2 \cdot V_5 = 2 \cdot 16 = 32$
$V_7 = 2 \cdot V_6 = 2 \cdot 32 = 64$
$V_8 = 2 \cdot V_7 = 2 \cdot 64 = 128$

b) Em V_8, o tanque fica pela metade. Nesse momento, a medida do volume é a soma das medidas de volumes despejados até então, logo, 255 L, pois:
$128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 255$

c) Se 255 é a metade do tanque, então a medida da capacidade do tanque é de 510 litros, pois $2 \cdot 255 = 510$. Note que $V_9 = 2 \cdot V_8 = 2 \cdot 128 = 256$. Logo, o tanque ficará cheio apenas um minuto depois.

Exercícios complementares

1. a) Sabendo o valor de S_i podemos descobrir o número de lados n, fazendo:
$Si = (n - 2) \cdot 180 \Rightarrow 2\,520 = (n - 2) \cdot 180 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2\,520 = 180n - 360 \Rightarrow n = 16$
Portanto, o polígono tem 16 lados.
Agora, podemos usar a relação $a_c = \dfrac{360}{n}$ e substituir n por 16 para encontrar o ângulo central. Assim, $a_c = \dfrac{360}{16} = 22{,}5$. Portanto, o ângulo central mede 22,5°.

1. b) Como se trata de um polígono regular, temos a relação:
$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{2520}{16} = 157{,}5$$
Logo, os ângulos internos medem 157,5°.

1. c) Como a_i e a_e são suplementares, temos:
$a_i + a_e = 180 \Rightarrow a_e = 22{,}5$
Portanto, o ângulo externo mede 22,5°.

2. a) Usando a relação $a_c = \dfrac{360}{n}$ e substituindo a_c por 9, teremos: $9 = \dfrac{360}{n} \Rightarrow n = 40$. O polígono tem 40 lados.

2. b) Com os dados do problema, usaremos a relação $a_i = \frac{S_i}{n}$, e substituiremos a_i por 30. Assim, obtemos:

$$30 = \frac{(n-2) \cdot 180}{n} \Rightarrow 30 = \frac{180n - 360}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 30n = 180n - 360 \Rightarrow 150n = 360 \Rightarrow n = 2{,}4$$

Como n tem de ser um número natural, esse polígono não existe.

2. c) Pelo enunciado, o ângulo interno mede 10°. Assim, concluímos que o ângulo externo mede 170° (pois são suplementares); usando a relação do ângulo interno de um polígono regular inscrito, obtemos:

$$a_i = \frac{(n-2) \cdot 180}{n} \Rightarrow 170 = \frac{180n - 360}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 170n = 180n - 360 \Rightarrow 10n = 360 \Rightarrow n = 36$$

Assim, o polígono tem 36 lados.

3. Considerando $a_i = \frac{S_i}{n}$, temos que $(n-2) \cdot 180 = 180n - 360$ deve ser o menor possível. Como $(180n - 360)$ tem de ser o menor possível, mas diferente de zero, então n tem de ser maior que 2; logo, n tem de ser igual a 3. Desse modo, trata-se de um triângulo e a soma das medidas de seus ângulos internos resulta 180°. Então, S_i tem de medir 180°. Assim, $a_i = \frac{S_i}{n} \Rightarrow a_i = \frac{180}{3} = 60$. Desse modo, para o ângulo interno ser o menor possível, ele tem de medir 60°. Já para ser o maior possível, não é possível determinar, pois $180n - 360$ tem de ser o maior possível, mas n pode ser qualquer natural maior do que 3.

4. A partir da planificação, podemos perceber que a base do paralelogramo tem 2,5 cm de medida de largura por 1,3 cm de medida de comprimento; e a altura do paralelogramo tem medida 2 cm. Assim, $V = 2{,}5 \cdot 1{,}3 \cdot 2 \Rightarrow V = 6{,}5$. Como 1 cm³ equivale a 1 000 mm³, a medida do volume do paralelepípedo é 6 500 mm³ (6,5 · 1 000 = 6 500).

5. A medida do volume da argila é dada por 1 000 vezes a medida do volume de cada tijolo. Chamando V_a a medida de volume de argila, e V_t a medida do volume de cada tijolo, então $V_a = 1000 \cdot V_t$. Agora, para descobrir a medida do volume de cada tijolo: $V_t = 22 \cdot 10 \cdot 5 \Rightarrow V_t = 1100$. Como 1 000 cm³ = 1 dm³, o volume de cada tijolo mede 1,1 dm³. Assim, o volume de argila terá medida 1 100 dm³, pois 1,1 · 1 000 = 1 100.

6. a) O problema nos fornece os dados:

$r = 25$ cm e $h = 100$ cm

Podemos calcular a medida do volume dessa caixa cilíndrica, em cm³:

$V_c = \pi r^2 h \Rightarrow V_c = 3{,}14 \cdot 25^2 \cdot 100 \Rightarrow V_c = 196\,250$

Portanto, a medida do volume é 196,25 L (pois 1 cm³ equivale a 1 mL e 1 000 mL equivale a 1 L).

6. b) A massa de água contida na caixa tem medida 196 250 g, pois 1 cm³ = 1 g.

7. No recipiente 2 mantém-se a medida da área da base em toda secção que se faça na altura h. Desse modo, ao dobrar o volume de água no recipiente, a altura h dobrará. Alternativa **c**.

8. Discuta com os estudantes o significado de economia nesse contexto do problema, considerando que a caixa-d'água é a mesma, ou seja, a medida do volume total é a mesma. Se considerarmos que a caixa-d'água tem volume de medida x, então eram gastos $\frac{2}{5}x$. Com a troca por descargas econômicas, o gasto passou a ser $\frac{1}{4}x$. Então, a economia é calculada pela diferença entre os consumos de água, ou seja, a fração da caixa-d'água economizada é $\frac{3}{20}$, pois:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = \frac{8-5}{20} = \frac{3}{20}$$

Alternativa **b**.

Verificando

5. Como o polígono regular tem 8 lados, a soma dos ângulos internos é dada por: $(8 - 2) \cdot 180 = 1080$

Portanto, a soma dos ângulos internos desse polígono é 1 080°.

Alternativa **a**.

6. A área que a fonte ocupará na praça corresponde à área da base dessa fonte. Pelo enunciado, sabemos que o raio mede 3,5 m. Então, a área mede 38,5 m² ($S = \pi \cdot r^2 \Rightarrow S = 3{,}14 \cdot 3{,}5^2 \Rightarrow S \simeq 38{,}5$).

O comprimento da circunferência da fonte mede 21,98 m ($C = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3{,}5 \simeq 2$).

Alternativa **a**.

7. A medida da área da base desse copo é 28,26 cm², pois $S = \pi \cdot r^2 \Rightarrow S = 3{,}14 \cdot 3^3 = 28{,}26$. Pelos dados do exercício, pelo fato de esse copo estar com água pela metade, a altura $h_2 = 6$ cm. Portanto, o volume de água mede 169,56 mL ($V = \pi \cdot r^2 \cdot h_2 \Rightarrow V = 28{,}26 \cdot 6 = 169{,}56$).

Alternativa **b**.

8. O volume de suco foi distribuído em 5 copos, pois:

2 000 : 400 = 5; e 1 cm³ = 1 mL

Alternativa **c**.

Organizando

a) É todo polígono cujos lados são congruentes e os ângulos internos têm a mesma medida.

b) Os pontos de tangência são os respectivos pontos médios dos lados do polígono.

c) A medida do ângulo central corresponde à divisão de 360° pelo número de lados do polígono.

d) $a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180}{n}$

e) A medida do comprimento da circunferência é dada por: $\pi \cdot r^2$

f) A medida do volume do cilindro é dada por: $\pi \cdot r^2 \cdot h$

g) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem que volume é o espaço que determinado objeto ocupa, e a capacidade é o espaço interno de um recipiente que pode ser preenchido – ou, ainda, quanto de líquido ou gás cabe no espaço interno de um recipiente.

Sugestão de avaliação diagnóstica

Atividade 1

(EF07MA01) Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.

Uma empresa produz embalagens plásticas formadas por um recipiente e por sua tampa. Os recipientes são produzidos e colocados em caixas com 48 peças, enquanto as tampas são colocadas em caixas com 60 peças. Em seguida, eles são enviados ao setor que deve receber caixas com recipientes e caixas com tampas para fazer a montagem das embalagens. Considerando que deve ser entregue o mesmo número de recipientes e tampas, quantas caixas de cada tipo, no mínimo, devem ser enviadas?

Resposta: No mínimo 5 caixas de recipientes e 4 caixas de tampas.

Resolução e comentários

Para resolver esta atividade , os estudantes precisam compreender que, como as caixas com recipientes vêm com 48 peças cada, à medida que chegam mais caixas, a quantidade de recipientes é sempre um múltiplo de 48. De modo similar, a quantidade de tampas é sempre um múltiplo de 60. Para obter o mínimo múltiplo comum, eles podem escrever os múltiplos de cada um dos valores e observar quando os valores são iguais.

Múltiplos de 48: 0, 48, 96, 144, 192, **240**, 288, ...

Múltiplos de 60: 0, 60, 120, 180, **240**, 300, ...

Assim, para montar 240 embalagens, são necessárias, no mínimo, 5 caixas com 48 recipientes cada (240 : 48 = 5) e 4 caixas com 60 tampas cada (240 : 60 = 4).

A respeito dos múltiplos de um número natural, é importante que os estudantes compreendam que os múltiplos de 48 não são necessariamente os números que "aumentam de 48 em 48". Por exemplo, a sequência 1, 49, 97, 145, ..., "aumenta de 48 em 48", mas deixa resto 1 quando os números dela são divididos por 48; logo, os números dessa sequência não são múltiplos de 48.

Atividade 2

(EF07MA02) Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.

Um produto que era vendido por R$ 40,00 teve um aumento de 20% em seu preço. Qual é o novo preço desse produto?

Resposta: R$ 48,00

Resolução e comentários

Os problemas envolvendo aumentos e decréscimos simples restringem-se basicamente a dois tipos: aqueles em que são dados um valor, a taxa de acréscimo ou de decréscimo e pede-se o novo valor; e aqueles em que são dados a taxa de acréscimo ou de decréscimo, o valor final obtido e pede-se o valor inicial. Em geral, o primeiro tipo, abordado nesta atividade, é considerado mais simples pelos estudantes, e pode ser resolvido por meio da aplicação da ideia de proporcionalidade. Observe, a seguir, algumas resoluções possíveis.

- 20% é um quinto de 100% (100% : 5 = 20%). Portanto, basta dividir o valor inicial por 5 para determinar o valor do aumento do preço do produto (R$ 40,00 : 5 = R$ 8,00) e, em seguida, adicionar o valor obtido ao valor inicial (R$ 8,00 + R$ 40,00 = R$ 48,00).
- 20% pode ser escrito na forma decimal como 0,20. Assim, para determinar o valor do aumento do preço do produto, basta fazer 0,20 · R$ 40,00 = R$ 8,00. Em seguida, basta adicionar o valor obtido ao valor inicial (R$ 8,00 + R$ 40,00 = R$ 48,00).
- É possível primeiro calcular qualquer outra porcentagem do valor inicial, por exemplo, 10%, para depois aplicar a ideia de proporcionalidade. 10% de R$ 40,00 são R$ 4,00 (R$ 40,00 · 0,10 = R$ 4,00). Portanto, 20% de R$ 40,00 são R$ 8,00 (2 · R$ 4,00 = R$ 8,00). Assim, adicionado o valor obtido para o aumento ao valor inicial, concluímos que o novo preço do produto é de R$ 48,00 (R$ 8,00 + R$ 40,00 = = R$ 48,00).
- Como o preço inicial corresponde a 100% do valor, após um aumento de 20%, o produto passará a custar 120% daquele valor. 120% pode ser escrito na forma decimal como 1,20; então, 120% de R$ 40,00 é igual a R$ 48,00 (R$ 40,00 · 1,20 = R$ 48,00).

Atividade 3

(EF07MA03) Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração.

A temperatura máxima adequada para a conservação de carne de aves congelada mede 18 graus Celsius negativos, enquanto a temperatura máxima adequada para a conservação de carne de aves refrigerada mede 4 graus Celsius positivos. Uma câmara fria registra 8 graus Celsius positivos. Quanto a medida da temperatura deve diminuir para chegar à medida de temperatura máxima adequada em cada caso?

Resposta: Deve diminuir 26 °C para atingir a medida de temperatura máxima adequada para o congelamento e 4 °C para atingir a medida de temperatura máxima adequada para a refrigeração.

Resolução e comentários

Um modo de resolver a atividade é realizar os cálculos por meio dos procedimentos usuais.

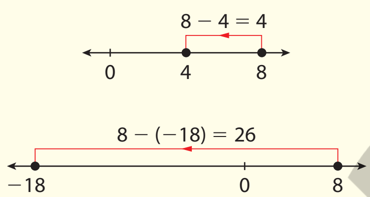
Considerando a diferença entre a medida de temperatura da câmara fria (+8 °C) e a medida de temperatura recomendada para carnes refrigeradas (+4 °C) , determinamos quanto a temperatura deve diminuir para chegar à medida de temperatura máxima adequada para a refrigeração.

8 °C – 4 °C = 4 °C

Considerando a diferença entre a medida de temperatura da câmara fria (+8 °C) e a medida de temperatura recomendada para carnes congeladas (–18 °C) , determinamos quanto a temperatura deve diminuir para chegar à medida de temperatura máxima adequada para o congelamento.

8 °C – (–18 °C) = 26 °C

Caso os estudantes utilizem a reta numérica para a resolução, eles precisam localizar corretamente os números nela e calcular a distância entre os valores pedidos.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

A representação visual possibilita aos estudantes observar que, no primeiro caso, a diferença entre as medidas 8 °C e 4 °C é igual a 4 °C (8 – 4 = 4). No segundo caso, de –18 °C a 0 °C a diferença é igual a 18 °C; a diferença de 0 °C a 8 °C é igual a 8 °C; portanto, a diferença entre as medidas 8 °C e –18 °C é igual a 26 °C [8 °C – (–18 °C) = 26 °C].

Atividade 4

(EF07MA04) Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.

Marcelo tinha R$ 84,00 em sua conta corrente. Ele pagou uma conta no valor de R$ 112,00 e, em seguida, depositou R$ 75,00. Qual é o saldo final da conta de Marcelo?

Resposta: R$ 47,00

Resolução e comentários

Ao resolver a atividade, os estudantes podem realizar as operações na sequência em que são apresentadas (84 – 112 + 75) ou adicionar os valores positivos (84 + 75) e, depois, adicionar o resultado a (–112).

No primeiro caso, ao fazer 84 – 112, os estudantes devem reconhecer que o resultado será negativo, pois o valor absoluto de –112 é maior do que o valor absoluto de 84. Adicionando essas parcelas, temos 84 – 112 = –28. Em seguida, como +75 tem maior valor absoluto do que –28, conclui-se que o resultado será positivo: –28 + 75 = 47.

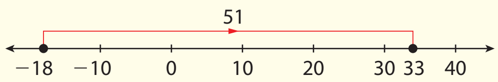
O segundo procedimento facilita os cálculos porque, após adicionar os dois valores positivos, 84 + 75 = = 159, compara-se com o valor negativo –112 e observa-se que o resultado será positivo: 159 – 112 = 47.

Atividade 5

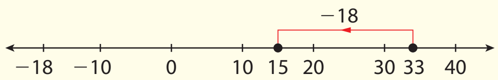
(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

Flávio quer calcular o resultado de (–18 + 33). Qual dos procedimentos mostrados a seguir **não** permite obter a resolução correta?

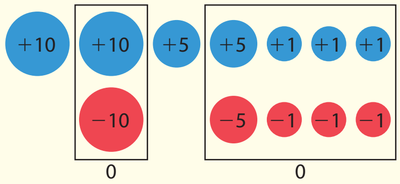
a)



b)



c)



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

d) $-18 + 33 = -(33 - 18) = -15$

Resposta: Alternativas **a** e **d**.

Resolução e comentários

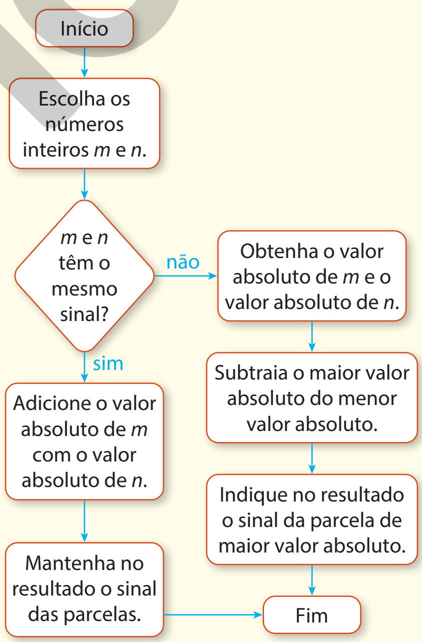
As duas primeiras alternativas enfatizam o uso da reta numérica para a realização da operação. Na alternativa **a** foi representado o deslocamento de -18 até 33, o que representa uma adição de valores: $-(-18) + 33 = 51$. Portanto, essa alternativa está incorreta. Já na alternativa **b** foi representada a subtração $33 - 18 = 15$. Observe se os estudantes entendem a representação em cada caso. Se tiverem dificuldades, apresente outros exemplos com operações envolvendo números positivos e negativos. A alternativa **c** utiliza a ideia de cancelamento ao se fazer a adição de números opostos: as 18 unidades positivas, representadas em azul, se anulam com as 18 unidades negativas, representadas em vermelho; restam, então, 15 unidades positivas. A alternativa **d** está incorreta, pois considera que o sinal resultante da adição dos dois valores é negativo.

Atividade 6

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

Acompanhe o fluxograma a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é o tipo de problema que a aplicação desse fluxograma permite resolver?

a) A comparação entre dois números inteiros.

b) A subtração de dois números inteiros.

c) A adição de dois números inteiros.

d) A multiplicação de dois números inteiros.

Resposta: Alternativa **c**.

Resolução e comentários

Esta atividade tem por objetivo avaliar se os estudantes reconhecem que os fluxogramas podem representar as diversas etapas para resolver uma categoria de problemas similares. Como os números designados por *m* e *n* são inteiros, é possível que ambos tenham o mesmo sinal ou sinais opostos, o que é verificado no bloco de tomada de decisão. No caso da resposta ser "sim", adicionar dois números positivos resulta em outro número positivo e adicionar dois números negativos resulta em outro número negativo; assim, como o sinal da soma não se altera, basta adicionar o valor absoluto ou módulo das parcelas e manter o sinal das parcelas envolvidas na adição. Por outro lado, se os sinais das parcelas são opostos, prevalece o sinal daquela de maior valor absoluto e, em seguida, deve-se subtrair a menor parcela da maior. Portanto, o fluxograma apresenta as etapas para a realização de uma adição qualquer de dois números inteiros.

Atividade 7

(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

André, Beatriz, Carlos e Denise estavam no mesmo restaurante para comer *pizza*. Considerando que as *pizzas* consumidas eram de mesmo tamanho, analise as situações:

- André comeu uma fatia de uma *pizza* dividida em 4 partes iguais;
- Beatriz estava em um grupo de 5 amigos que dividiram igualmente 2 *pizzas* entre si;
- Carlos comeu 2 dos 8 pedaços de uma *pizza*;
- Denise comeu um sexto de 2 *pizzas*.

Ordene em ordem crescente a fração de *pizza* que cada um deles comeu.

Resposta: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{5}$

Resolução e comentários

Esta atividade avalia a compreensão dos estudantes sobre as diferentes ideias de fração e a comparação entre os valores de frações representadas por meio de diferentes denominadores. No caso de André, a ideia envolvida é a parte de um todo dividido em partes iguais, em que 1 parte de um total de 4 corresponde a $\frac{1}{4}$. Ao dizer que Carlos comeu 2 de cada 8 pedaços, a ideia é a de razão, no caso, $\frac{2}{8}$. Por fim, o consumo de Denise é descrito por meio da ideia de operador, ou seja, $\frac{1}{6}$ de 2 $\left(\frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{2}{6}\right)$.

Para comparar as frações, os estudantes podem fazer uso da divisão do numerador pelo denominador.

$1 : 4 = 0{,}25$ $\quad$ $2 : 5 = 0{,}40$ $\quad$ $2 : 8 = 0{,}25$ $\quad$ $2 : 6 = 0{,}33...$

Outra possibilidade é por meio de frações equivalentes:

mmc(4, 8, 6, 5) = 120

$\frac{1}{4} = \frac{30}{120}$ $\quad$ $\frac{2}{5} = \frac{48}{120}$ $\quad$ $\frac{2}{8} = \frac{30}{120}$ $\quad$ $\frac{2}{6} = \frac{40}{120}$

Em qualquer caso, a ordenação obtida por meio da comparação das frações deve ser:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} < \frac{2}{6} < \frac{2}{5}$$

Atividade 8

(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.

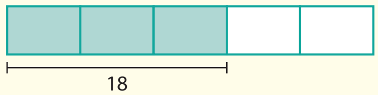
Vítor e Patrícia colheram maçãs em um pomar e, ao final, Vítor percebeu que colheu 3 de cada 5 maçãs obtidas por eles. Se Vítor colheu 18 maçãs, quantas foram colhidas por Patrícia?

Resposta: 12 maçãs

Resolução e comentários

Os estudantes podem ter dificuldades para resolver atividades que envolvem a divisão em partes proporcionais. Isso pode ocorrer devido à falta de compreensão do conceito envolvido ou da linguagem utilizada. Há diferentes modos de resolução.

- Por meio de representação em diagramas.
  Como a referência dada é a de que Vítor colheu 3 de cada 5 maçãs, pode-se representar a situação como na figura a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

  Como as 3 partes colhidas por Vítor correspondem a 18 maçãs, conclui-se que cada parte contém 6 maçãs (18 : 3 = 6). Portanto, as duas partes de Patrícia correspondem a 12 maçãs ($2 \cdot 6 = 12$).

- Por meio de equação.
  Se Vítor colheu $\frac{3}{5}$ das maçãs, então essa fração do total *x* corresponde a 18.

$$\frac{3}{5} \cdot x = 18 \Rightarrow x = \frac{5 \cdot 18}{3} = 30$$

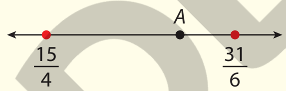
Portanto, a parte colhida por Patrícia corresponde a $\frac{2}{5}$ de 30, ou seja, 12 maçãs (30 – 18 = 12).

$$\frac{2}{5} \cdot 30 = 12$$

Atividade 9

(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

Assinale a alternativa que apresenta o número associado ao ponto *A*, cuja localização na reta numérica fica entre $\frac{15}{4}$ e $\frac{31}{6}$.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

a) $\frac{28}{5}$ **b)** $\frac{19}{4}$ **c)** $\frac{22}{6}$ **d)** $\frac{26}{5}$

Resposta: Alternativa **b**.

Resolução e comentários

A atividade apresenta a comparação de frações por meio de sua localização na reta numérica, $\frac{31}{6} > \frac{15}{4}$, e pede aos estudantes que identifiquem a fração localizada entre elas. Um modo de resolver a atividade é por meio da ideia de fração como divisão, não sendo necessário realizar o cálculo até a obtenção de todas as suas ordens decimais, bastando, apenas, um valor aproximado. Como 15 : 4 = 3,75 e 31 : 6 ≃ 5,167; conclui-se que a alternativa correta deve indicar uma fração cujo valor situa-se entre esses dois valores. Essa fração é $\frac{19}{4}$.

- 28 : 5 = 5,6
- 19 : 4 = 4,75
- 22 : 6 = 3,67
- 26 : 5 = 5, 2

Atividade 10

(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

Acompanhe como Ricardo realizou o cálculo 2,4 : 0,08.

- Primeiro, ele igualou o número de casas decimais acrescentando um algarismo zero em 2,4 e eliminou as vírgulas:

$$240 \;\underline{|\;008\quad}$$

- Em seguida, ele fez a divisão 240 : 8, obtendo o quociente 30.

Indique a alternativa que justifica de forma correta o processo executado por Ricardo.

a) Acrescentar o algarismo zero equivale a dividir 2,4 por 10. Eliminar as vírgulas equivale a multiplicar 2,4 e 0,08 pelo mesmo valor.

b) O algarismo zero foi acrescentado porque 2,4 é o mesmo que 2,40. Ao eliminar as vírgulas, significa que tanto 2,4 quanto 0,08 foram multiplicados por 100, não alterando o resultado da divisão original.

c) Acrescentar o algarismo zero equivale a multiplicar 2,4 por 100. Eliminar as vírgulas equivale a multiplicar 2,4 por 10 e multiplicar 0,08 por 100.

d) Acrescentar o algarismo zero equivale a multiplicar 2,4 por 10. Eliminar as vírgulas equivale a multiplicar 2,4 por 100 e 0,08 por 10.

Resposta: Alternativa **b**.

<u>Resolução e comentários</u>

O objetivo desta atividade é avaliar se os estudantes reconhecem os princípios por meio dos quais o algoritmo utilizado por Ricardo é válido. É importante que os estudantes compreendam os procedimentos empregados no cálculo, e não somente reproduzam uma sequência de passos de forma mecânica, pois isso permite desenvolver as habilidades relacionadas ao uso dos princípios de uma igualdade, além de desenvolver ferramentas que podem ser úteis para o cálculo mental e a resolução de problemas. É esperado que eles reconheçam que o acréscimo do algarismo zero à direita da parte decimal do número não o altera, o que pode ser mostrado fazendo:

$$2{,}4 = \frac{24}{10} = \frac{24 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{240}{100} = 2{,}40$$

A etapa seguinte, na qual as vírgulas são retiradas, exige que os estudantes compreendam que, em uma igualdade, a multiplicação dos dois membros pelo mesmo número não nulo preserva a igualdade. É esperado que os estudantes tenham sido expostos a situações em que tenham aplicado essa propriedade, que pode ser observada em exemplos simples.

30 : 6 = 5 300 : 60 = 5 3 000 : 600 = 5 30 000 : 6 000 = 5

Assim, na divisão 2,4 : 0,08, ao multiplicar o dividendo e o divisor por 100; 2,4 torna-se 240 e 0,08 torna-se 8, o que equivale a "eliminar as vírgulas".

<u>Atividade 11</u>

(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

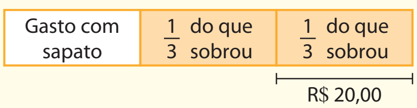
Use as informações a seguir, complete-as com outras de modo a elaborar um problema que faça sentido e resolva-o.

- Com metade do que restou, Fernanda pagou R$ 20,00 em um ingresso para o cinema.
- Fernanda gastou $\frac{1}{3}$ do que tinha na compra de um par de sapatos.

Exemplo de resposta: Fernanda gastou $\frac{1}{3}$ do que tinha na compra de um par de sapatos. Com metade do que restou, Fernanda pagou R$ 20,00 em um ingresso para o cinema. Quantos reais ela tinha no início? Resposta: Fernanda tinha R$ 60,00.

<u>Resolução e comentários</u>

Ao serem apresentados a informações incompletas, os estudantes devem mobilizar diversas habilidades desenvolvidas ao longo de sua escolarização e reuni-las de modo que texto e encadeamento lógico das condições fornecidas façam sentido no problema a ser criado, o que envolve, também, a compreensão dos procedimentos associados ao cálculo com frações. O modo como as informações foram escritas restringe, por exemplo, a ordem em que as duas frases devem se suceder no texto, pois, ao afirmar que ela pagou R$ 20,00 usando metade do que restou, sugere-se que houve um gasto anterior, que pode se referir à frase em que aparece a menção à personagem Fernanda ou à inclusão de outros gastos intermediários que os estudantes podem inserir a seu critério. No caso do exemplo de resposta apresentado, os estudantes podem representar a situação por meio de um esquema.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

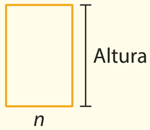
Como Fernanda gastou $\frac{1}{3}$ do que tinha com a compra do par de sapatos, restaram $\frac{2}{3}$ do total. Então, como ela gastou metade do que sobrou, ou seja, $\frac{1}{3}$ do total, com a compra do ingresso, conclui-se que cada terço corresponde a R$ 20,00 e que no início Fernanda tinha $3 \cdot$ R$ 20,00 = R$ 60,00.

IRENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade 12

(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando–a da ideia de incógnita.

No retângulo a seguir, a medida da altura é 1 unidade maior do que a medida *n* da base.



Considerando essa informação, complete corretamente o quadro a seguir.

Medida da base (*n*)	Medida da altura	Medida do perímetro
1		
2		
3		
n		

Resposta:

Medida da base (*n*)	Medida da altura	Medida do perímetro
1	2	$1 + 2 + 1 + 2 = 6$
2	3	$2 + 3 + 2 + 3 = 10$
3	4	$3 + 4 + 3 + 4 = 14$
n	$n + 1$	$n + n + 1 + n + n + 1 = 4n + 2$

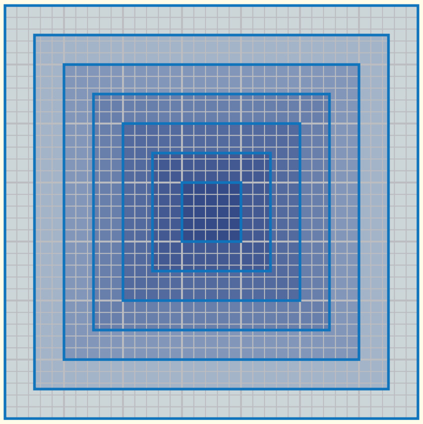
Resolução e comentários

Nesta atividade, os estudantes devem compreender que a partir da variável *n* é possível obter uma expressão algébrica para a medida da altura do retângulo e para a medida do perímetro. Espera-se que o uso de um quadro seja familiar aos estudantes, pois as variações sugeridas para *n* na coluna correspondente auxiliam no reconhecimento de seu caráter “variável”, em contraposição à ideia de incógnita, que decorre de uma igualdade e, portanto, não se altera. Essa característica do uso de uma letra para representar tanto a ideia de uma incógnita quanto de uma variável pode trazer algumas dificuldades aos estudantes durante o processo de aprendizado, mas seu uso em diferentes contextos e aplicações contribui para que adquiram mais experiência e familiaridade com essa distinção. Por esse motivo, é importante observar o significado que eles atribuem à letra *n* e como eles manipulam os símbolos durante as operações, a fim de esclarecer eventuais equívocos que podem se repetir durante a realização de outras atividades que exigem o uso da álgebra.

Atividade 13

(EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura.

Observe a figura a seguir, composta de quadrados.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando as medidas dos lados desses quadrados, qual sequência numérica poderia representá-las?

a) 2, 4, 8, 16, 32, ...

b) 1; 1,5; 3; 3,5; 4; 4,5; ...

c) 2, 5, 10, 17, 26, ...

d) 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...

Resposta: Alternativa **d**.

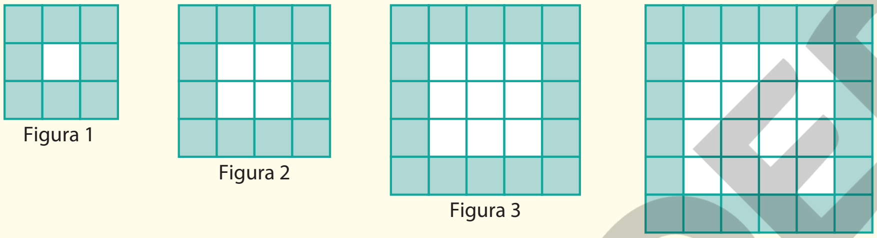
Resolução e comentários

Nesta atividade, os estudantes devem reconhecer que as medidas dos lados dos quadrados, a partir do centro, aumentam linearmente, ou seja, por meio de acréscimos constantes. No caso da alternativa **a**, a sequência numérica pode ser descrita por meio da expressão $a_n = 2^n$, de modo que os acréscimos não são sempre os mesmos. Na alternativa **b**, os termos, a partir do terceiro, podem ser obtidos por meio de adições. Nesse caso, os acréscimos também não são sempre os mesmos. Na alternativa **c**, os termos são obtidos por meio da expressão $a_n = n^2 + 1$. Os acréscimos, nessa sequência, não são sempre os mesmos. Na alternativa **d**, os acréscimos são os mesmos e iguais a 5, o que corresponde à situação descrita.

Atividade 14

(EF07MA15) Utilizar a linguagem algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

Observe a sequência de figuras.



Assinale a expressão algébrica que relaciona a posição n da figura na sequência à quantidade Q de quadradinhos pintados de verde.

a) $Q = 3 \cdot n$

b) $Q = n + 4$

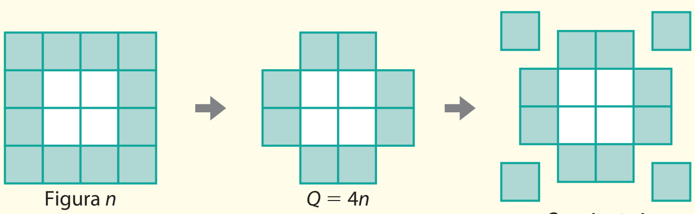
c) $Q = 4 \cdot n + 4$

d) $Q = n^2 - n$

Resposta: Alternativa **c**.

Resolução e comentários

Para responder a esta atividade, os estudantes podem recorrer ao teste das alternativas substituindo o número correspondente à posição da figura em n e, por meio de cálculo, verificar os resultados obtidos. Assim, ao testar a alternativa **a** para a figura 1 obtém-se $Q = 3 \cdot 1 = 3$, o que está incorreto, pois a quantidade de quadradinhos é 9. A alternativa **b** também mostra-se incorreta para $n = 1$, pois, nesse caso, $Q = 1 + 4 = 5$. De modo análogo pode-se testar as alternativas seguintes das quais apenas a **c** mostra-se correta. Entretanto, os estudantes podem obter a expressão algébrica por diferentes processos de construção das figuras. Por exemplo, eles podem observar que os quadradinhos coloridos podem ser obtidos partindo do quadrado central, em branco. Considerando a medida do lado do quadrado central como n, a quantidade de quadradinhos que tocam suas laterais é igual a $4n$. Acrescentando os 4 quadradinhos dos cantos da figura, temos $4n + 4$.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade 15

(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.

Considere a sequência numérica: 5, 8, 11, 14, ...

Essa sequência corresponde à quantidade de quadradinhos que compõem cada uma das figuras a seguir.

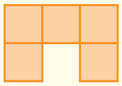


Figura 1

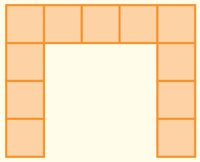


Figura 3

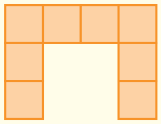


Figura 2

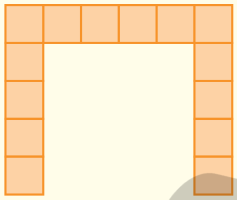


Figura 4

Indique a alternativa cuja expressão algébrica não corresponde à sequência numérica apresentada.

a) $(n + 2) + 2n$

b) $3n + 2$

c) $3n - 2$

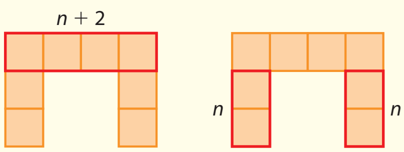
d) $(n + 2)^2 - n^2 - (n + 2)$

Resposta: Alternativa **c**.

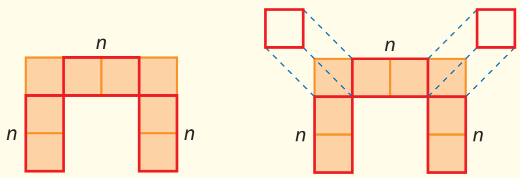
Resolução e comentários

Caso os estudantes já tenham adquirido maior vivência com o uso da linguagem algébrica, eles podem observar que as alternativas **a** e **b** são equivalentes, pois, ao adicionar as partes literais $n + 2n$, obtém-se $3n$, de modo que $n + 2 + 2n = 3n + 2$. Como há apenas uma alternativa incorreta, e a alternativa **c** é obviamente diferente de $3n + 2$, conclui-se que ela é a alternativa que mostra uma expressão não equivalente. Entretanto, espera-se que os estudantes, ao analisarem as alternativas, busquem pistas do processo de sua obtenção, a fim de obter a conclusão correta de forma direta.

a) A expressão $n + 2$ representa o número de quadradinhos da fileira horizontal de cada figura. Como cada uma das duas laterais tem o mesmo número n de quadradinhos, conclui-se que o total de quadradinhos é $n + 2 + 2n$.



b) A expressão $3n$ representa os 3 grupos de n quadradinhos da figura. O termo 2 adicionado corresponde aos 2 quadradinhos dos cantos.



3n 3n + 2

d) A expressão $(n + 2)^2$ representa a quantidade de quadradinhos do quadrado não completo de lado $n + 2$, o qual, subtraído do número de quadradinhos no centro da figura, dado por n^2, e subtraído de $(n + 2)$, resulta no número de quadradinhos da figura: $(n + 2)^2 - n^2 - (n + 2)$. Caso os estudantes saibam realizar a multiplicação de termos algébricos, pode-se fazer:

$(n + 2) \cdot (n + 2) - n^2 - n - 2 = n^2 + 2n + 2n + 4 - n^2 - n - 2 = 3n + 2$

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade 16

(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam a variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.

Para uma festa foi comprada uma quantidade de suco de frutas suficiente para encher 40 copos de 250 mL cada. Entretanto, como foram convidadas mais pessoas, essa mesma quantidade de suco teve de ser transferida para copos de 200 mL. Quantos copos foram cheios com suco de fruta?

Resposta: 50 copos.

Resolução e comentários

Os problemas envolvendo a proporcionalidade direta ou a inversa podem ser resolvidos como problemas simples de aritmética, por meio do raciocínio proporcional, usando regras práticas que automatizam o processo, como a conhecida "regra de três", ou usando a linguagem algébrica para expressar a relação entre as grandezas.

- Uso da aritmética.

  O volume total de suco nos 40 copos de 250 mL é 10000 mL ($40 \cdot 250 = 10000$). Se essa quantidade for distribuída em copos de 200 mL cada, serão necessários 50 copos ($10000 : 200 = 50$).

- Raciocínio proporcional.

  A razão entre a capacidade do copo menor e a do copo maior é $\frac{200}{250} = \frac{4}{5}$. Como as grandezas são inversamente proporcionais, temos:

Capacidade de cada copo (mL)	Número de copos
250	40
$\frac{4}{5} \times$	$\div \frac{4}{5}$
200	x

$$x = 40 : \frac{4}{5} = 40 \cdot \frac{5}{4} = 50$$

- Regra de três.

Capacidade de cada copo (mL)	Número de copos
250	40
200	x

$$200 \cdot x = 250 \cdot 40 \rightarrow x = \frac{10000}{200} = 50 \text{ (50 copos)}$$

- Linguagem algébrica.

  As grandezas capacidade c e número de copos n são inversamente proporcionais, então o produto de seus valores é igual a uma constante k ($c \cdot n = k$).

  Para $c = 250$ e $n = 40$, temos que $k = 250 \cdot 40$ ou $k = 10000$.

  Substituindo o valor de k novamente na igualdade, com $c = 200$, temos:

  $$200 \cdot n = 10000 \Rightarrow n = \frac{10000}{200} = 50$$

Atividade 17

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

A idade de Renata há 3 anos era a metade da idade que ela terá daqui a 4 anos. Qual é a idade de Renata?

Resposta: Renata tem 10 anos.

Resolução e comentários

Um dos maiores desafios no desenvolvimento do pensamento algébrico é a etapa em que os estudantes devem traduzir enunciados de problemas para a linguagem algébrica. Esse desenvolvimento ocorre de forma gradativa e exige a exposição dos estudantes a uma grande variedade de problemas e a discussão detalhada de cada etapa da transposição do texto, de modo que os estudantes consigam atribuir significado às ações executadas.

Nesta atividade, espera-se que os estudantes reconheçam que a incógnita é a idade atual de Renata, que será designada por x. Assim, há 3 anos, ela tinha 3 anos a menos do que tem atualmente, ou seja, $x - 3$. A idade dela em 4 anos será 4 anos a mais do que a idade atual, ou seja, $x + 4$. De acordo com o texto, a idade dela 3 anos atrás $(x - 3)$ corresponde à metade da idade que ela terá em 4 anos.

$$x - 3 = \frac{x + 4}{2}$$

Após a obtenção da equação polinomial de 1º grau, os estudantes devem aplicar as propriedades da igualdade para determinar o valor de x.

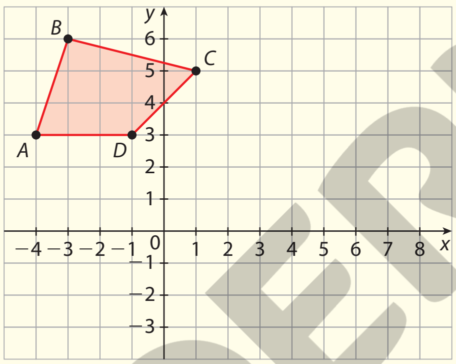
$$2 \cdot (x - 3) = 2 \cdot \left(\frac{x + 4}{2}\right) \Rightarrow 2x - 6 = x + 4 \Rightarrow 2x - 6 - x = x + 4 - x \Rightarrow x - 6 = 4 \Rightarrow x = 10$$

Portanto, Renata tem 10 anos de idade.

Atividade 18

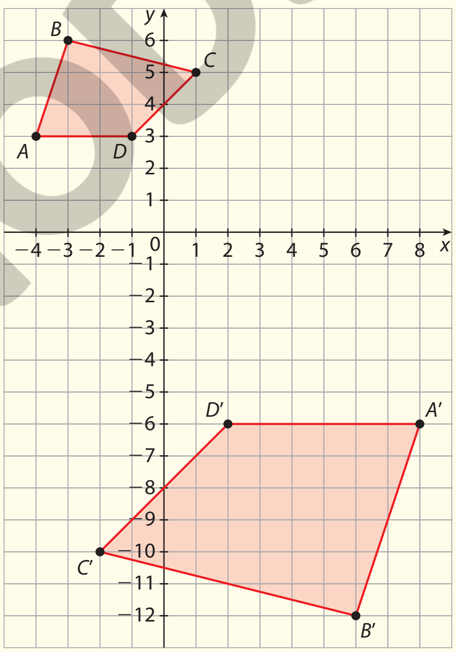
(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro.

Observe o quadrilátero *ABCD* no plano cartesiano a seguir. Desenhe a figura obtida ao multiplicar cada coordenada dos pontos que formam esse quadrilátero por (–2).



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resposta:



Resolução e comentários

Transformações de polígonos como ampliação/redução, com a obtenção do simétrico em relação a uma reta ou um ponto, podem ser estudadas por meio de transformações aplicadas a suas coordenadas no plano cartesiano. Nesta atividade, a multiplicação de uma coordenada por (–2) pode ser compreendida por meio de duas ações:

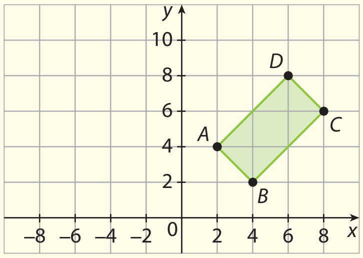
- a multiplicação das coordenadas de cada ponto do polígono por 2 equivale a ampliá-lo por um fator 2, ou seja, dobrar as medidas de seus lados;

- a multiplicação das coordenadas por (–1), ou simplesmente "trocar o sinal" das coordenadas, equivale a "inverter" a figura (observe que, na figura original, o vértice *A* está à esquerda do vértice *D*, e, na nova figura, o vértice *D'* está à esquerda de *A'*).

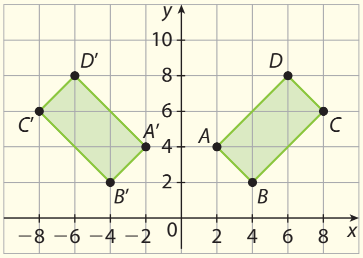
Atividade 19

(EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.

Construa o simétrico do retângulo *ABCD* em relação ao eixo vertical.



Resposta:



Resolução e comentários

Para desenhar o simétrico de um polígono em relação ao eixo *y*, os estudantes devem reconhecer que as coordenadas *y* dos pontos não se alteram, mas as coordenadas *x* trocam de sinal, nesse caso, têm sinal negativo.

A(2, 4) → *A'*(–2, 4) *B*(4, 2) → *B'*(–4, 2) *C*(8, 6) → *C'*(–8, 6) *D*(6, 8) → *D'*(–6, 8)

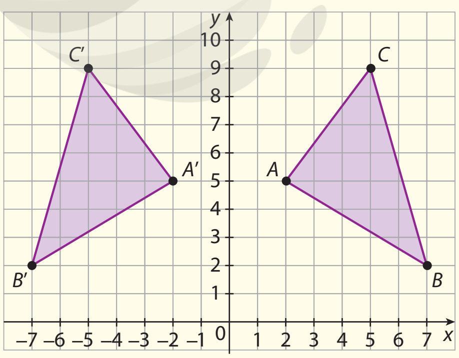
Entretanto, é mais provável que os estudantes tenham obtido os pontos simétricos de cada vértice medindo a distância de cada vértice ao eixo *y*. Por exemplo, o ponto *A* tem coordenada $x = 2$, de modo que de *A* até a origem, desloca-se 2 unidades, então essa é a distância entre o ponto *A* e o eixo *y*. Assim, para obter o simétrico *A'*, desloca-se o ponto A(0, 4) 2 unidades para a esquerda a partir do eixo *y*, chegando a *A'*(–2, 4). Raciocínio similar permite obter os demais vértices, *B'*, *C'* e *D'*.

Atividade 20

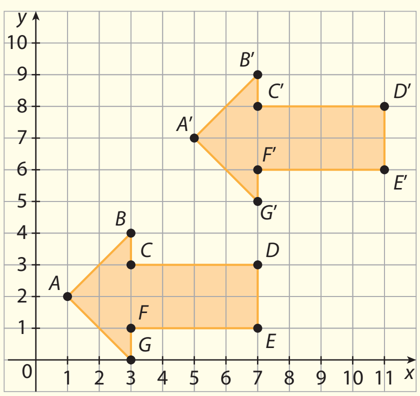
(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

Indique a alternativa que mostra uma figura simétrica da outra, obtida por meio de uma rotação de 180° em relação à origem (0, 0).

a)

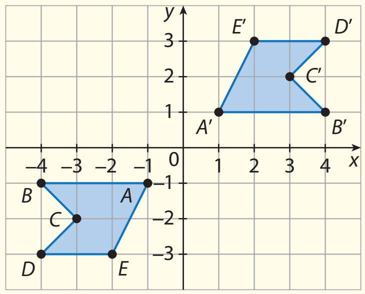


b)

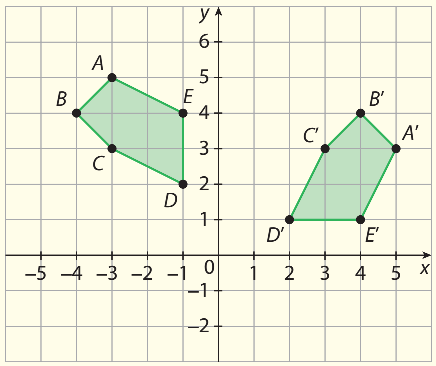


ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

c)



d)



Resposta: Alternativa **a**.

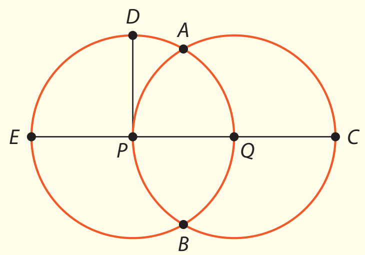
Resolução e comentários

Uma rotação de 180°, ou meia-volta, em torno da origem dos eixos coordenados pode ser reconhecida considerando que ela faz com que a figura obtida pareça espelhada em relação à figura original, levando em conta o centro da rotação. Entretanto, os estudantes podem ser levados ao erro e assinalar a alternativa **c**, considerando apenas o fato de que uma figura fica espelhada em relação à outra, o que não corresponde ao conceito de rotação. A alternativa **b** apresenta uma translação da figura e a alternativa **d** apresenta uma rotação com um ângulo diferente de 180°.

Atividade 21

(EF07MA22) Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.

Na figura a seguir, as circunferências de centro *P* e *Q* têm raios de medida 5 cm.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Os pontos que estão à mesma distância de *P* e de *Q* são:

a) *C* e *E*.

b) *D* e *C*.

c) *A* e *D*.

d) *A* e *B*.

Resposta: Alternativa **d**.

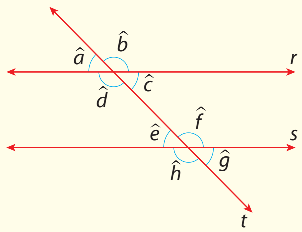
Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar se os estudantes compreendem a propriedade comum aos pontos de uma circunferência, aqueles que estão à mesma distância de seu centro. Para que o ponto esteja à mesma distância dos dois centros *P* e *Q*, ele deve ser um ponto da circunferência de centro *P* e também pertencer à circunferência de centro *Q*, ou seja, pode ser o ponto *A* ou o ponto *B*. Além de avaliar o conhecimento dos estudantes sobre a definição de circunferência, esta atividade permite que esse raciocínio sirva de base para a compreensão do método empregado na construção da mediatriz de um segmento $\overline{PQ}$.

Atividade 22

(EF07MA23) Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica.

Na figura a seguir, as retas *r* e *s* são paralelas e cortadas por uma reta *t* transversal a elas. Ao usar um transferidor, Rita verificou que os pares de ângulos correspondentes, como $\hat{d}$ e $\hat{h}$, têm a mesma medida, 130°. Em seguida, ela verificou experimentalmente que os pares de ângulos opostos pelo vértice, como $\hat{d}$ e $\hat{b}$, também são congruentes.



O raciocínio que permite concluir, com base nessas informações, que os ângulos alternos internos $\hat{d}$ e $\hat{f}$ têm a mesma medida é:

a) $\hat{f}$ é o suplemento de $\hat{h}$; portanto, também tem a mesma medida que $\hat{h}$ e $\hat{d}$.

b) $\hat{f}$ é oposto pelo vértice em relação a $\hat{h}$; portanto, tem a mesma medida que $\hat{h}$ e, consequentemente, também é congruente a $\hat{d}$.

c) $\hat{f}$ é o complemento de $\hat{h}$; portanto, também tem a mesma medida que $\hat{h}$ e $\hat{d}$.

d) $\hat{f}$ e $\hat{d}$ são alternos internos; portanto, são congruentes.

Resposta: Alternativa **b**.

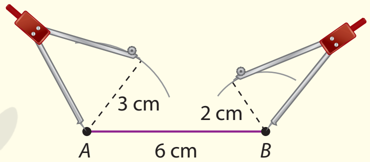
Resolução e comentários

Esta atividade avalia o conhecimento dos estudantes sobre a nomenclatura usada para identificar pares de ângulos em retas paralelas cortadas por uma transversal e, também, o encadeamento lógico que permite deduzir que ângulos alternos internos são congruentes. Espera-se que a informação fornecida pelo enunciado sobre a congruência de ângulos correspondentes tenha sido verificada empiricamente pelos estudantes por meio de *softwares* de geometria dinâmica ou por meio de medições diretas com auxílio do transferidor; isso favorece o entendimento de que, em Geometria, tais resultados aceitos como evidentes (chamados postulados ou axiomas) são necessários para que, a partir deles, outros resultados possam ser demonstrados por meio da aplicação do raciocínio lógico aos demais elementos em estudo.

Atividade 23

(EF07MA24) Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Luís quer construir um triângulo com lados de medida 6 cm, 3 cm e 2 cm. Para isso, ele desenhou com a régua um segmento medindo 6 cm de comprimento e, em seguida, posicionou o compasso da forma indicada na figura a seguir para construir dois arcos de circunferência.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Observando o procedimento utilizado por ele, é possível concluir que:

a) os dois arcos traçados com o compasso se interceptam, marcando o 3º vértice do triângulo; assim, os outros dois lados do triângulo podem ser construídos com auxílio de uma régua.

b) os dois arcos traçados com o compasso se interceptam sobre o lado $\overline{AB}$; portanto, como os três pontos estão alinhados, não é possível construir o triângulo.

c) os arcos não se cruzam, pois $6 > 3 + 2$; portanto, o triângulo não pode ser construído.

d) os arcos se cruzam em mais de um ponto; portanto, não é possível determinar qual é o 3º vértice do triângulo.

Resposta: Alternativa **c**.

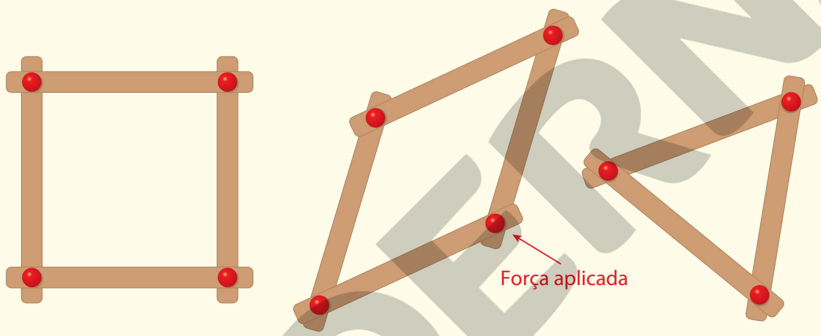
Resolução e comentários

Nesta atividade é avaliada a compreensão dos estudantes sobre a condição de existência de um triângulo: a medida de um lado deve ser menor do que a soma das medidas dos outros dois lados. A figura que mostra o procedimento de construção de um triângulo com régua e compasso favorece a compreensão dessa condição, mesmo que os estudantes não se recordem dela, pois, nesse caso, a soma das medidas dos raios $(2 + 3 = 5)$ é menor do que 6; portanto, os arcos não se cruzam e não é possível determinar o terceiro vértice do triângulo.

Atividade 24

(EF07MA25) Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.

A figura a seguir mostra estruturas com formatos que lembram um quadrado, um losango e um triângulo. Essas estruturas são construídas com palitos de sorvete presos por percevejos. Observe que a estrutura que lembra um losango é obtida com a aplicação de uma força em um dos vértices da estrutura que lembra um quadrado. Se fizermos o mesmo com a estrutura que lembra um triângulo, ela não se deformará.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Indique a alternativa que apresenta uma explicação para esse fato.

a) Os vértices do triângulo estão mais próximos entre si do que os vértices do quadrado.

b) O triângulo tem três vértices; como três é um número ímpar, não é possível deformar o triângulo.

c) Com as medidas dos três lados definidas, só é possível construir um único triângulo e, por isso, não é possível deformá-lo.

d) Os ângulos internos de um triângulo têm sempre medida menor do que os ângulos internos de um quadrilátero.

Resposta: Alternativa **c**.

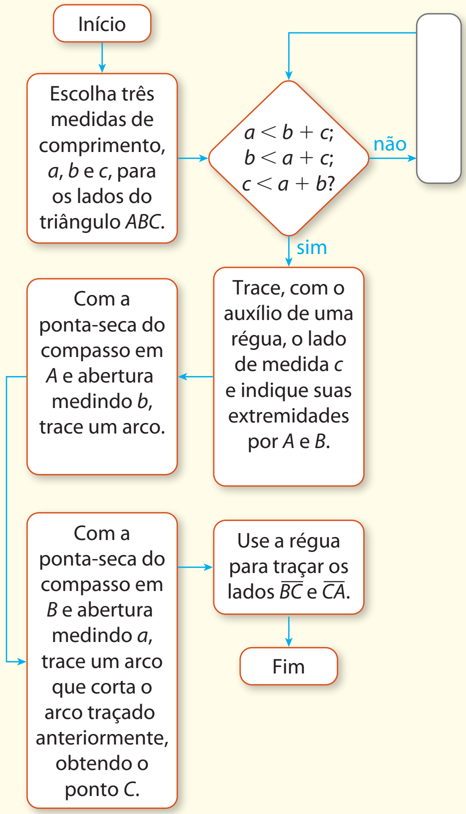
Resolução e comentários

A rigidez dos triângulos é uma propriedade com diversas aplicações práticas na Engenharia. Ela pode ser aplicada, por exemplo, na construção de treliças e de tesouras em telhados. Ela pode ser compreendida em associação com a atividade anterior, que mostra o procedimento para a construção de um triângulo. Como os arcos traçados sobre um lado determinado, com centros nas extremidades desse lado, só têm um único ponto de intersecção, conclui-se que existe apenas um triângulo com as medidas dadas, de modo que as medidas dos ângulos internos não mudam; assim, a estrutura triangular não pode mudar de forma.

Atividade 25

(EF07MA26) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.

O fluxograma a seguir mostra um algoritmo para a construção de um triângulo a partir das medidas de seus lados, representadas por *a*, *b* e *c*. Entretanto, um dos passos indicados foi apagado e não é possível ver a instrução que ele continha.



Qual das alternativas a seguir apresenta o conteúdo apagado?

a) Escolha outras medidas de comprimento para os lados *a*, *b* e *c*.

b) Multiplique cada uma das medidas dos lados *a*, *b* e *c* por 2.

c) Divida cada uma das medidas dos lados *a*, *b* e *c* por 2.

d) Substitua as medidas de *a*, *b* e *c* por potências de 10 consecutivas.

Resposta: Alternativa **a**.

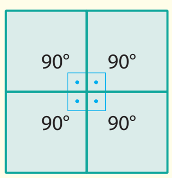
Resolução e comentários

Ao analisar o fluxograma apresentado, espera-se que os estudantes reconheçam que um algoritmo para a construção de um triângulo só pode ser executado caso as medidas dos seus lados satisfaçam a condição de existência: a soma das medidas de dois lados sempre deve ser maior do que a medida do terceiro lado. Assim, os estudantes devem compreender que, como a parte apagada do fluxograma corresponde ao não atendimento à condição de existência de um triângulo, as medidas dos lados devem ser alteradas e novamente submetidas à verificação da condição até que ela seja satisfeita.

Atividade 26

(EF07MA27) Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos.

Para preencher uma superfície plana, é possível utilizar ladrilhos de formato quadrado, pois eles se encaixam sem deixar espaços vazios, como mostra a figura a seguir.



Indique a alternativa que apresenta o polígono regular que, ao ser encaixado repetidas vezes, não preenche uma superfície plana sem deixar espaços vazios.

a) Triângulo equilátero.

b) Pentágono regular (5 lados).

c) Hexágono regular (6 lados).

Resposta: Alternativa **b**.

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Resolução e comentários

Para responder a esta atividade, os estudantes devem compreender que a medida do ângulo interno de um polígono deve ser um divisor de 360°. Em seguida, eles devem calcular a medida de cada ângulo interno dos diferentes polígonos apresentados nas alternativas e verificar se o valor obtido é um divisor de 360.

Os ângulos internos de um triângulo equilátero medem 60°. Como 60 é um divisor de 360 (360 : 60 = 6), um triângulo equilátero, ao ser encaixado repetidas vezes, preenche uma superfície plana sem deixar espaços vazios.

Os ângulos internos de um pentágono regular medem 108° (540° : 5 = 108°). Como 108 não é um divisor de 360 (360 : 108 = 3,33...), um pentágono regular, ao ser encaixado repetidas vezes, não preenche uma superfície plana sem deixar espaços vazios.

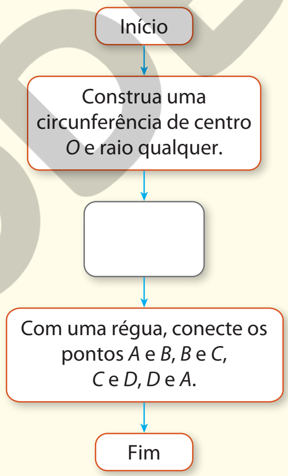
Os ângulos internos de um hexágono regular medem 120° (720° : 6 = 120°). Como 120 é um divisor de 360 (360 : 120 = 3), um hexágono regular, ao ser encaixado repetidas vezes, preenche uma superfície plana sem deixar espaços vazios.

Atividade 27

(EF07MA28) Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Bruna fazia um fluxograma descrevendo um procedimento para construir um quadrado. A parte inicial e a final do fluxograma estão prontas, mas falta ela descrever os passos para completar os blocos intermediários do fluxograma: a obtenção dos quatro pontos igualmente espaçados sobre a circunferência, *A*, *B*, *C* e *D*, que serão os vértices do quadrado. Descreva um procedimento para a obtenção desses quatro pontos, completando o fluxograma de Bruna.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

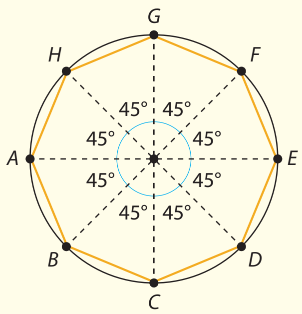


Resposta possível: Escolha um ponto *A* qualquer da circunferência e trace um diâmetro passando por *A*, determinando o ponto *B* da circunferência; construa uma reta perpendicular a $\overline{AB}$, passando por *O*, determinando os pontos *C* e *D* na intersecção com a circunferência.

Resolução e comentários

Nesta atividade, espera-se que os estudantes reconheçam que um polígono regular pode ser obtido dividindo a circunferência em *n* partes iguais, neste caso, um quadrado, em 4 partes iguais. Daí a possibilidade de pedir a construção de dois diâmetros perpendiculares entre si, pois a medida do ângulo central será 360° : 4 = 90°. De modo geral, a construção de qualquer polígono regular a partir de uma circunferência dada exige a construção de ângulos centrais consecutivos de medida 360° : *n*.

A seguir, apresentamos um exemplo em que *n* = 8 (octógono regular). Assim, como 360° : 8 = 45°, basta construir 8 ângulos centrais cujas medidas sejam 45°.



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Atividade 28

(EF07MA29) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.

O departamento de controle de qualidade de uma empresa que produz embalagens plásticas mediu a espessura, em milímetro, de 10 peças do mesmo produto. A espessura esperada para as peças é de 3,0 milímetros. Os resultados das medidas, em milímetro, são apresentados no quadro a seguir.

3,0	2,9	3,3	3,0	3,0
2,9	3,2	3,2	3,1	2,8

Para saber a variação média das medidas obtidas em relação à espessura esperada, Heitor calculou a diferença entre cada valor e 3,0, considerando o resultado sempre positivo; em seguida, adicionou todos os valores obtidos e dividiu a soma pelo número de medições efetuadas. Que valor ele encontrou para a variação média das medidas obtidas em relação à espessura esperada?

Resposta: 0,12 mm

Resolução e comentários

Um dos aspectos inerentes à ação de medir uma grandeza com um instrumento de medida é a ocorrência de erro. Nesta atividade, é avaliada a habilidade do estudante interpretar e acompanhar a realização de uma sequência de cálculos que levam ao desvio absoluto médio de um conjunto de medidas, cuja denominação formal não precisa ser apresentada aos estudantes. Espera-se que eles sigam as etapas descritas no enunciado para obter o resultado. Para as diferenças, temos:

$3{,}0 - 3{,}0 = 0{,}0$ $\quad 3{,}0 - 2{,}9 = 0{,}1$ $\quad 3{,}3 - 3{,}0 = 0{,}3$

$3{,}0 - 2{,}9 = 0{,}1$ $\quad 3{,}2 - 3{,}0 = 0{,}2$ $\quad 3{,}2 - 3{,}0 = 0{,}2$

Para a soma, temos:

$0{,}0 + 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}0 + 0{,}0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}2 = 1{,}2$

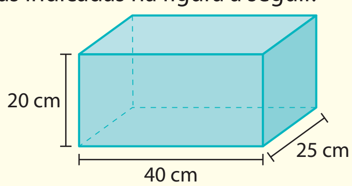
Para o resultado da divisão, temos: $1{,}2 : 10 = 0{,}12$

Então, a variação média das medidas obtidas em relação à espessura esperada é 0,12 mm.

Atividade 29

(EF07MA30) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).

O aquário de Isabel tem as medidas indicadas na figura a seguir.



Quantos litros de água cabem nesse aquário?

Resposta: 20 litros.

Resolução e comentários

Para responder a esta atividade, os estudantes precisam compreender que a medida do volume de um bloco retangular é dada pelo produto das medidas de comprimento, largura e altura. Eles também precisam lembrar que 1 L equivale a 1 000 cm^3 ou 1 000 mL. Assim, devem concluir que no aquário cabem 20 000 cm^3 de água.

$20 \cdot 40 \cdot 25 = 20\,000$

Como $1\,000\ cm^3 = 1$ L, conclui-se que $20\,000\ cm^3 = 20$ L.

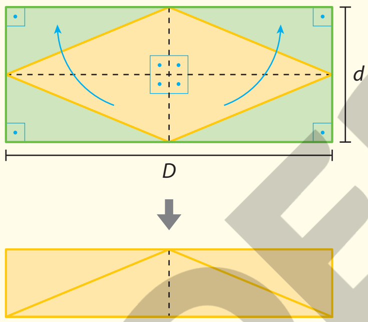
Ao discutir a resolução da atividade com os estudantes, converse com eles sobre a importância prática de saber calcular o volume ou a capacidade de um bloco retangular para determinar a medida aproximada do volume ou da capacidade de objetos com formatos irregulares, por exemplo, uma pedra. Proponha a resolução do seguinte problema aos estudantes: Se o aquário da atividade estiver com água até a altura de medida 10 cm e, ao mergulhar uma pedra em seu interior, o nível da água sobe para 10,5 cm, como é possível calcular o volume da pedra com base nessas informações? Espera-se que os estudantes compreendam que, ao mergulhar a pedra na água, o aumento no nível da água está relacionado à medida de seu volume. Assim, a medida do volume da pedra seria igual à medida do volume de um bloco retangular de medidas 25 cm × 40 cm × 0,5 cm (10,5 cm − 10 cm = 0,5 cm). Portanto, a medida do volume da pedra é 500 cm^3, ou meio litro ($25 \cdot 40 \cdot 0{,}5 = 500$).

Atividade 30

(EF07MA31) Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros.

Observe no losango a seguir as indicações das medidas de suas duas diagonais: a diagonal maior de medida *D* e a diagonal menor de medida *d*. Pedro decompôs esse losango em quatro triângulos equivalentes e reagrupou os dois triângulos da parte inferior do losango, colocando-os na parte superior, obtendo o retângulo em amarelo.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Com base nesse raciocínio, é possível concluir que a área de um losango é dada por:

a) $A = D + d$

b) $A = D \cdot d$

c) $A = \dfrac{D \cdot d}{2}$

d) $A = D^2 + d^2$

Resposta: Alternativa **c**.

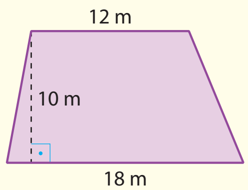
Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é avaliar se os estudantes compreendem um raciocínio empregado para o cálculo da área de um losango, utilizando a ideia de equivalência de áreas e o procedimento para o cálculo da área de um retângulo. O desenvolvimento do pensamento geométrico e algébrico dos estudantes deve incorporar a habilidade de acompanhar um raciocínio constituído de várias etapas com o apoio de imagens que sugerem padrões, propriedades e relações existentes entre os elementos que compõem o objeto em estudo. Assim, as medidas do retângulo cuja área é equivalente à do losango não são apresentadas para que os estudantes reconheçam que a medida da base não se alterou (*D*), enquanto a da altura foi reduzida à metade $\left(\dfrac{d}{2}\right)$. Outro raciocínio comumente apresentado para a obtenção da área de um losango é considerar que cada triângulo retângulo destacado em amarelo no interior do losango é congruente a um triângulo em verde, de modo que a área do retângulo formado por 8 triângulos é igual a $D \cdot d$. Como a área do losango corresponde à metade da área desse retângulo, a medida de sua área é dada por $\dfrac{D \cdot d}{2}$.

Atividade 31

(EF07MA32) Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

O terreno de Regina tem o formato de um trapézio, ou seja, de um quadrilátero que tem dois lados paralelos. O esquema a seguir mostra as medidas desse terreno. Qual é a medida de sua área, em metro quadrado?

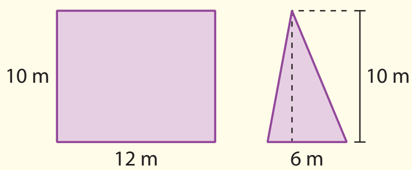


Resposta: 150 m²

Resolução e comentários

Os estudantes podem utilizar diferentes estratégias para obter medida da área da figura. Por exemplo, com base em sua decomposição e no rearranjo de suas partes ou aplicando a ideia de adicionar áreas de modo a formar um retângulo e, depois, subtrair a área adicionada, como mostram as figuras a seguir.

Decompõe-se o trapézio em dois triângulos e um retângulo de base medindo 12 m e altura medindo 10 m. Os dois triângulos são reunidos de modo a formar um novo triângulo de base medindo 6 m $(18 - 12 = 6)$ e altura medindo 10 m.

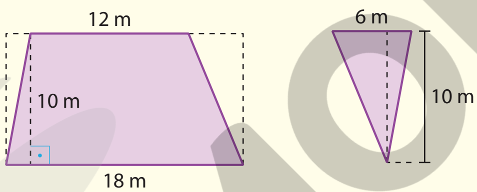


Calculando as áreas e adicionando-as, obtém-se:

$$(12 \cdot 10) + \left(\frac{6 \cdot 10}{2}\right) = 120 + 30 = 150$$

Prolonga-se a base menor do trapézio, formando um retângulo de base medindo 18 m e altura medindo 10 m; em seguida, subtraem-se as medidas de área dos dois triângulos adicionados.

$$(18 \cdot 10) - \left(\frac{6 \cdot 10}{2}\right) = 180 - 30 = 150$$



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Note que, utilizando qualquer uma das estratégias, a medida encontrada para a área do terreno é a mesma, 150 m².

Atividade 32

(EF07MA33) Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

A roda de certo modelo de automóvel mede 45 cm de diâmetro. Qual é a medida da distância percorrida por ele quando a roda dá 200 voltas completas? Considere $\pi = 3{,}1$.

Resposta: 279 m

Resolução e comentários

Para resolver esta atividade, os estudantes precisam compreender que a medida do comprimento da circunferência corresponde à medida da distância percorrida por ela a cada volta completa, assim:

$$\pi = \frac{\text{medida do comprimento da circunferência}}{\text{medida do diâmetro}}$$

$$3{,}1 = \frac{C}{0{,}45} \Rightarrow C = 3{,}1 \cdot 0{,}45 = 1{,}395 \text{ (1,395 m)}$$

Assim, para saber a medida da distância percorrida pelo automóvel após 200 voltas completas da roda, basta fazer $200 \cdot 1{,}395 = 279$. Logo, a distância mede 279 m.

Atividade 33

(EF07MA34) Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.

Em uma caixa há 5 bolas, sendo 3 delas azuis e as outras 2 vermelhas. Os estudantes da turma de Letícia calcularam a probabilidade de, ao sortear 1 bola dessa caixa, sair 1 bola azul. Em seguida, diversos grupos de estudantes da turma fizeram uma simulação realizando 500 sorteios de modo aleatório e registrando os resultados obtidos na tabela a seguir. Qual dos grupos obteve o resultado mais próximo do que era esperado?

Grupo	Número de vezes em que a bola sorteada foi azul
A	178
B	380
C	190
D	281

Dados obtidos pelos grupos.

Resposta: O grupo D.

Resolução e comentários

A resolução desta atividade envolve o conhecimento dos conceitos de probabilidade e frequência relativa. A probabilidade de sair uma bola azul é dada por:

$$\frac{\text{número de bolas azuis na caixa}}{\text{total de bolas na caixa}} = \frac{3}{5} = 0{,}60$$

Assim, é esperado que $\frac{3}{5}$ dos 500 sorteios tenham como resultado bolas azuis, ou seja:

$$\frac{3}{5} \cdot 500 = 300$$

Comparando esse valor teórico com os resultados das simulações, observa-se que o grupo D, com 281 sorteios de bolas azuis, foi aquele que mais se aproximou do valor esperado. Outra forma de fazer a comparação entre a previsão (0,60) e os resultados das simulações é calcular a frequência relativa do resultado obtido por cada grupo.

Grupo A: $\frac{178}{500} \simeq 0{,}36$ Grupo B: $\frac{380}{500} = 0{,}76$ Grupo C: $\frac{190}{500} = 0{,}38$ Grupo D: $\frac{281}{500} \simeq 0{,}56$

Como o valor mais próximo de 0,60 obtido pelos grupos é 0,56, conclui-se que a resposta é o grupo D.

Atividade 34

(EF07MA35) Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.

Os salários dos jogadores de duas equipes de basquete são apresentados na tabela a seguir.

Salário dos jogadores da equipe A	Salário dos jogadores da equipe B
R$ 3 500,00	R$ 2 500,00
R$ 4 500,00	R$ 3 500,00
R$ 5 000,00	R$ 2 000,00
R$ 3 500,00	R$ 2 000,00
R$ 3 500,00	R$ 10 000,00

Dados obtidos pelas equipes de basquete.

Considerando a média dos salários dos jogadores de cada equipe, é correto afirmar que:

a) como os salários dos jogadores da equipe A não são os mesmos dos jogadores da equipe B, as médias de salários são diferentes.

b) as médias são iguais e na equipe B os salários de cada jogador estão mais próximos desse valor médio.

c) os salários da equipe B não têm um valor médio, porque R$ 5 000,00 não corresponde ao salário de nenhum dos jogadores.

d) as médias são iguais e na equipe A os salários de cada jogador estão mais próximos desse valor médio.

Resposta: Alternativa **d**.

Resolução e comentários

Esta atividade tem por objetivo avaliar a compreensão dos estudantes sobre o conceito de média aritmética e abordar informalmente a ideia de variabilidade dos dados em torno da média. A alternativa **a** sugere uma resposta equivocada, em que valores diferentes resultam em médias aritméticas diferentes. Espera-se que os estudantes reconheçam que, se dois conjuntos de dados têm o mesmo número de elementos e as somas são iguais, eles apresentam o mesmo valor para a média aritmética. Neste caso, ambas as somas equivalem a R$ 20 000,00; dividindo esse valor por 5 temos uma média igual a R$ 4 000,00. Na alternativa **b**, espera-se que os estudantes observem que o valor médio R$ 4 000,00 está mais distante dos salários individuais dos jogadores da equipe B do que dos salários individuais dos jogadores da equipe A; logo, essa alternativa está incorreta. Como a alternativa **d** corresponde à sua negativa, ela é a resposta correta.

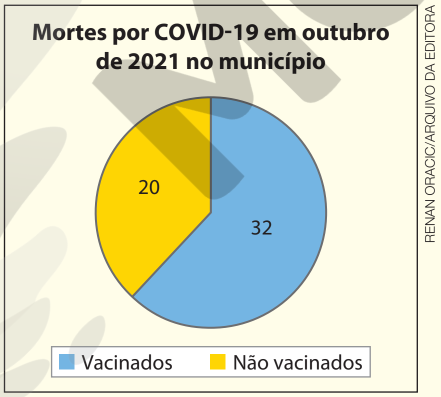
Ao discutir a correção dessa alternativa com os estudantes, enfatize o fato de que os quatro primeiros salários dos jogadores da equipe B estão próximos entre si, mas a inclusão de um valor extremo (R$ 10 000,00) fez com que a média aumentasse e os valores se distanciassem do valor médio. Esse fato ilustra como a média aritmética é sensível a valores extremos, sejam eles muito inferiores ou superiores aos demais valores do conjunto de dados.

Atividade 35

(EF07MA36) Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.

(EF07MA37) Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

Em outubro de 2021, a prefeitura de um município noticiou que ocorreram 32 mortes por COVID-19 de pessoas vacinadas contra a doença (com uma ou duas doses da vacina). No mesmo período, ocorreram 20 mortes por COVID-19 de pessoas não vacinadas. Com base nessa notícia, Natália construiu o seguinte gráfico de setores.



Dados fornecidos pela prefeitura do município.

Entretanto, pesquisando um pouco mais, Natália verificou que os 32 óbitos ocorreram dentre um grupo formado por 3 500 pessoas vacinadas, e os 20 óbitos ocorreram dentre 400 pessoas não vacinadas. Assim, ela calculou as seguintes razões.

Vacinados: $\frac{32}{3500} \simeq 0{,}009$ ou 0,9%

Não vacinados: $\frac{20}{400} = 0{,}05$ ou 5%

Com base nessas informações, indique a alternativa que melhor representa a situação.

a) O gráfico de setores apresentado é suficiente para a compreensão de que não tomar vacina torna a pessoa vulnerável à COVID-19.

b) O gráfico de setores não representa corretamente a situação, pois, em termos proporcionais, o número de óbitos dentre as pessoas não vacinadas é cerca de 5,5 vezes maior do que o número de óbitos dentre as pessoas vacinadas $\left(\frac{5}{0{,}9} \simeq 5{,}5\right)$.

c) O gráfico de setores está incorreto porque ele só pode ser construído para representar valores percentuais.

d) O gráfico que representaria corretamente a situação seria um gráfico de barras que utiliza os mesmos dados do gráfico de setores sem utilizar as informações apresentadas sobre o total de pessoas em cada um dos grupos.

Resposta: Alternativa **b**.

Resolução e comentários

O objetivo desta atividade é possibilitar aos estudantes refletir sobre a conveniência de usar um gráfico de setores para representar um conjunto de dados. Espera-se que eles percebam que gráficos como esse, quando construídos fora de contexto, podem não fornecer um panorama adequado para obter uma conclusão válida e que representa corretamente a situação analisada. Os estudantes também devem reconhecer que, apesar de à primeira vista os dados do gráfico indicarem que tomar vacina pode tornar a pessoa mais vulnerável à doença, os dados posteriores mostram o contrário. Ao analisar os novos dados, percebe-se que o motivo pelo qual há mais mortes dentre pessoas vacinadas é que elas formam a imensa maioria da população em estudo e, mesmo as pessoas não vacinadas sendo uma parcela muito pequena da população, ainda assim o número de mortes entre essas pessoas é expressivo. É importante a discussão desses aspectos relacionados à leitura e à interpretação de dados para a formação cidadã dos estudantes.

Edwaldo Bianchini

Licenciado em Ciências pela Faculdade de Educação de Ribeirão Preto,
da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com habilitação em Matemática pela
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP).
Professor de Matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo,
no Ensino Fundamental e Médio, por 25 anos.

MATEMÁTICA BIANCHINI 8º ano

Componente curricular: MATEMÁTICA

10ª edição

São Paulo, 2022

MODERNA

Coordenação geral: Maria do Carmo Fernandes Branco
Edição executiva: Maria Cecília da Silva Veridiano
Edição de texto: Dario Martins de Oliveira, Enrico Briese Casentini, João Alves de Souza Neto, Livia Santa Clara
Assistência editorial: Roberta Stoppe
Preparação de texto: Geuid Dib Jardim
Gerência de *design* e produção gráfica: Patricia Costa
Coordenação de produção: Denis Torquato
Gerência de planejamento editorial: Maria de Lourdes Rodrigues
Coordenação de *design* e projetos visuais: Marta Cerqueira Leite
Projeto gráfico: Tatiane Porusselli
Capa: Douglas Rodrigues José, Tatiane Porusselli, Apis Design, Fábio Luna
Imagem da capa: Detalhe de: Diébédo Francis Kéré – Kéré Architecture. Sarbalé Ke, "Casa da Celebração" em Festival de Música e Artes Coachella 2019, Califórnia, EUA.
© Diébédo Francis Kéré - Kéré Architecture. Foto: Iwan Baan.
Coordenação de arte: Aderson Oliveira
Edição de arte: Marcel Hideki Yonamine
Editoração eletrônica: Grapho Editoração
Coordenação de revisão: Camila Christi Gazzani
Revisão: Cesar G. Sacramento, Daniela Uemura, Lilian Xavier, Márcio Della Rosa, Maura Loria, Sirlene Prignolato
Coordenação de pesquisa iconográfica: Sônia Oddi
Pesquisa iconográfica: Vanessa Trindade, Junior Rozzo
Suporte administrativo editorial: Flávia Bosqueiro
Coordenação de *bureau*: Rubens M. Rodrigues
Tratamento de imagens: Ademir Francisco Baptista, Ana Isabela Pithan Maraschin, Denise Feitoza Maciel, Marina M. Buzzinaro, Vânia Maia
Pré-impressão: Alexandre Petreca, Fabio Roldan, José Wagner Lima Braga, Marcio H. Kamoto, Selma Brisolla de Campos
Coordenação de produção industrial: Wendell Monteiro
Impressão e acabamento:

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bianchini, Edwaldo
Matemática Bianchini : 8º ano / Edwaldo Bianchini. -- 10. ed. -- São Paulo : Moderna, 2022.

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-16-13570-6

1. Matemática (Ensino fundamental) I. Título.

22-115278 CDD-372.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino fundamental 372.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

EDITORA MODERNA LTDA.
Rua Padre Adelino, 758 - Belenzinho
São Paulo - SP - Brasil - CEP 03303-904
Atendimento: Tel. (11) 3240-6966
www.moderna.com.br
2022
Impresso no Brasil

1 3 5 7 9 10 8 6 4 2

Sarbalé Ke, a "Casa da Celebração" na língua Bissa de Burkina Fasso, é uma instalação criada para o Festival de Música e Artes Coachella 2019, pelo arquiteto Diébédo Francis Kéré. A instalação explora, com 12 torres, o mundo interior de um baobá. As três torres mais altas formam o centro da instalação e o maior espaço de encontro para os visitantes que podem aproveitar seus interiores cheios de luz, naturalmente ventilados e sombreados.

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Este livro foi pensado, escrito e organizado com o objetivo de facilitar sua aprendizagem.

Para tornar mais simples o entendimento, a teoria é apresentada por meio de situações cotidianas. Assim, você vai notar quanto a Matemática faz parte do nosso dia a dia e nos possibilita compreender melhor o mundo que nos rodeia.

Por isso, aproveite ao máximo todo o conhecimento que este livro pode lhe oferecer. Afinal, ele foi feito especialmente para você!

Faça dele um parceiro em sua vida escolar!

O autor

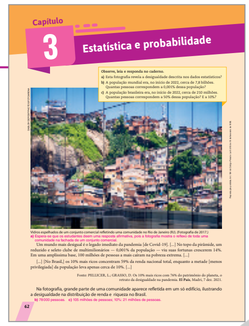
ROMAN SAMBORSKYI/SHUTTERSTOCK

CONHEÇA SEU LIVRO

Seu livro está organizado em 12 capítulos. A estrutura de cada capítulo é muito simples e possibilita localizar com facilidade os assuntos estudados, os exercícios e as seções enriquecedoras. Acompanhe.

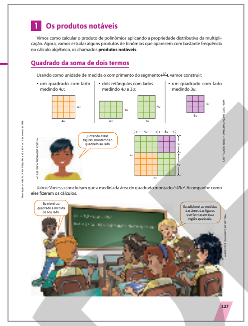
Página de abertura

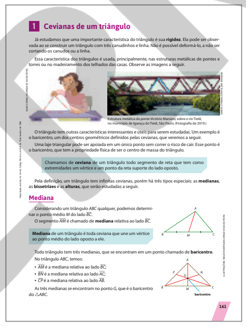
O tema do capítulo é introduzido por meio de uma imagem motivadora e um breve texto.



Apresentação dos conteúdos

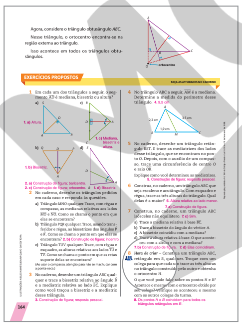
Os conteúdos são apresentados em linguagem clara e objetiva e acompanhados de exemplos e ilustrações cuidadosamente elaborados.

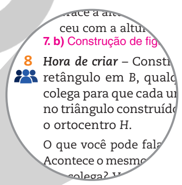




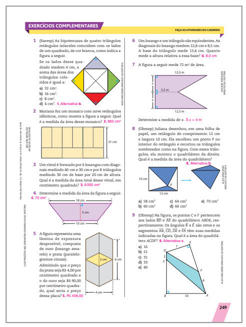
Exercícios

O livro traz exercícios variados, organizados após os conteúdos na seção **Exercícios Propostos** e, ao final de cada capítulo, na seção **Exercícios Complementares**.



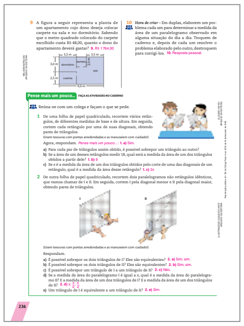


Hora de criar – Atividades em que você elabora um problema com base no assunto estudado.



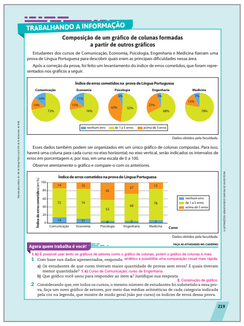
Pense mais um pouco...

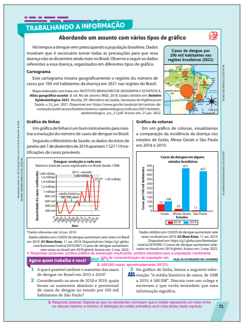
Propõe atividades desafiadoras que possibilitam aprofundar conteúdos ao longo do capítulo.



Trabalhando a informação

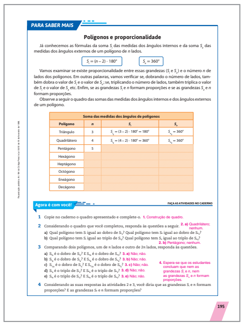
Esta seção possibilita que você trabalhe com informações apresentadas em diferentes linguagens.





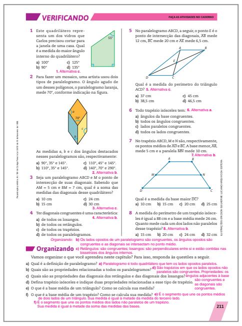
Para saber mais

É uma seção que traz textos sobre Geometria e História da Matemática para enriquecer e explorar diversos conteúdos matemáticos estudados.



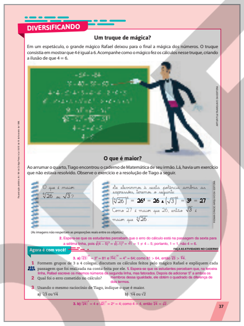
Verificando

Nesta seção, você poderá avaliar seu aprendizado e organizar seu conhecimento sobre o que foi estudado em cada capítulo.



Diversificando

Esta seção oferece a você a oportunidade de entrar em contato com temas variados, em diferentes contextos e áreas do saber.



Macroáreas temáticas dos Temas Contemporâneos Transversais na BNCC

Meio ambiente

Economia

Saúde

Cidadania e civismo

Multiculturalismo

Ciência e Tecnologia

Ícones da coleção

Atividade oral

Atividade em dupla ou em grupo

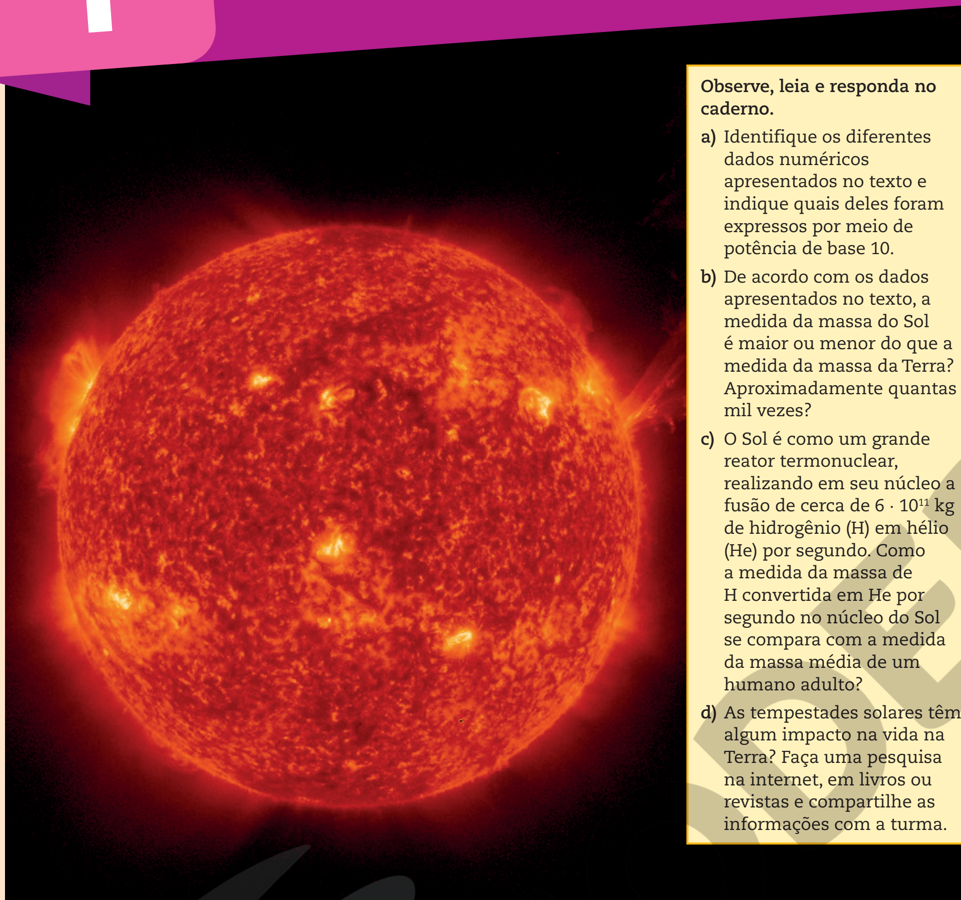
Cálculo mental

Calculadora

SUMÁRIO

Capítulo

1 Potências e raízes



Observe, leia e responda no caderno.

a) Identifique os diferentes dados numéricos apresentados no texto e indique quais deles foram expressos por meio de potência de base 10.

b) De acordo com os dados apresentados no texto, a medida da massa do Sol é maior ou menor do que a medida da massa da Terra? Aproximadamente quantas mil vezes?

c) O Sol é como um grande reator termonuclear, realizando em seu núcleo a fusão de cerca de $6 \cdot 10^{11}$ kg de hidrogênio (H) em hélio (He) por segundo. Como a medida da massa de H convertida em He por segundo no núcleo do Sol se compara com a medida da massa média de um humano adulto?

d) As tempestades solares têm algum impacto na vida na Terra? Faça uma pesquisa na internet, em livros ou revistas e compartilhe as informações com a turma.

Uma das maiores erupções solares já observadas foi detectada em fevereiro de 2022 por uma sonda não tripulada da ESA/NASA. **c)** Considerando 65 kg a medida da massa média de um humano adulto, espera-se que os estudantes concluam que a medida da massa de H convertida em He por segundo no núcleo do Sol é cerca de 10 000 000 000 vezes (10^{10} vezes) a medida da massa média de um humano adulto.

O Sol é a estrela mais próxima da Terra e é essencial para a manutenção da vida no planeta por ser fonte de calor e de luz. Segundo estimativas da NASA (National Aeronautics and Space Administration), a medida da massa do Sol é cerca de $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg, aproximadamente $333 \cdot 10^{3}$ vezes a medida da massa da Terra, e a temperatura em seu núcleo, a região mais quente do Sol, mede cerca de $1{,}5 \cdot 10^{7}$ °C, mais de 400 000 vezes a temperatura média do corpo humano. **b)** Aproximadamente 333 mil vezes maior.

Erupções solares são comuns durante o ciclo de atividade do Sol e, nos períodos de alta atividade solar, as chamadas tempestades solares podem afetar sistemas eletrônicos e de comunicação na Terra e no espaço. **d)** Comente com os estudantes que as tempestades solares podem afetar indiretamente a vida humana na Terra, ao interferir em sistemas eletrônicos e de comunicação na Terra e no espaço.

a) Expressos por meio de potência de base 10: $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg (10^{30}); $333 \cdot 10^{3}$ (10^{3}) e $1{,}5 \cdot 10^{7}$ °C (10^{7}). Expresso sem o uso de potência de base 10: 400 000.

Capítulo 1 – Potências e raízes

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo retoma e amplia o trabalho com as operações potenciação e radiciação, abordando potências de base racional e expoente natural e estendendo o cálculo para potências de expoente negativo; potências de base 10 e a introdução da notação científica; raízes quadradas e raízes cúbicas exatas de números racionais, estendendo para índice n natural maior do que 1.

O trabalho com o tema da abertura, que apresenta números expressos em notação científica, pode ser feito com o intuito de levar os estudantes a avaliar os números que aparecem no texto. Isso possibilita verificar os conhecimentos que já possuem acerca de potências e o entendimento que eles têm desse tipo de notação.

Além disso, o tema proposto nesta abertura possibilita desenvolver atividades interdisciplinares com Ciências, abordando aspectos do Tema Contemporâneo Transversal **ciência e tecnologia**. Por exemplo, pode-se propor aos estudantes que realizem pesquisas a fim de descrever a composição da estrutura do Sistema Solar, a localização desse Sistema na Galáxia (a Via Láctea) e a dela no Universo. Para complementar, eles podem utilizar *softwares* que possibilitem visualizar o céu simulando planetários.

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho com o tema, sugerimos:

LONGHINI, M. D.; MENEZES, L. D. D. Objeto virtual de aprendizagem no ensino de Astronomia: algumas situações-problema propostas a partir do *software* Stellarium. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 27, n. 3, 2010. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/ejemplar/403123. Acesso em: 28 jul. 2022.

O trabalho apresenta uma discussão sobre a utilização de objetos virtuais de aprendizagem no ensino de Ciências e algumas propostas de atividades no *Stellarium*, um programa computacional de uso livre.

1. Potências

Habilidade da BNCC:
EF08MA01.

Este tópico trabalha a habilidade (EF08MA01), pois os estudantes poderão explorar diferentes situações envolvendo potências.

Para introduzir o trabalho com este tópico, providencie um tabuleiro de xadrez e objetos para representar os grãos de trigo (como pequenas bolinhas de papel amassado ou arroz cru) e solicite aos estudantes que façam uma simulação da lenda de Sessa para as primeiras casas. Provavelmente, quando chegarem à 7ª ou à 8ª casa do tabuleiro, perceberão que a quantidade de grãos aumenta de modo considerável, se comparada à quantidade inicialmente colocada na 1ª casa. Trabalhe com eles a regularidade presente nesse aumento antes de apresentar o texto que relaciona essa regularidade com potências de base 2.

1 Potências

Conta-se que o jogo de xadrez foi inventado há mais de 1 500 anos, como um jogo de estratégia militar.

Uma das muitas lendas para a origem do xadrez é conhecida como o mito de Sessa. De acordo com esse mito, o sábio Sessa apresentou o jogo a um rei da Índia, que ficou tão entusiasmado com o jogo que ofereceu a Sessa a liberdade de escolher o que ele desejasse como recompensa por tão notável invento. Toda a corte esperava que Sessa fosse pedir grandes riquezas, mas ele surpreendeu a todos com o seguinte pedido:

1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro;

2 grãos de trigo pela segunda casa;

4 grãos de trigo pela terceira casa;

8 grãos de trigo pela quarta casa;

16 grãos de trigo pela quinta casa;

...

e assim por diante, sempre dobrando o número de grãos da casa anterior até a 64ª casa (o tabuleiro de xadrez tem 64 casas).

DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

BETO CELLI/ARQUIVO DA EDITORA

Seu pedido provocou risos. Um invento tão brilhante e um pedido tão simples. O rei e toda a corte ficaram decepcionados. Você não ficaria?

Mas palavra de rei é palavra de rei, e ele pediu a seus criados que entregassem a Sessa um pequeno saco de grãos de trigo. Sessa recusou a oferta, dizendo que queria receber exatamente o que havia pedido. Nem um grão a mais, nem um grão a menos.

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

O rei pediu então a seus calculistas que efetuassem as contas. Depois de muitas horas de trabalho, eles chegaram a este número:

DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

Ou seja, o que Sessa esperava receber eram dezoito quintilhões, quatrocentos e quarenta e seis quatrilhões, setecentos e quarenta e quatro trilhões, setenta e três bilhões, setecentos e nove milhões, quinhentos e cinquenta e um mil, seiscentos e quinze grãos de trigo.

É um número tão grande que seriam necessários muitos anos para produzir tanto trigo!

De que maneira o rei cumpriria sua promessa? Que situação difícil a dele. Mas como ele poderia imaginar que daquele pedido tão simples resultaria tamanha quantidade de trigo?

Entendendo a aflição do monarca por não poder cumprir sua promessa, Sessa perdoou a dívida. Afinal, seu objetivo fora atingido: chamar a atenção do rei para que tomasse mais cuidado com suas promessas e seus julgamentos.

O final não poderia ser mais feliz: Sessa foi nomeado conselheiro do rei.

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Potências

Antes de apresentar o total de grãos de trigo obtido pelos calculistas, peça aos estudantes que estimem essa quantidade e a anotem no caderno. Depois, proponha que comparem a estimativa com as de dois colegas e conversem sobre os valores estimados.

Continue a leitura do texto com os estudantes e peça a eles que verifiquem se fizeram uma boa estimativa. O que se espera é que o valor estimado seja muito menor do que o valor real. Para incentivar a curiosidade intelectual e favorecer o desenvolvimento da **competência geral 2**, proponha aos estudantes descobrir quantos anos seriam necessários para produzir essa quantidade de grãos. A produção mundial anual de trigo no início dos anos 1990 era cerca de 500 milhões de toneladas, e, atualmente, são produzidos cerca de 750 milhões de toneladas.

Se necessário, oriente-os a pesquisar estimativas de quantos grãos de trigo há em 1 kg de trigo para determinar o total de anos necessários para produzir a quantia de trigo pedida por Sessa.

Incentive os estudantes a justificar o procedimento e as estimativas adotadas de maneira que desenvolvam, também, a **competência geral 7**.

Considerando, por exemplo, que um saco com 60 kg de trigo contém cerca de 1 380 000 grãos de trigo, isto é, cerca de $14 \cdot 10^5$ grãos, e que a quantidade pedida por Sessa é cerca de $18 \cdot 10^{18}$ grãos de trigo, seriam necessários cerca de $1{,}3 \cdot 10^{13}$ sacos ($18 \cdot 10^{18} : 14 \cdot 10^5 = 1{,}3 \cdot 10^{13}$), que equivale a cerca de $7{,}8 \cdot 10^{11}$ t de trigo ($1{,}3 \cdot 10^{13} \cdot 60 : 1000 = 7{,}8 \cdot 10^{11}$). Considerando a atual produção de trigo no mundo, de 750 milhões de toneladas ao ano, seriam necessários cerca de 1 040 anos ($7{,}8 \cdot 10^{11} : 750\,000\,000 = 1\,040$) para quitar a dívida do rei com Sessa.

Sugestão de leitura

Para ampliar o assunto, sugerimos:

ÁVILA, G. O jogo de xadrez. **Revista do Professor de Matemática**, n. 25, 1994. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/25/rpm1.htm. Acesso em: 19 jul. 2022.

Neste material, o autor aborda diversas considerações sobre o prêmio pedido por Sessa na lenda do xadrez.

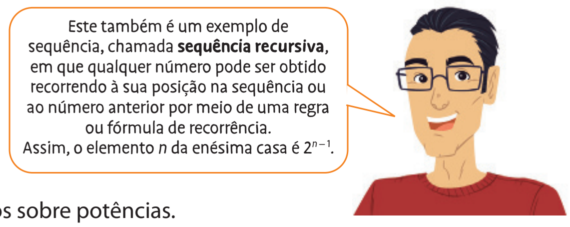
Potências

Proponha aos estudantes que verifiquem alguma regularidade na contagem de grãos de trigo de cada casa do tabuleiro de xadrez e registrem no caderno. Se julgar necessário, dê a dica de que podem usar potências de base 2. Depois, peça a alguns deles que mostrem na lousa o que fizeram no caderno e discuta com toda a turma cada situação. Se necessário, reproduza a sequência apresentada no livro (número de grãos de cada casa do tabuleiro expresso em potências de base 2) e explore-a com os estudantes.

Retome a potenciação com base natural antes de ampliar para os números racionais maiores ou iguais a 0 (zero).

O que acabamos de ler é um interessante exemplo de aplicação de potenciação, pois a quantidade de grãos de trigo de cada casa do tabuleiro pode ser expressa por uma potência. Observe:

1ª casa .... 2^0
2ª casa .... 2^1
3ª casa .... 2^2
⋮
64ª casa .... 2^{63}



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, vamos recordar o que sabemos sobre potências.

Revendo conhecimentos sobre potências

Você deve se lembrar do significado de 3^2 e de 3^3:

- $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
- $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

De modo geral, sendo a um número racional, temos:

- $a^2 = a \cdot a$
- $a^3 = a \cdot a \cdot a$

Considerando um expoente genérico n, em que n é um número inteiro, definimos a^n assim:

- se $n > 1$, então: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a}_{n \text{ fatores}}$
- se $n = 1$, então: $a^1 = a$
- se $n = 0$ e $a \neq 0$, então: $a^0 = 1$

Propriedades das potências

Para a resolução de um trabalho escolar, Mércia, Nilza e Norma precisaram calcular o valor da expressão: $(7^4 \cdot 7^2)^3 : 7^{15}$.

Acompanhe como cada uma delas fez.

- Mércia indicou as potenciações como multiplicações de fatores iguais e depois simplificou a fração, assim:

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$7^2 = 7 \cdot 7$

$7^4 \cdot 7^2 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

$(7^4 \cdot 7^2)^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)^3 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7)$

$$\frac{(7^4 \cdot 7^2)^3}{7^{15}} = \frac{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{\cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{7}} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$$

- Nilza calculou os produtos parciais, depois calculou os produtos dos produtos e, em seguida, calculou o quociente:

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2\,401$

$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

$7^4 \cdot 7^2 = 2\,401 \cdot 49 = 117\,649$

$(7^4 \cdot 7^2)^3 = (117\,649)^3 = 117\,649 \cdot 117\,649 \cdot 117\,649 = 1\,628\,413\,597\,910\,449$

$7^{15} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 4\,747\,561\,509\,943$

$\dfrac{(7^4 \cdot 7^2)^3}{7^{15}} = \dfrac{1\,628\,413\,597\,910\,449}{4\,747\,561\,509\,943} = 343$

- E Norma calculou o valor da expressão aplicando as propriedades da potenciação estudadas no ano anterior:

$(7^4 \cdot 7^2)^3 : 7^{15} = (7^{12} \cdot 7^6) : 7^{15} = 7^{18} : 7^{15} = 7^3 = 343$

Não há somente uma maneira de calcular o valor da expressão. Qual delas você acha mais simples?

Observe como Norma transformou a "potência de um produto" no "produto de uma potência".

ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

A expressão $(13 \cdot 8)^4$ é a potência de um produto.

$(13 \cdot 8)^4 = (13 \cdot 8) \cdot (13 \cdot 8) \cdot (13 \cdot 8) \cdot (13 \cdot 8) = 13 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 8 = 13^4 \cdot 8^4$

A expressão $13^4 \cdot 8^4$ é o produto de uma potência.

$(13 \cdot 8)^4 = 13^4 \cdot 8^4$

Esta é mais uma propriedade da potenciação.

Considere outros exemplos:

- $(-7 \cdot 2{,}3)^3 = (-7)^3 \cdot (2{,}3)^3$
- $\left(\dfrac{2}{13} \cdot \dfrac{4}{5}\right)^6 = \left(\dfrac{2}{13}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{4}{5}\right)^6$
- $(5^2 \cdot x^3)^5 = 5^{10} \cdot x^{15}$

Resumindo e generalizando as propriedades da potenciação, dados os números racionais a e b e os números naturais m e n, obtemos:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$ (com $a \neq 0$)

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$(a : b)^m = a^m : b^m$ (com $b \neq 0$)

Propriedades das potências

Trabalhe as propriedades da potenciação com os estudantes. Retome as potências de base negativa para verificar o grau de familiaridade que a turma apresenta com o assunto. É importante que os estudantes façam a distinção de potências de mesma base nesse caso para aplicarem as propriedades corretamente. Por exemplo, espera-se que eles percebam que $(-3)^2 \cdot 3^4$ ou $(-3)^3 \cdot 3^4$ não são casos de produtos de potências de mesma base, visto que as bases são diferentes (–3 e 3). Assim, para efetuar $(-3)^2 \cdot 3^4$, deve-se, primeiro, verificar que $(-3)^2 = 3^2$, visto que o expoente é par, e então obter:

$(-3)^2 \cdot 3^4 = 3^2 \cdot 3^4 = 3^6$

Já no caso de $(-3)^3 \cdot 3^4$, como $(-3)^3 = -3^3$, verificamos que $(-3)^3 \cdot 3^4 = -3^3 \cdot 3^4 = -3^7$, enquanto $3^3 \cdot 3^4 = 3^7$, o que obviamente resulta em produtos distintos, pois um é negativo e o outro é positivo.

Exercícios propostos

No **exercício 1**, se julgar necessário, solicite aos estudantes que façam um esquema similar a uma árvore de possibilidades a fim de visualizarem com maior facilidade a relação com potência. É possível fazer algumas "ramificações" e, então, generalizar e observar como a potência 6^3 pode representar a quantidade total de apartamentos desse condomínio.

As resoluções dos **exercícios 2**, **3** e **5** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Ao trabalhar o **item b** do **exercício 3**, chame a atenção dos estudantes para o fato de que há restrição para o valor de x. Essa é uma boa oportunidade para pedir a eles que justifiquem a presença dessa e de outras restrições verificando se percebem que x deve ser diferente de zero, pois a divisão por zero é uma indeterminação matemática.

No **exercício 4**, no **item a**, como $x = -2$, obtemos:

$A = 3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) - 6 =$
$= 3 \cdot 4 - 10 - 6 = -4$

Já no **item b**, com $x = \frac{1}{2}$, obtemos:

$A = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{2} - 6 =$

$= \frac{3}{4} + \frac{5}{2} - 6 = -\frac{11}{4}$

Com a intenção de buscar a melhor estratégia de resolução para o **exercício 5**, peça aos estudantes que formem trios. Alguns podem tentar resolvê-lo por meio de desenhos, mas devem perceber que é mais trabalhoso. Nesse caso, oriente-os a verificar se há relação do exercício com o conteúdo em estudo: potências. Aproveite o momento e faça-lhes outras perguntas, como: Quantos macacos haverá na 7ª linha? E na 11ª? (Respostas: respectivamente, 2^6 macacos e 2^{10} macacos).

Ao final, devem perceber que na enésima linha haverá 2^{n-1} macacos. Essa generalização colabora com o desenvolvimento das habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13). Se possível, explore outras situações como essa e solicite aos estudantes que indiquem uma generalização para cada situação.

Acompanhe mais um exemplo de aplicação das propriedades da potenciação.

$$\frac{a^{5x-2} \cdot a^{2+x}}{(a^{x-1})^2} = \frac{a^{5x-2+2+x}}{a^{2x-2}} = \frac{a^{6x}}{a^{2x-2}} = a^{6x-(2x-2)} = a^{6x-2x+2} = a^{4x+2}, \text{ em que } a \neq 0.$$

Observações

- Note que, para $a \neq 0$, $a^0 = 1$ é compatível com a propriedade: $a^m : a^n = a^{m-n}$ (se $a \neq 0$).
  Por exemplo:
  $a^2 : a^2 = \frac{a \cdot a}{a \cdot a} = 1$ e $a^{2-2} = a^0 = 1$
- É importante observar que, em geral, $(a^3)^2 \neq a^{3^2}$. Entenda por quê.
  - $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^6$ ou $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$
  - $a^{3^2} = a^{(3^2)} = a^9$
- Em $(a^3)^2$, o que está elevado ao quadrado é a^3.
- Em a^{3^2}, o que está elevado ao quadrado é o expoente 3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Em um condomínio há 6 prédios. Em cada prédio há 6 andares e, em cada andar, 6 apartamentos. Expresse na forma de potência o número de apartamentos desse condomínio. **1.** 6^3 apartamentos.

LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

2 Classifique as expressões a seguir em verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta.

a) $(4^5)^2 = 4^{5^2}$
b) $(4^5)^2 = (4^2)^5$
c) $(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2$
d) $(2 + 3)^2 = 2^2 + 3^2$
e) $(8 : 4)^3 = 8^3 : 4^3$
f) $(8 - 4)^3 = 8^3 - 4^3$

3 Simplifique as expressões a seguir, obtendo uma única potência.

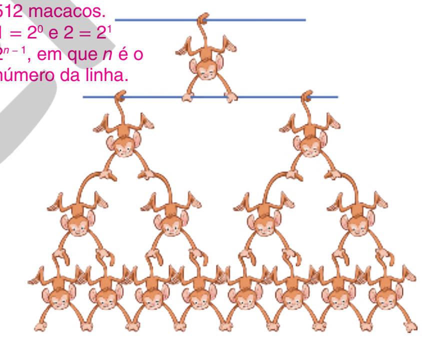
a) $(2^4 \cdot 2^6) : (2^5 \cdot 2^3)$ **3. a)** 2^2
b) $(x^4 \cdot x^2 \cdot x^3)^2 : (x^4)^5$, com $x \neq 0$ **3. b)** x^{-2}
c) $\frac{2^{5x-1} \cdot 2^{x+2}}{2^{3x-2}}$ **3. c)** 2^{3x+3}
d) $\frac{5^2 \cdot 5^3}{5^1 \cdot 5^0}$ **3. d)** 5^4

4 Sendo $A = 3x^2 + 5x - 6$, determine o valor de A para:

a) $x = -2$ **4. a)** -4
b) $x = \frac{1}{2}$ **4. b)** $-\frac{11}{4}$

5 Considere o desenho que Marina fez.

5. a) 512 macacos.
5. b) $1 = 2^0$ e $2 = 2^1$
5. c) 2^{n-1}, em que n é o número da linha.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que o número de macacos dobra a cada linha.

1ª linha → 1
2ª linha → 2
3ª linha → 2 · 2
4ª linha → 2 · 2 · 2

Suponha que Marina continue desenhando dessa forma – dobrando a cada linha a quantidade de macacos da linha anterior.

a) Qual será o número de macacos da 10ª linha?
b) Represente o número de macacos da 1ª e da 2ª linha por uma potência de base 2.
c) Escreva uma fórmula de recorrência para essa sequência.

2. a) Falsa, pois $(4^5)^2 = 4^{10}$ e $4^{5^2} = 4^{25}$.
2. b) Verdadeira, pois $(4^5)^2 = 4^{10}$ e $(4^2)^5 = 4^{10}$.
2. c) Verdadeira, pois $(2 \cdot 3)^2 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) = 2^2 \cdot 3^2$.
2. d) Falsa, pois $(2 + 3)^2 = 25$ e $2^2 + 3^2 = 13$.
2. e) Verdadeira, pois $(8 : 4)^3 = 8$ e $8^3 : 4^3 = 8$.
2. f) Falsa, pois $(8 - 4)^3 = 64$ e $8^3 - 4^3 = 448$.

PARA SABER MAIS

Novo modelo de placa para veículos

Placas com padrão do Mercosul entram em vigor em todo o país

Detran que ficar fora do padrão não conseguirá emplacar novos veículos

DANIEL CYMBALISTA/PULSAR IMAGENS

Novo modelo de placa veicular do Mercosul.

Após sucessivos adiamentos, começa a valer nesta sexta-feira (31) o prazo para que os Departamentos de Trânsito (Detrans) de todos os estados concluam os procedimentos para implantar a nova placa do Mercosul. [...]

[O novo modelo apresenta o padrão com três letras, um número, uma letra e dois números (FKJ6F08), diferente] do modelo atualmente adotado no país, com três letras e quatro números. O novo modelo permite mais de 450 milhões de combinações, o que, considerando o padrão de crescimento da frota de veículos no Brasil, pode levar mais de 100 anos.

“Atualmente são quase 5 milhões de veículos emplacados com a nova [placa de identificação veicular]. O governo federal estima que, até o fim de 2023, o Brasil já esteja com quase toda sua frota circulando com a nova placa”, informou a assessoria do Ministério da Infraestrutura.

Fonte: NASCIMENTO, L. Placas com padrão do Mercosul entram em vigor em todo o país. **AgênciaBrasil**, Brasília, DF, 31 jan. 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2020-01/prazo-para-uso-obrigatorio-de-placas-do-mercosul-comeca-nesta-sexta#. Acesso em: 20 jun. 2022.

Mais de 450 milhões de combinações diferentes! Será que a reportagem não exagerou? Para conferir a veracidade da informação sobre o número total de placas possíveis com o novo modelo, podemos fazer um cálculo combinatório.

Devemos considerar todas as possibilidades para cada uma das sete posições (casas) a serem preenchidas pelas 26 letras do alfabeto e pelos algarismos de 0 a 9.

Letra	Letra	Letra	Algarismo	Letra	Algarismo	Algarismo

A primeira casa pode ser preenchida de 26 maneiras diferentes; para cada uma dessas maneiras podemos preencher a segunda casa de outras 26 maneiras diferentes, o que resulta, para as duas primeiras casas, em um total de $26 \cdot 26$, isto é, 676 combinações diferentes.

26	**26**					

Para cada uma dessas 676 combinações, a terceira casa pode ser preenchida por 26 letras diferentes, o que resulta, para as três primeiras casas, em um total de $26 \cdot 26 \cdot 26$, ou seja, 17 576 combinações.

26	**26**	**26**				

Para saber mais

Essa seção possibilita aos estudantes desenvolver a habilidade (EF08MA03), pois é trabalhada uma situação envolvendo problemas de contagem e a aplicação do princípio multiplicativo. Se julgar necessário, apresente aos estudantes outras situações mais simples para eles aplicarem o princípio multiplicativo. Por exemplo, quantos números de 3 algarismos é possível formar com os algarismos 3, 5 e 7? ($3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$; 27 números). E se os algarismos não puderem se repetir? ($3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$; 6 números).

No caso das placas, os estudantes devem compor as letras e os algarismos, considerando que pode haver repetição. Por isso, devem obter: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$ (compondo cada placa com 4 letras e 3 algarismos), ou seja, $26^4 \cdot 10^3 = 456\,976 \cdot 1\,000$, determinando desse modo 456 976 000 placas.

Este contexto possibilita trabalhar atividades que desenvolvem o Tema Contemporâneo Transversal **educação para o trânsito** e, ainda, realizar um trabalho interdisciplinar com Geografia. Pode-se propor, por exemplo, que os estudantes pesquisem sobre o Mercosul e analisem a atuação desse bloco econômico em relação à mobilidade nos países que o integram.

Agora é com você!

Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes notem que, como são 10 algarismos possíveis (0 a 9) para cada casa e são sete casas, obtemos no total 10 000 000 números distintos, pois: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$ $= 10^7 = 10\,000\,000$

O mesmo raciocínio da atividade anterior se aplica na **atividade 2**. Porém, agora são 26 opções para cada casa, totalizando 8 031 810 176 placas diferentes, pois:

$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 =$
$= 26^7 = 8\,031\,810\,176$

Na **atividade 3**, espera-se que os estudantes respondam que Lúcia tem mais chance de determinar a placa do carro primeiro, já que ela precisa descobrir cada um dos números entre 10 000 possíveis ($10^4 = 10\,000$), enquanto Lucas precisa descobrir cada uma das letras entre 17576 possíveis ($26^3 = 26 \cdot 26 \cdot 26 = 17576$).

Potência com expoente inteiro negativo

A potência de base racional não nula estendida para expoente negativo usa como pontos de partida a divisão de potências de mesma base e a noção de número inverso. É importante que os estudantes relacionem as potências de expoente –1 como o inverso da base. Assim:

- $7^{-1} = \frac{1}{7}$
- $100^{-1} = \frac{1}{100}$
- $(0{,}5)^{-1} = \frac{1}{0{,}5} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ (o inverso de meio é 2)
- $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$ (o inverso de um terço é 3)
- $(1{,}01)^{-1} = \left(\frac{101}{100}\right)^{-1} = \frac{100}{101}$
- $(-3)^{-1} = -\frac{1}{3}$

Continuando a aplicar esse raciocínio, que os matemáticos dão o nome de **princípio fundamental da contagem**, para as sete casas obtemos o total de combinações possíveis.

26	**26**	**26**	**10**	**26**	**10**	**10**

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 456\,976\,000$$

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Use uma calculadora para responder ao que se pede.

3. Lúcia, porque ela terá de descobrir cada um dos números entre 10 000 possíveis, enquanto Lucas terá de descobrir cada uma das letras entre 17 576 possíveis combinações.

1 Quantas placas diferentes poderíamos obter se fossem usados apenas algarismos de 0 a 9 em todas as casas? **1.** 10^7 ou 10 000 000 placas.

2 Quantas placas diferentes poderíamos obter se fossem usadas apenas letras em todas as casas? **2.** 26^7 ou 8 031 810 176 placas.

3 Lúcia e Lucas são investigadores e precisam identificar um carro com placa de modelo com três letras e quatro números. Lúcia conhece apenas as letras da placa procurada; Lucas conhece apenas os números dessa placa. Qual deles tem maior probabilidade de determinar a placa desse carro primeiro? Por quê?

Potência com expoente inteiro negativo

Aprendemos a efetuar operações com potências que têm por base um número racional e por expoente um número natural.

Agora, vamos interpretar o significado de potências que tenham por base um número racional e por expoente um número inteiro negativo.

Considere o quociente $5^2 : 5^5$. Pela propriedade do quociente de potências de mesma base, obtemos:

$$5^2 : 5^5 = 5^{2-5} = 5^{-3}$$

Escrevendo o quociente na forma de fração, obtemos:

$$5^2 : 5^5 = \frac{5^2}{5^5} = \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot \cancel{5} \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^3} = \frac{1^3}{5^3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

Logo, $5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3$.

Note ainda que:

$$\left.\begin{array}{l} 5^{-3} = 5^{3 \cdot (-1)} = (5^3)^{-1} \\ 5^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{5^3} \end{array}\right\} (5^3)^{-1} = \frac{1}{5^3}$$

Isso significa que $(5^3)^{-1}$ pode ser interpretado como o inverso de 5^3 ou, ainda, que 5^{-3} é o inverso de 5^3.

A potência com expoente negativo de um número racional diferente de zero é igual a outra potência que tem a base igual ao inverso da base anterior e o expoente igual ao oposto do expoente anterior, ou seja, um expoente positivo.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

b) $10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1^3}{10^3} = \frac{1}{1\,000}$

c) $(-5)^{-2} = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{25}$

d) $\left(\frac{2}{14}\right)^{-1} = \left(\frac{14}{2}\right)^1 = 7$

e) $(0{,}25)^{-2} = \left(\frac{25}{100}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = 4^2 = 16$

Observação

- Todas as propriedades da potenciação já estudadas também são válidas para potências com expoente inteiro negativo.

Generalizando, podemos escrever:

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ou $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, para $a \neq 0$ e sendo n um número natural.

Assim, para $n = 1$ e $a \neq 0$, temos: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Isso significa que a^{-1} é o inverso de a, pois $\frac{1}{a}$ é o inverso de a.

Assim, se a^{-1} é o inverso de a, também a é o inverso de a^{-1}.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

6 Calcule as potências.

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ **6. a)** $\frac{16}{9}$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-3}$ **6. b)** $-\frac{64}{125}$

c) 10^{-3} **6. c)** $\frac{1}{1\,000}$

d) 2^{-1} **6. d)** $\frac{1}{2}$

e) $(-6)^{-2}$ **6. e)** $\frac{1}{36}$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}$ **6. f)** 81

7 Escreva na forma de potência de base 10.

a) $\frac{1}{100}$ **7. a)** 10^{-2}

b) $\frac{1}{10\,000}$ **7. b)** 10^{-4}

c) $\frac{1}{1\,000\,000}$ **7. c)** 10^{-6}

d) 0,1 **7. d)** 10^{-1}

e) 0,01 **7. e)** 10^{-2}

f) 0,001 **7. f)** 10^{-3}

8 Aplicando as propriedades de potenciação, reduza a uma só potência.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$ **8. a)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-1} : \left(-\frac{5}{4}\right)^{-6}$ **8. b)** $\left(-\frac{5}{4}\right)^5$

c) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-3}$ **8. c)** $\left(-\frac{3}{2}\right)^{-6}$

d) $[(-2)^0]^{-3}$ **8. d)** $(-2)^0$

9 Sabendo que $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ e $b = -\frac{5}{2}$, calcule o que se pede.

a) $a - b$ **9. a)** 4

b) $a : b$ **9. b)** $-\frac{3}{5}$

c) $a \cdot b^2$ **9. c)** $\frac{75}{8}$

d) $(a + b)^2$ **9. d)** 1

17

Potência com expoente inteiro negativo

Peça aos estudantes que exemplifiquem na lousa a generalização $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, para $a \neq 0$ e sendo n um número natural.

Possíveis respostas:

- $7^{-4} = \frac{1}{7^4} = \frac{1}{2\,401}$
- $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1\,000}$
- $(0{,}25)^{-2} = \frac{1}{(0{,}25)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} =$
  $= \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$

Exercícios propostos

Para resolver o **exercício 6**, pode-se considerar que, para determinar potências cujos expoentes são números racionais negativos, invertemos a base e trocamos o sinal do expoente. Assim:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{5}\right)^3 = -\frac{4^3}{5^3} =$
$= -\frac{64}{125}$

c) $10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1\,000}$

d) $2^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

e) $(-6)^{-2} = \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} = 9^2 = 81$

A resolução do **exercício 7** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Para resolver o **exercício 8**, podem-se aplicar as propriedades de potenciação. Assim, obtemos:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-5+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^{-1} : \left(-\frac{5}{4}\right)^{-6} =$
$= \left(-\frac{5}{4}\right)^{-1-(-6)} = \left(-\frac{5}{4}\right)^5$

c) $\left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right]^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{2 \cdot (-3)} =$
$= \left(-\frac{3}{2}\right)^{-6}$

d) $[(-2)^0]^{-3} = (-2)^{0 \cdot (-3)} = (-2)^0$

Para resolver **o exercício 9**, fazemos $a = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$ e $b = -\frac{5}{2}$. Assim, obtemos:

a) $a - b = \frac{3}{2} - \left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{8}{2} = 4$

b) $a : b = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

c) $a \cdot b^2 = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{25}{4} = \frac{75}{8}$

d) $(a + 2)^2 = \left(\frac{3}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(-\frac{2}{2}\right)^2 =$
$= (-1)^2 = 1$

Exercícios propostos

Para resolver o **exercício 10**, podemos determinar o valor numérico de x e de y para depois obter o produto entre esses números. Assim:

$$x = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9}$$

$$y = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{4}$$

$$x \cdot y = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Pelos **itens c** e **d** do **exercício 12**, percebemos que números entre 0 e 1 ficam maiores do que 1 ao serem elevados a expoentes negativos. Por outro lado, pelos **itens a** e **b**, percebemos que números maiores do que 1 ficam menores do que 1 ao serem elevados a expoentes negativos. Sugerimos abordar com os estudantes outros casos numéricos, aplicando a verificação desse fato. Para auxiliá-los, podem-se utilizar os recursos de uma planilha eletrônica para obter automaticamente a potência de números entre 0 e 1 elevados a um expoente negativo e a potência de números maiores do que 1 elevados a um expoente negativo. Dessa maneira, desenvolvem-se a **competência geral 2** e a **competência geral 7**, pois os estudantes exercitam a curiosidade intelectual ao buscar experimentar o resultado e, ainda, podem aprimorar a justificativa e os argumentos para explicar por que a propriedade é válida.

No **exercício 13**, relembre com os estudantes o que é uma sequência recursiva, escrevendo alguns exemplos na lousa. Ao final deste exercício, se possível, deixe-os compartilhar entre si alguns problemas elaborados. A seguir indicamos um exemplo de sequência recursiva para esse exercício, considerando $a^1 = 3$ e n natural tal que $n > 1$.

$a^n = 3 \cdot a^{n-1}$

Cujos termos são: 3, 9, 27, 81...

Destaque com os estudantes que essa mesma sequência numérica poderia ser dada de maneira não recursiva, com n natural tal que $n > 0$, por:

$a^n = 3^n$

Como escrever um número como potência de uma base dada

Se julgar necessário, retome com os estudantes a decomposição em fatores primos para números naturais. Além disso, caso eles ainda tenham alguma dificuldade na aplicação das propriedades da potenciação, peça-lhes que refaçam algumas atividades anteriores sobre esse assunto.

Exercícios propostos

No **exercício 14**, devemos decompor em fatores primos a base dada em cada item, a fim de determinar uma maneira de escrevê-la como potência. Assim:

a) $256 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8$

b) $1024 = 256 \cdot 2 \cdot 2 = 2^8 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{8+1+1} = 2^{10}$

c) $\frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

d) $\frac{1}{128} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$

A resolução do **exercício 15** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

---

10 Sendo $x = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^{-2}$ e $y = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^{-1}$, calcule $x \cdot y$. **10.** $\frac{1}{3}$

11 Considerando $m = \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2}\right)^{-3}$ e $n = \left(3 + \frac{1}{3}\right)^{2}$, encontre o valor de $m : n$. **11.** $\frac{10}{3}$

12 Utilizando uma calculadora, obtenha o valor das potências a seguir.

a) 2^{-8} **12. a)** 0,00390625

b) 4^{-5} **12. b)** 0,0009765625

c) $0{,}4^{-3}$ **12. c)** 15,625

d) $0{,}2^{-6}$ **12. d)** 15 625

12. Conclusões: Ficam maiores que 1; ficam menores que 1 e maiores que 0.

- Quando são elevados a um expoente negativo, o que acontece com os números maiores que 0 e menores que 1? E o que acontece com os números maiores que 1?

13 *Hora de criar* – Em duplas, criem um problema cada um envolvendo uma sequência recursiva em que os elementos da sequência podem ser escritos como uma potência de base 3. Troque de caderno com o colega, resolvam o problema um do outro e escrevam a fórmula de recorrência da sequência. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem os cadernos para corrigi-los. **13.** Resposta pessoal.

Como escrever um número como potência de uma base dada

Conhecendo o significado de uma potência e as propriedades de potências de mesma base, em certos casos podemos escrever um número na forma de potência de determinada base.

Por exemplo, vamos escrever:

a) 32 como potência de base 2.

Decompondo 32 em fatores primos, obtemos $32 = 2^5$.

b) $\frac{1}{8}$ como potência de base $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{8} = \frac{1^3}{2^3} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Portanto: $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

c) $\frac{1}{8}$ como potência de base 2.

$$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2^{-1} \cdot 2^{-1} \cdot 2^{-1} = 2^{-3}$$

Portanto: $\frac{1}{8} = 2^{-3}$

d) $\frac{8}{27}$ como potência de base $\frac{3}{2}$.

$$\frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

Portanto: $\frac{8}{27} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

14 Escreva os números a seguir como potência de base 2.

a) 256 b) 1 024 c) $\frac{1}{64}$ d) $\frac{1}{128}$

14. a) 2^8 **14. b)** 2^{10} **14. c)** 2^{-6} **14. d)** 2^{-7}

15 Escreva os números a seguir como potência de base 3.

a) 9 b) 81 c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{243}$

15. a) 3^2 **15. b)** 3^4 **15. c)** 3^{-3} **15. d)** 3^{-5}

18

16 Simplifique as expressões obtendo uma única potência.

a) $\frac{4^2 \cdot 8^3}{2^{10}}$ **16. a)** 2^3

b) $\frac{9^3 \cdot 27^2}{81}$ **16. b)** 3^8

17 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

a) Reproduzam o quadro a seguir no caderno e completem-na, atribuindo a *n* os números inteiros de 1 a 5. **17. a)** Construção de tabela.

Expoente inteiro positivo (*n*)	Potência de base 10 (10^n)	Valor da potência (resultado)	Número de zeros do resultado

b) Comparando a primeira e a última coluna do quadro do item **a**, escrevam uma regra para obter, sem fazer cálculos, o valor da potência indicada por 10^n.

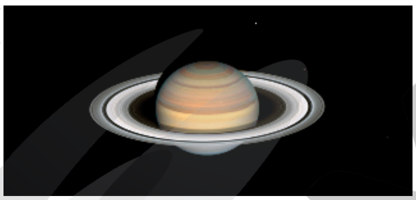
c) Reproduzam no caderno o quadro a seguir e completem-na atribuindo a *n* os números inteiros de –1 a –5. **17. c)** Construção de tabela.

Expoente inteiro negativo (*n*)	Potência de base 10 (10^n)	Valor da potência (resultado)	Número de casas decimais do resultado

d) Comparando a primeira e a última coluna do quadro do item **c**, escrevam uma regra para obter, sem fazer cálculos, o valor da potência indicada por 10^n.

18 A medida da distância média entre o planeta Saturno e o Sol é da ordem de 1 000 000 000 000 m. Expresse essa medida como uma potência de base 10. **18.** 10^{12} m

NASA, ESA, A. SIMON (NASA-GSFC), AND M. H. WONG (UC BERKELEY); IMAGE PROCESSING: A. PAGAN (STSCI)



Fotografia do planeta Saturno feita pelo telescópio espacial Hubble em 2021.

19 Escreva a representação decimal das potências de base 10 a seguir.

a) 10^{-1} **19. a)** 0,1

b) 10^{-2} **19. b)** 0,01

c) 10^{-3} **19. c)** 0,001

d) 10^{-5} **19. d)** 0,00001

e) 10^{-6} **19. e)** 0,000001

20 O diâmetro de um fio de cabelo fino mede aproximadamente 0,0001 m. Escreva essa medida como uma potência de base 10.
20. 10^{-4} m

21 No Sistema Internacional de Unidades (SI), para formar um múltiplo ou um submúltiplo de uma unidade de medida, é preciso colocar o prefixo desejado na frente do nome dessa unidade de medida. Esse mesmo procedimento também é usual para os símbolos.

Por exemplo:

- 1 megawatt = 1 MW = 1 000 000 W = 10^6 W
- 1 nanossegundo = 1 ns = 0,000000001 s = $= 10^{-9}$ s

Pesquise os vinte prefixos estabelecidos pelo Sistema Internacional de Unidades e complete o quadro a seguir. **21.** Construção de tabela.

Prefixos das unidades de medida no SI		
Nome	**Símbolo**	**Fator de multiplicação da unidade**
yotta	Y	10^{24} = = 1 000 000 000 000 000 000 000 000
zetta	Z	10^{21} = = 1 000 000 000 000 000 000 000

22 Reduza cada uma das expressões a seguir a uma única potência de base 10 e represente essa potência na forma decimal.

a) $\frac{10^3 \cdot 10^2}{10^7}$ **22. a)** 10^{-2} e 0,01

b) $\frac{10^4 \cdot 10^2}{10^9}$ **22. b)** 10^{-3} e 0,001

c) $\frac{10^{-16}}{10^{-4} \cdot 10^{-8}}$ **22. c)** 10^{-4} e 0,0001

d) $\frac{10^{-4} \cdot 10^{-8}}{10^{-9}}$ **22. d)** 10^{-3} e 0,001

17. b) Espera-se que os estudantes concluam que, para *n* inteiro e positivo, o valor da potência 10^n é o número formado por 1 seguido de *n* zeros.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Mostre que multiplicar 3 por 10^4 é o mesmo que dividir 3 por 10^{-4}.

Pense mais um pouco...: $3 \cdot 10^4 = 30\,000$

$3 : 10^{-4} = \frac{3}{10^{-4}} = \frac{3}{\frac{1}{10^4}} = 3 \cdot \frac{10^4}{1} = 3 \cdot 10^4 = 30\,000$

17. d) Espera-se que os estudantes concluam que, para *n* inteiro e negativo, o valor da potência 10^n é o número formado por 1 antecedido por $|n|$ zeros, com uma vírgula entre o primeiro e o segundo algarismo.

19

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 16** a **22** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Após os estudantes responderem ao **exercício 17**, solicite a alguns deles que registrem na lousa suas resoluções para todos discutirem a objetividade das redações das regras obtidas e para as compararem com suas próprias soluções. O exercício de redação leva os estudantes a ampliar e a diversificar o vocabulário, além de desenvolver a habilidade de organização do pensamento e de argumentação.

Nos **exercícios 18** e **20**, os estudantes lidarão com situações que envolvem medidas muito grandes ou muito pequenas. Vale a pena solicitar-lhes que, após a resolução do **exercício 20**, façam uma relação entre os dois exercícios, respondendo, por exemplo: Quantas vezes 10^{12} contém 10^{-4}? (Resposta: 10^{16}, pois $10^{12} : 10^{-4} = 10^{16}$).

O **exercício 21** oferece novamente a possibilidade de trabalhar com unidades de medida. Pergunte aos estudantes que outras unidades de medida eles conhecem que usam os prefixos estabelecidos pelo Sistema Internacional (SI). Informações sobre esse sistema podem ser consultadas em: **Sistema Internacional de Unidades**: SI. Duque de Caxias, RJ: INMETRO/CICMA/SEPIN, 2012. Disponível em: http://www.inmetro.gov.br/inovacao/publicacoes/si_versao_final.pdf. Acesso em: 19 jul. 2022.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC:
EF08MA04.

Esta seção apresenta a noção de juro simples e juro composto e aborda cálculos de porcentagem, possibilitando o desenvolvimento da habilidade (EF08MA04) e do Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho com esta seção, sugerimos o material:

SOUZA, H. J. C. **Matemática financeira**: uma aplicação direta no cotidiano. Dissertação (mestrado), Universidade Federal da Paraíba, 2013. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/tede/7547. Acesso em: 19 jul. 2022.

Nesta dissertação, o autor apresenta os principais tópicos de Matemática Financeira e explora o uso de planilhas eletrônicas para sistematizar algumas aplicações dessa área.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Trabalhando com juro


DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

Quando fazemos um empréstimo de dinheiro em um banco, pagamos uma espécie de aluguel por ele. Esse "aluguel" é chamado de **juro** (j).

Nas compras a prazo também pagamos juro. Do mesmo modo, recebemos juro quando fazemos uma aplicação financeira, por exemplo, na caderneta de poupança.

O que pagamos ou recebemos de juro é uma porcentagem sobre o dinheiro emprestado ou aplicado durante determinado **tempo** (t). Essa porcentagem é chamada de **taxa de juro** (i).

A quantia que se empresta ou se aplica é chamada de **capital** (C). A soma do capital com o juro é denominada **montante** (M).

Quando um capital é aplicado por certo tempo a determinada taxa de juro, o montante pode crescer de acordo com dois regimes de capitalização (processo de formação do juro): o **juro simples** ou o **juro composto**. Aqui veremos o juro simples.

Dada uma aplicação de R$ 500,00 com taxa de juro de 10% ao mês, em 3 meses, quanto essa aplicação renderá, se o juro for calculado sempre sobre os R$ 500,00?

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

A cada mês, o juro é dado por:

$$10\% \text{ de } 500 = \frac{10}{100} \cdot 500 = 50$$

Ao final dos 3 meses, o capital de R$ 500,00 renderá R$ 150,00 de juro.

O juro assim calculado é chamado de **juro simples**. Nesse caso, o montante é igual a R$ 650,00.

Agora, vamos chegar a uma fórmula para calcular juro simples.

Sendo C o capital, i a taxa de juro (expressa na forma decimal), t o tempo de aplicação ou de empréstimo (na mesma unidade de medida da taxa) e j o juro, obtemos:

Tempo (t)	Juro (j)
primeiro mês	$C \cdot i$
segundo mês	$C \cdot i + C \cdot i$
terceiro mês	$C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i$
...	...
t-ésimo mês	$\underbrace{C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i + ... + C \cdot i}_{t \text{ parcelas}}$

Assim, o cálculo do juro simples pode ser feito do seguinte modo:

$$j = C \cdot i \cdot t$$

Como exemplo, vamos considerar que um capital de R$ 2000,00 seja aplicado a uma taxa de juros de 2,5% ao mês, no regime de juro simples. Pelos dados, obtemos: C = R$ 2000,00 e $i = 2{,}5\% = 0{,}025$.

Podemos expressar o juro em função do tempo t por:

$$j = C \cdot i \cdot t\text{, ou seja, } j = 2000{,}00 \cdot 0{,}025 \cdot t\text{, ou, ainda, } j = 50t$$

Assim, após 3 meses, por exemplo, essa aplicação rende R$ 150,00 de juro, pois $j = 50 \cdot 3 = 150$.

Você sabia que pode programar uma planilha eletrônica para calcular o juro simples utilizando uma fórmula? Observe a planilha a seguir. Nela, na coluna **Juro (*j*)**, podemos digitar a fórmula do juro simples ($j = C \cdot i \cdot t$) relacionando os valores das colunas **Capital (*C*)**, **Taxa (*i*)** e **Tempo (*t*)**.

	A	B	C	D	E
1					
2		Capital (*C*)	Taxa (*i*)	Tempo (*t*)	Juro (*j*)
3					=B3*C3*D3
4					=B4*C4*D4

Perceba que, na célula que indicará o valor do juro, temos o capital multiplicado pela taxa multiplicado pelo tempo, assim como na fórmula que deduzimos anteriormente.

Assim, para saber o valor total do juro de uma aplicação, como no exemplo da página anterior, basta digitar os dados do problema e a planilha calculará o juro automaticamente.

	A	B	C	D	E
1					
2		Capital	Taxa	Tempo	Juro
3		R$ 500,00	10%	3	R$ 150,00
4		R$ 500,00	10%	4	R$ 200,00

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Um capital de R$ 18000,00 é aplicado à taxa de 8% ao ano no regime de juro simples. Determine o rendimento para uma aplicação de 2 anos. **1.** R$ 2880,00

2 Por quanto tempo o capital de R$ 12000,00 esteve aplicado à taxa de juro simples de 1,6% ao mês para render R$ 2304,00 de juro? **2.** 12 meses (ou 1 ano).

Multiplicação e divisão por potências de base 10

Para multiplicar, de maneira prática, um número por uma potência de base 10 com expoente inteiro positivo, como 10^1, 10^2, 10^3, ..., basta deslocar a vírgula uma, duas, três, ... casas para a direita. Isso é possível porque, nesse caso, o valor de cada uma dessas potências (resultado) tem um, dois, três, ... zeros.

Observe alguns exemplos.

a) $5{,}126 \cdot 10^1 = 51{,}26$

b) $0{,}0028 \cdot 10^2 = 0{,}28$

c) $12{,}0 \cdot 10^3 = 12000$

d) $8{,}56 \cdot 10^4 = 85600$

Já para multiplicar um número por uma potência de base 10 com expoente inteiro negativo, como 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, ..., deslocamos a vírgula uma, duas, três, ... casas para a esquerda, o que equivale a dividir esse número por 10^1, 10^2, 10^3, ... ou por 10, 100, 1000, ...

Trabalhando a informação

Este pode ser um bom momento para utilizar as planilhas eletrônicas como ferramenta para auxiliar os cálculos e organizar as informações. Se houver possibilidade, proponha aos estudantes a utilização de planilhas eletrônicas como exemplificado na seção.

As resoluções das atividades do **Agora quem trabalha é você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Ressalte a importância de observar o período de aplicação da taxa de juro e o tempo, pois sempre devem estar expressos na mesma unidade de medida. Por exemplo, na **atividade 1**, se a taxa fosse 8% ao mês e o tempo continuasse a ser 2 anos, deveríamos expressar o tempo em meses, ou seja, usar 24 meses nos cálculos.

Além disso, comente que devemos utilizar nos cálculos o valor da taxa expresso na forma decimal (ou de fração). Se julgar adequado, incentive os estudantes a obter taxas percentuais na forma decimal, calculando mentalmente. Por exemplo: $10\% = 0{,}1$; $50\% = 0{,}5$; $12\% = 0{,}12$; $2\% = 0{,}02$; $0{,}5\% = 0{,}005$.

Multiplicação e divisão por potências de base 10

Para retomar e, posteriormente, aplicar operações envolvendo potências de base 10, sugerimos que proponha multiplicações e divisões por 10, 100, 1000 etc. na lousa para alguns estudantes resolverem e a turma avaliar e fazer a validação. Espera-se que eles utilizem os conhecimentos que já construíram em anos anteriores.

Multiplicação e divisão por potências de base 10

Trabalhe os exemplos apresentados sobre multiplicação e divisão de números racionais por potências de base 10, de modo a garantir que os estudantes associem a multiplicação por uma potência de base 10 com expoente negativo à divisão, por exemplo:

- $5 \cdot 10^{-3} = 5 : 10^{3} = 5 : 1000 = 0{,}005$
- $12 : 10^{2} = 12 \cdot 10^{-2} = 0{,}12$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 23** ao **29** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

No **exercício 26**, antes de calcular os valores exatos de cada item, peça aos estudantes que estimem os expoentes, visto que têm condições de prever, em primeiro lugar, se os expoentes serão positivos ou negativos.

Aproveite os **exercícios 28** e **29** e verifique se os estudantes sabem o que é um açude (o mesmo que represa; construção para represar a água dos rios visando a utilizá-la na agricultura, no abastecimento de cidades e na indústria). Sugira que busquem mais informações sobre os açudes Castanhão e Orós e pesquisem quais são as principais represas que abastecem a região onde moram.

Observe alguns exemplos.

a) $356 \cdot 10^{-2} = 3{,}56$

b) $25\,678{,}2 \cdot 10^{-3} = 25{,}6782$

c) $0{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}05$

d) $2{,}45 \cdot 10^{-3} = 0{,}00245$

Nos exemplos anteriores, efetuamos multiplicações por potências de base 10, mas também é possível efetuar divisões. Acompanhe, a seguir, duas dessas multiplicações transformadas em divisões.

sinais opostos

a) $8{,}56 \cdot 10^{4} = 8{,}56 \cdot \frac{1}{10^{-4}} = \frac{8{,}56}{10^{-4}} = 8{,}56 : 10^{-4} = 85\,600$

sinais opostos

b) $0{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}5 \cdot \frac{1}{10^{1}} = \frac{0{,}5}{10^{1}} = 0{,}5 : 10^{1} = 0{,}05$

Observe que, na divisão por uma potência de base 10 com expoente inteiro negativo, como 10^{-4}, deslocamos a vírgula para a direita. Já na divisão por uma potência de base 10 com expoente inteiro positivo, como 10^{1}, deslocamos a vírgula para a esquerda.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

23 Efetue as multiplicações por potências de base 10. **23. c)** 0,004 **23. d)** 3,576

a) $3{,}6 \cdot 10^{4}$ **23. a)** 36 000
b) $0{,}025 \cdot 10^{2}$ **23. b)** 2,5
c) $0{,}4 \cdot 10^{-2}$
d) $3\,576 \cdot 10^{-3}$

24 O produto $0{,}000025 \cdot 0{,}000000002$ é igual a:

a) $50 \cdot 10^{-14}$
b) $5 \cdot 10^{-14}$
c) $5 \cdot 10^{-40}$
d) $5 \cdot 10^{-4}$
e) $50 \cdot 10^{-13}$

24. Alternativa **b**.

25 O valor da expressão $A = 5{,}24 \cdot 10^{-23} + 8{,}36 \cdot 10^{-21}$ é: **25.** Alternativa **c**.

a) $5{,}62 \cdot 10^{-21}$
b) $5{,}62 \cdot 10^{-23}$
c) $8{,}4124 \cdot 10^{-21}$
d) $8{,}4124 \cdot 10^{-23}$
e) $8{,}4124 \cdot 10^{-44}$

26 Descubra a potência de base 10 que deve ser colocada no lugar de *a* para que se obtenha:

a) $56{,}754 \cdot a = 567\,540$ **26. a)** 10^{4}
b) $0{,}003 \cdot a = 30$ **26. b)** 10^{4}
c) $a \cdot 23 = 0{,}000023$ **26. c)** 10^{-6}
d) $a \cdot 4{,}5 = 0{,}00045$ **26. d)** 10^{-4}

27 Converta as medidas a seguir usando potências de base 10.

a) 1 cm em m. **27. a)** 10^{-2} m
b) 100 km em m. **27. b)** 10^{5} m
c) 10 g em kg. **27. c)** 10^{-2} kg
d) 1 t em kg. **27. d)** 10^{3} kg
e) 10 cm² em m². **27. e)** 10^{-3} m²
f) 1 cm³ em dm³. **27. f)** 10^{-3} dm³

28 O açude Castanhão, no Ceará, com 325 km² de área inundada, é o maior açude da América Latina. Ele tem capacidade de armazenamento de $6{,}7 \cdot 10^{9}$ m³ de água, que corresponde a cerca de 37% de toda a capacidade de armazenamento dos reservatórios cearenses. Determine a capacidade total de armazenamento dos reservatórios cearenses.
28. Aproximadamente 18 110 000 000 m³.


HONÓRIO BARBOSA

O açude Castanhão, localizado no município de Jaguaribara (Ceará), é formado pela barragem das águas do rio Jaguaribe. (Fotografia de 2021.)

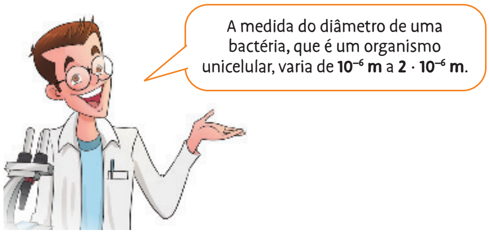
29 (UFMG) O açude Orós, um dos maiores reservatórios do Brasil, tem capacidade para armazenar $2 \cdot 10^{9}$ m³ de água. Sabe-se que o rio Amazonas lança no oceano Atlântico 50 milhões de litros de água por segundo.

Com base nesses dados, é correto afirmar que o tempo que o rio Amazonas leva para lançar no oceano Atlântico um volume igual à capacidade do açude Orós é: **29.** Alternativa **d**.

a) maior que 20 horas.
b) menor que 5 horas.
c) maior que 5 horas e menor que 10 horas.
d) maior que 10 horas e menor que 20 horas.

Notação científica

O uso das potências é bastante comum em áreas da Ciência como Medicina, Biologia, Astronomia, Geologia, entre muitas outras.



DANILLO SOUZA/ARQUIVO DA EDITORA

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Esse tipo de registro é chamado de **notação científica**. Ele fornece uma ideia precisa da ordem de grandeza (bilhões, milhões, milésimos etc.) de uma medida e é fundamental para trabalhar com números "muito grandes" ou "muito pequenos", isto é, muito próximos de 0. A ordem de grandeza de uma medida é dada pela potência de base 10.

Em notação científica, os números são escritos como produto de dois fatores, em que um deles é uma potência de base 10 com expoente inteiro (positivo ou negativo), e o outro é um número igual a 1 ou maior que 1 e menor que 10.

Observe os exemplos.

$$\boxed{1} \cdot \boxed{10^{-6}}$$
$$\boxed{5} \cdot \boxed{10^{-6}}$$
$$\boxed{6,96} \cdot \boxed{10^{8}}$$

potência de base 10 com expoente inteiro

número igual a 1 ou maior que 1 e menor que 10

Observe outros exemplos de números escritos em notação científica.

a) $5,2 \cdot 10^{6}$

b) $8,1 \cdot 10^{12}$

c) $1,25 \cdot 10^{-3}$

d) $2,236 \cdot 10^{-9}$

Agora, vamos escrever alguns números em notação científica.

a) 3 265

Para escrever esse número como produto de dois fatores, um deles uma potência de base 10, vamos multiplicá-lo por 10^{-3} e por 10^{3}, pois $10^{-3} \cdot 10^{3} = 10^{0} = 1$. Assim, obtemos:

$$3\,265 = \underbrace{3\,265 \cdot 10^{-3}} \cdot 10^{3} = \underbrace{3,265} \cdot 10^{3}$$

lugar da vírgula

b) $28,5 = \underbrace{28,5 \cdot 10^{-1}} \cdot 10^{1} = \underbrace{2,85} \cdot 10^{1}$

lugar da vírgula

Notação científica

Espera-se que os estudantes utilizem os conhecimentos que já construíram acerca de potências de base 10 e da multiplicação (ou divisão) por potências de 10 para aplicar no registro de um número (ou medida) em notação científica.

Aproveite o momento e comente o uso dos prefixos gregos (como **nano-**, **micro-**, **mili-**, **quilo-**, **mega-** e **giga-**) na designação das diferentes potências de base 10. Por exemplo, 1 miligrama corresponde a 10^{-3} grama, 1 micrograma, a 10^{-6} grama, e 1 nanograma, a 10^{-9} grama.

Amplie perguntando aos estudantes se conhecem mais palavras com esses prefixos. Podem surgir palavras como: nanotecnologia, microbiologia, microscópio, microcomputador, micróbio, milímetro, mililitro, quilograma, quilômetro e megalomania. A nanotecnologia, por exemplo, pode ser considerada um conjunto de atividades ou mecanismos que ocorrem em uma escala extremamente pequena, mas que tenham implicações no mundo real.

Pode-se propor aos estudantes que pesquisem as implicações da nanotecnologia no bem-estar das pessoas, desenvolvendo-se uma atividade interdisciplinar com Ciências.

Notação científica

Aborde com os estudantes as situações apresentadas, as quais envolvem números muito grandes ou muito pequenos, e verifique se eles conhecem outros exemplos. Sugira que façam uma pesquisa de notícias ou reportagens veiculadas pela mídia e cujo contexto apresente números expressos na notação científica (ou que poderiam ser mais bem expressados na notação científica) e, depois, registrem os valores encontrados em notação científica. É possível realizar um trabalho interdisciplinar com Ciências, por exemplo, propondo aos estudantes que façam a representação do Sol e dos planetas do Sistema Solar em escala (considerando o diâmetro médio de cada planeta e do Sol). Se possível, pode-se compor em escala, também, a representação das distâncias médias entre os planetas e o Sol, se na escola houver espaço suficiente. Uma alternativa seria posicionar a representação do Sol em um espaço comum da escola e determinar em que locais ao redor da escola deveriam ficar os demais planetas (considerando a distância média deles até o Sol).

Sugestão de leitura

Para ampliar e enriquecer seu trabalho com esse tema, sugerimos:

SILVA, E. M. E. O Sistema Solar. **PLANETÁRIO UFSC**. Disponível em: https://planetario.ufsc.br/o-sistema-solar/. Acesso em: 19 jul. 2022.

Neste texto, a autora apresenta informações sobre planetas e outros corpos do Sistema Solar, por exemplo, a distância média deles até o Sol e o diâmetro equatorial dos principais componentes do Sistema Solar.

c) 0,0056

Quando o número é menor que 1, devemos multiplicá-lo por uma potência de base 10 com expoente positivo e, para não mudar o valor, multiplicar o resultado pela potência de base 10 com expoente oposto ao da primeira multiplicação, ou seja, expoente negativo.

$$0{,}0056 = \underbrace{0{,}0056 \cdot 10^3}_{} \cdot 10^{-3} = \underbrace{5{,}6}_{} \cdot 10^{-3}$$

lugar da vírgula

d) $0{,}65 = \underbrace{0{,}65 \cdot 10}_{} \cdot 10^{-1} = \underbrace{6{,}5}_{} \cdot 10^{-1}$

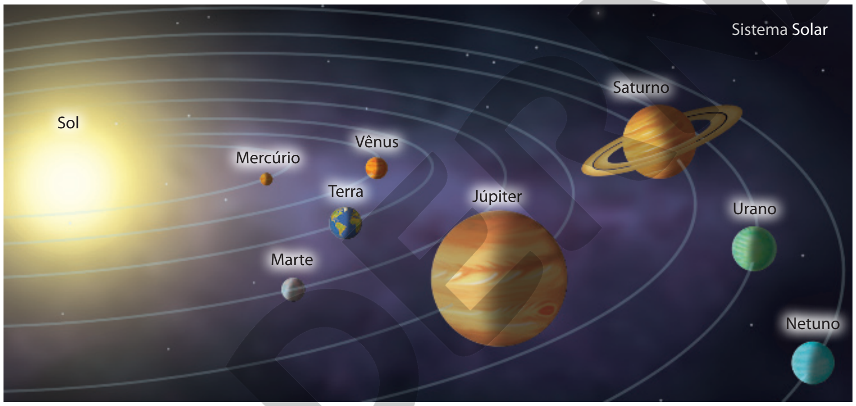
lugar da vírgula

Verifique agora como a notação científica é usada para expressar:

a) a medida da distância da Terra até o Sol;

$$150\,000\,000 \text{ km} = 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}$$

PAULO MANZI/ARQUIVO DA EDITORA

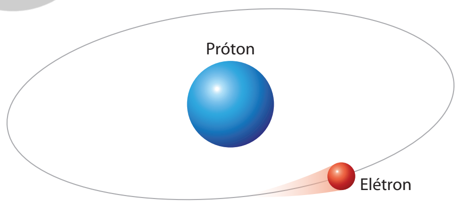


Representação esquemática do Sistema Solar. O Sol, os planetas e as órbitas não estão representados nas proporções reais nem com cores reais.

b) a medida da massa do átomo de hidrogênio.

$$0{,}00000000000000000000000166 \text{ g} = 1{,}66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$$

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Representação esquemática do átomo de hidrogênio. O próton, o elétron e sua órbita não estão representados nas proporções reais nem com cores reais.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

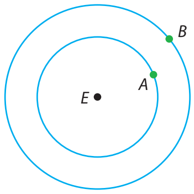
30. a) $1{,}26 \cdot 10^7$ 30. b) $3{,}61 \cdot 10^8$ 30. c) $1{,}5 \cdot 10^{10}$

30 Escreva em notação científica cada um dos números a seguir. 30. d) $4{,}586 \cdot 10^{-3}$

a) 12,6 milhões
b) $361 \cdot 10^6$
c) 15 bilhões
d) $458{,}6 \cdot 10^{-5}$
e) $3\,576 \cdot 10^{-3}$
f) 0,0000000000001

30. e) $3{,}576 \cdot 10^0$ 30. f) $1 \cdot 10^{-13}$

31 Dois planetas, *A* e *B*, giram em torno de uma estrela *E* em órbitas praticamente circulares e no mesmo plano.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

A medida da distância de *A* até a estrela *E* é $15 \cdot 10^7$ km, e a medida da distância de *B* até a estrela *E* é $2{,}3 \cdot 10^8$ km. Desprezando os diâmetros desses astros, calcule a medida da distância máxima e a medida da distância mínima entre *A* e *B* e expresse-as em notação científica. 31. $3{,}8 \cdot 10^8$ km; $8 \cdot 10^7$ km

32 Na abertura do capítulo, vimos que:

a) a medida da massa do Sol é aproximadamente $2 \cdot 10^{30}$ kg. Expresse, em notação científica, essa medida em tonelada.
b) reações de fusão nuclear no núcleo do Sol convertem cerca de $6 \cdot 10^{11}$ kg de hidrogênio (H) em hélio (He) por segundo. Sabendo que 1 ano tem aproximadamente $3 \cdot 10^7$ segundos, quantas toneladas de H são convertidas em He por ano no núcleo do Sol? Dê sua resposta em notação científica.

32. a) $2 \cdot 10^{27}$ toneladas. 32. b) $1{,}8 \cdot 10^{16}$ toneladas.

33 Cada mililitro de sangue humano contém, em média, $5 \cdot 10^3$ glóbulos vermelhos. No corpo de um ser humano adulto circulam cerca de 5,5 litros de sangue. De acordo com esses dados, qual é o número médio, em notação científica, de glóbulos vermelhos que há no corpo de um adulto?
33. $2{,}75 \cdot 10^7$ glóbulos vermelhos.

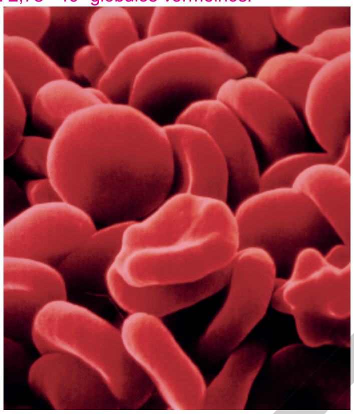


PHOTO INSOLITE REALITE/SCIENCE PHOTO LIBRARY/FOTOARENA

Glóbulos vermelhos (hemácias) do sangue humano em fotomicrografia eletrônica de varredura, colorida artificialmente. (Ampliação de 2 400 vezes.)

34 A tabela a seguir mostra os dados da movimentação comercial entre o Brasil e o exterior de 2019 a 2021. Reúna-se com um colega e construam um gráfico de colunas com os dados da tabela. Lembrem-se de indicar os valores em milhões de dólares no eixo vertical, os anos no eixo horizontal, e de dar um título ao gráfico. Note que cada um dos dados da movimentação comercial (Saldo, Importações, Exportações), por ano, corresponde a uma coluna no gráfico, ou seja, para cada um dos três anos no gráfico, deve haver três colunas. 34. Construção de gráfico.

Movimentação comercial entre o Brasil e o exterior (2019-2021)*

Ano	Saldo (milhões de dólares)	Importações (milhões de dólares)	Exportações (milhões de dólares)
2019	35 000	186 000	221 000
2020	50 000	159 000	209 000
2021	61 000	219 000	280 000

* Valores aproximados.

Dados obtidos em: BRASIL. Resultados do comércio exterior brasileiro: dados consolidados. Disponível em: https://balanca.economia.gov.br/balanca/publicacoes_dados_consolidados/pg.html. Acesso em: 10 mar. 2022.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 30** ao **34** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

No **exercício 32**, há novamente a oportunidade de trabalhar com transformações entre unidades de medida de massa em situações contextualizadas. Nesse exercício, os estudantes poderão utilizar a relação existente entre duas unidades de massa: o quilograma e a tonelada, além de escrever tal medida em notação científica.

Amplie as discussões com os estudantes fazendo-os refletir sobre o gráfico do **exercício 34**, com questões como:

- Por que não é conveniente, neste caso, colocar os números "completos" no gráfico? (Possível resposta: Porque são formados por muitos algarismos, o que dificultaria a organização das informações.)
- O que aconteceria se esquecessem de escrever a informação "milhões de dólares" no eixo vertical do gráfico? (Resposta possível: A ordem de grandeza dos valores monetários seria alterada, ficaria "milhares" de dólares em vez de "milhões".)

Ao trabalhar com saldos, importações e exportações nesse exercício, abordamos o Tema Contemporâneo Transversal **educação financeira**.

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 35** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

2. Calculando com raízes

Habilidade da BNCC: **EF08MA02**.

Este tópico possibilita explorar a habilidade (EF08MA02) ao associar a potenciação à radiciação. Retome o cálculo de raiz quadrada, propiciando aos estudantes mobilizarem conhecimentos já construídos em anos anteriores.

Retomamos o uso do conceito de área de quadrado como base para o cálculo de raiz quadrada por ser um facilitador para a compreensão dos estudantes, além de tornar o aprendizado mais significativo. Ressaltamos a conexão das Unidades Temáticas **Números**, **Geometria** e **Grandezas e medidas**.

Explore a figura da **situação 1**. Peça aos estudantes que justifiquem as afirmações feitas em relação às áreas:

- Nas condições expostas, por que a área de cada quadradinho que compõe o quadrado maior (de lado de 1 cm) mede $\frac{1}{25}$ cm²? $\Big($Resposta: Espera-se que percebam que, se o quadrado maior tem área medindo 1 cm² e é composto de 25 quadradinhos idênticos, a medida da área de cada quadradinho corresponde a $\frac{1}{25}$ da medida da área do quadrado grande, ou seja: $\frac{1}{25}$ de 1 cm² $= \frac{1}{25}$ cm².$\Big)$
- Por que a área do quadrado alaranjado mede $\frac{9}{25}$ cm²? $\Big($Resposta esperada: Porque o quadrado alaranjado é composto de 9 quadradinhos de área medindo $\frac{1}{25}$ cm² cada um.$\Big)$
- Além disso, os estudantes podem perceber pela figura que a medida do lado do quadrado alaranjado é $\frac{3}{5}$ da medida do lado do quadrado maior, ou seja: $\frac{3}{5}$ de 1 cm $= \frac{3}{5}$ cm.

34. a) Exportações: $2{,}21 \cdot 10^{11}$ (2019); $2{,}09 \cdot 10^{11}$ (2020); $2{,}80 \cdot 10^{11}$ (2021)
Importações: $1{,}86 \cdot 10^{11}$ (2019); $1{,}59 \cdot 10^{11}$ (2020); $2{,}19 \cdot 10^{11}$ (2021)
Saldo: $3{,}5 \cdot 10^{10}$ (2019); $5{,}0 \cdot 10^{10}$ (2020); $6{,}1 \cdot 10^{10}$ (2021)

Com base no gráfico que vocês construíram, façam o que se pede.

a) Expressem em notação científica os valores, em dólares, apresentados no gráfico.
b) Para cada ano, verifiquem se a diferença entre os valores das exportações e os das importações é igual ao saldo. **34. b)** Sim.
c) Qual foi a média aproximada das exportações nesse período? E das importações? E do saldo?
d) Para cada ano, escrevam, com um número negativo, o quanto falta para a exportação atingir a média ou, com um número positivo, em quanto a exportação excedeu a média.
e) No gráfico, tracem uma reta horizontal pelo valor da média das importações. Façam uma estimativa para responder à questão: a parte da coluna da importação de 2021 que ficou acima da reta traçada é equivalente à soma das partes das outras duas colunas que ficaram abaixo da reta? **34. e)** Sim.

35 (UFSE) Um raio de luz, propagando-se no vácuo, desloca-se com velocidade de $3{,}0 \cdot 10^5$ km/s aproximadamente. Se a distância entre dois planetas mede $9{,}0 \cdot 10^7$ km, então o tempo, em minuto, que o raio de luz levará para cobrir essa distância é: **35.** Alternativa **b**.

a) 5,2. **b)** 5. **c)** 4,5. **d)** 4. **e)** 3,8.

36 ***Hora de criar*** – Em duplas, cada um de vocês vai elaborar um problema utilizando a notação científica. Para o problema, considerem situações do dia a dia que envolvam números que podem ser escritos em notação científica, como a velocidade da conexão da internet, o consumo de energia elétrica de um equipamento, o pacote de dados de um plano de uma operadora de celular, entre outros. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **36.** Resposta pessoal.

34. c) Exportações: $2{,}37 \cdot 10^{11}$; importações: $1{,}88 \cdot 10^{11}$; saldo: $4{,}9 \cdot 10^{10}$
34. d) 2019: $-1{,}60 \cdot 10^{10}$; 2020: $-2{,}80 \cdot 10^{10}$; 2021: $+4{,}30 \cdot 10^{10}$

2 Calculando com raízes

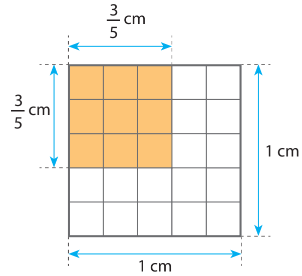
Raiz quadrada de números racionais

Acompanhe algumas situações nas quais desejamos calcular a raiz quadrada de números racionais.

Situação 1

Observe o quadrado alaranjado na figura. Considerando a medida da área do quadrado maior igual a 1 cm², e a medida do comprimento de seu lado igual a 1 cm, podemos dizer que:

- a medida da área de cada quadradinho é $\frac{1}{25}$ cm²;
- a medida da área do quadrado alaranjado é $\frac{9}{25}$ cm²;
- a medida do comprimento do lado do quadrado alaranjado é $\frac{3}{5}$ cm.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Note que a área do quadrado alaranjado pode ser obtida da seguinte forma:

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}, \text{ ou seja, } \frac{9}{25} \text{ cm}^2$$

Nesse caso, o número $\frac{3}{5}$ é chamado de **raiz quadrada** de $\frac{9}{25}$, que indicamos por $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

(lemos: "a raiz quadrada de nove vinte e cinco avos é três quintos").

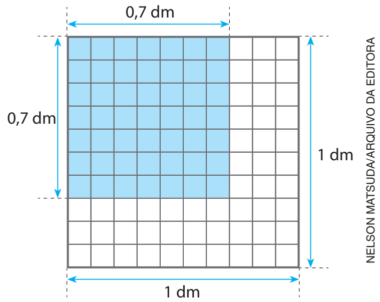
O número $\frac{9}{25}$ é um número racional quadrado perfeito.

Situação 2

A medida da área do quadrado azul da figura pode ser obtida do seguinte modo:

$0,7 \cdot 0,7 = 0,49$, ou seja, $0,49\ dm^2$

O número 0,7 é a raiz quadrada de 0,49, que indicamos por $\sqrt{0,49}$.



Assim, obtemos: $\sqrt{0,49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10} = 0,7$

Observe que, para calcular o valor da raiz quadrada de 0,49, precisamos determinar o número racional que, multiplicado por ele mesmo, resulta em 0,49. Esse número é 0,7.

$$0,7 \cdot 0,7 = 0,7^2 = \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \frac{49}{100} = 0,49$$

Assim, obtemos: $\sqrt{0,49} = 0,7$, visto que $0,7^2 = 0,49$

Dizemos que o número 0,49 é um número racional quadrado perfeito.

Dado um número racional quadrado perfeito, a sua raiz quadrada é um número racional positivo ou nulo cujo quadrado é o número dado.

Observe outros exemplos.

a) $\sqrt{\frac{81}{256}} = \frac{9}{16}$ **b)** $\sqrt{\frac{4}{225}} = \frac{2}{15}$ **c)** $\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} = 0,1$

Observações

- Quando queremos considerar o oposto de uma raiz quadrada, fazemos a indicação colocando o sinal de menos à esquerda da raiz. Por exemplo:

  a) $-\sqrt{\frac{9}{25}}$ indica o oposto de $\sqrt{\frac{9}{25}}$. **b)** $-\sqrt{0,49}$ indica o oposto de $\sqrt{0,49}$.

- Todo número racional, quando elevado ao quadrado, resulta no número 0 ou em um número racional positivo. Logo, não existe um número racional que seja a raiz quadrada de um número racional negativo.

  Por exemplo, a raiz quadrada do número $-\frac{100}{9}$ não é um número racional, pois não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte em $-\frac{100}{9}$.

- A raiz quadrada de um número racional positivo será um número racional somente se esse número for um quadrado perfeito.

  Por exemplo, a raiz quadrada do número $\frac{2}{3}$ não é racional, pois não existe número racional que, elevado ao quadrado, resulte em $\frac{2}{3}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

37 Calcule:

a) $\sqrt{0,04}$ **37. a)** 0,2 b) $\sqrt{\frac{36}{49}}$ **37. b)** $\frac{6}{7}$ c) $\sqrt{0,81}$ **37. c)** 0,9 d) $-\sqrt{\frac{64}{100}}$ **37. d)** $-\frac{4}{5}$ e) $\sqrt{\frac{25}{9}}$ **37. e)** $\frac{5}{3}$ f) $-\sqrt{\frac{49}{4}}$ **37. f)** $-\frac{7}{2}$

Calculando com raízes

A **situação 2** pode ser trabalhada de maneira análoga ao que foi feito com a primeira situação.

Se julgar adequado, proponha aos estudantes que efetuem, utilizando uma calculadora simples, a raiz quadrada de alguns números racionais. Podem verificar, por exemplo, o que aparece no visor da calculadora quando efetuam a raiz quadrada de:

- 0,25 → aparece no visor 0,5; ou seja, $\sqrt{0,25} = 0,5$;
- 2 → aparece no visor 1,4142135;
- $\frac{3}{5}$ (ou 3 : 5 = 0,6) → aparece no visor 0,7745966.

Proponha aos estudantes que usem números negativos para tentar obter a raiz quadrada na calculadora e verifiquem se será indicado "erro" no visor. Além disso, se julgar oportuno, comente que alguns números racionais não apresentam raízes racionais, como acontece com a raiz quadrada de 2 ou de 5 e que, nesses casos, consideramos aproximações ao utilizar a potência expressa como número decimal.

Exercícios propostos

Acompanhe uma resolução para o **exercício 37**:

a) $\sqrt{0,04} = \sqrt{\frac{4}{100}}$

$\frac{4}{100} = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \left(\frac{2}{10}\right)^2$

$\sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{2}{10} = 0,2$

b) $\frac{36}{49} = \frac{6 \cdot 6}{7 \cdot 7} = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \left(\frac{6}{7}\right)^2$

$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$

c) $\sqrt{0,81} = \sqrt{\frac{81}{100}}$

$\frac{81}{100} = \frac{9}{10} \cdot \frac{9}{10} = \left(\frac{9}{10}\right)^2$

$\sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10} = 0,9$

d) $\frac{64}{100} = \frac{8 \cdot 8}{10 \cdot 10} =$

$= \frac{8}{10} \cdot \frac{8}{10} = \left(\frac{8}{10}\right)^2$

$-\sqrt{\frac{64}{100}} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

e) $\frac{25}{9} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

$\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$

f) $\frac{49}{4} = \frac{7 \cdot 7}{2 \cdot 2} = \frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \left(\frac{7}{2}\right)^2$

$-\sqrt{\frac{49}{4}} = -\frac{7}{2}$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 38** e **39** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

No **exercício 40**, verifique se os estudantes associam corretamente o fato de que a medida da área de um quadrado é dada pelo quadrado da medida do lado. Assim, para um quadrado cuja área é $\frac{64}{49}$ cm^2, seu lado será $\frac{8}{7}$ cm (pois $\sqrt{64} = 8$ e $\sqrt{49} = 7$). Sugira aos estudantes que escrevam 0,0009 em notação científica antes de determinar sua raiz quadrada:

$0{,}0009 = 9 \cdot 10^{-4} =$
$= 3^2 \cdot (10^{-2})^2 = (3 \cdot 10^{-2})^2$

Desse modo, eles podem verificar que 0,0009 pode ser expresso pelo quadrado de $(3 \cdot 10^{-2})$. Portanto, a raiz quadrada de 0,0009 é o número que, elevado ao quadrado, resulta em 0,0009, ou seja, $\sqrt{0{,}0009} = 3 \cdot 10^{-2} = 0{,}03$. Podem concluir que o lado da região quadrada cuja área mede 0,0009 m^2 mede 0,03 m (ou 3 cm).

Pense mais um pouco...

Para explorar a **atividade 1**, incentive os estudantes a observar o significado da igualdade $x^2 = 400$ e, assim, determinar o valor de x, desenvolvendo a habilidade (EF08MA09). Espera-se que eles percebam que devem procurar um número que, elevado ao quadrado, resulte em 400 e verifiquem haver dois números nessas condições: 20 e –20.

Pergunte a eles se podemos afirmar que $x = \sqrt{400}$. Espera-se que observem que, desse modo, não conseguimos o valor –20, que também satisfaz a igualdade dada. Logo, nesse caso, o cálculo da raiz quadrada nos fornece apenas o valor positivo de x. Ressalte que, se x indicasse alguma medida (como o comprimento do lado de um quadrado), no entanto, ele não poderia assumir valores negativos, e assim a raiz quadrada equivaleria ao valor de x.

38 Identifique os números cuja raiz quadrada é um número racional. **38.** Alternativas **b** e **f**.

a) –25 b) $\frac{1}{16}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $-\frac{1}{9}$ e) $\frac{8}{10}$ f) $\frac{25}{9}$

39 Sabendo que $\sqrt{123\,904} = 352$, calcule mentalmente:

a) $-\sqrt{1\,239{,}04}$ **39. a)** –35,2 b) $\sqrt{12{,}3904}$ **39. b)** 3,52

40 Descubra a medida do lado de cada região quadrada representada a seguir, considerando a medida da área de cada uma delas.

40. Área menor: $\frac{8}{7}$ cm

medida da área = $\frac{64}{49}$ cm^2

medida da área = 0,0009 m^2

40. Área maior: 0,03 m ou 3 cm

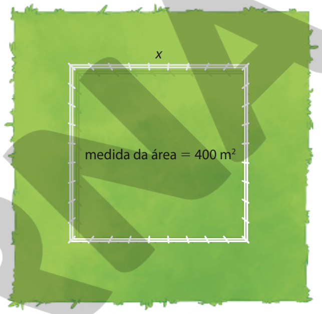
Pense mais um pouco... FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

1 Sendo $x^2 = 400$, responda às perguntas a seguir.

a) Quais são os valores de x que tornam essa sentença verdadeira? **1. a)** –20 e 20.

b) Qual é o valor que x pode assumir se ele representa, em metro, a medida do comprimento do lado de um terreno quadrado? **1. b)** 20



2 Sabendo que $(4{,}8)^2 = 23{,}04$, responda às perguntas.

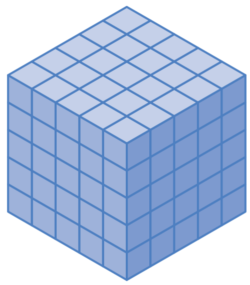
a) Quais são os valores de x que tornam verdadeira a igualdade $x^2 = 23{,}04$? **2. a)** –4,8 e 4,8.

b) Das respostas ao item **a**, qual é o valor que x pode assumir se 23,04 representa a medida da área de um quadrado? **2. b)** 4,8

Outras raízes

Observe a imagem do cubo.

Tomando o cubinho  como unidade de medida de volume, podemos dizer que a medida do volume do cubo maior – cuja medida da aresta é 5 unidades de medida de comprimento – é 125  ($5^3 = 125$).



A situação inversa seria calcular a medida da aresta do cubo maior sabendo que a medida do seu volume é 125  e que a medida da aresta de um cubinho é 1 unidade de medida de comprimento.

Assim, a medida da aresta do cubo maior corresponde a um número que, elevado ao cubo, resulta em 125. Esse número é a **raiz cúbica** de 125.

$$\sqrt[3]{125} = 5\text{, pois } 5^3 = 125$$

(lemos: "raiz cúbica de cento e vinte e cinco")

Então, a aresta do cubo maior mede 5 unidades de medida de comprimento.

28

Acompanhe outros exemplos.

a) $\sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{3}$, pois $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

(lemos: "raiz quarta de um oitenta e um avos")

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$, pois $(-2)^5 = -32$

(lemos: "raiz quinta de menos trinta e dois")

De modo geral, para determinar $\sqrt[n]{a}$ (lemos: "raiz enésima de *a*"), sendo *n* um número natural diferente de 0 e *a* um número racional, verificamos dois casos:

- para *n* **par** e $a \geqslant 0$: $\sqrt[n]{a}$ é o número racional *b* (com $b \geqslant 0$), tal que $b^n = a$;
- para *n* **ímpar**: $\sqrt[n]{a}$ é o número racional *b*, tal que $b^n = a$.

Essa operação é chamada **radiciação**, a operação inversa da potenciação.

radical

índice → $\sqrt[n]{a} = b$ ← **raiz** (resultado da radiciação)

radicando

O símbolo $\sqrt{\ }$ é chamado de **radical**. Se esse símbolo não estiver acompanhado de um índice, indica a raiz quadrada de um número *a*.

Acompanhe alguns exemplos de cada um dos dois casos gerais.

- **1º caso:** *n* é um número natural não nulo par, e *a* é um número racional não negativo.

  Como exemplo, vamos calcular a raiz quadrada de 25.

  Há dois números racionais que, elevados ao quadrado, resultam em 25: −5 e +5, pois $(-5)^2 = 25$ e $(+5)^2 = 25$.

  Devemos, então, dizer que a raiz quadrada de 25 é 5 ou −5?

  Para garantir um resultado único, convencionou-se que $\sqrt{a}$ representa a raiz quadrada positiva de *a*. Assim, $\sqrt{25} = 5$.

  Observe outros exemplos.

  a) $\sqrt{36} = 6$ **b)** $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ **c)** $\sqrt{1{,}44} = 1{,}2$ **d)** $\sqrt[8]{0{,}00000001} = 0{,}1$

  Note que o número 0,00000001 é a representação decimal de $(0{,}1)^8$. Assim: $\sqrt[8]{(0{,}1)^8} = 0{,}1$

  Com o auxílio de uma calculadora, também podemos calcular $\sqrt[8]{0{,}0000001}$ digitando:

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

▶ Note que, se *a* é um número racional negativo ($a < 0$), sendo *n* par, não é possível definir $\sqrt[n]{a}$ como um número racional.
Como exemplo, vamos mostrar que $\sqrt{-4}$ não é um número racional. De fato, se $\sqrt{-4}$ fosse um número racional *m*, deveríamos ter $m^2 = -4$, o que é impossível, pois o quadrado de qualquer número racional é sempre um número não negativo. Logo, $\sqrt{-4}$ não é um número racional.

Outras raízes

Na introdução de raízes de outros índices, naturais maiores que 2, iniciada na página anterior, o uso do conceito de volume do cubo para dar significado à raiz cúbica pode ser abordado como foi feito anteriormente com o uso da área do quadrado para o cálculo da raiz quadrada.

Se possível, providencie calculadoras simples para os estudantes efetuarem o cálculo de algumas raízes, conforme mostrado para $\sqrt[8]{0{,}00000001}$.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 41** a **48** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Verifique como os estudantes procedem na resolução do **exercício 46** e compartilhe as diferentes estratégias que surgirem. Espera-se que eles retomem conhecimentos construídos em anos anteriores, que serão sistematizados e ampliados ainda neste volume.

Um procedimento esperado é observarem que, considerando o valor de $h = 44{,}1$, devem efetuar a divisão de 44,1 por 4,9 (obtendo 9) e, em seguida, calcular a raiz quadrada do valor obtido, ou seja, $\sqrt{9}$, que fornecerá o valor de *t* procurado.

O **exercício 48** possibilita discutir os critérios de ordem das operações a serem efetuadas em uma expressão numérica, assim como chama a atenção para o uso indevido do cálculo que será formalizado no estudo das propriedades dos radicais, assunto que será tratado no 9º ano.

- **2º caso:** *n* é um número natural não nulo ímpar, e *a* é um número racional.

Acompanhe, a seguir, alguns exemplos de raízes de índice ímpar.

a) $\sqrt[3]{64} = 4$, pois $4^3 = 64$

b) $\sqrt[5]{\dfrac{243}{32}} = \dfrac{3}{2}$, pois $\left(\dfrac{3}{2}\right)^5 = \dfrac{243}{32}$

c) $\sqrt[3]{-64} = -4$, pois $(-4)^3 = -64$

d) $\sqrt[5]{-\dfrac{243}{32}} = -\dfrac{3}{2}$, pois $\left(-\dfrac{3}{2}\right)^5 = -\dfrac{243}{32}$

Quando *n* for ímpar, a raiz enésima terá o mesmo sinal do radicando.

Observação

- A raiz enésima de zero é zero, com *n* natural não nulo. Ou seja: $\sqrt[n]{0} = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

42. Porque nenhum número racional elevado ao quadrado resulta em –49.

41 Responda às questões a seguir.

a) Dois números, elevados ao quadrado, resultam em 100. Quais são eles? **41. a)** –10 e 10

b) Qual é a raiz quadrada de 100? **41. b)** 10

42 Por que não existe a raiz quadrada de –49 quando trabalhamos com números racionais?

43 Calcule, se for um número racional, o valor de:

a) $-\sqrt{441}$ **43. a)** –21

b) $\sqrt{-441}$ **43. b)** Não é um número racional.

44 Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa.

a) $\sqrt{10^2} = \sqrt{-10^2}$

b) $\sqrt{10^2} = \sqrt{(-10)^2}$

c) $\sqrt{(-7)^2} = -7$

d) $\sqrt{(-7)^2} = 7$

e) $-\sqrt{10^2} = \sqrt{(-10)^2}$

f) $-\sqrt{(-10)^2} = -10$

g) $\sqrt[3]{8} = -\sqrt[3]{-8}$

h) $\sqrt[n]{0} = 0$, para $n \geqslant 2$

44. a) Falsa. **44. b)** Verdadeira. **44. c)** Falsa. **44. d)** Verdadeira. **44. e)** Falsa. **44. f)** Verdadeira. **44. g)** Verdadeira. **44. h)** Verdadeira.

45 Calcule:

a) $2 \cdot \sqrt{900}$ **45. a)** 60

b) $\dfrac{3}{4} \cdot \sqrt{2{,}56}$ **45. b)** 1,2

c) $\sqrt{0} - \sqrt[5]{-1}$ **45. c)** 1

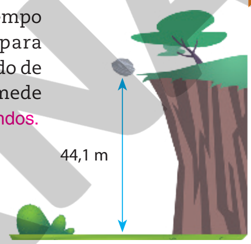
d) $\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}} - \sqrt{\dfrac{25}{64}}$ **45. d)** $-\dfrac{31}{24}$

46 Um objeto solto de determinada altura leva certo tempo para atingir o solo.

Esse tempo é dado pela relação $t = \sqrt{\dfrac{h}{4{,}9}}$.

Nessa relação, t representa o tempo, em segundo, e *h* representa a altura, em metro.

Calcule quanto tempo um objeto leva para atingir o solo caindo de uma altura que mede 44,1 m. **46.** 3 segundos.



CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

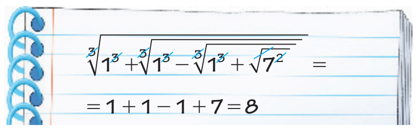
47 Calcule o valor da expressão a seguir. **47.** 3

$\sqrt[3]{18 + \sqrt{84 - \sqrt{4} + \sqrt{25}}}$

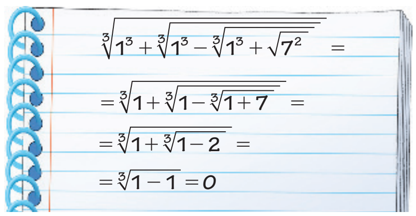
48 A professora pediu aos estudantes que calculassem o valor da expressão a seguir.

$\sqrt[3]{1^3 + \sqrt[3]{1^3 - \sqrt[3]{1^3} + \sqrt{7^2}}}$

Daniel fez deste modo:



Fernanda fez desta maneira:



ILUSTRAÇÕES: CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Algum deles acertou? Em caso afirmativo, quem? **48.** Sim; Fernanda.

30

3 Potências com expoente fracionário

Até aqui, estudamos potências com expoente inteiro. Agora, vamos estudar as potências com expoente fracionário, relacionando potenciação com radiciação.

Já vimos que, se $b^n = a$, então $b = \sqrt[n]{a}$, com n natural não nulo e $b \geqslant 0$.

Como exemplo, vamos considerar a potência $(7^3)^2 = 7^6$.

De acordo com a definição de raiz quadrada, verificamos que 7^3 é a raiz quadrada de 7^6, pois $(7^3)^2 = 7^6$.

Assim, podemos escrever:

$$\sqrt{7^6} = 7^3 \text{ ou } \sqrt[2]{7^6} = 7^{\frac{6}{2}}$$

numerador: expoente do radicando

denominador: índice do radical

Toda expressão com radical de radicando positivo pode ser escrita como uma potência em que a base é o radicando e o expoente é expresso por uma fração que tem, no numerador, o expoente do radicando e, no denominador, o índice do radical.

Acompanhe, por exemplo, as expressões a seguir.

a) $\sqrt[8]{5^3} = 5^{\frac{3}{8}}$

Observe que: $\left(5^{\frac{3}{8}}\right)^8 = 5^{\frac{3}{8}\cdot 8} = 5^3$

b) $\sqrt[7]{3^2} = 3^{\frac{2}{7}}$

Observe que: $\left(3^{\frac{2}{7}}\right)^7 = 3^{\frac{2}{7}\cdot 7} = 3^2$

c) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

Observe que: $\left[\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3 = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}\cdot 3} = \left(\frac{1}{8}\right)^2$

Se a é um número racional positivo, m é um número inteiro e n é um número natural não nulo, temos: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Verifique outros exemplos.

a) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[3]{2^{15}} = 2^{\frac{15}{3}} = 2^5$

c) $\sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$

d) $7^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{7^4}$

e) $9^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

f) $0{,}25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

Observação

- As propriedades válidas para as potências de expoente inteiro também são válidas para as potências de expoente fracionário que tenham base positiva.

  Por exemplo:

  $3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}} = 3^{\frac{13}{15}}$ — Para determinar o produto de potências de mesma base, conservamos a base e adicionamos os expoentes.

  $7^{\frac{2}{5}} : 7^{\frac{1}{9}} = 7^{\frac{2}{5}-\frac{1}{9}} = 7^{\frac{13}{45}}$ — Para determinar o quociente de potências de mesma base, conservamos a base e subtraímos os expoentes.

  $\left(2^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{10}}$ — Para determinar a potência de uma potência, conservamos a base e multiplicamos os expoentes.

3. Potências com expoente fracionário

Habilidade da BNCC: **EF08MA02**.

Se julgar necessário, retome a propriedade "potência de potência" da potenciação e comente com os estudantes que, ao estender o cálculo de potências para expoentes racionais, é pressuposto que todas as propriedades continuem válidas.

Identifique na lousa os elementos do exemplo dado para que eles percebam o que ocorre.

- Pela propriedade de potência de potência, obtemos: $(7^3)^2 = 7^6$

  Assim podemos escrever que, se $(7^3)^2 = 7^6$, então $7^3 = \sqrt{7^6} = 7^{\frac{6}{2}}$, pois $7^{\frac{6}{2}} = 7^3$.

  Forneça outros exemplos, como:

- Verificamos que: $(5^4)^3 = 5^{12}$

  Como $(5^4)^3 = 5^{12}$, então

  $5^4 = \sqrt[3]{5^{12}} = 5^{\frac{12}{3}}$, pois: $5^{\frac{12}{3}} = 5^4$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 49** ao **51** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

No **exercício 52**, é interessante que os estudantes comparem com outros colegas não apenas a solução encontrada em cada item, mas também as resoluções, pois aqui o uso de propriedades poderá facilitar os cálculos.

Uma possível resolução para esse exercício é a seguinte:

a) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4+3}{12}} = 2^{\frac{7}{12}}$

b) $2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4-3}{12}} = 2^{\frac{1}{12}}$

c) $\left(12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}} = 12^{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}} = 12^{\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}} =$
$= 12^{\frac{4}{6}} = 12^{\frac{2}{3}}$

d) $3\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{\frac{1}{16}} = 3\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 3\frac{1}{4}$

Para saber mais

Se houver disponibilidade na escola, leve os estudantes à sala de informática para experimentarem diferentes usos de comandos em planilhas eletrônicas. O mesmo pode ser feito com o uso de calculadoras científicas.

Este trabalho possibilita desenvolver o Tema Contemporâneo Transversal **ciência e tecnologia**.

As resoluções das **atividades 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

49 Represente na forma de potência com expoente fracionário.

a) $\sqrt[3]{2^2}$ **49. a)** $2^{\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt[4]{5^3}$ **49. b)** $5^{\frac{3}{4}}$ c) $\sqrt[3]{10}$ **49. c)** $10^{\frac{1}{3}}$

50 Escreva a expressão com radical que corresponda a cada potência a seguir.

a) $2^{\frac{3}{4}}$ **50. a)** $\sqrt[4]{2^3}$ b) $9^{\frac{1}{3}}$ **50. b)** $\sqrt[3]{9}$ c) $8^{\frac{1}{2}}$ **50. c)** $\sqrt{8}$

51 Calcule:

a) $\sqrt{3^6}$ **51. a)** 27 b) $512^{\frac{1}{3}}$ **51. b)** 8 c) $\sqrt[4]{2^8}$ **51. c)** 4

52 Reduza a uma só potência, usando as propriedades das potências.

a) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ **52. a)** $2^{\frac{7}{12}}$ b) $2^{\frac{1}{3}} : 2^{\frac{1}{4}}$ **52. b)** $2^{\frac{1}{12}}$ c) $\left(12^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{4}{3}}$ **52. c)** $12^{\frac{2}{3}}$ d) $3\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$ **52. d)** $3\frac{1}{4}$

PARA SABER MAIS

A linguagem das máquinas


LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Os *softwares* são programados com uma sintaxe, isto é, os comandos são digitados seguindo um conjunto de regras que definem a estrutura e as expressões corretas para determinada linguagem de programação. Isso faz com que a máquina entenda corretamente a operação que deve efetuar ao receber cada comando.

Para calcular 2^3 em seu computador, Paulo precisava digitar a sequência 2^3.

Quando Paulo digitava 2^3 e, em seguida, pedia o resultado, a resposta que aparecia era 8.

Para calcular potências de potências, era necessário acrescentar parênteses.

Ou seja, se ele digitasse 2^(3^2), a máquina calculava $2^{3^2} = 2^9 = 512$, mas, se digitasse 2^3^2, o computador calculava $(2^3)^2 = 8^2 = 64$.

Para garantir resultados corretos em seus cálculos, utilizando ferramentas computacionais e até uma simples calculadora, é fundamental prestar atenção às regras e propriedades das operações e escrever as expressões corretamente. Isso também é importante quando você faz cálculos no papel: o uso adequado dos parênteses nas expressões, por exemplo, precisa ser respeitado.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Para saber mais:

1 Paulo digitou as informações de cada item no *software* de computador. Descubra e efetue as expressões que ele queria calcular. Escreva os resultados na forma de potência.

a) 2^3^3 **1. a)** $(2^3)^3 = 2^9$

b) 2^(3^(2^3)) **1. b)** $2^{3^{2^3}} = 2^{3^8} = 2^{6\,561}$

c) (2^3)^4 **1. c)** $(2^3)^4 = 2^{12}$

d) ((3^2)^3)^2 **1. d)** $((3^2)^3)^2 = 3^{12}$

2 A importância dos parênteses não é uma novidade. De fato, você já deve ter observado, por exemplo, que:
$(a + b)^2 \neq a + b^2$

Escreva como você digitaria as expressões a seguir, considerando que, no caso da divisão, o comando para a máquina é "/".

a) $(a + b)^2$ **2. a)** (a + b)^2

b) $a + b^2$ **2. b)** a + b^2

c) $\frac{1}{a+b}$ **2. c)** 1/(a + b)

d) $\frac{1}{a} + b$ **2. d)** 1/a + b

e) $\frac{a+b}{c+d}$ **2. e)** (a + b)/(c + d)

f) $\frac{a}{c+d} + b$ **2. f)** a/(c + d) + b

3 Dependendo da máquina ou do *software* utilizado, o comando para calcular a raiz quadrada de um número pode ser a tecla $\sqrt{\ }$, a tecla $\sqrt[2]{x}$ ou a sequência *sqrt* (sigla do termo em inglês *square root*, que significa “raiz quadrada”). Para obter a raiz cúbica, não existindo a tecla apropriada, você pode digitar o seguinte: a^(1/3), que equivale a $\sqrt[3]{a}$.

Do mesmo modo, para obter a raiz quadrada, você também pode digitar: a^(1/2), que equivale a $\sqrt{a}$. Dependendo da máquina, não é necessário colocar os parênteses na fração $\frac{1}{2}$. Na dúvida, entretanto, é melhor colocá-los.

Como você digitaria as expressões a seguir? Lembre-se de que o comando de divisão da máquina é “/” e tome o devido cuidado com os parênteses.

a) $\sqrt{a+b}$ **3. a)** (a + b)^(1/2)

b) $a+\sqrt{b}$ **3. b)** a + b^(1/2)

c) $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}$ **3. c)** 1/(a + b)^(1/2)

d) $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+b$ **3. d)** 1/a^(1/2) + b

4 Expressões numéricas com números racionais

Já vimos que muitas vezes precisamos calcular o valor de expressões numéricas para resolver problemas. Aprendemos também que:

- Quando a expressão tem sinais de associação, eles devem ser eliminados na seguinte ordem: primeiro calculam-se as expressões que estão entre parênteses, depois as expressões entre colchetes, e, finalmente, as expressões entre chaves.
- As operações devem ser efetuadas nesta ordem:
  a) potenciação e radiciação, na ordem em que aparecem;
  b) multiplicação e divisão, na ordem em que aparecem;
  c) adição e subtração, na ordem em que aparecem.

Vamos calcular o valor de algumas expressões numéricas com números racionais.

a) $(-2)^{-3}-\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{2}{3}-\left(-1+\frac{1}{2}\right)\right]=$

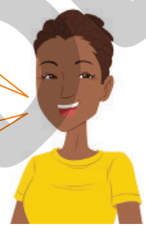
$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}-\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{2}+\frac{1}{2}\right)\right]=$

$=-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=$

$=-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\cdot\left[\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\right]=$

$=-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{6}=$

$=-\frac{1}{8}-\frac{7}{24}=-\frac{3}{24}-\frac{7}{24}=-\frac{10}{24}=-\frac{5}{12}$



ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

4. Expressões numéricas com números racionais

Se julgar necessário, escreva na lousa alguns exemplos de expressões numéricas envolvendo apenas operações com números inteiros. Em seguida, trabalhe com os estudantes os exemplos apresentados de expressões numéricas envolvendo números racionais. Nas resoluções dessas expressões, retome as operações com números racionais na forma de fração.

Amplie os exemplos com outras expressões numéricas envolvendo números racionais expressos na forma decimal.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 53** ao **56** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Amplie o **exercício 54** propondo aos estudantes que escrevam no caderno a quinta igualdade da sequência. Espera-se que eles apresentem a seguinte resposta:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Uma possível resolução para o **exercício 57** é a seguinte:

$$x = \frac{1}{2} - 0{,}8 + \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{8}{10} + \frac{3}{4} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{8}{10} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{8}{10} + \frac{3}{4} = -\frac{16}{20} + \frac{15}{20} = -\frac{1}{20}$$

Alternativa **b**.

Pense mais um pouco...

Esta é mais uma oportunidade para os estudantes exercitarem suas estratégias pessoais de cálculo envolvendo radiciação. Os diferentes procedimentos que surgirem na resolução devem ser apresentados à turma. Como estratégia adquirida ao longo do Ensino Fundamental, eles podem perceber que, se $\sqrt[3]{a} = 4$, então $4^3 = a$, ou seja, $a = 64$. Assim, $\sqrt[6]{a} = \sqrt[6]{64} = 2$.

Da mesma maneira, se $\sqrt[6]{a} = 3$, então $3^6 = a$, ou seja, $a = 729$ e, assim, $\sqrt{a} = \sqrt{729} = 27$.

---

b) $-\frac{3}{7} \cdot (0{,}36)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} : \left(\frac{2744}{729}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$$= -\frac{3}{7} \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^2} + \frac{1}{2} : \sqrt[3]{\left(\frac{14}{9}\right)^3} =$$

$$= -\frac{3}{7} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{14} =$$

$$= -\frac{18}{70} + \frac{9}{28} = -\frac{36}{140} + \frac{45}{140} = \frac{9}{140}$$

Expressamos as potências de expoente fracionário como raízes:

$$(0{,}36)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{36}{100}} = \sqrt{\left(\frac{6}{10}\right)^2} \text{ e } \left(\frac{2744}{729}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2744}{729}} = \sqrt[3]{\left(\frac{14}{9}\right)^3}$$

Calculamos a raiz quadrada de $\left(\frac{6}{10}\right)^2$ e calculamos a raiz cúbica de $\left(\frac{14}{9}\right)^3$. Depois, efetuamos a divisão.

Efetuamos as multiplicações. Reduzimos as frações ao mesmo denominador e efetuamos a adição.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

53. O produto é 1. Os valores de *A* e *B* são números inversos.

53 Considere as expressões.

$$A = \left[\frac{1}{2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2\right] \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right) \text{ e}$$

$$B = \frac{5}{7} : \left[2 - \left(\frac{2}{3} + 3\right)\right].$$

Determine o produto $A \cdot B$. O que se pode concluir sobre os valores de A e de B?

54 Note que as seguintes igualdades são verdadeiras e têm uma regularidade.

a) $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Observando a sequência dessas igualdades, determine mentalmente o valor da expressão a seguir. Verifique, em seguida, se seu resultado está correto, efetuando os cálculos no caderno.

$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ **54.** $\frac{4}{5}$

55 Escreva, na forma decimal, o número que representa o valor da expressão:

$\left(-1 + \frac{1}{5}\right)^2 : \left(0{,}4 - \frac{1}{5}\right)^2 - 0{,}7 \cdot \sqrt{\frac{36}{49}}$ **55.** 15,4

56 (UPF-RS) O valor da expressão **56.** Alternativa **c.**

$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 : \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + 2^{-7}$ é:

a) -2.
b) -1.
c) 0.
d) $\frac{1}{2}$.

57 (Unifor-CE) Qual é o valor de *x*? **57.** Alternativa **b.**

$$x = \frac{1}{2} - 0{,}8 + \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}}$$

a) $\frac{19}{20}$
b) $-\frac{1}{20}$
c) $-\frac{1}{10}$
d) $-\frac{19}{10}$

58 ***Hora de criar*** – Em dupla, cada um cria uma expressão numérica que contenha adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e raiz quadrada. Troquem de caderno e, depois de cada um calcular o valor da expressão elaborada pelo outro, destroquem para corrigi-las. **58.** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com um colega e respondam às questões a seguir.

a) A raiz cúbica de um número *a* é 4. Qual é a raiz sexta de *a*? *Pense mais um pouco...*: **a)** 2

b) A raiz sexta de um número *a* é 3. Qual é a raiz quadrada de *a*? **b)** 27

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Sendo $x = (2^2)^3$, $y = (2^3)^2$ e $z = 2^{3^2}$, calcule:

a) $x \cdot y \cdot z$ na forma de uma potência. **1. a)** 2^{21}

b) $x : y$ **1. b)** 1 ou 2^0

c) $x : z$ **1. c)** $\frac{1}{8}$ ou $\frac{1}{2^3}$

2 Em determinadas condições, uma célula divide-se em duas a cada 30 segundos. Partindo-se de uma única célula, quantas células existirão no vigésimo minuto? Escreva a resposta na forma de potência. **2.** 2^{40} células.

3 (Vunesp) O valor da expressão

$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ é: **3.** Alternativa **a.**

a) $\frac{3}{4}$.   c) $\frac{1}{3}$.   e) 5.

b) $\frac{4}{3}$.   d) $\frac{1}{4}$.

4 (UFSM-RS) O valor da expressão $\frac{16^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{1}{3}}} : \frac{2^4}{8^2}$ é igual a: **4.** Alternativa **d.**

a) 2^{-1}.   c) $2^{\frac{1}{2}}$.   e) 2^6.

b) 2^0.   d) 2^4.

5 Sendo $a = 5^0 - 2^{-2}$, $b = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ e $c = 12^0 - 3$, calcule:

a) a^b **5. a)** $\frac{9}{16}$

b) $(b - a)^c$ **5. b)** $\frac{16}{25}$

c) $\left(\frac{ab}{c}\right)^c$ **5. c)** $\frac{16}{9}$

6 Escreva cada potência a seguir na forma de fração.

a) $(2,5)^{-2}$ **6. a)** $\frac{4}{25}$

b) $(0,15)^{-3}$ **6. b)** $\frac{8\,000}{27}$

c) $(0,1)^{-4}$ **6. c)** 10 000

d) $(-0,01)^{-2}$ **6. d)** 10 000

7 Escreva as frações a seguir na forma de potência com expoente inteiro negativo.

a) $\frac{1}{10^2}$ **7. a)** 10^{-2}

b) $\frac{1}{16}$ **7. b)** 2^{-4}

c) $\left(-\frac{1}{25}\right)$ **7. c)** -5^{-2}

d) $\frac{1}{125}$ **7. d)** 5^{-3}

e) $\frac{1}{15}$ **7. e)** 15^{-1}

f) $\left(-\frac{1}{100}\right)$ **7. f)** -10^{-2}

8 Escreva as informações a seguir em notação científica.

a) No dia 31 de julho de 2018, Marte esteve a 57,8 milhões de quilômetros da Terra.

b) As últimas projeções das Nações Unidas indicam que a população mundial deve chegar a 8,5 bilhões em 2030 e a 9,7 bilhões em 2050.

8. a) $5,78 \cdot 10^7$ quilômetros.
b) $8,5 \cdot 10^9$ em 2030 e $9,7 \cdot 10^9$ em 2050.

9 Reduza a uma só potência.

$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3} : \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]$ **9.** $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-9}$

10 O valor da expressão $(3^{-1} \cdot 3) - (5^{-1} : 5)$ é um número racional: **10.** Alternativa **b.**

a) maior que –1 e menor que 0.

b) maior que 0 e menor que 1.

c) menor que 0.

d) maior que 1.

11 Sabendo que

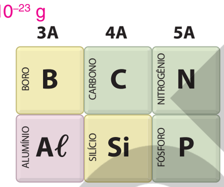
$x = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 : \left(\frac{1}{3}\right)^9$

calcule o valor de x^3. **11.** $\frac{1}{27}$

12 Resolva as expressões e apresente os resultados em notação científica.

a) $\frac{3,6 \cdot 10^4}{10^{-2} \cdot 1,2}$ **12. a)** $3,0 \cdot 10^6$ b) $\frac{2,1 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} \cdot 0,7}$ **12. b)** $3,0 \cdot 10^1$

13 A massa de um átomo de carbono é de aproximadamente $1,99 \cdot 10^{-26}$ kg. Expresse esse valor em grama e usando notação científica. **13.** $1,99 \cdot 10^{-23}$ g



ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

14 Calcule o valor da expressão a seguir.

$\sqrt{\frac{81}{4}} - \sqrt{400} + \sqrt{2,25}$ **14.** –14

15 (Vunesp) Se $x = 10^{-3}$, então

$\frac{(0,1) \cdot (0,001) \cdot 10^{-1}}{10 \cdot (0,0001)}$ é igual a: **15.** Alternativa **b.**

a) $100x$.   c) x.   e) $\frac{x}{100}$.

b) $10x$.   d) $\frac{x}{10}$.

16 (FCC) A expressão $\frac{0,000036}{80\,000}$ é equivalente a: **16.** Alternativa **d.**

a) $0,45 \cdot 10^{-12}$.   d) $45 \cdot 10^{-11}$.

b) $4,5 \cdot 10^{-12}$.   e) $45 \cdot 10^{-10}$.

c) $4,5 \cdot 10^{-11}$.

17 A letra a representa o número racional 0,04. Determine os valores de $\sqrt{a}$, $5\sqrt{a}$ e $2a\sqrt{a}$.
17. 0,2; 1 e 0,016

Exercícios complementares

Nesta seção são oferecidas novas oportunidades para os estudantes retomarem e aplicarem os principais conceitos trabalhados no capítulo.

As resoluções dos **exercícios 1**, **2**, **5** a **11** e **13** a **17** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Pode-se resolver o **exercício 3** da seguinte maneira:

$$4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2^2 \cdot (2^{-1})^4 + \sqrt{\frac{1}{4}} =$$

$$= 2^2 \cdot 2^{-4} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2^{2-4} + \frac{1}{2} =$$

$$= 2^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

Portanto, a alternativa **a** é a correta.

No **exercício 4** é importante os estudantes perceberem que é necessário reduzir todos os números à potências de mesma base 2 para efetuar os cálculos:

$$\frac{16^{\frac{3}{4}}}{8^{\frac{1}{3}}} : \frac{2^4}{8^2} = \frac{(2^4)^{\frac{3}{4}}}{(2^3)^{\frac{1}{3}}} : \frac{2^4}{(2^3)^2} =$$

$$= \frac{2^{4 \cdot \frac{3}{4}}}{2^{3 \cdot \frac{1}{3}}} : \frac{2^4}{2^{3 \cdot 2}} = \frac{2^3}{2^1} : \frac{2^4}{2^6} =$$

$$= 2^{3-1} : 2^{4-6} = 2^2 : 2^{-2} = 2^2 \cdot 2^{-(-2)} =$$

$$= 2^2 \cdot 2^2 = 2^{(2+2)} = 2^4$$

Assim, a alternativa **d** é a correta.

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 12**.

a) $$\frac{3,6 \cdot 10^4}{10^{-2} \cdot 1,2} = \frac{3,6}{1,2} \cdot \frac{10^4}{10^{-2}} =$$

$$= \frac{36}{12} \cdot 10^4 \cdot 10^2 = 3 \cdot 10^6$$

b) $$\frac{2,1 \cdot 10^{-2}}{10^{-3} \cdot 0,7} = \frac{2,1}{0,7} \cdot \frac{10^{-2}}{10^{-3}} =$$

$$= \frac{21}{7} \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 = 3 \cdot 10^1$$

Esse exercício pode ser enriquecido solicitando aos estudantes que formulem expressões numéricas envolvendo os conteúdos deste capítulo e troquem entre si para cada um resolver o que o colega criou. Ao final, faça uma correção coletiva das expressões numéricas elaboradas pelos estudantes.

Verificando

Os testes desta seção podem ser utilizados a fim de preparar os estudantes para exames e avaliações. Sugerimos que eles resolvam os testes individualmente. Depois, realize coletivamente a correção deles e, em outro momento, proponha aos estudantes que os resolvam novamente, solicitando-lhes, contudo, que registrem os cálculos necessários para obter as respostas.

Alternativamente, podem-se reunir os estudantes em duplas ou trios, propondo-lhes que resolvam os testes e, em outro momento, retomando os testes, propondo-lhes que os resolvam individualmente.

As resoluções dos **testes 1** a **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 1.

Organizando

Os itens propostos nesta seção possibilitam compor uma autoavaliação. Os estudantes podem responder a cada item no caderno. Depois, coletivamente, eles discutem as respostas dadas, corrigindo ou complementando a própria resposta.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Apesar de não ser a opção mais segura, é possível criar a senha de desbloqueio de celular de 4 dígitos com um ou mais algarismos repetidos. Nesse caso, quantas são as possibilidades de senhas? **1.** Alternativa **d**.

a) 4^9
b) 9^4
c) 4^{10}
d) 10^4

2 Indique a alternativa que contém o valor da expressão a seguir. **2.** Alternativa **b**.

$$\frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot 4 \cdot 7^2}{8 \cdot 27 \cdot 49}$$

a) $2^2 \cdot 3$
b) $2^4 \cdot 3^2$
c) $2^7 \cdot 3^5 \cdot 7^2$
d) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2$

3 Se $x = (0{,}5)^3$ e $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, quanto vale $z = (x \cdot y)^2$? **3.** Alternativa **c**.

a) 1
b) 2
c) 4
d) 64

4 Escreva o número 3 125 como uma potência de base $\frac{1}{5}$. **4.** Alternativa **a**.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-5}$
b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{5}$
c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4}$
d) $\left(\frac{1}{5}\right)^{4}$

5 Uma folha de papel sulfite tem espessura medindo 0,0001 m. Escreva essa medida em notação científica. **5.** Alternativa **c**.

a) $1 \cdot 10^{-3}$ m
b) $10 \cdot 10^{-3}$ m
c) $1 \cdot 10^{-4}$ m
d) $10 \cdot 10^{-4}$ m

6 Maria é marceneira e, para fazer um móvel, ela cortou um pedaço de madeira em formato quadrado com área medindo $\frac{121}{144}$ m². Qual é a medida do comprimento dos lados desse pedaço de madeira? **6.** Alternativa **a**.

a) $\frac{11}{12}$ m
b) $\frac{12}{11}$ m
c) 1 m
d) 11 m

7 Calcule o valor da expressão a seguir e indique a alternativa que apresenta o resultado correto. **7.** Alternativa **b**.

$$\sqrt[5]{245 - \sqrt[3]{6 + \sqrt{4}}}$$

a) 2
b) 3
c) 5
d) 9

8 Das potências a seguir, qual é equivalente a $\sqrt[12]{18^3}$? **8.** Alternativa **c**.

a) $12^{\frac{1}{3}}$
b) $18^{\frac{1}{3}}$
c) $18^{\frac{1}{4}}$
d) 184

9 Qual é o resultado da expressão numérica a seguir? **9.** Alternativa **d**.

$$\sqrt[3]{9 \cdot 3} - \left[\frac{175}{25} + \frac{2^5}{2^4} \cdot (0{,}25)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

a) 14
b) –2
c) –5
d) –8

10 Indique a alternativa que contém o resultado da expressão numérica a seguir. **10.** Alternativa **a**.

$$\frac{3^2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \left[\sqrt{\frac{9}{36}} - \left(-8 + \frac{1}{2}\right)\right]$$

a) 1
b) $\frac{9}{4}$
c) 5
d) $\frac{11}{4}$

Organizando:

c) É a potência cujo expoente é o oposto do expoente da potência dada e cuja base é o inverso da base da potência dada. No caso do expoente fracionário, por exemplo, $\frac{a}{c}$ e base b, $b^{\frac{a}{c}}$, o denominador da fração torna-se o índice da raiz, e o numerador, o expoente do radicando: $\sqrt[c]{b^a}$.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões.

a) Quais são os elementos que compõem a expressão de uma potência? **a)** A base e o expoente.

b) Ao dividirmos duas potências de mesma base, como obtemos os expoentes? E ao multiplicarmos duas potências de mesma base? **b)** Devemos subtrair do expoente do dividendo o expoente do divisor. No caso da multiplicação, devemos adicionar os expoentes.

c) Qual é a potência equivalente a uma dada potência de expoente negativo?

d) Como obtemos a raiz equivalente a uma dada potência de expoente fracionário?

e) Quais são os elementos que compõem a expressão de uma raiz? **e)** O índice, o radical e o radicando.

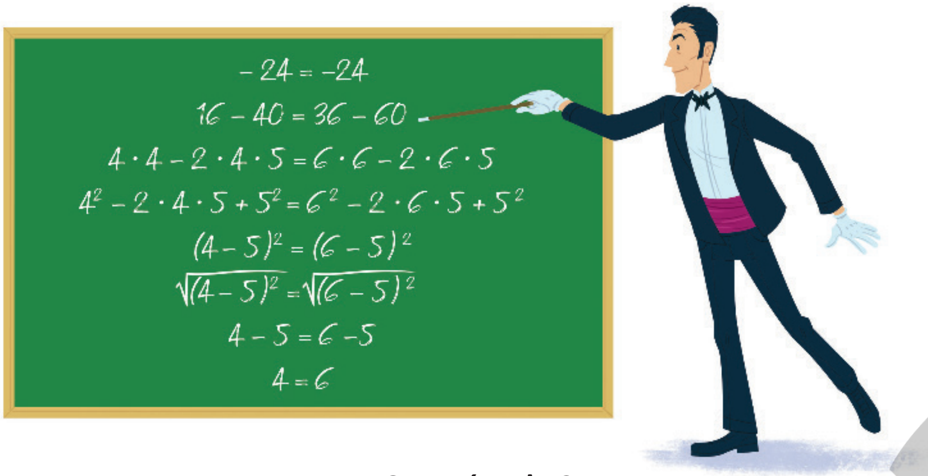
f) Como você explicaria a um colega o que é notação científica? **f)** Resposta pessoal.

d) Escrevendo a raiz cujo índice é o denominador do expoente da potência dada e cujo radicando é a potência de mesma base e expoente igual ao numerador do expoente da potência dada.

DIVERSIFICANDO

Um truque de mágica?

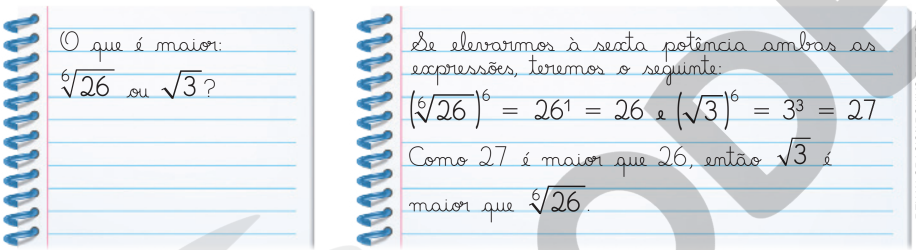
Em um espetáculo, o grande mágico Rafael deixou para o final a mágica dos números. O truque consistia em mostrar que 4 é igual a 6. Acompanhe como o mágico fez os cálculos nesse truque, criando a ilusão de que 4 = 6.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

O que é maior?

Ao arrumar o quarto, Tiago encontrou o caderno de Matemática de seu irmão. Lá, havia um exercício que não estava resolvido. Observe o exercício e a resolução de Tiago a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

2. Espera-se que os estudantes percebam que o erro do cálculo está na passagem da sexta para a sétima linha, pois $\sqrt{(4-5)^2} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq 4 - 5$; portanto, 1 = 1, não 4 = 6.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

3. a) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^{12} = 3^4 = 81$ e $\left(\sqrt[4]{4}\right)^{12} = 4^3 = 64$; como $81 > 64$, então $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4}$.

1 Formem grupos de 3 a 4 colegas, discutam os cálculos feitos pelo mágico Rafael e expliquem cada passagem que foi realizada na conta feita por ele. **1.** Espera-se que os estudantes percebam que, na terceira linha, Rafael escreve os mesmos números da segunda linha, mas fatorados. Depois de adicionar 5^2 a ambos os membros dessa igualdade, ele obtém o quadrado da diferença de dois termos.

2 Qual foi o erro cometido no cálculo?

3 Usando o mesmo raciocínio de Tiago, indique o que é maior.

a) $\sqrt[3]{3}$ ou $\sqrt[4]{4}$

b) $\sqrt[4]{4}$ ou $\sqrt{2}$

3. b) $\left(\sqrt[4]{4}\right)^4 = 4$ e $\left(\sqrt{2}\right)^4 = 2^2 = 4$; como 4 = 4, então $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$.

Diversificando

Com os estudantes reunidos em duplas, proponha-lhes que analisem as resoluções apresentadas para cada situação desta seção. Para a resolução do "O que é maior?", por exemplo, pergunte a eles se conseguem justificar o cálculo das duas potências envolvendo raízes. Espera-se que utilizem o expoente fracionário e propriedades da potenciação:

- $\left(\sqrt[6]{26}\right)^6 = \left(26^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 26^{\frac{1}{6} \cdot 6} = 26^1$
- $\left(\sqrt{3}\right)^6 = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^6 = 3^{\frac{1}{2} \cdot 6} = 3^3$

Capítulo 2 - Construções geométricas e lugares geométricos

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, a retomada de conceitos geométricos já estudados em conjunto com as construções geométricas propiciam aos estudantes a consolidação de conceitos de Geometria plana.

É importante explorar as construções geométricas propostas neste capítulo utilizando materiais de desenho geométrico como esquadro, transferidor, régua e compasso e, ainda, *softwares* de Geometria dinâmica.

Explore a fotografia e proponha aos estudantes que comentem os detalhes do Estandarte de Ur. Após ler o texto, trabalhe os **itens a** e **b** e converse sobre a importância da roda, por exemplo, no desenvolvimento da agricultura e dos meios de transporte e o fato de ela poder ser representada por um círculo (ou circunferência, dependendo do contexto).

Pode-se desenvolver um trabalho interdisciplinar com Geografia de maneira a propor análises de aspectos representativos da dinâmica de fluxos imigratórios na América Latina. Espera-se que os estudantes percebam que a possibilidade de criar tecnologias na agricultura e para os meios de transporte, no decorrer da história, impactou os fluxos migratórios.

Além disso, para desenvolver o Tema Contemporâneo Transversal **educação para o multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras**, a pesquisa pode ser ampliada de maneira que eles possam compreender os fluxos migratórios relacionados à região em que vivem e estudar a história das populações indígenas que há (ou havia) nessa região.

Capítulo

2 Construções geométricas e lugares geométricos

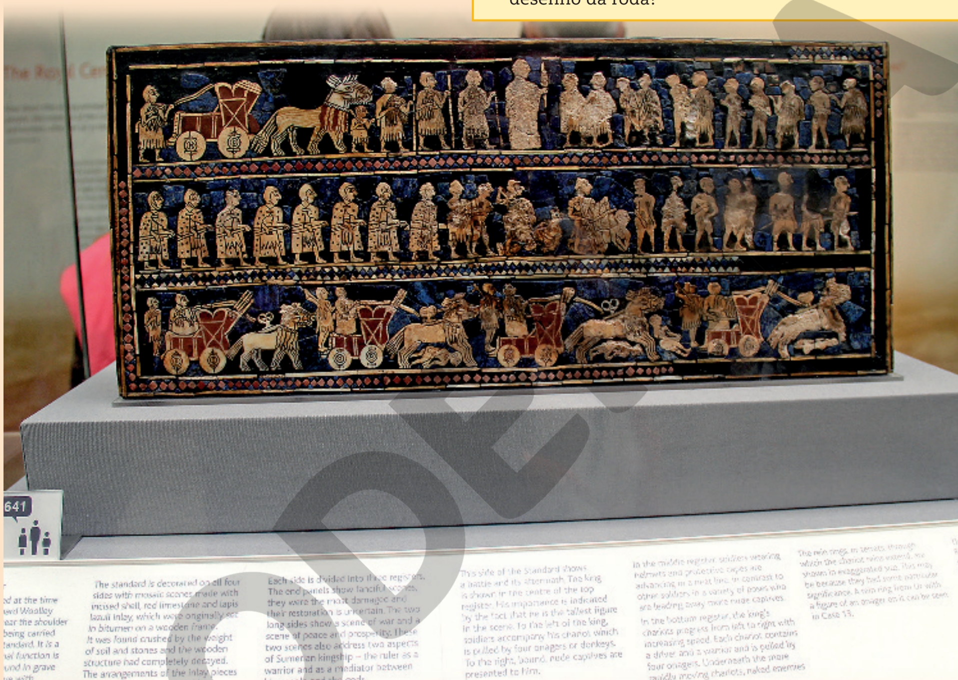
a) Resposta pessoal.
b) Possíveis respostas: circunferência, círculo ou coroa circular.

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) Em sua opinião, o que a invenção da roda possibilitou no desenvolvimento da humanidade?

b) Que figura geométrica plana pode representar um desenho da roda?

GARY TODD/CC0 1.0//FLICKR – MUSEU BRITÂNICO, LONDRES



Estandarte de Ur em exposição do Museu Britânico realizada no Japão. O Estandarte de Ur é um artefato sumério no qual é possível vislumbrar a representação da roda. (Fotografia de 2017.)

Não há consenso sobre a origem da roda, talvez a mais importante construção geométrica humana, mas sabe-se que a percepção de sua existência é remota. Data de cerca de 3500 a.C. o registro mais antigo da representação da roda, encontrado nas ruínas da cidade de Ur, atual Iraque.

Em discussões polêmicas, é comum ironizar afirmando que alguém está “reinventando a roda”, insinuação de que sua fala não acrescenta nada à discussão.

Em Pedagogia, “reinventar a roda” tem sentido positivo: significa dar ao estudante condições para que ele faça suas próprias descobertas. Vamos reinventar a roda?

Sugestões de leitura

Para ampliar, sugerimos os materiais:

INSTITUTO Brasileiro de Geografia e Estatística. **Indígenas**. IBGE, Rio de Janeiro (RJ), [202-]. Disponível em: https://indigenas.ibge.gov.br/. Acesso em: 6 jun. 2022.

Neste *site* do IBGE há informações sobre a população indígena no Brasil.

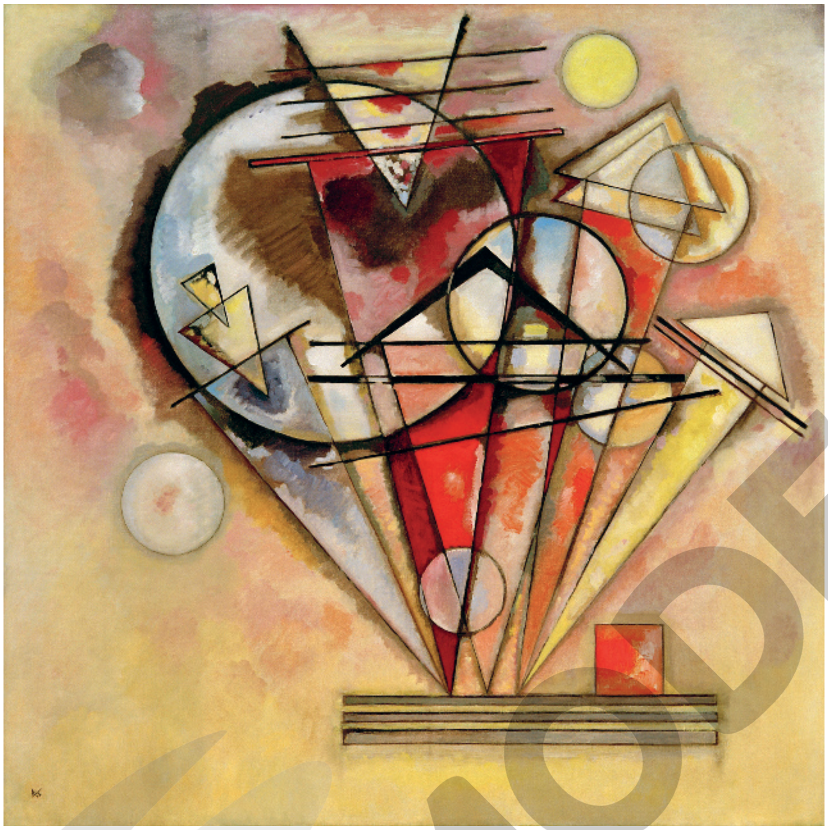
ZORZETTO, R. Ascensão e declínio dos Tupi. **PESQUISA FAPESP**. ed. 311, jan. 2022. Disponível em: https://revistapesquisa.fapesp.br/ascensao-e-declinio-dos-tupi/. Acesso em: 6 jun. 2022.

Neste trabalho, apresentam-se considerações acadêmicas e dados sobre os falantes da língua indígena tupi no decorrer da história.

1 Construções geométricas

As ideias e os conceitos da Geometria relacionados a retas e ângulos estão entre os conhecimentos matemáticos mais antigos da humanidade, como indicam algumas tabletas de argila dos sumérios, alguns papiros egípcios e documentos escritos de gregos e romanos.

Retas e ângulos também aparecem nas artes plásticas, seja em pinturas antigas, seja em obras contemporâneas, como as dos mestres abstracionistas. A obra do artista Wassily Kandinsky (1866-1944) reproduzida a seguir é um exemplo de aplicação desses conceitos nas artes plásticas.



WASSILY KANDINSKY – MUSEU DE ARTE MODERNA, CENTRO GEORGES POMPIDOU, PARIS

KANDINSKY, W. **On the points**. 1928. Óleo sobre tela, 140 × 140 cm. Museu de Arte Moderna, Centro Georges Pompidou, Paris, França.

A preocupação em organizar todo o conhecimento geométrico acumulado começou com os gregos. Eles transformaram a Geometria que resolvia cada caso particular em uma Geometria que tratava das propriedades das figuras de maneira generalizada.

Como estudado em anos anteriores, ponto, reta e plano são noções primitivas, isto é, são aceitas sem definição.

Para dar continuidade ao nosso estudo, vamos rever alguns conceitos referentes a esses elementos geométricos.

1. Construções geométricas

Habilidade da BNCC: **EF08MA15**.

O início deste tópico traz uma obra do artista russo Wassily Kandinsky, que introduziu a abstração no campo das artes visuais.

Proponha aos estudantes uma pesquisa de obras de arte concreta desse artista e de artistas nacionais, como Waldemar Cordeiro, Geraldo Barros, Lygia Clark, Lygia Pape, Hélio Oiticica e Amílcar de Castro, com as quais poderá motivá-los no estudo da Geometria e a desenvolver a **competência geral 3**, pois com a pesquisa eles poderão usufruir desse tipo de de manifestação artística.

Sugestão de leitura

Para ampliar e enriquecer o trabalho sobre Kandinsky, sugerimos o material:

QUINTÃO, B. P. **A abstração entre Wassily Kandinsky e grafismos indígenas**. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Teoria, Crítica e História da Arte) – Universidade de Brasília, Brasília, 2018. Disponível em: https://bdm.unb.br/handle/10483/24416. Acesso em: 6 jun. 2022.

Nesta pesquisa, a autora investiga obras do período do Der Blaue Reiter do artista russo Wassily Kandinsky (1866-1944) e grafismos indígenas amazônicos como formas abstratas.

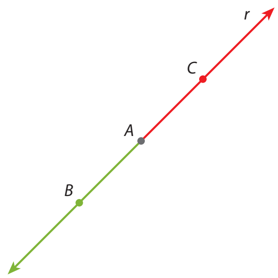
Retas, semirretas e segmentos de reta

Como base para as construções geométricas que serão propostas, retomamos conceitos de Geometria plana. Esperamos que os estudantes possam mobilizar os conhecimentos já estudados em anos anteriores e consolidá-los nessa retomada.

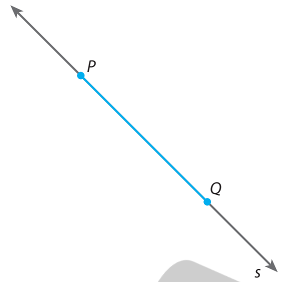
Ressalte os conceitos de segmentos de reta consecutivos, segmentos de reta congruentes e ponto médio de um segmento de reta. Os estudantes podem fazer cartazes criando figuras que envolvam esses conceitos com diversos materiais (palitos de madeira, linha, arame etc.). Se julgar conveniente, faça uma exposição desses trabalhos.

Retas, semirretas e segmentos de reta

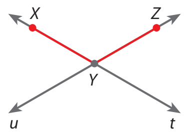
Acompanhe a seguir um resumo de elementos que fazem parte de uma reta.



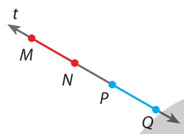
A **semirreta** $\overrightarrow{AB}$ de origem *A* que passa por *B* está pintada de verde. As semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são **opostas**: têm a mesma origem *A* e estão na mesma reta *r*.



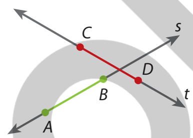
A parte pintada de azul é o **segmento de reta** $\overline{PQ}$ de extremidades *P* e *Q*, formado pelos pontos *P*, *Q* e por todos os demais pontos da reta *s* que estão entre *P* e *Q*.



Os segmentos $\overline{XY}$ e $\overline{YZ}$ são **consecutivos**, pois têm uma extremidade comum: o ponto *Y*.



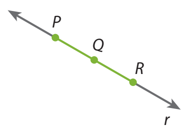
Os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são **colineares**, pois estão na mesma reta *t*.



Os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{AB}$ têm a mesma medida de comprimento. São **segmentos congruentes**. Indicamos: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

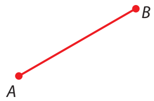
Agora, observe esta figura:



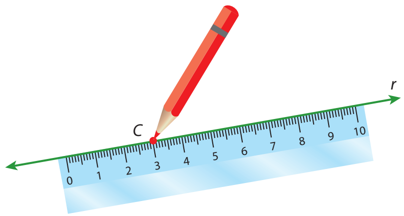
O ponto *Q* divide o segmento $\overline{PR}$ em dois segmentos congruentes: $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$. O ponto *Q* é o **ponto médio** de $\overline{PR}$.

Construindo segmentos congruentes com régua e compasso

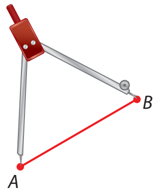
Com o auxílio de régua e compasso, observe os passos para a construção de um segmento $\overline{CD}$ congruente a um segmento dado $\overline{AB}$.



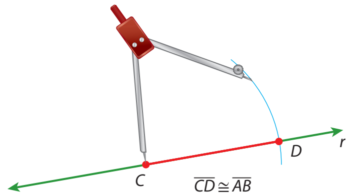
1. Com uma régua, traçamos uma reta *r* qualquer e sobre ela marcamos um ponto *C*.



2. Com a ponta-seca do compasso em *A*, abrimos o compasso até o ponto *B*.



3. Com a ponta-seca do compasso em *C* e abertura igual a *AB*, traçamos um arco que intersecta a reta *r* no ponto *D*. Os pontos *C*, *D* e todos os pontos da reta *r* que estão entre *C* e *D* formam o segmento $\overline{CD}$, que é congruente ao segmento $\overline{AB}$.



(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

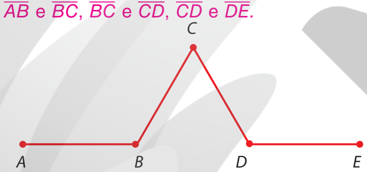
Nessa construção, o segmento $\overline{CD}$ é congruente ao segmento $\overline{AB}$, pois ambos têm a mesma medida, dada pela abertura do compasso.

Utilizando um *software* de Geometria dinâmica também é possível construir segmentos congruentes. Nesse recurso há ferramentas de compasso e de construção de segmentos, que possibilitam seguir os passos 1, 2 e 3 explicitados para essa construção.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Escreva no caderno os pares de segmentos consecutivos que aparecem na figura a seguir.
1. $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$.



2 Copie a figura do exercício 1 e acrescente o segmento $\overline{BD}$.

Além dos segmentos consecutivos já identificados naquele exercício, que outros segmentos consecutivos a nova figura apresenta?
2. $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$; $\overline{AB}$ e $\overline{BE}$; $\overline{AD}$ e $\overline{DE}$; $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$; $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$; $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$; $\overline{AD}$ e $\overline{DC}$; $\overline{BD}$ e $\overline{DC}$; $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$; $\overline{BC}$ e $\overline{BE}$.

3 Registre no caderno o significado de cada indicação a seguir: reta, semirreta ou segmento de reta.

a) $\overleftrightarrow{AB}$ **3. a)** Reta.
b) $\overrightarrow{AB}$ **3. b)** Semirreta.
c) $\overline{AB}$ **3. c)** Segmento de reta.
d) $\overrightarrow{PQ}$ **3. d)** Semirreta.
e) $\overline{PQ}$ **3. e)** Segmento de reta.

Construindo segmentos congruentes com régua e compasso

Para realizar as construções geométricas propostas, é importante que os estudantes providenciem previamente os materiais de desenho necessários: régua, compasso, esquadros, lápis etc.

Reproduza na lousa a construção apresentada para que eles acompanhem cada etapa. Em seguida, entregue a cada estudante uma folha de papel sulfite preparada com segmentos traçados. Peça a eles que construam dois segmentos de reta distintos entre si e congruentes a cada segmento dado. Depois, devem marcar o ponto médio de cada um desses segmentos de reta. Espera-se que, para isso, utilizem a escala da régua; entretanto, se julgar apropriado, pode ser realizada uma atividade investigativa a fim de que os estudantes identifiquem um procedimento para determinar, apenas com régua e compasso (sem usar as marcações de medida da régua), o ponto médio de um segmento. Por exemplo, para determinar o ponto *M*, ponto médio de $\overline{AB}$, pode-se:

- com centro em *A*, traçar uma circunferência de raio *r*, tal que *r* é maior que a metade de *AB*;
- com centro em *B* e raio *r*, traça-se outra circunferência;
- traçar o segmento $\overline{OP}$, em que os pontos *O* e *P* são intersecção das circunferências anteriormente construídas;
- marcar o ponto *M* em $\overline{AB}$, tal que *M* é o ponto de intersecção de $\overline{AB}$ com $\overline{OP}$;
- *M* é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Os estudantes podem organizar em fluxogramas as etapas das construções geométricas utilizadas e apresentar aos demais colegas da turma a fim de validar as etapas para determinar o ponto médio de um segmento.

Sempre que necessário, relembre os estudantes de terem cuidado no manuseio do compasso, a fim de evitar que se machuquem com a ponta-seca.

Exercícios propostos

Para resolver o **exercício 1**, deve-se aplicar a definição de segmentos consecutivos, que são aqueles que têm uma extremidade em comum. Assim, são segmentos consecutivos:

$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, pois *B* é extremidade de ambos.
$\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, pois *C* é extremidade de ambos.
$\overline{CD}$ e $\overline{DE}$, pois *D* é extremidade de ambos.

No **exercício 2**, também serão consecutivos os segmentos:

$\overline{AB}$ e $\overline{BD}$, pois *B* é extremidade de ambos.
$\overline{BD}$ e $\overline{DE}$, pois *D* é extremidade de ambos.

Para resolver o **exercício 3**, deve-se considerar que a notação para reta é um traço com seta em ambos os sentidos; de semirreta, o traço com uma seta; de segmento, apenas o traço.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 4** a **6** e do **exercício 8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2. No **exercício 4**, há uma articulação do conceito de congruência com a transformação de unidades de medida, relacionando as Unidades Temáticas **Geometria** e **Grandezas e medidas.**

No **exercício 7**, se $BC = 0{,}5$ cm e B é o ponto médio de $\overline{AC}$, então $AB = 0{,}5$ cm. Continuando, $AC = 1{,}0$ cm e, sendo C o ponto médio de $\overline{AD}$, então $CD = AC = 1{,}0$ cm. Como D é ponto médio de $\overline{BE}$, é possível determinar o comprimento de $\overline{BD}$ escrevendo-se:

$BD = BC + CD = 0{,}5 + 1{,}0$

$BD = 1{,}5$ cm

Portanto, $DE = 1{,}5$ cm.

Como E é ponto médio de $\overline{DF}$, então $\overline{DE}$ é congruente a $\overline{EF}$; logo, $EF = 1{,}5$ cm. Agora, basta efetuar a adição:

$AF = AC + CD + DE + EF$

$AF = 1{,}0 + 1{,}0 + 1{,}5 + 1{,}5$

$AF = 5$ cm

No **item b**, temos: como C é ponto médio de $\overline{AD}$, $CD = AC = 1$. Logo, $CE = CD + DE = 1 + 1{,}5 = 2{,}5$. A medida de $\overline{CE}$ é 2,5 cm.

No **exercício 8**, trabalhe essa atividade por meio de questionamentos, induzindo os estudantes à conclusão de que a distância entre os dois pontos médios X e Y é a semissoma das medidas dos dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Observe que a distância de X a Z não é a semissoma das medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, pois estes não são consecutivos.

A resolução do **exercício 8** propicia a inter-relação das Unidades Temáticas **Geometria** e **Álgebra**. Representando por x a medida CD, o equacionamento é imediato. Proponha aos estudantes que experimentem outras atribuições para x, como $x = AB$ ou $x = ZD$ para verificarem que as medidas dos segmentos são as mesmas.

Pense mais um pouco...

Na **atividade 1**, os estudantes são levados a considerar mais de uma possibilidade na construção da figura. Exemplos de resposta:

4 Identifique a sentença falsa e justifique sua resposta. **4.** Alternativa **d**, pois $AB \neq CD$.

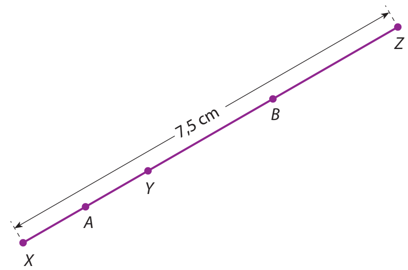
a) Se $AB = 8$ m e $CD = 800$ cm, então $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

b) Se $MN = 3$ cm e $XY = 3$ cm, então $\overline{MN} \cong \overline{XY}$.

c) Se $\overline{EF} \cong \overline{PQ}$, então $EF = PQ$.

d) Se $AB = 5$ cm e $CD = 5$ dm, então $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

5 Na figura a seguir, A é o ponto médio de $\overline{XY}$ e B é o ponto médio de $\overline{YZ}$, que mede 5 cm.

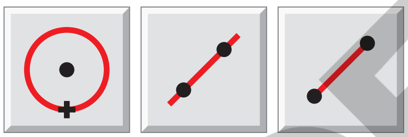


a) Quanto mede o segmento $\overline{XY}$? **5. a)** 2,5 cm

b) Qual é a medida do segmento $\overline{AB}$? **5. b)** 3,75 cm

6. Um *software* de Geometria dinâmica tem as seguintes ferramentas:

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Circunferência | Reta | Segmento de reta

Construa um fluxograma com os passos que devem ser seguidos para a construção de 2 segmentos congruentes usando essas 3 ferramentas do *software*. **6.** Construção de figura.

7 Observe os pontos destacados no segmento $\overline{AF}$ representado a seguir.

- B é o ponto médio de $\overline{AC}$;
- C é o ponto médio de $\overline{AD}$;
- D é o ponto médio de $\overline{BE}$;
- E é o ponto médio de $\overline{DF}$.

Sabendo que $BC = 0{,}5$ cm, determine:

a) a medida do segmento $\overline{AF}$; **7. a)** 5 cm

b) a medida do segmento $\overline{CE}$. **7. b)** 2,5 cm

8 Considere que a figura a seguir representa um segmento $\overline{AD}$ de medida 18 cm, sendo X o ponto médio de $\overline{AB}$, Y o ponto médio de $\overline{BC}$ e Z o ponto médio de $\overline{CD}$.

Sabendo que a medida de $\overline{AB}$ é o dobro da medida de $\overline{CD}$ e que $\overline{BC}$ mede o triplo de $\overline{CD}$, determine a medida dos segmentos:

a) $\overline{AB}$; **8. a)** 6 cm

b) $\overline{BC}$; **8. b)** 9 cm

c) $\overline{CD}$; **8. c)** 3 cm

d) $\overline{XY}$; **8. d)** 7,5 cm

e) $\overline{YZ}$; **8. e)** 6 cm

f) $\overline{XZ}$. **8. f)** 13,5 cm

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

1 A, B, C e D são pontos de uma mesma reta r, de tal maneira que $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $AC = 8$ cm e $BD = 1$ cm.

Nessas condições, representem, no caderno, a reta r e esses pontos. *Pense mais um pouco...* **1.** Construção de figura.

2 Considerem o segmento $\overline{AD}$ representado a seguir, em que $AD = 8$ cm e $BC = 2{,}5$ cm.

a) É possível calcular a medida AB? E a medida BD? **2. a)** Não; não.

b) A medida CD pode valer 6 cm? Justifiquem a resposta.

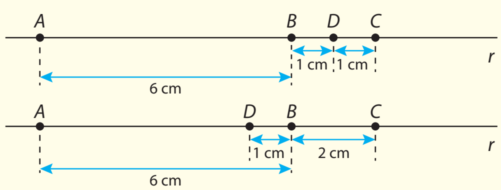
c) Quais são os possíveis valores da medida AC? **2. c)** $2{,}5 < AC < 8$

2. b) Não, pois: $AD - BC = AB + CD$
$8 - 2{,}5 = AB + 6$
$AB = 5{,}5 - 6$
Logo, para CD valer 6 cm, AB deveria ser negativa.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

42

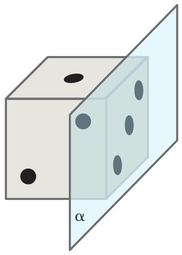
WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA



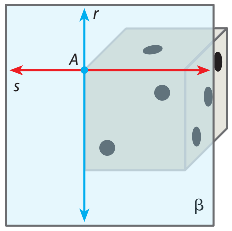
Na **atividade 2**, itens **a** e **c**, a indeterminação da medida pedida decorre da possibilidade de haver infinitos valores para AC entre os números racionais 2,5 e 8, que tornam plausível a situação proposta.

Posição relativa de retas

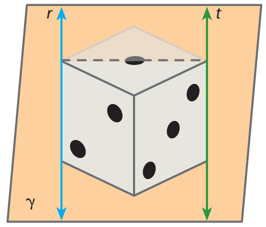
Aqui também vamos rever alguns conceitos referentes às retas.



Cada face do dado sugere uma parte de um plano. Um plano é indicado por letras gregas minúsculas, como o plano α, que contém a face 3 do dado.



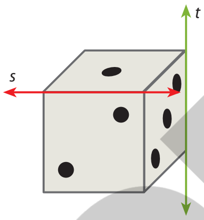
As retas *r* e *s* têm um só ponto em comum (*A*) e estão em um mesmo plano (β). Dizemos que as retas *r* e *s* são **concorrentes**. Indicamos: $r \times s$.



As retas *r* e *t* não têm pontos em comum e estão em um mesmo plano (γ). Dizemos que as retas *r* e *t* são **paralelas**. Indicamos: $r \mathbin{/\!/} t$.

Duas retas de um plano são **coincidentes** quando têm todos os pontos em comum. Indicamos que as retas *c* e *d* são coincidentes por: $c \equiv d$.

Dadas duas retas, *s* e *t*, caso não exista um plano que as contenha, chamamos *s* e *t* de **retas reversas**.



Duas retas reversas (*s* e *t*) não têm pontos em comum nem estão em um mesmo plano.

Observação

- Para que duas retas sejam paralelas ou concorrentes, elas devem, necessariamente, estar em um mesmo plano, isto é, deve existir um plano que as contenha. Nesse caso, dizemos que elas são **retas coplanares**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

9 Escreva a posição relativa das retas coplanares *r* e *s* quando:

a) elas não têm ponto em comum; **9. a)** Paralelas.

b) elas têm apenas um ponto em comum. **9. b)** Concorrentes.

10 Identifique qual é a sentença falsa e justifique no caderno.

a) Se A e B são dois pontos de um plano α, então a reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida nesse plano. **10. a)** Verdadeira.

b) Se duas retas, *r* e *s*, não têm ponto em comum, então elas são paralelas. **10. b)** Falsa, pois *r* e *s* podem ser reversas.

c) Se duas retas são coplanares e não têm ponto em comum, então elas são paralelas. **10. c)** Verdadeira.

Posição relativa de retas

Neste item, tratamos das posições relativa entre duas retas, seja no plano, seja no espaço. As arestas de um cubo podem ser associadas a segmentos de retas e, assim, podem-se associá-los às suas respectivas retas suporte explorando as posições relativas entre as retas de maneira menos abstrata.

Exercícios propostos

Para resolver estes exercícios, é necessário recorrer às definições sobre posições relativas entre retas.

No **exercício 9**, quando duas retas são coplanares e não têm pontos em comum, elas são paralelas e, ainda, quando duas retas coplanares têm apenas um ponto em comum, elas são concorrentes. Logo, as retas do **item a** são paralelas, e as do **item b**, concorrentes.

No **exercício 10**, discutimos a relação entre pontos, retas e planos. No **item a**, pelo axioma da determinação de reta, consideramos que existe apenas uma reta que passa por *A* e por *B*. Assim, se *A* e *B* estão no mesmo plano, todos os pontos da reta $\overleftrightarrow{AB}$ também pertencem a esse plano.

No **item b**, mostre aos estudantes que as retas reversas não têm ponto comum, assim como as paralelas. A diferença é o fato de que retas paralelas são coplanares, e as retas reversas não são. Logo, precisamos de duas informações para saber se as retas são paralelas.

No **item c**, temos as duas informações necessárias para saber se duas retas são paralelas ou não.

Exercícios propostos

Para facilitar a resolução, no **exercício 11**, se possível, associe a sala de aula com o bloco retangular. Considerando que os segmentos são arestas de um bloco retangular, verificamos que:

a) como $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos, as retas que os contêm são concorrentes em *B*.

b) como $\overline{CD}$ e $\overline{HG}$ são arestas opostas de uma mesma face, as retas que os contêm são paralelas.

c) como $\overline{AB}$ e $\overline{CG}$ são perpendiculares a planos não paralelos e arestas de duas faces opostas, as retas que as contêm são reversas.

d como $\overline{BF}$ e $\overline{AE}$ são arestas opostas de uma mesma face, as retas que os contêm são paralelas.

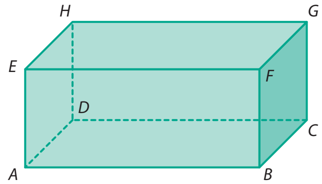
e) como $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$ são perpendiculares a planos não paralelos e arestas de duas faces opostas, as retas que os contêm são reversas.

f) como $\overline{HG}$ e $\overline{AB}$ são arestas de duas faces opostas e paralelas a $\overline{DC}$, as retas que os contêm são paralelas.

Construindo retas paralelas com régua e compasso

Apresente a construção das retas paralelas passo a passo na lousa para os estudantes acompanharem todo o procedimento. Espera-se que eles mobilizem conhecimentos sobre paralelogramos já estudados em anos anteriores.

11 Considere o bloco retangular ilustrado a seguir.



Classifique como paralelas, concorrentes ou reversas as retas que contêm os pares de arestas:

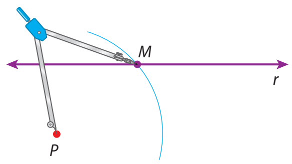
a) $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. **11. a)** Concorrentes.
b) $\overline{CD}$ e $\overline{HG}$. **11. b)** Paralelas.
c) $\overline{AB}$ e $\overline{CG}$. **11. c)** Reversas.
d) $\overline{BF}$ e $\overline{AE}$.
e) $\overline{AD}$ e $\overline{BF}$.
f) $\overline{HG}$ e $\overline{AB}$.

11. d) Paralelas. **11. e)** Reversas. **11. f)** Paralelas.

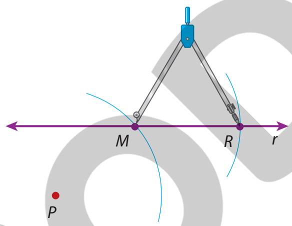
Construindo retas paralelas com régua e compasso

Considere uma reta *r* e um ponto *P* não pertencente a *r*. Vamos construir, com o auxílio de régua e compasso, uma reta paralela à reta *r* e que passe pelo ponto *P*.

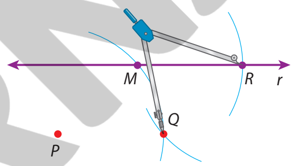
1. Com a ponta-seca do compasso em *P*, traçamos um arco que corta *r*, obtendo o ponto *M*.



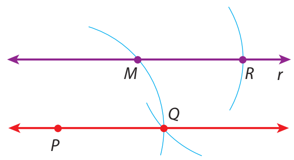
2. Com a mesma abertura *PM* e a ponta-seca do compasso em *M*, traçamos um arco que intersecta *r*, obtendo o ponto *R*.



3. Com a mesma abertura *MR* e a ponta-seca do compasso em *R*, traçamos um arco que intersecta o primeiro arco, obtendo o ponto *Q*.



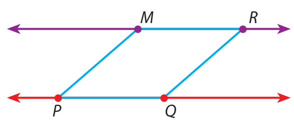
4. Com a régua, traçamos a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, que é paralela à reta *r*.



(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que $\overline{PM}$, $\overline{MR}$, $\overline{RQ}$ e $\overline{QP}$ têm mesma medida, que é a da abertura *PM* do compasso. Então, a figura *PMRQ* é um losango.



Como os lados opostos de um losango são paralelos, então $\overleftrightarrow{PQ} \,/\!/\, \overleftrightarrow{MR}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

12 Usando um *software* de Geometria dinâmica, desenhe uma reta e um ponto fora dela. Construa uma reta paralela a essa reta que passe por esse ponto. Indique os passos que você seguiu para fazer essa construção.
12. Construção de figura.

13 Desenhe uma reta m e cinco pontos que não pertençam a ela. Depois, construa retas paralelas a m por esses pontos e responda às questões. **13. a)** 5 retas paralelas.

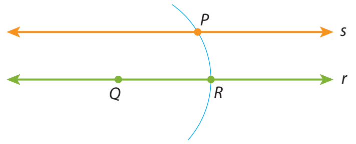
a) Qual é o maior número de retas paralelas à reta m que podem ser traçadas passando por esses cinco pontos? **13. b)** Não.

b) É possível deslocar os cinco pontos a fim de obter mais de cinco retas paralelas a m?

c) É possível trocar a posição de algum desses cinco pontos e traçar menos de cinco retas paralelas a m? **13. c)** Sim.

d) Qual é o menor número de retas paralelas que podem ser traçadas? **13. d)** 1 reta paralela.

14 Em uma folha de papel transparente, copie a figura a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Com a ponta-seca do compasso em R e abertura RP, obtenha no arco da figura o ponto P', simétrico de P em relação a r. Em seguida, trace por P' a reta t paralela à reta r.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

Considerando que s é paralela a r, r é paralela a t e P e P' são pontos simétricos em relação a r, o que você conclui sobre:

a) a posição das retas s e t?

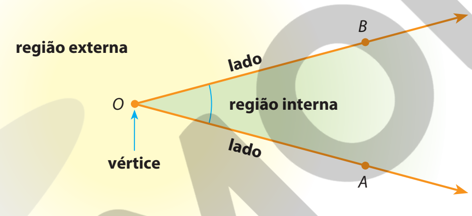
b) as distâncias de P a r e de P' a r?

14. a) b) Espera-se que os estudantes concluam que $s \parallel t$ e que as distâncias de P a r e de P' a r são iguais.

2 Ângulos

O ângulo é uma figura que você já conhece e com a qual tem trabalhado em muitas situações. Vamos retomar a definição de ângulo e algumas de suas características.

Ângulo é a figura geométrica formada por duas semirretas de mesma origem.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Nessa figura, o ponto O é o **vértice** do ângulo, e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os **lados**. Indicamos esse ângulo por $A\hat{O}B$ (lemos: "ângulo AOB").

A unidade de medida de ângulo mais utilizada é o **grau**, que é obtido quando dividimos o ângulo de uma volta em 360 ângulos iguais. À abertura de um desses ângulos associa-se a medida unitária 1°. De acordo com suas medidas, os ângulos recebem nomes especiais.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 12** a **14** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 13**, convém organizar um painel com os diferentes desenhos dos estudantes em relação ao posicionamento dos pontos e, depois, discutir as respostas. Aborde as possibilidades de posicionamento desses pontos, desde a situação em que todos estão alinhados (quando há uma única reta paralela a m) até os cinco pontos, tomados a diferentes distâncias de m, ou se cada par desses pontos a igual distância de m forem simétricos em relação a m (quando há cinco retas distintas paralelas a m).

2. Ângulos

Habilidade da BNCC:
EF08MA15.

Neste tópico, retomamos o conceito de ângulo e seus principais elementos e são trabalhadas construções geométricas de retas perpendiculares, desenvolvendo aspectos da habilidade (EF08MA15) e preparando os estudantes para o estudo sobre bissetriz de ângulo formado por dois segmentos de reta consecutivos (lados consecutivos de um polígono) e mediatriz de um segmento de reta.

Ângulos

Retomamos os tipos de ângulo, apresentando ângulo de 0°, de 360°, de 180° e de 90° e sua classificação como nulo, ângulo de meia volta, ângulo de uma volta, reto, agudo ou obtuso. São retomados ainda os conceitos de ângulos congruentes, retas perpendiculares e retas oblíquas. Esses conteúdos também serão base para novas construções geométricas.

Se julgar conveniente, prepare previamente atividades para os estudantes retomarem o uso do transferidor: medindo ângulos fornecidos e construindo ângulos solicitados. Essa retomada é importante para aplicarem esses procedimentos na medição e na construção dos setores de um gráfico circular, assunto que será apresentado adiante neste capítulo.

O arco marcado na figura indica a **abertura** do ângulo que estamos considerando. Observe.

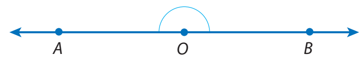
Ângulo nulo

mede 0°

Ângulo de uma volta

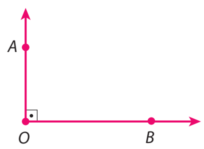
mede 360°

Ângulo raso ou **de meia-volta**



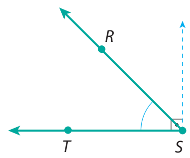
mede 180°

Ângulo reto



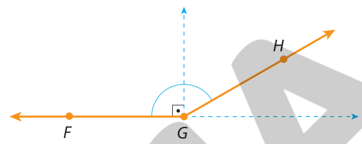
mede 90°

Ângulo agudo



mede entre 0° e 90°

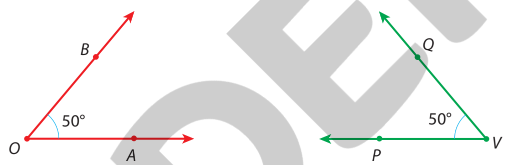
Ângulo obtuso



mede entre 90° e 180°

Observações

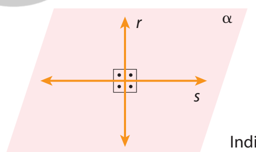
- Indicamos a medida de um ângulo $A\hat{O}B$ por: m($A\hat{O}B$).
- Dois ângulos são congruentes quando têm a mesma medida. Acompanhe um exemplo.



m($A\hat{O}B$) = 50° m($P\hat{V}Q$) = 50°

Os ângulos $A\hat{O}B$ e $P\hat{V}Q$, nas figuras apresentadas, têm a mesma medida (50°). Dizemos, então, que $A\hat{O}B$ e $P\hat{V}Q$ são ângulos congruentes e escrevemos $A\hat{O}B \cong P\hat{V}Q$.

- Duas retas concorrentes são denominadas **perpendiculares** se formarem quatro ângulos retos entre si.



Indicamos: $r \perp s$

- Quando duas retas são concorrentes, mas não formam ângulos retos entre si, são denominadas **retas oblíquas**.

ILUSTRAÇÕES: ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ARQUIVO DA EDITORA

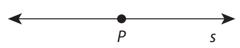
Construindo retas perpendiculares com régua e compasso

Já vimos, em anos anteriores, como construir retas perpendiculares com régua e transferidor e, também, com régua e esquadro. Agora, acompanhe a construção semelhante empregando régua e compasso.

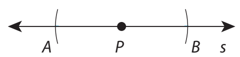
Considere uma reta *s* e um ponto *P*. Vamos traçar uma perpendicular *r* à reta *s*, por esse ponto. Observe dois exemplos.

- Quando o ponto está na reta

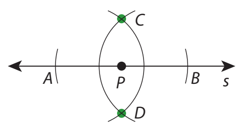
1. Traçamos uma reta *s* e marcamos um ponto *P*.



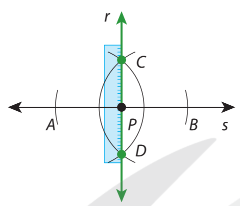
2. Com qualquer abertura do compasso e ponta-seca em *P*, marcamos dois pontos *A* e *B* em *s*.



3. Com a abertura do compasso maior que $\overline{AP}$ e ponta-seca em *A*, depois em *B*, traçamos dois arcos marcando dois pontos, *C* e *D*, na intersecção entre eles.



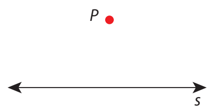
4. A reta $\overleftrightarrow{CD}$ é a reta *r*, perpendicular à reta *s*.



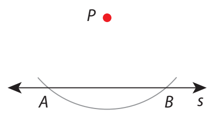
(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

- Quando o ponto não está na reta

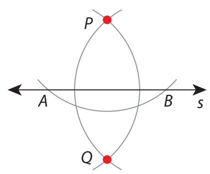
1. Traçamos uma reta *s* e marcamos um ponto *P*.



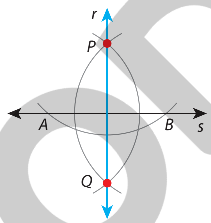
2. Traçamos um arco com centro em *P* e marcamos os pontos *A* e *B* em *s*.



3. Traçamos arcos com centro em *A* e *B* e com abertura *AP*, obtendo o ponto *Q*.



4. Traçamos a reta *r*, que contém os pontos *P* e *Q* e é perpendicular à reta *s*.



Essas construções também podem ser realizadas por meio de um *software* de Geometria dinâmica. Para isso, podem-se utilizar ferramentas como as indicadas a seguir.

- Como você construiria duas retas perpendiculares com essas ferramentas? Converse com o professor e os colegas.

Converse com os estudantes sobre as ferramentas apresentadas. Alguns poderão indicar a construção por meio das ferramentas de construção de reta, de ponto e de compasso, e outros poderão indicar a ferramenta de reta perpendicular. Comente que, a partir de uma reta e um ponto dados, essa ferramenta traça a reta perpendicular que passa por esse ponto.

Construindo retas perpendiculares com régua e compasso

Essa construção deve ser realizada passo a passo na lousa para que os estudantes a acompanhem com facilidade. Em seguida, peça-lhes que tracem uma reta qualquer em uma folha de papel e, depois, troquem o papel com um colega para traçarem uma reta perpendicular à reta traçada. Proponha que decidam se essa construção será feita por um ponto da reta traçada ou por um ponto fora dela. Ao final, discuta com eles essas possibilidades.

Lembre os estudantes de utilizarem o compasso com cuidado, a fim de que não se machuquem com a ponta-seca.

Após realizarem a construção com régua e compasso, se possível, reserve uma aula para que possam utilizar um *software* de Geometria dinâmica a fim de fazerem as construções de retas perpendiculares por meio das ferramentas desse *software*. Caso perceba estudantes com dificuldade nessa atividade, oriente-os a tomarem como referência o fluxograma para a construção de reta paralela a uma reta dada, da página seguinte.

Ao explorar o uso de tecnologias digitais, os estudantes podem desenvolver a **competência geral 5**, pois adquirem mais autonomia para produzir conhecimentos.

Exercícios propostos

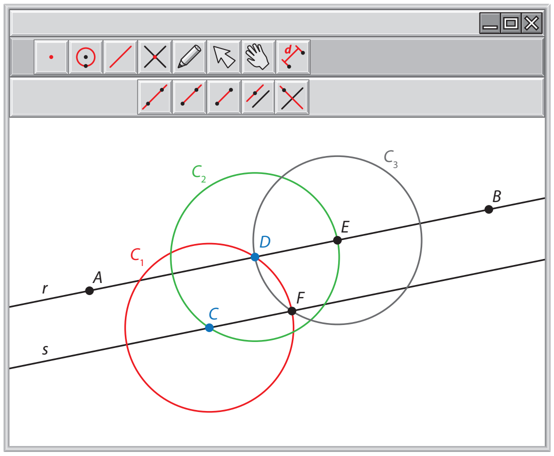
As resoluções dos **exercícios 15** a **18** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

O **exercício 18** é uma atividade que pode ser feita em dupla. Envolve construção geométrica de retas perpendiculares, medida de segmento e construção de triângulo, em particular do triângulo retângulo de medidas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Avalie se convém pedir aos estudantes que comparem o quadrado da medida da hipotenusa com a soma dos quadrados das medidas dos catetos, antecipando, assim, uma verificação particular do teorema de Pitágoras.

Para o **exercício 19**, se possível, proponha aos estudantes utilizarem um *software* de Geometria dinâmica como ferramenta para elaborar e resolver o problema.

Para a construção de uma reta s perpendicular a uma reta r, passando por um ponto A pertencente a r, pode-se seguir o conjunto de passos do fluxograma e obter a seguinte construção:

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Selecionar ferramenta de reta e clicar em dois pontos quaisquer para criar a reta r e os pontos A e B.

↓

Selecionar ferramenta de ponto e clicar em um ponto fora da reta r para criar o ponto C.

↓

Selecionar ferramenta de compasso, clicar no ponto C e em seguida em um ponto D da reta r, criando a circunferência C_1.

↓

Selecionar ferramenta de compasso, clicar no ponto D e em seguida no ponto C, criando a circunferência C_2 de centro D.

↓

Selecionar ferramenta de ponto na intersecção da reta r com C_2, criando o ponto E.

↓

Selecionar ferramenta de compasso, clicar no ponto E e em seguida no ponto D, criando a circunferência C_3 de centro E.

↓

Selecionar ferramenta de ponto na intersecção das circunferências C_3 e C_1, criando o ponto F.

↓

Selecionar ferramenta de reta, clicar em C e em F, criando a reta s, que é paralela a r.

WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15 Desenhe uma reta e trace, por um ponto, uma reta perpendicular a essa reta, nas seguintes condições: **15.** Construção de figura.

a) o ponto está na reta;

b) o ponto não está na reta.

16 Elabore, no caderno, um fluxograma com as etapas para a construção de uma reta s, perpendicular a r, passando por um ponto A que não pertence à reta. **16.** Construção de figura.

17 Considerando as ferramentas disponíveis em um *software* de Geometria dinâmica, explique a sequência de etapas que você seguiria para a construção de um retângulo. **17.** Resposta pessoal.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

18 Reúna-se com um colega e desenhem um segmento horizontal $\overline{AB}$ medindo 6 cm. Em cada extremidade do segmento, tracem uma reta perpendicular a ele. Marquem, sobre a reta perpendicular traçada pelo ponto A e abaixo de $\overline{AB}$, um ponto C, de modo que $AC = 4$ cm. Depois marquem, sobre a reta perpendicular traçada pelo ponto B e acima de $\overline{AB}$, um ponto D, tal que $BD = 4$ cm.

a) Discutam e estimem a medida para o segmento $\overline{CD}$. **18. a)** Resposta pessoal.

b) Unam os pontos C e D e meçam com uma régua o segmento $\overline{CD}$. Qual é essa medida? Vocês fizeram uma boa estimativa? **18. b)** 10 cm. Resposta pessoal.

19 *Hora de criar* – Elabore um problema sobre retas paralelas ou sobre retas perpendiculares. Troque com um colega e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **19.** Resposta pessoal.

PARA SABER MAIS

Construção da espiral de Arquimedes

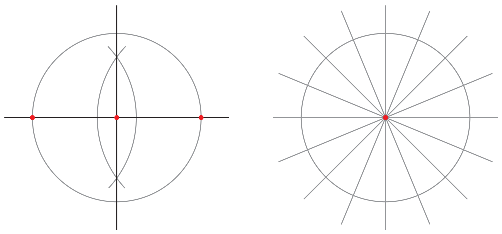
Arquimedes (cerca de 287 a.C.-212 a.C.), o maior matemático e físico da Antiguidade, viveu e morreu em Siracusa, cidade da Sicília (na época ainda uma colônia da Magna Grécia), que por dois anos resistiu ao cerco dos romanos graças às suas engenhosas invenções.

Embora não fosse feita apenas com o uso de régua e compasso, dos três famosos problemas de Geometria – a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo –, a espiral de Arquimedes forneceu soluções para os dois últimos.

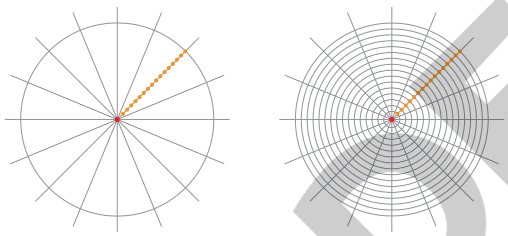
A espiral é definida como o lugar geométrico no plano de um ponto que se move uniformemente, partindo de um raio, ao longo do raio, enquanto esse raio, por sua vez, gira uniformemente em torno de sua origem.

Acompanhe os passos de um procedimento para a obtenção de alguns pontos de uma espiral.

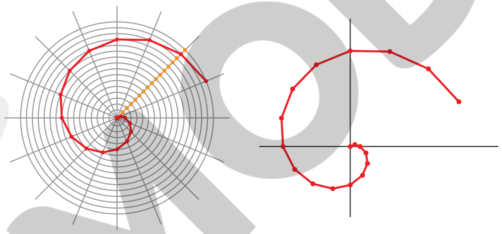
1. Traçamos uma circunferência de raio medindo 8 cm e duas retas perpendiculares que passem pelo seu centro. Com um transferidor, vamos traçar bissetrizes dividindo-a em 16 partes iguais.



2. Usando uma régua, vamos marcar em um dos raios traçados, a partir do centro, pontos de 0,5 em 0,5 centímetro. Traçamos circunferências concêntricas que passem por esses pontos.



3. Com uma cor diferenciada, partindo do centro, marcamos uma sequência de pontos que são intersecção de um raio com uma circunferência – apenas um ponto por circunferência e por raio.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

No caderno, trace uma circunferência com raio medindo 8 cm, divida-a em 8 partes iguais e construa uma espiral semelhante à espiral apresentada. Construção de figura.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

Para saber mais

Nesta seção, apresentamos a construção da espiral de Arquimedes. Comente com os estudantes que, ainda neste capítulo, o conceito de **lugar geométrico** será aprofundado.

Neste momento, eles utilizarão o conceito de bissetriz de ângulo – semirreta que divide um ângulo em dois ângulos congruentes entre si. Para facilitar as construções, sugere-se que eles utilizem transferidor. Se julgar conveniente, proponha uma apresentação das construções feitas. Eles podem realizar essas construções utilizando os recursos de *softwares* de Geometria dinâmica e, depois, expor as construções em um *blog* ou página *web* da escola. Desse modo, eles desenvolvem a **competência geral 5** e, ainda, a **competência geral 4**, pois podem utilizar os recursos tecnológicos para produzir e para comunicar conhecimentos.

Incentive os estudantes a pesquisar mais informações sobre Arquimedes e suas contribuições para a Matemática, desenvolvendo, assim, a **competência geral 1** e levando-os a perceber que a Matemática é um conjunto de saberes historicamente construídos.

A resolução da atividade do **Agora é com você!** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF08MA23**.

Esta seção possibilita aos estudantes construir um gráfico de setores e, assim, trabalhar de maneira que entendam melhor fatos importantes que afetam seu cotidiano, o que desenvolve a habilidade (EF08MA23).

Apresente aos estudantes a construção dos setores do gráfico na lousa, de modo que acompanhem e reproduzam cada etapa no caderno. Após a construção, ressalte com eles algumas considerações importantes:

- Como o gráfico é circular, reunindo todos os setores obtemos o círculo todo, ou seja, adicionando as medidas de todos os ângulos dos setores obtemos 360°, assim como a soma das porcentagens de todos os setores representa 100%.
- Setores de mesmo ângulo representam regiões de mesmo tamanho no gráfico, ou seja, correspondem ao mesmo valor associado a eles (ou mesmos percentuais).

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Construindo gráfico de setores

A serra da Mantiqueira é uma cadeia montanhosa com área medindo aproximadamente 4350 km^2 que se estende ao longo de três estados brasileiros: São Paulo, Minas Gerais e Rio de Janeiro. Essa região atrai muitos turistas em busca da tranquilidade das montanhas e do clima mais ameno.

Para planejar suas campanhas publicitárias em certo ano, uma agência de turismo fez uma pesquisa buscando conhecer melhor o perfil dos turistas da serra da Mantiqueira. Considere o resultado dessa pesquisa de acordo com a estação do ano.

Perfil dos turistas da serra da Mantiqueira

Grupos de pessoas	Inverno (em %)	Demais estações do ano (em %)
Grupos familiares com crianças	42	
Amigos ou casais de 18 a 25 anos	15	
Amigos ou casais de 26 a 50 anos	26	16
Amigos ou casais acima de 50 anos	12	13
Participantes de eventos empresariais		43

Dados obtidos pela agência.

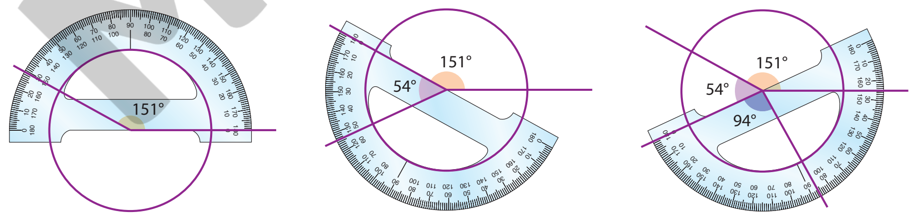
Apesar de ter havido lacunas na elaboração da tabela referente a essa pesquisa, em relação ao período de inverno foi possível construir um gráfico de setores.

Para representar o perfil dos turistas da serra da Mantiqueira no inverno por um gráfico de setores, procedemos assim:

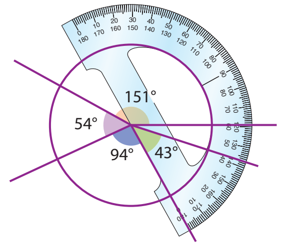
- Calculamos a medida, em grau, do setor referente a cada uma das partes:
  - 42% de 360° = $0{,}42 \cdot 360° = 151{,}2° \simeq 151°$
  - 15% de 360° = $0{,}15 \cdot 360° = 54°$
  - 26% de 360° = $0{,}26 \cdot 360° = 93{,}6° \simeq 94°$
  - 12% de 360° = $0{,}12 \cdot 360° = 43{,}2° \simeq 43°$

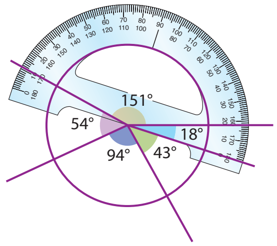
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

- Traçamos um círculo e nele construímos, com um transferidor, a partir de um raio qualquer, a sequência dos setores cujas medidas calculamos.



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



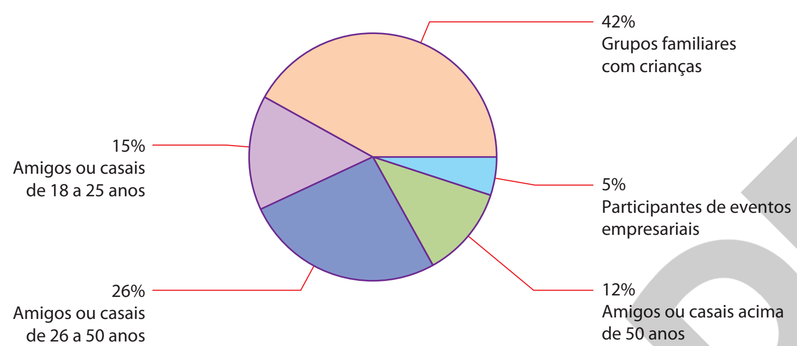


Note que a falta do último dado não impediu a construção do gráfico. O setor que falta para completar o círculo é o setor correspondente aos "Participantes de eventos", referente, na tabela, à diferença entre 100% e a soma das outras porcentagens, isto é, 5%. Apenas para confirmar, podemos comparar a medida desse ângulo (18°) com o cálculo:

$$5\% \text{ de } 360° = 0{,}05 \cdot 360° = 18°$$

- Identificamos e **registramos** cada setor com o nome e com a respectiva porcentagem.

Perfil dos turistas da serra da Mantiqueira no inverno (em %)



Dados obtidos pela agência.

2. Respostas possíveis:
– No inverno, a maior parte dos turistas viaja em família, e a menor parte é para participar de eventos empresariais.
– Nas duas épocas pesquisadas há uma porcentagem parecida de turistas com mais de 50 anos.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Sabendo que a porcentagem do grupo "Amigos ou casais de 18 a 25 anos" é seis vezes a de "Grupos familiares com crianças", construa o gráfico que representa o perfil dos turistas nas demais estações do ano. **1.** Construção de gráfico.

2 Compare os dois gráficos e escreva uma frase sobre o perfil dos turistas no inverno e nas demais estações do ano.

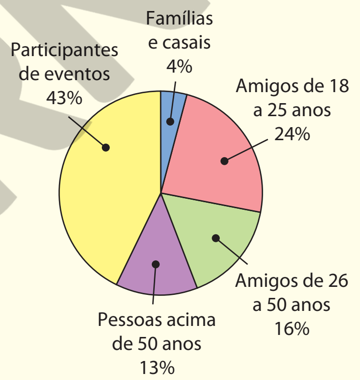
3 Com dois colegas, façam uma pesquisa com suas famílias e vizinhos (no mínimo 20 pessoas) sobre qual problema do seu bairro (água, cultura, educação, luz, moradia, saúde, segurança, transporte etc.) eles consideram o mais urgente a ser resolvido pela gestão municipal. Registre os dados em uma tabela com as quantidades absolutas em uma coluna e com as respectivas porcentagens em outra coluna. Com base nessa tabela, construam um gráfico de setores. Apresente os dados obtidos ao professor e aos colegas. **3.** Construção de gráfico.

Agora quem trabalha é você!

Na **atividade 1**, como a soma das porcentagens indicadas na tabela para as categorias "Demais estações do ano" é 72% (16 + 13 + 43 = 72), verificamos que a soma da porcentagem de "Famílias e casais" e "Amigos de 18 a 25 anos" é 28% (100 – 72 = 28). Assim, sendo x a porcentagem relativa a "Famílias e casais", obtemos $x + 6x = 28$; portanto, $x = 4$.

Assim, os estudantes devem concluir que 4% são do grupo "Famílias e casais", e 24% são do grupo "Amigos de 18 a 25 anos". Apresentamos um exemplo de gráfico de setores para essa questão:

Perfil dos turistas da Serra da Mantiqueira nas demais estações do ano



Dados obtidos pela agência Viajando Bem.

Na **atividade 2**, compartilhe com toda a turma as frases criadas pelos estudantes.

Na **atividade 3**, o gráfico depende dos dados coletados pelos estudantes.

3. Lugares geométricos

Habilidade da BNCC:
EF08MA17.

Neste tópico, serão apresentadas as definições de lugar geométrico, bissetriz de ângulos formados por duas retas concorrentes e mediatriz de um segmento, desenvolvendo-se a habilidade (EF08MA17). Ressalte aos estudantes as duas condições que definem um **lugar geométrico**.

O primeiro lugar geométrico a ser apresentado é a **circunferência**, cuja construção os estudantes já devem conhecer. Peça a cada estudante que desenhe uma circunferência em uma folha de papel avulsa. Depois, compartilhe os desenhos para perceberem que o raio da circunferência não estava definido, por isso surgiram circunferências de raios distintos; mas, apesar disso, em cada circunferência os pontos delas estão sempre à mesma distância de seu centro.

Em seguida, entregue aos estudantes uma folha de papel avulsa com um ponto marcado e peça a eles que desenhem a circunferência cujo centro seja esse ponto.

Determine uma medida para o raio e peça que desenhem novamente uma circunferência de centro no mesmo ponto demarcado, com a medida do raio indicado, determinando, assim, duas **circunferências concêntricas**.

Sugestão de leitura

Para ampliar e enriquecer o trabalho com esse tema, sugerimos:

OLIVEIRA, M. R. **Explorando lugares geométricos através da resolução de problemas.** Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática na Rede Nacional), Instituto de Ciências Matemáticas e Computação, USP, 2016. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-26102016-143505/en.php. Acesso em: 6 jun. 2022.

Esta dissertação tem o objetivo de resgatar a importância do ensino do desenho geométrico aplicado à resolução de problemas de construção geométrica plana.

3 Lugares geométricos

Em anos anteriores, mesmo sem nos preocupar com uma definição formal, já trabalhamos com lugares geométricos (LG). Neste tópico, vamos estudar um pouco mais alguns lugares geométricos.

Lembra-se da abertura deste capítulo, quando leu "Vamos reinventar a roda?"? A roda é um objeto que, ao ser representado no plano, sem perspectiva, é limitado por uma circunferência, que é um lugar geométrico.

Em Geometria plana, estabelecemos a seguinte definição:

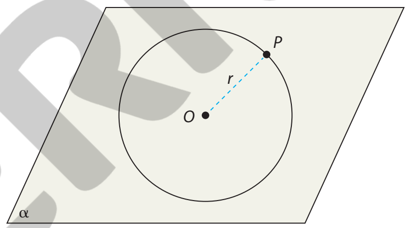
> Um conjunto de pontos é um **lugar geométrico** se, e apenas se, atende a duas condições:
> • todos os pontos desse conjunto têm uma propriedade;
> • só os pontos desse conjunto de pontos têm essa propriedade.

A circunferência como um lugar geométrico

Observe como é simples verificar que a circunferência é um LG.

Em um plano α, considere a circunferência de centro *O* e de raio medindo *r* e a propriedade "pontos de α que estão à distância de medida *r* do ponto *O*".

- Todos os pontos *P* dessa circunferência estão à distância de medida *r* do ponto *O*.
- Só os pontos dessa circunferência estão à distância de medida *r* do ponto *O*.

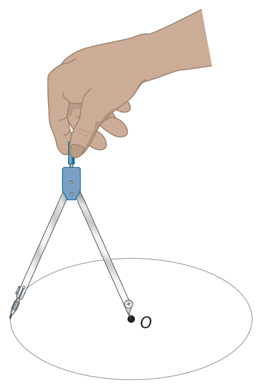


> O **lugar geométrico** dos pontos de um plano que estão a uma distância fixa de um ponto fixo do plano é a circunferência de centro nesse ponto e raio de medida igual a essa distância.

Como você já estudou, para traçar uma circunferência de centro *O* e raio de medida *r*, basta usar o compasso com abertura igual a *r* e fixar a ponta-seca no ponto *O*.

Ao girar o compasso com a volta completa, sem mexer na sua abertura, fica garantido que todos os pontos marcados pela grafite estão à distância de medida *r* de *O*. E, exceto os pontos da circunferência, não há outro ponto do plano que esteja à distância de medida *r* de *O*.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)



ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

20. a) b) c) d) Construção de figura.

20 No caderno, trace uma reta r qualquer e marque em r dois pontos, A e B, distantes 6 cm. Obtenha pontos distantes:

a) 5 cm de A e 3 cm de B;
b) 3 cm de A e 5 cm de B;
c) 4 cm de A e 3 cm de B;
d) 3 cm de A e 3 cm de B;
e) 2 cm de A e 3 cm de B.

20. e) Não é possível obter ponto.

21 Construa, quando possível, e depois classifique quanto aos lados e quanto aos ângulos um triângulo com lados medindo:

a) 7 cm, 4 cm e 4 cm; **21. a)** Isósceles; obtusângulo.
b) 7 cm, 7 cm e 7 cm; **21. b)** Equilátero; acutângulo.
c) 7 cm, 8 cm e 8 cm; **21. c)** Isósceles; acutângulo.
d) 10 cm, 6 cm e 8 cm. **21. d)** Escaleno; retângulo.

Pontos equidistantes dos extremos de um segmento

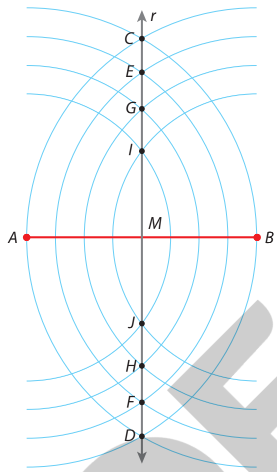
Mediatriz de um segmento

A palavra **equidistante** significa "a igual distância".

Vamos considerar um segmento $\overline{AB}$ medindo 4 cm e obter pontos que estão a uma mesma distância de A e de B.

Por exemplo:

- pontos C e D à distância 4 cm de A e de B;
- pontos E e F à distância 3,5 cm de A e de B;
- pontos G e H à distância 3 cm de A e de B;
- pontos I e J à distância 2,5 cm de A e de B.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Os pontos C, D, E, F, G, H, I e J estão alinhados e pertencem à reta r que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$, pois M também é equidistante de A e de B.

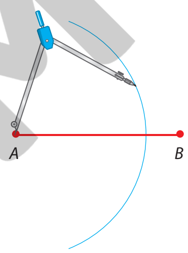
A reta r é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

O lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes dos extremos de um segmento $\overline{AB}$ é a mediatriz desse segmento.

Dado um segmento $\overline{AB}$, para traçar sua mediatriz basta obter dois pontos equidistantes de A e de B e traçar a reta que passa por eles. Note que essa reta é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$, no qual a intersecção determina o seu ponto médio M.

Acompanhe os passos para construir com régua e compasso a reta mediatriz ao segmento $\overline{AB}$.

1. Com a ponta-seca do compasso em A e abertura maior que a metade de AB, traçamos um arco.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 20** e **21** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 20**, os estudantes devem aplicar o conceito de circunferência como lugar geométrico para determinar os pontos solicitados.

Pontos equidistantes dos extremos de um segmento

Para desenvolver esse conteúdo, proponha aos estudantes que representem um segmento $\overline{AB}$ em uma folha de papel sulfite e, em seguida, façam uma circunferência com centro em A e raio m um pouco maior que a metade de $\overline{AB}$ e, depois, uma circunferência com raio m e centro em B. Eles devem marcar os pontos de intersecção dessas circunferências. Em seguida, com raio n um pouco maior que m, devem traçar uma circunferência com centro em A e outra com centro em B e, por fim, destacar os pontos de intersecção entre elas. Eles devem repetir esse procedimento até perceberem que os pontos marcados são colineares, isto é, determinam uma reta.

Pontos equidistantes dos extremos de um segmento

Apresente aos estudantes a construção da mediatriz de um segmento na lousa. Ao final, peça-lhes que a construam no caderno.

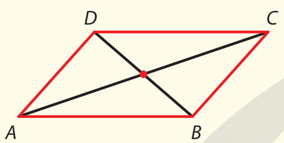
Espera-se que percebam que essa construção determina retas perpendiculares que passam pelo ponto médio do segmento considerado. Lembre-os de terem cuidado no manuseio do compasso, a fim de que não se machuquem com a ponta-seca.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 22** e **24** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 23**, espera-se que os estudantes percebam que, caso a medida de abertura do compasso seja menor do que a metade do segmento dado, não se determinam pontos de intersecção entre as circunferências construídas.

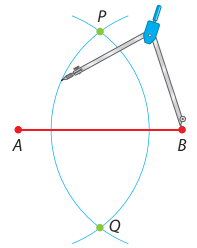
No **exercício 25**, em que os estudantes têm de decalcar a figura, eles devem traçar uma diagonal ($\overline{AC}$) e determinar seu ponto médio construindo a mediatriz dessa diagonal. Em seguida, devem traçar a outra diagonal ($\overline{BD}$) e determinar seu ponto médio.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

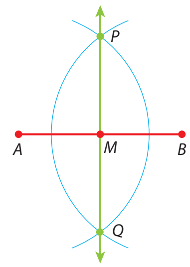
Para resolver o **exercício 26**, sugere-se primeiro apresentar aos estudantes alguns exemplos de problemas que possam ser elaborados e discutir sua resolução com eles. Em seguida, os estudantes podem criar outros problemas envolvendo a definição de lugar geométrico de circunferência e de mediatriz.

2. Com a ponta-seca do compasso em *B* e com a mesma abertura, traçamos outro arco, que intersecta o primeiro. Obtemos, assim, os pontos *P* e *Q*.



(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

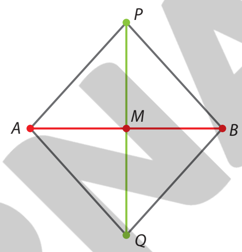
3. Traçamos a reta $\overleftrightarrow{PQ}$, perpendicular a $\overline{AB}$, que intersecta o segmento $\overline{AB}$ em *M*. Assim, determinamos o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que, nessa construção, o polígono *APBQ* é um losango, já que $\overline{AP} \cong \overline{PB} \cong \overline{BQ} \cong \overline{QA}$ (a abertura do compasso é a mesma). Então, $\overline{PQ}$ e $\overline{AB}$ são as diagonais desse losango. Essas diagonais dividem o losango em quatro triângulos retângulos e isósceles congruentes, o que pode ser verificado por meio de dobradura. Dessa forma, *M* é o ponto médio de $\overline{AB}$.

Assim, as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e se cortam no ponto médio.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22 Desenhe no caderno duas retas, *r* e *s*, concorrentes em um ponto P e um segmento de reta $\overline{AB}$ qualquer, fora de *r* e de *s*. Em seguida, com régua e compasso, construa em *r* e *s* quatro segmentos de reta, $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$, $\overline{PS}$ e $\overline{PT}$, com Q e S pertencentes a *r*, e R e T pertencentes a *s*, todos congruentes a $\overline{AB}$.

a) Traçando os segmentos $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{ST}$ e $\overline{TQ}$, que polígono obtemos? **22. a)** Retângulo.

b) Os segmentos $\overline{QS}$ e $\overline{RT}$ são as diagonais desse polígono. Essas diagonais se intersectam no ponto médio? Que ponto é esse? **22. b)** Sim; o ponto *P*.

23 Releia os passos para obter o ponto médio de um segmento e responda: por que, no primeiro passo, a abertura do compasso deve ser maior que a metade da medida do segmento dado?

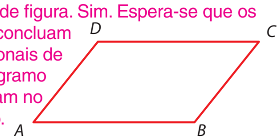
24 No caderno, desenhe um triângulo qualquer e trace as mediatrizes de dois de seus lados. Com a ponta-seca do compasso no ponto de encontro dessas mediatrizes e abertura dele até um dos vértices, trace uma circunferência.

a) A circunferência passa pelos três vértices? **24. a)** Sim.

b) Trace a mediatriz do outro lado do triângulo. As três mediatrizes se encontram em um único ponto? **24. b)** Sim.

25 Decalque em uma folha de papel transparente o paralelogramo *ABCD* representado a seguir.

25. Construção de figura. Sim. Espera-se que os estudantes concluam que as diagonais de um paralelogramo se intersectam no ponto médio.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Em seguida, com régua e compasso, obtenha o ponto médio da diagonal $\overline{AC}$ e o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$. Esses pontos médios coincidem? O que você pode concluir sobre a intersecção das diagonais de um paralelogramo?

26 ***Hora de criar*** – Elabore um problema sobre as construções geométricas com o apoio de um *software* de Geometria dinâmica e lugar geométrico. Troque com um colega e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **26.** Resposta pessoal.

23. Porque, caso contrário, os dois arcos não se cruzariam nos pontos que determinam a reta que passa pelo ponto médio.

54

Pontos equidistantes de duas retas concorrentes

Bissetriz de um ângulo

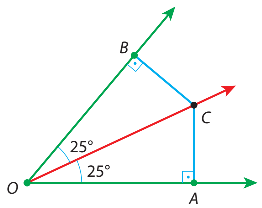
Outro conceito referente a lugar geométrico que já estudamos é a bissetriz de um ângulo.

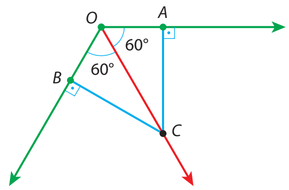
Lembrando: bissetriz de um ângulo é a semirreta com origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois outros ângulos congruentes.

Nas figuras a seguir, a semirreta $\overrightarrow{OC}$ divide o ângulo $A\hat{O}B$ em dois ângulos congruentes, ou seja, em dois ângulos de mesma medida. Logo, $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ em cada caso.

Uma propriedade importante de qualquer ponto da bissetriz de um ângulo é que ele está a igual distância dos lados desse ângulo.

Observe que os segmentos $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$, que indicam a distância de C aos lados do ângulo, são congruentes. Fazendo uma dobradura pela bissetriz, verificamos que o ponto B e o ponto A se sobrepõem.



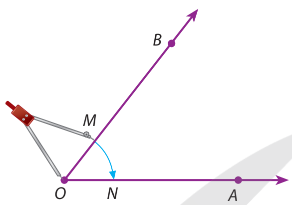


ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

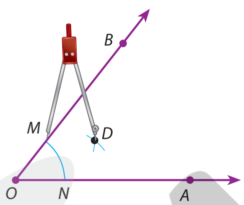
Como estudamos anteriormente, a bissetriz de um ângulo $A\hat{O}B$ pode ser obtida por dobradura de modo que um lado se sobreponha ao outro lado.

A bissetriz também pode ser traçada com régua e transferidor ou com régua e compasso. Acompanhe os passos da construção.

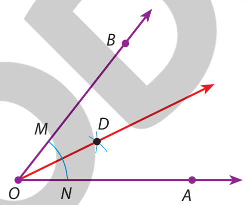
1. Com a ponta-seca do compasso em O, traçamos um arco determinando M e N.



2. Com a ponta-seca do compasso em N e depois em M, traçamos com a mesma abertura do compasso os arcos que se intersectam em D.



3. Traçamos a semirreta $\overrightarrow{OD}$, que é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

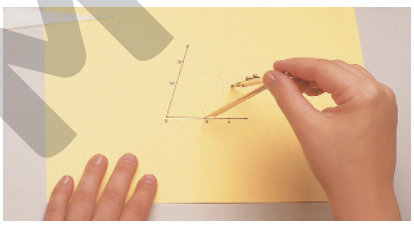


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)


EDUARDO SANTALIESTRA

Traçado de bissetriz com transferidor.


EDUARDO SANTALIESTRA

Traçado de bissetriz com compasso.

Pontos equidistantes de duas retas concorrentes

Neste tópico, abordamos a bissetriz de um ângulo como lugar geométrico e os passos para sua construção com régua e compasso. Apresente aos estudantes a construção na lousa e peça-lhes que façam o mesmo no caderno. Em seguida, para verificar, proponha a eles que meçam com o transferidor os ângulos formados e confirmem que têm mesma medida.

Prepare folhas de papel avulsas com ângulos de medidas inteiras, de modo que suas bissetrizes também determinem dois ângulos de medidas inteiras, e entregue-as aos estudantes. Eles devem construir as bissetrizes com régua e compasso e, em seguida, verificar os ângulos obtidos medindo com o transferidor.

Como aplicação da bissetriz como lugar geométrico, apresentamos outro lugar geométrico: o par de retas que contém as bissetrizes dos ângulos formados por duas retas concorrentes.

Lembre os estudantes de utilizar o compasso com cuidado, a fim de que não se machuquem com a ponta-seca.

55

Exercícios propostos

No **exercício 27**, ao aplicar a definição de bissetriz, podem-se resolver os **itens a** e **b**.

No **item a**, como a medida de $A\hat{O}B$ é 60° e como $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz, verificamos que a medida de $A\hat{O}M$ e de $M\hat{O}B$ é 30° (pois $60 : 2 = 30$). Já no **item b**, como a medida de $A\hat{O}M$ é 40°, verificamos que a medida de $A\hat{O}B$ é 90° (pois $2 \cdot 40 = 80$).

Para o **exercício 28**, verificamos:

a) a medida de $A\hat{O}C$ é 100°, pois é a soma das medidas dos ângulos $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, ou seja, $30 + 70 = 100$.

b) como a medida de $A\hat{O}M$ é igual à de $M\hat{O}B$, pois $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, cuja medida é 30°, verificamos que a medida desses ângulos é 15° ($30 : 2 = 15$).

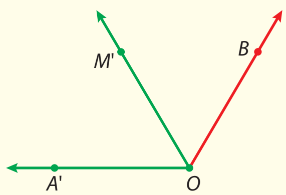
c) a medida de $N\hat{O}C$ é igual à metade da medida de $B\hat{O}C$, pois $\overrightarrow{ON}$ é bissetriz desse ângulo; assim, $N\hat{O}C$ mede 35°.

d) a medida de $M\hat{O}N$ equivale à soma das medidas dos ângulos $M\hat{O}B$ e $B\hat{O}N$; dos itens anteriores, verificamos que $B\hat{O}N$ mede 35° (pois é congruente a $N\hat{O}C$) e $M\hat{O}B$ mede 15° (pois é congruente a $A\hat{O}M$). Assim, $M\hat{O}B$ mede 50° ($35 + 15 = 50$).

A seguir, apresentamos a figura obtida na construção solicitada no **exercício 29**. Nessa construção, os estudantes devem aplicar o conceito de bissetriz como lugar geométrico e a definição de ângulos congruentes.

Para obter essa construção basta seguir os passos:

- Com centro em O, traçar uma circunferência e marcar os pontos A' e M' que são intersecção da circunferência com os lados do ângulo $A\hat{O}M$.
- Com centro em M' e raio $\overline{A'M'}$, traçar um arco que intersecte a circunferência, determinando o ponto B.
- Traçar a semirreta $\overrightarrow{OB}$.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

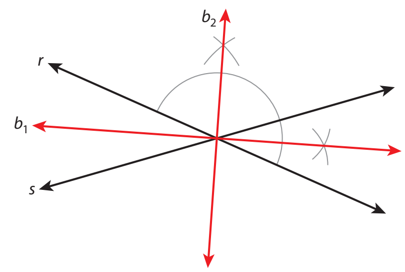
Considere a situação a seguir.

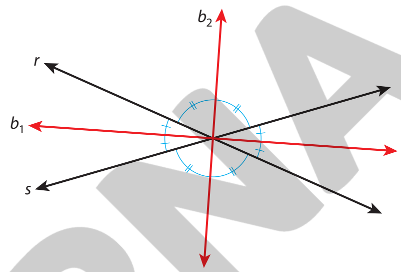
Dadas duas retas concorrentes r e s, obter o lugar geométrico dos pontos cuja propriedade é "estar à mesma distância dessas retas".

Duas retas r e s concorrentes formam quatro ângulos, dois a dois, opostos pelo vértice.

> O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de duas retas concorrentes é o par de retas que contém as bissetrizes dos ângulos formados por essas retas.

Dadas duas retas r e s, concorrentes, para obter esse lugar geométrico basta construir as bissetrizes de dois ângulos adjacentes formados por elas e prolongá-las.





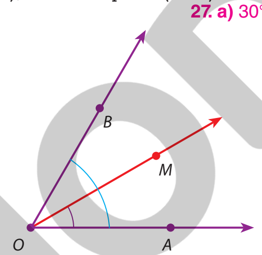
ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

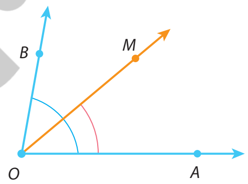
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

27 Nas figuras a seguir, $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$. Determine:

a) $m(M\hat{O}B)$, sabendo que $m(A\hat{O}B) = 60°$. **27. a)** 30°



b) $m(A\hat{O}B)$, sabendo que $m(A\hat{O}M) = 40°$. **27. b)** 80°



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

28 Nesta figura, $m(A\hat{O}B) = 30°$ e $m(B\hat{O}C) = 70°$, $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$ e $\overrightarrow{ON}$ é bissetriz de $B\hat{O}C$.

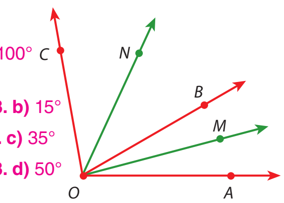
Calcule: **28. a)** 100°

a) $m(A\hat{O}C)$;

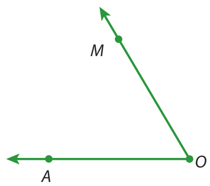
b) $m(A\hat{O}M)$; **28. b)** 15°

c) $m(N\hat{O}C)$; **28. c)** 35°

d) $m(M\hat{O}N)$. **28. d)** 50°

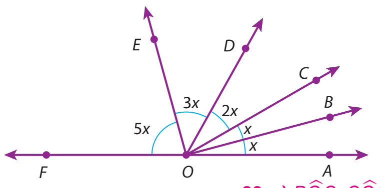


29 Copie no caderno a figura a seguir.



Sabendo que $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$, construa a semirreta $\overrightarrow{OB}$. **29.** Construção de figura.

30 Sendo x a medida de um ângulo, observe a figura em que $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OF}$ são semirretas opostas.



30. a) $B\hat{O}C$; $C\hat{O}D$.

a) Qual é o ângulo congruente a $A\hat{O}B$? E a $A\hat{O}C$?

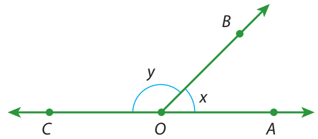
b) Qual é o ângulo congruente a $B\hat{O}D$? E a $C\hat{O}E$? **30. b)** $D\hat{O}E$; $E\hat{O}F$.

c) Qual é o valor de x? **30. c)** 15°

d) $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de algum dos ângulos destacados? De qual? E $\overrightarrow{OC}$? E $\overrightarrow{OD}$? E $\overrightarrow{OE}$?

30. d) Sim, $A\hat{O}C$. Sim, $A\hat{O}D$. Sim, $B\hat{O}E$. Sim, $C\hat{O}F$.

31 Copie a figura a seguir, em que x e y representam as medidas de $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, respectivamente, e os pontos A e C são colineares.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

Com régua e compasso, construa as bissetrizes $\overrightarrow{OM}$ de $A\hat{O}B$ e $\overrightarrow{ON}$ de $B\hat{O}C$ e, em seguida, responda às questões. **31.** Construção de figura.

a) Quanto vale $x + y$? **31. a)** 180° **31. b)** $\frac{x}{2}$; $\frac{y}{2}$.

b) Qual é a medida de $M\hat{O}B$? E de $B\hat{O}N$?

c) Qual é a medida de $M\hat{O}N$? **31. c)** 90°

d) O que você pode dizer a respeito das retas $\overleftrightarrow{OM}$ e $\overleftrightarrow{ON}$? **31. d)** São perpendiculares.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Desenhe um triângulo qualquer e trace as bissetrizes de seus ângulos internos. O que você observa a respeito da intersecção dessas bissetrizes? *Pense mais um pouco...*: As três bissetrizes intersectam-se em um único ponto.

Pontos equidistantes de duas retas paralelas

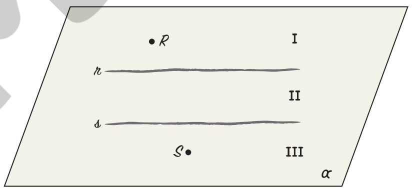
FAGNER MARTINS/SHUTTERSTOCK

A linha preta entre as linhas amarelas no centro da rodovia está à mesma distância das duas linhas brancas laterais. Estrada em Itamonte, Minas Gerais. (Fotografia de 2021.)

Considere a situação a seguir.

Dadas duas retas paralelas r e s, obter o lugar geométrico dos pontos cuja propriedade é "estar à mesma distância dessas retas".

Vamos raciocinar elaborando um esboço à mão livre. Traçamos duas retas supostamente paralelas. Elas dividem o plano em três regiões. Os pontos procurados necessariamente devem estar na região II, entre as retas. Note que um ponto qualquer R da região I está mais próximo de r e que um ponto qualquer S da região III está mais próximo de s.



ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

57

c) A semirreta $\overrightarrow{OB}$ divide o ângulo $M\hat{O}N$ em $M\hat{O}B$ e $B\hat{O}N$; logo, $m(M\hat{O}N) = m(M\hat{O}B) + m(B\hat{O}N)$. Pelo **item b**, $m(M\hat{O}N) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(x + y)$. Pelo **item a**, $m(M\hat{O}N) = \frac{1}{2} \cdot (x + y) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Ou seja, $M\hat{O}N$ é um ângulo reto.

d) Pelo **item c**, podemos afirmar que as retas são perpendiculares, pois duas semirretas suas determinam um ângulo reto.

Pense mais um pouco...

A resolução da atividade está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Exercícios propostos

No **exercício 30**, verificamos:

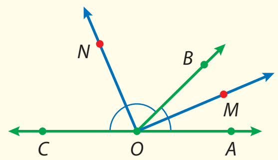
a) O ângulo congruente a $A\hat{O}B$ é $B\hat{O}C$, pois ambos apresentam medida x. O ângulo congruente a $A\hat{O}C$ é $C\hat{O}D$, pois ambos apresentam medida $2x$.

b) O ângulo congruente a $B\hat{O}D$ é $D\hat{O}E$, pois ambos apresentam medida $3x$. O ângulo congruente a $C\hat{O}E$ é $E\hat{O}F$, pois ambos apresentam medida $5x$.

c) Como $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OF}$ são semirretas opostas, formam um ângulo raso $A\hat{O}F$. Portanto, a soma das medidas dos ângulos mostrados na figura deve ser 180°: $x + x + 2x + 3x + 5x = 180°$, o que implica $12x = 180°$; portanto, $x = 15°$.

d) $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$, pois o divide em dois ângulos congruentes $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$, ambos de medida x. $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}D$, pois o divide nos ângulos congruentes $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$, ambos de medida $2x$. $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz do ângulo $B\hat{O}E$, pois o divide nos ângulos congruentes $B\hat{O}D$ e $D\hat{O}E$, ambos de medida $3x$. $\overrightarrow{OE}$ é bissetriz do ângulo $C\hat{O}F$, pois o divide nos ângulos congruentes $C\hat{O}E$ e $E\hat{O}F$, ambos de medida $5x$.

No **exercício 31**, verificamos:



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

a) Como os pontos A, O e C são colineares, as semirretas $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{OC}$ são opostas. Portanto, $A\hat{O}C$ é um ângulo raso; assim, sua medida é 180°. Além disso, a semirreta $\overrightarrow{OB}$ divide este ângulo em $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$; logo, $x + y = 180°$.

b) Como $\overrightarrow{OM}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, divide esse ângulo em dois ângulos congruentes, um deles sendo $M\hat{O}B$. Portanto, a medida de $M\hat{O}B$ é metade da medida x de $A\hat{O}B$; assim, $m(M\hat{O}B) = \frac{x}{2}$. Como $\overrightarrow{ON}$ é bissetriz de $B\hat{O}C$, divide esse ângulo em dois ângulos congruentes, um deles sendo $B\hat{O}N$. Portanto, a medida de $B\hat{O}N$ é metade da medida y de $B\hat{O}C$; assim, $m(B\hat{O}N) = \frac{y}{2}$.

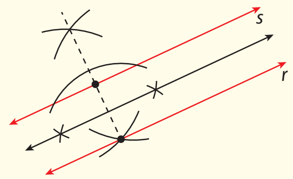
Pontos equidistantes de duas retas paralelas

Neste tópico, tratamos de outro lugar geométrico determinado pelos pontos equidistantes de duas retas paralelas.

Apresente a construção na lousa para os estudantes acompanharem todos os passos. Em seguida, peça-lhes que reproduzam essa construção no caderno. Se julgar adequado, proponha a eles que discutam a construção em duplas, o que enriquecerá o aprendizado.

Exercícios propostos

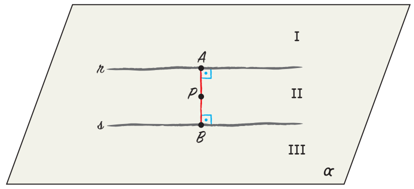
Seguindo os procedimentos 1 e 2 indicados, no **exercício 32**, obtemos:



As resoluções dos **exercícios 33** a **35** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

Para o **exercício 36**, incentive os estudantes a elaborar os problemas e verificar sua resolução antes de trocarem com os colegas. Se possível, solicite a alguns estudantes que apresentem na lousa o problema elaborado.

Vamos imaginar um ponto *P* qualquer da região II, que está à mesma distância de *r* e de *s*. A distância de *P* a *r* é indicada no esboço pela medida do segmento perpendicular a *r* com extremidades em *P* e em um ponto *A* de *r*.



Analogamente, a distância de *P* a *s* é indicada pela medida do segmento perpendicular a *s* com extremidades em *P* e em um ponto *B* de *s*.

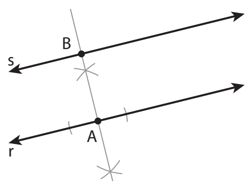
Então, *P* é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, perpendicular a *r* e a *s*.

A mediatriz do segmento $\overline{AB}$, sendo perpendicular a ele, é paralela às retas *r* e *s*, e todos os seus pontos, assim como o ponto *P*, são equidistantes de *r* e de *s*.

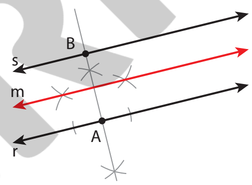
O **lugar geométrico** dos pontos equidistantes de duas retas paralelas *r* e *s* é a reta paralela a elas, que é mediatriz de qualquer segmento $\overline{AB}$, perpendicular a ambas, com *A* em *r* e com *B* em *s*.

A construção com régua e compasso desse lugar geométrico segue os passos seguintes.

1. Marcamos um ponto *A* qualquer em *r* e traçamos a perpendicular a *r* por *A*, obtendo *B* em *s*.



2. Traçamos a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, obtendo a reta *m*.



(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

35. a) Paralelogramo; possui lados paralelos, com lados e ângulos opostos congruentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

32 Fixando a régua no caderno, trace duas retas *r* e *s*, paralelas, uma em cada borda da régua. A seguir, obtenha o lugar geométrico dos pontos equidistantes dessas retas.
32. Construção de figura.

33 No caderno, trace duas retas *r* e *s*, concorrentes. Alinhando uma borda da régua em *r*, trace a reta *t*, paralela a *r* pela outra borda da régua. Da mesma maneira, trace a reta *u*, paralela a *s*. A seguir, obtenha o lugar geométrico dos pontos equidistantes dessas quatro retas.
33. Construção de figura.

34 O lugar geométrico obtido no exercício anterior é constituído de apenas um ponto *O*. Com a ponta-seca do compasso em *O* e com abertura igual à distância dele até qualquer uma das retas, trace uma circunferência. Essa circunferência é tangente às quatro retas? **34.** Construção de figura. Sim.

35 Considere a construção obtida no exercício 34 e responda:

a) Qual é o polígono obtido cujos vértices são intersecções das retas *r*, *s*, *t* e *u*? Quais são as características desse polígono?

b) Qual é a relação entre o ponto *O* e esse polígono?

36 ***Hora de criar*** – Em dupla, elaborem um problema cada um sobre construções de lugares geométricos com o apoio de um *software*. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **36.** Resposta pessoal.

35. b) Espera-se que os estudantes percebam que o ponto *O* é o centro do polígono, que corresponde ao ponto de encontro de suas diagonais.

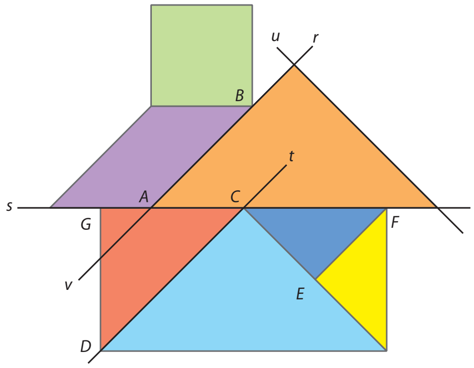
58

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A figura a seguir é uma composição com peças do tangram. Faça uma cópia no caderno e destaque retas que passem pelos lados dos polígonos que sejam: **1.** Respostas possíveis:

a) paralelas; **1. a)** *r* e *t*.
b) concorrentes; **1. b)** *r* e *s*.
c) concorrentes perpendiculares; **1. c)** *r* e *u*.
d) coincidentes. **1. d)** *r* e *v*.

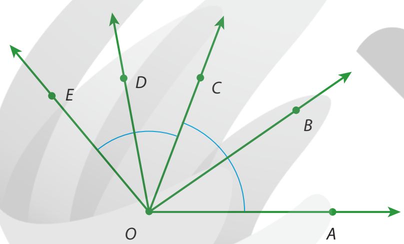


ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

2 Ainda na cópia da figura do exercício anterior, use letras para nomear os vértices dos polígonos. Depois, escreva:

a) três pares de segmentos paralelos;
b) três pares de segmentos consecutivos;
c) três pares de segmentos colineares;
d) três pares de segmentos congruentes.

3 Considere $m(A\hat{O}C) = 70°$, $m(C\hat{O}E) = 60°$, $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$ e $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $C\hat{O}E$. Calcule a medida de $B\hat{O}D$. **3.** 65°

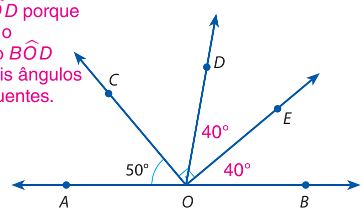


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2. Respostas possíveis: **2. a)** $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$; $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$. **2. b)** $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$; $\overline{AB}$ e $\overline{AF}$; $\overline{AC}$ e $\overline{CE}$. **2. c)** $\overline{AC}$ e $\overline{AG}$; $\overline{AC}$ e $\overline{CF}$; $\overline{GC}$ e $\overline{CF}$. **2. d)** $\overline{GC}$ e $\overline{GD}$; $\overline{GC}$ e $\overline{CF}$; $\overline{CE}$ e $\overline{EF}$.

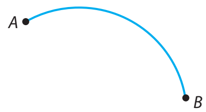
4 Na figura a seguir, $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de $A\hat{O}D$. Explique por que $\overrightarrow{OE}$ é bissetriz de $B\hat{O}D$.

4. $\overrightarrow{OE}$ é bissetriz de $B\hat{O}D$ porque divide o ângulo $B\hat{O}D$ em dois ângulos congruentes.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

5 No caderno, decalque a figura do arco $\widehat{AB}$ a seguir e, com régua e compasso, obtenha o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos A e B. **5.** Construção de figura (mediatriz de $\overline{AB}$).



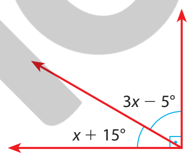
ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

6 Com régua e compasso, desenhe um triângulo equilátero de lados medindo 4 cm. A seguir, obtenha os quatro pontos que formam o lugar geométrico dos pontos que equidistam das três retas suportes dos lados do triângulo.
6. Construção de figura.

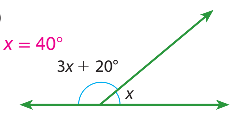
7 Na figura da resolução do exercício anterior, trace quatro circunferências, cada uma delas com centro em um dos pontos obtidos e tangentes às três retas suportes dos lados do triângulo.
7. Construção de figura.

8 Calcule a medida *x* nas figuras a seguir.
8. a) $x = 20°$

a)



b)
8. b) $x = 40°$



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios é mais uma oportunidade de os estudantes revisarem os principais conceitos tratados no capítulo e utilizarem os conhecimentos construídos, identificando possíveis dúvidas.

No **exercício 1**, verificamos:

a) *r* e *t* formam um par de retas paralelas já em destaque, mas os estudantes podem ainda identificar *s* e os prolongamentos da base do triângulo maior azul ou dos lados horizontais do quadrado verde. Também *u* e $\overleftrightarrow{CE}$ são paralelas, entre outras possibilidades.

b) *r* e *s*, *s* e *t*, *u* e *r*, *u* e *v* são alguns exemplos de pares de retas concorrentes. Há outros, se considerarmos também os prolongamentos dos lados cujos vértices não estão nomeados.

c) Como os triângulos do tangram são todos triângulos retângulos, em particular identificamos *u* e *r* como um par de retas perpendiculares.

d) Como $r = v = \overleftrightarrow{AB}$, essas retas são coincidentes.

As resoluções dos **exercícios 6** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

No **exercício 3**, como $\overrightarrow{OB}$ é bissetriz de $A\hat{O}C$, divide esse ângulo em dois ângulos congruentes, um deles sendo $B\hat{O}C$. Portanto, a medida de $B\hat{O}C$ é metade da medida $m(A\hat{O}C) = 70°$; assim, $m(B\hat{O}C) = 35°$. Como $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz de $C\hat{O}E$, divide esse ângulo em dois ângulos congruentes, um deles sendo $C\hat{O}D$. Portanto, a medida de $C\hat{O}D$ é metade da medida $m(C\hat{O}E) = 60°$; assim, $m(C\hat{O}D) = 30°$. Como $\overrightarrow{OC}$ é uma semirreta entre $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OD}$, o ângulo $B\hat{O}D$ decompõe-se nos ângulos $B\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$; portanto, $m(B\hat{O}D) = m(B\hat{O}C) + m(C\hat{O}D) = 35° + 30° = 65°$.

No **exercício 4**, sendo $\overrightarrow{OC}$ bissetriz de $A\hat{O}D$, divide esse ângulo em dois ângulos congruentes, $A\hat{O}C$ e $C\hat{O}D$; logo, $m(C\hat{O}D) = m(A\hat{O}C) = 50°$. Como $C\hat{O}E$ é um ângulo reto, então $m(C\hat{O}E) = 90°$; além disso, $\overrightarrow{OD}$ é uma semirreta entre $\overrightarrow{OE}$ e $\overrightarrow{OC}$, o ângulo $C\hat{O}E$ decompõe-se nos ângulos $D\hat{O}E$ e $C\hat{O}D$; portanto, $m(C\hat{O}E) + m(C\hat{O}D) = m(D\hat{O}E)$. Substituindo as medidas conhecidas, obtemos $90° = 50° + m(D\hat{O}E)$. Segue que $m(D\hat{O}E) = 40°$. Sabendo que $B\hat{O}E$ é suplemento de $A\hat{O}E$, logo: $m(B\hat{O}E) = 180° – 50° – 90° = 40°$. Portanto, $D\hat{O}E$ e $B\hat{O}E$ são congruentes, pois têm mesma medida, 40°. Como $\overrightarrow{OE}$ divide $B\hat{O}D$ em $B\hat{O}E$ e $D\hat{O}E$, então $\overrightarrow{OE}$ é bissetriz de $B\hat{O}D$.

No **exercício 5**, deve-se observar que o arco é um mero artefato: o conjunto dos pontos equidistantes de *A*, *B* é a mediatriz de $\overline{AB}$ e só depende desses extremos. Assim, basta construir a mediatriz do segmento $\overline{AB}$ de acordo com as instruções da página 53.

Verificando

Esta seção pode ser utilizada para propor aos estudantes exercícios como treino para avaliações de larga escala.

No **teste 1**, analisando cada alternativa, verificamos:

a) Falso, pois essas semirretas não têm extremidade comum.

b) Verdadeiro, pois esses segmentos têm o ponto A como extremidade comum.

c) Falso, nada garante que os segmentos considerados tenham a mesma medida.

d) Falso, pois ambos os segmentos estão contidos em retas concorrentes.

No **teste 2**, a **alternativa d** é a correta; as retas r e s são reversas, pois não estão contidas em um mesmo plano.

No **teste 3**, os pares apresentados nas alternativas **a**, **b** e **c** são de ruas paralelas. Já a Av. Campos Sales e a Rua 24 de Janeiro encontram-se em uma esquina de ângulo reto, transmitindo a ideia de retas perpendiculares; assim, a **alternativa d** é a correta.

No **teste 4**, $m(A\hat{O}C) = 180°$, pois $A\hat{O}C$ é um ângulo raso. Como $\overrightarrow{OB}$ divide esse ângulo nos ângulos $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}B$, obtemos: $m(A\hat{O}B) + m(C\hat{O}B) = 180°$, o que nos leva a $m(A\hat{O}B) + 30° = 180°$ ou a $m(A\hat{O}B) = 180° - 30° = 150°$. A bissetriz de $A\hat{O}B$ divide esse ângulo em dois ângulos de medida igual a $\frac{150°}{2} = 75°$, e a **alternativa b** é a correta.

As resoluções dos **testes 5** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 2.

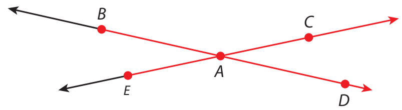
Organizando

As perguntas propostas nessa seção possibilitam aos estudantes retomar os principais conteúdos trabalhados neste capítulo. Sugerimos propor a eles que façam resumos, mapas conceituais e produzam outros esquemas que possam ser utilizados como recursos para estudar os conteúdos abordados.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Na construção a seguir, podemos afirmar que: **1. Alternativa b.**

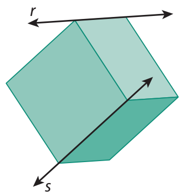


a) as semirretas $\overrightarrow{EC}$ e $\overrightarrow{BD}$ são consecutivas.
b) os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AE}$ são consecutivos.
c) os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$ são congruentes.
d) os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são colineares.

2 No cubo ilustrado a seguir, as retas r e s são:

a) concorrentes.
b) coincidentes.
c) paralelas.
d) reversas.

2. Alternativa d.



3 Na planta de ruas vemos representações que nos dão ideia de retas paralelas e perpendiculares.

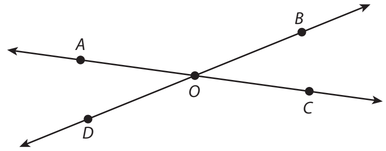
ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Representação esquemática de ruas do centro de Teresina (PI). Representação sem escala. **3. Alternativa d.**

Quais ruas dão ideia de retas perpendiculares?

a) R. Clodoaldo Freitas e R. Tiradentes.
b) R. Sete de Setembro e R. Treze de Maio.
c) R. Tiradentes e R. Benjamin Constant.
d) Av. Campos Sales e R. 24 de Janeiro.

4 Na figura a seguir, se $C\hat{O}B$ mede 30°, então ao traçar a bissetriz de $A\hat{O}B$, obteremos dois ângulos de medida igual a: **4. Alternativa b.**

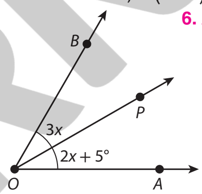


a) 150°.
b) 75°.
c) 30°.
d) 15°.

5 Dois pontos A e B distam 8 cm. Se traçarmos duas circunferências, uma de centro A e raio medindo 3 cm e uma de centro B e raio medindo 5 cm, quantos pontos as circunferências terão em comum? **5. Alternativa b.**

a) 0
b) 1
c) 2
d) Infinitos.

6 Se a semirreta $\overrightarrow{OP}$ é composta dos pontos equidistantes de $\overrightarrow{OA}$ e de $\overrightarrow{OB}$, $m(A\hat{O}B)$ é: **6. Alternativa c.**



a) 5° **b)** 15° **c)** 30° **d)** 60°

7 Um professor de natação instalou uma divisória de raias no centro de uma piscina retangular e, em seguida, outras duas, cada uma no centro das raias criadas anteriormente. A ideia de lugar geométrico utilizada pelo professor de natação nessa instalação foram os pontos equidistantes de: **7. Alternativa a.**

a) duas retas paralelas.
b) duas retas concorrentes.
c) um ponto central.
d) duas retas perpendiculares.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Que instrumentos você utilizou para fazer as construções geométricas propostas?
b) Que posições duas retas podem assumir? Descreva-as.
c) Defina circunferência e bissetriz de um ângulo como um lugar geométrico.
d) Construa um fluxograma com os passos para a construção da mediatriz de um segmento de reta.

Organizando:
a) Compasso, régua, lápis e *software* de Geometria dinâmica.
b) Paralelas: quando não têm ponto comum e são coplanares; concorrentes: quando têm um ponto em comum; coincidentes: quando têm todos os pontos em comum; e reversas: quando não têm ponto comum e não são coplanares.
c) Circunferência de centro O e raio medindo r é o lugar geométrico dos pontos de um plano que estão à distância r de O. O lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de duas retas concorrentes é o par de retas que contém as bissetrizes dos ângulos formados por essas retas.
d) Construção de figura.

No **item d**, o fluxograma pode conter os seguintes passos:

1) Dado o segmento $\overline{AB}$, com a ponta-seca do compasso em A, e depois em B, traçar arcos com abertura maior do que metade da distância AB.

2) Traçar a reta definida pelos dois pontos de intersecção dos arcos do passo **1**.

DIVERSIFICANDO

Matemática na Arqueologia

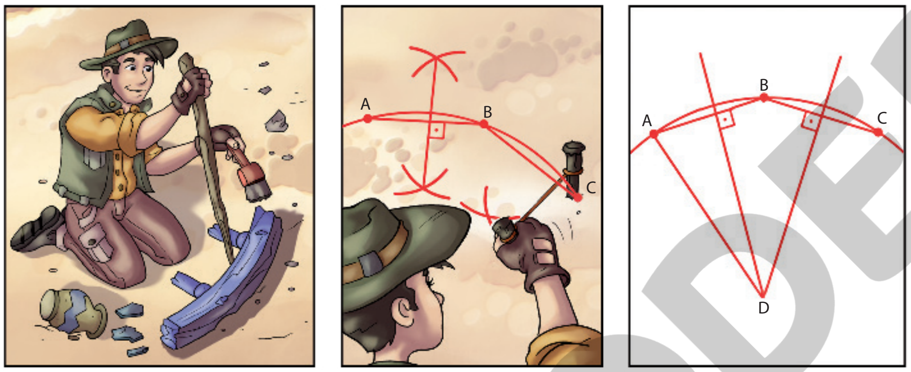

LUCAS LACAZ RUIZ/FUTURA PRESS

Escavação arqueológica na zona rural de São José dos Campos (SP). (Fotografia de 2021.)

Em uma escavação de um sítio arqueológico, Daniel encontrou alguns objetos antigos, entre os quais pedaços da roda de uma carroça.

Para recuperar informações a respeito desse achado arqueológico, como a medida do raio da roda, Daniel procedeu da seguinte maneira:

- riscou um arco no chão, contornando o pedaço da roda com cuidado para não danificá-lo;
- marcou os pontos *A*, *B* e *C* no desenho do arco e traçou os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$;
- desenhou as mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, obtendo, no cruzamento delas, o ponto *D*, no qual estaria o centro da roda;
- depois mediu a distância *AD* com uma fita métrica e obteve a medida do raio da roda.



ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Como o desenho foi feito na terra e com instrumentos precários, Daniel obteve apenas um valor aproximado, fato que deve ser considerado pelo arqueólogo.

2. Resposta possível: Como *D* pertence à mediatriz de $\overline{AB}$, está a igual distância de *A* e de *B*. Analogamente, está à mesma distância de *B* e de *C*. Como *A*, *B* e *C* são pontos quaisquer do arco, concluímos que *D* dista igualmente de todos os pontos do arco; logo, *D* é centro do arco e, por extensão, da circunferência.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Se Daniel tivesse marcado apenas os pontos A e B no desenho do arco, ele conseguiria encontrar a medida do raio da roda? Justifique sua resposta. **1.** Resposta possível: Não, pois o centro da circunferência é obtido pela intersecção de duas mediatrizes e, nesse caso, com os pontos *A* e *B*, ele poderia construir somente uma mediatriz.

2 Explique por que o procedimento de Daniel funcionou, ou seja, que propriedades matemáticas aplicadas ao desenho justificam a conclusão de que o ponto *D* é o centro da circunferência.

3 Imagine a roda inteira, sem o centro, como se fosse um anel gigante. Como você encontraria a medida do raio? Compare sua resposta com a de um colega. **3.** Respostas possíveis: Repetir o procedimento de Daniel. Contornar a roda com um barbante para obter a medida do comprimento da circunferência e dividi-lo por 6,28 (aproximação de 2π), pois a medida do comprimento da circunferência é igual a $2\pi r$, em que *r* é a medida do raio.

Diversificando

Nesta seção, retome a definição da circunferência e da mediatriz como lugares geométricos:

- O lugar geométrico dos pontos de um plano que estão a uma mesma distância fixa de um ponto dado do plano é a circunferência de centro nesse ponto e raio de medida dada por essa distância.
- O lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes dos extremos de um segmento de reta é a mediatriz desse segmento (reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio).

Antes de propor aos estudantes as questões do **Agora é com você!**, converse com eles o que garante que o encontro das mediatrizes de duas cordas de uma circunferência determina o seu centro.

Comente com os estudantes que, assim como dois pontos distintos determinam uma única reta, três pontos distintos e não alinhados determinam uma única circunferência que passa por esses três pontos.

Desse modo, espera-se que eles percebam que todos os pontos equidistantes de *A* e *B* estão na mediatriz da corda $\overline{AB}$, e todos os pontos equidistantes de *B* e *C* estão na mediatriz da corda $\overline{BC}$. Assim, *D* é um ponto equidistante de *A*, de *B* e de *C*, por isso é o centro da circunferência determinada por esses três pontos, cuja medida do raio é a distância entre quaisquer desses pontos até *D*.

Capítulo 3 - Estatística e probabilidade

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo sistematiza os assuntos tratados sobre Estatística e probabilidade ao longo deste e dos anos anteriores, aprofundando e consolidando os conhecimentos já construídos nessas áreas pelos estudantes.

A abertura chama a atenção para a desigualdade na distribuição de renda e riqueza no Brasil e no mundo, e discute como a pandemia de Covid-19 contribuiu para que a desigualdade aumentasse ainda mais, apresentando dados estatísticos de 2021.

Discuta com os estudantes se eles percebem desigualdade na distribuição de renda e riqueza na cidade em que vivem e peça a eles que identifiquem alguns indícios da desigualdade de renda. Se julgar pertinente, para enriquecer mais essa discussão, peça aos estudantes que pesquisem outras matérias de jornais ou revistas que apresentem dados e informações sobre esse assunto.

Com a resolução das questões propostas para o desenvolvimento desse tema, espera-se que os estudantes relacionem o reflexo de dezenas de casas de toda uma comunidade na fachada de um único conjunto comercial com a desigualdade descrita no texto e com os dados estatísticos apresentados (**item a**). Para a resolução do **item b** espera-se que eles relembrem o conceito de proporcionalidade e o cálculo de porcentagem, concluindo que 0,001% da população mundial corresponde a 78 000 pessoas. Analogamente, no **item c** espera-se que os estudantes concluam que 50% da população brasileira correspondem a 105 milhões de pessoas e que 10% correspondem a 21 milhões de pessoas.

Capítulo 3 Estatística e probabilidade

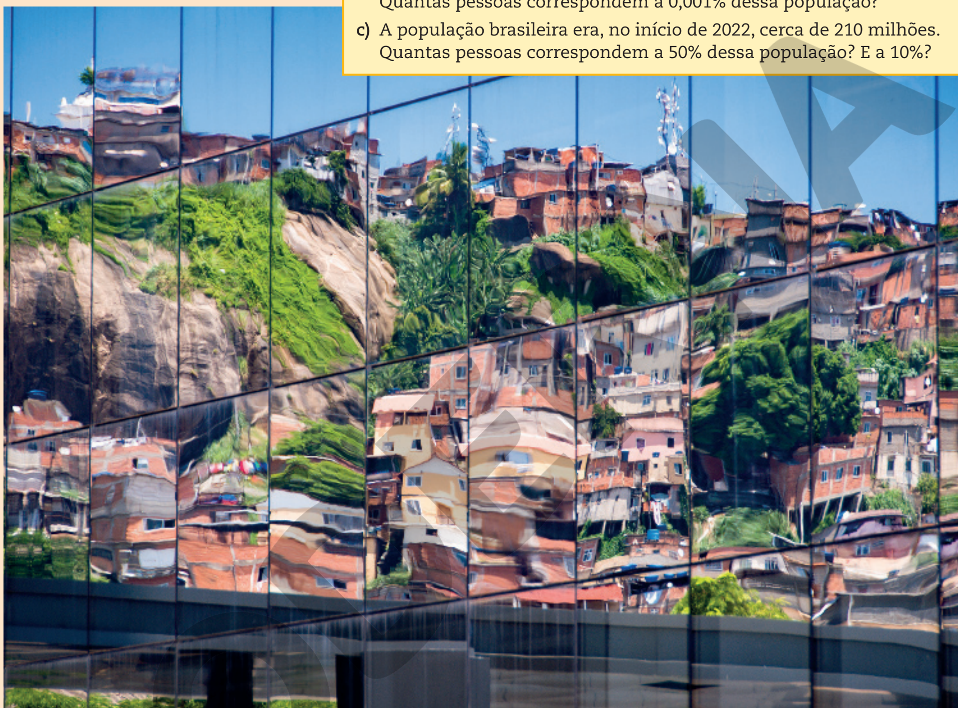
Observe, leia e responda no caderno.

a) Esta fotografia revela a desigualdade descrita nos dados estatísticos?

b) A população mundial era, no início de 2022, cerca de 7,8 bilhões. Quantas pessoas correspondem a 0,001% dessa população?

c) A população brasileira era, no início de 2022, cerca de 210 milhões. Quantas pessoas correspondem a 50% dessa população? E a 10%?

DABLDY/DEPOSITPHOTOS/FOTOARENA



Vidros espelhados de um conjunto comercial refletindo uma comunidade no Rio de Janeiro (RJ). (Fotografia de 2017.)

a) Espera-se que os estudantes deem uma resposta afirmativa, pois a fotografia mostra o reflexo de toda uma comunidade na fachada de um conjunto comercial.

Um mundo mais desigual é o legado imediato da pandemia [de Covid-19]. [...] No topo da pirâmide, um reduzido e seleto clube de multimilionários — 0,001% da população — viu suas fortunas crescerem 14%. Em uma amplíssima base, 100 milhões de pessoas a mais caíram na pobreza extrema. [...]

[...] [No Brasil,] os 10% mais ricos concentram 59% da renda nacional total, enquanto a metade [menos privilegiada] da população leva apenas cerca de 10%. [...]

Fonte: PELLICER, L.; GRASSO, D. Os 10% mais ricos com 76% do patrimônio do planeta, o retrato da desigualdade na pandemia. **El País**, Madri, 7 dez. 2021.

Na fotografia, grande parte de uma comunidade aparece refletida em um só edifício, ilustrando a desigualdade na distribuição de renda e riqueza no Brasil.

b) 78 000 pessoas. **c)** 105 milhões de pessoas; 10%: 21 milhões de pessoas.

1 Origem da Estatística

A **Estatística** é o ramo da Matemática que possibilita coletar, descrever, organizar, analisar e comunicar dados a respeito de uma população ou de um fenômeno.

Os primeiros "dados estatísticos" apareceram há muito tempo, à medida que ocorria o desenvolvimento da escrita. Registros históricos (informações que encontramos em vestígios de civilizações anteriores à nossa) de mais de 2000 anos antes de Cristo apontam o uso de processos que hoje chamaríamos de estatísticos.

Grandes impérios da Antiguidade (como o sumério, o egípcio e o chinês) e da América pré-colombiana (maia, asteca e inca) fizeram uso do levantamento e do registro de dados quantitativos para obter informações sobre sua população e suas riquezas, especialmente para fins administrativos, tributários (relativos ao pagamento de impostos) e militares.

Talvez em virtude dessa aplicação, o termo **estatística** derive da palavra latina *status*, que significa "condição, situação", ou, em sentido mais amplo, "Estado".

O uso do termo para denominar esse campo de estudo é atribuído a Gottfried Achenwall (1719-1772), professor na Universidade de Göttingen, na Alemanha.

Na atualidade, a Estatística é essencial para o desenvolvimento de todas as ciências e está presente no cotidiano por meio de índices, tabelas e gráficos.

Neste capítulo, estudaremos alguns conceitos que esclarecem as mais diversas informações estatísticas, como: população e amostra, maneiras de obtenção e organização de dados em tabelas e gráficos e medidas de tendência central.

WERNER FORMAN/UNIVERSAL IMAGES GROUP/GETTY IMAGES - MUSEU ETNOLÓGICO, BERLIM

O povo inca, que dominou a cordilheira dos Andes entre o século XII e meados do XVI, não conhecia a escrita, mas armazenava informações estatísticas em sofisticados artefatos de cordas chamados **quipos**. Neles, a uma corda principal eram amarradas várias cordas enfileiradas, cujos nós representavam quantidades relativas a bens materiais e humanos.

2 Coleta, organização e apresentação de dados

Coleta e organização

Uma bióloga fez uma pesquisa sobre a medida do comprimento da cauda dos leões adultos que vivem em determinada região. Durante o estudo, com sua equipe e em segurança, ela verificou o comprimento da cauda de 30 leões e, em seguida, anotou em um quadro as medidas aferidas.

Em Estatística, o conjunto de todos os elementos que contêm uma característica a ser estudada é chamado de **população estatística**. Na pesquisa realizada pela bióloga, a população estatística corresponde a todos os leões que vivem na região escolhida.

LEONARDO CONCEIÇÃO/ ARQUIVO DA EDITORA

1. Origem da Estatística

Habilidade da BNCC: **EF08MA26**.

Este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade (EF08MA26) ao apresentar razões que justificam a realização de pesquisas amostrais em diferentes contextos. Converse com os estudantes sobre a importância de saber coletar, descrever, organizar, analisar e comunicar dados. Destaque que trabalhos desse tipo foram importantes no desenvolvimento das grandes civilizações. Ao discutir o desenvolvimento da Estatística ao longo da história e a aplicação de conhecimentos estatísticos por diferentes civilizações para a melhor compreensão de suas realidades, contribui-se para o desenvolvimento da **competência geral 1**.

Para ampliar o trabalho com o tema, peça aos estudantes que pesquisem um pouco mais os fatos históricos citados no texto. Essa é uma ótima oportunidade para um trabalho interdisciplinar com História.

Sugestões de leitura

POUBEL, M. W.; SAD, L. A. De contagens empíricas e jogos ao poder da Ciência Estatística. **Revista História da Matemática para Professores**, [*S. l.*], v. 1, n. 1, p. 21-27, 2014. Disponível em: https://rhmp.com.br/index.php/RHMP/article/view/4/5. Acesso em: 12 jul. 2022.

Neste artigo, os autores discutem o desenvolvimento histórico da ciência estatística e a importância, atualmente, de informações estatísticas para a avaliação de processos relacionados a transformações sociais, políticas e econômicas.

FERNANDES, R. J. G.; DOS SANTOS JUNIOR, G. História da matemática: uma estratégia contextualizada para o ensino de estatística e probabilidade nos anos iniciais do ensino fundamental. **Imagens Da Educação**, 2015, v. 5, n. 2, p. 25 - 35. Disponível em: https://periodicos.uem.br/ojs/index.php/ImagensEduc/article/view/23580. Acesso em: 26 ago. 2022.

Neste artigo, os autores apresentam a História da Matemática como recurso didático para o ensino da Estatística e Probabilidade e discutem a importância da sistematização de conceitos estatísticos e probabilísticos para que os estudantes consigam transportá-los para sua vida cotidiana, auxiliando-os na leitura, análise, interpretação e comparação de dados e informações ao tomar decisões.

2. Coleta, organização e apresentação de dados

Habilidade da BNCC: **EF08MA26**.

Trabalhe com os estudantes os conceitos de população, amostra e variável estatística, aprofundando o desenvolvimento da habilidade (EF08MA26). Peça a eles que exemplifiquem situações nas quais a variável envolvida é quantitativa (idade, altura, massa, número de filhos) e outras nas quais a variável é qualitativa (cor dos olhos, esporte preferido, fruta preferida, tipo de filme preferido).

Ressalte que um rol está associado a variáveis quantitativas, visto que é a apresentação dos dados coletados de maneira ordenada (crescente ou decrescente). Em seguida, explore os conceitos de amplitude e frequência absoluta. Se julgar adequado, formule situações com a turma para levantar dados do grupo e montar tabelas de distribuição de frequências para que os estudantes apliquem o conceito de frequência absoluta e calculem a amplitude da amostra (por exemplo, número de irmãos, animais de estimação, animal preferido, time de futebol etc.). Explique-lhes que, nesse caso, como são considerados todos os estudantes da turma, a amostra utilizada é a própria população, fato que geralmente não ocorre em pesquisas estatísticas.

Solicite aos estudantes que elaborem uma pesquisa com familiares ou com seus responsáveis, colhendo os seguintes dados: sexo, idade, altura, massa corpórea, cor preferida, grau de instrução. Os estudantes devem identificar as variáveis contínuas e elaborar uma tabela de frequências.

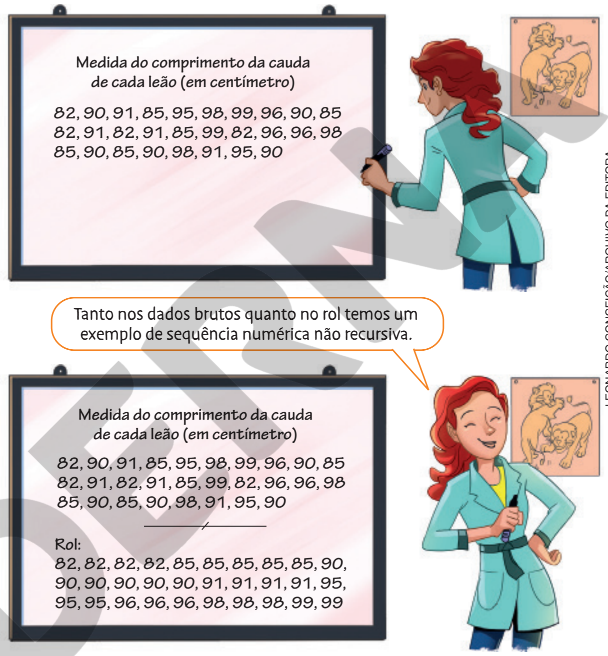
Quando uma pesquisa considera todos os elementos da população, ela é denominada **censo**. Porém nem sempre é possível pesquisar todos os elementos de uma população estatística, pois, em geral, a população a ser pesquisada é muito grande. Quando isso acontece, limitamos a pesquisa a uma parte da população, que chamamos de **amostra**.

No caso da pesquisa realizada pela bióloga, a amostra corresponde aos 30 leões que tiveram o comprimento de sua cauda medido. Ao escolher uma amostra, é necessário que ela represente a população. Isso significa que a amostra deve apresentar todas as características da população que representa e, também, deve ser **imparcial**, isto é, ela deve integrar, proporcionalmente, todos os elementos da população. Existem várias técnicas para escolher uma amostra de modo a garantir que ela represente, da melhor maneira possível, a população da qual foi retirada. Esse assunto será estudado em anos posteriores.

A coleta de dados pode ser feita por meio de observação, contagem, medida, questionário ou entrevista.

A medida do comprimento da cauda dos leões é a **variável** da pesquisa, ou seja, a característica que se quer estudar. Uma variável pode ser **quantitativa** (quando assume valor numérico associado a contagem ou medida) ou **qualitativa** (quando o valor da variável é expresso por um atributo). São exemplos de variáveis quantitativas: massa, idade, altura, entre outros. Já a cor dos olhos, a procedência, o tipo de pelo, entre outros, são exemplos de variáveis qualitativas.

Como já sabemos, após obter a medida do comprimento da cauda de cada leão, a bióloga anotou os dados em um quadro.



LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

Os dados assim apresentados são denominados **dados brutos**. Essa apresentação não favorece a observação de regularidade ou tendência nos dados. Para isso, é conveniente organizá-los em ordem crescente ou decrescente, denominada **rol**. Com o rol de dados, podemos facilmente obter a **amplitude** da amostra, que é a diferença entre o maior e o menor valor. Também podemos verificar a **frequência absoluta** de cada medida, que corresponde à quantidade de vezes que cada valor aparece na amostra. Com os dados organizados dessa maneira, fica mais fácil apresentá-los em uma **tabela de distribuição de frequências**.

Distribuição da medida do comprimento da cauda dos leões								
Medida da cauda (em centímetro)	82	85	90	91	95	96	98	99
Frequência absoluta	4	5	6	4	3	3	3	2

Dados obtidos pela bióloga.

Observando a tabela com os dados da distribuição da medida do comprimento da cauda dos leões, podemos chegar a diversas conclusões. Por exemplo:

- há 4 leões cujo comprimento da cauda mede 82 cm, ou seja, a medida 82 cm tem frequência 4;
- há 8 leões cujo comprimento da cauda mede 96 cm ou mais, pois as medidas 96 cm, 98 cm e 99 cm têm frequências 3, 3 e 2, respectivamente. E $3 + 3 + 2 = 8$;
- há 15 leões cujo comprimento da cauda mede menos de 91 cm, pois 4 têm 82 cm de comprimento de cauda, 5 têm 85 cm e 6 têm 90 cm;
- a amplitude da amostra é 17 (99 – 82).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 No caderno, classifique as variáveis a seguir em quantitativa ou qualitativa.

a) Salário. **1. a)** Quantitativa.
b) Gênero. **1. b)** Qualitativa.
c) Número de irmãos. **1. c)** Quantitativa.
d) Opinião sobre a qualidade da água. **1. d)** Qualitativa.
e) Número do sapato. **1. e)** Quantitativa.
f) Escolaridade. **1. f)** Qualitativa.

2 Dê dois exemplos de variável quantitativa e dois exemplos de variável qualitativa. **2.** Resposta pessoal.

3 Em uma pesquisa referente à qualidade da coleta de lixo de determinado município que tem 10 bairros, o instituto responsável escolheu uma amostra formada por moradores de um mesmo bairro. Analisando a situação apresentada, pode-se afirmar que as conclusões obtidas por essa pesquisa são significativas para todo o município? Justifique.

3. Não, pois a amostra não foi formada de maneira imparcial, visto que se concentrou em um único bairro.

4 Em um clube, a idade (em ano) dos participantes de um jogo de vôlei era:

18	17	20	18	16	19
16	20	17	18	17	19

Com essas informações, elabore uma tabela de distribuição de frequência. **4.** Construção de tabela.

5 Gustavo fez uma pesquisa com alguns amigos para saber quantos animais de estimação cada um deles tinha em casa.

LOPOLO/SHUTTERSTOCK

Garoto brincando com um cachorro.

Observe os números que ele obteve:

2	3	0	4	2
1	2	1	3	0
0	2	3	2	4
1	6	2	1	3

Construa uma tabela de distribuição de frequência com esses dados. **5.** Construção de tabela.

6 Dos 120 estudantes do curso de Medicina, Cláudio registrou o número de batimentos cardíacos por minuto de 50 colegas de classe. Observe os números que ele registrou:

75	85	76	85	77	88	78	77	79	77
80	92	85	90	88	78	90	85	92	79
92	90	75	76	76	78	78	76	78	77
90	92	76	90	78	76	76	85	90	80
92	90	75	80	76	78	77	76	85	88

6. Construção de tabela.

Com essas informações, construa uma tabela de distribuição de frequências e responda:

a) Quantos estudantes tem a população pesquisada? E quantos tem a amostra? **6. a)** 120 estudantes; 50 estudantes.
b) Qual é a amplitude dessa amostra? **6. b)** 17 batimentos por minuto.
c) Quantos estudantes apresentaram número de batimentos por minuto superior a 79? **6. c)** 24 estudantes.
d) Qual valor de batimentos por minuto aparece com maior frequência? **6. d)** 76

7 *Hora de criar* – Escolha uma variável quantitativa (idade, massa, altura, número de pessoas em casa etc.) que possa ser pesquisada entre os colegas de classe. Faça a pesquisa, organize os dados em uma tabela de distribuição de frequências e, depois, apresente o resultado à turma. **7.** Resposta pessoal.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 1** a **3** e do **exercício 6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Aproveite o **exercício 4** e peça aos estudantes que escrevam no caderno um rol com os dados obtidos. Espera-se que escrevam os dados apresentados em ordem crescente ou em ordem decrescente. Exemplo de um rol possível: 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 19, 20, 20.

Uma possível tabela de distribuição de frequências é:

Idade dos participantes de um jogo de vôlei (em ano)	
Idade	Frequência
16	2
17	3
18	3
19	2
20	2

Dados obtidos pela diretoria do clube.

A seguir, uma possível tabela para o **exercício 5**.

Quantidade de animais de estimação	
Quantidade de animais	Frequência
0	3
1	4
2	6
3	4
4	2
6	1

Dados obtidos por Gustavo.

No **exercício 7**, os estudantes têm a oportunidade de colocar em prática a coleta e a organização de dados relativos a uma pesquisa. Práticas de pequisa em grupo são uma ótima oportunidade para exercitar a empatia, o diálogo, a cooperação e o respeito mútuo, contribuindo, assim, para o desenvolvimento da **competência geral 9**. Na apresentação dos resultados, converse com eles sobre as possíveis dificuldades encontradas na realização da atividade.

Esse exercício, além de colocar o estudante como protagonista de seu aprendizado, contribui para o desenvolvimento da habilidade (EF08MA26).

Pense mais um pouco...

Esta seção possibilita o desenvolvimento da habilidade (EF08MA04) ao trabalhar com o cálculo de porcentagens.

Para responder ao **item a**, os estudantes devem adicionar as frequências de cada nota.

$4 + 10 + 12 + 8 + 6 = 40$

Logo, 40 atletas participaram da etapa classificatória.

No **item b**, para determinar a porcentagem referente a cada nota, podemos aplicar a propriedade fundamental das proporções. Relembre aos estudantes que, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. A resolução do **item b** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

A seguir apresentamos a tabela para o **item c**.

Distribuição das notas obtidas pelos competidores					
Nota	4,0	5,0	7,5	8,0	9,0
Frequência	4	10	12	8	6
Porcentagem	10%	25%	30%	20%	15%

Dados obtidos pela organização do torneio.

Para calcular a porcentagem de atletas reprovados pedida no **item d**, deve-se analisar a tabela construída no **item c**. Pela tabela, foram reprovados apenas os atletas que tiraram nota 4,0, e isso corresponde a 10% dos competidores.

Apresentação de resultados

Este tópico possibilita a ampliação e o aprofundamento do estudo de gráficos, com o objetivo de consolidar os conhecimentos já construídos – relacionados com a leitura, a interpretação e a construção de vários tipos de gráficos – e avançar na discussão sobre o melhor tipo de gráfico para comunicar determinada informação.

A análise dos diferentes tipos de gráficos e a avaliação do gráfico mais adequado para representar determinada informação favorecem o desenvolvimento da habilidade (EF08MA23).

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

Analise a tabela de distribuição de frequências que se refere às notas obtidas por todos os competidores em uma etapa classificatória para um torneio de saltos ornamentais.

Distribuição das notas obtidas pelos competidores					
Nota	4,0	5,0	7,5	8,0	9,0
Frequência	4	10	12	8	6

Dados obtidos pela organização do torneio.

a) Quantos atletas participaram da etapa classificatória? **a)** 40 atletas.

b) Determine a porcentagem de atletas correspondente a cada nota e a soma das porcentagens.

c) Reproduza essa tabela acrescentando uma terceira linha para indicar as porcentagens.

d) Supondo que a nota para aprovação nessa competição seja 5,0, qual é a porcentagem de atletas reprovados nessa etapa? **d)** 10%

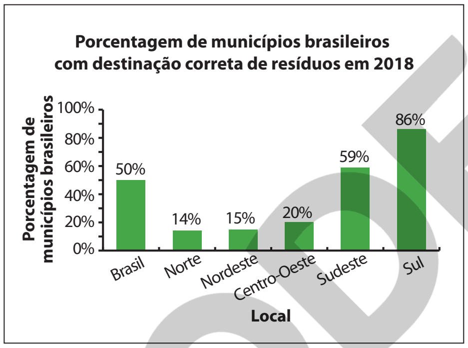
b) 10% para 4,0; 25% para 5,0; 30% para 7,5; 20% para 8,0; 15% para 9,0; 100%.
c) Construção de tabela.

Apresentação de resultados

Já aprendemos a interpretar e a organizar dados em **tabelas** e **gráficos estatísticos**. Essas representações são utilizadas tanto com o objetivo de organizar os dados obtidos em uma pesquisa a fim de observar padrões de comportamento das variáveis como para comunicar os resultados encontrados.

Vamos relembrar algumas dessas representações gráficas.

Gráfico de colunas



Dados obtidos em: GANDRA, A. Quase metade dos municípios brasileiros pesquisados ainda despeja resíduos em lixões. **Agência Brasil**, Rio de Janeiro, 5 ago. 2020. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/geral/noticia/2020-08/quase-metade-dos-municipios-ainda-despeja-residuos-em-lixoes. Acesso em: 23 maio 2022.

O gráfico de colunas é formado por retângulos de mesma medida de largura, com a base em um eixo **horizontal** e alturas correspondentes a valores em um eixo **vertical**.

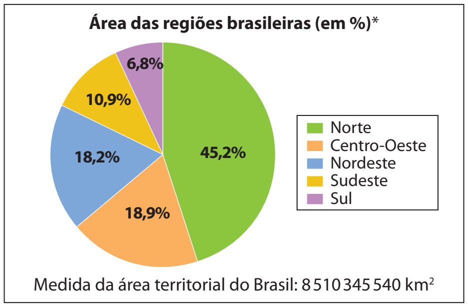
Gráfico de barras

Dados obtidos em: MENEGASSI, D. Visitação nos parques cresce pelo 12º ano seguido e bate 15 milhões em 2019. **O eco**, 18 jun. 2020. Disponível em: https://oeco.org.br/noticias/visitacao-nos-parques-cresce-pelo-12o-ano-seguido-e-bate-15-milhoes-em-2019/#:~:text=Foram%20contabilizados%2015. Acesso em: 23 maio 2022.

O gráfico de barras é parecido com o gráfico de colunas, só que a base dos retângulos que formam as barras fica apoiada no eixo **vertical**, e os valores ficam no eixo **horizontal**.

Tanto o gráfico de colunas quanto o de barras são muito utilizados, por causa da facilidade nas construções e da clareza na apresentação dos dados.

Gráfico de setores



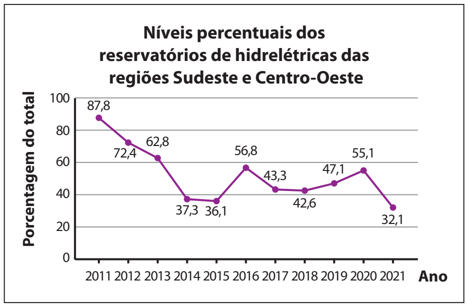
ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

*Valores aproximados.

Dados obtidos em: ÁREAS territoriais. IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/geociencias/organizacao-do-territorio/estrutura-territorial/15761-areas-dos-municipios.html?=&t=acesso-ao-produto. Acesso em: 21 jun. 2022.

No gráfico de setores, a frequência de cada dado estatístico é representada por um setor (uma "fatia") do círculo, cuja medida da área é proporcional à frequência. Ele é usado quando se deseja relacionar os dados estatísticos entre si ou com o todo. Nesse tipo de gráfico, a soma das porcentagens correspondentes às fatias deve ser 100%.

Gráfico de linha

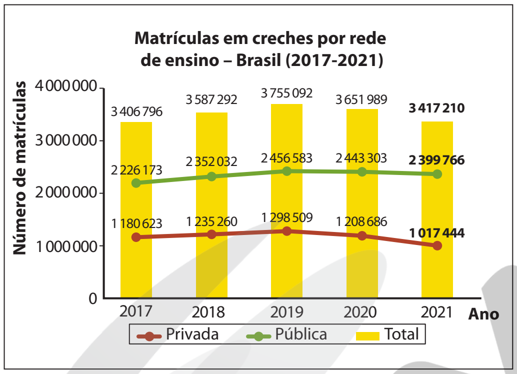


WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: AMATO, F. Nível dos reservatórios de Sudeste e Centro-Oeste em maio é o mais baixo para o mês desde 2001. **G1/Economia**, 2 jun. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2021/06/02/nivel-dos-reservatorios-de-sudeste-e-centro-oeste-em-maio-e-o-mais-baixo-para-o-mes-desde-2001.ghtml. Acesso em: 21 jun. 2022.

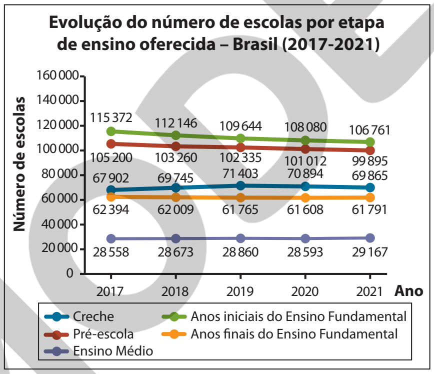
O gráfico de linha é usado principalmente para estudar um fenômeno no decorrer do tempo. Ele tem dois eixos: o **horizontal**, no qual, nesse exemplo, foram anotados os intervalos de tempo; e o **vertical**, em que foram marcadas frequências em determinada escala. Unindo os pontos obtidos no cruzamento das paralelas aos eixos pelos valores das variáveis, determinamos a linha do gráfico.

Gráficos de múltiplas entradas



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Resumo Técnico**: Censo Escolar da Educação Básica 2021. Brasília, DF: Inep, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/resumo_tecnico_censo_escolar_2021.pdf. Acesso em: 23 maio 2022.



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: BRASIL. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep). **Resumo Técnico**: Censo Escolar da Educação Básica 2021. Brasília, DF: Inep, 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/publicacoes/institucionais/estatisticas_e_indicadores/resumo_tecnico_censo_escolar_2021.pdf. Acesso em: 23 maio 2022.

Um gráfico de múltiplas entradas pode ser de linha, de colunas, de barras, entre outros. Nele, representa-se uma mesma característica estudada para duas ou mais amostras, facilitando a comparação entre elas.

Apresentação de resultados

Analise cada gráfico com os estudantes. Peça-lhes que elaborem algumas questões relacionadas aos dados de cada um em tiras de papel (identificando o tipo de gráfico). Depois, sorteie uma tira por vez para a turma responder à questão elaborada por um colega.

Apresentação de resultados

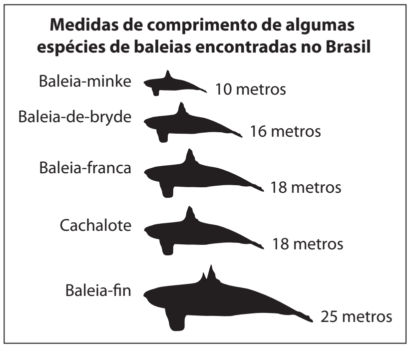
Analise os pictogramas junto com os estudantes, destacando algumas informações apresentadas. Por exemplo, no pictograma que trata das medidas de comprimento de algumas espécies de baleias encontradas no Brasil, é possível notar que a medida do comprimento da imagem da baleia que indica 10 metros é cerca de 1 centímetro, e a medida do comprimento da imagem da baleia que indica 25 metros é cerca de 2,5 centímetros, ou seja, a medida do comprimento maior é 2,5 vezes a medida do comprimento menor ($2{,}5 \cdot 10\ \text{m} = 25\ \text{m}$).

Peça aos estudantes que façam uma pesquisa sobre as espécies de baleias encontradas no Brasil, o local onde elas podem ser vistas, suas características, medidas etc. Essa pesquisa pode favorecer um trabalho interdisciplinar com Ciências.

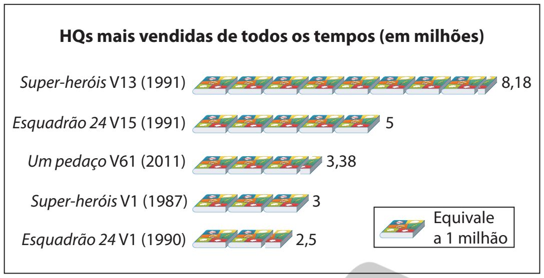
Ao apresentar o cartograma, comente que, para facilitar a leitura e melhor transmitir as informações em cartogramas, existem alguns elementos que são fundamentais e que não podem faltar em um mapa: o título (e, às vezes, o subtítulo), as legendas, a escala, a orientação e a fonte dos dados utilizados para a produção do referido mapa.

Como sugestão de atividade interdisciplinar com Geografia, peça aos estudantes que, em grupos, selecionem alguns temas e construam cartogramas. Ao final da atividade, peça aos grupos que troquem entre si os cartogramas construídos e que analisem os dados e as informações apresentadas.

Pictograma



Dados obtidos em: MIRANDA, A.; *et al*. **Guia ilustrado de identificação de cetáceos e sirênios do Brasil**: ICMBio/CMA. 2. ed. Brasília, DF: ICMBio/CMA, 2020. Disponível em: https://www.gov.br/icmbio/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/publicacoes-diversas/fauna-e-flora/guia_ilustrado_cetaceos_sirenios_3_edicao.pdf. Acesso em: 21 jun. 2022.



Dados obtidos por uma loja de HQs.

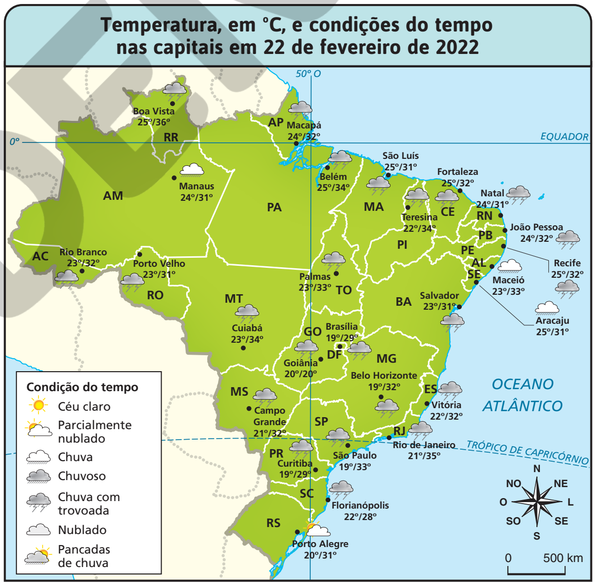
O pictograma é um gráfico formado por desenhos relacionados ao tema. Em alguns casos, as frequências/medidas da variável são representadas pela mesma figura em tamanhos proporcionais a essas frequências/medidas; às vezes, escolhe-se um ícone para representar determinada frequência/variável. Esse tipo de gráfico é muito usado em revistas e jornais.

Cartograma

O cartograma é um mapa em que se representa, por meio de pontos, linhas e figuras, a ocorrência ou a intensidade de um fenômeno, como as condições do tempo.

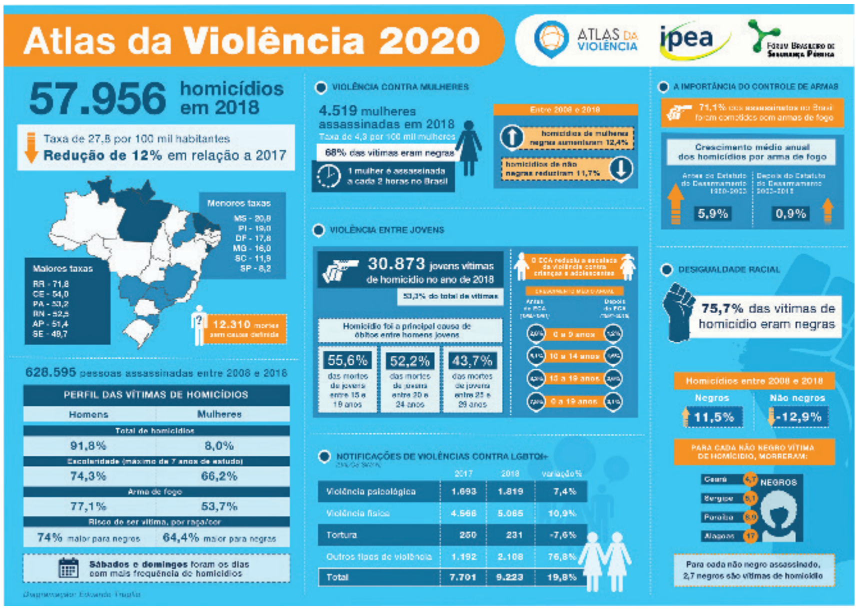
É muito comum o uso de cartograma em revistas e jornais impressos, televisionados ou virtuais, para informar a previsão do tempo.

Os cartogramas também são usados para ilustrar e simplificar a comunicação de dados em reportagens e em estudos sobre determinadas variáveis características de um lugar.



Mapa elaborado com base em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Dados obtidos em: Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Disponível em: https://tempo.cptec.inpe.br/. Acesso em: 22 fev. 2022.

Infográfico



IPEA/FÓRUM BRASILEIRO DE SEGURANÇA PÚBLICA

Fonte: INFOGRÁFICO – Atlas da Violência 2020. **Ipea**. Disponível em: https://www.ipea.gov.br/atlasviolencia/download/25/infografico-atlasda-violencia-2020. Acesso em: 23 maio 2022.

O infográfico é usado para apresentar informações por meio de recursos diversos, como gráficos, textos, ilustrações, fotografias, mapas etc. Atualmente, utilizam-se muitos infográficos em jornais, revistas e na internet.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

8. a) Paraná: 2 562 campos de futebol; Bahia: 3 270 campos de futebol; Minas Gerais: 4 630 campos de futebol.

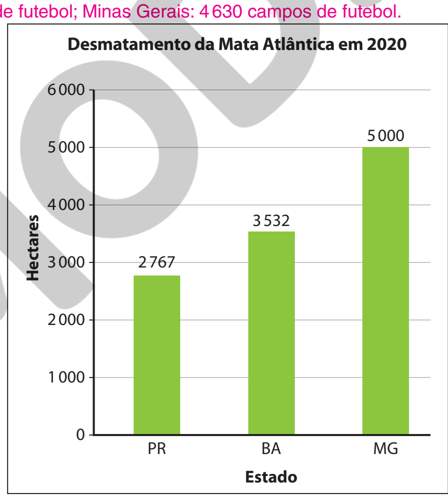
8 Observe o gráfico com dados do desmatamento da Mata Atlântica em 2020 e faça o que se pede.

a) Considere que 1 hectare corresponde a 10 000 m² e que a medida da área de um campo de futebol é 10 800 m². O equivalente a quantos campos de futebol, aproximadamente, foi desmatado em cada estado citado?

b) Construa um gráfico de barras com os dados obtidos no item a. **8. b)** Construção de gráfico.

c) Pesquise em jornais, revistas ou na internet a atual situação do desmatamento da Mata Atlântica nos estados indicados no gráfico. Construa um novo gráfico de colunas com os dados obtidos com sua pesquisa e compare-o com este. **8. c)** Construção de gráfico.

Dados obtidos em: RELATÓRIO anual 2020. **SOS Mata Atlântica**. Disponível em: https://cms.sosma.org.br/wp-content/uploads/2021/07/Relat%C3%B3rio_SOSMA_2020_01_COM-REVIS%C3%95E_12_07_2021.pdf. Acesso em: 23 maio 2022.



ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

69

Apresentação de resultados

Solicite previamente aos estudantes que pesquisem definições de infográfico e tragam exemplos retirados de diferentes meios de comunicação para a discussão deste tema.

Com base nos exemplos trazidos pelos estudantes, discuta com eles se todos são realmente infográficos, de acordo com as definições pesquisadas ou com a que foi apresentada no livro. Analise com a turma as informações contidas nos infográficos.

Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, temos uma boa oportunidade de trabalhar a articulação das Unidades Temáticas **Grandezas e medidas** e **Probabilidade e estatística**. Além disso, é favorecido o desenvolvimento da habilidade (EF08MA23) ao discutir a utilização dos diferentes tipos de gráfico.

A resolução do **exercício 8** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3. Nesse exercício, a comparação da área desmatada em hectare com a quantidade de campos de futebol tem o objetivo de passar aos estudantes uma ideia da dimensão das áreas desmatadas.

Conforme os dados informados no **item a**, 1 campo de futebol equivale a 1,08 hectare. Então:

- no Paraná, foram desmatados o equivalente a 2 562 campos de futebol.
- na Bahia, foram desmatados o equivalente a 3 270 campos de futebol.
- em Minas Gerais, foram desmatados o equivalente a 4 630 campos de futebol.

Exercícios propostos

As resoluções do **exercício 9** e dos **exercícios 11** a **13** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

O **exercício 9** é uma ótima oportunidade para desenvolver uma atividade interdisciplinar com Geografia. Para essa atividade, escolha um tema com contexto socioambiental, cultural ou econômico relevante para a comunidade e peça aos estudantes que coletem alguns dados relacionados ao tema para a região onde moram. Com base neles, os estudantes devem elaborar novas tabelas e gráficos e escrever conclusões a respeito dos dados. Os gráficos podem ser elaborados coletivamente e expostos na sala de aula ou em murais na escola, compartilhando o resultado da pesquisa com a comunidade escolar.

Para responder ao **item c** e ao **item d**, os estudantes devem observar os gráficos elaborados no **item a** e no **item b**. A região Norte tem maior medida de área, e não é correto afirmar que ela tem a maior quantidade de estados, visto que a região Nordeste tem 9 estados e a região Norte tem 7 estados.

Se necessário, retome o que foi aprendido sobre cartograma para resolver o **exercício 10**.

Acompanhe sua resolução.

a) As temperaturas mínimas previstas foram de 23 °C (Cuiabá), 24 °C (Campo Grande), 19 °C (Goiânia) e 16 °C (Brasília). Assim, a menor delas foi prevista para Brasília.

b) As temperaturas máximas previstas foram de 35 °C (Cuiabá), 31 °C (Campo Grande), 32 °C (Goiânia) e 28 °C (Brasília). Assim, a menor delas foi prevista para Brasília.

c) A maior dentre todas as temperaturas previstas foi de 35 °C.

No **exercício 11**, incentive os estudantes a escreverem afirmações com base na observação e interpretação do gráfico. Apresente-lhes também afirmações para verificarem a veracidade com base nos dados do gráfico. Por exemplo:

- De 2019 a 2021, os lucros aumentaram de um ano para outro. (Verdadeira)
- De 2018 para 2019, os lucros aumentaram. (Falsa)

9. b) Construção de gráfico. **9. d)** Não, pois a região Norte tem 7 estados, e a região Nordeste tem 9 estados.

9 Observe a tabela a seguir.

Medida da área das regiões brasileiras	
Região do Brasil	**Medida da área (em milhões de km²)***
Norte	3,85
Nordeste	1,55
Sudeste	0,92
Sul	0,58
Centro-Oeste	1,61

*Valores aproximados.

Dados obtidos em: IBGE. ÁREAS territoriais. IBGE. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/geociencias/organizacao-do-territorio/estrutura-territorial/15761-areas-dos-municipios.html?=&t=acesso-ao-produto. Acesso em: 21 jun. 2022.

9. a) Construção de gráfico.

a) Construa um gráfico de colunas que apresente a medida da área de cada região brasileira.

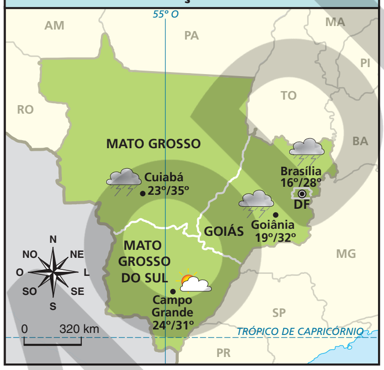
b) Construa um gráfico de barras horizontais que apresente a quantidade de estados de cada região brasileira.

c) Qual região brasileira tem maior medida de área? **9. c)** Norte.

d) É correto afirmar que a região de maior medida de área tem a maior quantidade de estados?

10 Observe no cartograma a previsão meteorológica para a região Centro-Oeste para o dia 2 de março de 2022.

Temperatura, em °C, e condições do tempo na região Centro-Oeste em 2 de março de 2022



Mapa elaborado com base em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Dados obtidos em: Centro de Previsão de Tempo e Estudos Climáticos – Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais. Disponível em: https://tempo.cptec.inpe.br/. Acesso em: 2 mar. 2022.

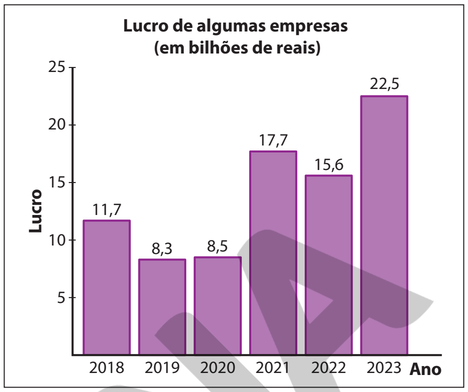
a) Para qual local foi prevista a menor temperatura mínima? **10. a)** Brasília.

b) E qual terá a menor temperatura máxima?

c) Qual foi a maior temperatura prevista?

10. b) Brasília. **10. c)** 35 °C

11 Uma empresa de consultoria fez uma pesquisa para verificar o lucro de algumas empresas brasileiras que têm ações negociadas na bolsa de valores. Os dados obtidos foram registrados no gráfico de colunas a seguir.



Dados obtidos pela empresa de consultoria.

Agora, faça o que se pede. **11. a)** Construção de gráfico.

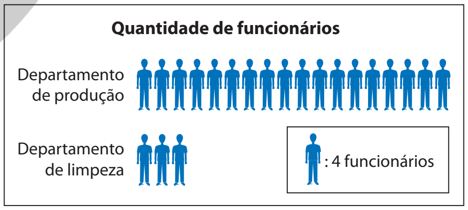
a) Construa um gráfico de linha com as informações do gráfico de colunas apresentado.

b) Em que ano o lucro das empresas foi maior?

c) O que é possível observar em relação ao lucro dessas empresas nesse período?

11. b) 2023 **11. c)** Oscilou.

12 O pictograma a seguir mostra a quantidade de funcionários em dois dos setores de uma empresa.



Dados obtidos pela empresa.

12. a) 72 funcionários.

a) Quantos funcionários trabalham no departamento de produção dessa empresa?

b) Quantos funcionários trabalham no departamento de limpeza? **12. b)** 12 funcionários.

c) É possível construir um gráfico de setores para essa situação? **12. c)** Não, pois não sabemos a quantidade total de funcionários da empresa.

13 *Hora de criar* – Pesquise em jornais, revistas, atlas, internet e selecione dois gráficos de tipos diferentes sobre o tema que quiser. Elabore um texto que sintetize as informações apresentadas nesses gráficos.

13. Resposta pessoal.

Ao finalizar este bloco de exercícios, para identificar as dificuldades dos estudantes e planejar as intervenções necessárias, organize-os em duplas e proponha a eles que conversem sobre o tipo de gráfico com o qual mais gostaram de trabalhar, qual acharam mais fácil e qual foi o mais difícil. Depois, peça-lhes que redijam um texto com as justificativas de suas opiniões. Em seguida, cada dupla apresenta para a turma o que escreveu.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

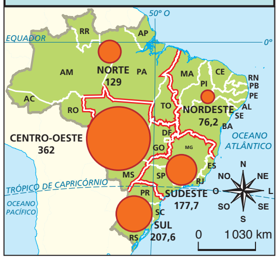
Abordando um assunto com vários tipos de gráfico

Há tempos a dengue vem preocupando a população brasileira. Dados mostram que é necessário tomar todas as precauções para que essa doença não se dissemine ainda mais no Brasil. Observe a seguir os dados referentes a essa doença, organizados em diferentes tipos de gráfico.

Cartograma

Este cartograma mostra geograficamente o registro do número de casos por 100 mil habitantes da doença em 2021 nas regiões do Brasil.

Casos de dengue por 100 mil habitantes nas regiões brasileiras (2021)



SONIA VAZ/ARQUIVO DA EDITORA

Mapa elaborado com base em: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. **Atlas geográfico escolar**. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. Dados obtidos em: **Boletim Epidemiológico 2021**. Brasília, DF: Ministério da Saúde, Secretaria de Vigilância em Saúde, v. 52, jun. 2021. Disponível em: https://www.gov.br/saude/pt-br/centrais-de-conteudo/publicacoes/boletins/boletins-epidemiologicos/edicoes/2021/boletim_epidemiologico_svs_21.pdf. Acesso em: 21 jun. 2022.

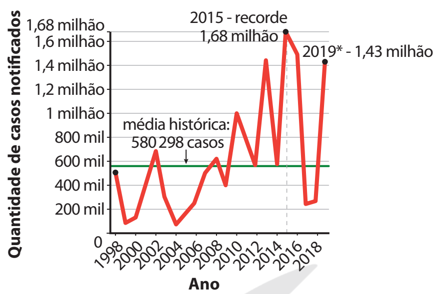
Gráfico de linhas

Um gráfico de linhas é um bom instrumento para mostrar a evolução do número de casos de dengue no Brasil.

Segundo o Ministério da Saúde, os dados do início de janeiro até 7 de dezembro de 2019 apontam 1 527 119 notificações de casos prováveis.

Dengue: evolução a cada ano

Número total de casos registrados no Brasil desde 1998



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

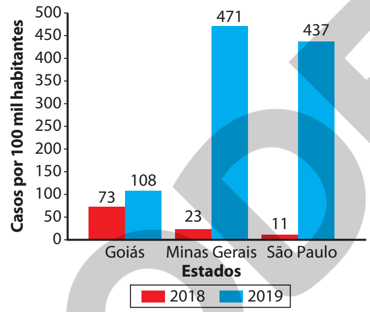
*Dados referentes até 24 jun. 2019.

Dados obtidos em: CASOS de dengue aumentam sete vezes no Brasil em 2019. **G1/Bem Estar**, 11 set. 2019. Disponível em: https://g1.globo.com/bemestar/noticia/2019/09/11/casos-de-dengue-aumentam-sete-vezes-no-brasil-em-2019.ghtml. Acesso em: 2 mar. 2022.

Gráfico de colunas

Em um gráfico de colunas, visualizamos a comparação da incidência da doença nos estados de Goiás, Minas Gerais e São Paulo em 2018 e 2019.

Casos de dengue em alguns estados brasileiros



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: CASOS de dengue aumentam sete vezes no Brasil em 2019. **G1/Bem Estar**, 11 set. 2019. Disponível em: https://g1.globo.com/bemestar/noticia/2019/09/11/casos-de-dengue-aumentam-sete-vezes-no-brasil-em-2019.ghtml. Acesso em: 2 mar. 2022.

1. Respostas possíveis: política pública de prevenção insuficiente, política educativa para a população insuficiente, falta de conscientização da população etc.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

2. 426 000 casos por 100 mil habitantes; aproximadamente 3 872%.

1 A que é possível atribuir o aumento dos casos de dengue no Brasil em 2015 e 2019?

2 Considerando os anos de 2018 e 2019, quais foram os aumentos absoluto e percentual de casos de dengue no estado por 100 mil habitantes de São Paulo?

3 No gráfico de linha, lemos a seguinte informação: "A média histórica de casos, de 1998 a 2019, é 580 298". Discuta com um colega e escrevam o que vocês entendem que essa informação significa.

3. Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes concluam que a média representa um valor entre os valores máximo e mínimo. A definição de média aritmética será vista ainda neste capítulo.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF08MA23**.

Nesta seção, aproveite para desenvolver o Tema Contemporâneo Transversal **saúde** e proponha aos estudantes uma discussão sobre ações simples com as quais cada pessoa pode se comprometer visando ao combate do mosquito transmissor da dengue; por exemplo: a constante busca por depósitos de água parada na residência ou nos locais que frequenta.

Analise os gráficos com os estudantes e peça a eles que indiquem o motivo de serem utilizados gráficos diferentes para a apresentação dos dados, avaliando a adequação dos diferentes tipos de gráficos para representar os diferentes conjuntos de dados, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF08MA23). Cada gráfico apresenta informações sobre os casos de dengue em determinadas regiões em diferentes anos.

Peça aos estudantes que pesquisem os casos de dengue na região onde moram. Depois, peça-lhes que construam um gráfico de barras com as informações obtidas.

Agora quem trabalha é você!

Na **atividade 1** do **Agora quem trabalha é você!**, espera-se que os estudantes possam relacionar as maiores quantidades de casos a anos excepcionalmente úmidos e chuvosos e às mudanças climáticas em geral, além de uma ciclicidade bienal empírica dos surtos. O aumento dos casos também pode ter sido intensificado pela insuficiência de políticas públicas de prevenção e de políticas educativas para a população.

Na **atividade 2**, o aumento absoluto de casos de dengue no estado de São Paulo foi: 437 − 11 = 426

O aumento percentual de casos de dengue no estado de São Paulo foi:

11 casos —— 100%

426 casos —— x

$x \simeq 3\,872\%$

Na **atividade 3**, espera-se que os estudantes tenham uma ideia intuitiva de média como um número representativo da quantidade de casos, situada em algum lugar entre os valores máximo e mínimo. A definição de média aritmética ainda será estudada neste capítulo.

Quando os estudantes finalizarem as questões do **Agora quem trabalha é você!**, peça a cada um que elabore outras duas atividades e troque com um colega. Cada um deve fazer as atividades elaboradas pelo outro. Depois, resolva com a turma as atividades propostas.

3. Frequência relativa

Habilidade da BNCC: **EF08MA24**.

Antes de introduzir este tema, discuta com os estudantes os conhecimentos que já construíram sobre a frequência absoluta. Pergunte a eles o que é frequência absoluta. Considerando a observação de um grupo de dados de certa variável, espera-se que eles compreendam que a frequência absoluta, ou simplesmente frequência, de um dado observado é o número de repetições dessa observação, ou seja, é o número de vezes que a variável assume esse valor.

Entretanto, a frequência absoluta não compara os dados observados em relação à quantidade total deles. Para isso definimos a frequência relativa, que facilita a comparação dos dados, expressa pela razão da frequência absoluta do dado considerado pelo total de elementos da amostra considerada. A frequência relativa geralmente é expressa na forma de porcentagem.

Desenvolva a situação proposta de modo que os estudantes acompanhem o cálculo da frequência relativa. Comente que a tabela de distribuição de frequências pode ser estendida para apresentar também a frequência relativa (no caso, acrescentando-se as colunas correspondentes às frequências relativas dos dados da turma A e da turma B).

3 Frequência relativa

Para a festa de formatura do 9º ano de um colégio, a diretora elaborou uma pesquisa sobre o gênero musical preferido dos estudantes de duas turmas. Na turma A, há 26 estudantes, e, na turma B, 35 estudantes. O resultado obtido na pesquisa foi organizado na tabela a seguir.

Gênero musical preferido entre os estudantes do 9º ano

Gênero	Número de estudantes: turma A	Número de estudantes: turma B
Pop	8	12
Funk	5	8
Rap	**10**	**10**
Indie	**1**	**1**
Outros	2	4
Total de estudantes	**26**	**35**

Dados obtidos pela diretora do colégio.

Ao observar os resultados da tabela, é possível afirmar que os gêneros *rap* e *indie* têm a mesma preferência nas duas turmas?

O número de vezes que um dado se repete em uma pesquisa é chamado de **frequência absoluta**.

Apesar de os dois gêneros musicais apresentarem a mesma frequência absoluta (número de estudantes) nas duas turmas, a preferência de cada tipo de música não é a mesma, pois as turmas não têm a mesma quantidade de estudantes.

Vamos analisar os resultados em relação ao *rap* e ao *indie*, respectivamente:

- na turma A há 10 estudantes (*rap*) e 1 estudante (*indie*) em um total de 26 estudantes;
- na turma B há 10 estudantes (*rap*) e 1 estudante (*indie*) em um total de 35 estudantes.

Assim, percebemos que só é possível comparar a preferência de um gênero musical entre essas turmas se observarmos a **razão** entre o número de estudantes que preferem esse gênero e o total de estudantes da turma. Essa razão, em estatística, é chamada de **frequência relativa**.

A frequência relativa (F_r), geralmente apresentada na forma de porcentagem, é dada por:

$$\textbf{frequência relativa} = \frac{\text{frequência absoluta}}{\text{total de elementos}}$$

Vamos calcular a frequência relativa para cada um dos gêneros musicais. Acompanhe.

Turma A:

- *pop*: $F_r = \frac{8}{26} \simeq 0{,}31 = 31\%$
- *funk*: $F_r = \frac{5}{26} \simeq 0{,}19 = 19\%$
- *rap*: $F_r = \frac{10}{26} \simeq 0{,}38 = 38\%$
- *indie*: $F_r = \frac{1}{26} \simeq 0{,}04 = 4\%$
- outros: $F_r = \frac{2}{26} \simeq 0{,}08 = 8\%$

Turma B:

- *pop*: $F_r = \frac{12}{35} \simeq 0{,}34 = 34\%$
- *funk*: $F_r = \frac{8}{35} \simeq 0{,}23 = 23\%$
- *rap*: $F_r = \frac{10}{35} \simeq 0{,}29 = 29\%$
- *indie*: $F_r = \frac{1}{35} \simeq 0{,}03 = 3\%$
- outros: $F_r = \frac{4}{35} \simeq 0{,}11 = 11\%$

Podemos, então, montar a seguinte tabela:

Gênero musical preferido entre os estudantes do 9º ano		
Gênero	**Frequência relativa: turma A**	**Frequência relativa: turma B**
Pop	31%	34%
Funk	19%	23%
Rap	**38%**	**29%**
Indie	**4%**	**3%**
Outros	8%	11%
Total	**100%**	**100%**

Dados obtidos pela diretora do colégio.

Notamos que, apesar de o *rap* apresentar a mesma frequência absoluta, a frequência relativa para esse gênero musical não foi a mesma nas duas turmas. O mesmo vale para o gênero *indie*. Com isso, concluímos que a preferência desses dois gêneros não é a mesma nas duas turmas.

Considere a situação a seguir.

O departamento de controle de qualidade de uma empresa testou a massa (em grama) de um lote de 50 pacotes de farinha, supostamente de 1 quilograma, e construiu o rol:

940; 945; 955; 955; 963; 970; 970; 972; 974; 988; 988; 988; 989; 990; 990; 991; 993; 993; 993; 996; 997; 997; 999; 999; 1 000; 1 000; 1 000; 1 000; 1 000; 1 002; 1 002; 1 004; 1 005; 1 005; 1 005; 1 008; 1 009; 1 009; 1 012; 1 016; 1 016; 1 019; 1 019; 1 020; 1 023; 1 023; 1 024; 1 025; 1 025; 1 028

Para ter uma ideia melhor da distribuição de frequência, a pesquisadora reuniu esses valores em grupos de amplitude igual a 25 gramas. A esses grupos chamamos "**classe**". Nesse caso, cada classe constituía um conjunto de números de *a* até *b*, incluindo *a* e não incluindo *b*. Observe a tabela de distribuição de frequência em classes.

Teste em pacotes de farinha (medida da massa em grama)		
Classe (de *a* até *b)**	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
De 925 até 950	2	4%
De 950 até 975	7	14%
De 975 até 1 000	15	30%
De 1 000 até 1 025	23	46%
De 1 025 até 1 050	3	6%
Totais	**50**	**100%**

* O *b* não está incluído na classe.

Dados obtidos pela empresa de farinha.

Analisando a tabela, em relação à marca estabelecida de 1 quilograma, podemos concluir que:

- em 76% dos pacotes, o erro é menor ou igual a 25 gramas;
- 48% (4% + 14% + 30%) estão abaixo e 52% (46% + 6%) estão acima.

Frequência relativa

Como os estudantes ainda não conhecem notações de conjuntos numéricos, para simplificar, usamos um asterisco com a respectiva explicação, evitando o uso da notação com os casos de colchetes abertos/fechados dos intervalos reais.

A noção de distribuição por classes será ampliada quando os estudantes trabalharem com o conjuntos dos números reais.

Ressalte algumas considerações importantes:

- Esse tipo de distribuição só é usado para variáveis quantitativas, considerando-se os dados em ordem crescente.
- Escolhemos classes de amplitudes iguais, que vão depender do tamanho da amostra.
- Cada elemento observado deve aparecer em uma única classe, e todos os elementos da amostra considerada devem aparecer em alguma das classes.
- As classes devem ser definidas. Por exemplo, 1 025 ou mais não representa uma classe.

Explore com os estudantes a situação apresentada. Ela favorece o desenvolvimento da habilidade (EF08MA24) quando decisões são tomadas com base em análise de dados em tabela de distribuição de frequência em classes. Se julgar oportuno ou necessário, elabore outros problemas e escreva-os na lousa com a participação dos estudantes.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 14** a **16** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Este bloco de exercícios contribui para o desenvolvimento das habilidades (EF08MA04) e (EF08MA24).

A seguir, apresentamos exemplos de tabelas para os **exercícios 14** (**item a**) e **15** (**item a**), respectivamente.

Tempo gasto por jovens ouvindo músicas durante um dia		
Tempo (em horas)	Frequência absoluta	Frequência relativa
De 0 a 1*	2	10%
De 1 a 2*	4	20%
De 2 a 3*	0	0%
De 3 a 4*	6	30%
De 4 a 5*	8	40%
Total	20	100%

*O número final não está incluído na classe.

Dados obtidos no grupo de jovens pesquisados.

Número de estudantes, por idade, que participaram do Enem		
Idade (em anos)	Frequência absoluta	Frequência relativa
16	60	50%
17	30	25%
18	18	15%
19	12	10%
Total	120	100%

Dados obtidos pela escola.

O **exercício 15** oferece uma possibilidade de conversar com os estudantes sobre a existência, a função e a importância do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) para estudantes e professores de modo geral.

Peça-lhes que façam uma pesquisa sobre o Enem e discutam suas conclusões com os colegas.

A seguir, apresentamos um exemplo de tabela para o **exercício 16, item b**.

Tempo semanal de acesso à internet		
Tempo (em horas)	Frequência relativa: meninos	Frequência relativa: meninas
De 0 a 1*	23,3%	0%
De 1 a 2*	30%	37,5%
De 2 a 3*	20%	25%
De 3 a 4*	16,7%	20,8%
De 4 a 5*	10%	16,7%
Total	100%	100%

*O número final não está incluído na classe.

Dados obtidos pelo colégio.

14. d) É a frequência relativa dos jovens que gastam de 4 a 5 horas ouvindo música durante um dia.

14. e) Não, pois os jovens que passam mais de 3 horas por dia ouvindo música representam 40% do total dos jovens consultados.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

14 Em uma pesquisa para saber o tempo, em hora, que os jovens gastam ouvindo música durante um dia, obtiveram-se os seguintes resultados: **14. a)** Construção de tabela.

0,5	3,0	4,5	3,0	1,0	1,0	3,0
4,5	3,0	1,0	1,0	4,0	4,0	3,0
4,0	4,0	4,5	0,5	3,0	4,0	

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências absoluta e relativa em classes de números racionais de 0 a 1*, de 1 a 2*, de 2 a 3*, de 3 a 4* e de 4 a 5*, em que * significa que o número final não está na classe.

b) Qual é a frequência absoluta dos jovens que gastam mais de 3 horas ouvindo música durante um dia? **14. b)** 8

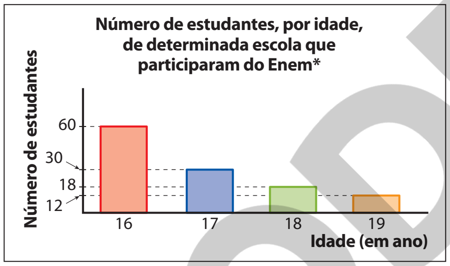
c) Determine a frequência relativa dos jovens que gastam 3 horas ouvindo música durante um dia. **14. c)** 30%

d) Analisando a tabela de distribuição de frequências construída, o que representam os 40%?

e) Podemos afirmar que mais de 50% dos jovens passam mais de 3 horas por dia ouvindo música? Justifique sua resposta.

15 Observe o gráfico a seguir.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



* Enem: Exame Nacional do Ensino Médio.

Dados obtidos pela escola.

Com base na análise do gráfico, faça o que se pede. **15. a)** Construção de tabela.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências com a frequência relativa em porcentagem. **15. b)** 15%

b) Qual é a frequência relativa dos participantes do Enem com 18 anos nessa escola?

c) Qual é a porcentagem de participantes com idade superior a 17 anos? **15. c)** 25%

d) O que é possível perceber, em relação ao número de estudantes que participam do Enem, à medida que a idade dos estudantes aumenta? **15. d)** A participação diminui.

16 A tabela a seguir mostra o tempo, em hora, que os meninos e as meninas do 8º ano de um colégio acessam a internet semanalmente.

Tempo semanal de acesso à internet		
Tempo Classe (de *a* até *b**)	Frequência absoluta: meninos	Frequência absoluta: meninas
De 0 a 1 hora	7	0
De 1 a 2 horas	9	9
De 2 a 3 horas	6	6
De 3 a 4 horas	5	5
De 4 a 5 horas	3	4
Total	**30**	**24**

* O número *b* não está incluído na classe.

Dados obtidos pelo colégio.

a) De acordo com os dados da tabela, é possível afirmar que, entre os estudantes do 8º ano, o percentual de meninos e o percentual de meninas que acessam a internet de 3 a 4 horas semanalmente são iguais? Justifique.

b) Construa a tabela de frequências relativas na forma percentual e verifique se sua resposta ao item **a** está correta. **16. b)** Construção de tabela.

16. a) Não. Apesar de as frequências absolutas de meninos e de meninas que acessam por 4 horas a internet serem iguais, não há nessa turma o mesmo número de meninos e meninas. Então, os percentuais de meninos (≃ 17%) e de meninas (≃ 21%) em relação ao total são diferentes.

4 Medidas estatísticas

Já aprendemos vários recursos e técnicas estatísticas para a descrição do grupo de valores que uma variável pode assumir. Observamos que as organizações de dados em tabelas de frequências e gráficos podem fornecer informações sobre o comportamento de uma variável, possibilitando verificar tendências e padrões.

Porém, às vezes, precisamos resumir ainda mais um conjunto de dados para expressar determinada característica da população pesquisada.

Para isso, estudaremos a seguir algumas medidas estatísticas de posição ou de tendência central: moda, média aritmética, média aritmética ponderada e mediana.

74

4. Medidas estatísticas

■ Habilidade da BNCC: **EF08MA25**.

Este tópico possibilita o desenvolvimento da habilidade (EF08MA25), ao apresentar algumas medidas de tendência central: moda, média aritmética, média aritmética ponderada e mediana. Comente com os estudantes que a média aritmética e a mediana são usadas apenas para variáveis quantitativas, enquanto a moda pode ser usada também para variáveis qualitativas. Se necessário, retome os conceitos de variável quantitativa e qualitativa.

Moda

Paulo trabalha em uma empresa de roupas selecionando adolescentes para serem modelos comerciais. Ele escolheu 160 candidatos e anotou suas alturas nesta tabela.

Distribuição das alturas dos candidatos selecionados										
Altura (em metro)	1,50	1,55	1,56	1,58	1,60	1,62	1,68	1,70	1,72	1,75
Frequência absoluta	10	15	22	23	25	35	12	10	5	3

Dados obtidos por Paulo.

Como a altura que aparece mais vezes, isto é, que apresenta a maior frequência (35) é 1,62 m, dizemos que **1,62 m** é a **moda** desse conjunto de dados.

Paulo também registrou outra característica desse grupo, a idade, em uma tabela de distribuição das frequências absolutas.

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Distribuição das idades dos selecionados						
Idade (em ano)	12	13	14	15	16	17
Frequência absoluta	11	34	34	32	31	18

Dados obtidos por Paulo.

Na tabela, as idades que apresentam a maior frequência (34) são 13 e 14 anos. Então, dizemos que nesse conjunto de dados existem **duas modas** (**bimodal**): 13 anos e 14 anos.

Nem sempre a moda é um número. Acompanhe outra situação.

A tabela a seguir apresenta o resultado de uma pesquisa realizada com clientes de uma empresa de TV por assinatura para conhecer melhor a preferência deles em relação a alguns canais.

Preferência dos telespectadores por alguns canais de TV					
Canal de TV	Canal X	Canal Y	Canal Z	Canal K	Canal W
Frequência absoluta: telespectadores	420	600	500	280	200

Dados obtidos pela empresa de TV por assinatura.

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Medidas estatísticas

Para ampliar e enriquecer o trabalho com esse tema, apresentamos o texto a seguir.

A Estatística trabalha com diversas informações que são apresentadas por meio de gráficos e tabelas e com diversos números que representam e caracterizam um determinado conjunto de dados. Dentre todas as informações, podemos retirar valores que representem, de algum modo, todo o conjunto. Esses valores são denominados "Medidas de Tendência Central ou Medidas de Centralidade". As medidas de centralidade são a **Média aritmética**, a **Moda** e a **Mediana**. [...]

Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/tratamento-da-informacao-medidas-de-tendencia-central/medidas-de-tendencia-central-passando-a-limpo-as-ideias/. Acesso em: 8 jun. 2022.

Moda

Pergunte aos estudantes o que significa o termo "moda" e escute as respostas dadas.

Depois, apresente a eles a situação das alturas dos candidatos selecionados para serem modelos e diga que a altura 1,62 m é a moda do conjunto de dados. Pergunte a eles se conseguem definir o que é moda em Matemática. Espera-se que os estudantes notem que moda é o elemento que tem a maior frequência absoluta.

Comente com eles que alguns conjuntos de dados podem ter duas modas (bimodais), enquanto outros podem ter a mesma frequência e, nesse caso, dizemos que o conjunto de dados é amodal.

Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, os estudantes vão aplicar o conceito de moda em situações variadas.

Acompanhe a resolução do **exercício 17**.

a) Como 7 é o número que aparece com a maior frequência absoluta (4), é a moda dessa sequência.

b) Como essa sequência só apresenta o valor 5, ela é amodal.

c) Os valores 10, 12 e 18 aparecem com a mesma frequência (2), que é maior do que as frequências do 17 e do 20 (1); logo, é uma sequência trimodal, com modas 10, 12 e 18.

d) Como todos os elementos dessa sequência aparecem uma única vez, todos apresentam a mesma frequência e, portanto, a sequência é amodal.

Para o **exercício 18**, apresentamos uma possível tabela para o **item a**.

Vida útil de lâmpadas	
Tempo (em dia)	**Frequência absoluta**
10	4
12	6
13	2
14	4
15	4

Dados obtidos pela equipe técnica.

Observando a tabela construída, os estudantes podem verificar que o tempo mais observado (aquele de maior frequência) é o tempo modal, o relativo a 12 dias (**item b**).

A pesquisa do **exercício 19** é pessoal e uma boa oportunidade para discutir com os estudantes como escolher uma amostra imparcial de dados.

O **exercício 20** tem como objetivo fazer com que os estudantes reflitam sobre o que aprenderam e consigam elaborar uma situação-problema que apresente um conjunto de elementos que seja bimodal e outra situação-problema que apresente um conjunto de elementos que seja amodal.

A seguir, apresentamos uma sugestão de resposta.

Bimodal: 1, 1, 2, 2, 3, 4

Amodal: 1, 1, 2, 2, 3, 3

Com base na tabela apresentada, percebemos que o canal de TV com maior frequência, 600 telespectadores, é o canal Y. Podemos dizer, então, que esse canal é a moda desse conjunto de dados.

Em um conjunto de dados, **moda** é o elemento, numérico ou não, que se destaca por apresentar a maior frequência absoluta. Se dois ou mais elementos desse conjunto tiverem a mesma frequência absoluta, maior do que os demais, esses elementos serão as modas do conjunto.

Observação

- Quando todos os valores de uma pesquisa tiverem a mesma frequência, dizemos que não há moda ou que o conjunto de dados é **amodal**.

  Por exemplo, na situação da pesquisa sobre a preferência de canais, se todos os canais tivessem a mesma preferência, o conjunto de canais seria amodal.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

17 Determine a moda de cada sequência.

a) 7, 7, 8, 10, 10, 13, 14, 7, 9, 7 **17. a)** 7

b) 5, 5, 5, 5, 5, 5 **17. b)** Não há.

c) 10, 12, 17, 12, 10, 18, 18, 20 **17. c)** 10, 12, 18

d) 3,2; 4,3; 5,1; 7,8 **17. d)** Não há.

18 Para avaliar a qualidade das lâmpadas produzidas por uma empresa, uma equipe técnica separou uma amostra com 20 lâmpadas e registrou sua vida útil, em dia:

15	14	12	13	14	14	15	10	10	12
13	10	15	10	12	12	12	14	15	12

18. a) Construção de tabela.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências absolutas para essa situação.

b) Determine a moda dessa distribuição de frequências. **18. b)** 12 dias.

19 Faça uma pesquisa com uma amostra de 10 colegas da classe e descubra qual é a moda dos esportes preferidos por vocês.

19. Resposta pessoal.

20 *Hora de criar* – Escreva uma situação de uma sequência de dados que seja bimodal e outra que seja amodal.

20. Resposta pessoal.

Média aritmética

Vamos relembrar como calcular a média de um conjunto de dados. Acompanhe a situação a seguir.

Alexandre, o professor de História, avisou aos estudantes que a média bimestral seria calculada conforme o seguinte critério: adicionam-se as notas obtidas no projeto individual, na prova e no trabalho em grupo e o resultado obtido é dividido por 3.

Laura é estudante na turma de Alexandre e calculou sua média bimestral desta maneira:

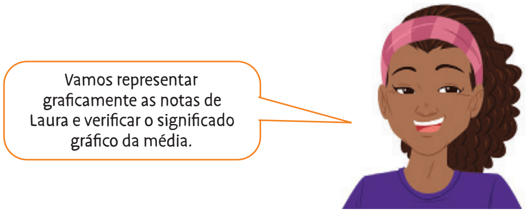
$$\text{média} = \frac{\underbrace{5{,}0}_{\text{projeto individual}} + \underbrace{6{,}5}_{\text{prova}} + \underbrace{9{,}5}_{\text{trabalho em grupo}}}{3} = \frac{21}{3} = 7{,}0$$

Portanto, nesse bimestre, Laura obteve média 7,0.

Média aritmética

Neste tópico, trabalhamos o conceito de média aritmética (simples), que é uma medida de tendência central bastante utilizada.

A **média aritmética**, ou simplesmente média, das notas de Laura é 7,0. Analisando o cálculo, é como se ela tivesse obtido notas 7,0 em todas essas avaliações.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

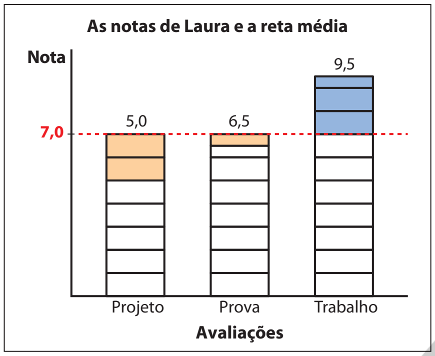
Observe que = 1,0 e que = 0,5.

Abaixo da reta média (--------), há e em Projeto e em Prova.

Acima da reta média, há , e em Trabalho.

Como podemos notar, há 2,5 unidades acima (+2,5) e 2,5 unidades abaixo (–2,5) da ordenada dos pontos da reta média.

A reta média ajuda a visualizar melhor a distribuição dos dados de um grupo de valores, se estão mais concentrados ou mais dispersos, isto é, mais espalhados.



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pelo professor de História.

O gráfico de colunas nos ajuda também a perceber o que os estatísticos chamam de **amplitude**, que é a diferença entre o maior e o menor valor da variável estudada. Nesse caso, a amplitude é 4,5 (9,5 – 5).

No 9º ano, ampliaremos esse estudo da dispersão de um conjunto de valores por meio do cálculo do desvio médio.

Para calcular a média aritmética de dois ou mais números, basta dividir a soma desses números pela quantidade de números dados.

Média aritmética ponderada

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Durante o último mês, o número de atendimentos diários de uma clínica odontológica foi:

16	18	19	19	16
19	20	19	18	19
17	17	16	18	18
20	20	18	16	17


ALINUTE SILZEVICIUTE/SHUTTERSTOCK

Média aritmética

Ao longo dos estudos no Ensino Fundamental, os estudantes já devem ter se deparado com o cálculo da média. Aproveite a situação apresentada para verificar esse conhecimento.

Explore o gráfico com a reta média. Se julgar necessário, mostre à turma a construção desse gráfico na lousa, ressaltando a determinação da reta média.

Média aritmética ponderada

A média aritmética ponderada é uma média aritmética na qual são considerados pesos diferentes para os dados da amostra. Explique aos estudantes que, ao fazer o cálculo da média aritmética simples, todos os valores têm a mesma "importância", enquanto no cálculo da média aritmética ponderada os valores têm "importâncias" diferentes (quanto maior o peso atribuído ao valor, maior a "importância" dele).

Desenvolva a **situação 1** na lousa para que os estudantes acompanhem todas as etapas do processo do cálculo da média aritmética ponderada.

Média aritmética ponderada

Para ampliar a **situação 2**, pergunte aos estudantes: "Mantendo-se os pesos das três provas e as notas de Fernando em Matemática e Língua Portuguesa, quanto deve ser sua nota em Conhecimentos Gerais para ele obter média 7,0?".

Nesse caso, os estudantes devem mobilizar seus conhecimentos de equação do 1º grau, construídos em anos anteriores, além do conceito de média aritmética ponderada.

Apresentamos a seguir uma possível resolução, indicando por *x* a nota em Conhecimentos Gerais que queremos determinar.

$$\frac{4 \cdot 7{,}5 + 4 \cdot 5{,}0 + 2 \cdot x}{4 + 4 + 2} = 7{,}0$$

$$\frac{30 + 20 + 2 \cdot x}{10} = \frac{70}{10}$$

$$50 + 2 \cdot x = 70$$

$$2 \cdot x = 70 - 50$$

$$2 \cdot x = 20$$

$$\frac{2 \cdot x}{2} = \frac{20}{2}$$

$$x = 10$$

Logo, Fernando deve tirar nota dez em Conhecimentos Gerais para obter média 7,0.

Desafie mais os estudantes perguntando: "E quanto deve ser a nota de Fernando em Conhecimentos Gerais para ele ter média superior a 7,0?". Espera-se que eles percebam que não é possível obter nota superior a dez; então, não é possível Fernando obter média maior do que 7,0 alterando apenas a nota de Conhecimentos Gerais.

Para determinar a média diária de atendimentos feitos nessa clínica, podemos verificar a quantidade de atendimentos diários e calcular a média. Observe:

- 16 aparece **4** vezes;
- 17 aparece **3** vezes;
- 18 aparece **5** vezes;
- 19 aparece **5** vezes;
- 20 aparece **3** vezes.

Então:

$$\text{média} = \frac{\mathbf{4} \cdot 16 + \mathbf{3} \cdot 17 + \mathbf{5} \cdot 18 + \mathbf{5} \cdot 19 + \mathbf{3} \cdot 20}{\mathbf{4} + \mathbf{3} + \mathbf{5} + \mathbf{5} + \mathbf{3}} = \frac{64 + 51 + 90 + 95 + 60}{20} = \frac{360}{20} = 18$$

Logo, a média diária de atendimentos feitos nessa clínica odontológica foi 18.

Situação 2

A prefeitura de um município brasileiro promoveu um concurso público para preencher algumas vagas. Na 1ª etapa do concurso, cada candidato realizou três provas: Matemática, Língua Portuguesa e Conhecimentos Gerais.

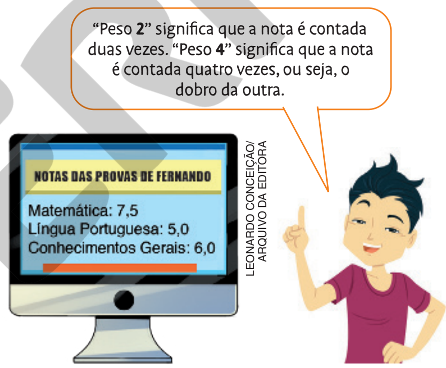
A média mínima para passar para a 2ª etapa do concurso era 6,0.

Observe o critério para o cálculo da média dos candidatos:

- prova de Matemática, peso **4**;
- prova de Língua Portuguesa, peso **4**;
- prova de Conhecimentos Gerais, peso **2**.

Fernando era um dos candidatos. Assim que as notas foram publicadas no **Diário Oficial** do município, ele resolveu conferir sua média.

Como os pesos das provas são diferentes, para calcular sua média, Fernando precisou multiplicar cada nota pelo seu respectivo peso e, então, adicionar todos os resultados obtidos. Em seguida, dividiu o resultado pela soma de todos os pesos.



LEONARDO CONCEIÇÃO/ARQUIVO DA EDITORA

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe como ele fez:

$$\frac{\mathbf{4} \cdot 7{,}5 + \mathbf{4} \cdot 5{,}0 + \mathbf{2} \cdot 6{,}0}{\mathbf{4} + \mathbf{4} + \mathbf{2}} = \frac{30 + 20 + 12}{10} = \frac{62}{10} = 6{,}2$$

Dessa maneira, Fernando confirmou que sua média foi 6,2. Portanto, ele passou para a 2ª etapa do concurso público da prefeitura.

Note que, tanto na situação da clínica odontológica quanto na situação do concurso público, foi necessário considerar o peso de cada dado para calcularmos a média. Por esse motivo, ela é chamada de **média aritmética ponderada**.

> Para obter a **média aritmética ponderada** de dois ou mais números, multiplicamos cada número por seu respectivo peso, adicionamos os produtos obtidos e dividimos o total pela soma dos pesos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

21 Lúcio comprou duas camisas; uma custou R\$ 45,00, e a outra, R\$ 39,00. Qual é o preço médio dessas camisas? **21.** R\$ 42,00

22 O quadro a seguir indica as temperaturas mínimas registradas na semana de 2 a 8 de julho em uma cidade da região Sul do Brasil. Encontre a média aritmética das temperaturas mínimas registradas nessa semana. **22.** –2 °C

Dia	Temperatura mínima (em °C)
2	2
3	1
4	–6
5	–4
6	–4
7	–2
8	–1

23 O quadro a seguir apresenta o número de estudantes matriculados no 8º ano de uma escola entre os anos de 2020 e 2023.

2020	2021	2022	2023
193	209	216	210

23. a) 828 estudantes. **23. b)** 207 estudantes.

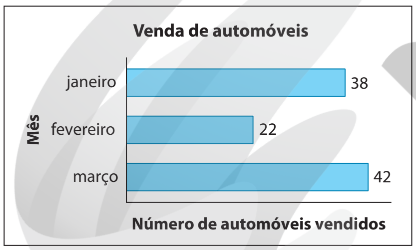
a) Quantos estudantes foram matriculados no 8º ano dessa escola nesses quatro anos?

b) Qual foi o número médio de estudantes matriculados nos quatro anos indicados?

c) Em quais anos o número de matrículas foi inferior à média? **23. c)** Somente em 2020.

24 O número de automóveis vendidos em uma concessionária no primeiro trimestre do ano foi representado por um gráfico de barras.

FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos pela concessionária.

a) Qual foi o número médio de automóveis vendidos na concessionária nesse trimestre? **24. a)** 34 automóveis.

b) Em março, quantos automóveis foram vendidos acima da média? **24. b)** 8 automóveis.

c) Considerando os três primeiros meses, faça uma estimativa de quantos automóveis devem ser vendidos no primeiro semestre do ano. **24. c)** 204 automóveis.

d) Mostre duas maneiras de chegar ao resultado do item anterior.
24. d) 38 + 22 + 42 + 34 + 34 + 34 ou 34 · 6

25 Para escolher um representante de sala, o 8º ano A fez uma votação. O resultado está representado na tabela a seguir.

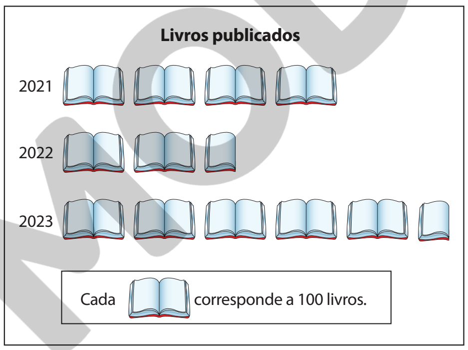
Representante de sala do 8º ano	
Estudante	**Número de votos**
Adriana	21
Vítor	18
Mariana	11

Dados obtidos pelo 8º ano A.

Faria sentido calcular a média para escolher o representante de sala do 8º ano? **25.** Não.

26 Uma editora apresentou a quantidade de livros publicados no período de 2021 a 2023 no pictograma a seguir.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos pela editora.

Calcule a média anual de livros produzidos por essa editora nesse período. **26.** 400 livros.

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 24** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Neste bloco de exercícios, os estudantes vão aplicar os conceitos de média aritmética simples e de média aritmética ponderada em situações variadas. Além disso, em alguns exercícios vão retomar o conceito de moda.

No **exercício 21**, para calcular o preço médio das duas camisas que Lúcio comprou, devemos adicionar os valores das camisas e dividir a soma por 2. Assim:

$(45 + 39) : 2 = 42$

Logo, o preço médio é R\$ 42,00.

No **exercício 22**, os estudantes devem analisar o quadro, adicionar as sete temperaturas apresentadas e dividir a soma por 7. Assim:

$[2 + 1 + (-6) + (-4) + (-4) +$
$+ (-2) + (-1)] : 7 = -2$

Logo, a média das temperaturas mínimas é –2 °C.

Acompanhe a resolução do **exercício 23**.

a) A quantidade total de estudantes matriculados é dada pela soma de estudantes matriculados a cada ano.

$193 + 209 + 216 + 210 = 828$

b) Como há quatro anos, a média é dada pela soma obtida no **item a** dividida por quatro.

$828 : 4 = 207$

c) Como a média foi de 207 estudantes, o quadro informa que o número de matrículas foi inferior à média em 2020.

No **exercício 24**, vale dar atenção especial à explicação que os estudantes apresentarem no **item d**. É uma oportunidade de eles observarem que muitos problemas podem ser resolvidos por mais de um caminho, mesmo tendo resultado único.

No **exercício 25**, espera-se que os estudantes concluam que não faz sentido calcular a média, pois a variável da pesquisa (estudante) não é um número, ela é uma variável qualitativa.

Para resolver o **exercício 26**, primeiro precisamos analisar o pictograma apresentado. Como cada imagem de livro corresponde a 100 livros, em 2021, obtemos 400 livros; em 2022, 250 livros; e, em 2023, 550 livros. Para calcular a média anual de publicações, devemos adicionar essas quantidades publicadas em cada ano e dividir a soma pela quantidade de anos considerados. Assim:

$(400 + 250 + 550) : 3 = 400$

Logo, a média anual de livros publicados é 400.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 27** a **31** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Após a resolução do **exercício 27**, diga aos estudantes que a média, em determinadas situações, pode mascarar o comportamento de uma variável em um conjunto de dados. Quando constatamos, como neste exercício, que o salário médio mensal dos funcionários de uma empresa corresponde a determinado valor e que 80% deles recebem salário menor do que esse salário médio, essa medida de tendência central não é a mais apropriada para representar a variável salário nesse conjunto de dados.

A seguir apresentamos um exemplo de tabela para o **item a**:

Salário mensal dos funcionários

Salário (em reais)	Frequência
2 050	2
2 200	3
2 320	3
2 780	1
5 970	1

Dados fornecidos pela microempresa.

No **exercício 28**, proponha aos estudantes algumas questões:

- Em que prova é mais interessante se sair melhor? (Na prova escrita, que tem peso 3.)
- Na nota final, que fração corresponde à prova escrita? E à prova prática? $\left(\frac{3}{5}; \frac{2}{5}\right)$

Aproveite a situação proposta no **exercício 29** e converse com os estudantes sobre a importância de conhecerem como são avaliados e sobre a avaliação como um processo no qual o professor também avalia o próprio trabalho e revê estratégias.

Pense mais um pouco...

Os estudantes devem perceber que, quando a dispersão (variação) da distribuição de números é muito grande, a média aritmética não é suficiente para conhecer o perfil real do grupo de dados pesquisados.

27 O salário mensal, em real, de cada um dos 10 funcionários de uma microempresa é:

2 200	2 320	2 200	2 050	2 200
2 320	2 320	2 050	2 780	5 970

27. a) Construção de tabela.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências para essa situação.

b) Determine o salário modal (moda) desses funcionários. **27. b)** 2 200 reais e 2 320 reais.

c) Calcule o salário mensal médio desses funcionários. **27. c)** 2 641 reais.

d) Quantos funcionários recebem salário mensal menor que o salário mensal médio? Que porcentagem do total de funcionários eles representam? **27. d)** 8 funcionários; 80%.

e) Discuta com um colega como é possível que o salário médio dos funcionários dessa empresa seja maior que o salário da maioria dos funcionários.

28 Em um concurso, a prova escrita tem peso 3, e a prova prática tem peso 2. Qual é a média de um candidato que obteve nota 8 na prova escrita e nota 5 na prova prática?

28. A média é 6,8.

29 Catarina é professora de Matemática. Ela obtém a média bimestral dos estudantes propondo três atividades durante o bimestre: a nota da primeira atividade tem peso 1, a nota da segunda tem peso 2 e a da terceira tem peso 3. Calcule a média bimestral de um estudante de Catarina que obteve 4,0 na primeira atividade, 7,0 na segunda e 8,0 na terceira. **29.** 7,0

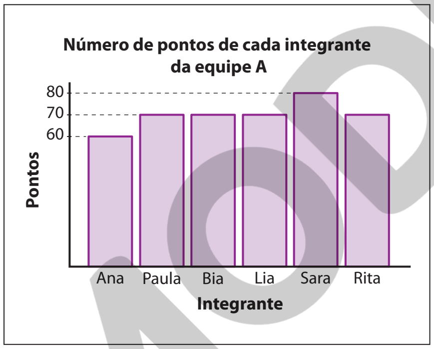
30 Uma imobiliária vendeu 5 terrenos a R$ 48 000,00 cada um e 10 terrenos a R$ 45 000,00 cada um. Qual foi o valor médio dos terrenos vendidos pela imobiliária?
30. R$ 46 000,00

31 ***Hora de criar*** – Troque com um colega um problema, criado por vocês, sobre média aritmética ponderada. Depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **31.** Resposta pessoal.

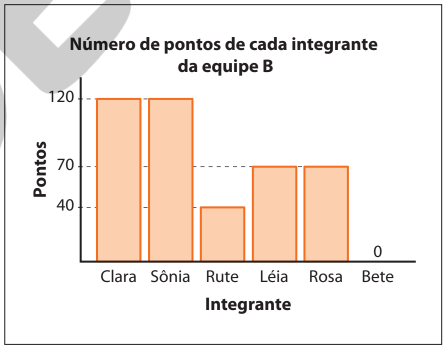
27. e) Espera-se que os estudantes percebam que o fato de haver um salário bem maior que os outros faz o salário médio aumentar.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Os gráficos a seguir representam pontos, de 0 a 100, que cada integrante das equipes A e B obteve na final da competição de saltos ornamentais promovida por um clube.



Dados obtidos pelo clube.



Dados obtidos pelo clube.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...:

a) Quantos pontos cada equipe obteve? **a)** Equipe A: 420 pontos; equipe B: 420 pontos.

b) Quantos integrantes tem cada equipe? **b)** 6 integrantes.

c) Calcule a média de pontos de cada equipe. **c)** Equipe A: 70 pontos; equipe B: 70 pontos.

d) Qual equipe obteve maior média? **d)** As duas obtiveram médias iguais.

e) Nesse caso, a média aritmética traduz o perfil de cada equipe? Justifique.
e) Não, pois, no caso da equipe B, a média 70 não deixa claro que Rute, e principalmente Bete, deveriam treinar mais.

Peça aos estudantes que reproduzam os gráficos no caderno e tracem a reta média nos dois casos. Em ambos os casos, a reta passará pelo valor médio 70 no eixo vertical. No entanto, a distribuição da equipe A é mais uniforme (ou homogênea), pois tem valores mais próximos da média, já a equipe B tem uma dispersão maior.

As resoluções do **Pense mais um pouco...** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Mediana

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

Sete amigos se encontraram no fim de semana em um salão de jogos.

Após brincar em cada um dos jogos, eles obtiveram as seguintes pontuações finais: 160, 207, 177, 185, 175, 195 e 192.


LEONARDO CONCEIÇÃO/ ARQUIVO DA EDITORA

O rol correspondente a essas pontuações é:

160 175 177 185 192 195 207

Como o conjunto de dados tem uma **quantidade ímpar** de termos, existe um termo que, após a ordenação, ocupa a posição central. Ele é chamado de **termo central**.

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição	5ª posição	6ª posição	7ª posição
160	175	177	185	192	195	207
3 termos			**termo central**	3 termos		

Observe que, nessa situação, o **termo central** ocupa a 4ª posição, que corresponde a 185 pontos. Então, dizemos que 185 é a **mediana** das pontuações finais obtidas pelo grupo de amigos.

Situação 2

Gabriela costuma participar de corridas de rua. Em um ano, ela participou de 8 corridas de 5 quilômetros e obteve os seguintes tempos, em minuto: 27, 32, 35, 29, 30, 25, 35 e 26.

O rol correspondente a esses tempos é:

25 26 27 29 30 32 35 35

Como o conjunto de dados tem uma **quantidade par** de termos, existem **dois termos centrais**.

1ª posição	2ª posição	3ª posição	4ª posição	5ª posição	6ª posição	7ª posição	8ª posição
25	26	27	29	30	32	35	35
3 termos			**termos centrais**		3 termos		

Observe que, nessa situação, os termos centrais ocupam a 4ª e a 5ª posição, que correspondem aos tempos de 29 e 30 minutos, respectivamente.

Mediana

Neste tópico, as situações desenvolvem o conceito de mediana, outra medida de tendência central. Ressalte que a mediana, assim como a média aritmética, é medida de tendência central exclusiva de distribuições cuja variável é quantitativa. Além disso, para o cálculo da mediana, devemos ter os dados da amostra ordenados, ou seja, devemos considerar sempre um rol do grupo de elementos estudados.

A **situação 1** explora um rol que tem um número ímpar de elementos, caso em que a distribuição apresenta um termo central, que é o termo mediano. Já a **situação 2** apresenta um rol que tem um número par de elementos, caso em que a distribuição tem dois termos centrais, cuja média aritmética desses dois termos determina o termo mediano. Nesse caso da **situação 2**, a mediana não é um elemento do conjunto de dados. Os estudantes devem observar essas considerações para compreenderem e formalizarem o conceito de mediana.

Desenvolva as duas situações na lousa. É importante que os estudantes notem que a mediana de um grupo de valores ordenados é o valor que divide o grupo em duas partes com a mesma quantidade de termos.

Exercícios propostos

Em cada item do **exercício 32**, temos de colocar os valores em rol para podermos calcular a mediana.

a) 3, 4, 5, 8, 10
Logo, a mediana é 5.

b) 1, 3, 3, 5, 6, 8, 10, 13
Como é uma quantidade par, fazemos:
(5 + 6) : 2 = 5,5
Logo, a mediana é 5,5.

c) 0,1; 0,2; 0,5; 0,7; 1,2; 1,5; 2,3
Logo, a mediana é 0,7.

d) 101, 102, 108, 120, 142, 150
Como é uma quantidade par, fazemos:
(108 + 120) : 2 = 114
Logo, a mediana é 114.

No **exercício 33**, também devemos colocar os valores em rol para podermos determinar o valor mediano dos preços. Ordenando os valores, obtemos:

1 224,00; 1 258,00; 1 378,00; 1 378,00; 1 378,00; 1 600,00; 1 624,00; 1 624,00; 1 822,00; 1 824,00

Como é uma quantidade par, a mediana é a média aritmética dos termos centrais; logo, obtemos:

(1 378,00 + 1 600,00) : 2 = 1 489,00

Portanto, o valor mediano é R$ 1 489,00.

Para ampliar o **exercício 35**, solicite aos estudantes que, em um dia específico, registrem o tempo que levaram para chegar à escola. Como questões climáticas, de transporte público etc. influenciam nesse tempo de deslocamento, é mais adequado que todos considerem um mesmo dia. Esses dados devem ser organizados em tabelas e gráficos e é possível pedir aos estudantes que sejam calculadas as medidas de tendência central dessa distribuição, propondo a eles que façam uma reflexão sobre os valores obtidos.

As resoluções dos **exercícios 34** a **36** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Como sugestão de atividade complementar, apresente à turma matérias de jornais e revistas com tabelas que tratem de questões em contextos diversos em que as variáveis sejam quantitativas (saúde, cultural, ambiental, esportivo, educação etc.). Os estudantes devem obter a moda, a mediana e a média aritmética do conjunto de dados para cada variável da tabela. Proponha a eles que construam um gráfico de colunas e tracem nele a reta que indica a média do conjunto de dados de cada variável. Ao final da atividade, peça aos estudantes que compartilhem com os colegas os temas escolhidos e os gráficos produzidos.

Nesse caso, a mediana será a média aritmética desses dois valores.

termo da 4ª posição — termo da 5ª posição

$$\frac{29 + 30}{2} = \frac{59}{2} = 29{,}5$$

Ou seja, a mediana dos tempos obtidos por Gabriela é 29 minutos e 30 segundos.

Mediana de um grupo de valores ordenados, de modo crescente ou decrescente, é o termo que ocupa a posição central (com quantidade ímpar de termos) ou é o valor obtido pela média aritmética de seus dois termos centrais (com quantidade par de termos).

36. a) Espera-se que os estudantes percebam que não faz sentido calcular a média e a mediana para essa pesquisa, pois a variável da pesquisa (tipo de chocolate) não é quantitativa. Portanto, eles devem concluir que a moda é a medida mais adequada para esse caso.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

32 Calcule a mediana dos seguintes grupos de valores:

a) 8, 4, 5, 3, 10 **32. a)** 5
b) 1, 3, 6, 10, 13, 8, 5, 3 **32. b)** 5,5
c) 0,2; 0,5; 0,1; 1,2; 1,5; 2,3; 0,7 **32. c)** 0,7
d) 120, 142, 102, 101, 108, 150 **32. d)** 114

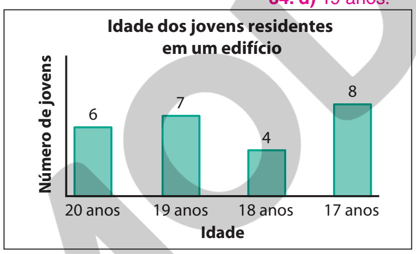
33 Ana pesquisou o preço de um produto em 10 *sites* e encontrou os seguintes valores, em reais:

1 624,00	1 824,00	1 822,00
1 624,00	1 378,00	1 600,00
1 378,00	1 224,00	1 258,00
1 378,00		

Determine o valor mediano (mediana) desses preços. **33.** R$ 1 489,00

34 Observe o gráfico a seguir.

34. a) 25 jovens.
34. b) 18,44 anos.
34. c) 17 anos.
34. d) 19 anos.



Dados obtidos pelo zelador.

a) Quantos jovens residem nesse edifício?
b) Calcule a idade média desses jovens.
c) Determine a idade modal desses jovens.
d) Calcule a idade mediana desses jovens.
e) Se forem acrescentados a esses dados dois jovens de 16 anos, o que acontecerá com cada medida de tendência central calculada anteriormente? **34. e)** A média diminuirá para 18,26 anos; a moda continuará a mesma; a mediana passará a ser 18 anos.

35 Marta registrou o tempo, em minuto, que seus colegas gastam no percurso de casa à escola:

10	120	15	20	30	30	25
60	40	40	50	30	20	15
35	35	20	60	90	90	15

Determine: **35. b)** 15 min, 20 min e 30 min.

a) a mediana desses valores; **35. a)** 30 min
b) a moda desses valores;
c) o tempo médio desse percurso; **35. c)** 40 min
d) a medida que, na sua opinião, caracteriza melhor esse grupo de dados. Justifique. **35. d)** Resposta pessoal.

36 Uma empresa encomendou uma pesquisa sobre o chocolate preferido de alguns consumidores. O resultado obtido foi apresentado em uma tabela. **36. b)** Meio amargo: 22%; ao leite: 39%; branco: 28%; amargo: 11%.

Chocolate preferido dos consumidores

Tipo de chocolate	Número de consumidores
Meio amargo	255
Ao leite	765
Branco	345
Amargo	135

Dados obtidos pela empresa.

a) Determine qual das três medidas estatísticas (média, mediana e moda) caracteriza melhor essa pesquisa. Justifique sua resposta.
b) Calcule a porcentagem de cada tipo de chocolate em relação ao número total de consumidores.
c) Construa um gráfico de colunas com as porcentagens obtidas no item **b**.
36. c) Construção de gráfico.

82

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Pesquisa amostral

Em anos anteriores, estudamos que, para fazer uma **pesquisa estatística**, por exemplo, para determinar qual é o esporte preferido dos estudantes de uma escola, é necessário **planejá-la**.

Assim, é preciso: definir o **objetivo** da pesquisa, isto é, o que se quer saber com a pesquisa – no exemplo, conhecer os esportes que mais interessam aos estudantes para organizar as aulas de Educação Física; determinar **como** será feita a coleta dos dados – por questionário, entrevista pessoal, rede social etc.; definir com quem obter os dados a serem coletados, ou seja, definir o que os matemáticos chamam de **população** da pesquisa – no exemplo, estudantes de uma escola. Todos os estudantes serão contatados ou só uma parte?

Se todos os estudantes da população forem contatados, será uma **pesquisa censitária**. Se for só uma parte, uma **amostra**, será uma **pesquisa amostral**.

Na pesquisa amostral surge a questão: "Quais critérios empregar para escolher quem será pesquisado?".

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Definida a amostra, e obtidos os dados, estes devem ser **organizados** e apresentados em tabelas, em gráficos mais adequados a esses dados, sem se esquecer dos títulos e das fontes.

Finalmente, os dados organizados devem ser **analisados**. Alguns instrumentos que auxiliam na análise dos dados e na elaboração de um **relatório conclusivo da pesquisa amostral** são a obtenção da amplitude e das medidas de tendência central – moda, mediana, média aritmética ou ponderada – após selecionadas as mais adequadas a eles.

Agora quem trabalha é você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

As respostas desta atividade estão no *Manual*.

Forme uma equipe com mais três colegas e planejem uma pesquisa amostral. Para isso, convém que discutam e decidam:

- a organização da equipe, ou seja, quem fará o quê;
- os objetivos da pesquisa e a elaboração de possíveis teses sobre o tema da pesquisa – sugestões: preferência de lazer, ou de profissão futura, ou de animais, ou de plantas, ou de filmes/livros etc.;
- a população e a amostra a serem pesquisadas;
- a maneira com que os dados serão obtidos;
- os recursos de organização dos dados mais adequados à pesquisa;
- a(s) plataforma(s) em que o relatório será apresentado: caderno, cartaz, vídeo, mídia eletrônica etc.

Também convém que, antes de passarem à parte prática, conversem com o professor sobre o projeto elaborado para realizar essa pesquisa.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF08MA27**.

Ao discutir as etapas para a realização de uma pesquisa e apresentar aos estudantes os conceitos de pesquisa amostral e pesquisa censitária, esta seção promove o desenvolvimento da habilidade (EF08MA27).

Durante as etapas de análise e apresentação dos dados, relembre aos estudantes como determinar as medidas de tendência central e destaque a importância da indicação de todos os elementos do gráfico (título, legenda, escala, orientação geográfica e fonte dos dados) para a compreensão das informações apresentadas.

A atividade proposta no **Agora quem trabalha é você!** é uma ótima oportunidade para o desenvolvimento da **competência geral 4**, ao propor aos estudantes que os resultados da pesquisa sejam apresentados utilizando diferentes linguagens (verbal, visual, sonora, digital), além de fazê-los mobilizar conhecimentos das linguagens matemática e científica para a análise e a comunicação das informações obtidas com a pesquisa. Ao discutir o projeto elaborado com cada grupo de estudantes e orientá-los sobre as práticas de pesquisa, destaque a importância do diálogo, da cooperação e do respeito mútuo para que o trabalho em grupo seja bem-sucedido, desenvolvendo, assim, a **competência geral 9**.

Para saber mais

Esta seção apresenta uma discussão sobre maneiras de estimar a quantidade de pessoas aglomeradas em um evento.

É muito oportuno conversar com os estudantes e pedir a eles que avaliem, nas notícias envolvendo essas estimativas, se é comum haver falseamento de dados, ou seja, tentativas de persuadir os leitores por meio de dados que são manipulados sem o rigor necessário. Isso pode ocorrer porque os organizadores divulgam números superestimados por interesse em difundir na mídia a suposta grandiosidade do evento.

Uma atividade interessante para fazer com os estudantes é delimitar no chão áreas de medidas iguais a 1 m^2 e repetir com eles as diferentes densidades das fotografias apresentadas no livro. Assim, eles conseguirão interpretar melhor as informações sobre a quantidade de público de grandes eventos.

PARA SABER MAIS

Estimativa de multidões

Leia a notícia a seguir.

Reuniões com segmentos culturais fortaleceram ações da Fundação de Cultura e Turismo de Caruaru em 2019

LEO CALDAS/PULSAR IMAGENS

Apresentação da quadrilha junina Animadrilha no São João de Caruaru, em Pernambuco. (Fotografia de 2019.)

Em 2019, o Caruaru Por Paixão se consolidou cada vez mais, levando para os caruaruenses e turistas uma programação rica em cultura popular, exposições de arte, mostra de cinema e diversas expressões artísticas. A estimativa é que aproximadamente 200 mil pessoas tenham passado pela cidade nos dias do evento, nos quatro polos: Feira de Caruaru, Polo Alto do Moura, Polo "Meu Bom Jesus", e Polo Estação Criativa.

Fonte: CARUARU. Prefeitura Municipal. **Reuniões com segmentos culturais fortaleceram ações da Fundação de Cultura e Turismo de Caruaru em 2019**. Caruaru: Prefeitura Municipal, 30 dez. 2019. Disponível em: https://caruaru.pe.gov.br/reunioes-com-segmentos-culturais-fortaleceram-acoes-da-fundacao-de-cultura-e-turismo-de-caruaru-em-2019/. Acesso em: 4 mar. 2022.

Em cidades como Rio de Janeiro, São Paulo, Salvador e Recife, entre outras, têm ocorrido eventos que concentram públicos cada vez maiores. Estimar o número de pessoas de uma multidão é fundamental para qualquer organização responsável pelo planejamento ou mesmo pela avaliação posterior de um evento.

Para isso, os organizadores, a Polícia Militar e os órgãos de imprensa e de trânsito fazem uma estimativa, considerando que cada metro quadrado abriga até quatro pessoas. Por se tratar de uma norma internacional, esse método de estimativa é usado tanto pelos órgãos de segurança pública quanto pelos órgãos de imprensa de todo o mundo.

Outro método que fornece uma estimativa mais próxima do valor real é a fotografia aérea. Tiram-se fotografias aéreas da multidão, calcula-se a escala das fotografias e, em seguida, divide-se a fotografia em pequenas regiões quadradas, das quais se calcula a densidade média, para depois estimar a densidade da área toda.

Observe, nesta sequência de fotografias, diferentes densidades em uma mesma área.

7 pessoas por metro quadrado

6 pessoas por metro quadrado

5 pessoas por metro quadrado

4 pessoas por metro quadrado

3 pessoas por metro quadrado

2 pessoas por metro quadrado

1 pessoa por metro quadrado

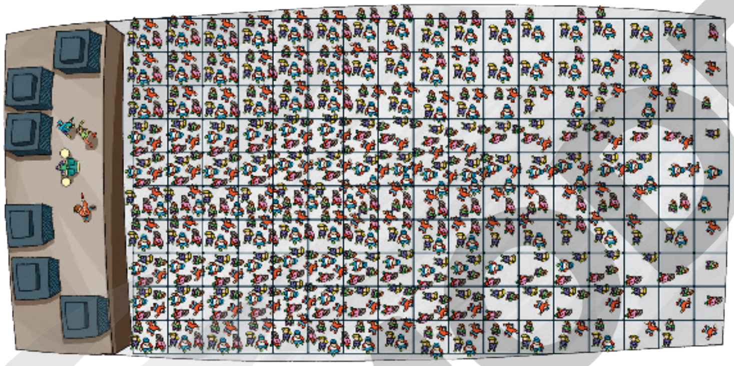
0,11 pessoa por metro quadrado

FOTOGRAFIAS: BRUNO ENGERT RIZZO

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A imagem a seguir representa a fotografia aérea de um *show*. Faça uma estimativa do público desse evento. **1.** Espera-se que os estudantes cheguem a um valor próximo de 680 pessoas.



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

2. Espera-se que os estudantes percebam que, se for considerado que essas 300 mil pessoas estiveram ao mesmo tempo nessa avenida, a estimativa estaria errada, pois teríamos uma densidade de 11,5 pessoas por metro quadrado.

2 Reúna-se com um colega e discutam a seguinte questão:

Para comemorar o título do campeonato nacional, torcedores de um time de futebol ocuparam a principal avenida da cidade. Estimativas indicaram que havia mais de 300 mil torcedores em toda a avenida. Sabendo que essa avenida tem 1 km de comprimento e 26 m de largura, o que pode ser afirmado sobre essa estimativa? Justifique sua resposta.

3 Pesquise uma notícia sobre um grande evento na cidade onde você mora que tenha duas estimativas de participantes: uma da polícia e outra dos organizadores do evento. Em seguida, pesquise as dimensões do local e discuta qual estimativa possivelmente está correta. **3.** Resposta pessoal.

Agora é com você!

Na **atividade 1**, espera-se que os estudantes cheguem a um valor próximo de 680 pessoas.

Na **atividade 2**, espera-se que os estudantes percebam que, se for considerado que as 300 mil pessoas estiveram ao mesmo tempo na avenida, a estimativa estaria errada, pois teríamos uma densidade de 11,5 pessoas por metro quadrado, um valor muito alto e pouco crível pelas imagens mostradas antes das atividades.

A **atividade 3** constitui uma boa oportunidade para ampliar a discussão sobre as estimativas das quantidades de pessoas em grandes eventos. Para realizá-la, é bom que os estudantes escolham algum evento de relevância para seu cotidiano, mesmo que não tenha ocorrido na cidade onde residem.

Trabalhe a conexão das Unidades Temáticas **Probabilidade e estatística** e **Grandezas e medidas** abordada nessa seção.

5. Noções de probabilidade

Habilidade da BNCC: **EF08MA22**.

Neste tópico, iniciamos o estudo de probabilidade, procurando sistematizar os conhecimentos que os estudantes já construíram ao longo dos anos anteriores acerca desse assunto, presente nos estudos desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

A **situação 1** aborda a noção de experimentos aleatórios. Peça aos estudantes que exemplifiquem situações envolvendo experimentos aleatórios. Espera-se que eles citem pelo menos lançamento de dados e de moedas, sorteio de carta de um baralho, retirada de bolas numeradas de uma sacola não transparente, entre outros.

Ressalte que em um experimento aleatório, embora não possamos precisar que resultado ocorrerá ao repeti-lo, já conhecemos todos os possíveis resultados. Ao considerar todos esses resultados, formamos um conjunto denominado espaço amostral.

Peça aos estudantes que determinem todos os resultados possíveis (espaço amostral) dos experimentos aleatórios que exemplificaram anteriormente. Por exemplo, no lançamento de um dado cúbico comum, ao observar a face que fica voltada para cima, podemos obter os números 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, que são todos os resultados possíveis desse experimento. Ou seja, esses números compõem o espaço amostral desse experimento.

Da mesma maneira, explore o conceito de evento em um experimento aleatório. No caso do lançamento de um dado, por exemplo, "sair face com número par" é um evento desse experimento formado pelos seguintes resultados possíveis: 2, 4 ou 6.

5 Noções de probabilidade

Acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Uma loja fez uma promoção em que foram distribuídos 1 000 números para o sorteio de uma bicicleta. Afonso tem 5 números e Geórgia, 1 número. Acompanhe como determinar a probabilidade de cada um deles ser sorteado.

Essa situação envolve a ideia de **incerteza**, pois sortear um número dentre os 1 000 é um experimento no qual conhecemos os resultados possíveis, mas não podemos assegurar qual será o resultado final, ou seja, não é possível saber qual será o número sorteado. Esse tipo de experimento faz parte da **Teoria das Probabilidades**.

- Você sabe quais são as regras determinadas pelo Ministério da Economia para realizar sorteios?

Na Teoria das Probabilidades, estudamos as leis que regem os fenômenos que dependem do **acaso**, isto é, fenômenos cujos resultados não podem ser previstos. Nesse caso, interessam a essa teoria os **experimentos aleatórios**, aqueles que podem ser repetidos nas mesmas condições tantas vezes quanto quisermos e cujos resultados possíveis são previamente conhecidos.

Orientações: De acordo com a Lei nº 5.768, de 1971, e a Portaria nº 20.749, de 2020, esse tipo de premiação só pode ocorrer com expressa autorização do Ministério da Economia, por meio de um pedido realizado ao Sistema de Promoção Comercial (SCPC), e a autorização só é concedida à pessoa jurídica que exerça atividade comercial, industrial ou de compra e venda de bens imóveis.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Na situação apresentada, os 1 000 números do sorteio formam o **espaço amostral**, ou seja, o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento.

> O **espaço amostral** de um experimento aleatório é o conjunto de todos os resultados possíveis desse experimento.

O número adquirido por Geórgia forma um evento desse experimento aleatório, do mesmo modo que os 5 números adquiridos por Afonso.

> Qualquer conjunto de resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de **evento**.

Definidos o espaço amostral e o evento correspondente ao experimento aleatório, podemos determinar a **probabilidade**.

> **Probabilidade** é a medida da chance de um evento acontecer.

No sorteio da bicicleta, cada número tem a mesma chance de ser sorteado. Nesse caso, para calcular a probabilidade, basta dividir o número de elementos do evento correspondente ao experimento aleatório pelo número de elementos do espaço amostral.

$$\text{Probabilidade de ocorrência de um evento} = \frac{\text{número de elementos do evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

Portanto, temos que:

- a probabilidade de Geórgia ser sorteada é $\frac{1}{1\,000}$ ou 0,001 ou 0,1%;
- a probabilidade de Afonso ser sorteado é $\frac{5}{1\,000}$ ou 0,005 ou 0,5%.

Situação 2

Qual é a probabilidade de sair a soma 6 no lançamento de dois dados comuns?

Antes de calcularmos a probabilidade, devemos definir o espaço amostral:

Aplicando o princípio multiplicativo, calculamos quantos elementos tem o espaço amostral. Para cada número do 1º dado há 6 números possíveis do 2º dado. Logo, há 36 possibilidades ($6 \cdot 6$), ou seja, este espaço amostral tem 36 elementos (pares ordenados).

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Observe que os casos favoráveis são:

(1, 5) (2, 4) (3, 3) (4, 2) (5, 1)

Desse modo, a probabilidade de sair soma 6 nas faces dos dados é dada pela razão:

$$\frac{5}{36} \simeq 0{,}14 \text{ ou} = 14\%$$

Observações

- A probabilidade de um evento é um número de 0 a 1.
- Quando a probabilidade é zero, dizemos que o evento é **impossível**.
- Quando a probabilidade é 1, dizemos que o evento é **certo**.
- A soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é 1.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

37 Sortear uma letra de um texto qualquer é um experimento aleatório? Por quê?

37. Sim, porque o conjunto de resultados possíveis é conhecido, e o experimento pode ser repetido indefinidamente.

38 Em uma urna, há 9 bolas pretas, 5 bolas amarelas e 3 bolas vermelhas. Se retirarmos uma bola ao acaso, qual é a probabilidade de sair uma bola amarela?

38. Aproximadamente 29%.

39 A professora vai sortear, ao acaso, um estudante entre os 30 estudantes da sala. Sabendo que há 18 meninas na sala, qual é a probabilidade de ser sorteada uma menina? E de ser sorteado um menino? Qual é a soma das probabilidades? **39.** 60%; 40%; 100%

40 Considerando o lançamento de dois dados comuns, determine a probabilidade de a soma das faces ser:

a) 8; **40. a)** Aproximadamente 14%.

b) um número par; **40. b)** 50%

c) maior que 10. **40. c)** Aproximadamente 8%.

41 Quantos estudantes há na sua turma? Quantos são meninos? Calcule a probabilidade de que, ao sortear um estudante ao acaso, ele seja um menino. **41.** Resposta pessoal.

Noções de probabilidade

Explore com os estudantes a noção de espaço amostral equiprovável, ou seja, um experimento aleatório que tem uma quantidade finita de resultados possíveis tem um espaço amostral equiprovável se cada resultado possível tem a mesma chance de acontecer. Como a medida dessa chance é uma probabilidade, podemos dizer que um espaço amostral equiprovável é aquele em que cada resultado possível tem a mesma probabilidade de ocorrer.

Peça aos estudantes que deem exemplos de situações nas quais isso acontece, como: no lançamento de um dado comum e "honesto", a chance de sair cada uma das faces numeradas (de 1 a 6) é a mesma (1 em 6). Assim, nesse experimento, o espaço amostral é equiprovável. O mesmo ocorre no experimento de lançar uma moeda "honesta" e observar se saiu face cara ou face coroa. A chance é a mesma: 1 em 2.

Ao apresentar aos estudantes o cálculo da probabilidade de eventos com base na construção do espaço amostral, é possível o desenvolvimento da habilidade (EF08MA22).

Depois de garantir que entenderam a noção de espaço amostral equiprovável, trabalhe a definição de probabilidade de um evento de um espaço amostral equiprovável. Assim, podemos dizer que a probabilidade de ocorrência de um evento é dada por:

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}}$$

Ou:

$$\frac{\text{número de elementos do evento}}{\text{número de elementos do espaço amostral}}$$

Peça aos estudantes que calculem algumas probabilidades de eventos nos experimentos que listaram.

Qual é a probabilidade de "sair face par" no lançamento de um dado comum "honesto"?

O evento considerado é "sair face par", cujos resultados favoráveis são 2, 4 e 6, ou seja, há 3 elementos para esse evento em um total de 6 possibilidades. Assim:

$$\text{Probabilidade de sair face par} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de resultados possíveis}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 37** a **41** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Pense mais um pouco...

A proposta apresentada faz jus ao nome da seção. Uma leitura rápida e descuidada pode levar os estudantes a conclusões precipitadas e enganosas. Sem ser capciosa ou inatingível, a questão exige atenção e discernimento para determinar o que é dado e o que é pedido, além da aplicação correta do conceito de probabilidade.

Escrevendo as possibilidades de vitória de Lucas, verificamos que ele tem 11 possibilidades de vitória, enquanto seu oponente tem apenas 9. Logo, a probabilidade de ele vencer é maior.

Exercícios complementares

Nesta seção, são oferecidas novas oportunidades para os estudantes retomarem e aplicarem os principais conceitos tratados no capítulo.

Se julgar conveniente, peça aos estudantes que façam novas representações dos mesmos dados apresentados no pictograma do **exercício 1**, por exemplo, em gráficos de colunas ou de setores. A atenção deve estar voltada não apenas à construção do gráfico, mas também ao preenchimento de todos os seus elementos: título, legenda, escala e fonte, que são essenciais para compreender as informações, mesmo sem ter havido contato com a fonte original dos dados.

Acompanhe a resolução desse exercício.

a)

Quantidade de DVDs vendidos na 1ª semana de dezembro de 2023		
Dia da semana	Frequência absoluta	Frequência relativa
Domingo	60	8%
Segunda-feira	30	4%
Terça-feira	60	8%
Quarta-feira	30	4%
Quinta-feira	120	16%
Sexta-feira	180	24%
Sábado	270	36%
Total	750	100%

Dados obtidos pela loja.

Pense mais um pouco...: Basta comparar as possibilidades de vitória de Lucas com as possibilidades de seu desafiante. Lucas tem 11 possibilidades em 36, e seu desafiante tem somente 9 em 36. Portanto, Lucas tem maior probabilidade de vencer o jogo do que seu desafiante.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

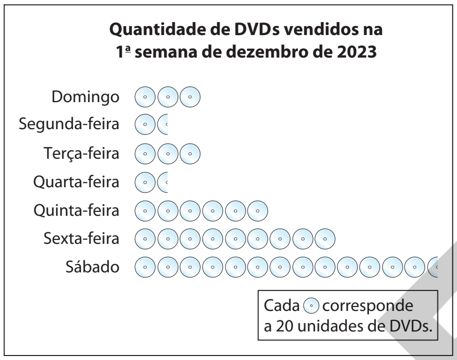
Lucas inventou um jogo com dados. O desafiante lança dois dados e, se em pelo menos um dos dados sair o número 1, Lucas ganha o jogo. Se em pelo menos um dos dados sair como menor número o 2 ou o 3, o desafiante lança os dados novamente. E, se em pelo menos um dos dados não sair os números 1, 2 ou 3, o desafiante ganha o jogo. Quem tem maior probabilidade de vencer o jogo: Lucas ou seu desafiante?

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 O pictograma a seguir mostra a quantidade de DVDs vendidos em uma loja durante a primeira semana de dezembro de 2023.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos pela loja.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências, com a frequência relativa em porcentagem. **1. a)** Construção de tabela.

b) Sabendo que a meta de venda diária dessa loja é de 100 DVDs, em quantos dias a loja atingiu a meta? **1. b)** Em 3 dias.

c) Quantos DVDs foram vendidos nessa semana? **1. c)** 750 DVDs.

Use o enunciado seguinte para responder aos **exercícios 2** e **3**.

Em um escritório trabalham 40 pessoas cujas idades, em anos, são dadas em ordem crescente:

18 – 19 – 20 – 20 – 20 – 24 – 24 – 24

24 – 24 – 28 – 28 – 28 – 30 – 30 – 30

30 – 30 – 32 – 32 – 35 – 35 – 35 – 35

36 – 36 – 36 – 36 – 36 – 40 – 40 – 40

42 – 45 – 45 – 48 – 48 – 50 – 50 – 60

2 (Saresp) Relativamente ao total de funcionários desse escritório, a porcentagem dos que têm idades inferiores a 32 anos é: **2.** Alternativa **a**.

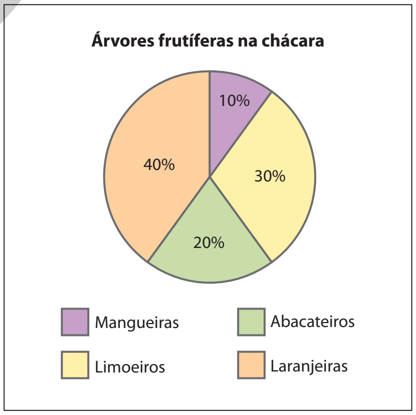
a) 45%.
b) 38%.
c) 37,5%.
d) 25%.

3 (Saresp) Um prêmio vai ser sorteado entre os 40 funcionários do escritório. A probabilidade de que a pessoa sorteada tenha menos de 25 anos é: **3.** Alternativa **b**.

a) $\frac{1}{8}$.
b) $\frac{2}{8}$.
c) $\frac{3}{8}$.
d) $\frac{5}{8}$.

4 (Saresp) Em uma chácara, há um total de 350 árvores frutíferas, assim distribuídas:

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



As quantidades de laranjeiras e mangueiras são, respectivamente: **4.** Alternativa **a**.

a) 140 e 35.
b) 140 e 70.
c) 140 e 105.
d) 105 e 70.

b) Foi atingida a meta diária nos dias em que a loja vendeu pelo menos 100 DVDs. Ou seja, em três dias (a saber, quinta-feira, sexta-feira e sábado).

c) Pela análise da tabela, notamos que foram vendidos 750 DVDs nessa semana.

As resoluções do **exercícios 2** a **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

5 (Enem) A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo; caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

a) 26 c) 30 e) 35
b) 29 d) 31 **5.** Alternativa **e.**

6 Foi realizada uma pesquisa sobre o tempo que os 140 trabalhadores de uma empresa gastam no percurso entre a residência e o trabalho. Para tanto, foram selecionados, de modo imparcial, 40 trabalhadores.

Tempo gasto pelos trabalhadores (em minuto)

20	20	25	10	15	60
20	100	25	25	20	15
30	60	20	100	90	60
90	90	20	15	30	100
20	60	20	30	35	35
35	100	40	35	30	30
30	40	40	100		

6. b) Média: 43,5 min; moda: 20 min; mediana: 30 min.

a) Construa uma tabela de distribuição de frequências com 5 classes, cada uma com amplitude igual a 20.
b) Calcule a média aritmética, a moda e a mediana do tempo gasto por esses trabalhadores.
c) Qual é a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um trabalhador que gasta 90 minutos no percurso entre a residência e o trabalho?

6. a) Construção de tabela. **6. c)** 7,5%

7 A tabela a seguir mostra a idade das pessoas que se associaram a uma biblioteca pública durante o mês de julho.

Associados de julho	
Idade (em anos)	**Número de pessoas**
14	30
16	7
18	2
20	10
21	12
27	18
30	21

Dados obtidos pela bibliotecária.

7. b) Idade modal: 14 anos; idade mediana: 21 anos.

Faça o que se pede. **7. a)** 21,36 anos.

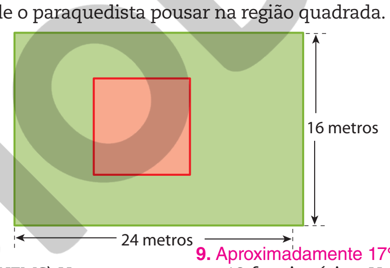
a) Calcule a idade média dos associados.
b) Determine a idade modal e a idade mediana.
c) Construa um gráfico de colunas para essa situação. **7. c)** Construção de gráfico.
d) Qual é a probabilidade de sortearmos, ao acaso, um associado que tenha mais de 21 anos?

7. d) 39%

8 Em uma pesquisa eleitoral para verificar a posição de três candidatos a prefeito de um município, 4 500 pessoas foram consultadas. O resultado da pesquisa será organizado em um gráfico de setor circular. Sabendo que um certo candidato recebeu 1 050 indicações de intenções de voto, qual é a medida do ângulo central correspondente ao setor do gráfico que representará as intenções de voto desse candidato? **8.** Alternativa **b.**

a) 42° b) 84° c) 120° d) 276°

9 Um paraquedista precisa pousar em uma região quadrada localizada em um terreno retangular, conforme o esquema a seguir. Sabendo que o comprimento do lado da região quadrada mede 8 metros e que o paraquedista certamente pousará no terreno retangular, calcule a probabilidade de o paraquedista pousar na região quadrada.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

9. Aproximadamente 17%.

10 (UFMS) Uma empresa tem 18 funcionários. Um deles pede demissão e é substituído por um funcionário de 22 anos de idade. Com isso, a média das idades dos funcionários diminui 2 anos. A idade do funcionário que se demitiu é:

a) 50 anos. c) 54 anos. e) 58 anos.
b) 48 anos. d) 56 anos. **10.** Alternativa **e.**

Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 5** a **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

A seguir, um exemplo de tabela para o **item a** do **exercício 6**.

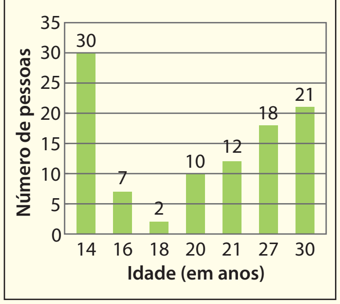
Tempo gasto pelos trabalhadores		
Tempo (em minuto)	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**
De 1 a 21*	12	30%
De 21 a 41*	16	40%
De 41 a 61*	4	10%
De 61 a 81*	0	0%
De 81 a 101*	8	20%
Total	40	100%

*O número final não está incluído na classe.

Dados obtidos pela empresa pesquisada.

Para o **item c** do **exercício 7**, apresentamos um exemplo de gráfico a seguir.

Idade das pessoas que se associaram a uma biblioteca pública em julho



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos pela bibliotecária.

Verificando

Esses exercícios são mais uma oportunidade para o estudante validar o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo.

As resoluções dos **testes 1** a **6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 3.

Organizando

Incentive os estudantes a organizar seu aprendizado no caderno, fazendo resumos, mapas conceituais ou aplicando destaques em conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo fazer com que eles retomem os conteúdos estudados no capítulo e reflitam sobre algumas temáticas.

a) As etapas de uma pesquisa estatística são a escolha de uma população, seguida da escolha entre um censo ou uma pesquisa amostral. No segundo caso, é preciso escolher uma amostra de maneira imparcial. Então, procede-se à coleta dos dados, que pode ser feita por meio de observação, contagem, medida, questionário ou entrevista. Por fim, os dados coletados devem ser organizados e apresentados de acordo com sua natureza.

b) Resposta pessoal. Uma maneira natural de coletar esses dados seria por meio de entrevista com uma amostra representativa e uso de uma variável quantitativa (tempo nas redes), a ser organizada em classes.

c) A frequência absoluta de certo valor é simplesmente o número de vezes que ele aparece entre os dados de uma amostra. Já a frequência relativa é a fração ou o percentual do número de vezes que esse valor aparece em relação ao total das ocorrências.

d) A média obtida pela soma dos valores de todos os dados, dividida pelo número total de dados. A moda é o elemento com maior frequência absoluta entre os dados. A mediana é o valor que ocupa a posição central, considerando o rol, a amostra tem uma quantidade ímpar de elementos, ou a média aritmética dos dois valores centrais do rol quando a amostra tem uma quantidade par de elementos.

VERIFICANDO

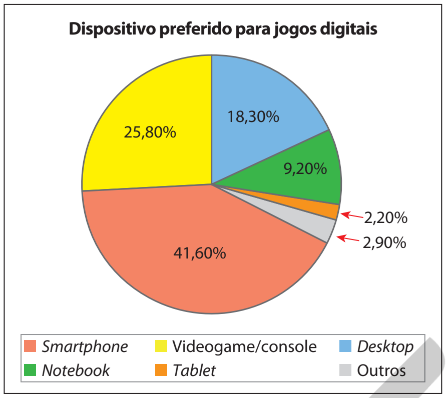
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Uma amostra representativa dos estudantes de uma escola deve conter: **1.** Alternativa **c**.

a) somente estudantes do período da tarde.
b) estudantes de uma única turma.
c) estudantes das diferentes turmas e dos diferentes períodos.
d) todos os estudantes de um único período.

2 Uma pesquisa sobre jogos digitais foi realizada com 1 000 participantes. O resultado referente ao dispositivo preferido para jogos digitais foi representado no gráfico a seguir.

WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos pelo instituto de pesquisa.

Com base nesses dados, é possível concluir que:

a) menos de 400 pessoas preferem jogar em *smartphone*.
b) a opção que teve menos votos foi "Outros".
c) aqueles que preferem computadores, *desktop* ou *notebook*, somam mais de 25% dos entrevistados.
d) o console foi a terceira opção mais votada.

2. Alternativa **c**.

3 Um supermercado fez uma pesquisa com os clientes sobre a preferência entre 3 marcas diferentes de sabonete.

Marca preferida de sabonete			
Marca	A	B	C
Total de clientes	205	103	92

Dados obtidos pelo supermercado.

A frequência relativa aproximada para cada marca de sabonete é, respectivamente: **3.** Alternativa **c**.

a) 2,05; 1,03 e 0,92.
b) 0,68; 0,34 e 0,30.
c) 0,51; 0,26 e 0,23.
d) 0,21; 0,10 e 0,09.

4 A professora fez uma pesquisa com os estudantes sobre o tipo de livro preferido. Ela constatou que, dos 35 estudantes, 11 preferem quadrinhos, 10 suspense, 8 romance e os demais ficção. Qual é a moda desses dados?

a) Quadrinhos
b) Suspense
c) Romance
d) Ficção

4. Alternativa **a**.

5 Para fechar a nota bimestral dos estudantes, um professor utiliza a média aritmética ponderada. A nota máxima de todas as provas é 10 e a primeira prova tem peso 1, a segunda tem peso 2 e a terceira tem peso 3. Se um estudante tirou, respectivamente, 8, 5 e 7, qual foi a média bimestral desse estudante? **5.** Alternativa **a**.

a) 6,5
b) 6,6
c) 6,8
d) 7,0

6 Os números a seguir representam os salários, em real, dos funcionários de uma empresa.

1 500	1 800	3 000	4 500	1 200
2 300	1 500	5 000	2 700	6 000

Qual é a mediana, em real, dos salários dos funcionários dessa empresa? **6.** Alternativa **b**.

a) 2 300
b) 2 500
c) 2 700
d) 2 950

Organizando

Organizando: As respostas para estas questões estão no *Manual*.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Quais são as etapas de uma pesquisa estatística? Descreva, com as próprias palavras, cada uma delas.
b) Supondo que você faça uma pesquisa com um grupo de pessoas sobre o tempo que elas passam em redes sociais na internet todos os dias, explique como você faria para coletar e organizar os dados dessa pesquisa.
c) O que frequência absoluta e frequência relativa têm de diferente?
d) O que média, moda e mediana têm de diferente?
e) Quais são as informações necessárias para que seja possível calcular a probabilidade de um evento acontecer?

90

e) É preciso saber o número total de eventos possíveis (ou seja, o número de elementos do espaço amostral) e o número de elementos do evento cuja probabilidade se deseja calcular (ou seja, o número de casos favoráveis).

Capítulo 4

Cálculo algébrico

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) Na equação $E = mc^2$, a medida de massa pode assumir valores negativos? Justifique sua resposta.

b) Quantos valores E, m e c podem assumir?

CORBIS/GETTY IMAGES

Imagem de uma das maiores explosões nucleares com bomba de hidrogênio, realizada nas Ilhas Marshall, que destruiu completamente a ilha Elugelab. (Fotografia de 1952.)

a) Espera-se que os estudantes respondam que não, pois massa é uma grandeza sempre positiva.

A equação $\boldsymbol{E = mc^2}$ (energia de um sistema é igual à medida de massa multiplicada pelo quadrado da velocidade da luz no vácuo) sintetiza parte da teoria da relatividade de Einstein, considerada um **divisor de águas** entre a Física clássica e a Física moderna. Ela sugere que é possível transformar matéria em energia, e vice-versa. Em explosões nucleares, ocorre a transformação de matéria em energia.

Divisor de águas: acontecimento, fato ou situação que serve de referência temporal.

O cálculo algébrico é a estrada pela qual transitam ideias fundamentais do conhecimento humano.

b) Espera-se que os estudantes respondam que a energia do sistema (E) e a medida de massa (m) podem assumir infinitos valores positivos não nulos, e a velocidade da luz no vácuo (c), um um único valor.

Capítulo 4 – Cálculo algébrico

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, ampliamos o trabalho com Álgebra, relacionando-o, sempre que possível, a elementos da Geometria ou a situações do cotidiano. O foco será o trabalho com as expressões algébricas. Nesta abertura, apresentamos a equação, que estabelece a relação geral entre energia e massa ligada à teoria da relatividade, de Albert Einstein.

Converse com os estudantes sobre os **itens a** e **b** propostos, destacando o significado das "letras" em $E = mc^2$. Eles devem compreender que E e m são variáveis e c é uma constante. Além disso, como m expressa a medida de massa, m é um valor positivo não nulo; assim, a quantidade de energia expressa por E será positiva e não nula (pois c^2 é positivo). Esse contexto favorece a interdisciplinaridade com Ciências e o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **ciência e tecnologia**. Sugerimos propor aos estudantes atividades em que possam identificar e classificar diferentes fontes e tipos de energia (renováveis e não renováveis) com destaque para a energia nuclear. Eles podem pesquisar esse tipo de energia e debater com os colegas o fato de que qualquer avanço tecnológico sempre pode ser utilizado para fins pacíficos ou bélicos.

Nesse sentido, podem desenvolver a **competência geral 10**, discutindo e percebendo a necessidade de agir pessoal e coletivamente tomando decisões com base em princípios éticos, solidários e sustentáveis. A **competência geral 9** também pode ser desenvolvida, pois poderão discutir e perceber a importância de exercitar a empatia e a resolução de conflitos de maneira a respeitar a diversidade e os direitos humanos.

Sugestões de leitura

Para enriquecer a discussão sobre esse tema, sugerimos:

GONÇALVES, O. D.; ALMEIDA, I. P. S. A energia nuclear e seus usos na sociedade. **Ciência Hoje**, v. 37, n. 220, out. 2005. Disponível em: http://pessoal.educacional.com.br/up/4660001/6249852/artigo_4_Nuclear_Radiation.pdf. Acesso em: 7 jun. 2022.

Este artigo trata dos tipos de radiação e suas aplicações na saúde, na indústria, na pesquisa, no ambiente e como geração de energia.

GOLDEMBERG, J. O futuro da energia nuclear. **Revista USP**, n. 91, p. 6-15, 2011. Disponível em: https://doi.org/10.11606/issn.2316-9036.v0i91p6-15. Acesso em: 7 jun. 2022.

Este artigo discute a estagnação da energia nuclear no mundo e apresenta possíveis causas, como movimentos sociais, elevados custos econômicos ou os riscos ambientais.

1. Incógnita e variável

Habilidade da BNCC:
EF08MA06.

Para introduzir os conceitos de incógnita e variável, importantes para o desenvolvimento da habilidade (EF08MA06) utilizamos a fórmula de Young, usada por pediatras para calcular a dosagem de remédio a ser administrada a uma criança, e uma situação do cálculo do valor a ser pago em um pesqueiro.

Para trabalhar as habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13), aborde com os estudantes algumas situações em que as grandezas são diretamente proporcionais ou que são inversamente proporcionais. Esse conteúdo será desenvolvido no decorrer deste volume, de maneira que eles possam utilizá-lo em diferentes momentos de aprendizagem. No capítulo 10, apresentaremos os gráficos que podem ser associados a grandezas desses tipos.

Assim, a Álgebra aparece como um instrumento necessário que deve ser entendido, dominado e exercitado pelos estudantes para que seja aplicado na resolução de diversos problemas do dia a dia e de outras áreas do conhecimento, como a Biologia e a Física. Pode-se propor a eles que pesquisem e discutam a importância de tomar remédios apenas quando indicados por médicos e nas doses recomendadas por eles; dessa maneira, os estudantes podem adquirir mais autonomia no cuidado com a saúde e desenvolver a **competência geral 8**.

1 Incógnita e variável

Em anos anteriores, você estudou um ramo da Matemática que trabalha com grandezas cujos valores variam, de modo proporcional ou não, ou que são desconhecidos e, por isso, são representados por símbolos – em geral, por letras. Essa parte da Matemática é chamada de Álgebra.

Ao prescrever determinados remédios, é comum que os pediatras recorram à Matemática, principalmente à Álgebra.

Para calcular a dose que devem administrar a uma criança, com base na dose indicada a adultos, os pediatras aplicam a chamada fórmula de Young:

TETRA IMAGES/GETTY IMAGES

Pediatra atendendo uma paciente.

$$\text{dose infantil} = \frac{\text{idade da criança (em ano)} \cdot \text{dose para adulto}}{\text{idade da criança (em ano)} + 12 \text{ anos}}$$

Por exemplo, para uma criança de 8 anos de idade, um médico calcula a dose infantil (x) de um medicamento, cuja dose para adultos é 250 miligramas, resolvendo a equação:

$$x = \frac{8 \cdot 250}{8 + 12}$$

No estudo das equações, representamos o termo desconhecido por uma letra chamada de **incógnita**.

Na equação $x = \frac{8 \cdot 250}{8 + 12}$, a incógnita é a letra x; efetuando os cálculos, obtemos seu valor, que é 100. Isso significa que a dose de medicamento a ser administrada à criança é 100 miligramas.

Acompanhe agora outra situação.

Márcio e seus filhos foram a um pesqueiro, onde são cobrados R$ 8,00 de entrada e R$ 10,00 por quilograma de peixe pescado. Dessa maneira, se Márcio pescar:

- 1 kg, deverá pagar, em real:
  $8{,}00 + 10{,}00 = 18{,}00$;
- 1,5 kg, deverá pagar, em real:
  $8{,}00 + 10{,}00 \cdot 1{,}50 = 8{,}00 + 15{,}00 = 23{,}00$;
- 2 kg, deverá pagar, em real:
  $8{,}00 + 10{,}00 \cdot 2 = 8{,}00 + 20{,}00 = 28{,}00$, e assim por diante.

Não sabemos quanto Márcio vai pescar, mas podemos determinar o valor que ele deve pagar por n quilogramas de peixe pescado: $8{,}00 + 10{,}00 \cdot n$.

Nesse caso, a letra n pode assumir o valor 3, ou 3,2, ou 12,5, ou qualquer outro valor não negativo. Por isso, essa letra é chamada de **variável**.

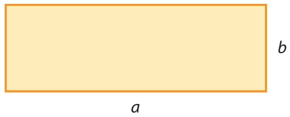
O uso de letras para representar grandezas de valores variáveis ou desconhecidos dá origem a uma linguagem com expressões próprias da Matemática, a linguagem algébrica. Nesse campo, estudamos generalizações de conceitos e de operações da Aritmética.

2 Expressões algébricas

Neste capítulo, ampliaremos nosso estudo a respeito de expressões algébricas.

> **Expressão algébrica** é aquela que tem apenas letras, ou números e letras.

Analise os seguintes exemplos:



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

a) A expressão algébrica que representa a medida da área do retângulo apresentado é $\boldsymbol{ab}$.

b) A expressão algébrica que representa a medida do perímetro desse retângulo é $\mathbf{2}\boldsymbol{a} + \mathbf{2}\boldsymbol{b}$.

O uso de letras para representar números facilita a tradução de sentenças da linguagem verbal escrita para a linguagem algébrica.

Acompanhe alguns exemplos.

a) O oposto do dobro de um número x adicionado a um número y $\longrightarrow$ $-2x + y$

b) A diferença entre a terça parte de um número x e o oposto de 5 $\longrightarrow$ $\frac{x}{3} - (-5)$

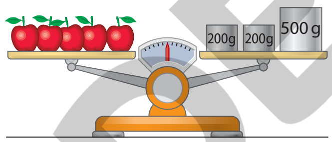
c) O inverso do dobro de um número x não nulo $\longrightarrow$ $\frac{1}{2x}$, com $x \neq 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Orlando, dono de uma quitanda, colocou 5 maçãs em um dos pratos de uma balança e nivelou-a colocando no outro prato um bloco de massa medindo 500 g e dois blocos de massa medindo 200 g cada um.

Indicando a massa média de cada maçã por x, represente no caderno essa situação por meio de uma equação.
1. $5x = 900$



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

2 Represente no caderno, usando símbolos:

a) a diferença entre o número x e o número y; **2. a)** $x - y$
b) a soma do número m com o triplo do número n; **2. b)** $m + 3n$
c) o quociente do número a pelo número b (com $b \neq 0$); **2. c)** $\frac{a}{b}$
d) a ordem das parcelas da adição de a e b não altera a soma; **2. d)** $a + b = b + a$
e) a diferença entre os quadrados dos números c e d; **2. e)** $c^2 - d^2$
f) o quadrado da diferença dos números c e d; **2. f)** $(c - d)^2$
g) o cubo do número y. **2. g)** y^3

3. a) $a \rightarrow$ algarismo das unidades de milhar;
$b \rightarrow$ algarismo das centenas;
$c \rightarrow$ algarismo das dezenas;
$d \rightarrow$ algarismo das unidades.

3 O número 574, decomposto em centenas, dezenas e unidades, pode ser escrito da seguinte maneira:

$$5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$$

Agora, considere um número qualquer de quatro algarismos ($\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}$).

a) Determine a ordem de cada algarismo desse número.
b) Decomponha o número $\underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}$ de acordo com a ordem de seus algarismos.
3. b) $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$

4 Em uma divisão com números naturais, o divisor é x, o quociente é y e o resto é o maior possível. Qual é a expressão do dividendo? **4.** $xy + x - 1$

Este é um bom momento para promover uma discussão com os estudantes a respeito da condição de que a não pode representar o algarismo zero, visto que o número deve ser de quatro algarismos.

Essa discussão pode ser motivadora para a apresentação do valor numérico de uma expressão algébrica.

2. Expressões algébricas

Habilidade da BNCC:
EF08MA06.

É importante os estudantes compreenderem o conceito de expressão algébrica, desenvolvendo a habilidade (EF08MA06), pois com base nele são feitas as generalizações, o estudo de equações e o de funções, tão importantes no desenvolvimento de diferentes conceitos e conteúdos em Matemática. Embora já tenham lidado com equações do 1º grau em anos anteriores, esta é a primeira vez que tratam as expressões a fim de estudá-las em si mesmas, isto é, independentemente se vão ou não atribuir valores às variáveis e incógnitas.

Neste momento, apresentamos como traduzir para a linguagem algébrica situações matemáticas apresentadas na língua materna. Fazer um paralelo com a Aritmética pode ajudar em muitas situações com as quais os estudantes vão se deparar. Por exemplo, eles já sabem que o dobro de um número é obtido fazendo duas vezes esse número, o que facilita o entendimento de que, ao indicar o número por x, representamos o dobro de um número por $2 \cdot x$.

Exercícios propostos

Neste bloco, os exercícios desenvolvem o uso da linguagem matemática por meio das expressões algébricas.

As resoluções dos **exercícios 1** a **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

No **exercício 2**, queremos que os estudantes inicialmente exercitem a relação entre a Matemática e a língua materna, percebendo, por exemplo, o que há de diferente entre os itens **e** e **f**. No **item e**, temos a diferença entre os quadrados de dois números ($c^2 - d^2$); no **item f**, o quadrado da diferença entre dois números $(c - d)^2$.

No **exercício 3**, temos um exemplo de articulação das Unidades Temáticas **Álgebra** e **Números**. O número 574 decomposto em ordens é escrito: $5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 4$, e um número de quatro algarismos, representado por $abcd$, decomposto é: $a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 + d$.

Valor numérico de uma expressão algébrica

Ressalte aos estudantes o fato de que expressões que apresentam variáveis (ou incógnitas) nos denominadores têm uma condição de existência: o denominador não pode se anular. Por isso, as variáveis não podem assumir valores que anulem o denominador.

Apresente na lousa outros exemplos de expressões algébricas dadas por frações em que há variáveis no denominador para os estudantes buscarem os valores que elas não podem assumir.

Valor numérico de uma expressão algébrica

Vamos recordar o cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica. Para isso, considere a situação a seguir.

Em uma loja de brinquedos, encontram-se x patinetes e y *skates*. A expressão que representa o número total de rodas é $2x + 4y$.

Se houver 12 patinetes e 15 *skates*, o número total de rodas será:

$2 \cdot (12) + 4 \cdot (15) = 24 + 60 = 84$

Então, dizemos que o valor numérico da expressão algébrica $2x + 4y$ para $x = 12$ e $y = 15$ é 84.

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe outra situação.

Vamos calcular a medida da área da região pintada de verde da figura 1, considerando $x = 5$ cm e $y = 1$ cm.

Para calcular a medida da área pedida, basta obter o valor numérico da expressão $2x - 3y$ para $x = 5$ e $y = 1$.

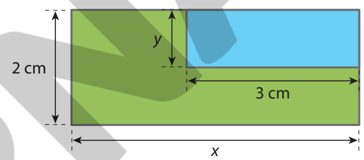


Figura 1

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

$2x - 3y =$

$= 2 \cdot (5) - 3 \cdot (1) =$ ← Substituímos x por 5 e y por 1.

$= 10 - 3 = 7$ ← Efetuamos as operações indicadas.

Então, dizemos que 7, que é o valor numérico da expressão algébrica $2x - 3y$ para $x = 5$ e $y = 1$, é a medida da área da região da figura pintada de verde, em centímetro quadrado.

O **valor numérico** de uma expressão algébrica é o número que se obtém ao substituir as variáveis por números e efetuar as operações indicadas.

Analise outros exemplos.

a) Vamos calcular o valor numérico da expressão $a^2 - b^2$ para $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{2}{3}$.

$$a^2 - b^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2} - \frac{2^2}{3^2} = \frac{1}{4} - \frac{4}{9} = \frac{9 - 16}{36} = -\frac{7}{36}$$

Portanto, o valor numérico da expressão algébrica $a^2 - b^2$ para $a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{2}{3}$ é $-\frac{7}{36}$.

b) Vamos calcular o valor numérico da expressão $\frac{3x^2 - 5x}{x + 3}$ para $x = 4$.

$$\frac{3x^2 - 5x}{x + 3} = \frac{3 \cdot (4)^2 - 5 \cdot (4)}{4 + 3} = \frac{3 \cdot 16 - 20}{7} = \frac{48 - 20}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Portanto, o valor numérico da expressão algébrica $\frac{3x^2 - 5x}{x + 3}$ para $x = 4$ é 4.

Considerando que 300 estudantes são distribuídos em grupos e sabendo que há x estudantes em cada grupo, o número de grupos formados é dado por $\frac{300}{x}$. Se cada grupo tiver dois estudantes a menos, então o número de grupos será representado por $\frac{300}{x-2}$.

Nessa situação, x representa um número natural não nulo no primeiro caso (não há grupo com 0 estudante) e, no segundo caso, x representa um número natural maior que 2. Além disso, observe que:

- para $x = 0$, a expressão $\frac{300}{x}$ não tem valor numérico definido;
- para $x = 2$, a expressão $\frac{300}{x-2}$ não tem valor numérico definido.

Note que obtemos o valor da variável para o qual a expressão não tem valor numérico igualando o denominador a 0 e resolvendo a equação encontrada.

Analise outros exemplos.

a) Para que valor de x a expressão $\frac{3x-1}{2x-5}$ não tem valor numérico definido?

Essa expressão não tem valor numérico definido quando o denominador é igual a zero, ou seja, quando $2x - 5 = 0$.

Resolvendo essa equação, obtemos $x = \frac{5}{2}$.

Logo, a expressão $\frac{3x-1}{2x-5}$ não tem valor numérico definido para $x = \frac{5}{2}$.

b) Que relação deve existir entre x e y para que a expressão $\frac{3x+2y}{x-2y}$ não tenha valor numérico definido?

A expressão não terá valor numérico definido quando o denominador for igual a zero; nesse caso, quando $x - 2y = 0$. Assim, $x = 2y$.

Portanto, a relação procurada é $x = 2y$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

5 Aplique a fórmula de Young, descrita no início deste capítulo, para calcular no caderno a dose para uma criança de 6 anos, medida em miligrama, de um remédio cuja dose indicada para adulto é:

a) 150 miligramas; **5. a)** 50 miligramas.
b) 210 miligramas; **5. b)** 70 miligramas.
c) 300 miligramas. **5. c)** 100 miligramas.

6 Com base nos resultados do exercício anterior, é possível concluir que a dose de um remédio para uma criança de 6 anos é a quarta parte da dose desse remédio indicada para um adulto? Por quê?
6. Não, pois é a terça parte.

Exercícios propostos

Retomamos no **exercício 5** a contextualização da introdução do capítulo sobre a fórmula de Young.

Assim, em cada item, calculamos a dose x, em miligrama.

a) $x = \frac{6 \cdot 150}{6 + 12} = \frac{6 \cdot 150}{18} = 50$

b) $x = \frac{6 \cdot 210}{6 + 12} = \frac{6 \cdot 210}{18} = 70$

c) $x = \frac{6 \cdot 150}{6 + 12} = \frac{6 \cdot 300}{18} = 100$

Dando continuidade a essa problemática, no **exercício 6**, os estudantes são levados a analisar e aplicar a fórmula para uma criança de 6 anos, concluindo que a dose de um remédio, para essa idade, é sempre igual à terça parte da dose para um adulto.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 7** a **9** e dos **exercícios 12** a **15** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

No **exercício 10**, as expressões não têm valor numérico quando os denominadores são nulos; desta maneira, isso ocorre quando:

a) $a + 5 = 0$

$a = -5$

b) $2a - 4 = 0$

$2a = 4$

$a = 2$

De maneira similar, no **exercício 11**, temos:

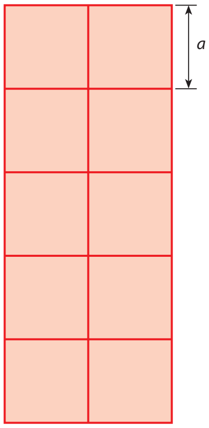
a) $a - b = 0$

$a = b$

b) $2a + 3b = 0$

$2a = -3b$

7 Considere a figura a seguir. Ela é formada por quadrados idênticos.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, no caderno, faça o que se pede.

a) Determine a expressão que representa a medida do perímetro dessa figura. **7. a)** $14a$

b) Calcule o valor numérico da expressão da medida do perímetro para $a = 3{,}6$. **7. b)** 50,4

c) Encontre a expressão que representa a medida da área dessa figura. **7. c)** $10a^2$

d) Determine o valor numérico da expressão da medida da área para $a = 5$. **7. d)** 250

8 Calcule no caderno o valor numérico das expressões:

a) $2a + 3b$, para $a = \frac{5}{2}$ e $b = \frac{2}{3}$; **8. a)** 7

b) $x^2 + 2x$, para $x = -5$; **8. b)** 15

c) $\frac{x + y}{x - y}$, para $x = 4$ e $y = 2$; **8. c)** 3

d) $-\frac{2b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, para $a = 2$, $b = -10$ e $c = 12$. **8. d)** $-\frac{9}{2}$

9 Se 0 é o valor numérico da expressão $x^2 - y$, dê exemplos de valores inteiros que x e y podem assumir. **9.** Respostas possíveis: $x = y = 1$; $x = y = 0$; $x = -1$ e $y = 1$.

10 Para que valores de a as expressões a seguir não têm valor numérico?

a) $\frac{a - 4}{a + 5}$ **10. a)** $a = -5$ **b)** $\frac{a + 3b}{2a - 4}$ **10. b)** $a = 2$

11 Que relação deve existir entre a e b para que as expressões a seguir não tenham valor numérico?

a) $\frac{a - 1}{a - b}$ **11. a)** $a = b$ **b)** $\frac{3x}{2a + 3b}$ **11. b)** $2a = -3b$

12. a) $B = C = 1$
12. b) Ou $B = 0$, ou $C = 0$ ou $B = C = 0$.

12 Considere A, B e C números naturais e a equação:

$$A = B \cdot C$$

a) Para $A = 1$, que valores B e C devem assumir para que a equação seja verdadeira?

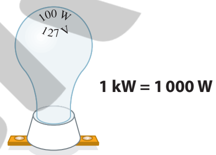
b) Para $A = 0$, que valores B e C devem assumir para que a equação seja verdadeira?

13 José faz pequenos fretes urbanos com seu caminhão, cobrando uma taxa inicial de R$ 50,00 e mais R$ 6,00 por quilômetro rodado.

a) Indicando por x o número de quilômetros rodados, qual é a expressão que representa o preço cobrado por José? **13. a)** $50 + 6x$

b) Quanto ele cobra por um frete de 6 quilômetros? **13. b)** R$ 86,00

14 Um relógio registra o consumo de energia elétrica de uma residência em quilowatt-hora (kWh). Nas lâmpadas e nos aparelhos elétricos, aparece indicada, entre outras coisas, a quantidade de energia elétrica consumida em cada unidade de tempo, chamada de **potência** e expressa em watt (W).



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Para calcular o consumo mensal de energia elétrica C (em kWh), pode-se aplicar a fórmula em que C é o consumo de energia, p é a potência do aparelho, h é o tempo de uso por dia (em hora) e d é o número de dias de uso por mês:

$$C = \frac{p \cdot h \cdot d}{1000}$$

Aplicando essa fórmula, calcule o consumo de energia elétrica, relativo a 30 dias, de:

a) uma lâmpada de 100 W que fica acesa durante 3 horas por dia; **14. a)** 9 kWh

b) um chuveiro de 4 000 W que é utilizado durante 1 hora por dia. **14. b)** 120 kWh

15 Reunindo-se com um colega, retomem a situação das patinetes e dos *skates* da página 94 e respondam à questão a seguir.

- É possível que o valor numérico da expressão algébrica que representa o número total de rodas seja um número ímpar? Por quê?

15. Não, pois x e y estão sendo multiplicados por números pares.

16. b) $x = 2$; $x = -2$
16. c) O valor numérico calculado deve ser 3 para ambos, quaisquer que sejam os números escolhidos, desde que diferentes de 2 e de -2.

16 Ainda reunido com o colega, façam o que se pede.

Dada a expressão $\dfrac{3x^2 - 12}{(x + 2) \cdot (x - 2)}$

a) calculem o valor numérico para $x = 6$, $x = -4$, $x = \frac{2}{3}$ e $x = -\frac{3}{2}$; 16. a) 3; 3; 3; 3

b) calculem os valores de x para os quais não existe o valor numérico da expressão;

c) cada um escolhe um número para x, diferente da resposta do item **b**, para que o outro calcule o valor numérico da expressão, depois corrija o cálculo feito pelo colega;

d) se forem escolhidos outros números para x, o valor numérico da expressão continua o mesmo? 16. d) Sim.

17 *Hora de criar* – Com um colega, elaborem um problema cada um sobre expressão algébrica ou valor numérico de expressão algébrica. Troque seu problema com o do colega e, depois de cada um resolver o problema do outro, destroquem para corrigi-los.
17. Resposta pessoal.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com um colega e respondam às questões a seguir.

a) Com uma calculadora, resolvam as expressões:

Pense mais um pouco...: a) 11; 111; 1 111; 11 111

$9 \cdot 1 + 2$ | $9 \cdot 12 + 3$ | $9 \cdot 123 + 4$ | $9 \cdot 1234 + 5$

b) Agora, sem a calculadora, resolvam a expressão: $9 \cdot 12\,345 + 6$, observando o padrão das expressões numéricas do item **a**. b) 111 111

c) Calculem o valor numérico da expressão $9x + y$ para $x = 123\,456$ e $y = 7$. c) 1 111 111

d) Escolham um número para x e outro para y para que se tenha $9x + y = 11\,111\,111$. d) Espera-se que os estudantes escolham $x = 1\,234\,567$ e $y = 8$.

e) Os números escolhidos no item **d** são os únicos números possíveis?
e) Embora os estudantes tenham sido induzidos pelos itens anteriores a dar a resposta adequada ao item **d**, espera-se que eles percebam que existem infinitos pares de números x e y, tal que o valor numérico de $9x + y$ seja 11 111 111.

3 Monômios

Considere as expressões algébricas: $-2a$, $\frac{x}{3}$, $3x^2$ e $-3y$.

Observe que elas não apresentam operação de adição ou de subtração, que os expoentes das letras são números naturais (não têm letra em um radical) e que não há letra no denominador. Nessas condições, as expressões algébricas são chamadas de **monômios**.

Em um monômio, distinguimos o **coeficiente** (parte numérica) e a **parte literal** (parte com letras).

O quadro a seguir mostra os coeficientes e as partes literais de alguns monômios.

Monômio	Coeficiente	Parte literal
$5x^3y^2$	5	x^3y^2
$-\frac{2}{7}ab^3m$	$-\frac{2}{7}$	ab^3m
$\sqrt{2}\,x$	$\sqrt{2}$	x
ab^5	1	ab^5

Observações

- Todo número não nulo é um monômio sem parte literal. Exemplos: $5; -10; \frac{5}{6}; 0{,}51; \sqrt{3}$
- O número 0 é chamado de **monômio nulo**.
- Costuma-se omitir os coeficientes 1 e -1 dos monômios. Exemplos: $1z = z$; $-1a^2c = -a^2c$

3. Monômios

- Habilidade da BNCC: **EF08MA06**.

Neste tópico, prosseguimos com o desenvolvimento da habilidade (EF08MA06) iniciando o estudo de um tipo especial de expressão algébrica – os **monômios** –, base para o estudo dos polinômios. Destaque as características principais que envolvem esse tipo de expressão algébrica.

Exercícios propostos

O **exercício 16** estimula a curiosidade dos estudantes quanto ao fato de o valor numérico da expressão ser constante para todos os valores possíveis atribuídos a x. Como motivação à continuidade do estudo de Álgebra, comente com eles que isso será esclarecido no estudo de produtos notáveis. Se julgar conveniente, aplique a propriedade distributiva na expressão do denominador a fim de evidenciar que, para x diferente de -2 e de 2, a expressão é simplificada para 3.

A resolução do **exercício 16** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

O **exercício 17** pode ser resolvido em pequenos grupos ou duplas. Cada grupo discute e elabora um problema e, em seguida, troca com o de outro grupo para o resolverem. Essa dinâmica possibilita aos estudantes discutir o assunto e as estratégias para elaborar o problema.

Pense mais um pouco...

A seção trabalha uma curiosidade numérica com o uso da calculadora. Os estudantes, em grupo, devem identificar o padrão das expressões numéricas propostas e relacioná-lo com a expressão algébrica $9x + y$.

No **item d**, induzidos pela sequência dos resultados anteriores, eles podem obter $x = 1\,234\,567$ e $y = 8$, raciocinando aritmeticamente. No entanto, podem obter outro par de valores (existem infinitos) para x e y que contemplem a igualdade.

O **item e** desperta o senso crítico dos estudantes para evitar que caiam nos enganos a que os padrões podem levar. Retome esse exercício quando estudarem equação do 1º grau com duas incógnitas e discuta com eles a importância do espírito crítico nos procedimentos de indução. Neste momento, contudo, eles podem procurar outros pares de valores para x e y, por tentativa e erro, que satisfaçam a igualdade.

Monômios semelhantes

No estudo dos monômios, muitas vezes recorreremos a conceitos geométricos para embasar as situações, mostrando mais uma vez a correlação entre as Unidades Temáticas **Álgebra**, **Geometria** e **Grandezas e medidas**. Esse é o caso da apresentação de **monômios semelhantes** (ou **termos semelhantes**), na qual utilizamos a noção de perímetro de polígonos regulares.

Exercícios propostos

No **exercício 18**, os estudantes devem aplicar a definição de monômios. No **item c**, pode-se reescrever a expressão de maneira a evidenciar que x tem expoente fracionário, $\frac{1}{2}$.

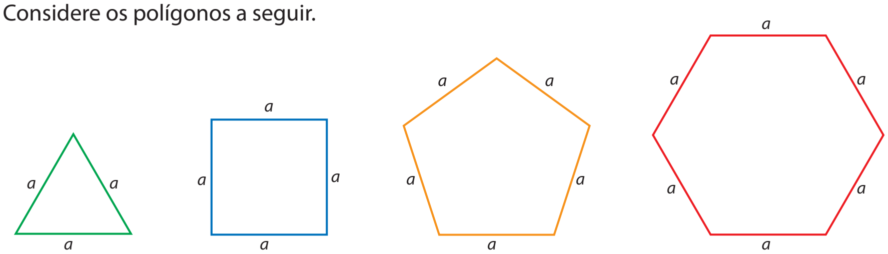
A resolução do **exercício 18** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

No **exercício 19**, a resolução é imediata da definição de parte literal e coeficiente de monômios; relembre aos estudantes que, quando o coeficiente for 1 ou –1, pode ser “ocultado” como ocorre nos **itens c** e **d**.

No **exercício 20**, os estudantes devem escrever como expressão algébrica termos que já são conhecidos deles, como dobro de uma quantidade, triplo, metade, terça parte etc. Incentive-os a escrever outras sentenças na linguagem verbal para, depois, registrarem uma expressão algébrica, como feito neste exercício. Aproveite para destacar que as situações envolvem grandezas diretamente proporcionais. Questione os estudantes se grandezas inversamente proporcionais, como a relação entre velocidade média e tempo $\left(v = \frac{d}{t}\right)$ para percorrer uma distância d determinada, representa um monômio; espera-se que comentem que não, pois $v + d - t^{-1}$, com d fixo e t variável, o expoente de t não é natural. Isso antecipa o desenvolvimento de aspectos das habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13).

Monômios semelhantes

Considere os polígonos a seguir.



Triângulo **Quadrado** **Pentágono** **Hexágono**

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A medida do perímetro desses polígonos pode ser indicada por monômios. Observe:

Polígono	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono
Medida do perímetro	$3a$	$4a$	$5a$	$6a$

Note que os monômios $3a$, $4a$, $5a$ e $6a$ têm a mesma parte literal (a).
Então, dizemos que eles são **monômios semelhantes** ou **termos semelhantes**.

Termos semelhantes ou **monômios semelhantes** são aqueles que têm a mesma parte literal. Monômios que não têm parte literal são semelhantes entre si.

Acompanhe outros exemplos.

a) Os monômios $9a^2x$ e $-2a^2x$ têm a mesma parte literal (a^2x). Portanto, são termos semelhantes.

b) Os monômios $-\frac{1}{4}y$, $0{,}5y$ e $-3y$ têm a mesma parte literal (y). Logo, são termos semelhantes.

c) Os monômios $12a^2c$ e $12ac^2$ não têm a mesma parte literal ($a^2c \neq ac^2$). Portanto, não são termos semelhantes.

d) 3 e $\sqrt{2}$ são dois números não nulos e, portanto, são monômios semelhantes, apesar de não terem parte literal.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

18 Explique por que as expressões a seguir não são monômios.
18. a) Porque envolve a operação de adição.
18. b) Porque tem letra no denominador.
18. c) Porque tem letra no radicando.

a) $2x + 5$ b) $2\frac{a}{b}$ c) $4\sqrt{5x}$

19 Dê o coeficiente de cada monômio.

a) $-2xy$ **19. a)** -2
b) $\frac{3}{5}a$ **19. b)** $\frac{3}{5}$
c) x **19. c)** 1
d) $-y$ **19. d)** -1
e) $\frac{xy^2}{5}$ **19. e)** $\frac{1}{5}$
f) $-\frac{a}{3}$ **19. f)** $-\frac{1}{3}$

20 João coleciona selos. Indicando por x a quantidade de selos de João, represente com um monômio a quantidade de selos de cada colecionador a seguir.

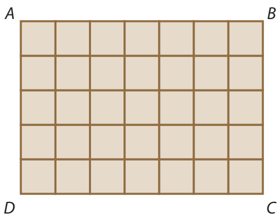
a) Glaucia tem a metade da quantidade de selos de João. **20. a)** $\frac{x}{2}$
b) Ricardo tem o dobro da quantidade de selos de João. **20. b)** $2x$
c) Gabriel tem $\frac{2}{3}$ da quantidade de selos de João. **20. c)** $\frac{2}{3}x$

98

23. Alternativas **a**, **b**, **c**, **f**, **h**.

21 Um pintor cobra R$ 30,00 por metro quadrado de parede pintada. Francisco quer calcular quanto vai gastar para pintar as paredes da casa onde ele mora. Para isso, decidiu usar um monômio e indicou a medida da área das paredes por y (em metro quadrado). Que monômio Francisco usou para fazer esse registro? **21.** $30y$

22 Observe a figura.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Indicando por x a medida do lado de cada quadradinho que forma essa figura, determine:

a) o monômio que representa a medida do perímetro do retângulo $ABCD$; **22. a)** $24x$

b) o valor numérico da medida desse perímetro para $x = 1{,}2$; **22. b)** 28,8

c) o monômio que representa a medida da área desse retângulo; **22. c)** $35x^2$

d) o valor numérico da medida dessa área para $x = 4{,}5$. **22. d)** 708,75

23 Entre as alternativas a seguir, quais apresentam monômios semelhantes?

a) $4x$ e $-7x$

b) $5ab$, $3ab$ e $2ab$

c) $\frac{a}{3}$ e $5a$

d) $2a$ e $2b$

e) $8a^2$ e $-5a$

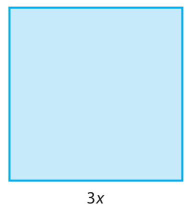
f) -6, -2 e $10{,}4$

g) $7x^2y$ e $9xy^2$

h) $12xy$ e $-21yx$

24. a) Medida do perímetro: $12x$; medida da área: $9x^2$.

24 Considere o quadrado e sua região interna.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Escreva um monômio que represente a medida do perímetro e outro que represente a medida da área desse quadrado.

b) Esses monômios são semelhantes? Justifique sua resposta.

24. b) Não, pois eles não têm a mesma parte literal.

25 *Hora de criar* – Com um colega, elaborem um problema cada um em que as quantidades sejam representadas com monômios e as soluções dos problemas sejam os valores numéricos dos monômios. Troque seu problema com o do colega e, depois de cada um resolver o problema do outro, destroquem para corrigi-los. **25.** Resposta pessoal.

PARA SABER MAIS

Cálculo algébrico e dízima periódica

Já sabemos que podemos escrever qualquer fração na forma decimal. Por exemplo:

$$\frac{5}{4} = 1{,}25, \text{ pois } 5 : 4 = 1{,}25$$

$$\frac{4}{50} = 0{,}08, \text{ pois } 4 : 50 = 0{,}08$$

$$\frac{17}{1\,000} = 0{,}017, \text{ pois } 17 : 1\,000 = 0{,}017$$

$$\frac{962}{100} = 9{,}62, \text{ pois } 962 : 100 = 9{,}62$$

Também podemos escrever números decimais como frações:

- $8{,}3 = \frac{83}{10}$
- $-0{,}0068 = -\frac{68}{10\,000}$
- $20{,}14 = \frac{2\,014}{100}$
- $4{,}012 = \frac{4\,012}{1\,000}$

Basta contar a quantidade de casas decimais e o denominador será o número 1 seguido dessa quantidade de zeros.

E quando o número decimal for uma dízima periódica, por exemplo, 0,3333...?

Para contar a quantidade de casas após a vírgula, vamos recorrer ao notável matemático alemão David Hilbert (1862-1943). Conta-se que ele narrava uma história sobre um gerente de hotel onde havia infinitos quartos, todos ocupados. Desafiado a acomodar um novo hóspede, o gerente resolveu o problema transferindo cada hóspede antigo para o quarto de número imediatamente superior: o do quarto 1 foi para o quarto 2, o do quarto 2 foi para o quarto 3, o do 3 foi para o 4, e assim fez infinitamente (no infinito não há o último). No quarto 1, que ficou vago, ele acomodou o novo hóspede.

Representando 0,3333... por x, vamos calcular o valor de $10x$.

Exercícios propostos

No **exercício 21**, o preço cobrado pelo pintor por metro quadrado é 30 reais, entregando a pintura pronta. Indicando a área a ser pintada por y (em m²), o monômio que representa o custo dessa obra é $30y$.

Uma sugestão para ampliação desse exercício é atribuir valores a y e, com esses valores, compor um quadro que mostre o custo de acordo com a área.

Área	Custo (em reais)
100	$30 \cdot (100) = 3\,000$
150	$30 \cdot (150) = 4\,500$
200	$30 \cdot (200) = 6\,000$

Desse modo, os estudantes podem perceber que o custo da obra depende da área a ser pintada, pois essas grandezas são diretamente proporcionais.

As resoluções dos **exercícios 22** a **25** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Para saber mais

Os estudantes já operaram com números racionais na forma de fração e na forma decimal, já associaram a ideia de quociente a uma fração e, também, já trabalharam quocientes decimais. Todo esse conhecimento construído em anos anteriores dá suporte ao tema tratado nesta seção, que explora a dízima periódica.

Ao se depararem com frações que indicam quocientes decimais não exatos, os estudantes obtêm dízimas periódicas, notações decimais que, embora tenham uma representação decimal infinita, apresentam uma repetição na parte decimal (um período). É o caso de $\frac{1}{3}$, que indica o quociente da divisão 1 : 3, cuja notação decimal é a dízima periódica 0,3333..., em que o período é 3. Pelo fato de o período já aparecer logo depois da vírgula, dizemos que é uma dízima periódica simples. No caso em que há algarismos depois da vírgula que não façam parte do período, como em 2,1044444..., dizemos que a dízima periódica é composta.

Para saber mais

O processo algébrico de determinação de uma fração geratriz de uma dízima periódica (fração que origina a dízima) foi utilizado para dízimas periódicas simples. Os estudantes podem reconhecer e utilizar os procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica desenvolvendo, assim, a habilidade (EF08MA05).

Apresente aos estudantes uma dízima periódica composta e desafie-os a determinar sua dízima algebricamente. Faça intervenções que os incentivem a elaborar e testar hipóteses, fornecendo dicas para continuarem o trabalho com o processo. Por exemplo, considerando a dízima periódica 0,23333..., os estudantes podem verificar que, se fizermos $x = 0{,}23333...$ e multiplicarmos membro a membro a igualdade por 10 ou por 100, não obteremos partes decimais iguais à parte decimal de x:

- $10x = 10 \cdot 0{,}23333...$
  $10x = 2{,}3333...$
- $100x = 100 \cdot 0{,}23333...$
  $100x = 23{,}3333...$

Nesse caso, em vez de utilizar o x na subtração, devemos observar que $10x$ e $100x$ têm partes decimais iguais:

$100x - 10x = 23{,}3333... - 2{,}3333...$

$90x = 21{,}0000...$

$90x = 21$

$x = \frac{21}{90} = \frac{7}{30}$

Logo, a fração irredutível que gera a dízima periódica 0,23333... é $\frac{7}{30}$. A fração $\frac{21}{90}$ também gera a mesma dízima. Peça aos estudantes que efetuem a divisão e comprovem que essas frações realmente geram essa dízima periódica.

As resoluções dos itens do **Agora é com você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Se $x = 0{,}3333...$, então temos $10x = 10 \cdot 0{,}3333... = 3{,}3333...$

Considerando 0,3333... e 3,3333... e lembrando da história apresentada, notamos que é como se cada um dos infinitos 3 do primeiro número tivesse se transferido para a casa imediatamente à esquerda. Agora, vamos calcular o valor de $(10x - x)$.

$$10x - x = 3{,}333... - 0{,}3333...$$

(As infinitas casas após a vírgula são iguais, então elas se anulam.)

$$9x = 3{,}0000... \text{ ou } x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Podemos verificar $\frac{1}{3}$ dividindo 1 por 3 com a calculadora, que dá 0,3333...

A fração $\frac{1}{3}$, que gera a dízima periódica, chama-se **fração geratriz** da dízima.

Para obter a fração geratriz da dízima 5,181818... de período 18, por exemplo, seguimos o procedimento apresentado a seguir.

Como o período tem duas casas, devemos transferir cada período 18 duas casas para a esquerda. Fazemos isso multiplicando x por 100, isto é, vamos calcular o valor de $100x$.

Se $x = 5{,}181818...$, então $100x = 100 \cdot 5{,}181818... = 518{,}181818...$ (o 1º período "saltou" para a esquerda da vírgula).

$$100x - x = 518{,}181818... - 5{,}181818...$$

(As infinitas casas após a vírgula são iguais, então se anulam.)

$$99x = 513{,}000000... \text{ ou } x = \frac{513}{99}$$

Com uma calculadora, verifique que $\frac{513}{99}$ é a fração geratriz da dízima periódica 5,181818...

Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Determine a fração geratriz das seguintes dízimas:

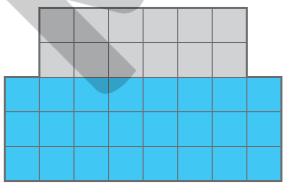
a) 0,7777... **a)** $\frac{7}{9}$ b) 7,7777... **b)** $\frac{70}{9}$ c) 0,525252... **c)** $\frac{52}{99}$ d) 52,525252... **d)** $\frac{5200}{99}$

4 Operações com monômios

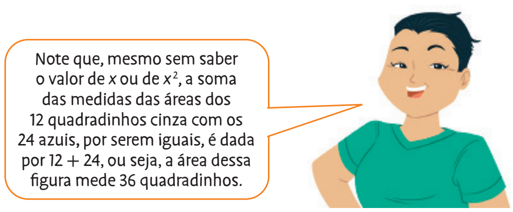
Ao trabalhar com números, você aprendeu a efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação. Agora, vamos realizar essas mesmas operações com expressões algébricas. Chamamos esse estudo de **cálculo algébrico**.

Adição algébrica de monômios

Na figura, a medida da área de cada quadradinho é x^2. A medida da área da parte azul é $24x^2$, e a da parte cinza é $12x^2$.



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

4. Operações com monômios

■ Habilidade da BNCC: **EF08MA06**.

Iniciamos o estudo das operações com monômios dando destaque para a adição de monômios. Os estudantes podem desenvolver a habilidade (EF08MA06) à medida que ampliam a compreensão sobre operações envolvendo monômios. Para a compreensão dos procedimentos, eles devem perceber que podem associar propriedades aritméticas às operações algébricas.

A medida da área da figura é obtida pela contagem de todos os quadradinhos ou pela adição das medidas das áreas das duas partes, isto é, pela adição dos monômios $24x^2$ e $12x^2$.

$$24x^2 + 12x^2 = 36x^2$$

Assim, a área total da figura mede $36x^2$.

Uma expressão em que aparecem apenas adições e subtrações de monômios é chamada de **adição algébrica de monômios**.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $(-5ab) + (-2ab) - (-3ab) = -5ab - 2ab + 3ab = -4ab$

b) $\left(-\frac{3}{4}x^3y\right) - \left(\frac{1}{3}x^3y\right) = -\frac{3}{4}x^3y - \frac{1}{3}x^3y = \frac{-9x^3y - 4x^3y}{12} = \frac{-13x^3y}{12}$

A **adição algébrica** de monômios semelhantes é obtida adicionando-se algebricamente os coeficientes e conservando-se a parte literal.

Esse processo de cálculo também é chamado de **redução dos monômios (ou termos) semelhantes**.

Observe alguns exemplos em que ocorre redução de monômios semelhantes.

a) $-2x^2y + 3x^2y - 5x^2y = -4x^2y$

$(-2 + 3 - 5 = -4)$

b) $\frac{5}{2}ab^2 - \frac{2}{3}ab^2 + \frac{1}{4}ab^2 = \frac{25}{12}ab^2$

$\left(\frac{5}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{30 - 8 + 3}{12} = \frac{25}{12}\right)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

26 Determine a fração geratriz de:

a) 0,354354354... **26. a)** $\frac{118}{333}$ b) 6,88888... **26. b)** $\frac{62}{9}$ c) 7,878787... **26. c)** $\frac{780}{99}$

27 Efetue os cálculos algébricos a seguir no caderno.

a) $(-10x) + (+6x)$ **27. a)** $-4x$

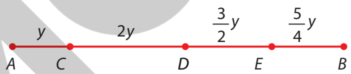
b) $(0{,}8x^2y) + (-3{,}5x^2y)$ **27. b)** $-2{,}7x^2y$

c) $\left(-\frac{2}{5}ab\right) + \left(-\frac{3}{10}ab\right)$ **27. c)** $-\frac{7}{10}ab$

d) $(-9ay) - (-3ay)$ **27. d)** $-6ay$

e) $(0{,}\overline{2}a^3) - (-0{,}\overline{5}a^3)$ **27. e)** $\frac{7}{9}a^3$

28 Determine o monômio que representa a medida do segmento $\overline{AB}$. **28.** $\frac{23}{4}y$



29 Uma empresa de *software* lançou um novo programa no mercado. No primeiro mês, ela vendeu determinada quantidade desse novo programa. No segundo mês, foi vendido o dobro do que se vendeu no primeiro mês. No terceiro mês, foi vendido o triplo do que se vendeu nos meses anteriores. Represente a quantidade de unidades vendidas nos três primeiros meses. **29.** $12x$

30 Represente a medida do segmento $\overline{MP}$, sabendo que a medida do segmento $\overline{MN}$ é $6{,}5x$. **30.** $4{,}2x$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

As resoluções dos **exercícios 27** a **30** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4. No **exercício 27, item e**, observe a conveniência de recordar a notação de dízima periódica.

Adição algébrica de monômios

Ao operar com monômios, o intuito é trabalhar tomando como base as operações estudadas com números inteiros e com números racionais.

A adição algébrica entre monômios será efetuada quando eles apresentarem mesma parte literal, ou seja, quando forem termos semelhantes.

Desenvolva os exemplos na lousa, retomando a adição entre números racionais sempre que necessário, observando o que ocorre com os sinais e retomando adição e subtração de números racionais na forma de fração. Amplie os exemplos utilizando também coeficientes racionais expressos na forma decimal para que os estudantes mobilizem todos os conhecimentos já construídos com as operações envolvendo números racionais.

Exercícios propostos

No **exercício 26**, uma maneira de determinar as frações geratrizes de cada item é considerar diferentes números com a mesma parte decimal.

a) Seja $x = 0{,}354354354...$

$1000x = 354{,}354354354...$

Logo:

$1000x - x = 354 - 0$

$999x = 354$

$x = \frac{354}{999}$

$x = \frac{118}{333}$

b) Seja $x = 6{,}8888...$

$10x = 68{,}8888...$

Então:

$10x - x = 68 - 6$

$9x = 62$

$x = \frac{62}{9}$

c) Seja $x = 7{,}878787...$

$100x = 787{,}878787...$

Então:

$100x - x = 787 - 7$

$99x = 780$

$x = \frac{780}{99}$

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 31** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Para o **exercício 32**, apresentamos a seguinte resolução:

ganhou: x partidas

perdeu: $(x - 2)$ partidas

empatou: $\frac{x}{2}$ partidas

a) Por meio da expressão algébrica $x + (x - 2) + \frac{x}{2}$, obtemos uma expressão algébrica para o número de partidas que esse time disputou:

$$x + (x - 2) + \frac{x}{2} =$$
$$= \frac{2x + 2x - 4 + x}{2} =$$
$$= \frac{5x - 4}{2}$$

Assim, o número de partidas é representado pelo binômio: $\frac{5x - 4}{2}$

Essa expressão não é um monômio, pois apresenta uma subtração no numerador.

b) A expressão algébrica que representa o total de pontos desse time é:

$$3 \cdot x + 1 \cdot \frac{x}{2} + 0 \cdot (x - 2) =$$
$$= 3x + \frac{x}{2} = \frac{6x - x}{2} = \frac{7x}{2}$$

Logo, $\frac{7x}{2}$ corresponde ao total de pontos obtidos por esse time. Essa expressão, que pode ser escrita na forma $\frac{7}{2}x$, é um monômio, pois é formada de um único produto (sem adição nem subtração) no qual não há letras em denominador nem em radical.

A antecipação da multiplicação do número 3 com o monômio x está ao alcance dos estudantes, que já escreveram algebricamente expressões do tipo "o triplo de x".

31 Reduza os monômios semelhantes.

a) $-4xy + 6xy - 5xy$ **31. a)** $-3xy$

b) $5a^3 + 7a^3 - 9a^3 + 3a^3$ **31. b)** $6a^3$

c) $-3x - 5x + 2x - x + 4x$ **31. c)** $-3x$

d) $\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{6}x^2$ **31. d)** x^2

e) $m^3n^2 + \frac{4}{5}m^3n^2 - \frac{5}{3}m^3n^2 - \frac{1}{9}m^3n^2$ **31. e)** $\frac{1}{45}m^3n^2$

32 Durante um campeonato de basquetebol promovido em uma escola, o time do 8º ano ganhou x partidas, perdeu $(x - 2)$ partidas e empatou $\frac{x}{2}$ partidas. **32. a)** $\frac{5x - 4}{2}$. Não, porque envolve uma subtração.

a) Determine a expressão algébrica que representa o número de partidas que esse time jogou. Essa expressão é um monômio? Por quê?

b) Sabendo que para cada vitória o time ganha 3 pontos, para cada empate ganha 1 ponto e nas derrotas o time não ganha nem perde pontos, qual é o total de pontos obtidos por esse time? O total de pontos é representado por um monômio? **32. b)** $\frac{7x}{2}$. Sim.

Multiplicação e divisão de monômios

Vamos recordar as multiplicações de potências de bases iguais considerando dois exemplos.

a) $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$

b) $a \cdot a^2 \cdot a^4 = a^{1+2+4} = a^7$

Com base nesses exemplos, observe o cálculo dos produtos a seguir.

a) $(3a^2) \cdot (5ab) =$

$= (3 \cdot 5) \cdot (a^2 \cdot ab) =$ ← Aplicamos as propriedades comutativa e associativa da multiplicação.

$= 15 \cdot a^{2+1} \cdot b = 15a^3b$ ← Efetuamos as operações.

b) $(+4xy^2) \cdot (-9a^3x^2y) = 4 \cdot (-9) \cdot (x \cdot y^2 \cdot a^3 \cdot x^2 \cdot y) = -36a^3x^3y^3$

O **produto** de dois monômios é obtido da seguinte maneira:
- primeiro, multiplicam-se os coeficientes;
- em seguida, multiplicam-se as partes literais.

Agora, vamos recordar as divisões de potências de bases iguais, considerando dois exemplos.

a) $2^7 : 2^2 = 2^{7-2} = 2^5$

b) $a^4 : a = a^{4-1} = a^3$, com $a \neq 0$.

Agora, com base nesses exemplos, observe o cálculo dos quocientes a seguir, considerando o monômio divisor diferente de zero.

a) $(+12a^4b^3) : (-2ab^2) = -6a^3b$

$(+12) : (-2) = -6$

$a^4 : a = a^{4-1} = a^3$

$b^3 : b^2 = b^{3-2} = b^1 = b$

b) $(-3xy^4) : (+3xy) = (-1) \cdot 1y^3 = -y^3$

$(-3) : (+3) = -1$

$x : x = x^{1-1} = x^0 = 1$

$y^4 : y = y^{4-1} = y^3$

O **quociente** de dois monômios é obtido da seguinte maneira:
- primeiro, dividem-se os coeficientes;
- em seguida, dividem-se as partes literais.

Multiplicação e divisão de monômios

A multiplicação e a divisão de monômios tem base nas propriedades da potenciação. A multiplicação entre monômios sempre resulta em outro monômio, mas a divisão entre eles nem sempre terá um quociente que também é um monômio; por exemplo, $x : x^2$ equivale a $x^{\frac{1}{2}}$, cujo expoente não é natural, assim como a divisão de dois números inteiros nem sempre resulta em quociente inteiro.

Desenvolva os exemplos na lousa, pedindo aos estudantes que indiquem as propriedades de potenciação utilizadas em cada passo.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

33 Calcule no caderno os produtos a seguir.

a) $(4a^2x^3) \cdot (-5ax^2)$ **33. a)** $-20a^3x^5$

b) $(-6xy) \cdot (-3y)$ **33. b)** $18xy^2$

c) $(0{,}5x) \cdot (2{,}4x^2)$ **33. c)** $1{,}2x^3$

d) $\left(-\frac{7}{11}a\right) \cdot (+2ab) \cdot (-11a)$ **33. d)** $14a^3b$

e) $(-2ax) \cdot \left(\frac{3}{2}ax^2\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}a\right)$ **33. e)** $\frac{3}{2}a^3x^3$

34 Calcule os quocientes a seguir, supondo que o monômio divisor seja diferente de zero.

a) $(16x^5) : (-4x^2)$ **34. a)** $-4x^3$

b) $(36xy^4) : (-6xy)$ **34. b)** $-6y^3$

c) $(-35a) : (+7a)$ **34. c)** -5

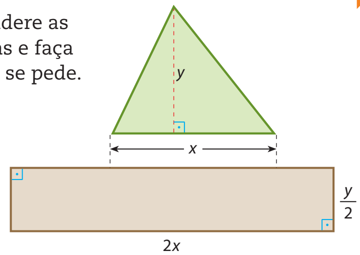
d) $(+3ab^2) : \left(-\frac{10}{5}\right)$ **34. d)** $-\frac{3}{2}ab^2$

e) $\left(-\frac{4}{5}x^5y\right) : \left(+\frac{4}{3}x^2y\right)$ **34. e)** $-\frac{3}{5}x^3$

35 Multiplicando $(5ax^2 - 2ax^2 - 7ax^2)$ por $\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x\right)$, obtemos um monômio. Efetue a multiplicação e calcule o valor numérico desse monômio para $a = 2$ e $x = -2$.
35. O valor numérico é 48.

36 O quociente de $\left(\frac{3}{4}x^3y + \frac{2}{3}x^3y - \frac{1}{6}x^3y\right)$ por $\frac{3}{2}x$ é um monômio. Qual é seu valor numérico se $x = -3$ e $y = 6$? **36.** O valor numérico é 45.

37 Considere as figuras e faça o que se pede.

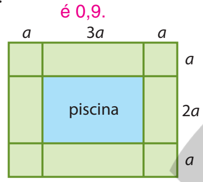


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Sabendo que a medida da área de um triângulo é dada pelo semiproduto das medidas da altura e da base, determine o monômio que representa a soma das medidas das áreas das duas figuras. **37. a)** $\frac{3}{2}xy$

b) Obtenha o valor numérico desse monômio para $x = 0{,}5$ e $y = 1{,}2$. **37. b)** O valor numérico é 0,9.

38 Marcelo separou uma parte retangular de um terreno para construir uma piscina retangular e, em volta dela, um gramado.



a) Determine a medida da área destinada à piscina. **38. a)** $6a^2$

b) Determine a medida da área destinada ao gramado. **38. b)** $14a^2$

c) Sendo $a = 3{,}2$ m, calcule a quantidade de grama utilizada, em metro quadrado.
38. c) 143,36 m²

Potenciação de monômios

Vamos recordar duas propriedades da potenciação:

- $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$
- $(a^2 \cdot b)^3 = (a^2)^3 \cdot b^3 = a^6 \cdot b^3$

Os exemplos a seguir mostram como aplicar essas propriedades a monômios.

a) $(-2a^3x)^2 = (-2)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot x^2 = 4a^6x^2$

b) $\left(-\frac{2}{3}m^2x\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (m^2)^3 \cdot x^3 = -\frac{8}{27}m^6x^3$

A **potência** de um monômio é obtida da seguinte maneira:
- eleva-se o coeficiente à potência indicada;
- em seguida, eleva-se a parte literal à potência indicada.

Observe outros exemplos.

a) $(-5a)^2 = 25a^2$

b) $\left(+\frac{3}{5}x^2y\right)^3 = \frac{27}{125}x^6y^3$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 33** a **38** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Na resolução dos **exercícios 37** e **38**, espera-se que os estudantes retomem os conhecimentos construídos no ano anterior a respeito de áreas de triângulos e de retângulos.

Além das operações de multiplicação e divisão entre monômios, eles também aplicarão nesses exercícios a adição algébrica entre monômios e a determinação do valor numérico de expressões algébricas.

Revisitar conceitos já trabalhados é também uma maneira de ampliar e consolidar os conhecimentos construídos e de acompanhar o aprendizado dos estudantes, o que possibilita fazer intervenções mais específicas para que as dúvidas não persistam por muito tempo.

Potenciação de monômios

Neste tópico, tratamos da potenciação de monômios, com base na multiplicação e nas propriedades de potências numéricas. Se necessário, incentive os estudantes a compor um resumo no caderno sobre as propriedades da potenciação e a utilizá-lo sempre que necessário na resolução de exercícios envolvendo operações com monômios.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 39** a **41** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Pense mais um pouco...

Nesta seção, os estudantes poderão desenvolver a habilidade (EF08MA10) ao identificar a regularidade da sequência associada à situação proposta.

Apresentamos resoluções para os itens desta seção.

a) Sejam:

A_a = medida da área do quadrado azul

A_b = medida da área do quadrado branco

A_v = medida da área do quadrado vermelho

A_l = medida da área do quadrado lilás

A_c = medida da área do quadrado cinza

Então:

$A_a = (2x)^2 = 4x^2$

$A_b = (4x)^2 = 16x^2$

$A_v = (6x)^2 = 36x^2$

$A_l = (8x)^2 = 64x^2$

$A_c = (10x)^2 = 100x^2$

Logo, a medida da área da moldura branca é:

$A_b - A_a = 16x^2 - 4x^2 = 12x^2$

A medida da área da moldura vermelha é:

$A_v - A_b = 36x^2 - 16x^2 = 20x^2$

A medida da área da moldura lilás é:

$A_l - A_v = 64x^2 - 36x^2 = 28x^2$

A medida da área da moldura cinza é:

$A_c - A_l = 100x^2 - 64x^2 = 36x^2$

A sequência é: $12x^2$, $20x^2$, $28x^2$, $36x^2$

b) Do item anterior, percebe-se que a medida da área da moldura cinza é igual à medida da área do quadrado vermelho.

c) $36 \cdot (2,4)^2 = 36 \cdot 5,76 = 207,36$

Logo, o valor numérico do monômio é 207,36.

d) Considerando da mais central para a mais externa, cada moldura acrescentada tem a medida de sua área igual à medida da área da moldura anterior mais $8x^2$. Assim, a medida da área da próxima moldura a ser formada será $44x^2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

39 Calcule.

a) $(+2x)^2$ **39. a)** $4x^2$

b) $(-3a^2)^3$ **39. b)** $-27a^6$

c) $(+2x^2y)^3$ **39. c)** $8x^6y^3$

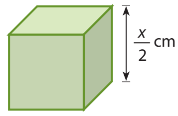
d) $(-xy^2)^4$ **39. d)** x^4y^8

e) $(-5x^4y)^1$ **39. e)** $-5x^4y$

f) $\left(-\frac{1}{2}a\right)^2$ **39. f)** $\frac{1}{4}a^2$

40 A medida do lado de um quadrado é dada por $\frac{5}{3}a$. Qual é medida da área desse quadrado? **40.** $\frac{25a^2}{9}$

41 Considere o cubo representado a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

41. a) $\frac{x^3}{8}$ cm³

a) Expresse a medida do volume do cubo.

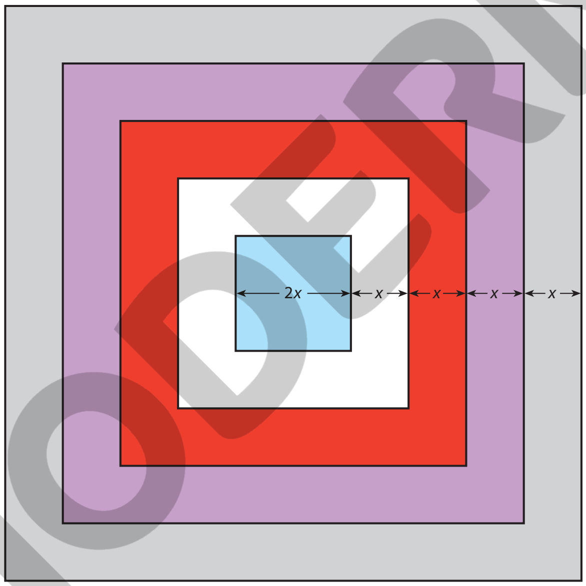
b) Qual é a medida da área da superfície desse cubo? **41. b)** $\frac{3}{2}x^2$ cm²

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Sequências recursivas de molduras e de quadrados

Nesta composição de quadrados, as unidades de medida de comprimento são dadas em centímetro. O quadrado central foi contornado com uma moldura branca, formando um segundo quadrado. O novo quadrado foi contornado com uma moldura vermelha, chegando-se a um terceiro quadrado, e assim por diante, até obter o quadrado com a moldura cinza.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Pense mais um pouco...: **a)** Moldura branca: $12x^2$; moldura vermelha: $20x^2$; moldura lilás: $28x^2$; moldura cinza: $36x^2$.

a) Forme, a partir da medida da área do quadrado central, a sequência recursiva dos monômios que representam as medidas das áreas das molduras, dadas em cm².

b) Uma dessas molduras tem a mesma medida de área de um dos quadrados construídos. Qual é o monômio que representa essa medida? **b)** $36x^2$

c) Qual é o valor numérico do monômio obtido no item **b** para x = 2,4 cm? **c)** 207,36

d) Considerando a sequência de resultados obtidos no item **a**, faça uma extrapolação e estime a medida da área da próxima moldura a ser formada. **d)** $44x^2$ cm²

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

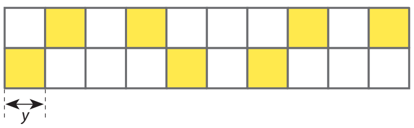
1 (Enem) A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{dose de criança} = \left(\frac{\text{idade da criança (em anos)}}{\text{idade da criança (em anos)} + 12}\right) \cdot \text{dose de adulto}$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento X a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento Y, cuja dosagem de adulto é 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação Y administrada à criança estava correta.
Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento X, em miligramas, igual a: **1.** Alternativa **b.**

a) 15.
b) 20.
c) 30.
d) 36.
e) 40.

2 Considere o retângulo formado por quadrados de lado medindo y, em cm.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Faça o que se pede.

a) Determine a medida do perímetro desse retângulo. **2. a)** $24y$ cm
b) Determine a medida da área desse retângulo. **2. b)** $20y^2$ cm²
c) Qual é a medida da área da parte pintada de amarelo? **2. c)** $7y^2$ cm²

3 Efetue as adições algébricas.

a) $(-3x) + (-8x)$ **3. a)** $-11x$
b) $(-12y) + (+6y)$ **3. b)** $-6y$
c) $(+5ab) - (-7ab)$ **3. c)** $12ab$
d) $(+2xy) + (+13xy)$ **3. d)** $15xy$

4 Efetue as operações e escreva o resultado na forma de fração irredutível.

a) $13{,}75 + \frac{3}{4} - 12{,}833...$ **4. a)** $\frac{5}{3}$
b) $(14{,}1666...) \cdot \frac{7}{3} : \frac{5}{3}$ **4. b)** $\frac{119}{6}$

5 Reduza os monômios semelhantes.

a) $-12a + 9a + 5a$ **5. a)** $2a$
b) $15y - 10y - 6y$ **5. b)** $-y$
c) $-\frac{3}{4}ax + \frac{1}{3}ax - \frac{1}{2}ax$ **5. c)** $-\frac{11}{12}ax$

6 Calcule os produtos a seguir.

a) $(+2x) \cdot (+3x^2)$ **6. a)** $6x^3$
b) $(-3y) \cdot (4y^2)$ **6. b)** $-12y^3$
c) $(-4x^2y) \cdot (-3xy^2)$ **6. c)** $12x^3y^3$
d) $(-5ab) \cdot (+3a)$ **6. d)** $-15a^2b$

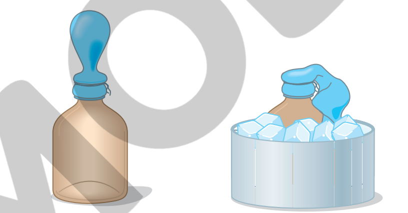
7 Calcule os quocientes a seguir, considerando que as variáveis do divisor sejam diferentes de zero.

a) $(-20a^5) : (+4a^2)$ **7. a)** $-5a^3$
b) $(+3xy^3) : (4y)$ **7. b)** $\frac{3}{4}xy^2$
c) $(-24a^3b^2) : (4ab)$ **7. c)** $-6a^2b$
d) $(-3{,}2a^3b) : (0{,}5a)$ **7. d)** $-6{,}4a^2b$

8 Calcule as potências a seguir.

a) $(-3x^2y^3)^2$ **8. a)** $9x^4y^6$
b) $\left(\frac{6}{3}a^2b^4\right)^3$ **8. b)** $8a^6b^{12}$
c) $\left(-\frac{2}{5}x\right)^2$ **8. c)** $\frac{4}{25}x^2$
d) $(-0{,}4a)^3$ **8. d)** $-0{,}064a^3$

9 Em 1787, o cientista francês Jacques Charles observou que os gases se dilatam quando aquecidos e se contraem quando resfriados.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Figura 1: garrafa em temperatura ambiente
Figura 2: garrafa resfriada em contato com gelo

A fórmula $V = \frac{5}{3} \cdot T + 455$ relaciona a medida do volume V de certo gás (em centímetro cúbico) com a medida de sua temperatura T (em grau Celsius). Calcule a medida do volume desse gás a 21 °C. **9.** 490 cm³

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios amplia as oportunidades de os estudantes retomarem e aplicarem os conceitos desenvolvidos no capítulo.

As resoluções dos **exercícios 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

No **exercício 9**, trabalhe o cálculo da medida do volume do gás em questão para outras medidas de temperatura. Peça aos estudantes, por exemplo, que organizem um quadro no qual registram as medidas do volume V para medidas de temperatura T, em grau Celsius, iguais a 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, ... e pergunte a eles: Quando os valores de T aumentam 3 unidades, que variações experimentam os valores de V? Aumentam ou diminuem? Quanto?

Espera-se que os estudantes percebam que, nesse caso, os valores de V aumentam 5 unidades. Desse modo, de maneira intuitiva, trabalhamos a ideia de função. Neste exercício, ao substituir $T = 21$ °C na equação dada, obtemos:

$$V = \frac{5}{3} \cdot 21 + 455$$

$$V = \frac{105}{3} + 455$$

$$V = 35 + 455$$

$$V = 490$$

Ou seja, para $T = 21$ °C, temos $V = 490$ cm³.

Verificando

No **teste 1**, cada alternativa pode ser relacionada a diferentes expressões algébricas.

a) Sendo a idade da irmã de Bruna igual a x, em anos, a idade de Bruna é $x + 3$.

b) Seja x a quantidade, em quilograma, então o total é dado por $15x + 3$.

c) Seja x a quantidade de canecas de Gabi, então a de Carlos é $15x$.

d) A distância que Otávio percorreu, em km, é dada por $15 \cdot 3$, ou seja, 45 km.

No **teste 2**, devemos considerar a multiplicação de $a + b$ pelo oposto de c, isto é, por $-c$. Assim, temos $(a + b) \cdot (-c)$. Com isso, obtemos o inverso de d, ou seja, $\frac{1}{d}$. Logo:

$$(a + b) \cdot (-c) = \frac{1}{d}$$

No **teste 3**, temos uma fração algébrica cujo denominador é $2x + 8$. Assim, $2x + 8$ não deve assumir valor nulo. Isso acontece quando $2x + 8 = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{8}{2} = -4$. Assim, x não deve assumir o valor -4.

A resolução do **teste 4** é imediata à definição de coeficiente de monômio. Em $-\frac{2ax^2}{5}$, a parte literal é ax^2; portanto, $-\frac{2}{5}$ é o coeficiente.

As resoluções dos **testes 5** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 4.

Organizando

Esta seção pode ser utilizada como uma autoavaliação, em que os estudantes respondem às questões propostas e, depois, comparam com as respostas dos colegas. Proponha a eles que respondam no caderno a cada item e, depois, faça uma roda de conversa de maneira a possibilitar que os estudantes corrijam e complementem as respostas dadas.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A expressão algébrica $15x + 3$ pode representar qual situação a seguir? **1.** Alternativa **b**.

a) A idade de Bruna, que é 3 anos mais velha que sua irmã, que tem 15 anos.
b) O valor da refeição com suco em um restaurante que cobra 15 reais a refeição e 3 reais o suco.
c) Carlos tem 15 canecas, que é o triplo da quantidade de canecas de Gabi.
d) A distância percorrida por Otávio ao dar 3 voltas em uma pista de 15 km.

2 Considere os números reais a, b, c e d. Ao multiplicar a soma de a e b pelo oposto de c, obtém-se o inverso de d. Qual é a expressão algébrica que descreve essa situação? **2.** Alternativa **c**.

a) $(a + b) \cdot \frac{1}{c} = -d$

b) $a + b \cdot \frac{1}{c} = -d$

c) $(a + b) \cdot (-c) = \frac{1}{d}$

d) $a + b \cdot c = \frac{1}{d}$

3 Para qual valor de x a expressão algébrica $\frac{x^2 - 4}{2x + 8}$ não tem valor numérico? **3.** Alternativa **d**.

a) 2
b) -2
c) -8
d) -4

4 Qual é o coeficiente do monômio $-\frac{2ax^2}{5}$? **4.** Alternativa **c**.

a) $-\frac{2a}{5}$ b) -2 c) $-\frac{2}{5}$ d) $\frac{2}{5}$

5 Ao reduzir os termos semelhantes da expressão algébrica a seguir

$$-2x^2 + 8xy - 3y^2 + y^2 + 2x^2 - 5xy + x^2y$$

obtemos: **5.** Alternativa **c**.

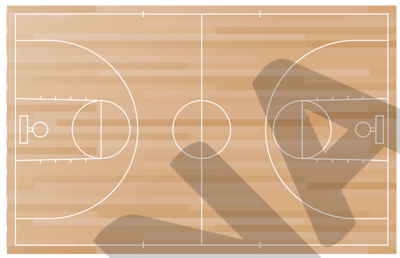
a) $x^2 - 2y^2 + 3xy + x^2y$
b) $2y^2 + 4xy$
c) $-2y^2 + 3xy + x^2y$
d) $2x^2y^2$

6 Identifique a alternativa que contém dois monômios semelhantes. **6.** Alternativa **a**.

a) $\frac{1}{2}a^2b$ e $-2a^2b$
b) $18ab$ e $-18b$
c) $5x^3$ e $5x$
d) $-9m^2n^3$ e $-9m^3n^2$

7 Uma quadra poliesportiva tem as medidas das dimensões indicadas na ilustração, dadas em cm.

$\frac{9}{2}a^2b$



$8b$

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é o monômio que expressa a medida da área dessa quadra, em cm²? **7.** Alternativa **a**.

a) $36a^2b^2$
b) $\frac{8}{2}a^2b$
c) $72ab^2$
d) $36a^2b$

8 Ao elevarmos o monômio $\frac{2}{3}xy^3$ à 5ª potência, o que obtemos como resultado? **8.** Alternativa **b**.

a) $\frac{2}{3}x^5y^{15}$
b) $\frac{32}{243}x^5y^{15}$
c) $\frac{32}{243}x^5y^8$
d) $\frac{10}{3}x^5y^8$

9 Um prisma de base quadrada tem volume de medida igual a $\frac{3}{16}a^2b^4c^7$ cm³ e aresta da base medindo $\frac{1}{2}abc^3$ cm. Qual é a medida da altura do prisma, em centímetro? **9.** Alternativa **c**.

a) $\frac{1}{4}a^2b^2c^2$
b) $\frac{3}{8}a^2b^2c$
c) $\frac{3}{4}b^2c$
d) $\frac{3}{2}b^4c$

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Qual é a diferença entre incógnita e variável?
b) Como você explicaria para um colega o que é um monômio?
c) Quais são as informações que precisamos ter para encontrar o valor numérico de uma expressão algébrica?
d) Na sua opinião, por que é importante estudarmos expressões algébricas?

Organizando:
a) A incógnita é um ou mais valores que é preciso determinar em uma equação; variável é um valor que pode variar dentro das delimitações algébricas e/ou de uma situação.
b) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem que um monômio é uma expressão algébrica que não envolve operações de adição ou subtração, que apresenta uma parte literal, composta de variáveis e seus respectivos expoentes, e um número como coeficiente.
c) Precisamos da expressão algébrica e dos valores das incógnitas ou variáveis.
d) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem que o estudo de expressões algébricas é útil na resolução de problemas e de situações do cotidiano.

DIVERSIFICANDO

Troca de *e-mails*

Leia com atenção a troca de *e-mails* que ocorreu em 2011 entre Fábio e Rita.

De: Fábio [mailto: fabio@exemplo.com.br]

Enviada em: sábado, 31 de dezembro de 2011, 12:01

Para: Rita

Assunto: NOTE QUE ESTRANHO

Rita, você reparou que neste ano de 2011 tivemos 4 datas bem interessantes?

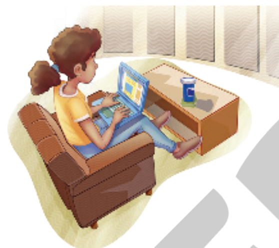
1/1/11, 1/11/11, 11/1/11, 11/11/11

Tente entender isto... separe os dois últimos dígitos do ano em que você nasceu e adicione esse número à idade que você fez neste ano de 2011. O TOTAL SERÁ 111... (para os nascidos no período de 1900 a 1999).

POR EXEMPLO: nasci em 1992 (os dois últimos dígitos formam: 92);

92 mais a minha idade no meu aniversário em 2011: $92 + 19 = 111$.

Agora, tente você, não dá para entender; algum matemático explica isso???



ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

De: Rita [mailto: rita@exemplo.com.br]

Enviada em: sábado, 31 de dezembro de 2011, 12:30

Para: Fábio

Assunto: Re: NOTE QUE ESTRANHO

Olá, Fábio.

Matemática e brincadeira às vezes estão juntas! Mas não noto nada de estranho nisso.

- Sejam x e y dois algarismos; vamos representar por **xy** o número formado pelos dois últimos algarismos do ano de nascimento (para os nascidos no período de 1900 a 1999).
- No ano 2000, a idade de quem nasceu em 19*xy* era **(100 − xy)**, e a idade dessa pessoa em 2011 é **(100 − xy) + 11**, porque de 2000 a 2011 passaram-se 11 anos.
- Adicionamos o número formado pelos dois últimos algarismos do ano de nascimento à idade em 2011, isto é: **xy + (100 − xy) + 11**.
- Como **xy** adicionado a **−xy** resulta em 0, a expressão **xy + (100 − xy) + 11** é igual a **100 + 11**, isto é, **111, qualquer que seja o valor de xy**.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

4. Não. De modo geral, para que o padrão se mantenha, é necessário que a soma dos algarismos do número de dois dígitos que é multiplicado por 11 seja maior que 1 e menor que 10.

Brincando com números, Rita percebeu algumas curiosidades. Tente descobri-las.

1 Calcule: 1. a) 132 e 231. 1. b) 143 e 341. 1. c) 154 e 451. 1. d) 264 e 462.

a) 11×12 e 11×21 b) 11×13 e 11×31 c) 11×14 e 11×41 d) 11×24 e 11×42

2 O que acontece com os produtos obtidos na atividade 1?

2. Cada par de números obtidos em cada um dos itens da atividade **1** tem os mesmos algarismos, mas em ordem invertida.

3 Agora, calcule: 3. a) 385 e 583. 3. b) 396 e 693. 3. c) 407 e 803.

a) 11×35 e 11×53 b) 11×36 e 11×63 c) 11×37 e 11×73

4 A resposta dada na atividade 2 pode ser generalizada?

107

Diversificando

O trabalho com curiosidades numéricas é um campo amplo e farto para aplicações da Álgebra.

Proponha à turma a brincadeira da idade, de modo que ela seja feita considerando as idades dos adultos que vivem com os estudantes. Deixe que eles formulem hipóteses acerca da razão pela qual o "truque" dá certo.

Depois, discuta com os estudantes o procedimento apresentado. Ao representar o ano do nascimento por 19*xy* (nascidos no século XX), verifique se eles realmente compreenderam o significado de *xy*, que, neste caso, não é a multiplicação entre *x* e *y*, mas o número formado pelos dois últimos algarismos do ano do nascimento. Por exemplo, nascidos em 1954, $xy = 54$; nascidos em 1904, $xy = 04 = 4$ etc. Desse modo, a idade no ano 2000 dessas pessoas era:

- 2000 − 19**54** = 46
  2000 − 1900 = 100
  100 − **54** = 46
- 2000 − 19**04** = 96
  2000 − 1900 = 100
  100 − **4** = 96
- 2000 − 19*xy* = ?
  2000 − 1900 = 100
  (100 − *xy*) corresponde à idade no ano 2000 de quem nasceu em 19*xy*

Ressalte que "a idade hoje" se refere à data do *e-mail*, que é 31 de dezembro de 2011, ou seja, 11 anos depois de 2000. Por isso, adicionamos 11 às idades obtidas em 2000:

- 46 + 11 (nascida em 19**54**)
- 96 + 11 (nascida em 19**04**)
- (100 − ***xy***) + 11 (nascida em 19***xy***)

Adicionando o número formado pelos dois últimos algarismos do ano do nascimento da pessoa (nascida no século XX) à expressão da idade obtida em 2011 e efetuando os cálculos, temos:

- (46 + 11) + 54 = 111
- 96 + 11 + 4 = 111
- (100 − ***xy***) + 11 + ***xy*** =
  = 100 − ***xy*** + 11 + ***xy*** =
  = 100 + 11 = 111

A exemplificação numérica amplia o grau de compreensão das expressões algébricas pelos estudantes.

Capítulo 5 – Polinômios e frações algébricas

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, desenvolvemos o conceito de polinômios e frações algébricas. Tratamos também de valor numérico de um polinômio e das operações entre polinômios. É uma ampliação do cálculo algébrico tratado no capítulo 4. Além disso, o capítulo aborda a interpolação e a extrapolação gráfica.

A abertura apresenta como motivação uma grandiosa escadaria na ilha Gaztelugatxe, Espanha, cuja história ficcional remonta ao século XII, com os cavaleiros templários, e ao século XVI, com o corsário Francis Drake. Outro exemplo bastante conhecido é a escadaria da muralha da China. O enfoque é o cálculo algébrico presente na construção de escadas, segundo a legislação vigente.

Sugira aos estudantes que utilizem diferentes meios para realizar a pesquisa proposta no **item a**; por exemplo, após obterem dados gerais e informações ou curiosidades sobre o local, eles podem observar em mapas o continente em que a ilha se situa, o país ao qual pertence, além de analisar o mapa da própria ilha, observando diferentes elementos, como o relevo, vias públicas, trajetos até a ilha etc.

No **item b**, considerando as dimensões indicadas, tem-se que o comprimento de tapete para cobrir um degrau é $(x + y)$; assim, para cobrir 230 degraus é necessário um tapete de comprimento de medida $230 \cdot (x + y)$, em unidade de comprimento.

Capítulo 5 Polinômios e frações algébricas

a) Resposta pessoal.
b) $230 \cdot (x + y)$

Observe, leia e responda no caderno.

a) Pesquise na internet, em livros, atlas etc. a história da ilha Gaztelugatxe, situada na península Ibérica, e da escadaria que lhe dá acesso. Elabore um texto com um resumo dessa pesquisa.

b) Considerando que essa escadaria tenha exatamente 230 degraus cada um com piso medindo x e espelho medindo y, que medida teria o comprimento de um tapete que recobrisse todos esses degraus?

JUANMA APARICIO/ALAMY/FOTOARENA

Escadaria com cerca de 230 degraus em San Juan de Gaztelugatxe, País Basco (Espanha). (Fotografia de 2017.)

Grandiosa, como a da imagem, ou em residências, monumentos, morros e prédios públicos, escadas fixas ou rolantes fazem parte do meio em que vivemos.

Escadas fixas têm piso de medida x (medida da profundidade do degrau) e espelho de medida y (medida da altura do degrau) e são construídas conforme a legislação. O desenho de uma escada segue uma equação polinomial, garantindo o conforto dos usuários ao subir ou descer.

1 Polinômios

Considere estes retângulos e o trapézio.

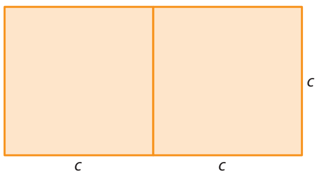


Figura 1

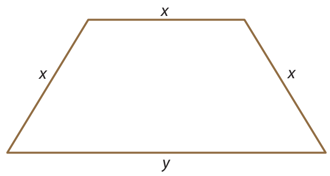


Figura 2

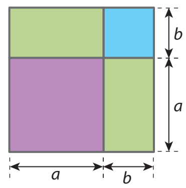


Figura 3

A figura 1 é formada por dois quadrados, e cada quadrado tem lado de medida c e área de medida c^2. A expressão que representa a medida da área dessa figura é $2c^2$.

A figura 2 é um trapézio com um lado de medida y e três lados de medida x. A expressão que representa a medida do perímetro dessa figura é $3x + y$.

A figura 3, por sua vez, é formada por:

- um quadrado com região interna roxa de lado medindo a e área medindo a^2;
- dois retângulos com regiões internas verdes de medida de área ab;
- um quadrado com região interna azul de lado medindo b e área medindo b^2.

Uma expressão que representa a medida da área dessa figura é $a^2 + 2ab + b^2$.

As expressões $2c^2$, $3x + y$ e $a^2 + 2ab + b^2$ são exemplos de **polinômios**.

> **Polinômio** é toda expressão algébrica que representa um monômio ou uma soma algébrica de monômios.

Observações

- Os polinômios de um só termo são chamados **monômios**, os de dois termos, **binômios**, e os de três termos, **trinômios**. Os polinômios com mais de três termos não recebem denominação específica.
- O polinômio formado por monômios nulos é o **polinômio nulo**. Exemplo: $0x^2 + 0mn + 0$.
- O termo do polinômio que não apresenta variável (letra) é chamado de **termo independente**.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

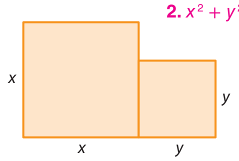
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Classifique como monômio, binômio ou trinômio as expressões algébricas a seguir.

a) $2x^2 - 3x$ **1. a)** Binômio.
b) $5a^2 - 3a + 7$ **1. b)** Trinômio.
c) x **1. c)** Monômio.
d) $7x - 5y$ **1. d)** Binômio.
e) -5 **1. e)** Monômio.
f) $a^5 - 3$ **1. f)** Binômio.
g) $x^3 - y^3$ **1. g)** Binômio.
h) $x^2 - 2xy + y^2$ **1. h)** Trinômio.

2 Determine o polinômio que corresponde à medida da área da figura a seguir, formada por dois quadrados. Em seguida, calcule a medida da área para $x = 4{,}5$ cm e $y = 2{,}5$ cm.

2. $x^2 + y^2$; 26,5 cm²



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

1. Polinômios

Habilidades da BNCC: **EF08MA06** e **EF08MA19**.

Neste tópico, ao retomar a ideia de medida de área de figuras poligonais e resolver e elaborar problemas que possam ser representados por expressões algébricas, além de efetuar o cálculo numérico dessas expressões, os estudantes desenvolvem as habilidades (EF08MA06) e (EF08MA19).

Conceituamos polinômios utilizando como recurso de contexto o cálculo de medidas de área e de perímetro de figuras poligonais.

Reproduza as figuras apresentadas no início da página e explore seus elementos. Ressalte o que um monômio e um polinômio têm de diferente, de modo que os estudantes compreendam que nem todo polinômio é um monômio, mas todo monômio é um polinômio de um único termo.

Exercícios propostos

No **exercício 1**, os polinômios são apresentados com os termos semelhantes reduzidos, pois esse conceito ainda não foi tratado. Logo, espera-se que os estudantes classifiquem os polinômios por meio dos significados dos prefixos *mono*, *bi* e *tri*.

Comente com eles que a figura do **exercício 2** é uma composição de dois quadrados justapostos e que, portanto, a medida da área da figura é dada pela adição das medidas das áreas das partes.

A medida da área do quadrado maior é x^2.

A medida da área do quadrado menor é y^2.

A medida da área da figura é $x^2 + y^2$.

Para $x = 4{,}5$ cm e $y = 2{,}5$ cm, obtemos:

$x^2 + y^2 = (4{,}5)^2 + (2{,}5)^2 = 26{,}5$

Logo, a área mede 26,5 cm².

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 3**, **4** e **6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Para a resolução do **exercício 5**, os estudantes devem atentar para o fato de que motocicletas têm duas rodas, e carros, quatro rodas. Assim, o número de veículos é representado por $x + y$ (**item a**) e o número de rodas, por $2x + 4y$ (**item b**).

Por fim, se cada moto paga diária de R$ 12,00 e cada carro R$ 18,00, aplicando o conceito de proporcionalidade, x motos pagam $12x$ reais e y carros pagam $18y$ reais, o que nos leva ao binômio $12x + 18y$ (**item c**).

Aproveite a situação do **exercício 6** para propor aos estudantes uma pesquisa sobre a construção de escadas.

Na resolução desse exercício, ressalte que para aplicar a fórmula de Blondel é necessário ter as medidas do espelho (E) e do piso (P).

Caso o prédio da escola tenha escadas fixas, acompanhe os estudantes até uma dessas escadas. Munidos de trena, eles devem determinar a medida do espelho (que deve ser a mesma em todos os degraus) e a medida do piso (que deve ser a mesma em todos os degraus). E, se possível, medir a altura e o comprimento total da escada para confrontar com o resultado da multiplicação do número de degraus pelas medidas do espelho e do piso, respectivamente. Lembre os estudantes de que devem medir os patamares também, se eles existirem, e considerar suas medidas. Peça a eles que respondam oralmente à questão “Que problemas pode apresentar uma escada em que a medida da altura dos degraus não é uniforme? E se a medida do piso não for uniforme?”. Espera-se que eles concluam que, nesse caso, a segurança da escada estaria comprometida, e transitar por ela poderia ocasionar acidentes e quedas.

Finalmente, os estudantes devem verificar se a escada está de acordo com a fórmula de Blondel.

3 Cláudia é dona de uma papelaria. Ela compra um caderno por x reais e o revende por y reais.

ENDERMASALI/SHUTTERSTOCK

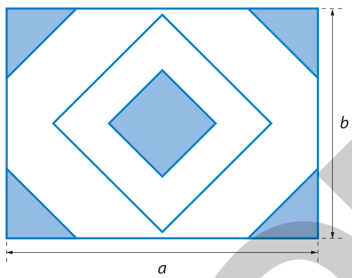
3. a) $y - x$; $z(y - x)$

a) Qual é a expressão algébrica que representa o lucro de Cláudia por caderno vendido? E por z cadernos vendidos?

b) Qual foi o lucro de Cláudia na venda de 24 cadernos, comprados por R$ 3,20 e vendidos por R$ 8,70 cada um? **3. b)** R$ 132,00

4 O piso da cozinha da casa de Ana é revestido por ladrilhos retangulares, como o ladrilho da figura, em que a e b são dados em metro.

ADILSON SECCO/ARQUIVO DA EDITORA



a) Represente com um monômio a medida da área do ladrilho, em metro quadrado. **4. a)** ab

4. b) $120ab$

b) Indique a medida da área do piso da cozinha, em metro quadrado, sabendo que foram necessários 120 desses ladrilhos para forrá-lo.

c) Calcule a medida da área, em metro quadrado, da cozinha de Ana, sabendo que cada ladrilho mede 15 cm por 20 cm. **4. c)** 3,6 m²

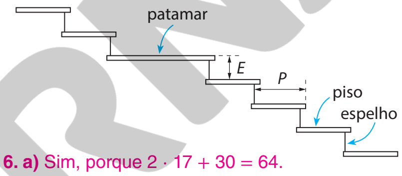
5 Em um estacionamento estão x motos e y carros. Encontre o binômio que representa:

a) o número de veículos; **5. a)** $x + y$

b) o número de rodas; **5. b)** $2x + 4y$

c) o valor arrecadado, sabendo que cada moto paga R$ 12,00 pela diária e cada carro paga R$ 18,00. **5. c)** $12x + 18y$

6 Em arquitetura, os projetos de escadas fixas usam a chamada fórmula de Blondel: $2E + P \simeq 64$, na qual E é a medida do espelho e P é a medida do piso. A escada da casa de Carlos tem 14 degraus com pisos de 30 cm e espelhos de 17 cm, mais um patamar de 65 cm.



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

6. a) Sim, porque $2 \cdot 17 + 30 = 64$.

a) Essa escada está de acordo com a fórmula de Blondel? Por quê?

b) Qual é o monômio que representa o cálculo da medida da altura dessa escada? Qual é a medida da altura dela? **6. b)** $15E$; 2,55 m

c) Qual é o polinômio que representa o cálculo da medida do comprimento horizontal lateral dessa escada? Qual é a medida do comprimento horizontal lateral dela?

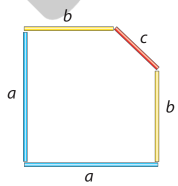
6. c) $14P + 65$; 4,85 m

2 Operações com polinômios

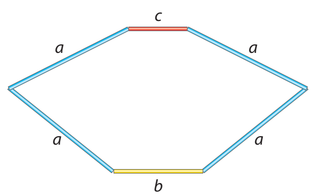
Adição de polinômios

Para representar estes dois polígonos foram usados ao todo 6 canudinhos de medida a, 3 canudinhos de medida b e 2 canudinhos de medida c, todas dadas em centímetro.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



Polígono 1



Polígono 2

2. Operações com polinômios

■ Habilidades da BNCC: **EF08MA06** e **EF08MA19**.

Com exemplos numéricos, recorde brevemente com a turma as quatro operações fundamentais com números racionais.

Neste tópico, ao retomar a ideia de medida de área de figuras poligonais e resolver e elaborar problemas que possam ser representados por expressões algébricas, além de efetuar o cálculo numérico dessas expressões, aprofundamos o trabalho com as habilidades (EF08MA06) e (EF08MA19).

Em centímetro, a medida do perímetro do polígono 1 é representada pelo polinômio $2a + 2b + c$ e a medida do perímetro do polígono 2 é representada pelo polinômio $4a + b + c$, ambos os polígonos nas variáveis a, b e c.

Na construção dos dois polígonos, empregamos os 6 canudinhos de medida a, os 3 canudinhos de medida b e os 2 canudinhos de medida c, ou seja, construímos linhas cuja soma das medidas dos comprimentos é dada, em centímetro, por:

$$6a + 3b + 2c$$

O polinômio $6a + 3b + 2c$ é a soma dos polinômios $2a + 2b + c$ e $4a + b + c$.

Esse resultado poderia ter sido obtido da seguinte maneira:

$(2a + 2b + c) + (4a + b + c) =$

$= 2a + 2b + c + 4a + b + c =$ ← Eliminamos os parênteses.

$= 2a + 4a + 2b + b + c + c =$ ← Agrupamos os termos semelhantes.

$= 6a + 3b + 2c$ ← Reduzimos os termos semelhantes.

Acompanhe outros exemplos.

a) Vamos calcular $(4x^2 - 7x + 2) + (3x^2 + 3)$.

$(4x^2 - 7x + 2) + (3x^2 + 3) =$

$= 4x^2 - 7x + 2 + 3x^2 + 3 =$ ← Eliminamos os parênteses.

$= 4x^2 + 3x^2 - 7x + 2 + 3 =$ ← Agrupamos os termos semelhantes.

$= 7x^2 - 7x + 5$ ← Reduzimos os termos semelhantes.

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

b) Dados os polinômios $A = 0{,}2x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{2}$ e $B = \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 0{,}4$, vamos calcular $A + B$.

$$\left(\frac{2}{10}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{10}\right) =$$

$$= \frac{2}{10}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 2x - \frac{1}{2} + \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{10} =$$

$$= \underbrace{\frac{2}{10}x^3 + \frac{3}{5}x^3}\underbrace{- \frac{5}{3}x^2 + \frac{1}{2}x^2}\underbrace{+ 2x}\underbrace{- \frac{1}{2} - \frac{4}{10}} =$$

$$= \frac{2x^3 + 6x^3}{10} + \frac{-10x^2 + 3x^2}{6} + 2x + \frac{-5 - 4}{10} =$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{\underset{5}{\cancel{10}}}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 2x - \frac{9}{10} = \frac{4}{5}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 2x - \frac{9}{10}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

7 Calcule:

a) $(2x + y + 3) + (-5x + y - 1)$ **7. a)** $-3x + 2y + 2$

b) $\left(\frac{7a}{5} - 2ab + \frac{b^2}{3}\right) + \left(4ab - \frac{b^2}{3}\right)$ **7. b)** $\frac{7a}{5} + 2ab$

c) $(3ab - 6a^2) + (a^2 - 4ab + 2b^2) + (5a^2 - 3b^2)$ **7. c)** $-ab - b^2$

d) $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2x^2}{3} - \frac{1}{4}\right)$ **7. d)** $x^2 + \frac{2x}{5} - \frac{1}{2}$

8 Dados os polinômios $A = x^2 - 3x + 5$, $B = x^2 + 2x - 4$ e $C = x^2 + 5x - 1$, calcule:

a) $A + B$ **8. a)** $2x^2 - x + 1$

b) $A + B + C$ **8. b)** $3x^2 + 4x$

c) $A + C$ **8. c)** $2x^2 + 2x + 4$

d) $B + C$ **8. d)** $2x^2 + 7x - 5$

Adição de polinômios

Para introduzir a adição de polinômios, utilizamos um contexto envolvendo medidas de perímetro de polígonos. Se julgar necessário, retome a adição com números racionais e relembre que a adição de monômios é efetuada apenas entre termos semelhantes, ou seja, termos que têm a mesma parte literal.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 7** e **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 8**, oriente os estudantes a primeiro efetuar o cálculo mentalmente, com base na adição de números inteiros.

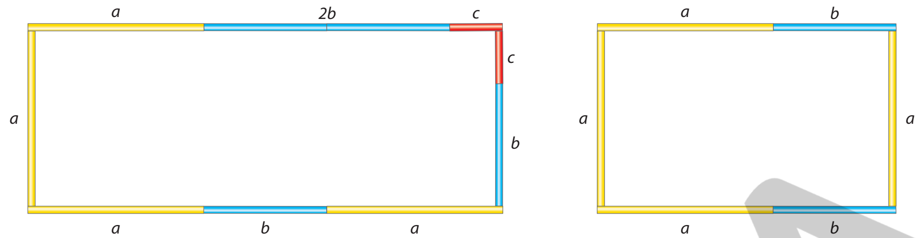
Subtração de polinômios

A comparação da quantidade de canudinhos utilizada na construção de dois polígonos e a utilização das medidas de seus perímetros possibilitam aos estudantes atribuir significado à subtração de polinômios.

Comente com eles que a adição e a subtração de polinômios podem ser tratadas como a adição algébrica entre eles, como ocorre no cálculo com números racionais. Essa analogia remete ao entendimento das ordens e classes numéricas dos números racionais na forma decimal. Isso confere aos estudantes maior autonomia e confiança no trato com essa operação.

Subtração de polinômios

Nas figuras a seguir, o polígono 1 foi representado com 4 canudinhos de medida a, 4 canudinhos de medida b e 2 canudinhos de medida c, e o polígono 2 foi representado com 4 canudinhos de medida a e 2 canudinhos de medida b, todas as medidas dadas em centímetro.



Polígono 1

Polígono 2

O polinômio que representa, em centímetro, a medida do perímetro do polígono 1 é $4a + 4b + 2c$, e o polinômio que representa a medida do perímetro do polígono 2 é $4a + 2b$.

Na construção do polígono 1, empregamos 2 canudinhos de medida b e 2 canudinhos de medida c a mais que no polígono 2, ou seja, construímos linhas cuja diferença das medidas de comprimento, em centímetro, é dada por:

$$2b + 2c$$

O polinômio $2b + 2c$ é a diferença entre os polinômios $4a + 4b + 2c$ e $4a + 2b$.

Esse resultado poderia ter sido obtido da seguinte maneira:

$(4a + 4b + 2c) - (4a + 2b) =$

$= 4a + 4b + 2c - 4a - 2b =$ Eliminamos os parênteses.

$= \cancel{4a} - \cancel{4a} + 4b - 2b + 2c =$ Agrupamos e reduzimos os termos semelhantes.

$= 2b + 2c$

Acompanhe outros exemplos.

a) $2x - (4y - 3x) + (5x - y) =$

$= 2x - 4y + 3x + 5x - y =$ Eliminamos os parênteses.

$= 10x - 5y$ Reduzimos os termos semelhantes.

b) $3a^2 - [2a - 1 - (2a^2 - 5a + 3)] - 6 =$

$= 3a^2 - [2a - 1 - 2a^2 + 5a - 3] - 6 =$ Eliminamos os parênteses.

$= 3a^2 - 2a + 1 + 2a^2 - 5a + 3 - 6 =$ Eliminamos os colchetes.

$= 5a^2 - 7a - 2$ Reduzimos os termos semelhantes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

9. a) $3x^2 - 7x + 7$ 9. b) $-3x^2 + 7x - 7$

9 Dados os polinômios $A = 5x^2 - 3x + 4$, $B = 2x^2 + 4x - 3$ e $C = x^2 - 3x$, calcule:

a) $A - B$
b) $B - A$
c) $A + C - B$
d) $A - C + B$

9. c) $4x^2 - 10x + 7$ 9. d) $6x^2 + 4x + 1$

10 Qual polinômio devemos adicionar ao polinômio $2x + y + 3$ para obter o polinômio $-3x + 2y + 2$? **10.** $-5x + y - 1$

11 Qual polinômio devemos subtrair do polinômio $2x^3 - 3x^2 + x - 4$ para obter o polinômio $-3x^3 - 5x^2 + 4x + 1$? **11.** $5x^3 + 2x^2 - 3x - 5$

12. a) $13x^2 - 7x - 8$ 12. b) $10a - 8b - 9$

12 Reduza os termos semelhantes.

a) $10x^2 - (5x + 6) - [2x - (3x^2 - 2)]$

b) $5a - [3b + 7 - (4a - 5b) + (2 - a)]$

c) $x^2 + \left(\frac{1}{2}x - 2\right) - \left(-\frac{1}{2} + x + \frac{1}{3}x^2\right)$

12. c) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

13 Ângela tinha um cofre com 18 moedas de x centavos, 30 moedas de y centavos e 40 moedas de z centavos. Durante o mês, depositou 8 moedas de x centavos e 10 moedas de y centavos. No mês seguinte, retirou 12 moedas de y centavos e 8 moedas de z centavos.

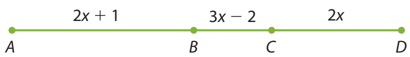
Determine o polinômio que representa o total de centavos no cofre:

ANDRÉ VAZZIOS/ ARQUIVO DA EDITORA

a) no início das operações; **13. a)** $18x + 30y + 40z$
b) no final do mês anterior;
c) no mês seguinte.

13. b) $26x + 40y + 40z$ 13. c) $26x + 28y + 32z$

14 Observe a figura a seguir.

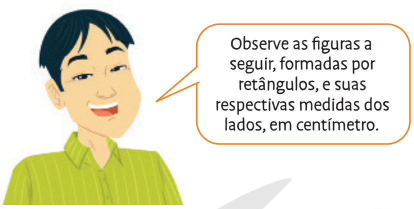


NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

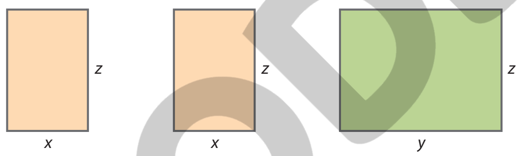
Com base na figura, determine:
a) a medida do segmento $\overline{AC}$; **14. a)** $5x - 1$
b) a medida do segmento $\overline{BD}$; **14. b)** $5x - 2$
c) a medida do segmento $\overline{AD}$. **14. c)** $7x - 1$

15 ***Hora de criar*** – Elabore, e passe para um colega, um problema sobre adição ou subtração de polinômios que envolva as medidas de perímetro de dois polígonos regulares. Depois de cada um resolver o problema do outro, destroquem para corrigi-los.
15. Resposta pessoal.

Multiplicação de polinômio por monômio



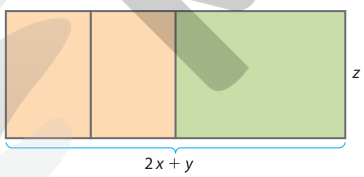
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



A adição das medidas das áreas dessas figuras resulta, em cm^2, na soma:

$$xz + xz + yz = 2xz + yz$$

Agrupando as três figuras, formamos um retângulo maior.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 9** a **12** e dos **exercícios 14** e **15** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 13**, espera-se que os estudantes compreendam que, ao tomar 18 moedas de x centavos, obtemos $18x$ centavos. Do mesmo modo, obteríamos $30y$ centavos e $40z$ centavos; e assim para todos os demais casos. Para efetuar os cálculos, eles devem estar atentos às ações indicadas (*tinha*, *depositou*, *retirou*).

Para o **item a**, que representa a situação inicial, estão envolvidas as representações das quantias que Ângela tinha: $18x$ centavos, $30y$ centavos e $40z$ centavos. Assim, ao todo ela tinha $(18x + 30y + 40z)$ centavos.

Para o **item b**, os estudantes devem determinar a quantia total depositada e acrescentar ao que Ângela já tinha. Assim, obtemos como a representação do total depositado $(8x + 10y)$ centavos, que, acrescentados a $(18x + 30y + 40z)$ centavos que Ângela já tinha, nos fornecem a seguinte quantia:

$(18x + 30y + 40z) + (8x + 10y) =$
$= 18x + 30y + 40z + 8x + 10y =$
$= 26x + 40y + 40z$

Ou seja, ao final do mês anterior, Ângela ficou com $(26x + 40y + 40z)$ centavos.

Finalmente, para o **item c**, da quantia obtida no **item b** devemos subtrair a quantia retirada no mês seguinte.

$(26x + 40y + 40z) - (12y + 8z) =$
$= 26x + 40y + 40z - 12y + 8z =$
$= 26x + 28y + 32z$

Assim, no mês seguinte, Ângela ficou com $(26x + 28y + 32z)$ centavos no cofre.

Multiplicação de polinômio por monômio

A multiplicação de polinômio por um monômio, assim como a multiplicação entre polinômios, tem por base a propriedade distributiva da multiplicação. Se julgar necessário, desenvolva algumas atividades envolvendo essa propriedade com multiplicações de números racionais.

Reproduza na lousa as figuras apresentadas na situação que inicia esse tópico e trabalhe as medidas das áreas dos três retângulos e a do quarto, que foi obtido com a justaposição dos primeiros três retângulos. Essa situação possibilita aos estudantes atribuírem significado à multiplicação de polinômio por um monômio.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 16** e **17** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 18**, os estudantes devem estabelecer inicialmente uma estratégia de cálculo da medida da área da região não coberta pelo tapete quadrado. Espera-se que eles percebam que a medida da área procurada (**item a**) é obtida pela medida da área da sala retangular, cujas dimensões são a por $(b + 8)$, subtraída da medida da área do tapete quadrado (de lado b).

medida da área procurada =
$= a \cdot (b + 8) - b^2 =$
$= ab + 8a - b^2$

O **item b** trabalha o valor numérico de uma expressão algébrica, ou seja, quando $a = 4$ m e $b = 2{,}1$ m, a medida da área da região da sala não coberta pelo tapete é:

medida da área procurada =
$= ab + 8a - b^2 =$
$= 4 \cdot 2{,}1 + 8 \cdot 4 - (2{,}1)^2$

medida da área procurada =
$= 8{,}4 + 32 - 4{,}41 = 35{,}99$

Logo, a área procurada nesse caso mede 35,99 m².

Em centímetro, a base desse retângulo mede $2x + y$, e a altura mede z. Portanto, a medida da área desse retângulo é $(2x + y) \cdot z$, em cm². No entanto, a medida dessa área é igual à soma das medidas das áreas dos três retângulos que formaram o retângulo maior. Logo:

$$(2x + y) \cdot z = 2xz + yz$$

Observe que a expressão $2xz + yz$ também resulta da aplicação da propriedade distributiva em $(2x + y) \cdot z$:

$$(2x + y) \cdot z = 2xz + yz$$

Acompanhe outros exemplos.

a) $3x \cdot (5x - 4y) = (3x) \cdot (5x) - (3x) \cdot (4y) = 15x^2 - 12xy$

b) $-3a \cdot (2a - 4) = (-3a) \cdot (2a) - (-3a) \cdot (4) = -6a^2 + 12a$

c) $2xy \cdot (3x^2 - 5xy + y^2) = 6x^3y - 10x^2y^2 + 2xy^3$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

16 Calcule:

a) $7x \cdot (2x - 5)$ **16. a)** $14x^2 - 35x$

b) $(3a^2 - 2a - 1) \cdot 5a$ **16. b)** $15a^3 - 10a^2 - 5a$

c) $-3x \cdot (4x^2 - 3x + 1)$ **16. c)** $-12x^3 + 9x^2 - 3x$

d) $\frac{2}{5}a \cdot \left(a - \frac{1}{4}\right)$ **16. d)** $\frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{10}a$

e) $(0{,}3x^2 - 1{,}4x) \cdot (-0{,}2x^3)$ **16. e)** $-0{,}06x^5 + 0{,}28x^4$

f) $\left(\frac{1}{3}y^2 + \frac{4}{7}y^3\right) \cdot (-3y)$ **16. f)** $-y^3 - \frac{12}{7}y^4$

17 Observe as figuras 1 e 2.

a) Qual é o binômio que expressa a soma da medidas das áreas das duas figuras? **17. a)** $6x^2 + x$

b) Qual é o valor numérico do binômio obtido no item **a**, se $x = 5$? **17. b)** 155

c) Qual é o valor numérico de x, se a área do quadrado da figura 2 mede 100? **17. c)** $x = 5$

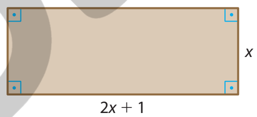


Figura 1

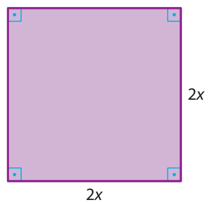
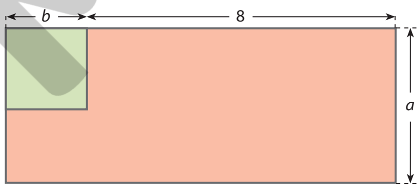


Figura 2

18 Em uma sala retangular, foi colocado um tapete quadrado, como mostra a figura a seguir, cujas medidas são dadas em centímetro.



Faça o que se pede.

a) Que expressão algébrica representa, em cm², a medida da área da sala não coberta pelo tapete? **18. a)** $8a + ab - b^2$

b) Se $a = 4$ e $b = 2{,}1$, calcule a medida da área da sala que ficou descoberta. **18. b)** 35,99 m²

Multiplicação de polinômio por polinômio

SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

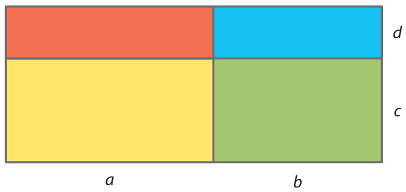


Figura 1

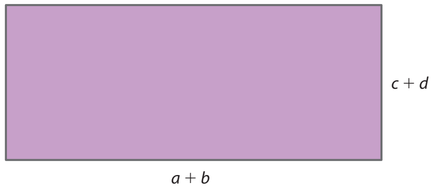


Figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

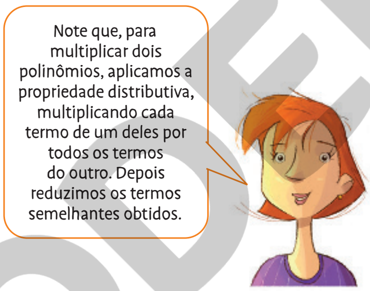
Podemos determinar a medida da área da figura 1, em cm^2, calculando separadamente a medida da área de cada retângulo de que ela é formada e adicionando os resultados obtidos: $ac + ad + bc + bd$.

A medida da área da figura 2, em cm^2, é dada por: $(a + b) \cdot (c + d)$.

Como as duas figuras (1 e 2) são determinadas por dois retângulos de mesmas dimensões, elas têm áreas de mesma medida. Logo:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd$$



SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe outros exemplos.

a) $(7x^2 - 2x + 1) \cdot (x - 2) = 7x^3 - 14x^2 - 2x^2 + 4x + x - 2 = 7x^3 - 16x^2 + 5x - 2$

b) $(2x - 1) \cdot (3x + 2) \cdot (-x - 1) =$

$= (6x^2 + 4x - 3x - 2) \cdot (-x - 1) =$ ← Multiplicamos os dois primeiros polinômios aplicando a propriedade distributiva.

$= (6x^2 + x - 2) \cdot (-x - 1) =$ ← Reduzimos os termos semelhantes.

$= -6x^3 - 6x^2 - x^2 - x + 2x + 2 =$ ← Multiplicamos o produto pelo terceiro polinômio aplicando a propriedade distributiva.

$= -6x^3 - 7x^2 + x + 2$ ← Reduzimos os termos semelhantes.

Multiplicação de polinômio por polinômio

Uma atividade a ser feita, antes de desenvolver o conteúdo deste tópico, é solicitar a um grupo de estudantes que trace ao acaso, de ponta a ponta da lousa, uma linha horizontal e uma linha vertical. A outro grupo, solicite que meça com uma trena e registre as alturas e larguras dos quatro retângulos delimitados pelo contorno da lousa e pelas duas linhas representadas, como na figura 1, e, também, da própria lousa. A seguir, outro grupo deve escrever o cálculo das medidas das áreas de cada retângulo e da área da lousa.

Finalizando a atividade, peça aos estudantes que comparem a medida da área da lousa com a soma das medidas das áreas dos quatro retângulos. Caso o formato da lousa não seja retangular, a atividade pode ser feita considerando outra superfície com esse formato ou, ainda, representando um retângulo na lousa.

Explore as figuras que possibilitam aos estudantes atribuir significado à multiplicação de dois polinômios.

- medida da área do retângulo vermelho $= ad$
- medida da área do retângulo amarelo $= ac$
- medida da área do retângulo azul $= bd$
- medida da área do retângulo verde $= bc$

Como o retângulo maior da figura 1 tem as mesmas dimensões do retângulo da figura 2, podemos concluir que a medida da área da figura 2 é igual à medida da área da figura 1.

$(a + b) \cdot (c + d) =$
$= ac + ad + bc + bd$

Comente com os estudantes que esse resultado é o mesmo quando aplicamos a propriedade distributiva ao produto indicado.

Antes de apresentar a resolução dos exemplos desta página, proponha que resolvam cada um deles.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 19**, **21** e **22** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 20**, a medida da área do retângulo é dada por $(2x + 1) \cdot (x + 1)$. Efetuando a multiplicação desses dois polinômios, obtemos a expressão da medida da área do retângulo.

$(2x + 1) \cdot (x + 1) =$
$= 2x^2 + 2x + x + 1 =$
$= 2x^2 + 3x + 1$

Portanto, $2x^2 + 3x + 1$ é o trinômio que representa a medida da área do retângulo (**item a**).

No **item b**, calculamos o valor numérico desse trinômio para $x = 0{,}4$, que indica a medida da área do retângulo.

$2x^2 + 3x + 1 =$
$= 2 \cdot (0{,}4)^2 + 3 \cdot 0{,}4 + 1 =$
$= 2 \cdot 0{,}16 + 1{,}2 + 1 =$
$= 0{,}32 + 1{,}2 + 1 = 2{,}52$

Acompanhe a resolução do **exercício 23** verificando e auxiliando os estudantes em eventuais dúvidas tanto na criação de polinômios quanto na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação.

Divisão de polinômio por monômio

Verifique se a proposta de atividade, que envolve a relação intrínseca entre as operações multiplicação e divisão, apresentada pelo personagem, foi compreendida. Caso contrário, proponha outras duplas de números para que os estudantes respondam oralmente.

Ainda neste tópico, introduzimos a divisão de polinômio por monômio (não nulo), dividindo cada termo do polinômio pelo monômio dado.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

19 Calcule: **19. c)** $10x^3 - 19x^2 - 24x + 12$

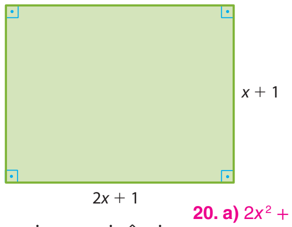
a) $(5x - 1) \cdot (5x + 1)$ **19. a)** $25x^2 - 1$

b) $(a + b) \cdot (a + b)$ **19. b)** $a^2 + 2ab + b^2$

c) $(2x^2 - 3x - 6) \cdot (5x - 2)$

d) $\left(2a + \frac{3}{5}b\right) \cdot \left(a - \frac{1}{2}b\right)$ **19. d)** $2a^2 - \frac{2}{5}ab - \frac{3}{10}b^2$

20 Observe o retângulo.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

20. a) $2x^2 + 3x + 1$

a) Determine o trinômio que representa a medida da área do retângulo.

b) Calcule o valor numérico desse trinômio para $x = 0{,}4$. **20. b)** 2,52

21 Dados $A = x^2 + 3x - 2$, $B = x + 2$ e $C = x - 3$, calcule: **21. b)** $2x - 1$; $2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$

a) $A \cdot B$; $A \cdot C$ e $A \cdot B + A \cdot C$

b) $B + C$ e $A \cdot (B + C)$

21. a) $x^3 + 5x^2 + 4x - 4$; $x^3 - 11x + 6$; $2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$

22 Calcule os produtos a seguir.

a) $3x \cdot (2x - 3) \cdot (x + 2)$ **22. a)** $6x^3 + 3x^2 - 18x$

b) $-2x \cdot (x + 5) \cdot (2x - 5)$ **22. b)** $-4x^3 - 10x^2 + 50x$

c) $(a - 2b) \cdot (a + 2b) \cdot (a - b)$

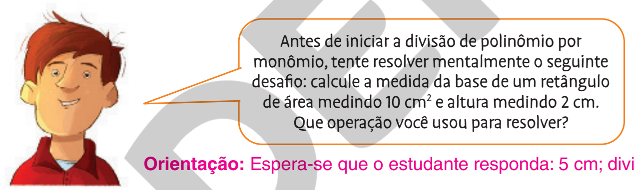
d) $(a - b) \cdot (a + b) \cdot (3a - b)$

e) $\frac{x}{2}\left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(2x - \frac{1}{2}\right)$ **22. e)** $x^3 + \frac{x^2}{12} - \frac{x}{12}$

22. c) $a^3 - a^2b - 4ab^2 + 4b^3$ **22. d)** $3a^3 - 3ab^2 - a^2b + b^3$

23 ***Hora de criar*** – Elabore um problema que envolva a medida da área de um quadrado e a medida x de seu lado, que deve ser um número natural. Troque o problema com o de um colega. Depois de cada um resolver o problema do outro, destroquem para corrigi-los. **23.** Resposta pessoal.

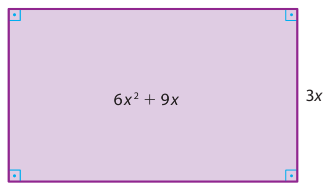
Divisão de polinômio por monômio



SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Orientação: Espera-se que o estudante responda: 5 cm; divisão (10 : 2).

A medida da área do retângulo a seguir é dada em cm² e representada pelo polinômio $6x^2 + 9x$, e a medida da altura é dada em cm e representada pelo monômio $3x$, com $x \neq 0$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Vamos determinar o polinômio que representa a medida da base do retângulo.

Para isso, devemos dividir o polinômio $6x^2 + 9x$ pelo monômio $3x$, ou seja, encontrar o polinômio que, multiplicado por $3x$, resulta em $6x^2 + 9x$.

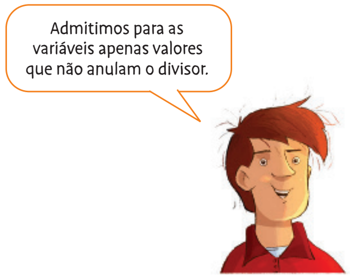
Esse polinômio é $2x + 3$, pois $3x \cdot (2x + 3) = 6x^2 + 9x$. Observe que o polinômio $2x + 3$ pode ser obtido dividindo-se cada um dos termos de $6x^2 + 9x$ por $3x$:

$$(6x^2 + 9x) : (3x) = 2x + 3$$

Acompanhe outros exemplos.

a) $(18x^3 - 12x^2 + 3x) : (-3x) = -6x^2 + 4x - 1$

b) $(7x^3y^2 - 5x^2y^4) : (-3x^2y) = -\frac{7}{3}xy + \frac{5}{3}y^3$



SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

24 Calcule os quocientes a seguir.

a) $(8x^5 + 6x^3) : (+2x^2)$ **24. a)** $4x^3 + 3x$

b) $(12ab + 15a^2b + 9ab^2) : (3ab)$ **24. b)** $4 + 5a + 3b$

c) $(20x - 10x^2) : (-5x)$ **24. c)** $-4 + 2x$

d) $(a^3 + a^2 + a) : (a)$ **24. d)** $a^2 + a + 1$

e) $(x^5 + x^2) : (-x^2)$ **24. e)** $-x^3 - 1$

f) $(7x^2 - 8x + 5) : (-1)$ **24. f)** $-7x^2 + 8x - 5$

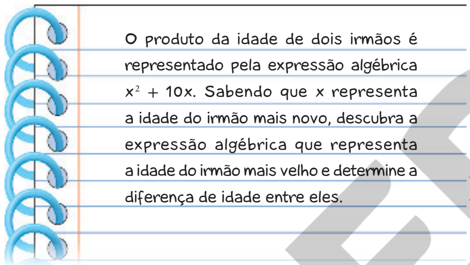
25 Determine o polinômio que, multiplicado por $-7x$, resulta em $21x^3 - 28x^2 + 14x$. **25.** $-3x^2 + 4x - 2$

26 Multiplicando-se o monômio $-4xy$ pelo polinômio A, encontra-se o polinômio $-8xy + 9x^2y - 6xy^2$.
Determine o polinômio A. **26.** $2 - 2{,}25x + 1{,}5y$

27 Qual é o quociente de $\left(\frac{7}{3}x^2 - \frac{1}{4}x\right)$ por $\left(-\frac{1}{2}x\right)$? **27.** $-\frac{14}{3}x + \frac{1}{2}$

28 Calcule o valor da expressão:
$[(25x^2 - 15x) : (-5x)] \cdot (5x + 3)$ **28.** $-25x^2 + 9$

29 Caio gosta de elaborar desafios matemáticos. Leia o desafio que ele propôs ao amigo Tiago.



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Supondo que Tiago esteja raciocinando corretamente, qual é a resposta que ele dará a Caio?
29. $x + 10$; 10 anos é a diferença de idade entre eles.

Polinômios com uma só variável

Observe estes polinômios:

- $x^2 - 8x + 12$

  Ele apresenta somente a variável x, cujo maior expoente é 2; dizemos que é um polinômio do 2º grau na variável x, ou que tem grau 2.

- $2y^4 - 3y^2 + 5y - 6$

  Ele apresenta somente a variável y, cujo maior expoente é 4; dizemos que é um polinômio do 4º grau na variável y, ou que tem grau 4.

- $z^3 - 1$

  Ele apresenta somente a variável z, cujo maior expoente é 3; dizemos que é um polinômio do 3º grau na variável z, ou que tem grau 3.

Polinômios desse tipo são chamados de **polinômios com uma variável**.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 24** a **28** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Note que o **exercício 26** pressupõe a aplicação da relação entre a multiplicação e divisão como operações inversas.

No **exercício 29**, o produto entre os dois fatores que representam as idades dos irmãos é dado pelo binômio $x^2 + 10x$. Se um dos fatores é x (idade do irmão mais novo), temos que a idade do irmão mais velho é dada por:

idade do mais velho =
$= (x^2 + 10x) : x$

idade do mais velho =
$= x^2 : x + 10x : x$

idade do mais velho =
$= x + 10$

Desse modo, espera-se que os estudantes percebam que a diferença entre as idades é 10 anos (ou seja, quantos anos o irmão mais velho tem a mais do que o irmão mais novo). Eles também podem calcular essa diferença.

diferença entre as idades =
$= (x + 10) - x$

diferença entre as idades =
$= x + 10 - x = 10$

Logo, a resposta de Tiago deve ser: a expressão algébrica que representa a idade do irmão mais velho é $x + 10$, e a diferença entre as idades é 10 anos.

Polinômios com uma só variável

Destaque as ideias tratadas no boxe **Observação** e proponha aos estudantes que façam uma lista de polinômios incompletos e troquem com um colega. Cada um escreve a forma geral de cada polinômio criado pelo colega. Faça uma correção coletiva, socializando o trabalho de cada dupla.

Exercícios propostos

Para a resolução do **exercício 30**, os estudantes devem ordenar os polinômios dados de acordo com os expoentes decrescentes.

Completando os polinômios dados no **exercício 31** com os termos nulos dos expoentes faltantes, obtemos:

a) $x^3 + 2x^2 + 0x - 5$
b) $x^3 + 0x^2 + 0x + 1$
c) $y^4 + 0y^3 - 8y^2 + 0y + 15$
d) $z^4 + 0z^3 + 0z^2 + 0z - 16$
e) $m^4 + 0m^3 - m^2 + 0m + 0$

Divisão de polinômio por polinômio

Neste tópico, introduzimos divisão de dois polinômios fazendo um paralelo com a divisão entre dois números naturais e usando como base a relação fundamental da divisão.

Avalie se a turma necessita de outros exemplos. Em caso afirmativo, solicite aos estudantes que escolham três números naturais, representados por a, b e c (sendo a com 3 dígitos, b e c com 1 dígito e $c < b$). Em seguida, eles devem obter $d = a \cdot b + c$. Por fim, devem efetuar a divisão entre d e b para obter o quociente a e o resto c, de modo que a e c sejam menores que o divisor b.

Em geral, os termos de um polinômio com uma variável são apresentados segundo as potências decrescentes dessa variável.

Observe alguns exemplos.

a) $5x^2 - 4x + 2$ **b)** $x^3 - 2x^2 + x - 1$ **c)** $2x^4 - 3x^2 + 2$

Observação

▸ Se em um polinômio de grau *n* ordenado segundo as potências de *x* faltar uma ou mais potências de *x* com expoente menor do que *n*, então os coeficientes desses termos serão 0, e o polinômio será chamado de **polinômio incompleto**.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $x^2 - 4$ é um polinômio incompleto e pode ser escrito como $x^2 + 0x - 4$.
$x^2 + 0x - 4$ é a forma geral do polinômio $x^2 - 4$.

b) $2x^4 - 3x^2 + 2$ é um polinômio incompleto e pode ser escrito como $2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$.
$2x^4 + 0x^3 - 3x^2 + 0x + 2$ é a forma geral do polinômio $2x^4 - 3x^2 + 2$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

30 Ordene os polinômios de acordo com as potências decrescentes de *x*.

a) $2x + 3x^2 - 4$ **30. a)** $3x^2 + 2x - 4$
b) $-6 + x^4 - 5x^2 + 4x^3 - 2x$ **30. b)** $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 2x - 6$
c) $4x + 5x^3 - 1$ **30. c)** $5x^3 + 4x - 1$
d) $5x^2 - 3x + 2x^3 - 4$ **30. d)** $2x^3 + 5x^2 - 3x - 4$
e) $2 + 7x + 9x^2$ **30. e)** $9x^2 + 7x + 2$

31 Escreva os polinômios a seguir na forma geral.

a) $x^3 + 2x^2 - 5$ **31. a)** $x^3 + 2x^2 + 0x - 5$
b) $x^3 + 1$ **31. b)** $x^3 + 0x^2 + 0x + 1$
c) $y^4 - 8y^2 + 15$ **31. c)** $y^4 + 0y^3 - 8y^2 + 0y + 15$
d) $z^4 - 16$ **31. d)** $z^4 + 0z^3 + 0z^2 + 0z - 16$
e) $m^4 - 2m^2$ **31. e)** $m^4 + 0m^3 - 2m^2 + 0m + 0$

Divisão de polinômio por polinômio

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

$$\begin{array}{r|l} 905 & 4 \\ \hline -8 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 905 & 4 \\ \hline -8 & 22 \\ 10 & \\ -8 & \\ 2 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{r|l} 905 & 4 \\ \hline -8 & 226 \\ 10 & \\ -8 & \\ 25 & \\ -24 & \\ 1 & \end{array}$$

Podemos confirmar o resultado da divisão verificando a igualdade:

$$\text{quociente} \cdot \text{divisor} + \text{resto} = \text{dividendo}$$

Nesse caso, obtemos: $226 \cdot 4 + 1 = 905$

A divisão de um polinômio por outro polinômio não nulo será efetuada apenas entre polinômios com uma variável só.

Para facilitar essas divisões, devemos escrever os polinômios considerando a ordem decrescente das potências da variável, e o polinômio dividendo deve ser escrito na forma geral.

Aprenderemos com exemplos como se calcula o quociente de um polinômio por outro polinômio. O processo que vamos utilizar visa a construir gradativamente um polinômio quociente que, multiplicado pelo polinômio divisor e adicionado ao resto, resulte no polinômio dividendo.

a) Vamos calcular o quociente de $8x^2 - 10x + 5$ por $2x + 1$.

Começamos dividindo o primeiro termo do dividendo ($8x^2$) pelo primeiro termo do polinômio divisor ($2x$), obtendo o primeiro termo do quociente: $4x$.

$$\begin{array}{r|l} 8x^2 - 10x + 5 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} & 4x \end{array}$$

Multiplicamos o quociente obtido ($4x$) pelo divisor $2x + 1$, obtendo o produto $8x^2 + 4x$. Subtraímos esse produto do dividendo, assim como ocorre na divisão entre números.

$$\begin{array}{r|l} 8x^2 - 10x + 5 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} -8x^2 - 4x\phantom{{}+5} & 4x \\ \cline{1-1} -14x + 5 & \end{array}$$

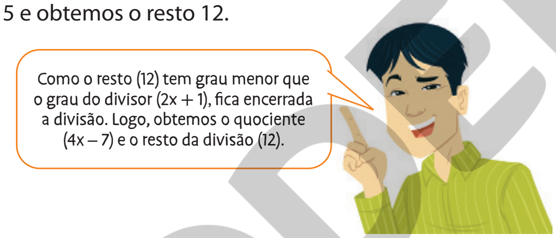
Repetimos as etapas anteriores para calcular o quociente de $-14x + 5$ por $2x + 1$.

Dividimos $-14x$ por $2x$, obtendo o segundo termo do quociente, -7.

Multiplicamos -7 por $2x + 1$, obtendo $-14x - 7$.

Subtraímos esse produto de $-14x + 5$ e obtemos o resto 12.

$$\begin{array}{r|l} 8x^2 - 10x + 5 & 2x + 1 \\ \cline{2-2} -8x^2 - 4x\phantom{{}+5} & 4x - 7 \\ \cline{1-1} -14x + 5 & \\ 14x + 7 & \\ \cline{1-1} +12 & \end{array}$$



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Fazendo a verificação:

$$(4x - 7) \cdot (2x + 1) + (+12) = 8x^2 - 10x - 7 + 12 = \underbrace{8x^2 - 10x + 5}_{\textbf{polinômio dividendo}}$$

b) Vamos calcular o quociente de $12x^4 - 17x^3 - 3x^2 - 11x - 3$ por $3x^2 - 2x - 3$.

$$\begin{array}{r|l} 12x^4 - 17x^3 - 3x^2 - 11x - 3 & 3x^2 - 2x - 3 \\ \cline{2-2} -12x^4 + 8x^3 + 12x^2 \phantom{{}- 11x - 3} & 4x^2 - 3x + 1 \\ \cline{1-1} -9x^3 + 9x^2 - 11x - 3 & \\ 9x^3 - 6x^2 - 9x \phantom{{}-3} & \\ \cline{1-1} 3x^2 - 20x - 3 & \\ -3x^2 + 2x + 3 & \text{Quociente: } 4x^2 - 3x + 1 \\ \cline{1-1} -18x & \text{Resto: } -18x \end{array}$$

Esse trabalho com tecnologias digitais favorece o desenvolvimento da **competência geral 5**, pois os estudantes podem desenvolver estratégias que lhes possibilitem resolver problemas e produzir conhecimentos com mais autonomia.

Divisão de polinômio por polinômio

Antes de apresentar aos estudantes o exemplo da divisão dos polinômios, proponha na lousa mais alguns polinômios de uma variável e incompletos para que os escrevam no caderno na forma geral e ordenados.

Em seguida, reproduza na lousa os passos da divisão dos **exemplos a** e **b** para que eles os acompanhem e desenvolvam as etapas da divisão.

Para auxiliá-los a atribuir significados às operações com polinômios estudadas, pode-se sugerir que testem os resultados obtidos trocando a incógnita por alguns valores numéricos.

Por exemplo, para a divisão de $8x^2 - 10x + 5$ por $2x - 1$, cujo quociente é dado por $4x - 7$ e o resto é 12 (como realizado no **exemplo a**), sabemos que:

$(8x^2 - 10x + 5) =$
$= (2x + 1) \cdot (4x - 7) + 12$

Assim, podemos atribuir um valor a x (desde que não anule o divisor) e verificar a igualdade. Fazendo $x = 1$, obtemos:

$(8 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 5) =$
$= (2 \cdot 1 + 1) \cdot (4 \cdot 1 - 7) + 12$
$(8 \cdot 1 - 10 + 5) =$
$= (4 - 7) \cdot (2 + 1) + 12$
$(8 - 10 + 5) =$
$= (4 - 7) \cdot 3 + 12$
$3 = -3 \cdot 3 + 12$
$3 = -9 + 12$
$3 = 3$ (verdadeiro)

Atribuindo outros valores numéricos a x, obtemos sempre uma igualdade verdadeira do tipo $a = a$, em que a é um número real, e x é diferente de $-\frac{1}{2}$.

Se possível, os estudantes podem utilizar recursos como planilhas eletrônicas para fazer essa verificação de maneira automática; para isso, eles podem digitar em uma célula A1 o valor de x, em uma célula B1 a expressão do dividendo em função do valor de A1, em uma célula C1 a expressão que relacione o dividendo ao divisor, ao quociente e ao resto. Assim, quando variar o valor da célula A1, automaticamente pode-se verificar que o valor de B1 e de C1 serão iguais.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 32** a **35** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Note que o **exercício 35**, assim como o **exercício 36**, pressupõe a aplicação da relação fundamental entre a multiplicação e a divisão.

Como a medida da área do retângulo é dada pelo produto da medida da base pela medida da altura, no **exercício 36**, temos:

medida da área do retângulo = = (medida da base) · (medida da altura)

$5x^2 + 2x - 3 = (5x - 3) \cdot$ (medida da altura)

medida da altura =

$= (5x^2 + 2x - 3) : (5x - 3)$

Efetuando a divisão desses dois polinômios, obtemos o quociente $(x + 1)$ e resto zero. Podemos verificar esse resultado por meio da relação fundamental da divisão. Assim, temos:

quociente · divisor + resto =

$= (x + 1) \cdot (5x - 3) + 0 =$

$= 5x^2 - 3x + 5x - 3 + 0 =$

$= 5x^2 + 2x - 3$ (que é o dividendo)

Para o **exercício 37**, incentive os estudantes a utilizarem contextos que os auxiliem na elaboração dos problemas, como a área de retângulos, triângulos e outras figuras geométricas cujas medidas de comprimento (dos lados, da altura etc.) sejam dadas por meio de polinômios.

---

c) Vamos calcular o quociente de $8x^3 - 1$ por $2x - 1$.

Como o polinômio dividendo é incompleto, vamos escrevê-lo na forma geral:

$8x^3 + 0x^2 + 0x - 1$

$$\begin{array}{rrrr|l} 8x^3 & +0x^2 & +0x & -1 & 2x-1 \\ \hline -8x^3 & +4x^2 & & & 4x^2+2x+1 \\ \hline & 4x^2 & +0x & -1 & \\ & -4x^2 & +2x & & \\ \hline & & 2x & -1 & \\ & & -2x & +1 & \text{Quociente: } 4x^2+2x+1 \\ \hline & & & 0 & \text{Resto: } 0 \end{array}$$

Faça a verificação dos resultados dos exemplos **b** e **c** usando a igualdade: quociente · divisor + resto = dividendo

Quando o resto é zero, dizemos que a divisão é **exata**, ou, ainda, que $8x^3 - 1$ é **divisível** por $2x - 1$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

32 Determine o polinômio M que, multiplicado por $2x - 1$, resulta em $6x^2 - 7x + 2$. Verifique sua resposta. **32.** $3x - 2$

33 Calcule o quociente.

a) $(x^2 + 7x + 12) : (x + 3)$ **33. a)** $x + 4$

b) $(6x^2 - 11x - 10) : (3x + 2)$ **33. b)** $2x - 5$

c) $(2x^4 - 11x^3 + 16x^2 - 6x) : (x^2 - 4x + 2)$ **33. c)** $2x^2 - 3x$

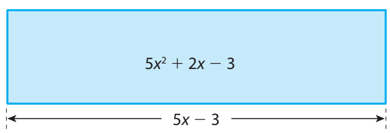
34 Determine o quociente e o resto das divisões.

a) $(2x^3 - 9x^2 + 3x - 6) : (x - 2)$ **34. a)** $2x^2 - 5x - 7; -20$

b) $(6a^3 - 7a^2 + 2a + 1) : (3a^2 - 5a + 3)$ **34. b)** $2a + 1; a - 2$

35 Qual é o polinômio que, multiplicado por $a^2 + 2a - 5$, dá $3a^3 + 2a^2 - 23a + 20$? **35.** $3a - 4$

36 A medida da área do retângulo a seguir, em m², é dada pela expressão $5x^2 + 2x - 3$. Calcule o polinômio que representa a medida da altura desse retângulo, em metro. **36.** $x + 1$



37 *Hora de criar* – Elabore, e depois passe para um colega, um problema sobre divisão de polinômios com uma só variável, sendo o dividendo um polinômio incompleto. Depois de cada um resolver o problema do outro, destroquem para corrigi-los. **37.** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Podemos efetuar a divisão de números inteiros escritos na forma polinomial. Por exemplo, para efetuar 2753 : 21, podemos fazer as seguintes representações:

$2753 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3$ e $21 = 2 \cdot 10 + 1$

$$\begin{array}{r|l}
2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 3 & 2 \cdot 10 + 1 \\ \cline{2-2}
-2 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^2 \qquad\qquad\quad & 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 \\ \cline{1-1}
6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 \qquad & \\
-6 \cdot 10^2 - 3 \cdot 10 \qquad & \\ \cline{1-1}
2 \cdot 10 + 3 & \\
-2 \cdot 10 - 1 & \\ \cline{1-1}
2 &
\end{array}$$

Essa divisão com números na forma polinomial lembra a divisão entre dois polinômios com uma só variável.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Quociente: $1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 1 = 131$

Resto: 2

Agora, explique como foi efetuada essa divisão. *Pense mais um pouco...*: Resposta pessoal.

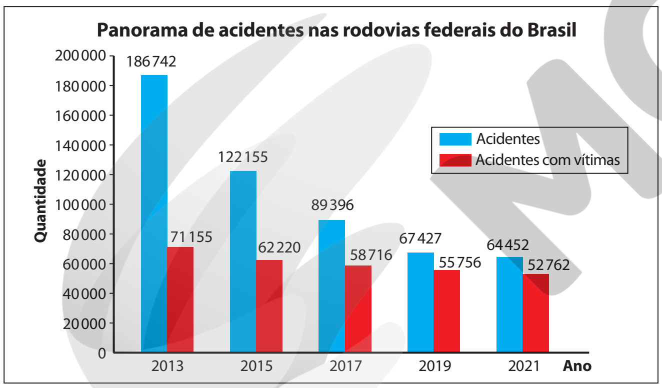
TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Interpolação e extrapolação gráfica

As rodovias federais brasileiras somam mais de 76000 quilômetros de extensão. A manutenção da malha rodoviária é dispendiosa e, em geral, deixa a desejar, o que afeta a sua qualidade e compromete a segurança dos usuários. No entanto, atitudes que deveriam ser evitadas, como ultrapassagem indevida, ingestão de álcool, desobediência à sinalização e excesso de velocidade, também contribuem para a imensa quantidade de acidentes.

Observe a seguir o **gráfico de colunas duplas**, que informa a quantidade de acidentes e de acidentes com vítimas em rodovias federais brasileiras entre 2013 e 2021.

WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos em: CONFEDERAÇÃO Nacional do Transporte. **Painel CNT de acidentes rodoviários**. Brasília, DF: CNT, dez. 2021. Disponível em: https://www.cnt.org.br/painel-acidente. Acesso em: 23 jun. 2022.

121

Pense mais um pouco...

Retomamos na seção a escrita de um número natural na forma polinomial.

Aqui, espera-se que os estudantes consigam explicar com suas próprias palavras um exemplo dado do algoritmo da divisão euclidiana, com o qual estão familiarizados. Novamente, promovemos uma oportunidade de discutir e identificar uma analogia entre a Álgebra e a Aritmética.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF08MA23**.

Nesta seção, trabalhamos com diferentes tipos de gráfico para representar um conjunto de dados de uma pesquisa, possibilitando, assim, o desenvolvimento da habilidade (EF08MA23).

Abordando gráficos de colunas duplas e de linhas duplas, a seção trata da interpolação e da extrapolação, que são processos de obtenção dos valores de uma função mediante o conhecimento de seu comportamento em um dado intervalo numérico.

Esse é um instrumento importante no tratamento da informação e na análise de gráficos que, em jornais e revistas, ilustram e fundamentam matérias e textos sobre assuntos diversos. Também o poder público, nas esferas municipal, estadual e nacional, utiliza esse instrumento para construir novos projetos e acompanhar a execução de outros que estiverem em andamento.

O contexto possibilita explorar o Tema Contemporâneo Transversal **educação para o trânsito**, por meio da ampliação da discussão sobre a importância da direção defensiva e do respeito à sinalização e à legislação. Peça aos estudantes que levem para a sala de aula matérias de jornais com gráficos para analisar as informações e dar base para a argumentação da importância da atuação das esferas governamentais na manutenção das vias públicas e das ações individuais quanto à direção defensiva.

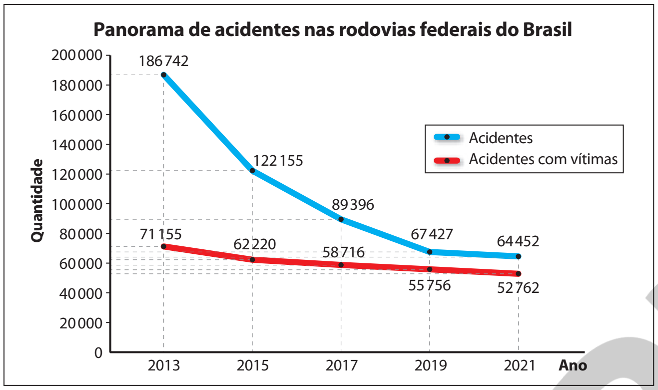
Agora quem trabalha é você!

As resoluções dos **itens a** a **g** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Comente com os estudantes que a leitura e interpretação de um gráfico é tão importante quanto a de um texto e que a interpolação e a extrapolação são procedimentos que, embora não deem resultados exatos, auxiliam no entendimento das informações do gráfico.

Com os dados desse gráfico de colunas, vamos construir um gráfico que chamamos de **gráfico de linhas duplas**. Para isso, representamos as colunas do gráfico anterior por linhas tracejadas verticais (sem largura). Em seguida, marcamos o ponto superior de cada coluna referente ao número de acidentes e unimos esses pontos com segmentos de reta, em azul. Depois, fazemos o mesmo com as colunas referentes ao número de acidentes com vítimas; marcamos o ponto superior de cada coluna e unimos esses pontos com segmentos de reta, em vermelho.

WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos em: CONFEDERAÇÃO Nacional do Transporte. **Painel CNT de acidentes rodoviários**. Brasília, DF: CNT, dez. 2021. Disponível em: https://www.cnt.org.br/painel-acidente. Acesso em: 23 jun. 2022.

Com esse gráfico, percebemos mais facilmente a variação da quantidade de acidentes e de acidentes com vítimas entre 2013 e 2021.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Com base nos dados estatísticos apresentados, faça o que se pede.

a) Copie o gráfico de colunas em uma folha de papel quadriculado e, seguindo o procedimento descrito, construa o gráfico de linhas correspondente. **a)** Construção de gráfico.

b) Em que ano o total de acidentes foi maior? E em que ano foi menor? **b)** Maior: 2013; menor: 2021.

c) Em que ano o número de acidentes com vítimas foi maior? E em que ano foi menor? **c)** Maior: 2013; menor: 2021.

d) Tomando por base o total de acidentes dos anos 2017 e 2019 no gráfico de linhas, faça uma estimativa do total de acidentes de 2018. **d)** Aproximadamente 78 000 acidentes.

e) Quando obtemos um valor de um intervalo gráfico tomando por base os valores dos extremos desse intervalo, fazemos o que chamamos de **interpolação gráfica**. Para fazer a interpolação gráfica, em sua cópia do gráfico, trace uma reta vertical por 2018 até intersectar a linha de acidentes, em seguida trace uma reta horizontal por esse ponto de intersecção até o eixo vertical. Agora, faça uma estimativa da quantidade aproximada de acidentes com vítimas em 2018. **e)** Aproximadamente 57 000 acidentes com vítimas.

f) Considerando os valores do total de acidentes indicados no gráfico de linhas, imagine como seria o prolongamento desse gráfico e faça uma estimativa desse total em 2022. **f)** Aproximadamente 63 000 acidentes.

g) Quando obtemos um valor de um gráfico por meio de seu prolongamento, fazemos o que chamamos de **extrapolação gráfica**. Em sua cópia do gráfico, prolongue a linha que representa a quantidade de acidentes com vítimas. Para fazer a extrapolação gráfica, trace uma reta vertical por 2022 até intersectar o prolongamento da linha de acidentes com vítimas, em seguida trace uma reta horizontal por esse ponto de intersecção até o eixo vertical. Assim, faça uma extrapolação gráfica para obter a quantidade aproximada de acidentes com vítimas em 2022. **g)** Aproximadamente 51 000 acidentes com vítimas.

3 Frações algébricas

Acompanhe a situação a seguir.

ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

Considere um ônibus que percorre 640 km em x horas, com $x > 2$ e velocidade constante. Em média, esse ônibus desenvolve a velocidade constante de $\frac{640}{x}$ km/h. Vamos admitir que um carro percorra os mesmos 640 km em $(x - 2)$ horas, com velocidade constante. Nesse caso, a velocidade média, em quilômetro por hora, seria representada pelo quociente $\frac{640}{x-2}$.

Expressões como a da situação apresentada, que indicam o quociente entre dois polinômios, são chamadas de **frações algébricas**. Chamaremos de numerador o polinômio dividendo e chamaremos de denominador o polinômio divisor.

> **Fração algébrica** é o quociente de dois polinômios indicado na forma de fração cujo denominador seja uma expressão algébrica.

O denominador de uma fração numérica é sempre diferente de zero. No caso das frações algébricas, a(s) variável(is) do polinômio que representa(m) o denominador não pode(m) assumir valores que o anulem. Acompanhe os exemplos.

a) Na fração algébrica $\frac{640}{x-2}$, devemos ter $x - 2 \neq 0$, ou seja, $x \neq 2$.

b) Na fração algébrica $\frac{b + 2a}{2b + 3a}$, devemos ter $2b + 3a \neq 0$, ou seja, $b \neq -\frac{3a}{2}$ ou $a \neq -\frac{2b}{3}$.

Valor numérico de fração algébrica

Imagine que o ônibus da situação anterior gaste 12 horas para fazer o percurso, ou seja, que x seja igual a 12. Qual seria a sua velocidade média? E a velocidade média do carro? Qual dos dois veículos é mais veloz considerando todo o percurso? Essas velocidades estariam compatíveis com a velocidade máxima permitida para esse trecho da estrada, de 60 km/h?

Para responder a todas essas questões, iniciamos atribuindo o número 12 para x nas frações algébricas e calculando as velocidades, em km/h.

- Ônibus: $v_o = \frac{640}{12} = 53{,}3$
- Carro: $v_c = \frac{640}{12 - 2} = \frac{640}{10} = 64$

53,3 é o **valor numérico** aproximado da primeira fração algébrica, e 64 é o **valor numérico** da segunda fração algébrica para $x = 12$.

Como a velocidade do carro é maior do que a velocidade do ônibus, o carro é mais veloz. A velocidade do ônibus está compatível com a velocidade máxima (60 km/h) permitida nesse trecho da estrada, mas a velocidade do carro não está! Que conselho você daria para o condutor desse carro?

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Orientação: Espera-se que o conselho seja: diminuir a velocidade para 60 km/h.

3. Frações algébricas

Habilidade da BNCC: **EF08MA06**.

Neste tópico, ao resolver e elaborar problemas que possam ser representados por expressões algébricas, além de efetuar o cálculo numérico dessas expressões, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver a habilidade (EF08MA06).

Assim como a divisão entre dois números inteiros pode ter como quociente um número racional, que pode ser dado na forma de fração, a divisão não exata entre dois polinômios pode ser indicada na forma de fração algébrica.

Trabalhe com os estudantes a situação apresentada. Eles devem perceber que, como em uma fração algébrica existe variável no denominador, essa expressão deve ter condição de existência, pois sabemos que o denominador não pode se anular.

O valor numérico de uma fração algébrica é obtido como foi feito para as expressões algébricas; apenas devemos observar se o valor indicado não anula o denominador. Nesse caso, a variável (ou variáveis) do denominador não pode(m) assumir valores que anulem o denominador.

O conteúdo deste tópico traz uma abordagem prévia do que será desenvolvido no 9º ano sobre razões com grandezas de naturezas diferentes, entre as quais a velocidade.

Exercícios propostos

As resoluções do **exercício 38** e dos **exercícios 40** a **43** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 39**, é possível explorar condições como "Para que valor de y e de x os consumos das duas motos são iguais?". Ao resolver a equação dada pela igualdade das frações algébricas que representam os consumos, obtidas no **item a** $\left(\frac{x}{y}\right)$ e no **item b** $\left[\frac{2x}{(y+5)}\right]$, os estudantes devem chegar ao valor 5 para y e concluir que o valor de x pode, consideradas as limitações de uma situação real, ser qualquer um.

Exercícios complementares

Neste bloco de exercícios, os estudantes têm a oportunidade de retomar os principais conceitos tratados no capítulo e verificar possíveis dificuldades que ainda tenham.

Sugerimos que eles se organizem em duplas para que resolvam exercícios, o que ampliará e enriquecerá o repertório de estratégias que eles já têm e consolidará os conhecimentos construídos.

Proponha que refaçam alguns exercícios dos tópicos anteriores desse capítulo sobre os quais ainda tenham dúvida. Revisitar conceitos e estratégias já estudadas pode contribuir para o aprendizado.

As resoluções dos **exercícios 1** a **3** e dos **exercícios 5** a **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

No **exercício 4**, retratamos a situação descrita:

$A - (4x - 3y + 4) =$
$= -4x - 6y - 9$

Desse modo, verificamos que o polinômio A é dado por:

$A = -4x - 6y - 9 + (4x - 3y + 4)$
$A = -4x - 6y - 9 + 4x - 3y + 4$
$A = -9y - 5$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

38 Um terreno é retangular, e seu comprimento mede 15 m a mais do que o dobro de sua largura x, dada em metro. **38. a)** $\frac{2x+15}{x}$

a) Escreva a razão entre as medidas do comprimento e da largura.

b) Qual é o valor numérico dessa razão, se a largura medir 12 m? **38. b)** $\frac{13}{4}$

39 Uma moto percorreu x quilômetros com y litros de gasolina. Uma segunda moto percorreu o dobro dessa distância com (y + 5) litros de gasolina. Escreva o consumo médio de gasolina, dado em km/L: **39. b)** $\frac{2x}{y+5}$

a) da primeira moto; b) da segunda moto.

39. a) $\frac{x}{y}$

40 Para que valor de y a expressão $\frac{12+y}{y-6}$ não representa uma fração algébrica? **40.** $y = 6$

41 Quais são os valores racionais que podem ser atribuídos à letra x na fração algébrica $\frac{x+5}{2x-3}$?

41. Qualquer número racional diferente de $\frac{3}{2}$.

42 Que relação deve existir entre b e a para que a fração algébrica $\frac{2a+b}{b-2a}$ represente um número racional? **42.** $b \neq 2a$

43 Ontem, eu tinha em minha conta poupança certa quantia em real. Hoje, meu avô depositou nessa conta o quádruplo do que eu tinha ontem mais R$ 200,00. Represente por uma fração algébrica a razão entre o saldo que minha conta poupança tinha ontem e o saldo depois do depósito feito por meu avô. **43.** $\frac{x}{5x+200}$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Na expressão $a + 2b - 4c$, as variáveis só podem assumir os números 0, 1 ou 2.

a) Qual é o valor numérico da expressão para $a = 1$, $b = 1$ e $c = 2$? **1. a)** -5

b) Qual é o maior valor numérico possível? **1. b)** 6

c) Determine a, b e c, com $a \neq b \neq c$, de modo que o valor numérico da expressão seja 4.

1. c) $a = 2$, $b = 1$ e $c = 0$.

2 Calcule: **2. b)** $2x^2 - 6x - 1$

a) $(3a^2 - 5b) + (5a^2 + 5b)$ **2. a)** $8a^2$

b) $(3x^2 - 5x + 2) - (x^2 + 6x - 4) + (5x - 7)$

c) $(a^2 - ab) + (b^2 - ab) - (a^2 + b^2)$ **2. c)** $-2ab$

d) $\left(-\frac{1}{2}a - 2b\right) - \left(\frac{3}{5}b + 2a\right)$ **2. d)** $-\frac{5}{2}a - \frac{13}{5}b$

3 Elimine parênteses, colchetes e chaves e reduza os termos semelhantes.

a) $3a - (b - a) + (5b - 2a)$ **3. a)** $2a + 4b$

b) $x^2 - \{3x - [(x + 3) + (x^2 - 1)]\}$ **3. b)** $2x^2 - 2x + 2$

c) $2y - [-3xy + (-2x + 5y) - (-4xy + x)]$

3. c) $3x - 3y - xy$

4 Do polinômio A subtraí o polinômio $4x - 3y + 4$, o que resultou em $-4x - 6y - 9$. Qual é o polinômio A? **4.** $-9y - 5$

5 Calcule os produtos dos polinômios a seguir.

a) $(x - 2) \cdot (x + 5)$

b) $(2x - 4) \cdot (3x + 1)$

c) $(x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$

d) $(a - 1)(a^2 - 1)(a + 1)$

5. a) $x^2 + 3x - 10$
5. b) $6x^2 - 10x - 4$
5. c) $x^3 - 1$
5. d) $a^4 - 2a^2 + 1$

6 Determine o polinômio que dividido por $5x^2 - 3x + 1$ tem por quociente $x^2 + 2x - 3$ e resto $-5x + 2$. **6.** $5x^4 + 7x^3 - 20x^2 + 6x - 1$

7 Determine o polinômio A que multiplicado por $2x - 1$ tem por produto $8x^3 - 14x^2 + 11x - 3$.

7. $A = 4x^2 - 5x + 3$

8 Dados: $A = 6x^2 - 5x - 6$, $B = 2x^2 + 5x - 12$, $C = 2x - 3$ e $D = x + 4$, calcule:

a) $B \cdot C$

b) $D^2 = D \cdot D$

c) $B : C$

d) $(A + B) \cdot C$

8. b) $x^2 + 8x + 16$ **8. c)** $x + 4$

8. a) $4x^3 + 4x^2 - 39x + 36$ **8. d)** $16x^3 - 24x^2 - 36x + 54$

9 Qual é o resultado da divisão de $5x^3 + 5x^2 - 60x$ por $5x(x - 3)$? **9.** $x + 4$

10 (FESPSP) Qual é o resto da divisão do polinômio $x^3 - 2x^2 - x + 2$ por $x^2 - 1$? **10.** 0

11 A inclinação de uma escada fixa é dada pela fração $\frac{E}{P}$, em que E é a medida do espelho e P é a medida do piso (degrau). Quanto maior é o valor numérico da fração, mais inclinada é a escada. O piso de uma escada comum varia de 25 cm a 30 cm, e o espelho, de 16 cm a 18 cm. Qual é a menor e qual é a maior inclinação que uma escada com essas medidas pode ter?

11. Menor: $\frac{16}{30} \simeq 0{,}53$; maior: $\frac{18}{25} \simeq 0{,}72$.

O **exercício 11** retoma o tema da arquitetura de uma escada que deve contemplar determinados limites quanto às medidas do espelho e do piso, o que implica limites na inclinação da escada. Comente com os estudantes que essas exigências arquitetônicas atendem necessidades de segurança e de preservação da saúde dos usuários das escadas e são reguladas por leis específicas. Para resolver o exercício, deve-se considerar que a menor inclinação é dada pela razão entre a menor medida do espelho e a maior medida do piso; também deve-se considerar que a maior inclinação é dada pela razão entre a maior medida do espelho e a menor medida do piso. A título de curiosidade, informe que a menor inclinação (0,53) corresponde a um ângulo de medida aproximada 28° e que a maior inclinação (0,72) corresponde a um ângulo de medida aproximada 35°.

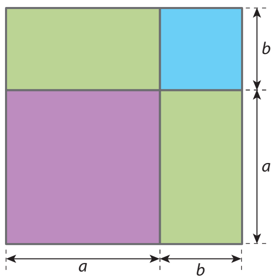
VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Os trinômios são: **1.** Alternativa **c**.

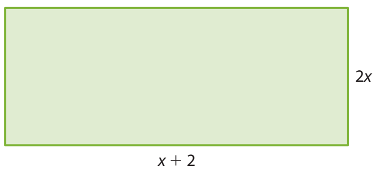
a) polinômios de um único termo.
b) polinômios de dois termos.
c) polinômios de três termos.
d) polinômios do terceiro grau.

2 Em metro, qual é a medida do perímetro da figura a seguir, composta de retângulos e cujas medidas dos lados são dadas em metro? **2.** Alternativa **c**.



a) $a + b$
b) $2a + 2b$
c) $4a + 4b$
d) $a^2 + 2ab + b^2$

3 Determine a medida da área do retângulo a seguir, cujas medidas dos lados são dadas em cm e a área, em cm². **3.** Alternativa **d**.



a) $3x + 2$
b) $6x + 4$
c) $2x^2 + 2$
d) $2x^2 + 4x$

4 Determine o produto dos polinômios a seguir. **4.** Alternativa **a**.

$$(a^3 - a^2 + a) \cdot (a + 1)$$

a) $a^4 + a$
b) $a^4 + a^2$
c) $a^3 - a^2 + a$
d) $a^4 - a^3 + a^2$

5 Dividindo-se $4a^4 - 5a^2 + a - 2$ por $2a^2 - a + 1$, encontra-se um resto R. Calcule o valor numérico de R para $a = \frac{1}{3}$. **5.** Alternativa **a**.

a) $R = 0$
b) $R = 1$
c) $R = 3$
d) $R = a$

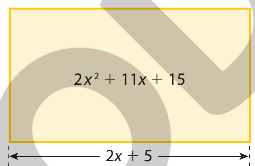
6 Qual é o polinômio que, dividido por $5a^2 - 2a - 3$, tem por quociente exato $3a - 4$? **6.** Alternativa **a**.

a) $15a^3 - 26a^2 - a + 12$
b) $15a^3 - 26a^2 + 17a + 12$
c) $15a^3 - 26a^2 - a - 12$
d) $15a^3 + 14a^2 - a + 12$

7 Márcia comprou uma televisão, que estava sendo vendida à vista por x reais, e pagará em 10 prestações de mesmo valor. Cada prestação corresponde a $\frac{1}{10}$ do valor à vista, acrescido de 80 reais de juro. Que expressão algébrica representa, em real, o valor total pago por Márcia e o valor de cada prestação, respectivamente? **7.** Alternativa **c**.

a) $10x + 800$ e $x + 80$
b) $10x + 80$ e $\frac{x}{10} + 80$
c) $x + 800$ e $\frac{x}{10} + 80$
d) $x + 80$ e $\frac{x}{10}$

8 A medida da área do retângulo a seguir é expressa pelo polinômio $2x^2 + 11x + 15$ e dada em m². Que polinômio representa a medida da altura desse retângulo, em metro? **8.** Alternativa **a**.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a) $x + 3$
b) $2x + 5$
c) $4x^2 + 25$
d) $2x^2 + 9x + 10$

Organizando

Organizando: Veja as resposta neste *Manual*.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões.

a) O que é um polinômio?
b) Explique como se deve proceder para adicionar dois polinômios.
c) Para calcular o produto entre dois polinômios, aplica-se a propriedade distributiva. Explique como essa propriedade é aplicada.
d) O que é fração algébrica?

Verificando

As resoluções dos **testes 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 5.

Sugerimos que esses testes sejam utilizados, entre outros objetivos pedagógicos, para preparar os estudantes para realizar avaliações de larga escala. Eles podem resolver os testes e, depois, em duplas ou pequenos grupos, compartilhar as estratégias de resolução com os colegas.

Organizando

Esta seção possibilita retomar os principais conteúdos trabalhados neste capítulo.

Incentive os estudantes a compartilhar as respostas com os colegas e, se julgar adequado, a compor um mapa conceitual de maneira coletiva, explicitando os conteúdos do capítulo e apresentando informações relevantes sobre eles.

a) Polinômio é toda expressão algébrica que representa um monômio ou uma soma algébrica de monômios.

b) Para adicionar dois polinômios, agrupamos os termos semelhantes e, depois, os reduzimos.

c) Para multiplicar dois polinômios, a propriedade distributiva é aplicada da seguinte maneira: multiplicando cada termo de um deles por todos os termos do outro; depois reduzimos os termos semelhantes obtidos.

d) Fração algébrica é o quociente entre dois polinômios indicado na forma de fração cujo denominador é uma expressão algébrica.

125

Capítulo 6 – Produtos notáveis e fatoração

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas. Inicialmente, são considerados os **produtos notáveis**, cuja frequência no cálculo algébrico justifica um estudo sistematizado sobre o desenvolvimento dessas expressões na forma de polinômios.

Trabalhamos também uma expressão algébrica escrita na forma fatorada. Para isso, além da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação, é importante que os estudantes percebam a aplicação dos produtos notáveis estudados no início do capítulo.

Finalizando o capítulo, tratamos de simplificação de expressões algébricas como uma aplicação do que foi estudado e apresentamos investigações em sequências recursivas e em sequências não recursivas com base no cálculo algébrico já desenvolvido.

O texto da abertura deste capítulo possibilita o desenvolvimento do Tema Contemporâneo Transversal **ciência e tecnologia**. Comente e discuta com os estudantes que a produção de conhecimento em diferentes áreas, como a Matemática, estimula o desenvolvimento de tecnologias que podem ser aplicadas em outras áreas, como Medicina, Economia, Engenharia, entre tantas outras.

Ao realizarem as pesquisas indicadas nos **itens a** e **b**, os estudantes desenvolvem a **competência geral 1**, pois podem perceber a evolução dos conceitos matemáticos e a Matemática como um conjunto de conhecimentos historicamente construídos, influenciados ou inspirados em diferentes contextos do cotidiano.

No **item c**, como o semiperímetro é 6 (pois $5 + 4 + 3 = 12$ e $12 : 2 = 6$), obtemos que:

$A = \sqrt{6} \cdot (6 - 3) \cdot (6 - 4) \cdot (6 - 5)$

$A = \sqrt{36}$

$A = 6$

Capítulo

6 Produtos notáveis e fatoração

ROSAMAR/SHUTTERSTOCK

Observe, leia e responda no caderno. c) 6 unidades de área.

a) Pesquise na internet, em livros, enciclopédias etc., junto a um colega, a história e os inventos de Arquimedes. Elaborem um texto com um resumo dessa pesquisa. a) Resposta pessoal.

b) Pesquise também a participação de Arquimedes na Segunda Guerra Púnica no cerco da República Romana a Siracusa.

c) Calcule a medida da área de um triângulo com lados de medidas 3, 4 e 5 usando a fórmula de Heron.

Parafuso de Arquimedes em parque aquático moderno em Sea World, San Diego, Estados Unidos. (Fotografia de 2019.)

Arquimedes (c. 287 a.C.-212 a.C.), natural da cidade de Siracusa, foi um dos maiores matemáticos, físicos e inventores do século III a.C.

A fórmula para a medida da área de um triângulo com lados medindo *a*, *b* e *c*, conhecida como fórmula de Heron, $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, em que *s* é a medida do semiperímetro, era conhecida por Arquimedes vários séculos antes de Heron ter nascido.

A bomba de água em parafuso para retirar água de porões de navios, irrigar campos e drenar charcos é a invenção mecânica de Arquimedes mais conhecida. Ainda hoje é utilizada no Egito, nos Países Baixos e até no Rio de Janeiro. b) A cidade de Siracusa resistiu ao cerco de Roma por anos, pois era protegida por armas desenvolvidas por Arquimedes. Conta-se que Arquimedes foi morto por um soldado romano, que violou as instruções do general romano Marcelo para poupar sua vida.

126

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho com o tema proposto nesta abertura, sugerimos:

SÁ, I. P. Arquimedes de Siracusa e o seu método da exaustão: uma atividade didática para o cálculo de π. **Revista Eletrônica Teccen**, Vassouras, v. 4, n. 3, p. 15-24, maio/ago., 2011. Disponível em: http://editora.universidadedevassouras.edu.br/index.php/TECCEN/article/view/267. Acesso em: 9 jun. 2022.

Esse artigo apresenta um período da vida e da obra de Arquimedes de Siracusa e trata das possibilidades da história da Matemática como metodologia de ensino.

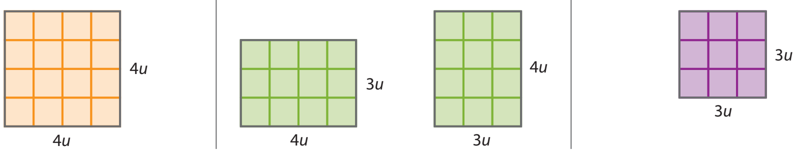
1 Os produtos notáveis

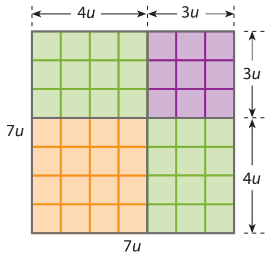
Vimos como calcular o produto de polinômios aplicando a propriedade distributiva da multiplicação. Agora, vamos estudar alguns produtos de binômios que aparecem com bastante frequência no cálculo algébrico, os chamados **produtos notáveis**.

Quadrado da soma de dois termos

Usando como unidade de medida o comprimento do segmento $\overset{u}{\vdash\!\dashv}$, vamos construir:

- um quadrado com lado medindo $4u$;
- dois retângulos com lados medindo $4u$ e $3u$;
- um quadrado com lado medindo $3u$.

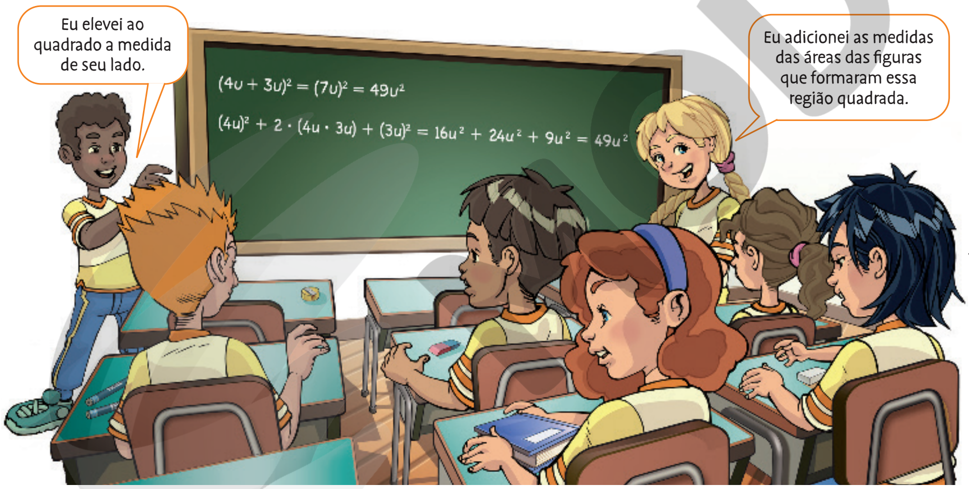




ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Jairo e Vanessa concluíram que a medida da área do quadrado montado é $49u^2$. Acompanhe como eles fizeram os cálculos.



ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

1. Os produtos notáveis

Habilidades da BNCC:
EF08MA06 e **EF08MA19**.

Ao trabalhar o desenvolvimento de produtos notáveis, os estudantes podem desenvolver a habilidade (EF08MA06) ao ampliar conteúdos e estratégias que podem ser utilizados na resolução de problemas. Além disso, a medida de área de figuras planas é associada frequentemente ao conteúdo algébrico, a fim de lhe atribuir significados e, desta maneira, os estudantes utilizam a habilidade (EF08MA19). Convém lembrar que, para simplificar a linguagem, nos referimos à área da região poligonal simplesmente como **área do polígono**. Por exemplo, a área de uma região retangular será denominada área do retângulo.

Explore com os estudantes as figuras dos quadrados apresentados. A fim de que ampliem a compreensão do produto notável **quadrado da soma de dois termos**, escreva na lousa alguns exemplos para que eles construam as figuras que os auxiliem a atribuir significado a tais produtos. Depois, alguns estudantes podem mostrar à turma como os resolveram, justificando as etapas.

Quadrado da soma de dois termos

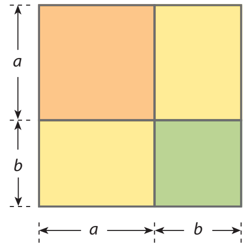
Encerre a apresentação do **quadrado da soma de dois termos** com a turma explorando as figuras desta página. Se julgar conveniente, peça aos estudantes que reproduzam as figuras no caderno e destaquem quais são o primeiro e o segundo termo nos produtos para os quais fizeram as figuras.

Proponha a cada um que descreva o trinômio obtido em relação a esses termos. Por exemplo, se o produto for: $(2x + 3y)(2x + 3y)$, ou seja, $(2x + 3y)^2$, espera-se que os estudantes identifiquem $2x$ como primeiro termo e $3y$ como segundo termo. Assim, eles devem obter:

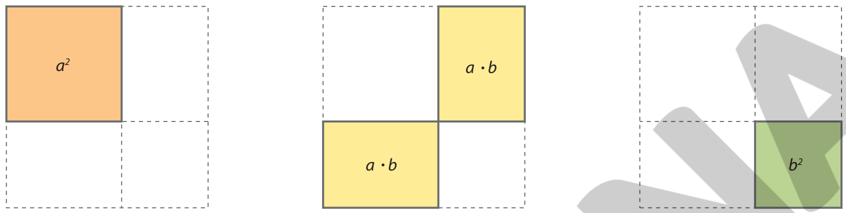
- quadrado do primeiro termo: $(2x)^2 = 4x^2$
- quadrado do segundo termo: $(3y)^2 = 9y^2$
- duas vezes o primeiro termo vezes o segundo termo: $2 \cdot 2x \cdot 3y = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot x \cdot y = 12xy$

Logo:
$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

Um quadrado de lado medindo ℓ tem área de medida ℓ^2.
Agora, considere um quadrado de lado medindo $a + b$.
A medida da área desse quadrado é $(a + b)^2$.



Vamos separar as quatro partes em que o quadrado está dividido e indicar a expressão que representa a medida da área de cada uma delas.



Adicionando as medidas das áreas em destaque, obtemos: $a^2 + 2 \cdot ab + b^2$

Logo: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Esse resultado poderia ter sido obtido da seguinte maneira:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Portanto:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

primeiro termo
segundo termo
quadrado do segundo termo
2 · (primeiro termo) · (segundo termo)
quadrado do primeiro termo

O **quadrado da soma de dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

Acompanhe a aplicação desse produto notável em alguns exemplos.

a) Efetue:

- $(x + 3)^2 = x^2 + \underbrace{2 \cdot x \cdot 3} + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

quadrado do segundo termo
2 · (primeiro termo) · (segundo termo)
quadrado do primeiro termo

- $\left(2x^3 + \frac{y}{2}\right)^2 = (2x^3)^2 + \underbrace{\cancel{2} \cdot (2x^3) \cdot \left(\frac{y}{\cancel{2}}\right)} + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 4x^6 + 2x^3y + \frac{y^2}{4}$

quadrado do segundo termo

2 · (primeiro termo) · (segundo termo)

quadrado do primeiro termo

b) Calcule:

- $(-3a + 5)^2 =$
  $= (-3a)^2 + 2 \cdot (-3a) \cdot 5 + 5^2 =$
  $= 9a^2 - 30a + 25$

- $(-5x - 2y)^2 =$
  $= [(-5x) + (-2y)]^2 =$
  $= (-5x)^2 + 2 \cdot (-5x) \cdot (-2y) + (-2y)^2 =$
  $= 25x^2 + 20xy + 4y^2$

c) Simplifique a expressão $4x^2(x + 2) - x(2x + 3)^2$.

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, obtemos:

$4x^2 \cdot (x + 2) - x \cdot (2x + 3)^2 =$

$= 4x^3 + 8x^2 - x \cdot (4x^2 + 12x + 9) =$

$= \cancel{4x^3} + 8x^2 - \cancel{4x^3} - 12x^2 - 9x =$

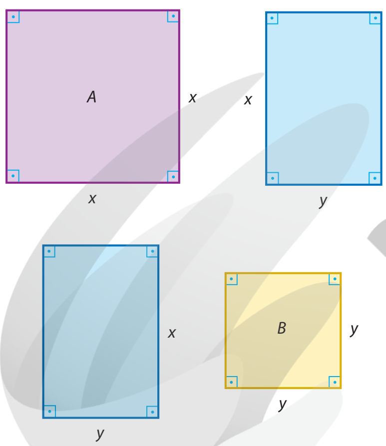
$= -4x^2 - 9x$

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Reproduza, em uma folha de papel sulfite, as figuras a seguir. Depois, recorte-as e monte um quadrado com elas. **1.** Construção de figura.

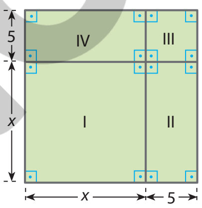


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora, escreva a medida:

a) da área do quadrado *A*; **1. a)** x^2
b) da área de cada retângulo; **1. b)** xy
c) da área do quadrado *B*; **1. c)** y^2
d) de cada lado da figura construída; **1. d)** $x + y$
e) da área da figura construída. **1. e)** $x^2 + 2xy + y^2$

2 Considerando a figura a seguir, faça o que se pede.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

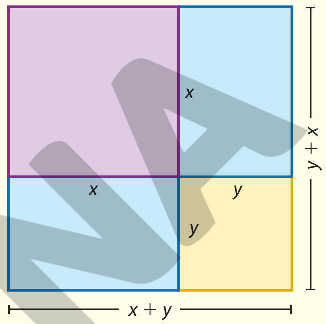
2. a) I: x^2; II: $5x$; III: 25; IV: $5x$.
2. b) $x^2 + 10x + 25$

a) Determine as medidas das áreas I, II, III e IV.
b) Determine a medida da área da figura toda.
c) Calcule $(x + 5)^2$ e compare com a medida da área da figura. **2. c)** $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$. São iguais.

Exercícios propostos

Com base no desenvolvimento teórico, este bloco de exercícios mantém o vínculo entre as Unidades Temáticas **Álgebra** e **Geometria**.

No **exercício 1**, lembre aos estudantes que devem utilizar tesouras de pontas arredondadas e manuseá-las com cuidado. Apresentamos a seguir um exemplo de quadrado que se obtém com as figuras recortadas, cuja área é dada por: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

No **exercício 2**, é importante que os estudantes comparem a medida da área da figura com o desenvolvimento do produto notável para verificar a igualdade. No **item a**, a resposta decorre diretamente da definição de área de retângulos, isto é, a medida da área das figuras será dada pelo produto entre as medidas de dois lados consecutivos dela. No **item b**, a medida da área do quadrado composto das figuras I, II, III e IV será a soma das medidas das áreas das figuras I, II, III e IV, dada por $x^2 + 5x + 25 + 5x$, que equivale a $x^2 + 10x + 25$. Além disso, no **item c**, pode-se considerar que o quadrado tem lados de medida $x + 5$ e que, portanto, a medida de sua área é dada por $(x + 5)^2$; logo:

$(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

De fato:

$(x + 5)^2 = (x + 5) \cdot (x + 5) =$
$= x^2 + 10x + 25$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 3** a **6** e do **exercício 8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

No **exercício 3**, assim como no **exercício 2**, os estudantes devem comparar a medida da área da figura com o desenvolvimento do produto notável para verificar a igualdade.

A resolução do **exercício 7** leva à generalização do cálculo da medida da área de um jardim quadrado cuja ampliação é pedida, tendo como parâmetro a medida anterior do lado desse quadrado. Esse tipo de procedimento pode ser útil na elaboração de projetos. Outras questões propostas ao longo do capítulo promovem a percepção desse vínculo, que pode ainda ser reforçado por outras atividades elaboradas como complemento.

Uma possível resolução para o exercício é:

a) Indicando por x a medida do lado do quadrado original, se aumentamos em 3 metros cada lado, a medida da área do quadrado obtido, em m², é dada por $(x + 3)^2$. Utilizando o produto notável, obtemos $(x^2 + 6x + 9)$.

b) Inicialmente, o jardim tem área dada pela expressão x^2. Para obter o aumento na área, basta subtrair essa área inicial da área obtida no **item a**.

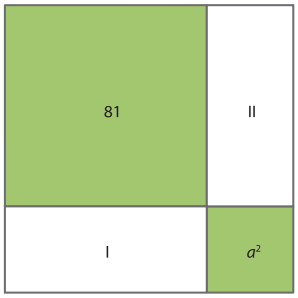
Assim, o aumento da medida da área, em m², é dado por:
$(x^2 + 6x + 9) - x^2 =$
$= x^2 + 6x + 9 - x^2 =$
$= 6x + 9$

Pense mais um pouco...

A seção mostra a associação entre Aritmética e Álgebra, que também aparecerá em outros momentos deste capítulo. Aqui, os estudantes verificam a aplicação do produto notável **quadrado da soma de dois termos** para calcular potências numéricas de uma maneira mais rápida e até mentalmente. Faça outros exemplos na lousa e promova uma dinâmica em que os estudantes devem determinar o quadrado de alguns números por meio desse método.

As resoluções dos **itens a** a **d** desta seção estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

3 A figura a seguir representa um quadrado. As partes pintadas de verde também são quadradas, cujas medidas das áreas são as indicadas.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

3. b) $a^2 + 18a + 81$

Faça o que se pede. **3. a)** I: $9a$; II: $9a$.

a) Determine as medidas das áreas I e II.

b) Determine a medida da área da figura toda.

c) Determine a medida do lado do quadrado maior. **3. c)** $a + 9$

d) Calcule $(a + 9)^2$ e compare com a medida da área da figura. **3. d)** $(a + 9)^2 = a^2 + 18a + 81$. São iguais.

4 Corrija as sentenças falsas.

a) $(x + 8)^2 = x^2 + 64$ **4. a)** $x^2 + 16x + 64$

b) $(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot (3x) \cdot 5 + 5^2 =$
$= 9x^2 + 30x + 25$ **4. b)** Verdadeira.

c) $(x + 3y)^2 = x^2 + 3xy + (3y)^2 =$
$= x^2 + 3xy + 9y^2$
4. c) $x^2 + 2 \cdot x \cdot 3y + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$

5 Calcule o quadrado da soma em cada item.

a) $(3x + y)^2$ **5. a)** $9x^2 + 6xy + y^2$

b) $(3a + 2)^2$ **5. b)** $9a^2 + 12a + 4$

c) $(4a + y^3)^2$ **5. c)** $16a^2 + 8ay^3 + y^6$

d) $\left(\frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y\right)^2$ **5. d)** $\frac{9}{16}x^2 + \frac{3}{5}xy + \frac{4}{25}y^2$

6 Simplifique as expressões a seguir.

a) $a(5a - 1) + (a + 2)^2$ **6. a)** $6a^2 + 3a + 4$

b) $(2x + 3)^2 - x(x - 4)$ **6. b)** $3x^2 + 16x + 9$

c) $(y - 3)(y + 2) - (y + 1)^2$ **6. c)** $-3y - 7$

d) $(9y + 1)^2 - (y + 9)^2$ **6. d)** $80y^2 - 80$

e) $(2a + 3b)^2 - 4a(a + 3b)$ **6. e)** $9b^2$

f) $(1 + 5a)^2 + 25(1 - a^2)$ **6. f)** $26 + 10a$

7 As medidas dos lados de um jardim quadrado foram aumentadas em 3 metros.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando x a medida do lado do jardim antes do aumento, dê o polinômio que representa:

a) a nova medida da área desse jardim;

b) o aumento verificado na medida da área do jardim. **7. b)** $(6x + 9)$ m²

7. a) $(x^2 + 6x + 9)$ m²

8 Desenvolva.

a) $(-x + 6)^2$ **8. a)** $x^2 - 12x + 36$

b) $\left(-\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2$ **8. b)** $\frac{x^2}{4} - \frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9}$

9 ***Hora de criar*** – Elabore três expressões que representem o quadrado de uma soma, sendo uma delas apenas com números conhecidos, isto é, sem letras. Troque-as com um colega para que cada um desenvolva as expressões do outro. Em seguida, desfaçam a troca e corrijam as expressões. **9.** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Podemos aplicar o quadrado da soma para fazer cálculos mais rápidos, até mesmo mentalmente. Acompanhe.

$45^2 = (40 + 5)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 5 + 5^2 = 1\,600 + 400 + 25 = 2\,025$

$81^2 = (80 + 1)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 1 + 1^2 = 6\,400 + 160 + 1 = 6\,561$

Agora, ao aplicar o quadrado da soma, calcule mentalmente as potências. Em seguida, registre o resultado no caderno. *Pense mais um pouco...:*

a) 12^2 **a)** 144

b) 24^2 **b)** 576

c) 35^2 **c)** 1 225

d) 52^2 **d)** 2 704

PARA SABER MAIS

A Matemática na História

O conceito de **produtos notáveis** apareceu na Grécia nos estudos de álgebra geométrica, ferramenta bastante empregada pelos gregos para lidar com situações que envolviam números irracionais.

A álgebra geométrica grega chegou até nós principalmente por meio do livro II da obra *Os elementos*, de Euclides (c. 325 a.C.-265 a.C.). Entretanto, é muito provável que a álgebra dos primeiros gregos – desde os pitagóricos (século VI a.C. ao século III a.C.) até Euclides, Arquimedes (c. 287 a.C.-212 a.C.) e Apolônio (c. 262 a.C.-190 a.C.) – já fosse geométrica, o que estabeleceu uma tradição na representação de situações essencialmente algébricas, bem como daquelas que envolviam números irracionais.

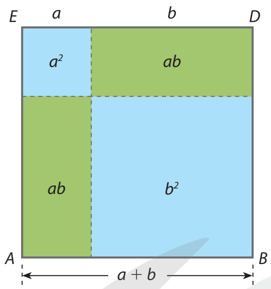
Vários fatores podem ser associados a essa tradição, por exemplo, a dificuldade de lidar na época com números irracionais e números racionais, a inexistência de uma notação algébrica satisfatória (que surgiu somente no século XVI) e o grande avanço da Geometria (que naturalmente empregaria a álgebra geométrica sempre que possível na representação de situações matemáticas). Portanto, era natural para os matemáticos gregos desse período adotar um estilo geométrico para o qual tinham habilidade.

No livro II de *Os elementos*, são encontradas algumas identidades algébricas, como:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad 4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2$$

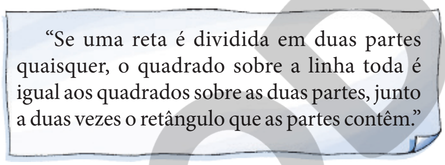
Entretanto, essas identidades não eram apresentadas dessa maneira, pois não havia essas notações naquela época. Os gregos, desde os pitagóricos até Euclides, pensavam nessas situações geometricamente.

Por exemplo, o produto *ab* era visto como um retângulo com medidas de base *a* e altura *b*. Assim, a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ era representada como o diagrama da figura a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

E enunciada da seguinte maneira:



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Euclides registrou esse resultado pitagórico na proposição 4 do livro II de *Os elementos* e a prova é dada diretamente pela interpretação geométrica da situação.

Na figura, “o quadrado sobre a linha toda” é o quadrado *ABDE*; “aos quadrados sobre as duas partes” são os quadrados de medidas de áreas a^2 e b^2 (em azul); e “duas vezes o retângulo que as partes contêm” são os dois retângulos de medidas de área *ab* (em verde).

A proposição 4 é representativa da maneira como os problemas que envolvem álgebra eram concebidos e apresentados. Seguramente, as tentativas de expressão de todas as situações algébricas surgidas naquela época, segundo a álgebra geométrica, podiam levar a construções muito complicadas. Em virtude disso, a álgebra geométrica necessita de mais do que um texto escrito para que seja bem entendida, por isso o uso de figuras.

Para saber mais

Trabalhar a história da Matemática, tema desta seção, é mais uma maneira de possibilitar aos estudantes que atribuam significado aos conteúdos matemáticos e desenvolvam a **competência geral 1** e a **competência específica 1**.

Proponha a eles uma leitura com a turma, organizada em grupos, para que a discussão entre eles facilite a interpretação do texto e enriqueça a sua compreensão. Em seguida, peça a um representante de cada grupo que exponha as dificuldades encontradas pelo grupo e as eventuais dúvidas que ainda apresentem. Ao final, encerre o tema desta seção discutindo com a turma as dificuldades e as dúvidas que surgirem.

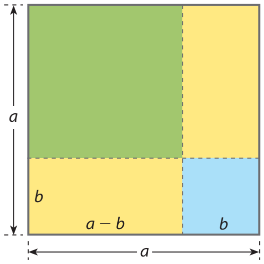
Quadrado da diferença de dois termos

De modo análogo ao que foi feito com o quadrado da soma, explore com os estudantes as figuras apresentadas.

Amplie também com outros exemplos do produto notável **quadrado da diferença de dois termos** e peça a eles que construam as figuras; assim, podem-se atribuir significado geométrico a tais produtos.

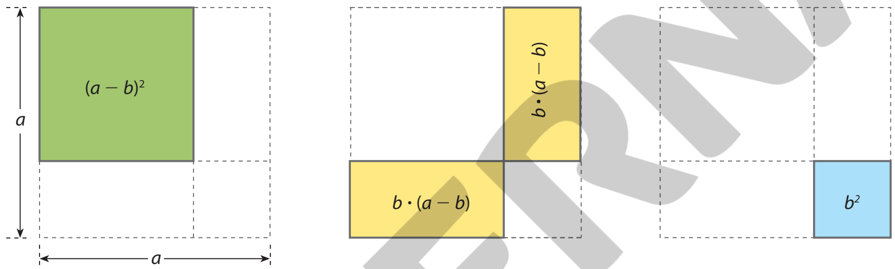
Quadrado da diferença de dois termos

Considere a figura a seguir.



Analisando a figura, sabemos que o lado do quadrado verde mede $a - b$. Assim, chegamos ao polinômio que representa a medida da área desse quadrado, ou seja, $(a - b)^2$.

Vamos separar as quatro partes em que o quadrado maior está dividido e indicar a expressão que representa a medida da área de cada uma delas.



Observe que a medida da área do quadrado verde é igual às medidas das áreas do quadrado cujo lado mede a menos as das duas áreas dos retângulos amarelos e menos a da área do quadrado azul, cujo lado mede b, ou seja:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2 \cdot b \cdot (a - b) - b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Também podemos calcular o quadrado de $a - b$ aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$(a - b)^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Portanto:

$$(a - b)^2 = a^2 - \underbrace{2ab} + b^2$$

primeiro termo

segundo termo

quadrado do segundo termo

2 · (primeiro termo) · (segundo termo)

quadrado do primeiro termo

O **quadrado da diferença de dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo termo mais o quadrado do segundo termo.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Desenvolva:

- $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
- $(3a - b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot (3a) \cdot b + b^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$
- $\left(\frac{2x}{3} - \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 - \cancel{2} \cdot \left(\frac{2x}{3}\right) \cdot \left(\frac{y}{\cancel{2}}\right) + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{4x^2}{9} - \frac{2xy}{3} + \frac{y^2}{4}$

b) Simplifique a expressão $(x - 2) \cdot (x - 5)^2 - x \cdot (x - 6)^2$.

$(x - 2) \cdot (x - 5)^2 - x \cdot (x - 6)^2 =$

$= (x - 2) \cdot (x^2 - 10x + 25) - x \cdot (x^2 - 12x + 36) =$

$= \cancel{x^3} - \cancel{10x^2} + 25x - \cancel{2x^2} + 20x - 50 - \cancel{x^3} + \cancel{12x^2} - 36x = 9x - 50$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

10 Desenvolva os quadrados da diferença.

a) $(3a - 5)^2$ **10. a)** $9a^2 - 30a + 25$

b) $(3x - 2y)^2$ **10. b)** $9x^2 - 12xy + 4y^2$

c) $(3a^2 - 1)^2$ **10. c)** $9a^4 - 6a^2 + 1$

d) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ **10. d)** $x^2 - x + \frac{1}{4}$

11 Simplifique cada expressão.

a) $(2x + 1)^2 + (x - 5)^2$ **11. a)** $5x^2 - 6x + 26$

b) $(x - 1)^2 - (x + 1)^2$ **11. b)** $-4x$

c) $x(x - 3)^2 - 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ **11. c)** $x^3 - 10x^2 + 5x - 1$

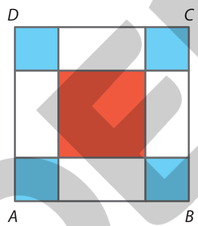
12 Sendo $x^2 + \frac{1}{x^2} = 5$, calcule o valor de:

a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ **12. a)** 7

b) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ **12. b)** 3

13 ***Hora de criar*** – Elabore três expressões que representem o quadrado de uma diferença ou de uma soma, sendo uma delas apenas com números conhecidos, isto é, sem letras. Troque-as com um colega para que cada um desenvolva as expressões do outro. Em seguida, desfaçam a troca e façam as correções. **13.** Resposta pessoal.

14 Na figura a seguir, as medidas são dadas em uma mesma unidade. O lado do quadrado *ABCD* mede 10 e o lado de cada quadrado azul, 2x. Para que valor de x a soma das medidas das áreas dos quadrados azuis é igual à medida da área do quadrado vermelho?



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Nesse caso, quanto vale a soma das medidas das áreas dos quatro retângulos brancos? **14.** Para $x = 1,25$; 50.

15 Determine a medida do perímetro de um quadrado cuja área mede $4x^2 - 4x + 1$. **15.** $8x - 4$

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Pense mais um pouco...:

Podemos aplicar o quadrado da diferença para realizar cálculos com mais rapidez, até mesmo mentalmente. Acompanhe.

$39^2 = (40 - 1)^2 = 40^2 - 2 \cdot 40 \cdot 1 + 1^2 = 1600 - 80 + 1 = 1521$

$48^2 = (50 - 2)^2 = 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 2 + 2^2 = 2500 - 200 + 4 = 2304$

Agora, aplicando o quadrado da diferença, calcule mentalmente as potências. Em seguida, registre o resultado no caderno.

a) 29^2 **a)** 841

b) 38^2 **b)** 1 444

c) 99^2 **c)** 9 801

d) 57^2 **d)** 3 249

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 10** a **13** e do **exercício 15** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Observe a resolução do **exercício 14**, no qual a medida do lado de cada quadrado azul é dada por $2x$; logo, a medida da área de cada um desses quadrados é dada por $4x^2$, e a medida da área desses quatro juntos é dada por $16x^2$. A medida do lado do quadrado vermelho é dada por $(10 - 4x)$; logo, a medida de sua área é dada por:

$(10 - 4x)^2 =$

$= 100 - 2 \cdot 10 \cdot 4x + 16x^2 =$

$= 100 - 80x + 16x^2$

Para obter o valor de x de modo que a soma das medidas das áreas dos quadrados azuis seja igual à medida da área do quadrado vermelho, basta impor a seguinte igualdade:

$16x^2 = 100 - 80x + 16x^2$

$80x = 100$

$x = 1,25$

Portanto, o valor de x é igual a 1,25.

Nesse caso, a medida da área de cada retângulo branco é dada por:

$2x \cdot (10 - 4x) = 20x - 8x^2$

Como $x = 1,25$, então a medida da área desses retângulos é dada por:

$20 \cdot 1,25 - 8 \cdot (1,25)^2 =$

$= 25 - 8 \cdot 1,5625 =$

$= 25 - 12,5 = 12,5$

Assim, a área dos quatro retângulos mede 50 unidades de área, pois $4 \cdot 12,5 = 50$.

Pense mais um pouco...

Esta seção tem como objetivo levar os estudantes a perceber uma aplicação do **produto notável quadrado da diferença de dois termos** para calcular potências numéricas mentalmente.

Faça outros exemplos na lousa e promova uma dinâmica em que os estudantes devem determinar o quadrado de alguns números por meio desse método. Além disso, incentive-os a discutir quando é conveniente usar o quadrado da diferença entre dois termos em relação ao uso do quadrado da soma de dois termos.

As resoluções dos **itens a** a **d** desta seção estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Produto da soma pela diferença de dois termos

Este é outro produto notável que, posteriormente, com o estudo de fatoração, aplicaremos na resolução de um tipo especial de equação do 2º grau.

Proponha a um estudante que explique a figura apresentada para discussão com a turma.

Para ampliar a compreensão pelos estudantes dos produtos notáveis apresentados neste capítulo, sugerimos atividades investigativas envolvendo materiais manipuláveis, como o Algeplan, ou recursos digitais que representem geometricamente os produtos notáveis.

Sugestões de leitura

SILVA,R. C. M. **Utilizando o *algeplan* como recurso didático para a compreensão de expressões algébricas.** Monografia (graduação), UFPB/CCAE, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/14442/1/RCMS12052014.pdf. Acesso em: 9 jun. 2022.

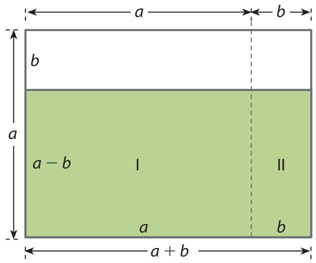
Nesse trabalho, avaliam-se potencialidades e limitações do uso do Algeplan na compreensão da escrita e na representação de expressões algébricas.

MASSANTE, K. A. S. C. C.; BARBOSA, A. C. M.; GONÇALVES, I. M. Atividades utilizando o Algeplan no *software* GeoGebra. **XII Encontro Nacional de Educação Matemática** – minicurso, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/8371_4325_ID.pdf. Acesso em: 9 jun. 2022.

Nesse material, apresenta-se o desenvolvimento de uma sequência de tarefas utilizando o Algeplan virtual e o GeoGebra.

Produto da soma pela diferença de dois termos

Observe a figura a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Por meio dela, podemos conhecer o polinômio que representa a medida da área do retângulo verde.

A base desse retângulo mede $a + b$, e a altura dele mede $a - b$.

Portanto, a medida da área do retângulo verde é igual a $(a + b) \cdot (a - b)$.

A medida da área do retângulo I é dada por $a \cdot (a - b)$, e a do retângulo II, por $b \cdot (a - b)$.

Observe, na figura, que a medida da área do retângulo verde é dada pela soma das medidas das áreas de I e de II, ou seja:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a(a - b) + b(a - b)$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ab - b^2$$
$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Também podemos calcular o produto $(a + b) \cdot (a - b)$ aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 \cancel{- ab} \cancel{+ ab} - b^2 = a^2 - b^2$$

Portanto:

$$\underbrace{(a}_{\text{primeiro termo}} + \underbrace{b)}_{\text{segundo termo}} \cdot \underbrace{(a}_{\text{primeiro termo}} - \underbrace{b)}_{\text{segundo termo}} = \underbrace{a^2}_{\text{quadrado do primeiro termo}} - \underbrace{b^2}_{\text{quadrado do segundo termo}}$$

O **produto da soma pela diferença de dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $(5m + 2n) \cdot (5m - 2n) = \underbrace{(5m)^2}_{\text{quadrado do primeiro termo}} - \underbrace{(2n)^2}_{\text{quadrado do segundo termo}} = 25m^2 - 4n^2$

b) $\left(5a + \frac{2}{3}b\right) \cdot \left(5a - \frac{2}{3}b\right) = \underbrace{(5a)^2}_{\text{quadrado do primeiro termo}} - \underbrace{\left(\frac{2}{3}b\right)^2}_{\text{quadrado do segundo termo}} = 25a^2 - \frac{4}{9}b^2$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

16 Corrija as sentenças que forem falsas.

a) $(5x - 2) \cdot (5x + 2) = (5x)^2 - 2^2 = 25x^2 - 4$ **16. a)** Verdadeira.

b) $(4a^2 + 7b) \cdot (4a^2 - 7b) =$
$= (4a^2)^2 - (7b)^2 = 16a^2 - 49b$ **16. b)** $16a^4 - 49b^2$

c) $(0{,}3x + 0{,}4y) \cdot (0{,}3x - 0{,}4y) =$
$= (0{,}3x)^2 - (0{,}4y)^2 = 0{,}9x^2 - 1{,}6y^2$
16. c) $0{,}09x^2 - 0{,}16y^2$

17 Calcule.

a) $(x + 11) \cdot (x - 11)$ **17. a)** $x^2 - 121$

b) $(5 - a^3) \cdot (5 + a^3)$ **17. b)** $25 - a^6$

c) $(a^2 - 5) \cdot (a^2 + 5)$ **17. c)** $a^4 - 25$

d) $\left(\frac{3}{4}x + y\right) \cdot \left(\frac{3}{4}x - y\right)$ **17. d)** $\frac{9}{16}x^2 - y^2$

18 Simplifique as expressões.

a) $(3x + 2) \cdot (3x - 2) + (x + 2)^2$ **18. a)** $10x^2 + 4x$

b) $(5x - 6)^2 - (5x + 4) \cdot (5x - 4)$ **18. b)** $-60x + 52$

c) $32m^2 + 16m - 2 \cdot (4m + 1)^2$ **18. c)** -2

19 Existem certas "adivinhações" em Matemática que podem ser comprovadas por meio de processos algébricos. Acompanhe uma delas.

19. a) x

a) Pense em um número natural não nulo qualquer.

19. b) $(x + 1) \cdot (x - 1)$

b) Multiplique o sucessor pelo antecessor do número pensado.

19. c) $\sqrt{x^2 - 1 + 1} = \sqrt{x^2}$

c) Adicione 1 unidade ao resultado e extraia a raiz quadrada.

O último resultado é o número que você pensou!

d) Justifique, algebricamente, essa "adivinhação".
19. d) Como x é um número natural, obtemos $\sqrt{x^2} = x$.

20 Junte-se a um colega e resolvam os problemas a seguir. Para isso:

- leiam atentamente o enunciado e identifiquem o que é dado e o que é pedido;
- transformem em linguagem matemática (sentenças numéricas ou algébricas, esquemas, construções geométricas etc.) as informações dadas;
- com base nas relações estabelecidas no item anterior, formulem e executem um plano de resolução;
- façam, finalmente, a verificação das respostas obtidas.

a) Sabendo que $25^2 = 625$, calculem $(25 + 1) \cdot (25 - 1)$. **20. a)** 624

b) Sabendo que $20^2 = 400$, calculem o produto $21 \cdot 19$. **20. b)** 399

c) A soma de dois números é 28 e a diferença, 10. Calculem a diferença entre os quadrados desses números. Em seguida, determinem os dois números e verifiquem a solução. **20. c)** 280; 19 e 9

d) Se dois números têm por soma 30 e por diferença 20, então qual é a diferença entre os quadrados desses números? **20. d)** 600

e) Deem o valor de $26 \cdot 28$, sabendo que $27^2 = 729$. **20. e)** 728

f) Sabendo que $(m + h) = 4$ e que $m^2 - h^2 = 80$, calculem $m - h$. **20. f)** 20

g) Cortando uma folha com formato de um quadrado em quatro retângulos iguais, pode-se montar a figura 2. Determinem a medida da área da parte hachurada. **20. g)** $9x^2$

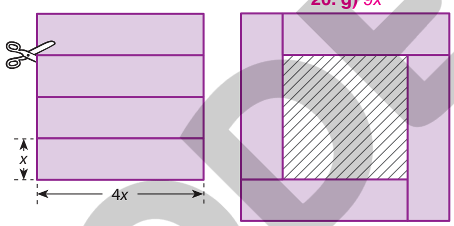


Figura 1 Figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

21 Em duplas, façam o que se pede. **21.** Respostas pessoais.

a) Escolham quatro números naturais consecutivos.

b) Determinem o quadrado dos números escolhidos.

c) Obtenham a diferença entre o quadrado do quarto número e o do terceiro.

d) Obtenham a diferença entre o quadrado do terceiro número e o do segundo.

e) Obtenham a diferença entre o quadrado do segundo número e o do primeiro.

- Observem os números obtidos nos itens **c**, **d** e **e**. O que vocês podem perceber?

21. Espera-se que os estudantes percebam que as diferenças entre os quadrados formam uma sequência de números ímpares consecutivos.

ILUSTRAÇÕES: ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

Nesta série de exercícios, os estudantes aplicarão cálculo algébrico e os produtos notáveis estudados.

As resoluções dos **exercícios 16** a **20** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

A seguir apresentamos a resolução dos **itens e** e **g** do **exercício 20**.

No **item e**, como $26 = 27 - 1$ e $28 = 27 + 1$, obtemos:

$26 \cdot 28 = (27 - 1) \cdot (27 + 1) =$
$= 27^2 - 1^2 = 729 - 1 = 728$

No **item g**, analisando a figura (e as medidas fornecidas), os estudantes podem verificar que a parte hachurada é um quadrado de lado de medida $(4x - x)$, ou seja, $3x$. Logo, a área da parte hachurada é dada por $9x^2$.

Eles também podem efetuar o cálculo da seguinte maneira.

A medida da área da parte hachurada é dada pela diferença entre as medidas das áreas das figuras 2 e 1 $(A_2 - A_1)$. A medida da área da figura 1 é dada por:

$A_1 = 4(4x \cdot x) = 16x^2$

A medida da área da figura 2 é dada por:

$A_2 = (4x + x) \cdot (4x + x) = 25x^2$

Portanto:

$A_2 - A_1 = 25x^2 - 16x^2 = 9x^2$

No **exercício 21**, há infinitas possibilidades de escolha de quatro números naturais consecutivos. Após fazer os cálculos, é importante que as duplas registrem suas respostas, pois isso ajudará os estudantes a perceber que a diferença entre os quadrados forma uma sequência de números ímpares consecutivos. Vamos apresentar aqui o caso genérico, no qual são escolhidos quatro números naturais consecutivos quaisquer. Nesse caso, as respostas são:

a) $x, x + 1, x + 2, x + 3$

b) $x^2, (x + 1)^2, (x + 2)^2, (x + 3)^2$

c) $(x + 3)^2 - (x + 2)^2 = x^2 + 6x + 9 - (x^2 + 4x + 4) = x^2 + 6x + 9 - x^2 - 4x - 4 = 2x + 5$

d) $(x + 2)^2 - (x + 1)^2 = x^2 + 4x + 4 - (x^2 + 2x + 1) = 2x + 3$

e) $(x + 1)^2 - x^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$

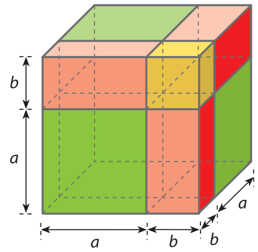
- Os números obtidos nos **itens c**, **d** e **e** formam uma sequência decrescente de números ímpares consecutivos: $2x + 5$, $2x + 3$ e $2x + 1$.

Cubo da soma e da diferença de dois termos

Neste tópico, para introduzir o produto notável, utilizamos paralelepípedos e cubos que formam um cubo maior. Se possível, providencie modelos desses sólidos para que os estudantes observem a montagem e manuseiem as peças.

Cubo da soma e da diferença de dois termos

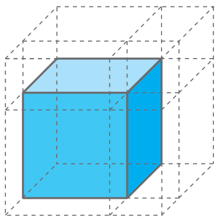
Considere um cubo cuja aresta mede $a + b$, como mostra a figura a seguir.



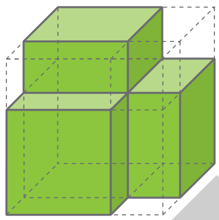
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A medida do volume desse cubo é dada por $(a + b)^3$.

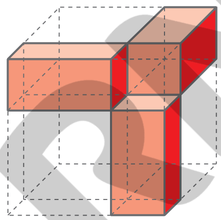
Vamos separar as partes em que o cubo está dividido.



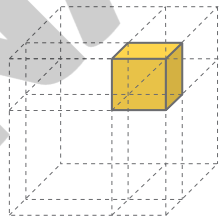
Um cubo de aresta medindo a. A medida do volume do cubo é igual a a^3.



Três paralelepípedos que têm arestas medindo a, a e b. Cada paralelepípedo tem a medida do volume a^2b. A medida do volume dos três paralelepípedos é igual a $3a^2b$.



Três paralelepípedos que têm arestas medindo a, b e b. Cada paralelepípedo tem a medida do volume ab^2. A medida do volume dos três paralelepípedos é igual a $3ab^2$.



Um cubo de aresta medindo b. A medida do volume do cubo é igual a b^3.

Adicionando as medidas de todos esses volumes, obtemos $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

A medida do volume do todo é igual à soma das medidas dos volumes das partes, logo:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Esse mesmo resultado pode ser obtido aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b)^2$$

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

136

Portanto:

$$(a + b)^3 = a^3 + \underbrace{3a^2b}_{} + \underbrace{3ab^2}_{} + b^3$$

primeiro termo: a; segundo termo: b

cubo do segundo termo

3 · (primeiro termo) · (quadrado do segundo termo)

3 · (quadrado do primeiro termo) · (segundo termo)

cubo do primeiro termo

Observe também o cubo da diferença de dois termos.

$$(a - b)^3 = (a - b) \cdot (a - b)^2 = (a - b) \cdot (a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Portanto:

$$(a - b)^3 = a^3 - \underbrace{3a^2b}_{} + \underbrace{3ab^2}_{} - b^3$$

primeiro termo: a; segundo termo: b

cubo do segundo termo

3 · (primeiro termo) · (quadrado do segundo termo)

3 · (quadrado do primeiro termo) · (segundo termo)

cubo do primeiro termo

Acompanhe alguns exemplos.

a) $(x + 2)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2 + 2^3 =$
$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $(2x + y)^3 = (2x)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 + y^3 =$
$= 8x^3 + 3 \cdot (4x^2) \cdot y + 3 \cdot (2x) \cdot y^2 + y^3 =$
$= 8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3$

c) $(5x - 2)^3 = (5x)^3 - 3 \cdot (5x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot (5x) \cdot 2^2 - 2^3 =$
$= 125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$


JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22. a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ **22. b)** $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$

22 Desenvolva.

a) $(x + 1)^3$
b) $(2a + 3)^3$
c) $(1 - x)^3$
d) $(3a - 2)^3$

22. c) $1 - 3x + 3x^2 - x^3$ **22. d)** $27a^3 - 54a^2 + 36a - 8$

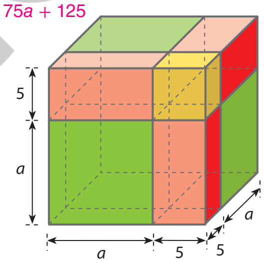
23 Calcule a diferença entre o cubo de $(4a - b)$ e o cubo de $(4a + b)$. **23.** $-96a^2b - 2b^3$

24 Simplifique as expressões a seguir.

a) $(2a + 1)^3 - 6a(2a + 1)$ **24. a)** $8a^3 + 1$
b) $(a - b)^3 - 3ab(b - a)$ **24. b)** $a^3 - b^3$
c) $(x - 2y)^3 + 6xy \cdot (x - 2y)$ **24. c)** $x^3 - 8y^3$

25 Determine o polinômio que representa a medida do volume do cubo a seguir.

25. $a^3 + 15a^2 + 75a + 125$



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Cubo da soma e da diferença de dois termos

Para ampliar o estudo do **cubo da soma de dois termos**, peça aos estudantes que representem geometricamente outros exemplos com figuras. Se possível, podem construir modelos das peças em isopor ou montá-las em cartolina.

Sugira a eles que escrevam o **cubo da diferença de dois termos** como se fosse soma e, depois, calculem usando o **cubo da soma de dois termos**. Por exemplo:

- $(a - b)^3 = [a + (-b)]^3$

Nesse caso, os estudantes devem identificar os dois termos que serão utilizados no cubo da soma:

primeiro termo: a;
segundo termo: $(-b)$.

- $(a - b)^3 = [a + (-b)]^3 =$
$= a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 +$
$+ (-b)^3 =$
$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Essa é a expressão do cubo da diferença de dois termos.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 22** a **25** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

137

2. Fatoração de polinômios

Habilidades da BNCC:
EF08MA06 e **EF08MA19.**

Neste tópico, são retomados conhecimentos sobre áreas de figuras planas e desenvolvidas operações envolvendo expressões algébricas, particularmente, a fatoração de polinômios, contribuindo para o trabalho com as habilidades (EF08MA06) e (EF08MA19). Ao iniciar o estudo da fatoração de uma expressão algébrica, retome a fatoração de um número natural. Os estudantes devem compreender que fatorar um número ou uma expressão algébrica é decompor esse número ou expressão algébrica em um produto de dois ou mais fatores. Explore com eles a figura e a situação apresentadas.

Para saber mais

Nesta seção, propomos aos estudantes mais uma aplicação de cálculo mental envolvendo números, agora com a fatoração. Ao apropriar-se de técnicas de cálculo mental, eles agilizam seus procedimentos e adquirem autoconfiança, o que deve ser incentivado.

2 Fatoração de polinômios

Sabemos que um número natural pode ser decomposto em um produto de dois ou mais fatores. Esse procedimento é chamado de **fatoração**. Existem várias maneiras de fatorar um número natural. Observe alguns exemplos de fatoração do número 72.

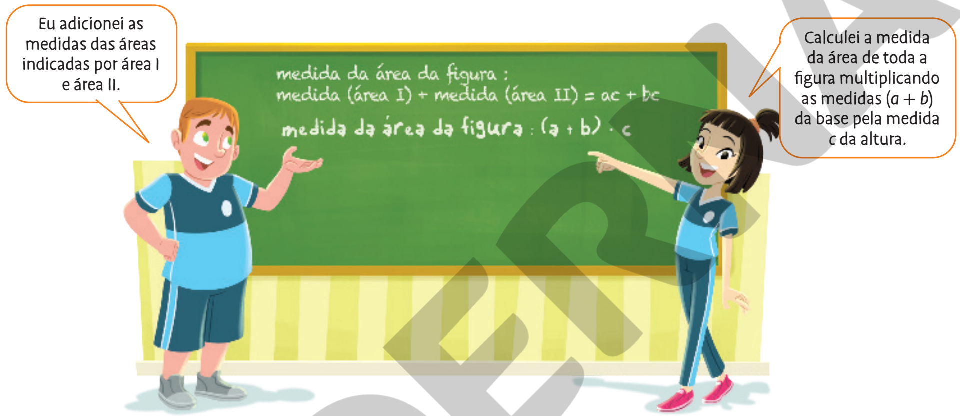
$72 = 8 \cdot 9$ $\qquad$ $72 = 6 \cdot 12$ $\qquad$ $72 = 2 \cdot 2 \cdot 18$ $\qquad$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$

Assim como os números naturais, alguns polinômios podem ser fatorados.

Fatorar um polinômio, quando possível, significa escrevê-lo como produto de polinômios mais simples.

Considere a figura e acompanhe como Bruno e Letícia determinaram a medida da área dessa figura.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Logo:

$$\underbrace{ac + bc}_{\text{polinômio}} = \underbrace{(a + b) \cdot c}_{\text{produto de polinômios}}$$

A expressão $(a + b) \cdot c$ é a forma fatorada do polinômio $ac + bc$.

A seguir, vamos estudar diferentes casos de fatoração de polinômios: fator comum em evidência, agrupamento, diferença de dois quadrados, trinômio quadrado perfeito, soma ou diferença de dois cubos.

PARA SABER MAIS

Fatorando expressões numéricas

Assim como os números, as expressões numéricas podem ser fatoradas.

Já sabemos que, pela propriedade distributiva da multiplicação, é possível desenvolver uma expressão numérica escrita na forma fatorada. Acompanhe.

- $\underbrace{3 \cdot (5 + 12)}_{\text{forma fatorada}} = \underbrace{3 \cdot 5 + 3 \cdot 12}_{\text{forma desenvolvida}}$
- $\underbrace{3{,}2 \cdot (8 - 0{,}5)}_{\text{forma fatorada}} = \underbrace{3{,}2 \cdot 8 - 3{,}2 \cdot 0{,}5}_{\text{forma desenvolvida}}$

Agora, vamos fazer o inverso, ou seja, escrever na forma fatorada expressões desenvolvidas pela aplicação da propriedade distributiva da multiplicação.

- $5 \cdot 3 + 5 \cdot 11$

  Trata-se de uma adição na qual cada parcela é um produto de dois fatores, em que o número **5** é um **fator comum**.

$$\underbrace{5 \cdot 3 + 5 \cdot 11}_{\text{forma desenvolvida}} = \underbrace{5 \cdot (3 + 11)}_{\text{forma fatorada}}$$

- $2{,}4 \cdot 7 - 2{,}4 \cdot 2$

  Cada parcela tem em comum o fator **2,4**.

$$\underbrace{2{,}4 \cdot 7 - 2{,}4 \cdot 2}_{\text{forma desenvolvida}} = \underbrace{2{,}4 \cdot (7 - 2)}_{\text{forma fatorada}}$$

Esse procedimento nos ajuda a calcular de maneira mais fácil, ou até mesmo mentalmente, o valor de algumas expressões numéricas.

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Calcule mentalmente: $0{,}21 \cdot 7 + 0{,}21 \cdot 3$. **1.** 2,1

2 Explique como você pensou para fazer o cálculo na atividade **1**.

2. Resposta possível: $0{,}21 \cdot 7 + 0{,}21 \cdot 3 = 0{,}21 \cdot (7 + 3) = 0{,}21 \cdot 10 = 2{,}1$

3 Calcule o valor de cada expressão.

a) $15 \cdot 18 + 15 \cdot 2$ **3. a)** 300

b) $5{,}4 \cdot 13 - 5{,}4 \cdot 3$ **3. b)** 54

c) $12 \cdot \frac{7}{13} + 12 \cdot \frac{6}{13}$ **3. c)** 12

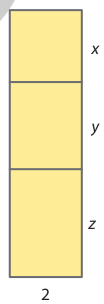
d) $4{,}5 \cdot 8 + 4{,}5 \cdot 7 - 4{,}5 \cdot 5$ **3. d)** 45

e) $3{,}8 \cdot 4{,}2 + 3{,}8 \cdot 4{,}6 + 3{,}8 \cdot 1{,}2$ **3. e)** 38

f) $10 \cdot \frac{17}{11} - 10 \cdot \frac{6}{11}$ **3. f)** 10

Fatoração colocando em evidência um fator comum

Considere a figura formada por três retângulos com base medindo 2.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A medida A da área dessa figura pode ser dada pela soma das medidas das áreas dos três retângulos:

$$A = 2x + 2y + 2z$$

Podemos também obter a medida da área considerando o retângulo maior, cuja altura mede $(x + y + z)$ e a base, comum aos três retângulos, mede 2:

$$A = 2 \cdot (x + y + z)$$

medida da base comum aos três retângulos

Logo: $2x + 2y + 2z = 2 \cdot (x + y + z)$

Nesse caso, dizemos que $2(x + y + z)$ é a **forma fatorada** do polinômio $2x + 2y + 2z$ e, também, que colocamos **em evidência o fator comum** a todos os termos (2).

Agora é com você!

As resoluções das **atividades 1** a **3** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Fatoração colocando em evidência um fator comum

Instigue os estudantes a perceber que este caso de fatoração utiliza a propriedade distributiva da multiplicação partindo do resultado para o produto indicado (ou seja, faz o caminho inverso daquele percorrido ao aplicar a propriedade distributiva).

Explore os exemplos orientando os estudantes a verificar que esse tipo de fatoração auxilia na resolução de equações do 2º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$ (para $a \neq 0$). Nesse tipo de equação, no primeiro membro o fator x é comum. Então:

$ax^2 + bx = 0$

$x \cdot (ax + b) = 0$

$x = 0$ ou $ax + b = 0$

$x = 0$ ou $ax = -b$

$x = 0$ ou $x = -\frac{b}{a}$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 26** a **29** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Fatore o polinômio $25ab^2 - 15a^3b$.

$25ab^2 = 5 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b$

$15a^3b = 3 \cdot 5 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b$

O fator comum é $5ab$.

Portanto:

$$25ab^2 - 15a^3b = 5ab(\underbrace{5b}_{25ab^2 : 5ab} - \underbrace{3a^2}_{15a^3b : 5ab})$$

b) Calcule o valor numérico do polinômio $x^2y - xy^2$, sabendo que $xy = 21$ e $x - y = 4$.

Inicialmente, vamos fatorar o polinômio:

$x^2y - xy^2 = xy \cdot (x - y)$

Agora, substituímos xy por 21 e $(x - y)$ por 4 na expressão fatorada:

$xy \cdot (x - y) = 21 \cdot 4 = 84$

c) Resolva a equação $2x^2 - 35x = 0$, em que x é um número racional.

O fator comum aos termos do polinômio $2x^2 - 35x$ é x.

Portanto: $2x^2 - 35x = 0$ ou $x(2x - 35) = 0$

Como o produto é nulo, então um dos dois fatores é obrigatoriamente nulo, ou seja:

$$x = 0 \text{ ou } 2x - 35 = 0 \Rightarrow 2x = 35 \Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{35}{2} \Rightarrow x = 17{,}5$$

Logo, as soluções da equação são 0 e 17,5.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

26 Considere o binômio $15ax^2 - 10a^2x$ e responda: **26. a)** $5ax$

a) Quais são os fatores comuns a esses termos?

b) Qual é a forma fatorada desse binômio? **26. b)** $5ax(3x - 2a)$

27 Fatore os binômios colocando os fatores comuns em evidência.

a) $ab + ac$ **27. a)** $a(b + c)$

b) $x^2 + 3x$ **27. b)** $x(x + 3)$

c) $a^2 + a$ **27. c)** $a(a + 1)$

d) $5x + 20$ **27. d)** $5(x + 4)$

e) $14a^2b + 21ab^3$ **27. e)** $7ab(2a + 3b^2)$

f) $15x^3 - 10x^2$ **27. f)** $5x^2(3x - 2)$

28 Reúna-se com um colega e resolvam os problemas a seguir. Para isso:

- leiam atentamente o enunciado e identifiquem o que é dado e o que é pedido;
- transformem em linguagem matemática (sentenças numéricas ou algébricas, esquemas, construções geométricas etc.) as informações dadas;
- com base nas relações estabelecidas no item anterior, formulem e executem um plano de resolução;
- façam a verificação das respostas obtidas.

a) Qual é o número cujo dobro de seu quadrado é igual ao seu triplo? **28. a)** 0 ou $\frac{3}{2}$

b) Qual é o número diferente de zero cujo triplo de seu quadrado é igual ao seu dobro? **28. b)** $\frac{2}{3}$

c) Observem as figuras a seguir.

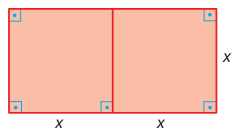


Figura 1

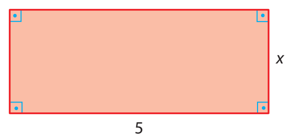


Figura 2

Na figura 1, há dois quadrados com lados medindo x e, na figura 2, um retângulo com lados medindo x e 5. Obtenham o valor de x que satisfaça a relação: as medidas das áreas da figura 1 e da figura 2 são iguais. **28. c)** 2,5

29 Fatore os polinômios a seguir.

a) $a^3 + a^2 + a$

b) $6x^2 - 9x + 12$

c) $3x + 6x^2 + 9x^3$

d) $10x^3 - 15x^2 + 20x$

e) $\frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^3}{6}$

f) $\frac{m}{12} - \frac{5m^2}{6} + \frac{2m^3}{9}$

29. a) $a(a^2 + a + 1)$ **29. b)** $3(2x^2 - 3x + 4)$ **29. c)** $3x(1 + 2x + 3x^2)$ **29. d)** $5x(2x^2 - 3x + 4)$ **29. e)** $\frac{a}{2}\left(1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{3}\right)$ **29. f)** $\frac{m}{3}\left(\frac{1}{4} - \frac{5m}{2} + \frac{2m^2}{3}\right)$

30 Fatore a expressão $x(y-2) - 7(y-2) + a(y-2)$, colocando o fator $(y-2)$ em evidência. **30.** $(y-2)(x-7+a)$

31 Sabendo que $2xy = 12$ e $3x - y = 3$, quanto vale $6x^2y - 2xy^2$? **31.** 36

32 Resolva cada equação.

a) $x^2 + 7x = 0$ **32. a)** 0 ou −7.
b) $m^2 - 5m = 0$ **32. b)** 0 ou 5.
c) $3y^2 - 18y = 0$ **32. c)** 0 ou 6.
d) $2x^2 - 9x = 0$ **32. d)** 0 ou $\frac{9}{2}$.
e) $x^2 = x$ **32. e)** 0 ou 1.
f) $4x^2 = -3x$ **32. f)** 0 ou $-\frac{3}{4}$.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

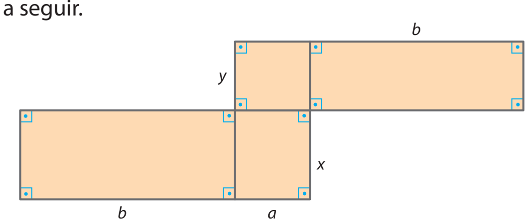
Pense mais um pouco...: $(2m+1) + (2n+1) = 2m + 2n + 2 = 2(m+n+1)$

Sejam m e n dois números naturais quaisquer. Então, $2m$ e $2n$ são dois números pares.

Lembrando que o consecutivo de um número par é um número ímpar, prove que a soma de dois números ímpares quaisquer sempre é um número par.

Fatoração por agrupamento

Considere a figura a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A expressão que representa a medida da área dessa figura é o polinômio:

$$ax + ay + bx + by$$

Observe que não há fatores comuns a todos os termos desse polinômio, mas é possível agrupá-los de modo que cada grupo tenha um fator comum. Nesse caso, o polinômio é fatorado por **agrupamento**. Acompanhe.

$ax + ay + bx + by =$
$= (ax + ay) + (bx + by) =$ ← Agrupamos convenientemente os termos.
$= a \cdot (x + y) + b \cdot (x + y) =$ ← Colocamos em evidência o fator comum de cada grupo.
$= (x + y) \cdot (a + b)$ ← Colocamos o fator comum $(x + y)$ em evidência.

Agora, acompanhe como podemos obter uma forma fatorada do polinômio $xy + 2x + 4y + 8$.

$xy + 2x + 4y + 8 =$
$= (xy + 2x) + (4y + 8) =$ ← Agrupamos convenientemente os termos.
$= x(y + 2) + 4(y + 2) =$ ← Colocamos em evidência o fator comum de cada grupo.
$= (y + 2) \cdot (x + 4)$ ← Colocamos o fator comum $(y + 2)$ em evidência.

O produto $(y + 2) \cdot (x + 4)$ é a forma fatorada do polinômio $xy + 2x + 4y + 8$.

141

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 30** e **31** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

O **exercício 32** aproveita o caso de fatoração estudado e aplica na resolução de equações. Neste momento, não é necessário que os estudantes saibam que a equação é de 2º grau; o objetivo é que utilizem a fatoração para determinar o valor de x.

a) $x^2 + 7x = 0$
$x \cdot (x + 7) = 0$ ①
$x = 0$ ou $x + 7 = 0$ ②
$x = 0$ ou $x = -7$ ③

Convém ressaltar para os estudantes as etapas de resolução:
① Colocando o fator comum x em evidência.
② Como o produto é zero, então ao menos um dos fatores é zero.
③ Esses são os valores de x que satisfazem a equação.

Para os demais itens, o procedimento é similar.

b) $m^2 - 5m = 0$
$m \cdot (m - 5) = 0$
$m = 0$ ou $m - 5 = 0$
$m = 0$ ou $m = 5$

c) $3y^2 - 18y = 0$
$3y \cdot (y - 6) = 0$
$3y = 0$ ou $y - 6 = 0$
$y = 0$ ou $y = 6$

d) $2x^2 - 9x = 0$
$x \cdot (2x - 9) = 0$
$x = 0$ ou $2x - 9 = 0$
$x = 0$ ou $x = \frac{9}{2}$

e) $x^2 = x$
$x^2 - x = 0$
$x \cdot (x - 1) = 0$
$x = 0$ ou $x - 1 = 0$
$x = 0$ ou $x = 1$

f) $4x^2 = -3x$
$4x^2 + 3x = 0$
$x \cdot (4x + 3) = 0$
$x = 0$ ou $4x + 3 = 0$
$x = 0$ ou $4x = -3$
$x = 0$ ou $x = -\frac{3}{4}$

Pense mais um pouco...

Nesta seção é trabalhada novamente a inter-relação entre a Álgebra e a Aritmética. A demonstração do fator aritmético pode ser feita usando argumentos algébricos, como segue.

Se $2m$ e $2n$ são números pares, então $2m + 1$ e $2n + 1$ são números ímpares. Adicionando esses números ímpares, obtemos:

$(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$

Assim, mostramos que a soma de dois números ímpares é um número par.

Fatoração por agrupamento

Este caso de fatoração utiliza duas ou mais vezes o caso anterior, colocando em evidência um fator comum. A dificuldade pode aparecer na escolha dos termos que devem ser agrupados para que a fatoração seja completada até o final. Ressalte esse fato para os estudantes.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 33** e **34** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

No **exercício 35**, no **item a**, ao fatorarmos $mx - my + nx - ny$ obtemos:

$(x - y)(m + n)$

Assim, considerando que $m + n = 10$ e $x - y = 2$, obtemos que:

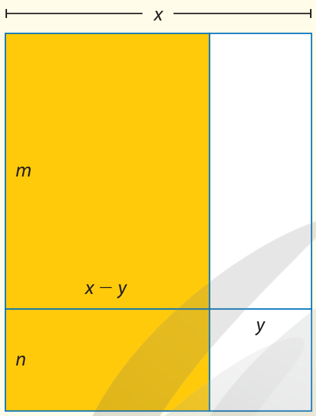
$mx - my + nx - ny =$

$= (x - y)(m + n) =$

$= 10 \cdot 2 = 20$

No **item b**, uma possível resposta é a figura a seguir.

WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA



No **item c**, podemos notar que a medida da área da região amarela dessa figura é dada pela expressão $mx - my + nx - ny$. Vamos obtê-la de duas maneiras:

$A_{\text{amarela}} = mx - my + nx - ny$ (expressão dada)

ou

$A_{\text{amarela}} = (x - y)(m + n)$ (forma fatorada da expressão dada)

Vamos fatorar a expressão dada para comprovar:

$mx - my + nx - ny =$

$= m(x - y) + n(x - y) =$

$= (x - y)(m + n)$

Janaína obteve a mesma forma fatorada para o polinômio $xy + 2x + 4y + 8$, agrupando os termos de maneira diferente. Acompanhe como ela fez.

FABIO EIJI SIRASUMA/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe alguns exemplos.

a) $ax - bx + 2a - 2b =$

$= (ax - bx) + (2a - 2b) =$

$= x(a - b) + 2(a - b) = (a - b) \cdot (x + 2)$

O produto $(a - b) \cdot (x + 2)$ é a forma fatorada do polinômio $ax - bx + 2a - 2b$.

b) $xy + 2x - 3y - 6 =$

$= (xy + 2x) - (3y + 6) =$

$= x(y + 2) - 3(y + 2) = (y + 2) \cdot (x - 3)$

O produto $(y + 2) \cdot (x - 3)$ é a forma fatorada do polinômio $xy + 2x - 3y - 6$.

c) Sabendo que $3a - b = 10$ e $a + c = 3$, calcule o valor da expressão $3a^2 + 3ac - ab - bc$.

Fatorando a expressão, obtemos:

$$3a^2 + 3ac - ab - bc = 3a(a + c) - b(a + c) = \underbrace{(a + c)}_{3} \cdot \underbrace{(3a - b)}_{10} =$$
$$= 3 \cdot 10 = 30$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

33 Fatore cada polinômio.

a) $5x - xy + 15 - 3y$ **33. a)** $(5 - y)(x + 3)$

b) $2ax + 3a + 4bx + 6b$ **33. b)** $(2x + 3)(a + 2b)$

c) $ax - 2a + x - 2$ **33. c)** $(x - 2)(a + 1)$

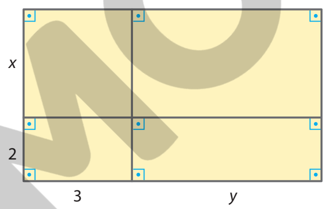
d) $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$ **33. d)** $(x + 3)(x^2 + 2)$

e) $10x^2 - 15xy - 4x + 6y$ **33. e)** $(2x - 3y)(5x - 2)$

f) $a^3 - a^2 + a - 1$ **33. f)** $(a - 1)(a^2 + 1)$

34 Considere a figura a seguir e faça o que se pede.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



a) Determine a medida da área da figura adicionando as medidas das áreas das partes que a compõem. **34. a)** $3x + 6 + xy + 2y$

b) Determine a medida da área da figura indicando o produto da medida da base pela medida da altura. **34. b)** $(3 + y)(x + 2)$

c) Fatore a expressão obtida no item **a**. **34. c)** $(x + 2)(3 + y)$

d) Escreva a igualdade entre os resultados obtidos nos itens a e b. **34. d)** $3x + 6 + xy + 2y = (3 + y)(x + 2)$

35 Considerando a expressão $mx - my + nx - ny$, faça o que se pede.

a) Sabendo que $m + n = 10$ e $x - y = 2$, determine o valor da expressão dada. **35. a)** 20

b) Faça uma figura cuja medida da área possa ser representada pela expressão dada. **35. b)** Construção de figura.

c) Escreva a medida da área da figura indicando o produto das medidas da base pela medida da altura. **35. c)** $(m + n)(x - y)$

36 *Hora de criar* – Escreva dois binômios e multiplique-os. Troque com um colega apenas o produto elaborado por cada um, sem que um saiba dos binômios do outro, para que o outro fatore. Depois destroquem para corrigi-los. **36.** Resposta pessoal.

Fatoração da diferença de dois quadrados

Já sabemos que, ao desenvolver o produto $(a+b)(a-b)$, obtemos a^2-b^2. Assim, quando obtemos $(a+b)(a-b)$ a partir de a^2-b^2, estamos fatorando o binômio a^2-b^2. Acompanhe a representação geométrica dessa situação.

A medida da área da figura 1 é dada por a^2-b^2.

Observe o que acontece quando recortamos e deslocamos a região I, conforme mostram as figuras 2 e 3.

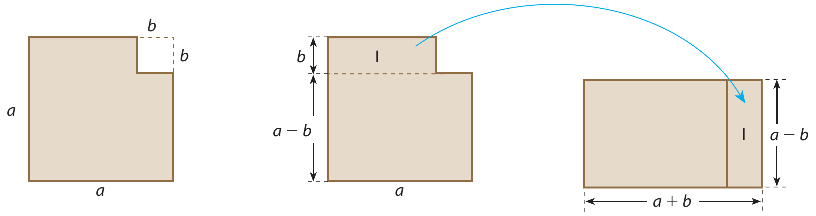


Figura 1 Figura 2 Figura 3

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Obtemos um retângulo cujos lados medem $(a+b)$ e $(a-b)$. A medida da área é dada por:

$$(a+b)\cdot(a-b)$$

Como a medida da área da figura 1 é igual à da área da figura 3, obtemos:

$$\underbrace{a^2-b^2}_{\text{diferença de dois quadrados}} = \underbrace{(a+b)\cdot(a-b)}_{\text{forma fatorada de } a^2-b^2}$$

Acompanhe alguns exemplos.

a) Fatore:

- $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

- $\frac{4}{9}a^2-49b^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2-(7b)^2=\left(\frac{2}{3}a+7b\right)\left(\frac{2}{3}a-7b\right)$

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

- $(a+b)^2-c^2=[(a+b)+c]\cdot[(a+b)-c]=(a+b+c)(a+b-c)$

- $36-(x-2)^2=6^2-(x-2)^2=[6+(x-2)]\cdot[6-(x-2)]=$
  $=(6+x-2)(6-x+2)=(4+x)(8-x)$

- $(y+2)^2-(y-2)^2=[(y+2)+(y-2)]\cdot[(y+2)-(y-2)]=$
  $=(y+\cancel{2}+y-\cancel{2})\cdot(\cancel{y}+2-\cancel{y}+2)=2y\cdot4=8y$

Exercícios propostos

A elaboração de problemas pelos estudantes, como o **exercício 36** propõe, é uma importante estratégia para levá-los a criar, desenvolver o senso crítico, aprender a pesquisar e a ensinar.

Fatoração da diferença de dois quadrados

Trabalhe com as figuras que introduzem esse caso de fatoração, que está ligado ao produto notável **produto da soma pela diferença de dois termos**. Espera-se que os estudantes percebam que, quando fatoramos um binômio desse tipo por esse caso, recaímos nesse produto notável. Por exemplo:

- $\underbrace{9-16a^2}_{\text{diferença de dois quadrados}}=\underbrace{(3-4a)(3+4a)}_{\text{produto da soma pela diferença}}$
- $49x^2-144b^4z^6=$
  $=(7x+12b^2z^3)(7x-12b^2z^3)$

Se julgar necessário, retome a potenciação de monômios e as propriedades de potências estudadas.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 37** a **41** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

No **exercício 42**, dois amigos, cujas idades hoje correspondem a dois números ímpares consecutivos, sabem que a diferença entre os quadrados dessas idades é igual a 40. Para determiná-las, observamos que, se $2x$ representa um número par, podemos afirmar que o sucessor e o antecessor de $2x$ são dois números ímpares consecutivos. Então, as idades desses amigos podem ser representadas por $2x - 1$ e $2x + 1$, e vale a igualdade:

$(2x + 1)^2 - (2x - 1)^2 = 40$

Aplicando a fatoração da diferença de dois quadrados, obtemos:

$[(2x + 1) + (2x - 1)] \cdot [(2x + 1) - (2x - 1)] = 40$

$[2x + 1 + 2x - 1] \cdot [2x + 1 - 2x + 1] = 40$

$[4x] \cdot [2] = 40$

$x = 5$

Assim:

$2x + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 10 + 1 = 11$

$2x - 1 = 2 \cdot 5 - 1 = 10 - 1 = 9$

Portanto, as idades são 9 anos e 11 anos.

Comente com os estudantes que, embora saibamos quais são as idades, sem saber qual dos amigos é o mais velho, não conseguimos identificar qual é a idade de cada um.

b) Fatore completamente a expressão $5a^2 - 20$.

Colocando o fator comum (5) em evidência, obtemos:

$5a^2 - 20 = 5\underbrace{(a^2 - 4)}_{\text{diferença de dois quadrados}} = 5(a + 2)(a - 2)$

c) Resolva a equação $x^2 - 4 = 0$, sendo x um número racional.

Ao fatorar o binômio $x^2 - 4$, obtemos:

$(x + 2)(x - 2) = 0$

O produto é nulo; logo, um dos fatores é nulo.

$x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = -2$ $\quad$ $x = 2$

Portanto, as soluções da equação são -2 e 2.

37. e) $\left(\frac{1}{10}a + \frac{1}{7}\right)\left(\frac{1}{10}a - \frac{1}{7}\right)$ **37. f)** $\left(xy + \frac{1}{3}\right)\left(xy - \frac{1}{3}\right)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

37 Fatore as diferenças de dois quadrados a seguir.

a) $x^2 - 4$ **37. a)** $(x + 2)(x - 2)$

b) $a^2 - 36$ **37. b)** $(a + 6)(a - 6)$

c) $y^2 - 1$ **37. c)** $(y + 1)(y - 1)$

d) $25x^2 - 4$ **37. d)** $(5x + 2)(5x - 2)$

e) $\frac{1}{100}a^2 - \frac{1}{49}$

f) $x^2y^2 - \frac{1}{9}$

38 Fatore as expressões a seguir.

a) $15xy + 9x$ **38. a)** $3x(5y + 3)$

b) $15xy + 9x + 10y + 6$ **38. b)** $(3x + 2)(5y + 3)$

c) $100x^2 - 1$ **38. c)** $(10x + 1)(10x - 1)$

d) $36a^2b - 48ab^2$ **38. d)** $12ab(3a - 4b)$

e) $(x - 1)^2 - 1$ **38. e)** $x(x - 2)$

f) $(x + 5)^2 - 9$ **38. f)** $(x + 8)(x + 2)$

g) $25 - (x + y)^2$ **38. g)** $(5 + x + y)(5 - x - y)$

h) $9a^2 - (a - 5)^2$ **38. h)** $(4a - 5)(2a + 5)$

39 Fatore completamente as expressões.

a) $a^3 - a$ **39. a)** $a(a + 1)(a - 1)$

b) $12x^3 - 3xy^2$ **39. b)** $3x(2x + y)(2x - y)$

c) $a^2b - b^3$ **39. c)** $b(a + b)(a - b)$

d) $a^3 - 9a$ **39. d)** $a(a + 3)(a - 3)$

40 Considerando x um número racional, resolva cada equação.

a) $x^2 - 25 = 0$ **40. a)** 5 ou -5

b) $x^2 - 64 = 0$ **40. b)** 8 ou -8

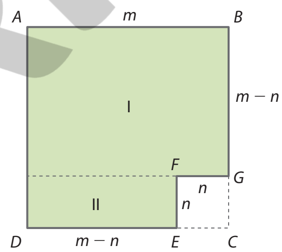
c) $81x^2 - 49 = 0$ **40. c)** $\frac{7}{9}$ ou $-\frac{7}{9}$

d) $25x^2 - 36 = 0$ **40. d)** $-\frac{6}{5}$ ou $\frac{6}{5}$

e) $9x^2 - 1 = 0$ **40. e)** $-\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3}$

f) $x^2 - \frac{9}{16} = 0$ **40. f)** $-\frac{3}{4}$ ou $\frac{3}{4}$

41 Na figura a seguir, o lado do quadrado *ABCD* mede m e o lado do quadrado *CEFG* mede n.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

a) Escreva a medida da área da parte pintada como diferença de dois quadrados. **41. a)** $m^2 - n^2$

b) Determine a expressão que fornece a medida da área da região I. **41. b)** $m(m - n)$

c) Determine a expressão que fornece a medida da área da região II. **41. c)** $n(m - n)$

d) Determine a expressão da soma das medidas das áreas das regiões I e II.

e) Fatore o polinômio obtido no item **d**.

f) Escreva a igualdade entre os resultados obtidos nos itens **a** e **e**.

41. d) $m(m - n) + n(m - n)$ **41. e)** $(m - n)(m + n)$

41. f) $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$

42 Mário e Vítor descobriram que suas idades hoje correspondem a dois números ímpares consecutivos.

Eles verificaram ainda que a diferença entre os quadrados de suas idades é 40. Quais são as idades dos dois amigos? **42.** Um tem 9 anos e o outro, 11.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Faça o que se pede. *Pense mais um pouco...:* **d)** $(138 + 137) \cdot (138 - 137) = 275$. São iguais.

a) Fatore a expressão numérica $76^2 - 75^2$. **a)** $(76 + 75) \cdot (76 - 75)$

b) Dê o resultado da expressão do item **a**. **b)** 151

c) Compare o resultado do item **b** com a adição $(76 + 75)$. **c)** São iguais.

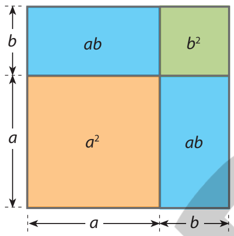
d) Fatore a expressão $138^2 - 137^2$, calcule seu valor numérico e compare-o com a adição $(138 + 137)$.

e) Calcule mentalmente o valor numérico da expressão $221^2 - 220^2$ e, em seguida, escreva como procedeu a esse cálculo. **e)** 441. Espera-se que os estudantes percebam que a diferença dos quadrados de dois números consecutivos é a soma desses números.

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Trinômio quadrado perfeito: $a^2 + 2ab + b^2$

A medida da área da figura apresentada pode ser obtida adicionando as medidas das áreas de suas partes: $a^2 + 2ab + b^2$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

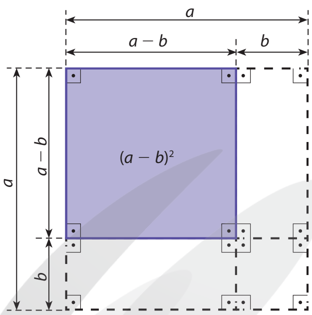
Como se trata de um quadrado, a medida da sua área também pode ser calculada elevando a medida do lado ao quadrado: $(a + b)^2$.

Portanto:

$$\underbrace{a^2 + 2ab + b^2}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = \underbrace{(a + b)^2}_{\text{forma fatorada de } a^2 + 2ab + b^2}$$

Trinômio quadrado perfeito: $a^2 - 2ab + b^2$

Observe a figura a seguir.



REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

Analisando-a, percebe-se que a medida da área da parte roxa pode ser obtida da seguinte maneira:

$$a^2 - 2 \cdot b(a - b) - b^2 =$$
$$= a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 =$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

Como a parte roxa é uma figura quadrada, a medida da sua área também pode ser calculada elevando a medida do lado ao quadrado: $(a - b)^2$.

Logo:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Portanto, a forma fatorada de $a^2 - 2ab + b^2$ é $(a - b)^2$.

Pense mais um pouco...

Para esta seção, apresentamos a seguinte resolução:

a) $76^2 - 75^2 = (76 + 75) \cdot (76 - 75)$

b) $(76 + 75) \cdot (76 - 75) =$
$= 151 \cdot 1 = 151$

d) Fazemos:
$138^2 - 137^2 =$
$= (138 + 137) \cdot (138 - 137) =$
$= 275 \cdot 1 = 275$
Agora, $138 + 137 = 275$; portanto, o resultado de $(138^2 - 137^2)$ é igual ao resultado de $(138 + 137)$.

e) $221^2 - 220^2 = (221 + 220) = 441$

Espera-se que os estudantes percebam que a diferença entre os quadrados de dois números consecutivos é a soma desses números.

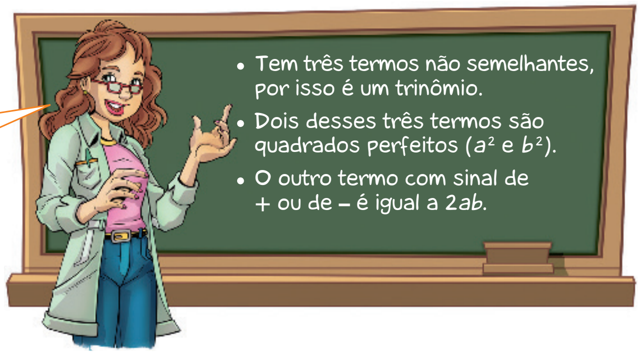
Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Trabalhe com as figuras nos dois casos, reproduzindo-as na lousa e mostrando as etapas aos estudantes. Essa fatoração está ligada aos produtos notáveis **quadrado da soma** e **quadrado da diferença de dois termos**.

Fatoração do trinômio quadrado perfeito

Após trabalhar os exemplos propostos, é importante discutir com os estudantes situações nas quais temos expressões algébricas cujo caso de fatoração não pode ser aplicado. É o que acontece com os trinômios, que não correspondem a quadrados perfeitos, e com os binômios que não configuram diferença de dois quadrados.

Para fatorar um trinômio quadrado perfeito, devemos observar estes itens.



ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe alguns exemplos.

a) $x^2 + 6x + 9$

x^2 $\quad$ 3^2

$2 \cdot x \cdot 3 = 6x$

$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

b) $16a^2 - 24ab + 9b^2$

$(4a)^2$ $\quad$ $(3b)^2$

$2 \cdot 4a \cdot 3b = 24ab$

$16a^2 - 24ab + 9b^2 = (4a - 3b)^2$

Acompanhe, agora, outros exemplos.

a) Verifique se o seguinte trinômio é quadrado perfeito:

$x^2 + 8x + 9$

x^2 $\quad$ 3^2

O dobro do produto das raízes é: $2 \cdot x \cdot 3 = 6x \neq 8x$.

Logo, $x^2 + 8x + 9$ não é um trinômio quadrado perfeito. Ele não pode ser escrito como o quadrado de um binômio.

b) Fatore:

$a^3 + 2a^2b + ab^2$

Colocando a em evidência, obtemos:

$$a^3 + 2a^2b + ab^2 = a(a^2 + 2ab + b^2) = a(a + b)^2$$

c) Sabendo que $a^2 + b^2 = 234$ e $ab = 45$, calcule o valor de $(a + b)^2$.

Como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, obtemos:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 =$

$= a^2 + b^2 + 2ab = 234 + 2 \cdot (45) =$

$= 234 + 90 = 324$

Substituímos $a^2 + b^2$ por 234 e ab por 45.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

d) Resolva a equação $4x^2 - 4x + 1 = 0$, sabendo que x é um número racional.

O primeiro membro dessa equação é um trinômio quadrado perfeito. Ao fatorar esse trinômio, obtemos $(2x - 1)^2 = 0$.

Uma potência só é nula quando a base também é nula. Assim, temos:

$2x - 1 = 0$ ou, ainda, $x = \frac{1}{2}$

Logo, a solução da equação $4x^2 - 4x + 1$ é o número $\frac{1}{2}$.

51. a) Sim. Observe: $3x^2 + 9x - 30 = (3x - 6)(x + 5) = 3(x - 2)(x + 5) = (x - 2)(3x + 15)$

51. b) Fatorando o trinômio, obtemos os polinômios $(x - 1)$ e $(x - 1)$, cujo produto dá o polinômio apresentado por Juvenal.

51. c) Sim, pois Juvenal obteve o polinômio como produto de dois polinômios do 1º grau com uma única variável. Não foi exigido que os polinômios fossem diferentes.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

43. São quadrados perfeitos os trinômios dos itens **a**, **c**, **e**, **f**. Respostas possíveis: **b)** $y^2 + 20y + 100$; **d)** $16a^2 + 24ab + 9b^2$.

43 Identifique os trinômios que são quadrados perfeitos e modifique os demais para que passem a ser também.

a) $x^2 + 4x + 4$
b) $y^2 + 5y + 100$
c) $a^2 + 10a + 25$
d) $16a^2 + 36ab + 9b^2$
e) $m^2 + n^2 + 2mn$
f) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

44 Fatore os trinômios quadrados perfeitos a seguir.

a) $x^2 + 6x + 9$ **44. a)** $(x + 3)^2$
b) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ **44. b)** $(2x + 3y)^2$
c) $x^4 - 4x^2 + 4$ **44. c)** $(x^2 - 2)^2$
d) $x^2y^2 - 10xy + 25$ **44. d)** $(xy - 5)^2$
e) $\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{21}x + \frac{1}{49}$ **44. e)** $\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{7}\right)^2$
f) $0{,}25a^2 - 0{,}30a + 0{,}09$ **44. f)** $(0{,}5a - 0{,}3)^2$

45 Escreva o binômio que, elevado ao quadrado, dá o trinômio $81 + 90a + 25a^2$. **45.** $9 + 5a$

46 A medida da área de um quadrado é representada pelo trinômio $y^2 + 14ya + 49a^2$. Determine a medida do lado desse quadrado. **46.** $y + 7a$

47 Fatore completamente:

a) $2x^3 + 4x^2 + 2x$
b) $5a^2 - 20a + 20$
c) $3x^3 + 18x^2 + 27x$
d) $7x^2y^2 - 14xy + 7$
e) $9a^3 - 25a$
f) $16x^4 - 8x^2 + 1$

47. a) $2x(x + 1)^2$ **47. b)** $5(a - 2)^2$ **47. c)** $3x(x + 3)^2$ **47. d)** $7(xy - 1)^2$ **47. e)** $a(3a + 5)(3a - 5)$ **47. f)** $(2x + 1)^2(2x - 1)^2$

48 *Hora de criar* – Elabore duas expressões que sejam quadrado de uma soma e duas que sejam quadrado de uma diferença. Desenvolva-as como trinômios do quadrado perfeito. Em seguida, troque com um colega os trinômios desenvolvidos para que cada um fatore e obtenha os quadrados da soma e da diferença daquilo que o outro elaborou. Depois, desfaçam a troca e verifiquem se as fatorações estão corretas. **48.** Resposta pessoal.

49 Calcule os valores pedidos nas expressões.

a) Sabendo que $(a + b)^2 = 64$ e $ab = 12$, calcule o valor de $a^2 + b^2$. **49. a)** 40
b) Se $(a + b)^2 = 81$ e $a^2 + b^2 = 53$, calcule o valor de ab. **49. b)** 14
c) Sendo $a^2 + b^2 = 13$ e $ab = 12$, calcule o valor de $(a + b)^2$. **49. c)** 37

50 Obtenha os números que são soluções das equações a seguir.

a) $x^2 + 18x + 81 = 0$ **50. a)** -9
b) $y^2 - 2y + 1 = 0$ **50. b)** 1
c) $4a^2 - 12a + 9 = 0$ **50. c)** $\frac{3}{2}$

51 A professora do 8º ano propôs o Jogo dos polinômios escondidos. Acompanhe.

Número de participantes: 2 jogadores

Regras:

- A partir de dois polinômios, cada jogador deve determinar o produto e formar um novo polinômio, sem que o outro jogador saiba.
- Os dois polinômios iniciais devem ser do 1º grau com uma única variável.
- Cada jogador apresenta para seu oponente apenas o polinômio que formou.
- Vence aquele que descobrir primeiro dois polinômios cujo produto resulte no polinômio apresentado.

Pensando na estrutura do jogo, responda:

a) Roberto apresentou para Juvenal o polinômio $3x^2 + 9x - 30$, que ele formou com o produto dos polinômios $(3x - 6)$ e $(x + 5)$. É possível obter outro par de polinômios cujo produto dê o polinômio formado por Roberto? Justifique sua resposta.
b) Juvenal apresentou para Roberto o polinômio $x^2 - 2x + 1$. Determine um par de polinômios que Roberto pode encontrar.
c) O polinômio formado por Juvenal segue as regras do jogo? Justifique.

Exercícios propostos

Nesta série de exercícios, os estudantes aplicarão mais de um caso de fatoração em uma expressão para fatorá-la completamente.

As resoluções dos **exercícios 43** a **46** e dos **exercícios 48**, **49** e **51** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

No **exercício 47**, a fatoração dos polinômios deve ser feita em duas etapas. Convém lembrar aos estudantes que nem sempre é conveniente colocar o fator comum em evidência como primeira fatoração.

a) $2x^3 + 4x^2 + 2x =$
$= 2x \cdot (x^2 + 2x + 1) =$
$= 2x \cdot (x + 1)^2$

b) $5a^2 - 20a^2 + 20 =$
$= 5 \cdot (a^2 - 4a + 4) =$
$= 5 \cdot (a - 2)^2$

c) $3x^3 + 18x^2 + 27x =$
$= 3x \cdot (x^2 + 6x + 9) =$
$= 3x \cdot (x + 3)^2$

d) $7x^2y^2 - 14xy + 7 =$
$= 7 \cdot (x^2y^2 - 2xy + 1) =$
$= 7 \cdot (xy - 1)^2$

e) $9a^3 - 25a =$
$= a \cdot (9a^2 - 25) =$
$= a \cdot [(3a)^2 - (5)^2] =$
$= a \cdot [(3a + 5) \cdot (3a - 5)] =$
$= a(3a + 5) \cdot (3a - 5)$

f) $16x^4 - 8x^2 + 1 =$
$= (4x^2)^2 - 2 \cdot 4x^2 \cdot 1 + 1^2 =$
$= (4x^2 - 1)^2 =$
$= [(2x)^2 - 1^2]^2 =$
$= [(2x + 1) \cdot (2x - 1)]^2 =$
$= (2x + 1)^2 \cdot (2x - 1)^2$

No exercício 50, para obter os números que são soluções das equações, precisamos escrever cada polinômio do primeiro membro na forma fatorada:

a) $x^2 + 18x + 81 = 0$
$(x + 9)^2 = 0$
$(x + 9) \cdot (x + 9) = 0$ ①
$x + 9 = 0$ ou $x + 9 = 0$ ②
$x = -9$ ou $x = -9$ ③

Convém destacar aos estudantes as etapas de resolução:

① Como o produto é zero, então um dos fatores é nulo.
② Temos o mesmo binômio.
③ Logo, a solução é a mesma.

Portanto, x é igual a -9.

Para os demais itens, o procedimento é similar.

b) $y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y - 1)^2 = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

c) $4a^2 - 12a + 9 = 0 \Rightarrow (2a - 3)^2 = 0 \Rightarrow 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Pense mais um pouco...

Incentive os estudantes a discutir o problema e a comentar como a fatoração pode auxiliar na resolução da situação proposta. Como a caixa tem formato que pode ser associado a um bloco retangular, seu volume é dado pelo produto da medida de três arestas que têm um vértice em comum (que correspondem às medidas da largura, do comprimento e da altura da caixa).

Fatorando a expressão dada, obtemos:

$3x^2 - 36x + 108 =$
$= 3(x^2 - 12x + 36) =$
$= 3(x^2 - 2 \cdot 6x + 6^2) =$
$= 3(x - 6)^2$

Se julgar conveniente, construa com os estudantes a caixa descrita na atividade. Para sua construção, lembre-os de que devem utilizar tesouras de pontas arredondadas e manuseá-las com cuidado.

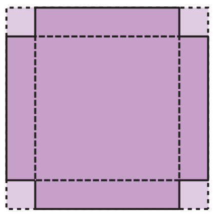
Fatoração da diferença e da soma de dois cubos

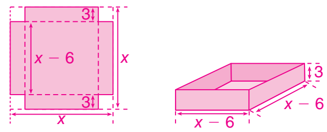
Neste tópico, apresentamos a fatoração da diferença e da soma de dois cubos, ligadas aos produtos notáveis **cubo da soma** e **da diferença de dois termos**.

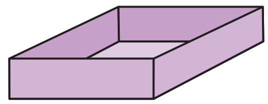
Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com um colega, leiam o texto e façam o que se pede.

De uma folha de cartolina quadrada de x cm de lado, foram recortados quatro quadrados iguais, um em cada canto. Dobrando essa cartolina e colando os lados, obtém-se uma caixa aberta, conforme mostram as figuras a seguir.


folha de cartolina




caixa

A medida da capacidade da caixa montada com a folha de cartolina é dada pela expressão $3x^2 - 36x + 108$.

Fatorem completamente essa expressão, reproduzam as figuras e identifiquem todas as medidas, observando a expressão fatorada que vocês encontraram. *Pense mais um pouco...*: $3(x - 6)^2$

Fatoração da diferença e da soma de dois cubos

Pesquisando os produtos
$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$ e $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$,
descobrimos mais um caso de fatoração.

Diferença de dois cubos

$$(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3$$

Então: $a^3 - b^3 = \underbrace{(a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}_{\text{forma fatorada de } a^3 - b^3}$

Soma de dois cubos

$$(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 - \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3$$

Então: $a^3 + b^3 = \underbrace{(a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)}_{\text{forma fatorada de } a^3 + b^3}$

Acompanhe alguns exemplos.

a) $a^3 - 8 = (a - 2) \cdot (a^2 + 2a + 4)$

b) $8x^3 + 27 = (2x + 3) \cdot (4x^2 - 6x + 9)$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

52 Fatore os binômios.
52. a) $(a-1)(a^2+a+1)$ 52. b) $(2a+1)(4a^2-2a+1)$ 52. c) $(x-3)(x^2+3x+9)$ 52. d) $(x+4)(x^2-4x+16)$ 52. e) $(1-x)(1+x+x^2)$ 52. f) $(3a+2y)(9a^2-6ay+4y^2)$

a) a^3-1 b) $8a^3+1$ c) x^3-27 d) x^3+64 e) $1-x^3$ f) $27a^3+8y^3$

53 Classifique como verdadeira ou falsa cada sentença.

a) $a^3+b^3=(a+b)^3$ 53. a) Falsa.
b) $a^3+b^3=(a^2-ab+b^2)(a+b)$ 53. b) Verdadeira.
c) $a^3-b^3=(a-b)(a^2-ab+b^2)$ 53. c) Falsa.
d) $a^3-b^3=(a^2+ab+b^2)(a-b)$ 53. d) Verdadeira.

3 Simplificando frações algébricas

Já vimos que simplificar uma fração numérica significa determinar outra com termos mais simples e que seja equivalente à fração dada. Um dos modos de fazer isso é decompor o numerador e o denominador em fatores primos e cancelar os fatores comuns.

Acompanhe alguns exemplos.

a) $\frac{42}{24}=\frac{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot 7}{\cancel{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\cancel{3}}=\frac{7}{4}$

b) $\frac{75}{30}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdot 5}{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}}=\frac{5}{2}$

ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe outros exemplos.

a) $\frac{6ab^2x^3}{9a^3b^2x^2}=\frac{2\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{a}\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}\cdot x}{\cancel{3}\cdot 3\cdot\cancel{a}\cdot a\cdot a\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{b}\cdot\cancel{x}\cdot\cancel{x}}=\frac{2x}{3a^2}$

b) $\frac{\cancel{5x}}{\cancel{5x}}=1$

c) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}=\frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{(x+2)^{\cancel{2}}}=\frac{x-2}{x+2}$

d) $\frac{4x^2-y^3}{y^3-4x^2}=\frac{4x^2-y^3}{-(-y^3+4x^2)}=\frac{\cancel{(4x^2-y^3)}}{-\cancel{(4x^2-y^3)}}=-1$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

54 Dê um exemplo de fração algébrica em que o numerador e o denominador sejam iguais.

a) Qual é o valor dessa fração? 54. a) Resposta pessoal. 1.
b) Faça o mesmo para uma fração algébrica na qual o numerador e o denominador sejam opostos. 54. b) Resposta pessoal. –1.

55 Reduza cada fração algébrica a um polinômio.

a) $\frac{a^2-a}{a}$ 55. a) $a-1$
b) $\frac{x^2-16}{x+4}$ 55. b) $x-4$
c) $\frac{3x^2+6x+3}{x+1}$ 55. c) $3x+3$
d) $\frac{5a^2-20}{a-2}$ 55. d) $5a+10$

56 A fração algébrica $\frac{10a+5b}{2a+b}$ pode ser reduzida a um número inteiro. Que número é esse? 56. 5

57 O quociente do monômio $15a^5b$ pelo monômio $4a^2b^3$ não é um monômio.
57. a) $\frac{15a^3}{4b^2}$ 57. b) $-\frac{15}{2}$

a) Determine na forma reduzida a fração que representa esse quociente.
b) Dê o valor numérico dessa fração para $a=-2$ e $b=2$.
c) Para que valor de b essa fração não representa um número racional? 57. c) $b=0$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 52** e **53** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

3. Simplificando frações algébricas

Habilidade da BNCC: **EF08MA06**.

O trabalho com a simplificação de frações algébricas tem por base a aplicação das técnicas de fatoração e, assim, permite o desenvolvimento da habilidade (EF08MA06).

Converse com os estudantes sobre um tipo de erro muito comum: o cancelamento do denominador com apenas uma das parcelas do numerador. É importante destacar também a condição de existência da fração algébrica, que não pode ter seu denominador anulado.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 54** a **57** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 58** a **60** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Pense mais um pouco...

O lúdico e o desafio têm presença nesta seção, com texto apresentado em forma de história em quadrinhos.

A atividade pode ser desenvolvida em duplas ou trios. Depois que os estudantes discutirem a questão e perceberem a justificativa algébrica, proponha a cada grupo que crie um desafio desse tipo para trocar com outro grupo: um resolve o desafio do outro.

Ao final, um representante da dupla (ou trio) deve mostrar na lousa o desafio e como foi resolvido. Valide com a turma os desafios criados e suas resoluções.

58 Observe estes cartões coloridos.

$\dfrac{1}{x+2}$	$\dfrac{y}{x+2y}$	$\dfrac{x-5}{2}$	$\dfrac{x-y}{3}$

Cada cartão corresponde à simplificação de uma das frações a seguir. Efetue os cálculos e indique a cor do cartão que corresponde a cada uma delas. **58.** Amarelo: **d**; vermelho: **c**; azul: **a**; verde: **b**.

a) $\dfrac{10xy}{10x^2 + 20xy}$

b) $\dfrac{x^2 - 2xy + y^2}{3x - 3y}$

c) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

d) $\dfrac{x^2 - 10x + 25}{2x - 10}$

59 Dividindo o numerador pelo denominador da fração algébrica obtém-se um binômio.

$$\frac{6x^2 + 11x - 10}{2x + 5}$$

a) Determine esse binômio. **59. a)** $3x - 2$

b) Calcule mentalmente o valor numérico desse binômio para $x = 0$. **59. b)** -2

c) Determine o valor numérico desse binômio para $x = \frac{2}{3}$. **59. c)** Zero.

d) Que valores racionais x pode assumir nessa fração algébrica?

59. d) Qualquer número racional diferente de $-\frac{5}{2}$.

60 Reúna-se com um colega e observem como Marta e Cláudio fizeram a simplificação da fração algébrica $\dfrac{x^2 + x}{x}$.

Marta	Cláudio
$\dfrac{x^2 + x}{x} = x + 1$	$\dfrac{x^2 + \cancel{x}}{\cancel{x}} = x^2$

60. a) Marta.
Resposta possível: fizemos a simplificação para conferir.

a) Quem acertou? Como vocês chegaram a essa conclusão?

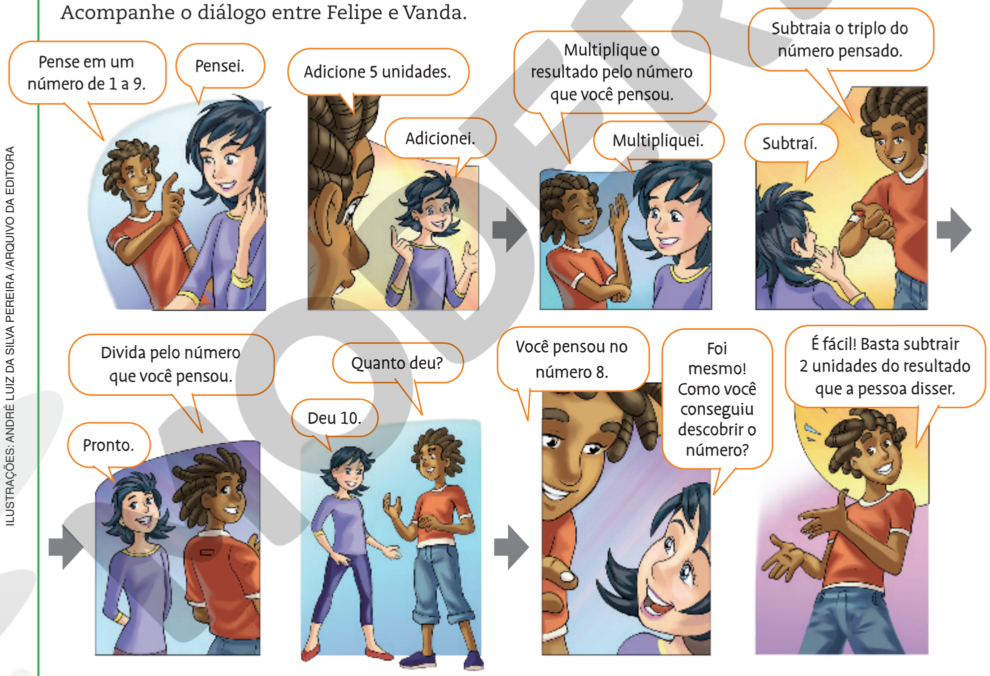
b) Comentem o modo como cada um deles fez a simplificação e identifiquem qual foi o erro.

60. b) Marta colocou x em evidência, visto que ele é fator comum em $x^2 + x$. Assim, pôde efetuar a simplificação com o x do denominador. Cláudio errou ao simplificar a parcela x do numerador com o x do denominador.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Avalie a conveniência de pedir aos estudantes que atribuam algum valor para x e verifiquem quais das simplificações resultam em mesmo valor.

Acompanhe o diálogo entre Felipe e Vanda.



Escrevendo uma sentença algébrica, explique por que Felipe disse que basta subtrair 2.

Pense mais um pouco...: $\dfrac{(x+5)x - 3x}{x} = \dfrac{x^2 + 2x}{x} = \dfrac{x(x+2)}{x} = x + 2$, com $x \neq 0$

Problemas e equações

Considere o problema a seguir.

Um projeto social distribuiria 160 bolas entre algumas escolas de certo município. No dia da partilha, houve duas novas inscrições no projeto. Por isso, cada escola recebeu $\frac{4}{5}$ do número de bolas que teria recebido se não tivesse havido novas inscrições.


ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA /ARQUIVO DA EDITORA

Quantas escolas estavam inscritas inicialmente no projeto?

Vamos indicar por x o número de escolas inscritas inicialmente.

- Número de bolas que cada escola recebeu: $\frac{160}{x+2}$
- Número de bolas que cada escola teria recebido: $\frac{160}{x}$

Portanto:

$$\frac{160}{x+2} = \frac{4}{5} \cdot \frac{160}{x} \text{ ou } \frac{160}{x+2} = \frac{640}{5x}$$

Para resolver essa equação, em primeiro lugar, devemos observar que x **não** pode assumir os valores -2 e 0, pois anularia os denominadores.

Multiplicando os termos da equação por $(x + 2)(5x)$, obtemos:

$$\frac{160 \cdot \cancel{(x+2)}(5x)}{\cancel{x+2}} = \frac{640 \cdot (x+2)\cancel{(5x)}}{\cancel{5x}}$$

$$\cancel{160}^{1} \cdot (5x) = \cancel{640}^{4} \cdot (x+2)$$

$$5x = 4x + 8$$

$$x = 8$$

O número 8 não anula nenhum dos denominadores.

Portanto, foram inscritas inicialmente 8 escolas.

Acompanhe outro exemplo.

Vamos resolver a equação $\frac{2}{x+3} = \frac{5}{x}$, para x racional, sendo $x \neq -3$ e $x \neq 0$.

Multiplicando os termos da equação por $x(x + 3)$, múltiplo de todos os denominadores, obtemos:

$$\frac{2}{\cancel{x+3}} \cdot x\cancel{(x+3)} = \frac{5}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}(x+3)$$

$$2x = 5x + 15$$

$$2x - 5x = 15$$

$$-3x = 15$$

$$x = -5$$

O número -5 não anula nenhum dos denominadores.

Portanto, a raiz e solução da equação é -5.

Problemas e equações

Neste tópico, apresentamos alguns problemas que podem ser resolvidos com equações envolvendo frações algébricas e o uso de fatoração. Tais equações recaem em equações do 1º grau; entretanto, é necessário discutir a condição de existência e eliminar das possibilidades de solução os valores que anulam os denominadores das frações algébricas envolvidas.

Explore os exemplos com os estudantes, reproduzindo-os na lousa e pedindo a eles que justifiquem as etapas.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 61** a **64** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Apresentamos a seguir a resolução do **exercício 65**, destacando inicialmente algumas considerações sobre as informações do enunciado.

- A área da chácara menor mede $2\,880$ m².
- O número de lotes da chácara menor é dado por x.
- A área da chácara maior mede $5\,040$ m².
- O número de lotes da chácara maior é dado por $2x - 2$.

Dividindo a medida da área de cada chácara pela quantidade de lotes em que ela foi igualmente repartida, obtemos a medida da área de cada lote; no caso, todos têm áreas de mesma medida (seja a da chácara maior, seja a da chácara menor). Assim:

$$\frac{2\,880}{x} = \frac{5\,040}{2x - 2}$$

Fatorando os denominadores, obtemos:

$$\frac{2\,880}{x} = \frac{5\,040}{2(x - 1)}$$

Simplificando:

$$\frac{2\,880}{x} = \frac{2\,520}{(x - 1)}$$

Observando a condição de existência dos denominadores, concluímos que $x \neq 0$ e $x \neq 1$ (valores que anulam algum dos denominadores).

Agora, vamos multiplicar membro a membro por um múltiplo de todos os denominadores, assumindo a condição de existência de cada fração algébrica:

$$\frac{2\,880}{x} = \frac{2\,520}{(x - 1)}$$

$$\frac{2\,880}{x} \cdot x \cdot (x - 1) =$$

$$= \frac{2\,520}{(x - 1)} \cdot x \cdot (x - 1)$$

$$2\,880 \cdot (x - 1) = 2\,520 \cdot x$$

$$2\,880x - 2\,880 = 2\,520x$$

$$360x = 2\,880$$

$x = 8$ (que é diferente de 0 e de 1)

Logo, a chácara menor foi dividida em 8 lotes (**item a**).

Desse modo, substituindo x por 8 na expressão $2x - 2$, determinamos a quantidade de lotes da chácara maior:

$$2x - 2 = 2 \cdot 8 - 2 = 16 - 2 = 14$$

Portanto, a chácara maior foi dividida em 14 lotes (**item b**).

Finalmente, para determinar a medida da área de cada lote, podemos utilizar $\frac{2\,880}{x}$ ou $\frac{5\,040}{(2x - 2)}$ e substituir x por 8. Assim:

$$A_{lote} = \frac{2\,880}{8} = 360$$

Portanto, concluímos que a área de cada lote mede 360 m² (**item c**).

Pense mais um pouco...

A resolução da atividade desta seção está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

61 Determine mentalmente o valor que x não pode assumir nas seguintes equações:

a) $\frac{5}{x} = \frac{10}{2}$ **61. a)** $x \neq 0$

b) $\frac{2}{x - 2} = 1$ **61. b)** $x \neq 2$

c) $\frac{3}{x} = 3$ **61. c)** $x \neq 0$

d) $\frac{5x}{x + 1} = 4$ **61. d)** $x \neq -1$

62 Resolva as equações a seguir.

a) $\frac{12}{x} = \frac{4}{x - 2}$, sendo $x \neq 0$ e $x \neq 2$ **62. a)** 3

b) $\frac{-4}{x} = \frac{4}{x - 2}$, sendo $x \neq 0$ e $x \neq 2$ **62. b)** 1

63 Em uma distribuição de 720 kg de alimentos, duas famílias não compareceram, o que possibilitou a cada uma das outras famílias receber 40 kg de alimentos.

a) Quantas famílias deveriam receber os alimentos? **63. a)** 20 famílias.

b) Quantas famílias compareceram? **63. b)** 18 famílias.

c) Se todas as famílias tivessem comparecido, quantos quilogramas de alimento cada uma teria recebido? **63. c)** 36 quilogramas.

64 Lúcia pensou em um número, adicionou 4 unidades e dividiu o resultado pela diferença entre o número pensado e 2. Em seguida, subtraiu 6 unidades do número pensado e dividiu o resultado pela diferença entre esse número e 9. Ao obter a resposta, Lúcia percebeu que os dois quocientes eram iguais.

a) Em que número Lúcia pensou? **64. a)** 16

b) Qual foi o quociente obtido? **64. b)** $\frac{10}{7}$

65 Uma chácara de $5\,040$ m² e outra de $2\,880$ m² foram divididas em lotes de mesma área. A chácara maior teve o dobro de lotes da chácara menor menos 2 lotes.

a) Em quantos lotes foi dividida a chácara menor? **65. a)** 8 lotes.

b) E a chácara maior? **65. b)** 14 lotes.

c) Quantos metros quadrados tem cada lote? **65. c)** 360 m²

Pense mais um pouco...

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Reúna-se com um colega, leiam o texto e, depois, façam o que se pede.

José e Luís são irmãos. Luís tem um filho a mais que José.

Acompanhem o diálogo entre eles.

ILUSTRAÇÕES: ANDRÉ LUIZ DA SILVA PEREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Descubram quantos filhos tem José e quantos metros quadrados couberam a cada filho.
Pense mais um pouco...: 3 filhos; 240 m².

152

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Construindo um gráfico de barras

Você já ouviu falar em gerações X, Y e Z?

Há estudos que nomeiam as gerações de acordo com a época de seu nascimento, porém com datas não consensuais:

- de 1960 até 1979 → Geração X
- de 1980 até 1990 → Geração Y
- de 1991 até 2010 → Geração Z

A época em que uma pessoa nasce influencia diretamente seus hábitos e gostos, sobretudo devido aos recursos disponíveis em cada momento histórico.

Buscando encontrar semelhanças e diferenças entre as gerações, uma revista de psicologia entrevistou 300 pessoas, sendo 100 de cada geração. Cada entrevistado respondeu a 5 perguntas e chegou-se a estes números:

	Número de respostas positivas (por geração)		
	X	Y	Z
Pratica atividade física?	33	41	54
Lê jornal impresso?	51	34	8
Tem animal de estimação?	18	10	3
Tem perfil em rede social?	32	86	97
Troca mensagens via celular?	9	21	58

Dados obtidos pela revista de psicologia.

Esses mesmos dados podem ser representados por meio de um gráfico de barras, tomando-se alguns cuidados:

- escolher uma escala adequada, ou seja, um tamanho que caiba no papel e, ao mesmo tempo, que não seja tão pequena a ponto de dificultar a leitura dos dados;
- elaborar uma legenda que possibilite a leitura e a interpretação desses dados;
- escrever nos locais corretos o título do gráfico e o que cada eixo representa.

Por exemplo, pode-se começar um gráfico assim:

- Para cada pergunta feita, devem ser associadas 3 barras, cada uma representando uma geração. Para diferenciá-las, usamos cores diferentes e as respectivas legendas: geração X em roxo, geração Y em laranja e geração Z em verde.
- O maior valor a ser representado é 97, e o menor é 3; então precisamos pensar em uma escala que inclua e deixe visíveis esses valores, assim como os que completam esse intervalo. Se, por exemplo, a barra que representa o maior valor medir 12 cm, então, considerando que a razão entre as respostas positivas deve ser igual à razão entre as medidas dos comprimentos das barras, ou seja, essas grandezas devem ser proporcionais, podemos calcular a medida do comprimento das outras barras. Acompanhe a seguir.

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF08MA23**.

Para a construção de um gráfico de barras, como citado nesta seção, é necessário estabelecer qual escala será usada.

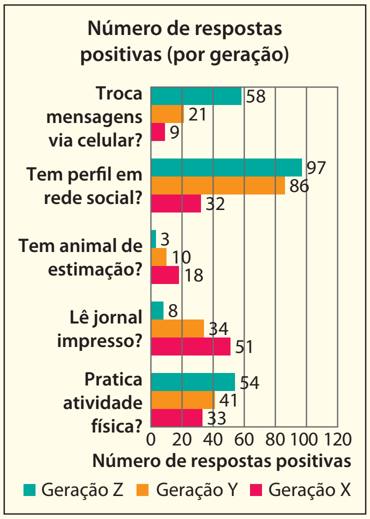
Oriente os estudantes a primeiro analisar os dados a serem representados, em particular o maior e o menor valor, e assim escolherem uma unidade mais adequada ao espaço de que dispõem para a construção do gráfico. Definida a unidade, basta aplicar a noção de proporcionalidade para calcular o comprimento das barras. Aproveite para discutir a adequação de gráficos de barras para a representação de determinados conjuntos de dados, apresentando aos estudantes exemplos de gráficos de barras que não utilizam escala adequada, desenvolvendo a habilidade (EF08MA23).

Agora quem trabalha é você!

Para a **atividade 1**, sendo x um ano, tal que $x > 2010$, temos que as faixas etárias de cada geração são dadas por:

- geração X: de $(x - 1979)$ a $(x - 1960)$;
- geração Y: de $(x - 1990)$ a $(x - 1980)$;
- geração Z: de $(x - 2010)$ a $(x - 1991)$.

Para a **atividade 4**, apresentamos um possível gráfico relativo à tabela **Número de respostas positivas (por geração)**, apresentada anteriormente.



Dados obtidos pela revista de Psicologia.

Proponha aos estudantes que elaborem algumas perguntas sobre o gráfico para trocar com um colega: cada um responde às questões do outro. Exemplos de questões que podem ser criadas:

- Qual geração das pessoas entrevistadas pratica mais atividade física? (Resposta: Geração Z.)
- Qual geração tem menos perfis em rede social? (Resposta: Geração X.)
- Em qual geração mais de 50% dos entrevistados têm animal de estimação? (Resposta: Em nenhuma delas.)

Pergunta	Número de respostas positivas	Medida do comprimento da barra
Tem perfil...?	97	12 cm
Pratica atividade...?	33	a

As razões são iguais: $\frac{97}{33} = \frac{12}{a}$

$97a = 396$

$a = \frac{396}{97} \simeq 4{,}1$

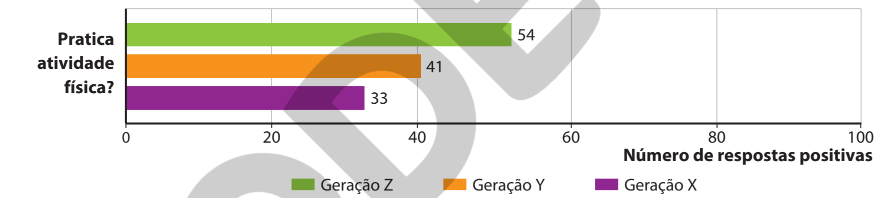
Pergunta	Número de respostas positivas	Medida do comprimento da barra
Tem perfil...?	97	12 cm
Pratica atividade...?	41	b

As razões são iguais: $\frac{97}{41} = \frac{12}{b}$

$97b = 492$

$b = \frac{492}{97} \simeq 5{,}1$

Assim, um possível esboço do gráfico seria:



Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Considere o gráfico iniciado e as informações apresentadas anteriormente.

1 Em que faixa etária encontram-se hoje pessoas da geração X? E as da geração Y? E da geração Z? **1.** As respostas dependem do ano corrente.

2 O que falta no gráfico iniciado para ele ficar completo? **2.** Além do título, faltam as barras correspondentes às demais perguntas feitas na pesquisa e a fonte: revista de psicologia.

3 Para caber em uma folha A4, qual deve ser o comprimento máximo da maior barra a ser representada? E o da menor barra? **3.** É preciso estar atento aos maiores e aos menores valores a serem representados: 97 e 3, respectivamente. Dessa maneira, deve-se buscar uma escala apropriada para que “97” caiba na folha (297 mm × 210 mm) e “3” fique visível.

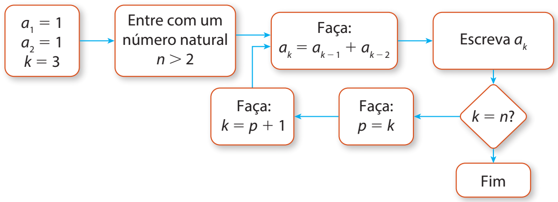
4 Escolha uma escala e faça o gráfico de barras que representa a situação. **4.** Construção de gráfico.

5 Compare o seu gráfico com o dos colegas. Há diferenças entre eles? Justifique. **5.** Resposta pessoal.

4 Sequências numéricas

Situação 1

Observe o fluxograma a seguir.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Esse fluxograma pode ser utilizado para obtermos, de maneira recursiva, os números da sequência de Fibonacci. Essa sequência é dada da seguinte maneira: o 1º termo (a_1) é 1, o 2º termo (a_2) é 1 e, a partir do 3º termo (a_3), o valor numérico é dado pela adição dos dois termos anteriores. Assim, temos:

- $a_1 = 1$
- $a_2 = 1$
- $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
- $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$
- $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$
- $a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

⋮

- $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

A sequência obtida pode ser indicada por:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, ...$$

Seguindo este raciocínio, para determinar o milésimo termo da sequência de Fibonacci, precisaríamos calcular todos os termos que o antecedem a fim obter de a_{999} e a_{998}, pois: $a_{1\,000} = a_{999} + a_{998}$.

Por esse motivo, podemos dizer que a sequência de Fibonacci é uma sequência recursiva.

Sequências recursivas são aquelas em que os primeiros termos são dados e os termos seguintes são determinados com base no valor de termos anteriores e de uma expressão algébrica que define uma lei de formação da sequência.

Situação 2

De acordo com a lenda do xadrez, apresentada no capítulo 1, a quantidade de trigo em cada casa do tabuleiro segue a sequência numérica:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ... , 9 223 372 036 854 775 808

E esses números são obtidos a partir do dobro do número anterior, com o primeiro deles sendo o número 1 (1 grão de trigo na primeira casa do tabuleiro). Assim, podemos determinar essa sequência recursivamente, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} \end{cases}, \text{ para } n \text{ natural e } n > 1.$$

No entanto, neste caso, também poderíamos determinar a mesma sequência numérica de maneira **não recursiva**, considerando apenas a posição (n) do termo na sequência e uma lei de formação, dada pela expressão algébrica: $a_n = 2^{n-1}$, para n natural e $n > 0$.

Assim, se quisermos saber o valor do 64º termo dessa sequência, basta fazermos: $a_{64} = 2^{64-1} = 2^{63}$

4. Sequências numéricas

Habilidades da BNCC: **EF08MA10** e **EF08MA11**.

Este tópico explora a associação entre sequências numéricas e expressões algébricas para descrevê-las, desenvolvendo, assim, as habilidades (EF08MA10) e (EF08MA11).

O fluxograma apresentado na situação 1 é utilizado para determinar os n primeiros termos da sequência de Fibonacci que é definida recursivamente. Incentive os estudantes a determinar alguns termos dessa sequência utilizando o fluxograma. Por exemplo, questione-os quais são os valores obtidos quando $n = 8$; eles devem obter a sequência numérica: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21.

Ressalte para os estudantes que uma sequência numérica recursiva pode ser definida ao explicitar seu primeiro termo (ou primeiros termos), fornecendo uma regra para obter os termos seguintes a partir de termos anteriores. Por exemplo, na **situação 2**, a sequência 1, 2, 4, 8, 16, 32, ... das potências de 2 com expoente natural correspondente a $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ...$, dada de maneira não recursiva por $a_n = 2^{n-1}$, para n natural não nulo ($n = 1, 2, 3, 4, 5, ...$), também poderia ser dada recursivamente a partir do 1º termo $a_1 = 1$ e de uma regra para obter um termo qualquer da sequência a partir do anterior:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} \text{ (para } n = 2, 3, 4, 5, ...) \end{cases}$$

Obtemos alguns elementos e verificamos que essa é a sequência das potências de base 2:

- $n = 1 \rightarrow a_1 = 1$
- $n = 2 \rightarrow a_2 = 2 \cdot a_{2-1} = 2 \cdot a_1$
  $a_2 = 2 \cdot 1 = 2$
- $n = 3 \rightarrow a_3 = 2 \cdot a_{3-1} = 2 \cdot a_2$
  $a_3 = 2 \cdot 2 = 4$
- $n = 4 \rightarrow a_4 = 2 \cdot a_{4-1} = 2 \cdot a_3$
  $a_4 = 2 \cdot 4 = 8$
- $n = 5 \rightarrow a_5 = 2 \cdot a_{5-1} = 2 \cdot a_4$
  $a_5 = 2 \cdot 8 = 16$
- o enésimo termo $\rightarrow a_n = 2 \cdot a_{n-1}$ (para $n = 2, 3, 4, 5, ...$)

Sequências numéricas

Reproduza o fluxograma na lousa e analise cada etapa com os estudantes. Eles devem perceber que, enquanto o valor de n não atinge 64, o processo é retomado adicionando-se 1 ao valor anterior de n.

Exercícios propostos

No **exercício 66**, incentive os estudantes a produzir diferentes sequências numéricas e a compartilhar com os colegas. Incentive-os também a discutir quais são sequências recursivas e quais são sequências não recursivas.

No **exercício 68**, verificamos que em uma das diagonais:

- na **1ª** caixa há **2** bolinhas ($2 = 1 + 1$);
- na **2ª** caixa há **3** bolinhas ($3 = 2 + 1$);
- na **3ª** caixa há **4** bolinhas ($4 = 3 + 1$);
- na **4ª** caixa há **5** bolinhas ($5 = 4 + 1$);
- na **5ª** caixa há **6** bolinhas ($6 = 5 + 1$);
- na **enésima** caixa há **($n + 1$)** bolinhas.

No **exercício 69**, pode-se perceber que as sequências numéricas obtidas serão equivalentes, pois, em ambas, n varia de 0 a 9 e, ainda:

$(n + 1) + n = n + 1 + n =$

$= n + n + 1 = 2n + 1$

Assim, com base em $2n + 1$ e fazendo n variar de 0 a 9, obtemos:

$2 \cdot 0 + 1 = 1$
$2 \cdot 1 + 1 = 3$
$2 \cdot 2 + 1 = 5$
$2 \cdot 3 + 1 = 7$
$2 \cdot 4 + 1 = 9$
$2 \cdot 5 + 1 = 11$
$2 \cdot 6 + 1 = 13$
$2 \cdot 7 + 1 = 15$
$2 \cdot 8 + 1 = 17$
$2 \cdot 9 + 1 = 19$

Observe que, desta maneira, não precisamos saber todos os termos anteriores ao 64º termo para calculá-lo.

As **sequências não recursivas** são aquelas que não dependem de termos anteriores para determinar o próximo termo, pode-se determinar o valor de um elemento da sequência apenas pela sua posição. Exemplo: $a_n = 2^{n-1}$ é não recursiva, enquanto $a_n = 2^{n_a - 1}$ com $a^1 = 1$ é recursiva (e ambas tratam da mesma sequência numérica, para n natural e $n > 0$).

Representamos, por meio de um fluxograma, como um computador faria para imprimir a sequência dos totais de grãos de trigo, de maneira não recursiva.

I) Inicia o procedimento atribuindo 1 à variável n.

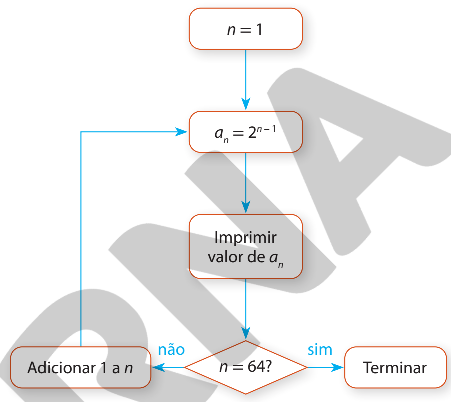
II) Calcula e imprime o valor numérico de $a_n = 2^{n-1}$.
(No 1º cálculo fica $a_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$.)

III) Pergunta se n é igual a 64.

IV) Em caso negativo, adiciona 1 a n e volta ao passo II.
(No 2º cálculo fica $a_2 = 2^{2-1} = 2$; no 3º fica $a_3 = 2^{3-1} = 4$; etc.)

V) Em caso afirmativo, termina o procedimento.

Fluxograma da sequência de Sessa



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

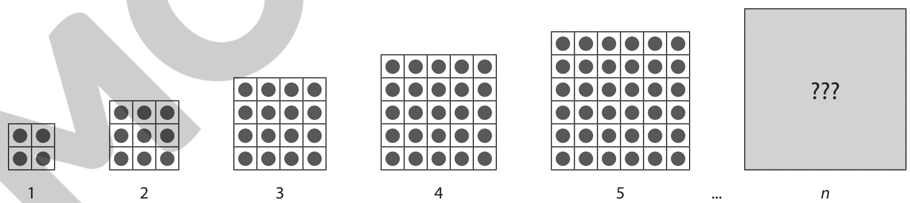
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

66 Dê um exemplo de sucessão recursiva e um de sucessão não recursiva. **66.** Resposta pessoal.

67 A atividade "Pense mais um pouco..." da página 97 traz uma sequência numérica obtida pela expressão $9x + y$ para x assumindo um número formado pelos algarismos de 1 a no máximo 9, em ordem crescente de valor absoluto, e y assumindo o valor absoluto do sucessor do último algarismo de x. Escreva os cálculos e os respectivos resultados dos nove primeiros termos dessa sequência.

68 Qual é o número de bolinhas de uma das diagonais da enésima caixa desta sequência? **68.** $n + 1$



MÁRIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

69 Em cada item, escreva os 10 primeiros termos da sequência numérica dada pela lei de formação indicada, considerando n natural e $n \geqslant 0$.

- O que você pode afirmar sobre as leis de formação dessas sequências numéricas? **69.** São equivalentes.

a) $(n + 1) + n$ **69. a)** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

b) $2n + 1$ **69. b)** 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

67. $9 \cdot 1 + 2 = 11$; $9 \cdot 12 + 3 = 111$; $9 \cdot 123 + 4 = 1\,111$; $9 \cdot 1\,234 + 5 = 11\,111$;
$9 \cdot 12\,345 + 6 = 111\,111$; $9 \cdot 123\,456 + 7 = 1\,111\,111$; $9 \cdot 1\,234\,567 + 8 = 11\,111\,111$;
$9 \cdot 12\,345\,678 + 9 = 111\,111\,111$; $9 \cdot 123\,456\,789 + 10 = 1\,111\,111\,111$.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Desenvolva.

a) $(3a - 2b)^2$ **1. a)** $9a^2 - 12ab + 4b^2$

b) $(5a + 7) \cdot (5a - 7)$ **1. b)** $25a^2 - 49$

c) $(3x^2 + y^3)^2$ **1. c)** $9x^4 + 6x^2y^3 + y^6$

d) $(-5 - 2y)^2$ **1. d)** $25 + 20y + 4y^2$

2 Determine o binômio obtido por meio de:

$(5a + 9b)(5a - 9b)$. **2.** $25a^2 - 81b^2$

3 (Ulbra-RS) Sendo $A = x - 3$, $B = x^2 + 3$ e $C = 9x$, o valor de $A^2 - B + C$ é: **3.** Alternativa **c**.

a) $3(x + 4)$.

b) $x + 4$.

c) $3(x + 2)$.

d) $x + 2$.

e) 3.

4 Que binômio devemos adicionar à expressão $x^2 + 5x + 70$ para obter o quadrado de $(x + 10)$?
4. $15x + 30$

5 Elevando um binômio da forma $ax + b$ ao quadrado, obtém-se $9x^2 + 24x + 16$. Calcule o valor de $a + b$, com a e b positivos. **5.** 7

6 Resolva as questões a seguir.

a) Que expressão devemos subtrair de $a^2 + b^2$ para obter o quadrado de $(a - b)$? **6. a)** $2ab$

b) Que expressão devemos adicionar a $a^2 + 2ab$ para obter o quadrado de $(a + b)$? **6. b)** b^2

c) Se $a^2 + b^2 = 34$ e $ab = 15$, qual é o valor de $(a + b)^2$? **6. c)** 64

d) Se $a^2 + b^2 = 100$ e $(a + b)^2 = 196$, qual é o valor de ab? **6. d)** 48

7 (FGV-SP) Seja N o resultado da operação $375^2 - 374^2$. A soma dos algarismos de N é:

a) 18. b) 19. c) 20. d) 21. e) 22.

7. Alternativa **c**.

8 Fatore completamente as expressões a seguir.

a) $3x^2 - 75$ **8. a)** $3(x + 5)(x - 5)$

b) $a^3 - ab^2$ **8. b)** $a(a + b)(a - b)$

c) $x^4 - 16$ **8. c)** $(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

d) $a^2 - x^2 + a + x$ **8. d)** $(a + x)(a - x + 1)$

e) $x^2 - y^2 + 2x + 2y$ **8. e)** $(x + y)(x - y + 2)$

f) $2x^2 - 12x + 18$ **8. f)** $2(x - 3)^2$

9 Sabendo que $a + b = 18$ e $a - b = 2$, calcule o valor de:

a) $(a + b)^2$; **9. a)** 324

b) $(a - b)^2$; **9. b)** 4

c) $a^2 - b^2$. **9. c)** 36

10 Sabendo que $x + y = 14$ e $x^2 + y^2 = 116$, calcule o valor de:

a) $(x + y)^2$; **10. a)** 196

b) xy; **10. b)** 40

c) $(x - y)^2$. **10. c)** 36

11 Determine os valores que são soluções das equações a seguir.

a) $x^2 + 12x = 0$ **11. a)** 0 ou -12

b) $6x^2 - 5x = 0$ **11. b)** 0 ou $\frac{5}{6}$

c) $4x^2 - 4x + 1 = 0$ **11. c)** $\frac{1}{2}$

d) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ **11. d)** $-\frac{1}{3}$

12 (OBM) Os números naturais x e y são tais que $x^2 - xy = 23$. Qual é o valor de $x + y$?

a) 24

b) 30

c) 34

d) 35

e) 45

12. Alternativa **e**.

13 A soma dos coeficientes do desenvolvimento da expressão $(3a - 2b)^2$ é: **13.** Alternativa **c**.

a) 5.

b) 22.

c) 1.

d) 2.

14 A expressão $2(x^2 + 3y)(x^2 - 3y)$ é igual a:

a) $x^4 - 9y^2$.

b) $2x^4 - 18y^2$.

c) $2x^4 - 9y^2$.

d) $4x^4 - 9y^2$.

14. Alternativa **b**.

15 O valor da expressão $(2x + 9y)^2 - 36xy$, para $x = -1$ e $y = 1$, é: **15.** Alternativa **c**.

a) 13.

b) -5.

c) 85.

d) 65.

16 (OBM) Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$? **16.** Alternativa **d**.

a) 64

b) 109

c) 120

d) 124

e) 154

17 A expressão $(x + 3) \cdot (x - 3) - x^2$ é igual a:

a) $2x - 9 - x^2$.

b) -9.

c) $-6x - 9$.

d) $6x - 9$.

17. Alternativa **b**.

18 Fatorando a expressão $y^4 - 4y^2 + 4$, obtemos:

a) $(y^2 - 2)^2$.

b) $(y + 2)^2$.

c) $(y^2 + 2)^2$.

d) n.d.a.

18. Alternativa **a**.

19 Fatorando a expressão $ab + 2b - 3a - 6$, obtemos:

a) $(a - 2) \cdot (b + 3)$.

b) $(a + 2) \cdot (b - 3)$.

c) $(a - 2) \cdot (b - 3)$.

d) n.d.a.

19. Alternativa **b**.

20 Simplifique as frações algébricas.

a) $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ **20. a)** $\frac{x}{x - 1}$

b) $\frac{b - a}{a^2 - b^2}$ **20. b)** $\frac{-1}{a + b}$

157

Exercícios complementares

Esta série de exercícios retoma os principais conceitos tratados no capítulo, possibilitando aos estudantes retomar e aplicar os conhecimentos construídos.

As resoluções dos **exercícios 1** a **11** e dos **exercícios 13** a **20** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

A seguir, apresentamos a resolução do **exercício 12**.

$x^2 - xy = 23$

$x(x - y) = 23$

Como 23 é primo, a única decomposição possível de 23 como um produto de dois fatores é

$23 = 1 \cdot 23$ (ou $23 = 23 \cdot 1$).

Assim, obtemos duas possibilidades para x e y:

- $x = 23$ e $x - y = 1$

$x - y = 1$

$x - 1 = y$

$y = 22$

Logo: $x + y = 23 + 22 = 45$

- $x = 1$ e $x - y = 23$

$x - y = 23$

$x - 23 = y$

$1 - 23 = y$

$y = -22$

Mas x e y são números naturais; logo, essa solução não convém.

Portanto, $x + y = 45$ (**alternativa e**).

Verificando

Os testes propostos nesta seção podem ser utilizados para preparar os estudantes para avaliações de larga escala.

Pode-se propor que resolvam individualmente cada um deles e, depois, realizar a correção na lousa, deixando-os compartilhar as estratégias de resolução utilizadas.

As resoluções dos **testes 1** a **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 6.

Organizando

As questões desta seção possibilitam retomar com os estudantes os principais conceitos trabalhados no capítulo. Elas também podem orientá-los ao fazerem uma autoavaliação.

É interessante que cada estudante responda individualmente e, depois, comente com os colegas as respostas, corrigindo-as ou complementando-as.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A expressão

$$(x + 4)^2 - (2x - 3)^2$$

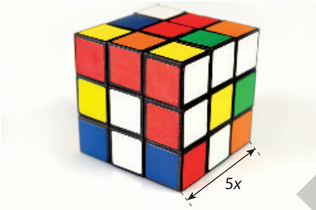
é igual a: **1.** Alternativa **b**.

a) $-3x^2 - 4x + 25$.
c) $-4x^2 + 20x + 5$.
b) $-3x^2 + 20x + 7$.
d) $5x^2 - 4x + 25$.

2 Carlos pegou uma placa quadrada de madeira com lado medindo 12 cm e cortou dela, para descarte, outra placa quadrada com lado medindo x cm. Que expressão fornece a medida da área da superfície de madeira que sobrou? **2.** Alternativa **d**.

a) $144 - 2x$
b) $144 - 24x + x^2$
c) $24 - 12x + x^2$
d) $144 - x^2$

3 Uma fábrica de brinquedos produz cubos mágicos com aresta medindo 5x cm. Para construir um modelo míni, projeta-se diminuir 3 cm de cada aresta. Qual seria a medida do volume do cubo míni? **3.** Alternativa **a**.



BITS AND SPLITS/SHUTTERSTOCK

a) $125x^3 - 225x^2 + 135x - 27$
b) $125x^3 + 225x^2 + 135x + 27$
c) $27 - 135x + 225x^2 - 125x^3$
d) $25x^2 - 30x + 9$

4 Colocando em evidência o fator comum de $24x^2y + 32xy^2 - 12xy$, obtém-se: **4.** Alternativa **d**.

a) $12xy(2xy + 4xy - 1)$.
b) $4x^2y^2(6x + 8y - 3)$.
c) $12xy(2x + 4y - 1)$.
d) $4xy(6x + 8y - 3)$.

5 Fatorando por agrupamento a expressão $3ab + 3ac - 5b - 5c$, obtemos:

a) $(-2)(ab + c)$.
c) $(3a + 5)(b - c)$.
b) $(3a - 5)(b + c)$.
d) $(a - 5)(b + 3c)$.

5. Alternativa **b**.

6 Uma horta foi construída em um terreno quadrado que tinha área medindo x^2 m². Após um replantio, passou a ser retangular e teve sua área alterada para $(x^2 - 4a^2)$ m². Indique uma possível alteração nas medidas dos lados do quadrado original. **6.** Alternativa **a**.

a) Adição de $2a$ m em uma dimensão e subtração de $2a$ m em outra.
b) Subtração de $2a$ m nas duas dimensões do quadrado.
c) Adição de $4a$ m em uma dimensão e subtração de $4a$ m em outra.
d) Subtração de $4a$ m nas duas dimensões do quadrado.

7 A forma fatorada de $25x^2 - 60xy + 36y^2$ é: **7.** Alternativa **b**.

a) $(25x - 36y)^2$.
b) $(5x - 6y)^2$.
c) $(6x - 5y)^2$.
d) $(5x + 6y)^2$.

8 Simplificando a fração algébrica $\frac{(3a + 2b)(3a - 2b)^2}{18a^2 - 8b^2}$, obtemos: **8.** Alternativa **d**.

a) $3a - 2b$.
c) $3a + 2b$.
b) $\frac{3a + 2b}{2}$.
d) $\frac{3a - 2b}{2}$.

9 O enésimo termo de uma sequência numérica é dado pela expressão $a_n = 2n + 1$, onde n é um número inteiro. Assim, temos uma sequência de números: **9.** Alternativa **d**.

a) inteiros terminados em 1.
b) inteiros pares.
c) naturais ímpares.
d) inteiros ímpares.

Organizando: **a)** Quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos, produto da soma pela diferença de dois termos e cubo da soma e cubo da diferença de dois termos. Resposta pessoal.
b) Fatoração pela evidência de fator comum, fatoração por agrupamento, diferença de dois quadrados, trinômio quadrado perfeito e diferença e soma de dois cubos. Resposta pessoal.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Quais foram os produtos notáveis estudados? Escolha um deles e, com suas palavras, descreva-o.

b) Quais foram as fatorações estudadas? Escolha uma delas e, com suas palavras, descreva-a.

c) Com base no que você estudou, estabeleça, por meio de um texto ou de um esquema, a relação entre o produto notável e a fatoração. **c)** Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes considerem que os procedimentos de desenvolvimento dos produtos notáveis são opostos aos respectivos casos de fatoração.

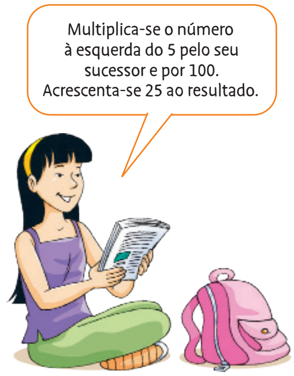
d) O que classifica uma sequência numérica como não recursiva?

d) Uma sequência é dita não recursiva quando é possível obter uma lei de formação da sequência que não dependa de nenhum valor de seus termos.

DIVERSIFICANDO

A Álgebra explica a Aritmética

Em um almanaque de curiosidades, Inês leu um "truque" para calcular o quadrado de um número natural *n* terminado em 5.



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Acompanhe alguns exemplos.

- 35^2 é calculado da seguinte maneira:

  $3 \cdot (3 + 1) \cdot 100 = 1\,200$; $1\,200 + 25 = 1\,225$;

  então, $35^2 = 1\,225$

- 165^2 é calculado da seguinte maneira:

  $16 \cdot (16 + 1) \cdot 100 = 27\,200$; $27\,200 + 25 = 27\,225$;

  então, $165^2 = 27\,225$

Inês achou interessante e quis entender o porquê disso, pois sabe que em Matemática não há truques. Depois de pesquisar, chegou às igualdades:

- $35^2 = 3 \cdot (3 + 1) \cdot 100 + 25$

  $35^2 = 3 \cdot 4 \cdot 100 + 25$

  $35^2 = 30 \cdot 40 + 5^2$

  $35^2 - 5^2 = (35 - 5) \cdot (35 + 5)$

- $165^2 = 16 \cdot (16 + 1) \cdot 100 + 25$

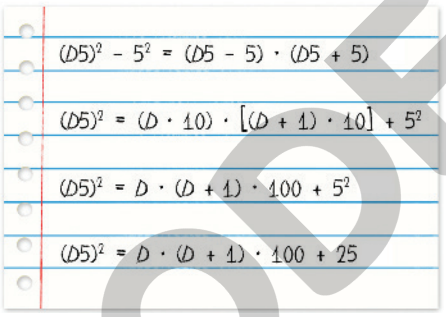
  $165^2 = 16 \cdot 17 \cdot 100 + 25$

  $165^2 = 160 \cdot 170 + 5^2$

  $165^2 - 5^2 = (165 - 5) \cdot (165 + 5)$

Assim, ela percebeu que esse procedimento pode ser explicado pelo produto da soma pela diferença e que, pelo menos para números de dois algarismos, favorece o cálculo mental.

Ao generalizar o que fez com alguns números e usando *D* para representar um algarismo, Inês fez o caminho inverso ao das expressões dos exemplos dados e anotou no caderno. Acompanhe na imagem.



LÍGIA DUQUE/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

1 Calculem mentalmente as potências e, em seguida, expliquem como fizeram.

a) 15^2 b) 45^2 c) 75^2 d) 95^2

1. a) $1 \cdot 2 \cdot 100 + 25 = 225$ **1. b)** $4 \cdot 5 \cdot 100 + 25 = 2\,025$ **1. c)** $7 \cdot 8 \cdot 100 + 25 = 5\,625$ **1. d)** $9 \cdot 10 \cdot 100 + 25 = 9\,025$

2 Usem uma calculadora para verificar os cálculos a seguir.

a) $115^2 = 11 \cdot 12 \cdot 100 + 25 = 13\,225$

2. Verificação de cálculos utilizando uma calculadora.

b) $145^2 = 14 \cdot 15 \cdot 100 + 25 = 21\,025$

c) $215^2 = 21 \cdot 22 \cdot 100 + 25 = 46\,225$

d) $3\,785^2 = 378 \cdot 379 \cdot 100 + 25 = 14\,326\,225$

Diversificando

A inter-relação entre os diversos campos da Matemática dá coesão ao estudo, aspecto que deve ser realçado para os estudantes, e sua busca deve ser incentivada. Esta seção é mais um exemplo do que pode ser trabalhado nesse sentido, em que mostramos como a Álgebra explica "truques" da Aritmética.

Além do aspecto lúdico e curioso, é possível encontrar mais um caso de cálculo mental. Em um segundo momento, é pedido aos estudantes que verifiquem a validade desse procedimento no cálculo de algumas potências, fazendo uso de uma calculadora.

Capítulo 7 – Estudo dos triângulos

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

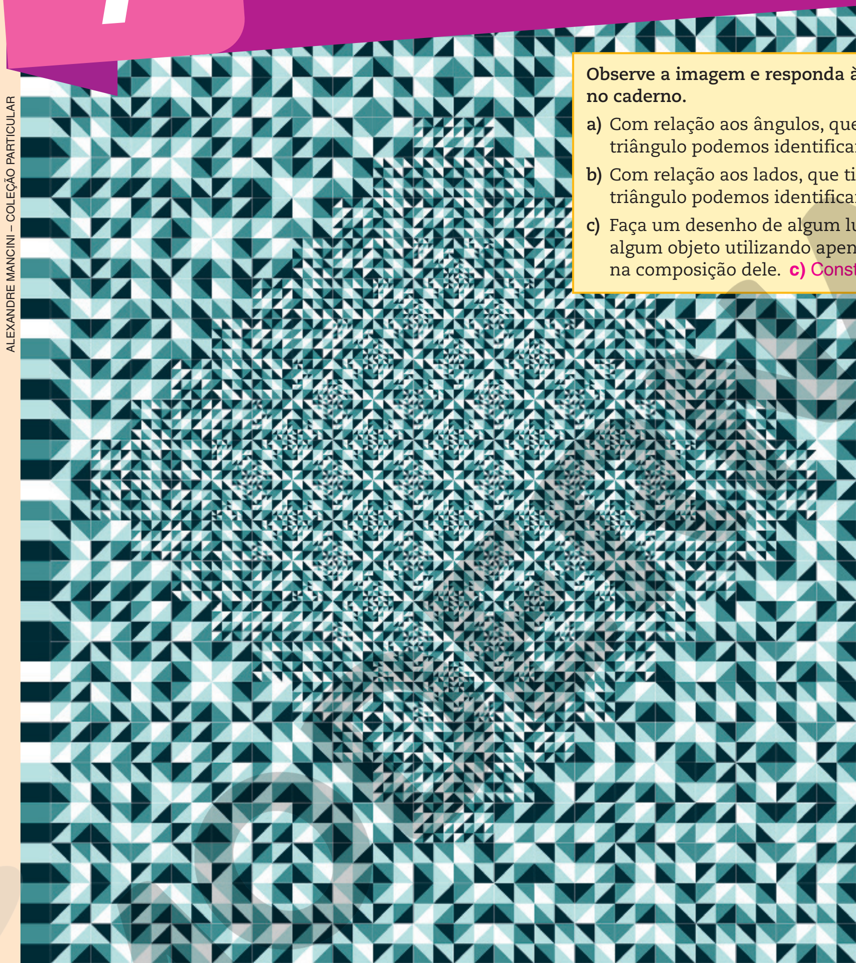
Neste capítulo, ampliamos o estudo dos triângulos, já desenvolvido em anos anteriores, apresentando outros elementos do triângulo conhecidos como **cevianas.** Para cada tipo de ceviana aqui estudada – mediana, bissetriz e altura – há três segmentos de reta (cada um com uma extremidade em um vértice), cuja intersecção constitui um ponto característico do triângulo: baricentro, incentro e ortocentro, respectivamente.

O estudo da congruência de triângulos dá continuidade ao que foi explorado para os polígonos e fornece subsídios para trabalhar, posteriormente, demonstrações de propriedades dos triângulos.

Nesta fase do aprendizado, os estudantes já devem compreender e reproduzir a abordagem dos conceitos e das ideias da Matemática de maneira mais sistematizada e axiomática.

Na abertura, apresentamos uma obra do artista plástico Alexandre Mancini, que apresenta triângulos. Verifique os conhecimentos que os estudantes já possuem sobre essa figura. Proponha a eles que façam uma composição com triângulos, podendo usar malhas triangulares. Antes de compor as produções, eles podem pesquisar outras manifestações artísticas e culturais que utilizem triângulos e, assim, podem desenvolver a **competência geral 3**, pois podem fruir diferentes manifestações artísticas para compor sua própria produção. Depois, exponha os trabalhos na sala de aula.

Capítulo 7 Estudo dos triângulos



ALEXANDRE MANCINI – COLEÇÃO PARTICULAR

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) Com relação aos ângulos, que tipos de triângulo podemos identificar nesta obra?

b) Com relação aos lados, que tipos de triângulo podemos identificar nesta obra?

c) Faça um desenho de algum lugar ou de algum objeto utilizando apenas triângulos na composição dele. **c)** Construção de figura.

a) Resposta possível: triângulo retângulo.

b) Resposta possível: triângulo isósceles.

MANCINI, A. **Tempestade de triângulos**. 2013. Instalação com azulejos, 372 × 310 cm. Coleção particular.

Composta de desenhos feitos com azulejos de 15 cm × 15 cm e elaborados com a combinação de quatro cores, esta é a imagem da obra **Tempestade de triângulos**, de Alexandre Mancini.

Essa combinação lembra um problema matemático histórico, formulado na Inglaterra em 1852: *Serão suficientes quatro cores para pintar um mapa plano de maneira que dois países vizinhos não partilhem a mesma cor?*

Apenas em 1976, com o uso de computador, o **teorema das quatro cores** foi demonstrado.

1 Cevianas de um triângulo

Já estudamos que uma importante característica do triângulo é sua **rigidez**. Ela pode ser observada ao se construir um triângulo com três canudinhos e linha. Não é possível deformá-lo, a não ser cortando os canudos ou a linha.

Essa característica dos triângulos é usada, principalmente, nas estruturas metálicas de pontes e torres ou no madeiramento dos telhados das casas. Observe as imagens a seguir.

ALAN CARVALHO/ARQUIVO DA EDITORA

DANIEL CYMBALISTA/PULSAR IMAGENS

Estrutura metálica da ponte Victório Maniero, sobre o rio Tietê, no município de Igaraçu do Tietê, São Paulo. (Fotografia de 2019.)

O triângulo tem outras características interessantes e úteis para serem estudadas. Um exemplo é o baricentro, um dos centros geométricos definidos pelas cevianas, que veremos a seguir.

Uma laje triangular pode ser apoiada em um único ponto sem correr o risco de cair. Esse ponto é o baricentro, que tem a propriedade física de ser o centro de massa do triângulo.

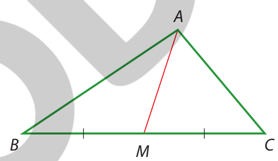
Chamamos de **ceviana** de um triângulo todo segmento de reta que tem como extremidades um vértice e um ponto da reta suporte do lado oposto.

Pela definição, um triângulo tem infinitas cevianas, porém há três tipos especiais: as **medianas**, as **bissetrizes** e as **alturas**, que serão estudadas a seguir.

Mediana

Considerando um triângulo *ABC* qualquer, podemos determinar o ponto médio *M* do lado $\overline{BC}$.

O segmento $\overline{AM}$ é chamado de **mediana** relativa ao lado $\overline{BC}$.



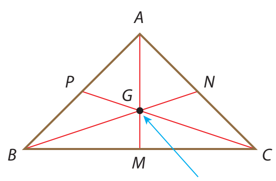
Mediana de um triângulo é toda ceviana que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a ele.

Todo triângulo tem três medianas, que se encontram em um ponto chamado de **baricentro**.

No triângulo *ABC*, temos:

- $\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$;
- $\overline{BN}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{AC}$;
- $\overline{CP}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.

As três medianas se encontram no ponto *G*, que é o baricentro do $\triangle ABC$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

161

De fato, seja um triângulo qualquer *ABC*, tal que *M* é o ponto médio do lado $\overline{AC}$ e $\overline{BM}$ seja perpendicular a esse lado. Assim, o segmento $\overline{BM}$ é a mediana relativa a $\overline{AC}$, e a reta $\overleftrightarrow{BM}$ é mediatriz de $\overline{AC}$. Além disso, os triângulos *AMB* e *CMB* serão congruentes (pelo caso LAL); portanto, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são congruentes e, assim, o triângulo *ABC* é isósceles.

Ao incentivar investigações e demonstrações, possibilita-se que os estudantes desenvolvam a **competência geral 2**, pois exercitam a curiosidade intelectual e recorrem à imaginação e à criatividade para elaborar e testar hipóteses. Além disso, a **competência geral 7** também é utilizada pelos estudantes, ao argumentarem e demonstrarem os fatos matemáticos.

1. Cevianas de um triângulo

Habilidade da BNCC: **EF08MA17**.

Esse tópico possibilita retomar os conceitos de mediatriz e de bissetriz como lugares geométricos, mobilizando a habilidade (EF08MA17), antes de explorar o conceito de cevianas de um triângulo. Se julgar necessário, relembre com os estudantes as principais características de um triângulo e suas classificações. Para isso, faça um cartaz e deixe-o afixado para consulta pelos estudantes ao longo do desenvolvimento do capítulo. Isso pode contribuir para a consolidação de tais conceitos. Algumas sugestões de informações são:

- Triângulo é um polígono de 3 lados, 3 vértices e 3 ângulos internos.
- Triângulo isósceles tem dois lados de mesma medida. O terceiro lado é chamado de **base** do triângulo isósceles, e o vértice oposto é denominado **vértice** do triângulo isósceles.
- Triângulo equilátero tem os três lados de mesma medida. Seus três ângulos internos medem 60°.
- Triângulo retângulo tem um ângulo interno reto.
- Triângulo acutângulo tem os três ângulos internos agudos.
- Triângulo obtusângulo tem um ângulo interno obtuso.

Na apresentação da **mediana**, retome ponto médio de um segmento de reta. Ressalte aos estudantes que cada segmento que é mediana relativa a algum lado do triângulo passa pelo ponto médio desse lado, assim como a reta mediatriz desse segmento. Podem-se desenvolver atividades investigativas, com régua e compasso ou com *softwares* de geometria dinâmica, envolvendo a construção de triângulos com o objetivo de obter um triângulo tal que a mediatriz de um de seus lados contenha a mediana relativa a esse lado. Essa atividade pode ser retomada após o estudo dos casos de congruência de triângulos, por exemplo, pedindo aos estudantes que demonstrem que, quando a mediatriz de um lado contém a mediana relativa a esse lado, o triângulo é isósceles.

Propriedade do baricentro

O **baricentro**, intersecção das três medianas de um triângulo, é um ponto de propriedades especiais. Se julgar conveniente, comente que, em cada mediana, a distância do vértice ao baricentro é igual ao dobro da distância do baricentro ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Proponha, ainda, aos estudantes que realizem a experimentação descrita para verificarem que o baricentro é o ponto de equilíbrio do triângulo (como mostrado na fotografia).

Bissetriz

Na apresentação da bissetriz de um triângulo, retome o conceito de bissetriz de um ângulo.

Comente que cada segmento que é bissetriz do triângulo está contido na semirreta que é a bissetriz do ângulo considerado. Nesse caso, o ponto a ser destacado é o incentro, intersecção das três bissetrizes de um triângulo, que é o centro da circunferência inscrita no triângulo.

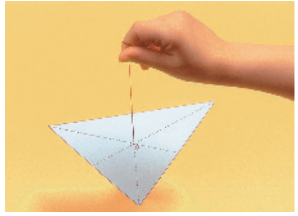
Possibilite aos estudantes realizar atividades em que determinam a circunferência inscrita de alguns triângulos, utilizando régua e compasso e, se possível, também utilizando recursos de algum *software* de Geometria Dinâmica. Advirta-os quanto a terem cuidado no manuseio do compasso, a fim de que não se machuquem com a ponta-seca.

Propriedade do baricentro

Podemos construir um triângulo em uma cartolina e determinar seu baricentro.

Para isso, recortamos esse triângulo e passamos um barbante pelo baricentro.

Segurando o triângulo suspenso, como mostra a fotografia, ele se manterá na posição horizontal. Isso ocorre porque o baricentro é o **ponto de equilíbrio**, ou **centro de gravidade**, do triângulo.

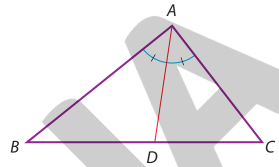


EDUARDO SANTALIESTRA

Bissetriz

Considerando um triângulo *ABC* qualquer, podemos traçar a bissetriz do ângulo interno $\hat{A}$.

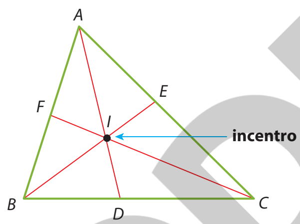
O segmento $\overline{AD}$ é a **bissetriz** do triângulo relativa ao ângulo $\hat{A}$.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Bissetriz de um triângulo é toda ceviana que divide ao meio um dos ângulos internos do triângulo.

Todo triângulo tem três bissetrizes, que se encontram em um ponto chamado de **incentro**.



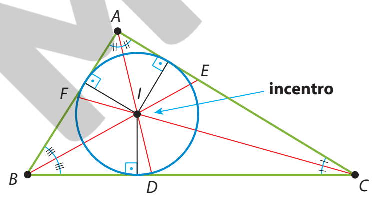
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

No triângulo *ABC*, temos:

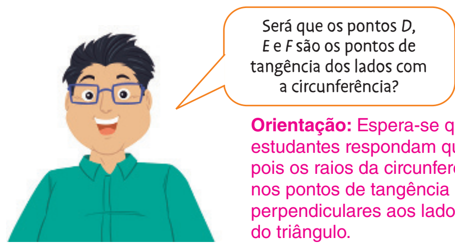
- $\overline{AD}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$;
- $\overline{BE}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{B}$;
- $\overline{CF}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{C}$.

As três bissetrizes se encontram no ponto *I*, que é o incentro do $\triangle ABC$.

Conforme já estudamos, a bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que estão à mesma distância das retas que formam o ângulo. Logo, o incentro está à mesma distância dos três lados do triângulo, ou seja, ele é o centro da circunferência inscrita no triângulo.



MÁRIO MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



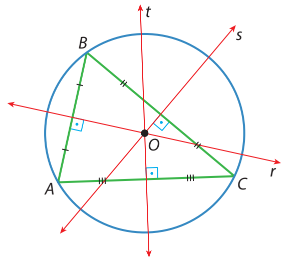
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Orientação: Espera-se que os estudantes respondam que não, pois os raios da circunferência nos pontos de tangência são perpendiculares aos lados do triângulo.

Observação

- A mediatriz de um lado de um triângulo é a reta perpendicular a esse lado que passa pelo seu ponto médio. Todo triângulo tem três mediatrizes, que se encontram em um único ponto denominado **circuncentro**.

  O circuncentro é o centro da circunferência que circunscreve o triângulo. Na figura, o ponto *O* é o circuncentro do triângulo *ABC*.

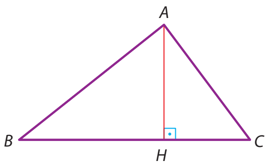


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Altura

Considerando um triângulo *ABC* qualquer, podemos traçar, pelo ponto *A*, um segmento perpendicular à reta suporte do lado $\overline{BC}$.

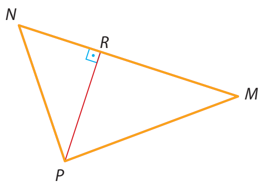
O segmento $\overline{AH}$ é a **altura** relativa ao lado $\overline{BC}$.

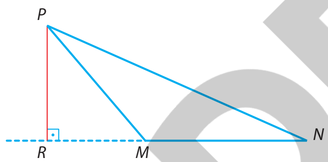


> **Altura** de um triângulo é a ceviana que une perpendicularmente um dos vértices ao seu lado oposto (ou ao seu prolongamento).

No triângulo anterior, o ponto *H* é chamado de "pé da altura" relativa ao lado $\overline{BC}$.

Observe a altura $\overline{PR}$ relativa ao lado $\overline{MN}$ em cada um dos triângulos a seguir.

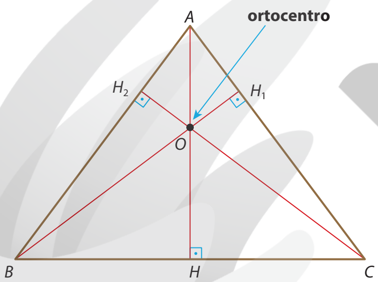




ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Todo triângulo tem três alturas. O ponto de encontro das retas que contêm as alturas é chamado de **ortocentro**.

Considere o triângulo acutângulo *ABC* a seguir.



Nesse triângulo, temos:

- $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$;
- $\overline{BH_1}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AC}$;
- $\overline{CH_2}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

As três alturas se encontram no ponto *O*, que é o ortocentro do $\triangle ABC$.

Observe que, neste caso, o ortocentro se localiza no interior do triângulo. Isso acontece em todos os triângulos acutângulos.

Altura

Das três cevianas, provavelmente a mais conhecida é a **altura**, por estar presente no cálculo da área do triângulo. Ela também é a única das cevianas que pode ficar fora da região interna do triângulo, neste caso, sendo determinada considerando o prolongamento do lado. Trabalhe com exemplos nos quais isso ocorre.

O **ortocentro** é o ponto de intersecção das retas suporte das três alturas de um triângulo e pode ficar fora da região interna do triângulo. Apresente exemplos aos estudantes e proponha que representem diferentes triângulos e determinem as alturas relativas a cada lado dos triângulos representados.

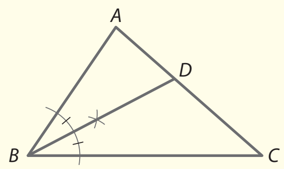
Peça que verifiquem onde se encontra o ortocentro no caso de um triângulo retângulo. Espera-se que eles percebam que, nesse caso, o ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.

Exercícios propostos

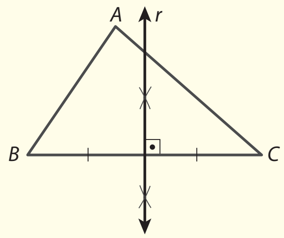
As resoluções dos **exercícios 1** e **2**, dos **exercícios 4** a **6** e do **exercício 8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Para os **exercícios 3** e **5**, por exemplo, os estudantes podem registrar passo a passo as construções utilizando fluxogramas; assim, aprimoram aspectos importantes para o desenvolvimento posterior da habilidade (EF08MA16).

Para o **exercício 3**, uma possível construção da bissetriz:

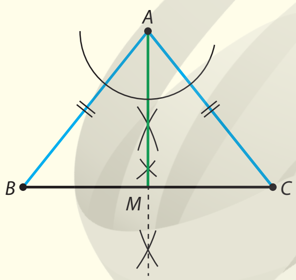


Possível construção da mediatriz:



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

No **exercício 7**, a particularidade do triângulo leva a outra propriedade do triângulo isósceles: a mediana, a altura e a bissetriz, todas relativas à base do triângulo isósceles, são coincidentes. Segue a possível construção para os **itens a**, **b** e **d**.

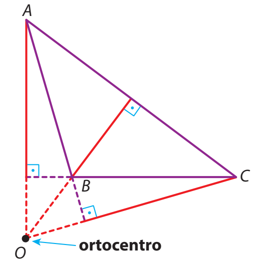


WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Agora, considere o triângulo obtusângulo *ABC*.

Nesse triângulo, o ortocentro encontra-se na região externa ao triângulo.

Isso acontece em todos os triângulos obtusângulos.

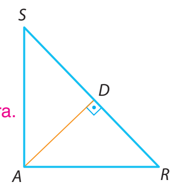


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

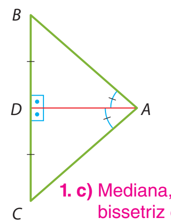
1 Em cada um dos triângulos a seguir, o segmento $\overline{AD}$ é mediana, bissetriz ou altura?

a)



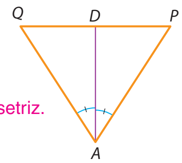
1. a) Altura.

c)



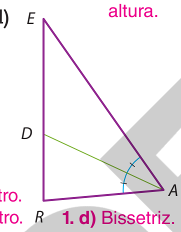
1. c) Mediana, bissetriz e altura.

b)



1. b) Bissetriz.

d)



1. d) Bissetriz.

2. a) Construção de figura; baricentro.
2. c) Construção de figura; ortocentro.

2 No caderno, desenhe os triângulos pedidos em cada caso e responda às questões.

a) Triângulo *MNO* qualquer. Trace, com régua e compasso, as medianas relativas aos lados $\overline{MO}$ e $\overline{NO}$. Como se chama o ponto em que elas se encontram?

b) Triângulo *PQR* qualquer. Trace, usando transferidor e régua, as bissetrizes dos ângulos $\hat{P}$ e $\hat{R}$. Como se chama o ponto em que elas se encontram? **2. b)** Construção de figura; incentro.

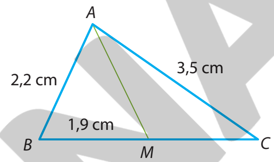
c) Triângulo *TUV* qualquer. Trace, com régua e esquadro, as alturas relativas aos lados $\overline{TU}$ e $\overline{TV}$. Como se chama o ponto em que as retas suporte delas se encontram?

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

3 No caderno, desenhe um triângulo *ABC* qualquer e trace a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{B}$ e a mediatriz relativa ao lado $\overline{BC}$. Explique como você traçou a bissetriz e a mediatriz desse triângulo.
3. Construção de figura; resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

4 No triângulo *ABC* a seguir, $\overline{AM}$ é a mediana. Determine a medida do perímetro desse triângulo. **4.** 9,5 cm



5 No caderno, desenhe um triângulo retângulo *RST*. E trace as mediatrizes dos lados desse triângulo, que se encontram no ponto *O*. Depois, com o auxílio de um compasso, trace uma circunferência de centro *O* e raio $\overline{OR}$.

Explique como você determinou as mediatrizes.
5. Construção de figura; resposta pessoal.

6 Construa, no caderno, um triângulo *ABC* que seja escaleno e acutângulo. Com esquadro e régua, trace as três alturas do triângulo. Qual delas é a maior? **6.** Altura relativa ao lado menor.

7. a) Construção de figura.

7 Construa, no caderno, um triângulo *ABC* isósceles não equilátero. **7. c)** Sim.

a) Trace a mediana relativa à base $\overline{BC}$.
b) Trace a bissetriz do ângulo do vértice *A*.
c) A bissetriz coincidiu com a mediana?
d) Trace a altura relativa à base. O que aconteceu com a altura e com a mediana?

7. b) Construção de figura. **7. d)** Elas coincidiram.

8 ***Hora de criar*** – Construa um triângulo *ABC*, retângulo em *B*, qualquer. Troque com um colega para que cada um trace as três alturas no triângulo construído pelo outro e obtenha o ortocentro *H*.

O que você pode falar sobre os pontos *H* e *B*? Acontece o mesmo com o ortocentro obtido por seu colega? Verifique se aconteceu o mesmo com os outros colegas da turma.
8. Os pontos *H* e *B* coincidem para todos os triângulos retângulos em *B*.

PARA SABER MAIS

Geometria e grafite

O trabalho de um artista urbano, diferente das outras formas de compor arte, está disponível até aos desinteressados. O poeta Paulo Leminski **pichava** nas ruas de Curitiba em 1980 um poema curto que dizia: "palpite/ o grafite não tem limite". O significado desse poema impresso na pele da cidade faz relação com o caráter espontâneo da arte urbana. É impossível não notar um grafite ao trafegar pelas ruas de uma cidade. [...]

Pichar: escrever ou rabiscar em muros ou paredes.

Fonte: GEOMETRIA da cidade nas alturas. **Diário da manhã**, Goiânia, 28 jun. 2017. Seção Cultura. Disponível em: https://www.dm.com.br/cultura/2017/06/geometria-da-cidade-nas-alturas/. Acesso em: 12 jul. 2022.

O grafite surgiu no Brasil no final da década de 1970, influenciado pelo movimento *hip-hop* vindo dos Estados Unidos. Para esse movimento, o grafite é a maneira de expressar toda a opressão que a humanidade vive, principalmente os menos favorecidos, ou seja, o grafite reflete a realidade das ruas. No entanto, se não tiverem autorização, a pichação e o grafite em espaços públicos ou privados podem ser considerados crimes.

Com o passar do tempo, diferentes técnicas de grafite surgiram, e muitos artistas brasileiros tornaram-se reconhecidos mundialmente pelo trabalho realizado. Entre eles, o artista Eduardo Kobra, que tem seu trabalho representado em diferentes murais pelo mundo.

BEN LAU/BEN STUDIO © KOBRA, EDUARDO/AUTVIS, BRASIL, 2022

Obra *Ellis Island* (2018), do artista e muralista Eduardo Kobra (nascido em 1975), em Nova York. Nela, Kobra retrata o rosto de pessoas de diferentes etnias, representando as pessoas que saem de seus países em busca de melhores condições de vida nos Estados Unidos. Foi produzida na fachada da *City-As-School*, escola pública onde estudou Jean-Michael Basquiat (1960-1988), um dos maiores destaques da cena grafiteira nova-iorquina. (Fotografia de 2018.)

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Espera-se que os estudantes identifiquem triângulos que podem ser associados a triângulos isósceles e a triângulos isósceles retângulos.

1 O artista utilizou triângulos na composição da obra *Ellis Island*. Como esses triângulos podem ser classificados?

2 Antes de realizar trabalhos como esse, os artistas costumam fazer um planejamento, no papel, dividindo a superfície em áreas menores, que servirá de orientação para o trabalho final. Suponha que você tenha de compor um mural de formato retangular com um grafite composto de figuras geométricas. Faça a representação, em um papel, de como seria esse grafite e apresente-o aos colegas. 2. Resposta pessoal.

Para saber mais

Nesta seção é apresentado o grafite como uma forma de levar a arte ao acesso de todos, além de atuar como instrumento de crítica social, chamando a atenção para problemas sociais atuais, como desigualdade social, desigualdade de gênero, preconceito, criminalidade, escassez de moradia, entre outros. Ao abordar esse tema é possível trabalhar com os estudantes o Tema Contemporâneo Transversal **vida familiar e social**. Converse com eles sobre como esse tipo de arte urbana tem papel importante nas transformações sociais.

Comente que o grafite é uma forma de manifestação cultural e artística presente em diversos países e que costuma retratar o dia a dia, os diversos pontos de vista, as experiências e os valores de diferentes pessoas das mais variadas culturas. Essa discussão favorece o desenvolvimento da **competência geral 3** e o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal **diversidade cultural**.

A respeito da legalidade do grafite, comente que, desde 2011, de acordo com a Lei nº 12.408, a prática do grafite "[...] realizada com o objetivo de valorizar o patrimônio público ou privado mediante manifestação artística, desde que consentida pelo proprietário [...]" deixou de ser considerada crime.

O **exercício 2** do **Agora é com você!** possibilita que os estudantes desenvolvam a **competência geral 4**, ao propor que eles utilizem a linguagem visual e conhecimentos das linguagens artística e matemática para expressar experiências, ideias e sentimentos na criação de um mural. Incentive-os a trabalharem com temas relacionados ao seu contexto social.

2. Congruência de triângulos

Habilidade da BNCC: **EF08MA14**.

Este tópico aborda os casos de congruência de triângulos; assim, prepara os estudantes para, posteriormente, desenvolverem a habilidade (EF08MA14).

Retome a congruência de polígonos e a notação própria utilizada para a congruência.

Pode-se propor aos estudantes que, em uma folha de papel, com régua e transferidor, representem determinado triângulo, dadas as medidas de dois lados e do ângulo formado entre eles. Depois, eles recortam o triângulo representado e comparam com as produções dos demais colegas, a fim de verificar que todos os triângulos produzidos são congruentes.

Solicite a eles que façam outros triângulos dessa maneira para os compararem novamente, mas utilizando outras informações, por exemplo, dada a medida de um dos segmentos e a medida de cada ângulo formado entre esse segmento e os demais lados do triângulo.

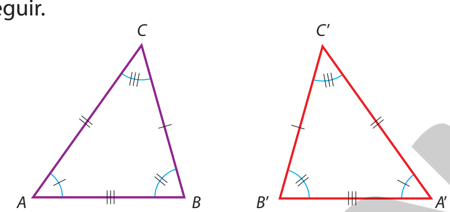
2 Congruência de triângulos

Já estudamos congruência de polígonos. Como qualquer polígono pode ser dividido ou decomposto em triângulos, o estudo da congruência de triângulos pode nos auxiliar em problemas mais complicados que envolvam a congruência de polígonos.

Agora, vamos estudar, em particular, os triângulos congruentes.

> Dois triângulos são **congruentes** quando os lados correspondentes e os ângulos correspondentes forem congruentes.

Observe as figuras a seguir.



Nessas figuras, o $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (lemos "o triângulo ABC é congruente ao triângulo $A'B'C'$"), ou seja:

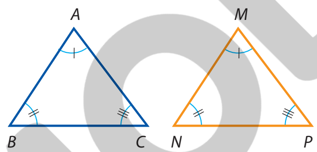
$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'} \qquad \hat{A} \cong \hat{A}'$$
$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'} \quad \text{e} \quad \hat{B} \cong \hat{B}'$$
$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'} \qquad \hat{C} \cong \hat{C}'$$

Observe que, se dois triângulos são congruentes, então:

- os lados correspondentes opostos a ângulos congruentes são congruentes;
- os ângulos correspondentes opostos a lados congruentes são congruentes.

Acompanhe os exemplos.

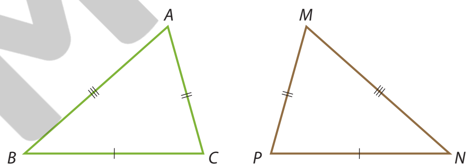
a) Sabendo que $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, vamos indicar os lados congruentes.



Nesses triângulos, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ (lados opostos a ângulos congruentes: $\hat{C} \cong \hat{P}$);
- $\overline{BC} \cong \overline{NP}$ (lados opostos a ângulos congruentes: $\hat{A} \cong \hat{M}$);
- $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ (lados opostos a ângulos congruentes: $\hat{B} \cong \hat{N}$).

b) Sabendo que $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, vamos indicar os ângulos congruentes.



Nesses triângulos, temos:

- $\hat{A} \cong \hat{M}$ (ângulos opostos a lados congruentes: $\overline{BC} \cong \overline{PN}$);
- $\hat{B} \cong \hat{N}$ (ângulos opostos a lados congruentes: $\overline{AC} \cong \overline{MP}$);
- $\hat{C} \cong \hat{P}$ (ângulos opostos a lados congruentes: $\overline{AB} \cong \overline{MN}$).

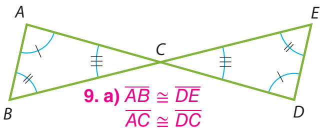
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

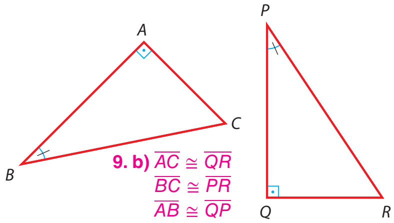
9 Em cada item, os pares de triângulos são congruentes. Indique no caderno a congruência entre os lados desses triângulos.

a)



9. a) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$
$\overline{AC} \cong \overline{DC}$
$\overline{BC} \cong \overline{EC}$

b)

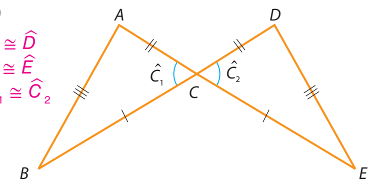


9. b) $\overline{AC} \cong \overline{QR}$
$\overline{BC} \cong \overline{PR}$
$\overline{AB} \cong \overline{QP}$

10 Em cada item, os pares de triângulos são congruentes. Indique no caderno a congruência entre os ângulos desses triângulos.

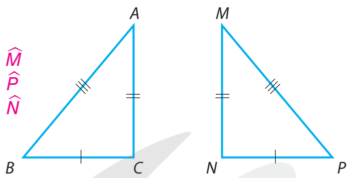
a)

10. a) $\hat{A} \cong \hat{D}$
$\hat{B} \cong \hat{E}$
$\hat{C}_1 \cong \hat{C}_2$



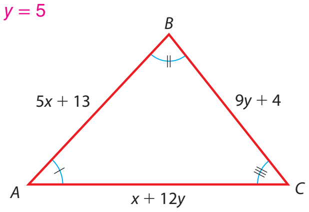
b)

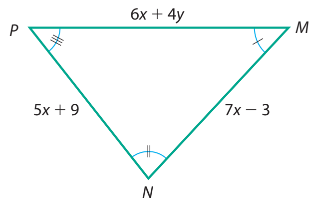
10. b) $\hat{A} \cong \hat{M}$
$\hat{B} \cong \hat{P}$
$\hat{C} \cong \hat{N}$



11 Sabendo que $\triangle ABC \cong \triangle MNP$, calcule x e y.

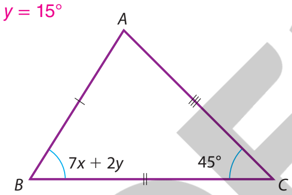
11. $x = 8$; $y = 5$

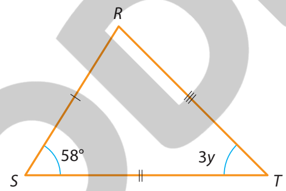




12 Calcule x e y, em grau, sabendo que $\triangle ABC \cong \triangle RST$.

12. $x = 4°$; $y = 15°$





ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Casos de congruência de triângulos

Vimos que dois triângulos são congruentes quando os lados correspondentes e os ângulos correspondentes são, respectivamente, congruentes e, assim, podemos sobrepô-los. Isso significa que, para concluir que dois triângulos são semelhantes, devemos verificar seis congruências, com três pares de lados e com três pares de ângulos.

No entanto, em algumas situações, é possível reconhecer a congruência de dois triângulos quando são conhecidos apenas três de seus elementos. Isso é feito por meio dos casos de congruência, que vamos estudar a seguir.

Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, os estudantes aplicarão o conceito de congruência de triângulos.

Ressalte a importância de tomar na ordem correta os elementos correspondentes entre os dois triângulos considerados para determinar a congruência (ou não) desses triângulos.

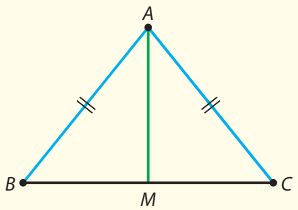
As resoluções dos **exercícios 9** a **12** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

167

Caso lado-lado-lado (LLL)

Incentive os estudantes a realizarem a experimentação proposta: decalcar o triângulo *MNP* em uma folha de papel de seda (solicitada previamente) e sobrepor o decalque ao triângulo *ABC*, fazendo coincidir os lados correspondentes.

É importante comentar com eles que cada congruência entre lados correspondentes dos dois triângulos considerados deve ser justificada para que possamos utilizar o caso LLL de congruência de triângulos. Por exemplo, considere o triângulo isósceles *ABC* a seguir, em que *M* é ponto médio do lado $\overline{BC}$.

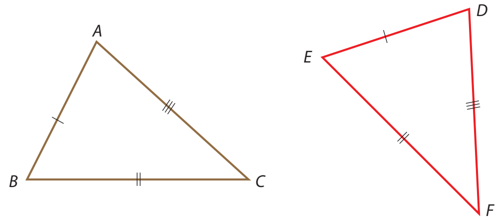


Podemos concluir a congruência dos triângulos *ABM* e *ACM* pelo caso LLL da seguinte maneira:

- $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (lados de mesma medida em triângulo isósceles)
- $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum)
- $\overline{BM} \cong \overline{CM}$ (*M* é ponto médio de $\overline{BC}$)

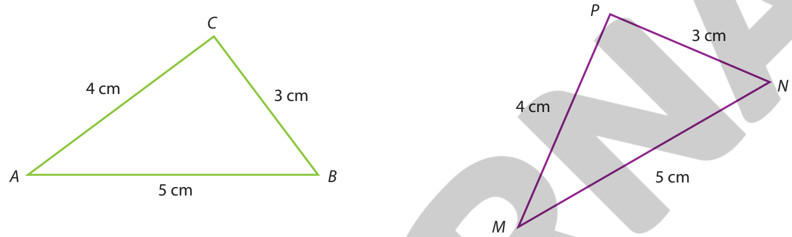
Caso lado-lado-lado (LLL)

Dois triângulos são congruentes quando têm os três lados respectivamente congruentes.

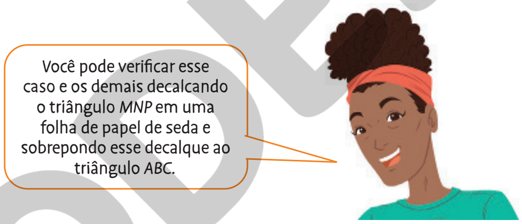


$$\text{Se } \left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{array}\right\}, \text{ então: } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Como exemplo, considere os triângulos a seguir.

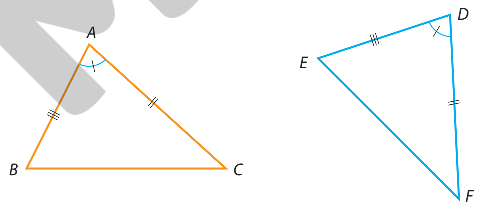


Note que esses triângulos têm os três lados correspondentes com medidas iguais, ou seja, são congruentes ($\overline{AB} \cong \overline{MN}$, $\overline{BC} \cong \overline{NP}$ e $\overline{AC} \cong \overline{MP}$). Isso garante, pelo caso LLL, que os triângulos *ABC* e *MNP* sejam congruentes.



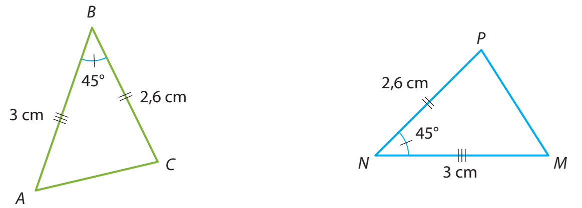
Caso lado-ângulo-lado (LAL)

Dois triângulos são congruentes quando têm dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes.



$$\text{Se } \left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{DE} \\ \hat{A} \cong \hat{D} \\ \overline{AC} \cong \overline{DF} \end{array}\right\}, \text{ então: } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Como exemplo, considere os triângulos a seguir.



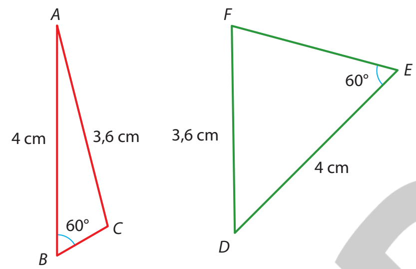
Esses triângulos têm dois lados correspondentes congruentes ($\overline{AB} \cong \overline{MN}$ e $\overline{BC} \cong \overline{NP}$), e os ângulos compreendidos por esses lados também são congruentes ($\hat{B} \cong \hat{N}$). Isso garante, pelo caso LAL, que os triângulos *ABC* e *MNP* sejam congruentes.

Observação

- No caso LAL, assim como nos casos que vamos estudar a seguir, a ordem dos elementos deve ser respeitada para verificar a congruência entre os triângulos.

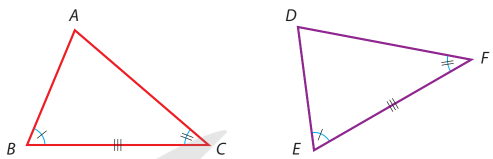
  Para exemplificar, considere os triângulos *ABC* e *DEF*.

  Com régua e transferidor, verifique que os triângulos *ABC* e *DEF* têm dois lados congruentes e um ângulo congruente, mas não são triângulos congruentes.



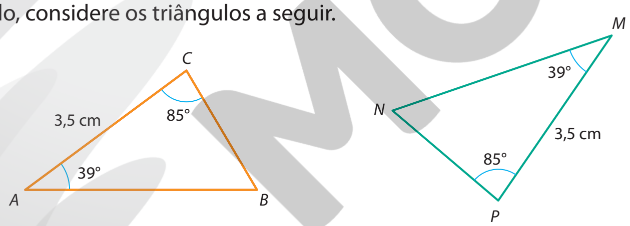
Caso ângulo-lado-ângulo (ALA)

Dois triângulos são congruentes quando têm dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos respectivamente congruentes.



$$\text{Se } \left.\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{E} \\ \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{array}\right\}, \text{ então: } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Como exemplo, considere os triângulos a seguir.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Esses triângulos têm dois ângulos correspondentes congruentes ($\hat{A} \cong \hat{M}$ e $\hat{C} \cong \hat{P}$), e os lados adjacentes a esses ângulos também são congruentes ($\overline{AC} \cong \overline{MP}$). Isso garante, pelo caso ALA, que os triângulos *ABC* e *MNP* sejam congruentes.

Caso lado-ângulo-lado (LAL) e caso ângulo-lado-ângulo (ALA)

Para explorar os casos de congruência LAL e ALA, forneça aos estudantes pares de triângulos congruentes envolvendo esses dois casos para que os identifiquem. Além disso, sugerimos retomar a construção de triângulos para cada um desses casos, de maneira que cada estudante represente o triângulo cujas medidas de dois lados e a do ângulo entre eles sejam dadas para, depois, comparar as produções e perceber que ocorre a congruência. De maneira análoga, eles representam o triângulo cujas medidas de um lado e dos dois ângulos que ele determina (com os demais lados) sejam dadas.

Esse tipo de atividade em que os estudantes verificam que ocorre uma propriedade pode desenvolver a **competência geral 2**, pois exercitam a curiosidade intelectual, podendo ser, também, incentivados a justificar ou demonstrar as propriedades observadas ou hipóteses.

Caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAA_o)

Antes de tratar do caso LAA_o, represente alguns triângulos na lousa e peça aos estudantes que identifiquem ângulos opostos a determinados lados desses triângulos, de modo que não fiquem dúvidas quanto a essa nomenclatura.

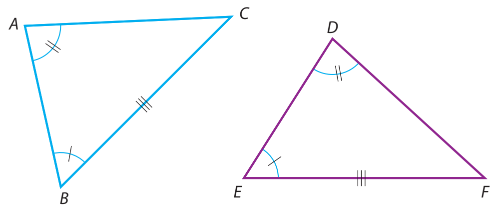
Apresente-lhes o caso LAA_o e, em seguida, forneça a eles pares de triângulos congruentes envolvendo esse caso para que os identifiquem.

Se julgar pertinente, incentive os estudantes a demonstrarem o caso cateto-hipotenusa. Considerando dois triângulos retângulos, *ABC* e *MNP*, tais que $\overline{AB}$ e $\overline{MN}$ sejam congruentes e $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$ sejam suas hipotenusas e congruentes, pode-se transladar o triângulo *MNP* de maneira que $\overline{AC}$ e $\overline{MP}$ coincidam, obtendo o quadrilátero *ABCN*. Como os ângulos internos em *B* e em *N* são retos, os lados opostos do quadrilátero são paralelos, ou seja, tal quadrilátero é um paralelogramo. Assim, os lados opostos são congruentes; portanto, os triângulos que o compõem são congruentes.

Ao trabalhar demonstrações, os estudantes desenvolvem a **competência geral 7**, pois precisam argumentar e justificar a validade das informações consideradas na demonstração.

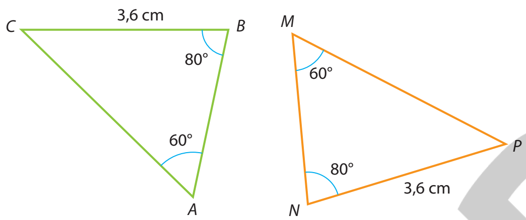
Caso lado-ângulo-ângulo oposto (LAA_o)

Dois triângulos são congruentes quando têm um lado, o ângulo adjacente a esse lado e um ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes.



$$\text{Se } \left.\begin{array}{c} \overline{BC} \cong \overline{EF} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{A} \cong \hat{D} \end{array}\right\}\text{, então: } \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Como exemplo, considere os triângulos a seguir.



Esses triângulos têm, respectivamente, congruentes: um lado ($\overline{BC} \cong \overline{NP}$), um ângulo adjacente a esse lado ($\hat{B} \cong \hat{N}$) e o ângulo oposto ao lado congruente ($\hat{A} \cong \hat{M}$). Desse modo, pelo caso LAA_o, garantimos que os triângulos *ABC* e *MNP* sejam congruentes.

Este caso pode ser entendido como uma extensão do caso ALA. Basta notar que, dadas as medidas 60° e 80°, a medida do terceiro ângulo fica conhecida. Observe:

$m(A\hat{C}B) = m(M\hat{P}N) = 180° - 60° - 80° = 40°$

Assim, os triângulos têm dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos respectivamente congruentes (caso ALA).

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

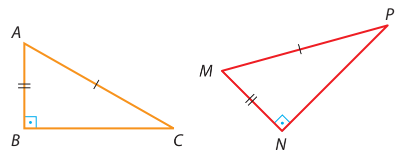
Observação

- Além dos quatro casos de congruência de triângulos estudados, vamos conhecer um caso válido somente para os triângulos retângulos, o **caso cateto-hipotenusa (CH)**.

Dois triângulos retângulos são congruentes quando têm a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes.

Considere os triângulos retângulos *ABC* e *MNP*, com $\overline{AC} \cong \overline{MP}$ e $\overline{AB} \cong \overline{MN}$.

Então, pelo caso CH, os triângulos *ABC* e *MNP* são congruentes.



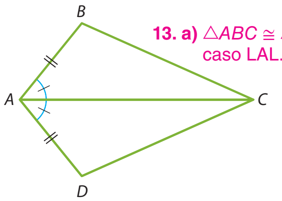
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

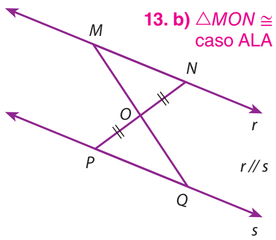
13 Verifique em cada item quais são os pares de triângulos congruentes e escreva no caderno o caso pelo qual são congruentes.

a)



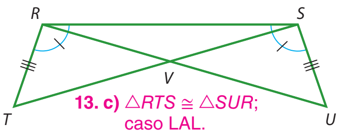
13. a) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$; caso LAL.

b)



13. b) $\triangle MON \cong \triangle QOP$; caso ALA ou LAA$_o$.

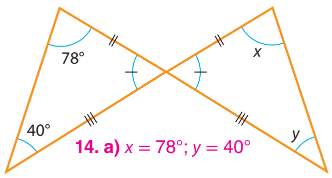
c)



13. c) $\triangle RTS \cong \triangle SUR$; caso LAL.

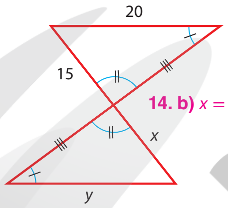
14 Calcule os valores de x e y nas figuras a seguir.

a)



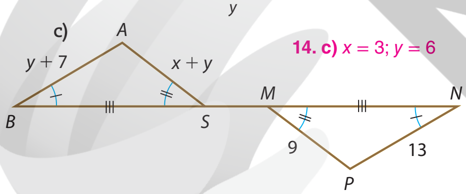
14. a) $x = 78°$; $y = 40°$

b)



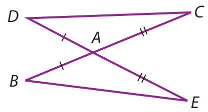
14. b) $x = 15$; $y = 20$

c)



14. c) $x = 3$; $y = 6$

15 Observe a figura a seguir.

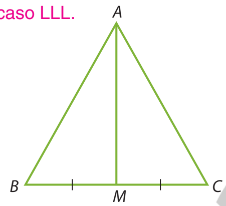


Sabendo que as marcas iguais indicam lados de mesma medida, explique por que podemos afirmar que $\overline{EB} \cong \overline{DC}$. **15.** $\overline{EB} \cong \overline{DC}$ porque os triângulos *ADC* e *ABE* são congruentes pelo caso LAL.

16 Considere um triângulo *ABC* equilátero.

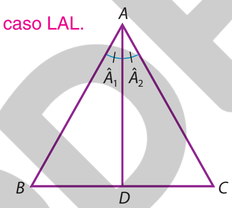
a) Ao traçar a mediana $\overline{AM}$, obtemos dois triângulos: $\triangle AMB$ e $\triangle AMC$. Esses triângulos são congruentes? Justifique sua resposta.

16. a) Sim, pelo caso LLL.
$\overline{BM} \cong \overline{MC}$
$\overline{AM} \cong \overline{AM}$
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$



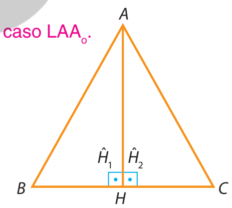
b) Ao traçar a bissetriz $\overline{AD}$, obtemos dois triângulos: $\triangle ADB$ e $\triangle ADC$. Esses triângulos são congruentes? Justifique sua resposta.

16. b) Sim, pelo caso LAL.
$\overline{AD} \cong \overline{AD}$
$\hat{A}_1 \cong \hat{A}_2$
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$



c) Ao traçar a altura $\overline{AH}$, também obtemos dois triângulos: $\triangle AHB$ e $\triangle AHC$. Esses triângulos são congruentes? Justifique sua resposta.

16. c) Sim, pelo caso LAA$_o$.
$\overline{AH} \cong \overline{AH}$
$\hat{H}_1 \cong \hat{H}_2$
$\hat{B} \cong \hat{C}$



d) Todos os triângulos obtidos nos itens anteriores são congruentes? Justifique sua resposta. **16. d)** Sim; resposta pessoal.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 13** a **15** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

O **exercício 16** pode ser ampliado perguntando aos estudantes se todos os triângulos obtidos nos **itens a**, **b** e **c** são congruentes. Espera-se que reconheçam que sim.

É interessante observar com eles que essa pergunta sintetiza o que foi abordado nos itens desse exercício e que, portanto, em um triângulo equilátero, a mediana, a altura e a bissetriz relativas a um mesmo lado são congruentes.

Exercícios propostos

O **exercício 17** pode ser resolvido com os estudantes organizados em duplas, o que enriquecerá o aprendizado. No **item a**, $OA = OB$, pois são a medida do raio da circunferência; $OE = OE$, pois são as medidas dos lados comuns aos triângulos; como essas medidas correspondem às medidas da hipotenusa e de um dos catetos; pelo caso CH, os triângulos são congruentes. A seguir, apresentamos um exemplo de demonstração para o **item b**.

Considerando os triângulos *PAE* e *PBE*, verificamos:

- $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ (pela congruência citada no **item a**)
- $A\hat{E}O \cong B\hat{E}O$ (ângulos retos)
- $\overline{PE} \cong \overline{PE}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos *PAE* e *PBE* são congruentes.

Portanto, $\overline{AP} \cong \overline{BP}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

A resolução do **item c** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

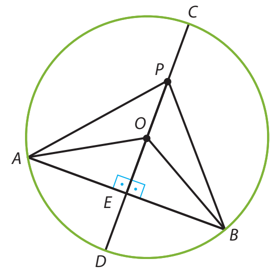
Para saber mais

A seção desenvolve a construção de polígonos regulares, em particular a construção de um hexágono regular. Reproduza as figuras na lousa e refaça com os estudantes cada etapa da construção descrita nessa seção.

Além disso, solicite que elaborem um fluxograma descrevendo as etapas para construir, com régua e compasso, um hexágono regular, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF08MA16).

17 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Na figura a seguir, a corda $\overline{AB}$ é perpendicular ao diâmetro $\overline{CD}$.

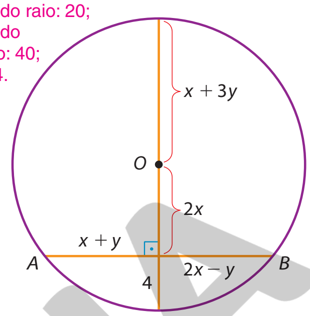


a) Qual é o caso de congruência de triângulos que assegura que $\triangle OAE \cong \triangle OBE$?
17. a) Caso CH.

b) Considerando os triângulos *PAE* e *PBE*, demonstrem que $\overline{AP} \cong \overline{BP}$. **17. b)** Demonstração.

c) Considerem a figura a seguir, em que as expressões representam as medidas dos segmentos. No caderno, calculem as medidas do raio, do diâmetro e da corda $\overline{AB}$.

17. c) Medida do raio: 20; medida do diâmetro: 40; $AB = 24$.



PARA SABER MAIS

Construindo um hexágono regular com uma moeda

Com uma moeda de 1 real, Márcia e Mílton inicialmente traçaram uma circunferência de centro *O*. Depois, cada um deles construiu o desenho da figura 1, dividindo a circunferência em 6 arcos congruentes.

Examinando bem o desenho, eles perceberam que os pontos *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F* são os centros das seis circunferências que passam por *O* e, também, são vértices consecutivos de um hexágono regular inscrito na circunferência de centro *O*.

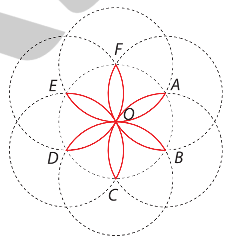


Figura 1

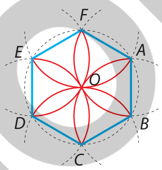


Figura 2

Então, cada um completou o desenho traçando o seu polígono. Note, na figura 2, como ficou o hexágono *ABCDEF*.

Com um transferidor, Márcia verificou que os ângulos centrais $A\hat{O}B$, $B\hat{O}C$, $C\hat{O}D$, $D\hat{O}E$, $E\hat{O}F$ e $F\hat{O}A$ medem 60°.

Para fazer a mesma verificação, Mílton foi mais prático e usou o ângulo de 60° de um esquadro de 30° e 60°. Observe, na figura 3, como ele fez para verificar a medida do ângulo $B\hat{O}C$. Da mesma forma, ele fez com os demais ângulos centrais.

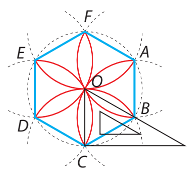


Figura 3

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A partir dessa experiência, Márcia e Mílton verificaram que é possível construir hexágonos regulares traçando arcos ou ângulos centrais de 60° e apresentaram um trabalho escolar descrevendo um algoritmo com os passos a seguir.

Márcia

- Traçar uma circunferência de centro *O* e raio *r*.
- Traçar uma semirreta qualquer de origem *O*, que corta a circunferência no ponto *A*.
- Com a ponta-seca do compasso em *A* e abertura igual ao raio, traçar um arco obtendo *B* e *F* na circunferência.
- Repetir o traçado do arco com centros em *B*, *C* e *D*, obtendo na circunferência, respectivamente, *C*, *D* e *E*.
- Traçar $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.

Mílton

- Traçar uma circunferência de centro *O* e raio *r*.
- Encostar em *O* a ponta (vértice do ângulo de 60°) do esquadro e traçar um ângulo de 60° que corta a circunferência nos pontos *A* e *F*.
- Ainda com a ponta do esquadro em *O*, traçar ângulos de 60° adjacentes a $A\hat{O}F$, obtendo *B* e *E*.
- Repetir o passo anterior, traçando ângulos de 60° adjacentes a $A\hat{O}B$ e $F\hat{O}E$, obtendo *C* e *D*.
- Traçar $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ e $\overline{FA}$.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Construa dois hexágonos regulares com lados de 4 cm, um pelo algoritmo de Márcia e o outro pelo de Mílton. *Para saber mais*: **1.** Construção de figura.

2 Em uma circunferência de raio de 4 cm, construa um dodecágono regular traçando ângulos centrais de 30° com um esquadro. **2.** Construção de figura.

1. a) Falsa. Resposta possível: o ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo chama-se circuncentro. **1. b)** Verdadeira. **1. c)** Verdadeira.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. d) Falsa. Resposta possível: o lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo chama-se hipotenusa.

1 No caderno, corrija as sentenças falsas.

a) O ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo chama-se ortocentro.

b) Todo triângulo equilátero é isósceles.

c) Se um triângulo é equilátero, então cada um de seus ângulos internos mede 60°.

d) O lado oposto ao ângulo reto de um triângulo retângulo chama-se cateto.

2 Com régua e compasso, construa no caderno um triângulo equilátero *ABC* de lados com 7 cm. A seguir, escolha entre traçar as bissetrizes dos ângulos internos, as alturas e as medianas. O ponto de intersecção das cevianas que você escolheu é o baricentro de *ABC*? Ele é o incentro de *ABC*? Ele é o ortocentro de *ABC*? **2.** Construção de figura.

3 No triângulo *ABC* do exercício anterior, com a ponta-seca do compasso no ponto de intersecção obtido, trace as circunferências inscrita e circunscrita ao triângulo.
(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.) **3.** Construção de figura.

4 Com régua e compasso, construa um triângulo *ABC* de lados *AB* = 8 cm, *AC* = 6 cm e *BC* = 7 cm e obtenha o seu baricentro *G*. Depois, usando o compasso em cada mediana, verifique quantas vezes a medida do segmento com extremidades no baricentro e no ponto médio do lado do triângulo cabe no segmento com extremidades no baricentro e no vértice.
4. Cabe duas vezes em cada mediana.

5 (Uneb-BA) Num triângulo retângulo, a altura e a bissetriz relativas à hipotenusa formam um ângulo de 25°. Os ângulos agudos desse triângulo medem:

a) 35° e 55°.
b) 40° e 50°.
c) 30° e 60°.
d) 15° e 75°.
e) 20° e 70°.

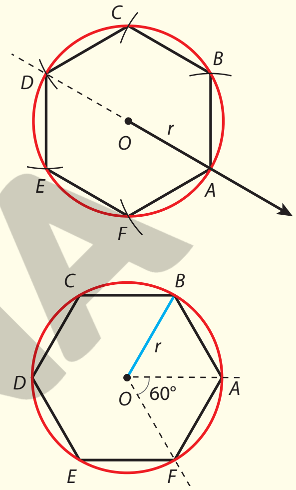
5. Alternativa **e**.

6 Em um triângulo retângulo, a medida de um dos ângulos agudos é 50°. Calcule a medida do ângulo obtuso formado pela sua bissetriz com a bissetriz do ângulo reto. **6.** 110°.

Agora é com você!

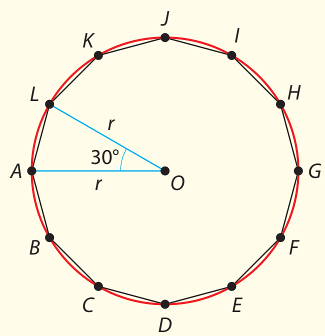
Reúna os estudantes em duplas ou trios e peça a eles que leiam a descrição do algoritmo de Márcia e de Mílton para resolverem a **atividade 1**.

Exemplo das construções descritas pelos algoritmos de Márcia e de Mílton, respectivamente:



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Na **atividade 2**, espera-se que os estudantes transfiram os conhecimentos da construção do hexágono regular para a construção do dodecágono regular. Para isso, eles podem considerar o algoritmo de Márcia e, no 3º passo, aplicar uma abertura do compasso igual à metade da medida do raio; dessa maneira, eles irão obter os pontos de *B* a *L*, que são os vértices do dodecágono assim com o ponto *A*.



RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios retoma os principais conceitos tratados no capítulo, possibilitando que os estudantes retomem os conhecimentos construídos e identifiquem possíveis dúvidas que ainda tenham.

As resoluções dos **exercícios 1** a **6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Verificando

Os testes propostos nessa seção podem ser utilizados para preparar os estudantes para avaliações de larga escala.

Pode-se solicitar a eles que resolvam cada teste individualmente e, depois, corrigi-los na lousa, possibilitando que os estudantes compartilhem as estratégias de resolução utilizadas.

As resoluções dos **testes 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 7.

Organizando

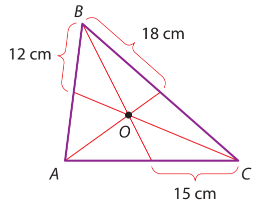
As questões apresentadas nessa seção possibilitam retomar com os estudantes os principais conceitos trabalhados no capítulo. Elas também podem orientar uma autoavaliação dos estudantes.

É interessante que cada um responda e, depois, comente com os colegas as respostas, corrigindo-as ou complementando-as.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Sabendo que o ponto O é o baricentro do triângulo ABC, determine a medida do perímetro desse triângulo. **1.** Alternativa **d.**

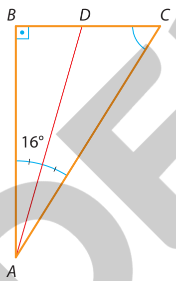


a) 45 cm
b) 72 cm
c) 75 cm
d) 90 cm

2 Um malabarista está treinando para um truque de equilíbrio. Ele precisa equilibrar uma tábua de vidro triangular não equilátera em uma vara de madeira. Para que ele consiga realizar o truque, a extremidade da vara deve estar posicionada no: **2.** Alternativa **b.**

a) circuncentro do triângulo.
b) baricentro do triângulo.
c) incentro do triângulo.
d) ortocentro do triângulo.

3 Sabendo que $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $\hat{B}$, determine a medida do ângulo $\hat{C}$. **3.** Alternativa **b.**

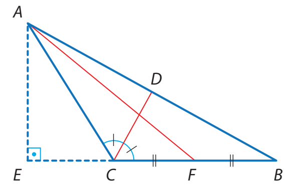


a) 32°
b) 58°
c) 74°
d) 90°

4 Em um jardim, há uma praça triangular onde se deseja instalar uma fonte que fique equidistante das laterais da praça. Desse modo, a fonte deve ser instalada no: **4.** Alternativa **c.**

a) circuncentro do triângulo.
b) baricentro do triângulo.
c) incentro do triângulo.
d) ortocentro do triângulo.

5 Que segmento indica a altura do triângulo ABC em relação à base $\overline{CB}$? **5.** Alternativa **a.**

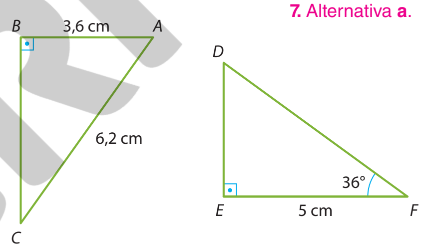


a) $\overline{AE}$
b) $\overline{AC}$
c) $\overline{CD}$
d) $\overline{AF}$

6 Como deve ser classificado um triângulo para que seu ortocentro se encontre na região externa? **6.** Alternativa **d.**

a) Equilátero
b) Acutângulo
c) Retângulo
d) Obtusângulo

7 Sabendo que os triângulos ABC e DEF a seguir são congruentes, determine as medidas do ângulo $\hat{A}$ e do perímetro p do triângulo DEF.
7. Alternativa **a.**



a) $m(\hat{A}) = 54°$ e $p = 14{,}8$ cm
b) $m(\hat{A}) = 36°$ e $p = 14{,}8$ cm
c) $m(\hat{A}) = 54°$ e $p = 12{,}2$ cm
d) $m(\hat{A}) = 36°$ e $p = 12{,}2$ cm

8 Quais dos casos a seguir não estão relacionados à congruência de triângulos ? **8.** Alternativa **c.**

a) LLL e LAL
b) LAL e ALA
c) LA e AAA
d) CH e LAA_o

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Organizando

Organizando: **a)** Resposta pessoal.
b) A condição é que o triângulo deve ser equilátero. Nos casos em que o triângulo é isósceles, apenas o trio referente à base é o mesmo segmento.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Na sua opinião, por que as cevianas estudadas no capítulo merecem destaque?

b) Qual é a condição para que o trio bissetriz, mediatriz e altura referente a cada um dos ângulos ou dos lados de um triângulo seja o mesmo segmento?

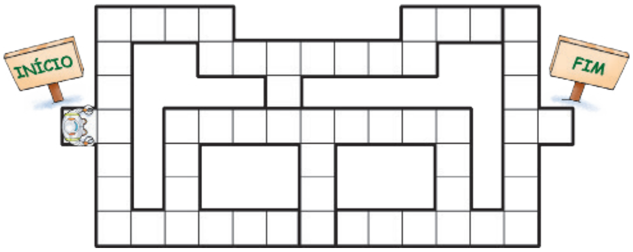
c) Quando dois triângulos são congruentes? **c)** Quando os lados correspondentes e os ângulos correspondentes tiverem a mesma medida.

d) Quais são os casos de congruência entre dois triângulos? **d)** Lado-ângulo-lado, ângulo-lado-ângulo, lado-ângulo-ângulo oposto e lado-lado-lado. Para triângulos retângulos, há o caso cateto-hipotenusa.

DIVERSIFICANDO

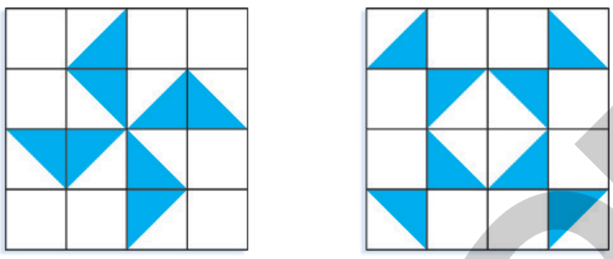
Ângulos e simetria

Vanessa vai participar do campeonato "O labirinto dos robôs". Cabe a ela escrever as informações corretas do caminho que o robô deve fazer. O objetivo é fazer o robô chegar ao final do percurso sem que ele bata nas paredes do labirinto.



Azulejos

Pedro conseguiu juntar dinheiro para colocar azulejos novos em sua cozinha. Na loja de material para construção, ele resolveu combinar alguns azulejos. Observe as combinações que ele fez.



1ª combinação   2ª combinação

ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

1. Resposta possível: Dê 1 passo e vire 90° à direita. Dê 3 passos e vire 90° à esquerda. Dê 2 passos e vire 90° à esquerda. Dê 3 passos e vire 90° à direita. Dê 8 passos e vire 90° à direita. Dê 3 passos e vire 90° à esquerda. Dê 2 passos e vire 90° à esquerda. Dê 3 passos e vire 90° à direita. Dê 1 passo à frente.

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Com o auxílio da ilustração de "O labirinto dos robôs", escreva todos os passos que o robô deve dar para completar o percurso sem bater nas paredes. Por exemplo: "Dê 1 passo e vire 90° à esquerda". Cada passo corresponde a um quadrado.

2 O labirinto apresenta simetria? E o caminho que o robô deve fazer para chegar ao final do percurso? Justifique suas respostas. **2.** Espera-se que os estudantes percebam que o labirinto não apresenta simetria e que o caminho que o robô deve fazer apresenta simetria. O eixo de simetria seria uma linha vertical localizada no centro.

3 Quantos tipos de azulejo Pedro usou para fazer a primeira combinação? E a segunda? **3.** 1ª combinação: 2 tipos; 2ª combinação: 2 tipos.

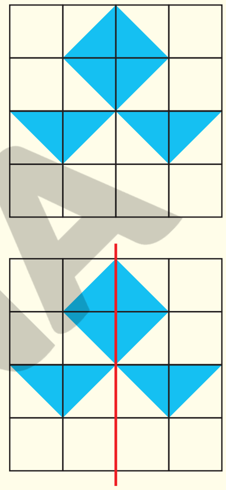
4 Entre essas combinações, qual apresenta uma figura com eixo de simetria? Quantos eixos de simetria essa combinação tem? **4.** A segunda; 4 eixos de simetria.

5 Formem grupos e, considerando os azulejos representados, façam uma nova combinação que apresente uma figura com eixo de simetria. Escolham um representante do grupo para desenhar a combinação na lousa e outro representante para explicá-la e mostrar o eixo de simetria. **5.** Construção de figura.

Diversificando

Nesta seção, os estudantes poderão trabalhar a ideia de transformações geométricas na resolução das atividades propostas, desenvolvendo a habilidade (EF08MA18).

A seguir, um exemplo de figura construída para a **atividade 5** do **Agora é com você!** e a mesma figura construída com eixo de simetria.



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Capítulo 8 – A Geometria demonstrativa

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Este capítulo dá continuidade ao estudo iniciado no capítulo anterior, mostrando como a congruência de triângulos pode ser utilizada em demonstrações geométricas, justificando propriedades de triângulos e de quadriláteros ou outros polígonos.

Espera-se que os estudantes desenvolvam cada vez mais o raciocínio lógico dedutivo fundamental para a continuidade de seus estudos em Matemática, em particular na Unidade Temática **Geometria**.

Para desenvolverem a pesquisa proposta no **item a**, podem-se sugerir *sites* e materiais com informações relevantes para, a partir deles, os estudantes realizarem novas pesquisas.

A proposta nos **itens b** e **c**, e no texto de abertura, possibilita aos estudantes discutirem sobre *fake news* e as conclusões resultantes de falso silogismo.

É comum tomar premissas verdadeiras, como as do **item c**, e desenvolver uma conclusão falsa. O fato de alguns mamíferos serem gatos e de alguns mamíferos serem ratos não nos permite concluir que alguns gatos sejam ratos. Esse tipo de raciocínio está presente em muitas falsas informações disseminadas em massa nas redes sociais. Dessa maneira, sugerimos um trabalho interdisciplinar com Língua Portuguesa, a fim de que os estudantes analisem diferentes práticas que realizam em redes sociais (curtir, compartilhar, comentar etc.) e textos associados a diferentes gêneros da cultura digital (meme, *gif*, comentário, charge digital etc.) que contenham algum tipo de falso silogismo. Assim os estudantes podem perceber a importância da análise crítica das informações publicadas em diferentes mídias e a importância de uma atitude ética ao usar redes sociais, desenvolvendo, assim, a **competência geral 5**.

Capítulo

8 A Geometria demonstrativa

a) Resposta pessoal.
b) Espera-se que os estudantes percebam que os adjetivos "baratos" e "caros" são antônimos; logo, a frase é falsa.

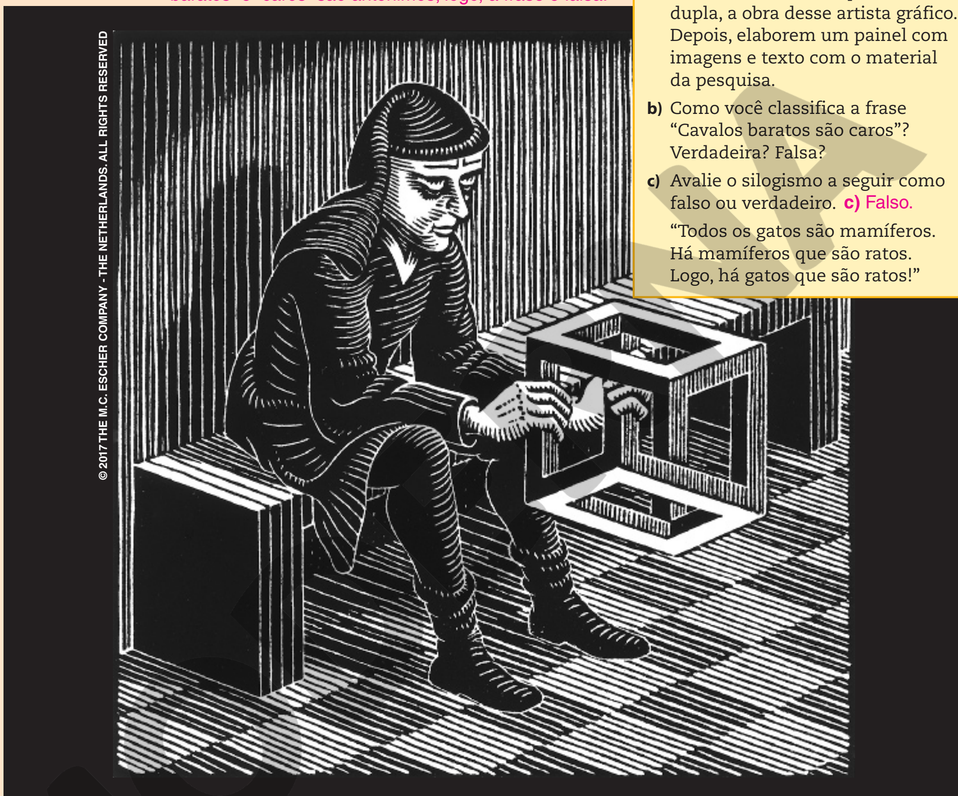
Observe, leia e responda no caderno.

a) Você já ouviu falar de Maurits Cornelis Escher? Pesquise, em dupla, a obra desse artista gráfico. Depois, elaborem um painel com imagens e texto com o material da pesquisa.

b) Como você classifica a frase "Cavalos baratos são caros"? Verdadeira? Falsa?

c) Avalie o silogismo a seguir como falso ou verdadeiro. **c)** Falso.

"Todos os gatos são mamíferos.
Há mamíferos que são ratos.
Logo, há gatos que são ratos!"



ESCHER, M. C. **Man with Cuboid**. 1958. Gravura em madeira, 6,4 cm × 6,4 cm. National Gallery of Art, Washington, D.C., Estados Unidos da América.

O cubo impossível de Escher nos faz pensar que nem tudo é o que parece ser. Um falso **silogismo** também pode nos alertar sobre o cuidado que devemos ter com conclusões apressadas:

Todos os cavalos raros são caros. Verdade.
Os cavalos baratos são raros. Verdade.
Então, os cavalos baratos são caros! Verdade?

Silogismo: raciocínio dedutivo estruturado formalmente com base em duas proposições (premissas), das quais se obtém por inferência uma terceira (conclusão).

Por isso, a Matemática, apoiada nas regras da Lógica e em um mínimo de postulados, não dispensa demonstrações rigorosas.

Sugestões de leitura

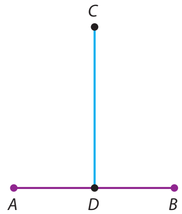
GOMES, S. F.; PENNA, J. C. B. O. ARROIO, A. *Fake news* científicas: percepção, persuasão e letramento. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 26, e20018, 2020. Disponível em: https://doi.org/10.1590/1516-731320200018. Acesso em: 8 jun. 2022.
Neste artigo, os autores trabalham a compreensão de quais elementos influenciam na credibilidade de notícias científicas.

COELHO, A. Modelo lógico matemático com apontamentos à teoria dos jogos e teoria econômica do crime para combate a *fake news*. **Revista Humanidades e Inovação**, v. 7, n. 9, 2020. Disponível em: https://revista.unitins.br/index.php/humanidadeseinovacao/article/view/2246. Acesso em: 8 jun. 2022.
Neste artigo, é analisado o fenômeno da *fake news* sob a ótica da Teoria dos Jogos e Teoria Econômica do Crime. Também se propõe um modelo lógico matemático aplicável ao combate dessa prática.

1 Demonstrações geométricas

Muitas das propriedades geométricas já estudadas foram consideradas verdadeiras com base em medições experimentais ou na simples observação. Porém, nem sempre chegamos a conclusões corretas efetuando medições, considerando que a medida está sujeita a erros decorrentes de, por exemplo, um desenho impreciso ou um instrumento defeituoso. A simples observação também pode levar a conclusões erradas, pois, muitas vezes, as aparências enganam.

Um observador descuidado, ao observar a figura a seguir, poderá concluir que $CD > AB$, quando, de fato, $AB = CD$. (Verifique!)



Isso nos faz pensar que nem sempre a medição ou a simples observação são suficientes para confirmar se uma propriedade geométrica é verdadeira ou falsa. Por mais evidente que pareça, uma propriedade só pode ser considerada verdadeira depois de provada.

Noções primitivas e postulados

Já estudamos que, em Geometria, pontos, retas e planos são noções aceitas sem definição; por isso são chamadas de **noções primitivas**.

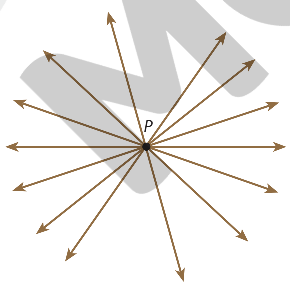
Além das noções primitivas, na Geometria, estabelecemos algumas verdades iniciais aceitas sem demonstração: os **postulados**.

A seguir, vamos estudar alguns postulados que foram estabelecidos como propriedades fundamentais das noções primitivas.

Postulados

- Uma reta tem infinitos pontos.

- Por um ponto, passam infinitas retas.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

1. Demonstrações geométricas

Habilidade da BNCC: **EF08MA14**.

Este tópico possibilita aos estudantes demonstrar diferentes propriedades de triângulos utilizando, principalmente, a congruência de triângulos e, assim, contribui para o posterior desenvolvimento da habilidade (EF08MA14), ampliando as demonstrações para outras figuras geométricas planas. Discuta com os estudantes a importância de retratar criteriosamente uma situação, destacando as informações dadas e, se for o caso, representar por meio de figuras que se aproximem o máximo possível dos dados fornecidos pela situação. Apenas o desenho não resolverá o problema proposto, mas uma figura com muitas imperfeições pode atrapalhar a estratégia ou até mascarar resultados e levar a conclusões inadequadas. Por exemplo, se o problema indica que o triângulo é equilátero, não é conveniente representar essa situação com um triângulo retângulo.

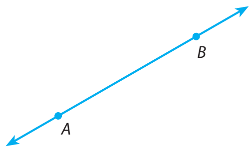
Outra discussão importante é a consideração de casos particulares quando queremos um resultado generalizado. Por exemplo, se devemos tomar um triângulo qualquer, desenhar um triângulo equilátero pode induzir a obter conclusões de resultados válidos apenas para esse tipo de triângulo, não para um triângulo qualquer.

Demonstrações geométricas

Ao longo do estudo de Geometria, os estudantes já devem ter se deparado com noções primitivas e suas representações. Retomamos esses conceitos para apresentar-lhes os postulados e teoremas, aprofundando e sistematizando o estudo desse tópico de Geometria plana.

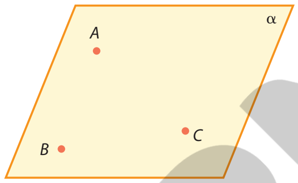
Converse com eles e incentive-os a diferenciar postulado de teorema, de maneira que percebam que um postulado é uma informação tida como verdadeira, sem necessidade de demonstração, enquanto um teorema é uma informação que deve ser provada verdadeira.

- Dois pontos distintos determinam uma única reta.



- Entre dois pontos distintos quaisquer de uma reta, sempre existe outro ponto dessa reta.

- Quaisquer três pontos não colineares determinam um, e somente um, plano.



- Por um ponto *P* qualquer situado fora de uma reta *r*, passa uma única reta paralela à reta dada.

Teoremas

Os **teoremas** são propriedades que podem ser demonstradas com base nos postulados ou em propriedades anteriormente demonstradas.

Um teorema é composto de duas partes:

- a parte que se supõe conhecida, chamada de **hipótese**;
- a parte que se deseja provar, chamada de **tese**.

Acompanhe alguns exemplos.

a) Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes.
Hipótese: duas retas paralelas são cortadas por uma transversal.
Tese: os ângulos correspondentes são congruentes.

b) Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.
Hipótese*:* um triângulo é isósceles.
Tese*:* os ângulos da base são congruentes.

3. **a)** Hipótese: um número é múltiplo de 3 e de 5; tese: esse número é múltiplo de 15.
3. **b)** Hipótese: uma altura de um triângulo é bissetriz; tese: esse triângulo é isósceles.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Qual dos segmentos é maior, $\overline{AB}$ ou $\overline{CD}$?

ALEX ARGOZINO / ARQUIVO DA EDITORA

1. Nenhum deles, pois são congruentes.

2 Indique falso ou verdadeiro para cada silogismo a seguir.

a) Toda estrela brilha com luz própria.
Nenhum planeta brilha com luz própria.
Então, nenhum planeta é estrela. **2. a)** Verdadeiro.

b) Todos os galos são aves.
Algumas aves são patos.
Então, todos os patos são galos. **2. b)** Falso.

3 Identifique a hipótese e a tese em cada caso.

a) Se um número é múltiplo de 3 e de 5, então esse número é múltiplo de 15.

b) Se uma altura de um triângulo é bissetriz, então esse triângulo é isósceles.

c) Se duas retas cortadas por uma reta transversal são paralelas, então elas determinam ângulos alternos internos de mesma medida.

3. **c)** Hipótese: duas retas cortadas por uma reta transversal são paralelas; tese: essas retas determinam ângulos alternos internos de mesma medida.

4 Verifique se as sentenças a seguir são verdadeiras ou falsas e dê um exemplo que justifique o fato de as sentenças serem falsas, caso haja alguma.

a) Se um triângulo é isósceles, então ele tem dois lados congruentes e um de medida diferente. **4. a)** Falsa. O triângulo pode ser equilátero.

b) Se um triângulo é retângulo, então ele não pode ser equilátero. **4. b)** Verdadeira.

c) Se um triângulo é equilátero, então as bissetrizes de dois ângulos internos determinam apenas ângulos agudos.

4. c) Falsa. As bissetrizes formam um ângulo de 120°.

PARA SABER MAIS

Da Geometria empírica à demonstrativa

A Geometria teve início em tempos remotos e desenvolveu-se lentamente até atingir a amplitude atual. Nesse trajeto, passou por diferentes papéis.

De modo geral, a Geometria inicial tratava somente de problemas geométricos concretos, apresentados isoladamente, e entre os quais não se observava nenhuma ligação.

Com o tempo, começaram-se a detectar propriedades e relações gerais com base em certo número de observações relativas a formas, tamanhos e relações espaciais de objetos físicos específicos, que passaram a ser casos particulares. Tais descobertas favoreceram a ordenação de problemas geométricos práticos em grupos de mesmo tipo, cada qual solucionável por meio de um mesmo procedimento geral.

Não se sabe quantos séculos foram necessários para a Geometria adquirir *status* de ciência; entretanto, historiadores acreditam que o início desse processo ocorreu ao longo do vale do rio Nilo, no Egito antigo, bem como nas bacias de outros grandes rios, como o Tigre e o Eufrates, na Mesopotâmia.

Quanto ao vale do rio Nilo, vale lembrar a importância da agrimensura como possível origem para a palavra *geometria*, que significa "medida da terra". Além disso, as bacias desses rios foram berços de formas avançadas de sociedade, conhecidas por sua habilidade em engenharia na drenagem de pântanos, irrigação, obras de defesa contra inundações e construção de grandes edifícios e estruturas, projetos que requeriam muita geometria prática.

A Geometria da Mesopotâmia e a do Egito eram, portanto, basicamente experimentais, derivadas de regras usadas pelos técnicos dessas civilizações, o que lhes possibilitou calcular medidas de áreas e muitos resultados bem antes dos gregos, porém não de maneira dedutiva.

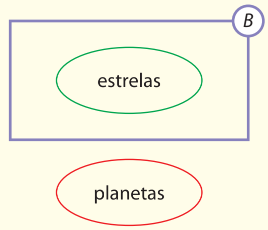
Exercícios propostos

Esta série de exercícios pode ser desenvolvida com os estudantes em duplas, o que enriquecerá o aprendizado, já que eles deverão expor o que pensam e compreender o pensamento do colega, para depois debater, refletir e esboçar uma conclusão com argumentos mais bem elaborados.

As resoluções dos **exercícios 1** a **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

No **exercício 2**, se julgar conveniente, o uso de diagramas que representem a situação pode ser uma boa estratégia.

A seguir, a representação da situação do **item a**, em que o conjunto representado pelo retângulo *B* é o conjunto dos astros e corpos celestes que brilham com luz própria.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Se toda estrela brilha com luz própria, todas as estrelas estão contidas no conjunto *B*.

Se nenhum planeta brilha com luz própria, não há planeta algum nesse conjunto, ou seja, nenhum planeta pertence ao conjunto *B*.

Logo, podemos concluir que nenhum planeta é estrela. Pode-se ampliar a atividade propondo à turma um trabalho interdisciplinar com Ciências, de maneira que os estudantes listem outros corpos celestes que pertençam ao conjunto *B* e outros que não pertençam a esse conjunto.

Para saber mais

Esta seção enriquece e dá significado ao aprendizado do tema abordado, fazendo sua contextualização com a história da Matemática.

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho, sugerimos:

JESUS, D. L. S. **O papel demonstrativo dos diagramas na geometria euclidiana**. Dissertação (Mestrado em Filosofia), Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2017. Disponível em: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/24921. Acesso em: 8 jun. 2022.

Nesse trabalho, resgatam-se algumas das principais discussões sobre a maneira como se pode obter conhecimento por meio de justificativas diagramáticas, apresentando-se uma defesa de um modelo de prova matemática parcialmente fundamentado em diagramas. Na investigação, tratam-se algumas características e demonstrações que constam na obra **Os elementos**, de Euclides.

As modificações político-econômicas dos últimos séculos do segundo milênio a.C. resultaram na diminuição do poder do Egito e da Babilônia. Tal mudança propiciou o florescimento de novas culturas.

Os gregos transformaram a **Geometria empírica**, ou **científica**, dos antigos egípcios e babilônios no que se poderia chamar de **Geometria demonstrativa**. Segundo esta, todas as verdades geométricas deveriam ser demonstradas por raciocínios dedutivos, com base em princípios chamados de **axiomas** ou **postulados**, não por processos experimentais.

A Geometria demonstrativa começou, provavelmente, com o trabalho do matemático grego Tales de Mileto (624-547 a.C.), considerado um dos sete sábios da Antiguidade. Tales foi a primeira pessoa conhecida a utilizar métodos dedutivos em Geometria. Viveu no Egito, de onde levou a Geometria para a Grécia, começando a aplicar a essa ciência, pela primeira vez, procedimentos dedutivos da Filosofia grega.

No campo da Matemática, o primeiro pensamento dedutivo ocorreu na área da Geometria, e a forma de pensamento dedutivo estabeleceu um modelo e determinou uma tradição que perduram até nossos tempos no procedimento de validação das verdades matemáticas.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Congruência de triângulos nas demonstrações geométricas

Acabamos de aprender que é possível provar que alguns fatos matemáticos são verdadeiros usando como base outros fatos já comprovados e em uma sequência de conclusões lógicas, sem usar instrumento de medida. É o que chamamos de fazer uma "prova" ou "demonstração" matemática.

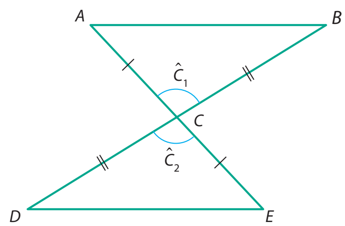
Os casos de congruência de triângulos podem ser utilizados para demonstrar a validade de algumas propriedades geométricas. Nas situações a seguir, vamos considerar que os casos de congruência de triângulos são verdades já demonstradas.

a) Na figura, temos:

$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \overline{AC} \cong \overline{CE} \\ \bullet\ \overline{BC} \cong \overline{CD} \end{array}\right\}$ Hipótese

Vamos provar que:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}\,\}$ Tese



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Para verificar se os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$ são congruentes, poderíamos medi-los com o auxílio de uma régua ou usar um compasso com a medida do segmento $\overline{AB}$ para conferir se essa medida coincide com a do segmento $\overline{DE}$. Em qualquer desses casos, sempre haveria a possibilidade de erro de medição ou mesmo um defeito do instrumento.

Então, vamos provar que $\overline{AB} \cong \overline{DE}$.

- **Demonstração**

SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

Considerando os triângulos *ABC* e *EDC*, temos:

1. $\overline{AC} \cong \overline{CE}$ (por hipótese)

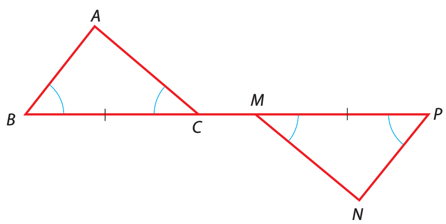
2. $\hat{C}_1 \cong \hat{C}_2$ (ângulos opostos pelo vértice)

3. $\overline{BC} \cong \overline{CD}$ (por hipótese)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos *ABC* e *EDC* são congruentes. Portanto, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

b) Dada a figura a seguir, em que $\overline{AB} \parallel \overline{PN}$ e $\overline{AC} \parallel \overline{MN}$, vamos provar que $\overline{AC} \cong \overline{NM}$.

ANDERSON DE ANDRADE PIMENTEL/ ARQUIVO DA EDITORA



$$\text{Hipótese} \begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{PN} \\ \overline{AC} \parallel \overline{MN} \\ \overline{BC} \cong \overline{PM} \end{cases}$$

$$\text{Tese } \{ \overline{AC} \cong \overline{NM}$$

- **Demonstração**

Considerando os triângulos *ABC* e *NPM*, temos:

1. $A\hat{B}C \cong N\hat{P}M$ (ângulos alternos internos)

2. $\overline{BC} \cong \overline{PM}$ (por hipótese)

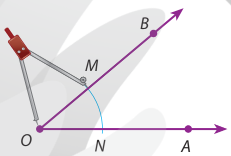
3 . $A\hat{C}B \cong N\hat{M}P$ (ângulos alternos externos)

Logo, pelo caso ALA, os triângulos *ABC* e *NPM* são congruentes. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{NM}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

c) Vamos usar a congruência de triângulos para justificar a validade da seguinte construção geométrica: **bissetriz de um ângulo**.

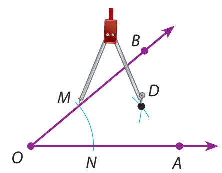
- **Construção**

1º) Com a ponta-seca do compasso em *O*, traçamos um arco determinando os pontos *M* e *N*.



2º) Com a mesma abertura do compasso e a ponta-seca em *M* e, em seguida, em *N*, traçamos os arcos que se intersectam em *D*.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

Congruência de triângulos nas demonstrações geométricas

Assumindo sem demonstração os casos de congruência, apresentamos aos estudantes alguns exemplos de demonstrações e de justificativas para construções geométricas. Apresentamos, também, a justificativa da construção da bissetriz de um ângulo.

Incentive os estudantes a escreverem no caderno a definição de bissetriz de um ângulo. Revisitar conceitos e retomar conhecimentos já construídos são passos indispensáveis para que eles consolidem e ampliem conceitos e procedimentos.

181

Exercícios propostos

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 5**.

a) Considerando os triângulos *ABC* e *DEC*, verificamos:
- $\hat{B} \cong \hat{E}$ (dado)
- $\overline{BC} \cong \overline{CE}$ (dado)
- $A\hat{C}B \cong D\hat{C}E$ (ângulos opostos pelo vértice)

Logo, pelo caso ALA, os triângulos *ABC* e *DEC* são congruentes.
Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

b) Considerando os triângulos *ABC* e *EDC*, verificamos:
- $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (dado)
- $\hat{B} \cong \hat{D}$ (dado)
- $A\hat{C}B \cong E\hat{C}D$ (ângulos opostos pelo vértice)

Logo, pelo caso LAA_o, os triângulos *ABC* e *EDC* são congruentes.
Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{CE}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

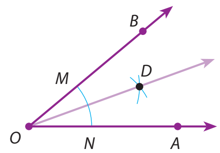
c) Considerando os triângulos *ABC* e *DBC*, verificamos:
- $\overline{BA} \cong \overline{BD}$ (dado)
- $\overline{AC} \cong \overline{DC}$ (dado)
- $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LLL, os triângulos *ABC* e *DBC* são congruentes.
Portanto, $\hat{A} \cong \hat{D}$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

d) Considerando os triângulos *ABC* e *DBC*, verificamos:
- $\overline{AB} \cong \overline{DB}$ (dado)
- $\hat{B}_1 \cong \hat{B}_2$ (dado)
- $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos *ABC* e *DBC* são congruentes.
Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{DC}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

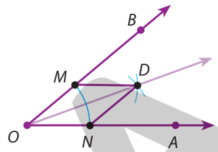
3º) Traçamos a semirreta $\overrightarrow{OD}$, que é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.



- **Justificativa**

Entenda por que essa construção é válida.

Considerando os triângulos *OMD* e *OND*, temos:



1. $\overline{OM} \cong \overline{ON}$ (mesma abertura do compasso)

2. $\overline{MD} \cong \overline{ND}$ (mesma abertura do compasso)

3. $\overline{OD} \cong \overline{OD}$ (lado comum)

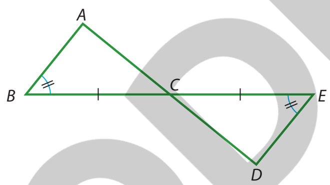
Logo, pelo caso LLL, os triângulos *OMD* e *OND* são congruentes. Portanto, $M\hat{O}D \cong N\hat{O}D$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes. Assim, $\overrightarrow{OD}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

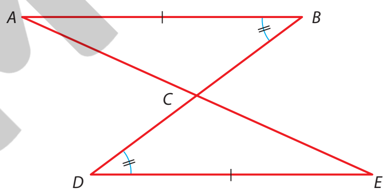
5 Em cada caso, faça o que se pede. **5.** Demonstrações.

a) Prove que $\overline{AC} \cong \overline{CD}$. **5. a)** Caso ALA.



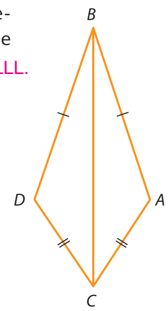
Considere: $\overline{BC} \cong \overline{CE}$; $\hat{B} \cong \hat{E}$

b) Prove que $\overline{AC} \cong \overline{CE}$. **5. b)** Caso LAA_o.



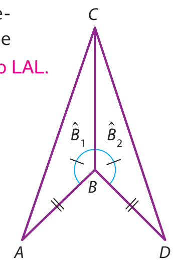
Considere: $\overline{AB} \cong \overline{DE}$; $\hat{B} \cong \hat{D}$

c) Dado o quadrilátero *ABDC*, prove que $\hat{A} \cong \hat{D}$. **5. c)** Caso LLL.



Considere: $\overline{BA} \cong \overline{BD}$; $\overline{AC} \cong \overline{DC}$

d) Dado o quadrilátero *ABDC*, prove que $\overline{AC} \cong \overline{DC}$. **5. d)** Caso LAL.

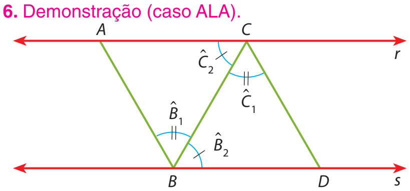


Considere: $\overline{AB} \cong \overline{DB}$; $\hat{B}_1 \cong \hat{B}_2$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

6 Na figura, temos $r \parallel s$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\hat{B}_1 \cong \hat{C}_1$ e $\hat{B}_2 \cong \hat{C}_2$. Prove que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

6. Demonstração (caso ALA).



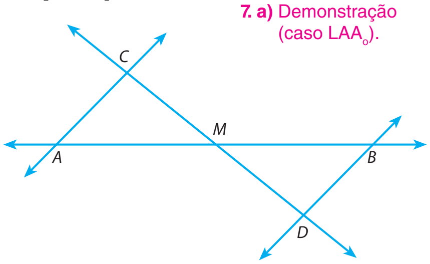
7 Faça o que se pede.

a) Dados

$$\begin{cases} \overline{AM} \cong \overline{MB} \\ \overline{AC} \parallel \overline{BD} \end{cases},$$

prove que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

7. a) Demonstração (caso LAA_o).

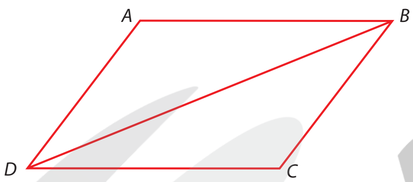


b) Dado o quadrilátero ABCD, em que

$$\begin{cases} \overline{AB} \parallel \overline{CD} \\ \overline{AB} \cong \overline{CD} \end{cases},$$

prove que $\hat{A} \cong \hat{C}$.

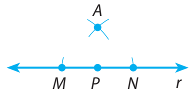
7. b) Demonstração (caso LAL).



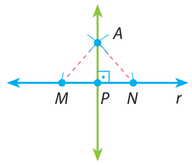
8 Vamos rever a construção de uma perpendicular a uma reta *r* que passa por um ponto P dessa reta, dados P e *r*.

1º) Com a ponta-seca do compasso em P e uma abertura qualquer, traçamos um arco que intersecta *r* nos pontos M e N.

2º) Com a ponta-seca do compasso em M e em N, traçamos dois arcos, com a mesma abertura (maior que PM) do compasso, que se intersectam em A.



3º) A reta $\overleftrightarrow{AP}$ é perpendicular à reta *r*. O ponto P é chamado "pé da perpendicular" de $\overleftrightarrow{AP}$ sobre *r*.

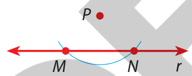


- Justifique por que essa construção é válida.

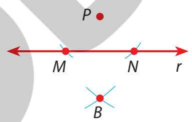
8. Demonstração (caso LLL).

9 Vamos rever a construção de uma perpendicular a uma reta *r* que passa por um ponto P que não está na reta, dados P e *r*.

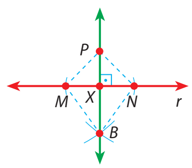
1º) Com a ponta-seca do compasso em P, traçamos um arco que intersecta *r* nos pontos M e N.



2º) Com a ponta-seca do compasso em M e em N, traçamos dois arcos de mesmo raio que se intersectam em B.



3º) A reta $\overleftrightarrow{PB}$ é perpendicular à reta *r* e intersecta *r* no ponto X.



- Justifique por que essa construção é válida.

9. Demonstração (caso LLL).

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

No **exercício 6**, considerando os triângulos *ABC* e *DCB*:

- $A\hat{C}B \cong C\hat{B}D$ (ângulos alternos internos)
- $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (lado comum)
- $A\hat{B}C \cong B\hat{C}D$ ângulos alternos internos)

Pelo caso ALA, os triângulos são congruentes. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

No **exercício 7**, uma resolução possível:

a) Considerando os triângulos *AMC* e *BMD*:
- $\hat{C} \cong \hat{D}$ (ângulos alternos internos)
- $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (dado)
- $A\hat{M}C \cong B\hat{M}D$ (ângulos opostos pelo vértice)

Pelo caso LAA_o, os triângulos são congruentes. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, pois são lados correspondentes em triângulos congruentes.

b) Considerando os triângulos *ABD* e *CDB*:
- $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (dado)
- $A\hat{B}D \cong C\hat{D}B$ (ângulos alternos internos)
- $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (lado comum)

Pelo caso LAL, os triângulos são congruentes. Portanto, $\hat{A} \cong \hat{C}$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

No **exercício 8**, considerando os triângulos *MPA* e *NPA*:

- $\overline{PM} \cong \overline{PN}$ (mesma abertura do compasso)
- $\overline{MA} \cong \overline{NA}$ (mesma abertura do compasso)
- $\overline{AP} \cong \overline{AP}$ (lado comum)

Os triângulos são congruentes pelo caso LLL. Logo, $M\hat{P}A \cong N\hat{P}A$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

Como são ângulos adjacentes e suplementares:

$m(M\hat{P}A) = m(N\hat{P}A) = 90°$

Concluímos que a reta $\overleftrightarrow{AP}$ é perpendicular à reta *r* pelo ponto *P*.

No **exercício 9**, considerando os triângulos *PMB* e *PNB*:

- $\overline{PM} \cong \overline{PN}$ (mesma abertura do compasso)
- $\overline{MB} \cong \overline{NB}$ (mesma abertura do compasso)
- $\overline{PB} \cong \overline{BP}$ (lado comum)

Assim, os triângulos são congruentes pelo caso LLL. Logo, $M\hat{P}B \cong N\hat{P}B$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

Logo, $M\hat{X}P \cong N\hat{X}P$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes. Como são ângulos adjacentes e suplementares, concluímos que são ângulos retos e, portanto, $\overleftrightarrow{PB} \perp r$.

2. Propriedades do triângulo isósceles

Habilidade da BNCC:
EF08MA17.

Neste tópico, os estudantes podem retomar os conceitos de mediatriz e de bissetriz e de congruência para explorar as propriedades do triângulo isósceles, mobilizando aspectos da habilidade (EF08MA17).

Apresentamos a demonstração da propriedade que trata da congruência dos ângulos da base de um triângulo isósceles. Ressalte que ela é válida também para triângulos equiláteros.

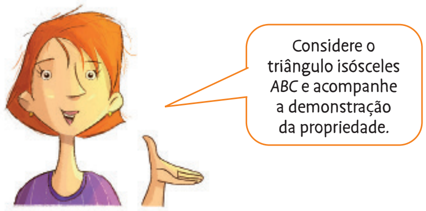
Incentive os estudantes a acompanharem as demonstrações das propriedades. Proponha a eles que façam a leitura das demonstrações das propriedades indicadas neste tópico e, depois, alguns deles a expliquem aos demais, realizando a demonstração na lousa.

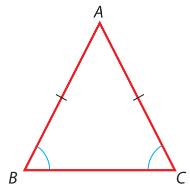
2 Propriedades do triângulo isósceles

1ª propriedade

Em todo triângulo isósceles, os ângulos da base são congruentes.

SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA





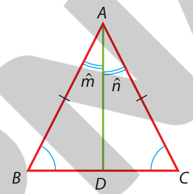
Hipótese $\{\overline{AB} \cong \overline{AC}$

Tese $\{\hat{B} \cong \hat{C}$

- **Demonstração**

Construção auxiliar: vamos traçar a bissetriz $\overline{AD}$.

Comparando os triângulos *ADB* e *ADC*, temos:



1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (por hipótese)

2. $\hat{m} \cong \hat{n}$ ($\overline{AD}$ é bissetriz)

3. $\overline{AD} \cong \overline{AD}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos *ADB* e *ADC* são congruentes. Portanto, $\hat{B} \cong \hat{C}$, pois são ângulos correspondentes em triângulos congruentes.

Como exemplo, vamos calcular o valor de *x*, em grau, no triângulo *EFG*, sabendo que $\overline{EF} \cong \overline{EG}$.

$x + 55° + 55° = 180°$

$x + 110° = 180°$

$x = 180° - 110°$

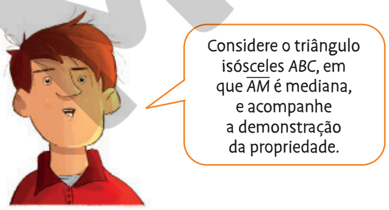
$x = 70°$

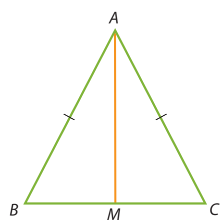
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2ª propriedade

Em todo triângulo isósceles, a mediana, a altura e a bissetriz relativas à base coincidem.

SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA





Hipótese $\begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{AC} \\ \overline{BM} \cong \overline{MC} \end{cases}$

Tese $\begin{cases} \overline{AM} \text{ é bissetriz} \\ \overline{AM} \text{ é altura} \end{cases}$

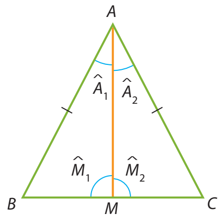
• **Demonstração**

Comparando os triângulos *AMB* e *AMC*, temos:

1. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ (por hipótese)

2. $\overline{BM} \cong \overline{MC}$ ($\overline{AM}$ é mediana relativa ao lado $\overline{BC}$)

3. $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum)



Logo, pelo caso LLL, os triângulos *AMB* e *AMC* são congruentes. Portanto:

- $\hat{A}_1 \cong \hat{A}_2$, o que prova que $\overline{AM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$.
- $\hat{M}_1 \cong \hat{M}_2$ e, por serem adjacentes e suplementares, cada um deles é um ângulo reto, o que prova que $\overline{AM}$ é a altura relativa ao lado $\overline{BC}$.

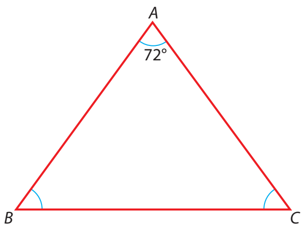
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

10 O triângulo *ABC* é isósceles de base $\overline{BC}$. Calcule:

a) a medida do ângulo $\hat{B}$; **10. a)** 54°

b) a medida do ângulo $\hat{C}$. **10. b)** 54°

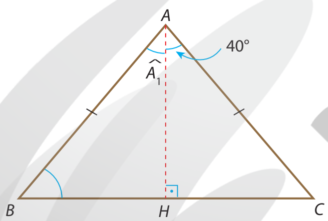


11 Do triângulo *ABC*, pede-se:

a) m($\overline{BC}$), sabendo que m($\overline{BH}$) = 2 cm; **11. a)** 4 cm

b) m($\hat{A}_1$); **11. b)** 40°

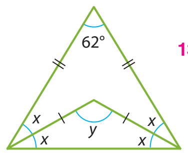
c) m($\hat{B}$). **11. c)** 50°



12 Em um triângulo isósceles *ABC*, $\overline{AH}$ é a altura relativa à base $\overline{BC}$. Sendo m($\overline{BH}$) = 3,5 cm, calcule m($\overline{HC}$). **12.** m($\overline{HC}$) = 3,5 cm

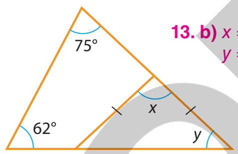
13 Calcule *x* e *y* nas figuras a seguir.

a)



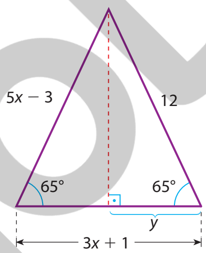
13. a) $x = 29° \, 30'$
$y = 121°$

b)



13. b) $x = 94°$
$y = 43°$

c)



13. c) $x = 3$
$y = 5$

14 Calcule as medidas dos ângulos de um triângulo isósceles no qual cada ângulo da base mede o quádruplo da medida do ângulo do vértice. **14.** 20°, 80° e 80°.

15 Calcule a medida de cada ângulo obtuso determinado por duas bissetrizes de um triângulo equilátero. **15.** 120°

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

185

Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, os estudantes aplicarão as propriedades demonstradas e também utilizarão conhecimentos sobre outras propriedades geométricas já estudadas e sobre equações do 1º grau para obter as medidas solicitadas.

As resoluções dos **exercícios 10** a **13** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Na resolução do **exercício 14**, como os ângulos da base medem o quádruplo do ângulo do vértice no triângulo isósceles em questão, indiquemos por *x* a medida do ângulo do vértice. Assim, os ângulos da base medem 4*x* cada um. Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, obtemos:

$x + 4x + 4x = 180$

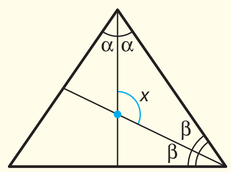
$9x = 180$

$x = 20$

E, portanto: $4x = 80$

Logo, esse triângulo tem ângulos internos de medidas 20°, 80° e 80°.

Na resolução do **exercício 15**, incentive os estudantes a representarem a situação por meio de uma figura, por exemplo:



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Indicamos por *x* a medida do ângulo obtuso determinado pelas bissetrizes de dois ângulos internos de um triângulo equilátero. Como o triângulo é equilátero, todos os seus ângulos internos medem 60°. Como tomamos as bissetrizes de dois desses ângulos internos, $\alpha = \beta = 30°$. Verificamos também que $\alpha + \beta + x = 180°$. Assim:

$30 + 30 + x = 180$

$x = 180 - 60 = 120$

Ou seja, a medida de cada ângulo obtuso determinado por duas bissetrizes de um triângulo equilátero mede 120°.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 16** e **17** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

A seguir, indicamos uma resolução para o **exercício 18**.

a) Sejam C e D pontos quaisquer da mediatriz. Considerando os triângulos ACM e BCM, verificamos:

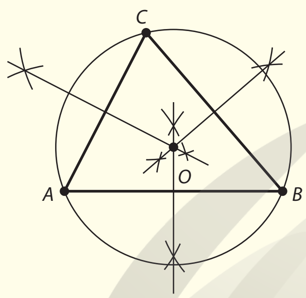
- $\overline{AM} \cong \overline{BM}$ (M é ponto médio)
- $A\hat{M}C \cong B\hat{M}C$ (ângulo reto)
- $\overline{MC} \cong \overline{MC}$ (lado comum)

Logo, pelo caso LAL, os triângulos ACM e BCM são congruentes. Desse modo, verificamos $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ (lados correspondentes em triângulos congruentes), ou seja, C é equidistante dos pontos A e B e é ponto da reta que passa por C e D, perpendicular ao segmento $\overline{AB}$.

De modo análogo, provamos que os triângulos ADM e BDM são congruentes e que $\overline{AD} \cong \overline{BD}$, o que garante que D é equidistante dos pontos A e B e é ponto da reta que passa por C e D.

Logo, a reta que passa por C e D é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

b) Exemplo de figura:

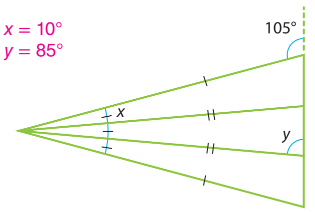


WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

16 Calcule as medidas x e y, em grau, nas figuras a seguir.

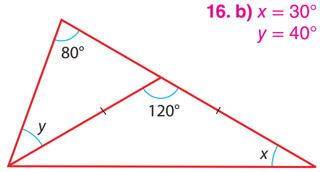
a)

16. a) $x = 10°$
$y = 85°$



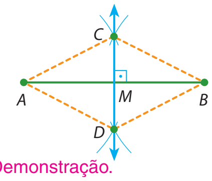
b)

16. b) $x = 30°$
$y = 40°$



17 ***Hora de criar*** – Em dupla, cada um cria um problema sobre triângulo isósceles. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **17.** Resposta pessoal.

18 A figura representa a construção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



a) Observando a figura, justifique por que essa construção é válida. **18. a)** Demonstração.

b) Desenhe um triângulo qualquer e trace as mediatrizes de seus lados. Depois, trace a circunferência de centro na intersecção das mediatrizes e que passa pelos vértices do triângulo. **18. b)** Construção de figura.

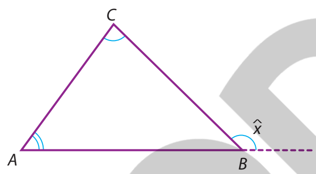
(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca!)

3 Propriedades de um triângulo qualquer

1ª propriedade

A medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Considere o triângulo ABC a seguir.



Hipótese $\begin{cases} \hat{x} \text{ é um ângulo externo não} \\ \text{adjacente aos ângulos } \hat{A} \text{ e } \hat{C}. \end{cases}$

Tese $\{ m(\hat{x}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C})$

- **Demonstração**

No triângulo ABC, temos:

1. $m(\hat{x}) + m(\hat{B}) = 180°$ ($\hat{x}$ e $\hat{B}$ são adjacentes e suplementares)

2. $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$ ($\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são ângulos internos de um triângulo)

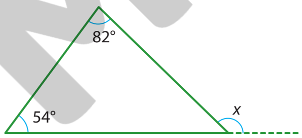
Logo:

$m(\hat{x}) + \cancel{m(\hat{B})} = m(\hat{A}) + \cancel{m(\hat{B})} + m(\hat{C})$

$m(\hat{x}) = m(\hat{A}) + m(\hat{C})$

Como exemplo de aplicação, vamos calcular x, em grau, nos triângulos a seguir.

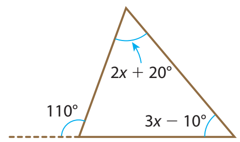
a)



$x = 54 + 82$

$x = 136$

b)



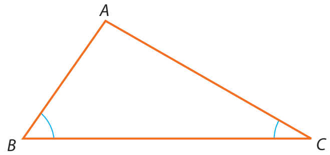
$2x + 20 + 3x - 10 = 110$

$5x = 100 \Rightarrow x = 20$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2ª propriedade

> Se dois lados de um triângulo são desiguais, então ao lado de maior medida opõe-se o ângulo de maior medida.



Considere o triângulo *ABC* ao lado.

Hipótese $\{AC > AB$ Tese $\{m(\hat{B}) > m(\hat{C})$

- **Demonstração**

Construção auxiliar: marcamos sobre $\overline{AC}$ um ponto *D* tal que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$.

1. O triângulo *ABD* é isósceles (por construção)

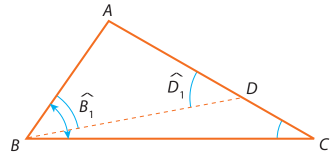
2. $m(\widehat{B_1}) \cong m(\widehat{D_1})$ (propriedade do triângulo isósceles)

3. $m(\widehat{D_1}) > m(\hat{C})$ (pela propriedade do ângulo externo)

4. $m(\widehat{B_1}) > m(\hat{C})$ (substituindo $\widehat{D_1}$ por $\widehat{B_1}$)

5. $m(\hat{B}) > m(\widehat{B_1})$ (pela construção auxiliar)

6. $m(\hat{B}) > m(\hat{C})$ (pois $m(\hat{B}) > m(\widehat{B_1}) > m(\hat{C})$)



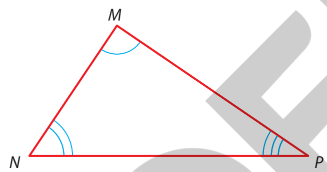
Vamos admitir, sem demonstração, que a recíproca dessa propriedade seja verdadeira, isto é, se dois ângulos de um triângulo são desiguais, então ao ângulo de maior medida opõe-se o lado de maior medida.

Acompanhe alguns exemplos.

a) No triângulo *MNP*, temos $m(\hat{M}) > m(\hat{N})$. Que relação existe entre $\overline{NP}$ e $\overline{MP}$?

Como $m(\hat{M}) > m(\hat{N})$, então $m(\overline{NP}) > m(\overline{MP})$.

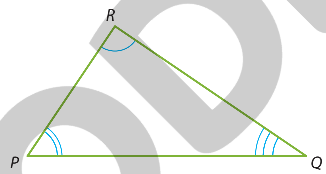
$\overline{NP}$ $\overline{MP}$ ângulos opostos aos lados



b) No triângulo *PQR*, temos $m(\overline{PQ}) > m(\overline{QR})$. Que relação existe entre $\hat{R}$ e $\hat{P}$?

Como $m(\overline{PQ}) > m(\overline{QR})$, então $m(\hat{R}) > m(\hat{P})$.

$\hat{R}$ $\hat{P}$ lados opostos aos ângulos

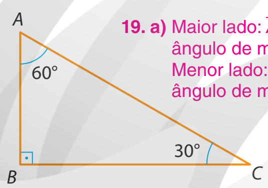


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

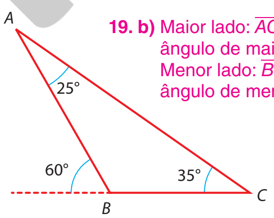
19 Observe o triângulo e determine o lado de maior medida e o de menor medida. Justifique.

a)



19. a) Maior lado: $\overline{AC}$; oposto ao ângulo de maior medida. Menor lado: $\overline{AB}$; oposto ao ângulo de menor medida.

b)



19. b) Maior lado: $\overline{AC}$; oposto ao ângulo de maior medida. Menor lado: $\overline{BC}$; oposto ao ângulo de menor medida.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

3. Propriedades de um triângulo qualquer

Abordamos neste tópico duas propriedades válidas para triângulos quaisquer: a primeira é a que relaciona a medida de um ângulo externo com as medidas dos dois ângulos internos não adjacentes; a segunda, aquela que relaciona lados e ângulos (ao maior lado opõe-se o maior ângulo, para triângulos que tenham lados de medidas desiguais).

Apresente cada demonstração na lousa e peça aos estudantes que justifiquem cada etapa. Reproduza os exemplos na lousa para eles resolverem coletivamente, antes de apresentar as resoluções.

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 19** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 20** a **25** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Exercícios complementares

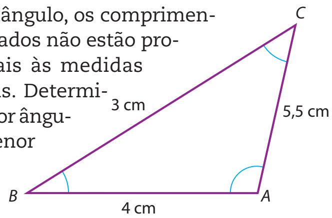
Este bloco de exercícios retoma os principais conteúdos estudados no capítulo, possibilitando que os estudantes utilizem os conhecimentos construídos e identifiquem possíveis dúvidas que ainda tenham.

Proponha a eles, por exemplo, que se reúnam em duplas e organize-as de maneira que algumas duplas resolvam os exercícios pares e as outras, os ímpares. Em seguida, as duplas são reorganizadas de maneira que em cada uma tenha um estudante que resolveu os exercícios pares, e o outro, os ímpares.

Essa dinâmica possibilita a eles trocarem estratégias de resolução e explicarem a um colega como resolveram o exercício, ampliando a compreensão sobre os conteúdos.

As resoluções dos **exercícios 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

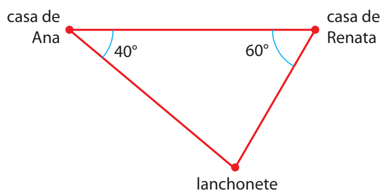
20 Neste triângulo, os comprimentos dos lados não estão proporcionais às medidas indicadas. Determine o maior ângulo e o menor ângulo.



20. Maior ângulo: $\hat{B}$; menor ângulo: $\hat{A}$.

21 Dois lados de um triângulo medem, respectivamente, 5,5 cm e 4 cm. O terceiro lado mede aproximadamente 3 cm. Um de seus ângulos mede 100°. Quanto mede o lado oposto a ele?
21. 5,5 cm

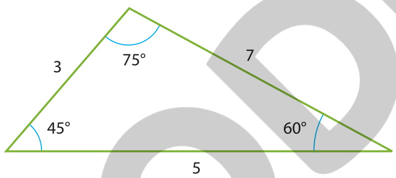
22 Ana e Renata moram perto de uma lanchonete, conforme mostra o esquema a seguir.



Qual delas mora mais distante da lanchonete? Justifique. **22.** Ana, pois ao maior ângulo se opõe o maior lado do triângulo.

23 Em cada caso, as medidas estão indicadas em uma mesma unidade. Verifique que casos são possíveis. Quando for impossível, justifique.

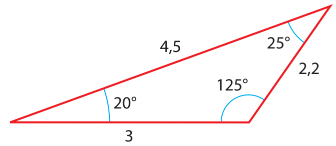
a)



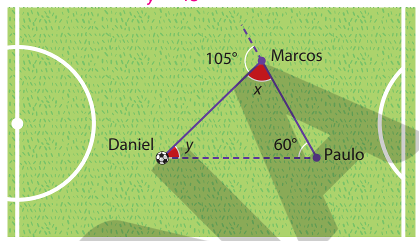
23. a) Não é possível, pois ao ângulo de maior medida deve se opor o lado de maior medida, e isso não ocorreu.

23. b) Não é possível, pois a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, e isso não ocorreu.

b)

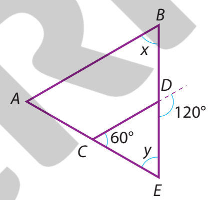


24 Em um jogo de futebol, Paulo cobra uma falta jogando a bola para Marcos, que a joga para Daniel. A trajetória da bola está representada na figura a seguir. Determine as medidas x e y, em grau. **24.** $x = 75°$ $y = 45°$



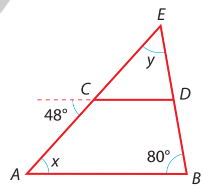
25 Sabendo que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, calcule o valor de x e de y, em grau, nos triângulos a seguir.

a)



25. a) $x = 60°$ $y = 60°$

b)



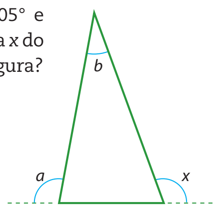
25. b) $x = 48°$ $y = 52°$

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

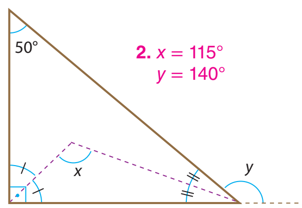
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Considere que $a = 105°$ e $b = 40°$; qual é a medida x do ângulo indicado na figura? **1.** Alternativa **e**.

a) 35°
b) 40°
c) 65°
d) 75°
e) 115°

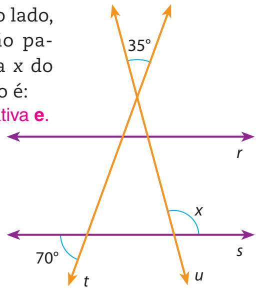


2 Calcule as medidas x e y no triângulo.



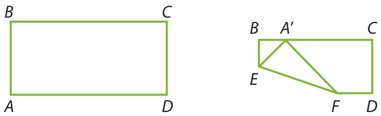
2. $x = 115°$ $y = 140°$

3 (FCC) Na figura ao lado, as retas r e s são paralelas. A medida x do ângulo assinalado é:



a) 135°. **3. Alternativa e.**
b) 120°.
c) 115°.
d) 110°.
e) 105°.

4 (Saresp) O vértice A de uma folha de papel retangular será dobrado sobre o lado $\overline{BC}$ de forma que as medidas BE e BA' sejam iguais, como mostra a figura.

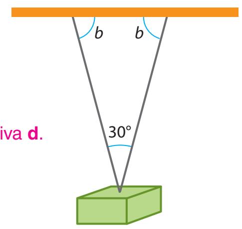


ALEX ARGOZINO/ ARQUIVO DA EDITORA

Nas condições dadas, a medida do ângulo, que é um dos ângulos internos do triângulo $BA'E$, é:

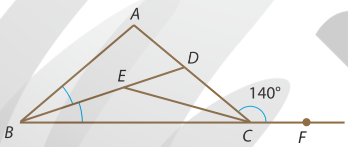
a) 45°. c) 100°. **4. Alternativa a.**
b) 60°. d) 120°.

5 (Univali-SC) O peso da figura está suspenso por duas cordas de mesma medida e presas no teto. Se o ângulo entre as cordas é de 30°, então o ângulo $\hat{b}$, formado pela corda e o teto, mede:



a) 105°. **5. Alternativa d.**
b) 100°.
c) 90°.
d) 75°.
e) 60°.

6 (UFMG) Nesta figura, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, $\overline{BD}$ é bissetriz de $A\hat{B}C$, $\overline{CE}$ bissetriz de $B\hat{C}D$ e a medida do ângulo $A\hat{C}F$ é 140°.



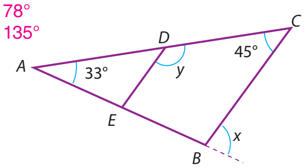
A medida do ângulo $D\hat{E}C$, em grau, é:

a) 20 c) 40 e) 60
b) 30 d) 50

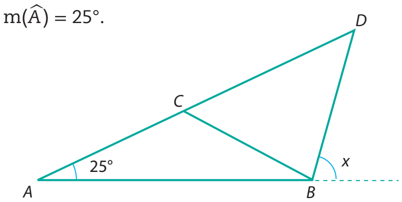
6. Alternativa c.

7 No triângulo ABC da figura, temos: $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, $m(\hat{A}) = 33°$ e $m(\hat{C}) = 45°$. Calcule x e y.

7. $x = 78°$
$y = 135°$



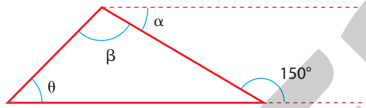
8 (UFMG) Na figura, $AC = CB = BD$ e $m(\hat{A}) = 25°$.



O valor de x é: **8. Alternativa d.**

a) 50°. c) 70°. e) 80°.
b) 60°. d) 75°.

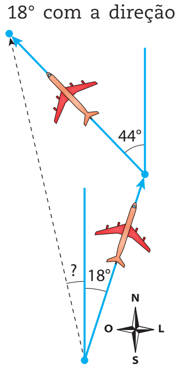
9 (Ufac) Considere a figura abaixo.



Sabendo-se que $\alpha + \beta = 135°$, temos que α, β e θ medem, respectivamente: **9. Alternativa c.**

a) 30°, 45° e 105°.
b) 30°, 115° e 35°.
c) 30°, 105° e 45°.
d) 45°, 105° e 30°.
e) $\alpha = \beta = 45°$ e $\theta = 90°$.

10 (Obmep) A figura mostra dois trechos de 300 km cada um percorridos por um avião. O primeiro trecho faz um ângulo de 18° com a direção norte, e o segundo, um ângulo de 44°, também com a direção norte. Se o avião tivesse percorrido o trecho assinalado em pontilhado, qual seria o ângulo desse trecho com a direção norte?



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

a) 12° **10. Alternativa b.**
b) 13°
c) 14°
d) 15°
e) 16°

Exercícios complementares

Procure incentivar os estudantes a compartilhar as respostas obtidas, certificando-se de que o debate não se concentre apenas na resposta final, mas também na resolução dos exercícios. Os estudantes podem ter percorrido caminhos diferentes mas, com a explanação e o intercâmbio de estratégias, os procedimentos ganharão mais significado e riqueza.

As resoluções dos **exercícios 3** e **4** e dos **exercícios 6** a **10** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 5**.

$30 + b + b = 180$
$2b = 180 - 30$
$2b = 150$
$b = 75$

Ou seja, a medida b é 75° (alternativa **d**).

Verificando

Os testes propostos nessa seção podem contribuir para preparar os estudantes para exames de larga escala. Sugerimos que eles se reúnam em pequenos grupos para resolver os testes e, depois, resolvam-nos novamente de maneira individual.

Essa prática possibilita que eles apreendam estratégias e ampliem a compreensão dos conteúdos, além de favorecer a compreensão da avaliação individual como uma etapa do ensino que deve ser encarada com mais naturalidade. Ao resolver os mesmos testes, os estudantes podem adquirir maior segurança nesse tipo de avaliação.

As resoluções dos **testes 1** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 8.

Organizando

Sugerimos que essas questões sejam utilizadas em uma aula a fim de revisar o conteúdo. Primeiro, os estudantes podem fazer uma autoavaliação pautada nessas questões e em outras que julgar relevantes. Depois, em uma discussão coletiva, conversam sobre as respostas dadas a cada uma delas.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Se dois triângulos ABC e DEF são congruentes, então: **1.** Alternativa **d.**

a) as medidas de todos os lados são iguais;
b) ambos devem ser retângulos;
c) seus vértices são coincidentes;
d) as medidas de seus respectivos lados são iguais.

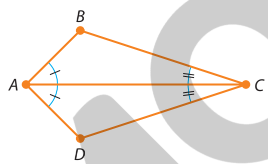
2 Duas retas r e t paralelas são cortadas por duas retas transversais u e v, que se intersectam entre r e t, no ponto C, formando os triângulos ABC e DCE congruentes. A e B pertencem a r, D e E pertencem a t. O que podemos afirmar sobre C? **2.** Alternativa **a.**

a) É um ponto equidistante de r e t.
b) Pertence às retas r e t.
c) Está mais distante de r do que de t.
d) Pertence a apenas uma das retas citadas.

3 Das sentenças a seguir, identifique a verdadeira. **3.** Alternativa **c.**

a) Se traçarmos a diagonal em um quadrado, então os triângulos gerados não serão congruentes.
b) Se a bissetriz de um ângulo de medida α o divide ao meio, então a bissetriz de um desses novos ângulos gerará dois ângulos de medida $\frac{\alpha}{3}$.
c) Se um triângulo é equilátero, então a bissetriz, a mediana e a altura referentes a um mesmo lado coincidem.
d) Se um dos ângulos externos de um triângulo mede 60°, então o triângulo é acutângulo.

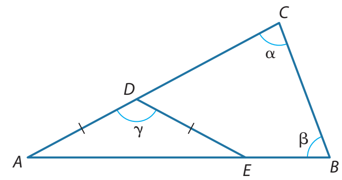
4 No quadrilátero a seguir, o fato de $\overline{AC}$ ser a bissetriz de $D\hat{A}B$ e de $B\hat{C}D$ faz com que os triângulos ABC e ADC sejam: **4.** Alternativa **d.**



a) isósceles.
b) diferentes.
c) equiláteros.
d) congruentes.

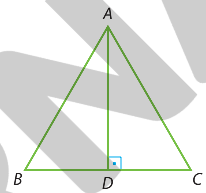
ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

5 Na imagem a seguir, $\overline{AD} \cong \overline{DE}$, $\alpha = 82°$ e $\beta = 69°$. Qual é a medida γ? **5.** Alternativa **d.**



a) 29° b) 58° c) 100° d) 122°

6 Um *designer* projetou uma janela em formato de triângulo equilátero com lados medindo 50 cm, conforme a imagem. O segmento $\overline{AD}$ é a altura da janela e representa uma viga de sustentação.

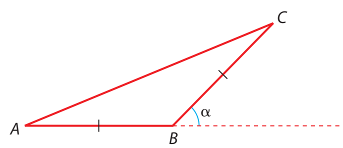


A que distância a extremidade C está da viga de sustentação e qual é a medida do ângulo $D\hat{A}C$?

a) 50 cm e 30°
b) 25 cm e 30°
c) 50 cm e 60°
d) 25 cm e 15°

6. Alternativa **c.**

7 Na imagem a seguir, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ e $m(B\hat{A}C) = 22°$. Determine a medida α do ângulo externo com vértice em B. **7.** Alternativa **b.**



a) $\alpha = 22°$
b) $\alpha = 44°$
c) $\alpha = 136°$
d) $\alpha = 180°$

Organizando

Organizando: **a)** Geometria demonstrativa é aquela que comprova todas as proposições geométricas com base em raciocínios dedutivos.
b) A hipótese é aquilo que se sabe e a tese é aquilo que se deseja provar.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Como você explicaria a um colega o que é Geometria demonstrativa?
b) Em um teorema, o que é a hipótese e o que é a tese?
c) Liste três postulados descritos neste capítulo.
d) Qual é a relação que podemos estabelecer entre a medida do lado de um triângulo e a medida do ângulo oposto a esse lado? **d)** O lado de maior medida é oposto ao ângulo de maior medida, e o lado de menor medida é oposto ao ângulo de menor medida.

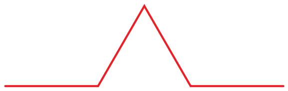
c) Resposta possível:
- Uma reta tem infinitos pontos.
- Por um ponto, passam infinitas retas.
- Dois pontos distintos determinam uma única reta.

DIVERSIFICANDO

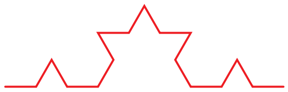
Fractais

Considere o segmento $\overline{AB}$, dividido em três partes iguais.

Construímos sobre $\overline{CD}$ um triângulo equilátero e, em seguida, apagamos o segmento $\overline{CD}$.

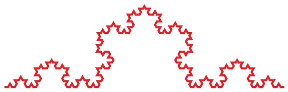


Em cada um desses quatro segmentos, repetimos o mesmo procedimento.



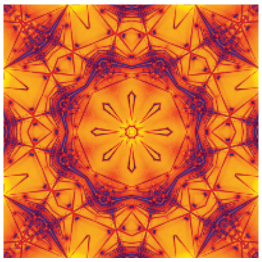
Prosseguindo assim, obtemos a figura ao lado.

Essa figura, formada por repetições de padrões, é um exemplo de **fractal**. Ela conserva todas as propriedades da figura inicial.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA /ARQUIVO DA EDITORA

Observe, a seguir, algumas imagens de fractais construídos com o uso do computador.



IGOR STEVANOVIC/SHUTTERSTOCK

SKIZER/SHUTTERSTOCK

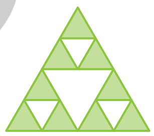
Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Uma das figuras mais elementares da geometria fractal é o triângulo de Sierpinski. Para sua construção, partimos de um triângulo equilátero.

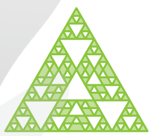
Unindo os pontos médios desse triângulo, obtemos quatro triângulos menores e desconsideramos aquele que não tem vértice coincidindo com um dos vértices do triângulo original.

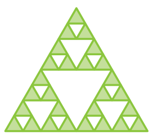
Repetindo esse procedimento, obtemos:

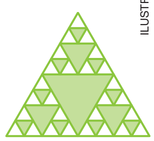


Descubra qual é a quarta figura do triângulo de Sierpinski. **Resposta:** Alternativa **c**.

a) 

b) 

c) 

d) 

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Diversificando

O tema proposto nesta seção possibilita o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com Arte. Sugerimos propor aos estudantes que façam uma pesquisa sobre artistas que utilizam a geometria fractal para construir suas obras. Proponha que pesquisem também obras de arte em que é possível notar formas que lembram fractais.

Apresentamos uma resolução para a atividade do **Agora é com você!**.

Observando o padrão, concluímos:

figura 1 → 1 triângulo verde
$\times 3$
figura 2 → 3 triângulos verdes
$\times 3$
figura 3 → 9 triângulos verdes

Prosseguindo na construção, a figura seguinte terá 27 triângulos verdes (alternativa **c**).

Sugestão de leitura

Para ampliar o trabalho com esse tema, sugerimos:

FARIA, R. W. S.; MALTEMPI, M. V. Padrões Fractais: conectando Matemática e Arte. **EccoS**: Revista Científica, São Paulo, n. 27, p. 33-53, jan./abr. 2012. Disponível em: https://periodicos.uninove.br/eccos/article/view/3484. Acesso em: 8 jun. 2022.

Nesse artigo, apresenta-se o conceito de fractal e seu potencial no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, com ênfase em aspectos visuais e artísticos.

191

Capítulo 9 – Estudo dos quadriláteros

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, retomamos e ampliamos o estudo dos quadriláteros. Iniciamos com uma breve revisão dos elementos que constituem um quadrilátero. Avançamos o estudo sobre a classificação dos quadriláteros, tendo como critérios os lados serem ou não paralelos, serem ou não perpendiculares, serem ou não congruentes. Aprofundamos o estudo sobre as propriedades decorrentes das características de classificação dos quadriláteros, demonstrando propriedades com base na congruência de triângulos, assunto já trabalhado em capítulos anteriores.

A abertura destaca a relação entre Matemática e Arte, apresentando uma obra de Luiz Sacilotto para explorar a conexão entre essas duas áreas de conhecimento. Esse contexto possibilita o desenvolvimento da **competência geral 3**, pois estimula os estudantes a apreciar e usufruir diferentes manifestações artísticas. Incentive-os a pesquisar exposições culturais regionais.

Além disso, essa é uma ótima oportunidade para um projeto interdisciplinar com Arte. Solicite aos estudantes um trabalho sobre Luiz Sacilotto e sua obra. Organize grupos de três integrantes e cada grupo, à sua escolha, deve fazer a reprodução de uma das obras do artista. O conjunto dessas reproduções pode compor uma exposição a ser agendada com a direção da escola.

Capítulo

9 Estudo dos quadriláteros

Observe a imagem e responda às questões no caderno.

a) Que figuras geométricas planas você identifica nessa obra de Luiz Sacilotto?

b) É possível dizer que nessa obra há retângulos? E losangos?

c) Faça um desenho utilizando apenas quadriláteros. **c)** Construção de figura.

VALTER SACILOTTO – COLEÇÃO PARTICULAR

SACILOTTO, L. **C8989**. 1989. 1 têmpera acrílica sobre tela, 70 × 70 cm. Coleção particular.

a) Resposta possível: trapézio, quadrado, retângulo e triângulo.

b) Espera-se que os estudantes respondam que sim, pois todo quadrado é também retângulo e losango.

Luiz Sacilotto (1924-2003) foi um pintor, escultor e desenhista brasileiro abstracionista, embora muitas de suas obras também tenham forte relação com o movimento Op Art, caracterizado pelos efeitos visuais e pelo uso de ilusões de óptica.

O artista buscava utilizar em suas obras figuras geométricas planas para dar a quem as observa a sensação de movimento e dinamismo, gerando ilusões de curvas, dobras e profundidade.

Sugestão de leitura

GUIA das Artes. **Luiz Sacilotto**. São Lourenço, [2015?]. Disponível em: https://www.guiadasartes.com.br/luiz-sacilotto/obras-e-biografia. Acesso em: 10 jun. 2022.

O portal de conteúdo especializado em Arte apresenta a biografia do artista Luiz Sacilotto e a cronologia de suas obras.

1 Quadriláteros

Podemos perceber os quadriláteros em muitas situações que vivenciamos, por exemplo, ao ler um livro ou ler um texto na tela do computador, na bandeirada final de uma corrida, em um jogo de xadrez.


DAVID MADISON/GETTY IMAGES


TETRA IMAGES/GETTY IMAGES

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Quadriláteros são polígonos de quatro lados.

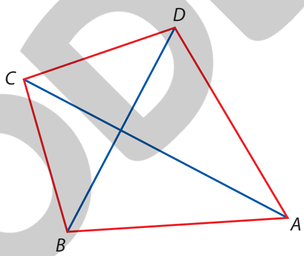
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Elementos dos quadriláteros

Considere os quadriláteros a seguir.

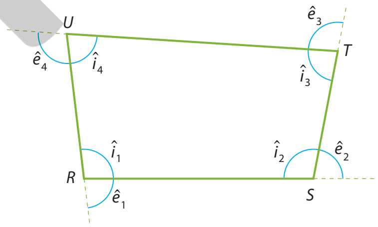
No quadrilátero *ABCD*, destacamos:

- os **vértices** *A*, *B*, *C* e *D*;
- os **lados** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$;
- as **diagonais** $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$;
- os **lados consecutivos** $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$, $\overline{DA}$ e $\overline{AB}$;
- os **lados opostos** $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$.



No quadrilátero *RSTU*, destacamos:

- os **ângulos internos** $\hat{i}_1$, $\hat{i}_2$, $\hat{i}_3$ e $\hat{i}_4$;
- os **ângulos consecutivos** $\hat{i}_1$ e $\hat{i}_2$, $\hat{i}_2$ e $\hat{i}_3$, $\hat{i}_3$ e $\hat{i}_4$, $\hat{i}_4$ e $\hat{i}_1$;
- os **ângulos opostos** $\hat{i}_1$ e $\hat{i}_3$, $\hat{i}_2$ e $\hat{i}_4$;
- os **ângulos externos** $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, $\hat{e}_3$ e $\hat{e}_4$.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Reproduza na lousa o quadrilátero *RSTU* apresentado nesta página e destaque os ângulos internos e os ângulos externos. Explique aos estudantes que o nosso estudo será feito considerando sempre quadriláteros convexos.

1. Quadriláteros

Habilidade da BNCC: **EF08MA14**.

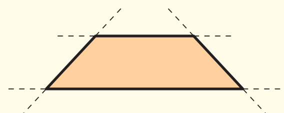
Trabalhar demostração de propriedades dos quadriláteros por meio da congruência de triângulos possibilita ao estudante o desenvolvimento da habilidade (EF08MA14).

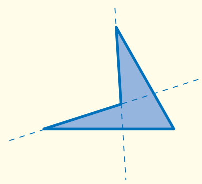
Inicialmente, proponha aos estudantes que, em grupos, confeccionem cartazes nos quais apresentem:

- o que são quadriláteros, com desenhos de exemplos;
- os principais elementos de um quadrilátero;
- o que são quadriláteros convexos, com desenhos de exemplos e de contraexemplos (quadriláteros não convexos).

Em seguida, um representante de cada grupo apresenta o cartaz do grupo. Registre na lousa as conclusões da turma, ressaltando os temas que mais geraram dúvidas. Desse modo, espera-se que os estudantes ampliem e consolidem os conhecimentos construídos acerca de quadriláteros:

- Quadrilátero é um polígono de 4 lados. Tem 4 vértices, 4 ângulos internos e 4 ângulos externos.
- A convexidade de um quadrilátero pode ser verificada constatando que existem quadriláteros cujo prolongamento dos lados não cruza seu interior; nesse caso, os quadriláteros são convexos. Quando há lados cujo prolongamento cruza o interior do quadrilátero, ele é não convexo.


Quadrilátero convexo


Quadrilátero não convexo

ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

- A diagonal de um quadrilátero é todo segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos do quadrilátero (ou seja, não é um de seus lados). Todo quadrilátero tem duas diagonais.

Pense mais um pouco...

Uma boa maneira de iniciar o estudo de um conceito é com uma atividade na qual os estudantes manipulem modelos concretos. Esta seção contempla esse tipo de abordagem, pois explora uma propriedade importante de um quadrilátero: a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

Nesta atividade, os estudantes recortam os ângulos internos de um quadrilátero desenhado em papel e, analogamente ao que já foi feito para a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, justapõem as partes em torno de um vértice com o objetivo de verificar o valor da soma das medidas desses ângulos.

Exercícios propostos

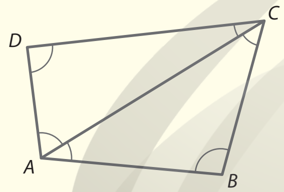
Uma possível demonstração para o **exercício 1** é dada a seguir. Nela é utilizada apenas uma diagonal para dividir o quadrilátero em dois triângulos, resultando diretamente na verificação de que a soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero é igual à soma das medidas dos ângulos internos desses dois triângulos ($2 \cdot 180° = 360°$).

Observe a resolução:

Hipótese: *ABCD* é um quadrilátero

Tese: $m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) = 360°$

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



- *Demonstração*

Tomemos o quadrilátero *ABCD* e tracemos sua diagonal $\overline{AC}$.

No triângulo *ABC*, temos: $m(B\hat{A}C) + m(A\hat{B}C) + m(A\hat{C}B) = 180°$

No triângulo *ACD*, temos: $m(D\hat{A}C) + m(A\hat{C}D) + m(C\hat{D}A) = 180°$

Logo, $[m(B\hat{A}C) + m(A\hat{B}C) + m(A\hat{C}B)] + [m(D\hat{A}C) + m(A\hat{C}D) + m(C\hat{D}A)] = 180° + 180°$

$[m(B\hat{A}C) + m(D\hat{A}C)] + [m(A\hat{C}B) + m(A\hat{C}D)] + m(A\hat{C}C) + m(C\hat{D}A) = 360°$

$m(B\hat{A}D) + m(A\hat{B}C) + m(B\hat{C}D) + m(C\hat{D}A) = 360°$

Pense mais um pouco...: O valor é 360°. Resposta possível: Ao juntar os quatro ângulos em torno de um dos vértices do quadrilátero, obtemos o giro de uma volta completa, que corresponde a 360°.

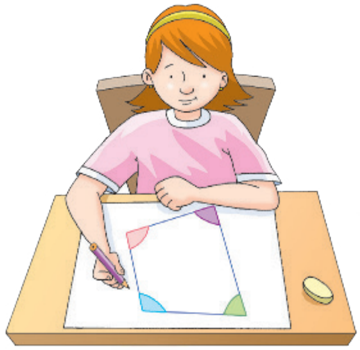
Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Desenhe um quadrilátero qualquer em uma folha de papel. Marque os ângulos internos desse quadrilátero, cada um com uma cor diferente. Recorte o quadrilátero separando os quatro ângulos internos.

Reúna os ângulos internos em torno de um dos vértices do quadrilátero, justapondo seus lados de modo que se obtenha um único ângulo, cuja medida será a soma das medidas dos quatro ângulos internos.

Qual é o valor dessa soma? Justifique.

(Use tesoura com ponta arredondada e a manuseie com cuidado!)



JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

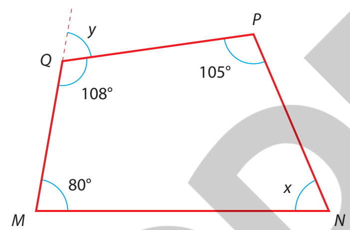
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Demonstração. Espera-se que os estudantes iniciem traçando uma das diagonais do quadrilátero.

1 Sabendo que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, demonstre que a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

2 Considere o quadrilátero *MNPQ*.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



Calcule no caderno:

a) a medida x do ângulo $\hat{N}$; **2. a)** $x = 67°$

b) o valor de y. **2. b)** $y = 72°$

3. a) Construção de figura. Resposta possível: quadrado.

3 Com o auxílio de régua e transferidor, desenhe no caderno um quadrilátero que tenha:

a) dois ângulos internos opostos congruentes medindo 90°; **3. b)** Construção de figura. Quadrado.

b) dois ângulos internos opostos congruentes, medindo 90°, e quatro lados congruentes;

c) dois ângulos internos opostos congruentes, medindo 90°, e quatro lados congruentes de 6 cm.

Em cada item, quantos quadriláteros diferentes com essas características é possível construir?

3. c) Construção de figura. Com quatro ângulos medindo 90° e quatro lados medindo 6 cm, existe um único quadrado.

4 Três dos ângulos internos de um quadrilátero medem, respectivamente, 104°, 97° e 53°. Calcule a medida do quarto ângulo desse quadrilátero. **4.** 106°

5 Em um quadrilátero, os ângulos internos medem, respectivamente, x, $x + 40°$, $x + 80°$ e $3x$. Calcule o valor de x, em grau. **5.** $x = 40°$

6 Em um quadrilátero *ABCD*, $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$, $m(\hat{B}) = 3 \cdot m(\hat{C})$ e $m(\hat{D}) = 2 \cdot m(\hat{C})$. Calcule a medida dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{A}$.

6. $m(\hat{C}) = 40°$ e $m(\hat{A}) = 120°$.

7 Em um quadrilátero *ABCD*, temos:

- $m(\hat{A}) = 108°$
- $m(\hat{B}) = 76°$
- $m(\hat{C}) = 92°$

Calcule a medida do ângulo formado pelas bissetrizes dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$. **7.** 92°

8 Com o auxílio de régua, transferidor e compasso, desenhe um quadrilátero *ABCD* que tenha os quatro lados congruentes (com a medida que você quiser) e um ângulo de 70°.

a) Qual é a medida dos outros ângulos internos? **8. a)** 70°; 110° e 110°.

b) Trace as diagonais que se intersectam no ponto *M*. Qual é a medida do ângulo que elas formam? **8. b)** 90°

c) Meça $\overline{AM}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$ e $\overline{DM}$ e responda: qual é a relação do ponto *M* com a diagonal maior? E com a diagonal menor?

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.) **8. c)** *M* é ponto médio da diagonal maior e da diagonal menor.

194

As resoluções dos **exercícios 2** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

PARA SABER MAIS

Polígonos e proporcionalidade

Já conhecemos as fórmulas da soma S_i das medidas dos ângulos internos e da soma S_e das medidas dos ângulos externos de um polígono de n lados.

$$S_i = (n - 2) \cdot 180° \qquad S_e = 360°$$

Vamos examinar se existe proporcionalidade entre essas grandezas (S_i e S_e) e o número n de lados dos polígonos. Em outras palavras, vamos verificar se, dobrando o número de lados, também dobra o valor de S_i e o valor de S_e; se, triplicando o número de lados, também triplica o valor de S_i e o valor de S_e etc. Enfim, se as grandezas S_i e n formam proporções e se as grandezas S_e e n formam proporções.

Observe a seguir o quadro das somas das medidas dos ângulos internos e dos ângulos externos de um polígono.

Soma das medidas dos ângulos de polígonos			
Polígono	***n***	**S_i**	**S_e**
Triângulo	3	$S_{i_3} = (3 - 2) \cdot 180° = 180°$	$S_{e_3} = 360°$
Quadrilátero	4	$S_{i_4} = (4 - 2) \cdot 180° = 360°$	$S_{e_4} = 360°$
Pentágono	5		
Hexágono			
Heptágono			
Octógono			
Eneágono			
Decágono			

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Copie no caderno o quadro apresentado e complete-o. **1.** Construção de quadro.

2 Considerando o quadro que você completou, responda às questões a seguir. **2. a)** Quadrilátero; nenhum.

a) Qual polígono tem S_i igual ao dobro de S_{i_3}? Qual polígono tem S_e igual ao dobro de S_{e_3}?

b) Qual polígono tem S_i igual ao triplo de S_{i_3}? Qual polígono tem S_e igual ao triplo de S_{e_3}? **2. b)** Pentágono; nenhum.

3 Comparando dois polígonos, um de n lados e outro de $2n$ lados, responda às questões.

a) S_{i_6} é o dobro de S_{i_3}? E S_{e_6} é o dobro de S_{e_3}? **3. a)** Não; não.

b) S_{i_8} é o dobro de S_{i_4}? E S_{e_8} é o dobro de S_{e_4}? **3. b)** Não; não.

c) $S_{i_{10}}$ é o dobro de S_{i_5}? E $S_{e_{10}}$ é o dobro de S_{e_5}? **3. c)** Não; não.

d) S_{i_6} é o triplo de S_{i_2}? E S_{e_6} é o triplo de S_{e_2}? **3. d)** Não; não.

e) S_{i_9} é o triplo de S_{i_3}? E S_{e_9} é o triplo de S_{e_3}? **3. e)** Não; não.

4. Espera-se que os estudantes concluam que nem as grandezas S_i e n, nem as grandezas S_e e n formam proporções.

4 Considerando as suas respostas às atividades 2 e 3, você diria que as grandezas S_i e n formam proporções? E as grandezas S_e e n formam proporções?

Para saber mais

Esta seção trata de uma situação na qual analisamos se as grandezas envolvidas são ou não proporcionais, trabalhando com a soma das medidas dos ângulos de polígonos.

A relação entre o número de lados de um polígono e a soma das medidas dos ângulos internos exemplifica a não proporcionalidade, o que, por contraposição, reforça o desenvolvimento das habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13).

Apresentar aos estudantes situações em que não há proporcionalidade é mais uma maneira de compreenderem grandezas proporcionais. É como apresentar-lhes o avesso para que entendam o direito.

As resoluções das **atividades 1** a **4** do **Agora é com você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

2. Paralelogramos

Habilidades da BNCC:
EF08MA14, **EF08MA15**, **EF08MA17** e **EF08MA19**.

Ao trabalhar a demostração de propriedades dos quadriláteros por meio da congruência de triângulos, o estudante desenvolve a habilidade (EF08MA14). Ao construir mediatriz, bissetriz e aplicar esses conceitos na resolução de problemas, favorece o desenvolvimento das habilidades (EF08MA15) e (EF08MA17). A aplicação de expressões para o cálculo de medidas de área de figuras geométricas e a resolução e elaboração de problemas envolvendo medidas de área possibilitam o desenvolvimento da habilidade (EF08MA19).

A primeira classe de quadriláteros que vamos estudar é a dos paralelogramos. Inicialmente, é importante retomar com os estudantes a classificação dos quadriláteros quanto ao paralelismo de seus lados:

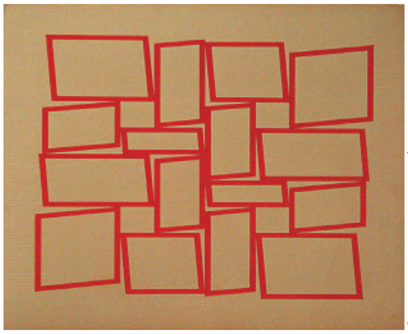
- paralelogramos: quadriláteros que têm dois pares de lados paralelos (ou seja, têm os lados opostos paralelos);
- trapézios: quadriláteros que têm apenas dois pares de lados paralelos (ou seja, têm dois lados paralelos e dois lados não paralelos);
- quadriláteros que não são nem trapézios nem paralelogramos: aqueles que não têm lados paralelos.

Peça a alguns estudantes que desenhem na lousa exemplos de paralelogramos observando a característica que forma esse grupo de quadriláteros. Espera-se que surjam diferentes tipos de paralelogramo. Em cada um deles, destaque uma base e a altura relativa a essa base. Ressalte o ângulo reto determinado ao traçar cada altura.

Faça desenhos de paralelogramos na lousa, destacando retângulos, losangos e quadrados. Peça aos estudantes que descrevam as características de cada um. Desse modo, eles expõem o que já sabem sobre essas figuras. Complemente, então, com as características que não surgirem.

2 Paralelogramos

Para compor a obra reproduzida a seguir, o artista brasileiro Hélio Oiticica (1937-1980) usou diferentes figuras que dão a ideia de paralelogramos. Observe-as.

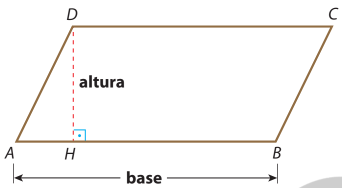


© CÉSAR E CLAUDIO OITICICA – COLEÇÃO GALERIA LURIXS

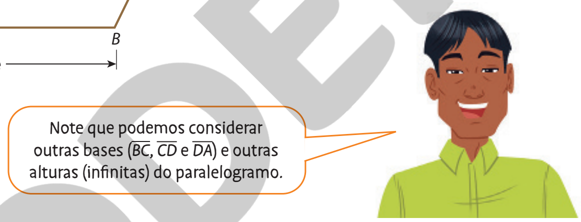
OITICICA, H. **Metaesquema 295**. 1958. 1 guache sobre cartão, 52,5 × 63,9 cm. Coleção Galeria LURIXS.

Paralelogramos são quadriláteros que têm os lados opostos paralelos.

Na figura a seguir, $\overline{AB} /\!/ \overline{CD}$ e $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$. Logo, o quadrilátero *ABCD* é um paralelogramo.



O lado $\overline{AB}$ é uma **base** do paralelogramo, e o segmento $\overline{DH}$ é uma **altura** do paralelogramo relativa a essa base.

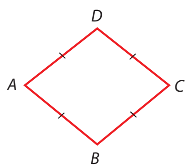


ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

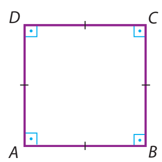
Entre os paralelogramos, destacam-se três casos particulares.

Retângulos: paralelogramos que têm os quatro ângulos congruentes (retos).

Losangos: paralelogramos que têm os quatro lados congruentes.



Quadrados: paralelogramos que têm os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes (retos).



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, todo quadrado é um retângulo e, também, é um losango.

Sugestão de leitura

Para ampliar e enriquecer a discussão com os estudantes, sugerimos:

NUNES, K. R. A. Tecendo Matemática com Arte. **Associação Nacional dos Professores de Matemática na Educação Básica**. Disponível em: https://anpmat.org.br/deu-certo/tecendo-matematica-com-arte. Acesso em: 10 jun. 2022.

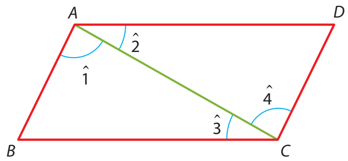
O artigo discute algumas relações entre Matemática e Arte e apresenta propostas para o trabalho de conceitos matemáticos por meio do estudo e da análise de obras de arte, fazendo com que a sala de aula se transforme em um ambiente de argumentação, pesquisa e construção de conhecimentos, e estimulando a criatividade dos estudantes.

Propriedades dos paralelogramos

1ª propriedade

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



Hipótese $\{$ *ABCD* é um paralelogramo

Tese $\{ \overline{AB} \cong \overline{CD}$ e $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

- **Demonstração**

Traçando a diagonal $\overline{AC}$, decompomos o paralelogramo *ABCD* nos triângulos *ABC* e *CDA*.

Analisando os elementos desses triângulos, temos:

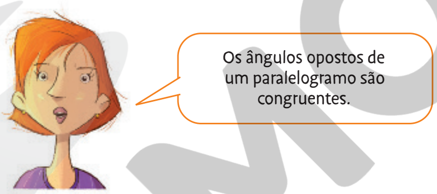
- $\hat{1} \cong \hat{4}$ (ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com a diagonal $\overline{AC}$);
- $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (lado comum);
- $\hat{3} \cong \hat{2}$ (ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ com a diagonal $\overline{AC}$).

Pelo caso ALA, os triângulos *ABC* e *CDA* são congruentes. Portanto:

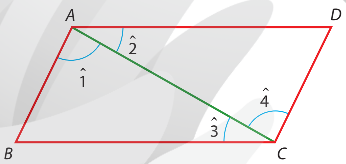
$$\overline{AB} \cong \overline{CD} \quad \text{e} \quad \overline{BC} \cong \overline{AD}$$

2ª propriedade

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

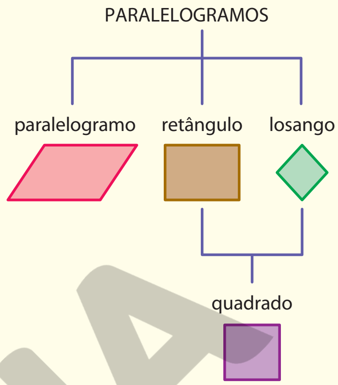


Hipótese $\{$ *ABCD* é um paralelogramo

Tese $\{ \hat{B} \cong \hat{D}$ e $\hat{A} \cong \hat{C}$

Propriedades dos paralelogramos

Ressalte a inclusão dos tipos especiais de paralelogramos antes de iniciar o estudo de suas propriedades.



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Analise o diagrama com os estudantes, de modo que reconheçam que retângulos, losangos e quadrados são paralelogramos e que quadrados são retângulos e também losangos. Registre em um cartaz o que caracteriza cada tipo de paralelogramo e afixe-o na sala de aula, possibilitando que os estudantes o consultem quando necessário.

- Paralelogramo: quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.
- Retângulo: paralelogramo que tem 4 ângulos internos retos.
- Losango: paralelogramo que tem 4 lados de mesma medida.
- Quadrado: paralelogramo que tem os 4 ângulos internos retos e os 4 lados de mesma medida (é um retângulo e é um losango).

Ressalte para os estudantes que toda propriedade válida para paralelogramos é válida também para retângulos, losangos e quadrados, pois estes também são paralelogramos.

A primeira propriedade tratada é: "Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes". Reproduza na lousa a demonstração, fazendo cada etapa com os estudantes.

197

Propriedades dos paralelogramos

Nesta página, demonstramos outras duas propriedades dos paralelogramos:

- Os ângulos internos opostos de um paralelogramo são congruentes.
- As diagonais de um paralelogramo se cruzam nos respectivos pontos médios.

Antes de apresentar aos estudantes as demonstrações, organize-os em duplas e peça que demonstrem cada propriedade. Com base no que já estudaram da primeira propriedade e em estudos anteriores, é esperado que eles desenvolvam tais demonstrações. Depois, discuta com a turma o que cada dupla fez e, se julgar necessário, reproduza na lousa a demonstração do livro.

Exercícios propostos

Apresentamos aqui uma possível resolução do **exercício 9**.

a) Pela 2ª propriedade, obtemos $y = 60°$.

Pelo fato de os lados de um paralelogramo serem paralelos, os ângulos de medidas x e y são ângulos colaterais internos, portanto suplementares; assim, $x = 120°$.

b) Aplicando a 3ª propriedade, obtemos:

$MR = MT = 6$ cm

$RT = RM + MT = 12$ cm

Aplicando a 1ª propriedade, obtemos:

$RU = ST = 5$ cm

$RS = UT = 8$ cm

A resolução do **exercício 10** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

- **Demonstração**

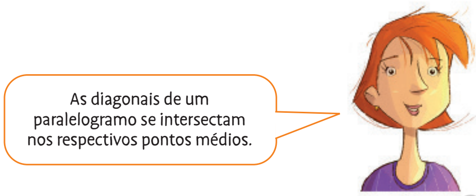
Traçando a diagonal $\overline{AC}$, decompomos o paralelogramo *ABCD* nos triângulos *ABC* e *CDA*.

Por raciocínio análogo à demonstração da 1ª propriedade, analisando os elementos dos triângulos obtidos, *ABC* e *CDA*, concluímos, pelo caso ALA, que os triângulos *ABC* e *CDA* são congruentes.

Portanto, $\hat{B} \cong \hat{D}$.

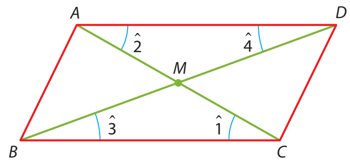
Se traçarmos a diagonal $\overline{BD}$, demonstraremos que $\hat{A} \cong \hat{C}$.

3ª propriedade



SIDNEY MEIRELES/ ARQUIVO DA EDITORA

NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA



Hipótese $\{$ *ABCD* é um paralelogramo

Tese $\{ \overline{AM} \cong \overline{MC}$ e $\overline{BM} \cong \overline{MD}$

- **Demonstração**

Comparando os elementos dos triângulos *BMC* e *DMA*, temos:

- $\hat{1} \cong \hat{2}$ (ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ com a diagonal $\overline{AC}$);
- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (lados opostos de um paralelogramo demonstrado na 1ª propriedade);
- $\hat{3} \cong \hat{4}$ (ângulos alternos internos formados pelos segmentos paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ com a diagonal $\overline{BD}$).

Logo, pelo caso ALA, os triângulos *BMC* e *DMA* são congruentes. Portanto:

$$\overline{AM} \cong \overline{MC} \text{ e } \overline{BM} \cong \overline{MD}$$

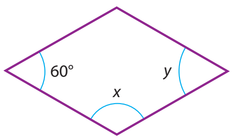
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

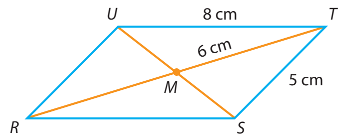
9 Observe os paralelogramos e, considerando as propriedades estudadas, determine:

a) x e y; **9. a)** $x = 120°$ e $y = 60°$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



b) *RS*, *RU*, *MR* e *RT*. **9. b)** 8 cm, 5 cm, 6 cm, 12 cm.

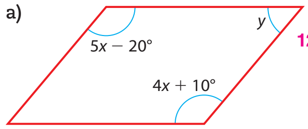


10 Um dos ângulos agudos de um paralelogramo mede 74°. Calcule a medida de um dos ângulos obtusos desse paralelogramo. **10.** 106°

11 Em um losango, um dos ângulos mede 125°. Determine a medida de um dos ângulos agudos desse losango. **11.** 55°

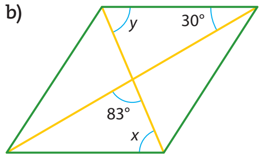
12 Nos paralelogramos a seguir, calcule x e y.

a)



12. a) $x = 30°$
$y = 50°$

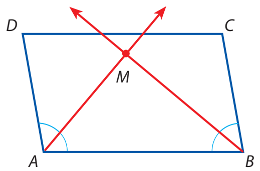
b)



12. b) $x = 67°$
$y = 67°$

13 Em um paralelogramo, um dos ângulos externos mede 108°. Calcule as medidas dos ângulos internos desse paralelogramo.
13. 72°, 72°, 108°, 108°.

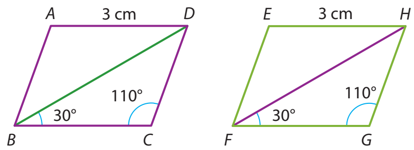
14 No paralelogramo a seguir, $m(\hat{B}) = 80°$, $\overrightarrow{BM}$ é bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e $\overrightarrow{AM}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$. Calcule a medida do ângulo $A\hat{M}B$.
14. 90°



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

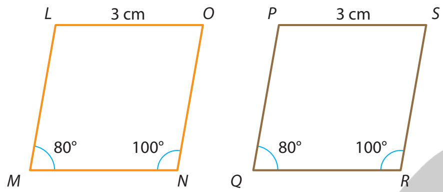
15 Construa um paralelogramo cujas diagonais meçam 4,2 cm e 5,6 cm e formem entre si um ângulo de 110°. **15.** Construção de figura.

16 Considere os paralelogramos $ABCD$ e $EFGH$ a seguir.



Esses paralelogramos são congruentes? Justifique sua resposta. **16.** Sim, pois $\triangle BCD \cong \triangle FGH$ pelo caso ALA. Consequentemente, $\overline{DC} \cong \overline{HG}$.

17 Agora, considere os paralelogramos $LMNO$ e $PQRS$ a seguir.

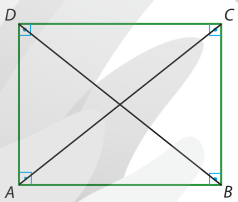


Podemos afirmar que esses paralelogramos são congruentes? Justifique sua resposta.
17. Não, pois não temos as medidas de $\overline{ON}$ e $\overline{SR}$.

18 ***Hora de criar*** – Em dupla, cada um cria um problema sobre uma das propriedades do paralelogramo. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los.
18. Resposta pessoal.

Propriedade dos retângulos

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Hipótese $\{$ $ABCD$ é um retângulo

Tese $\{$ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 11** a **13** e dos **exercícios 16** a **18** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

No **exercício 14**, a medida do ângulo $A\hat{M}B$ independe da medida dada (80°) para o ângulo $\hat{B}$. Explore esse exercício pedindo aos estudantes que repitam a resolução, inicialmente, atribuindo a medida 70° ao ângulo, depois 60° e depois uma medida qualquer a ser escolhida por eles. Apresente a demonstração da proposição a seguir ou solicite a eles que a apresentem.

As bissetrizes de dois ângulos consecutivos de um paralelogramo formam, com o lado comum a esses ângulos, um triângulo retângulo, sendo esse lado a hipotenusa.

Hipótese:
$ABCD$ é um paralelogramo
$\overrightarrow{AM}$ é a bissetriz do ângulo interno
$\overrightarrow{BM}$ é a bissetriz do ângulo interno

Tese: O triângulo AMB é um triângulo retângulo com hipotenusa $\overline{AB}$.

- *Demonstração*

Tomemos o paralelogramo $ABCD$ e tracemos as bissetrizes dos ângulos $B\hat{A}D$ e $A\hat{B}C$.

Vamos representar $m(B\hat{A}D)$ por x. Então:

$m(A\hat{B}C) = (180° - x)$

$m(B\hat{A}M) = \dfrac{x}{2}$

$m(A\hat{B}M) = \dfrac{180° - x}{2}$

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, obtemos:

$m(B\hat{A}M) + m(A\hat{B}M) + m(A\hat{M}B) =$
$= 180°$

$\dfrac{x}{2} + \dfrac{180° - x}{2} + m(A\hat{M}B) = 180°$

$\dfrac{x + 180° - x}{2} + m(A\hat{M}B) = 180°$

$90° + m(A\hat{M}B) = 180°$
$m(A\hat{M}B) = 90°$

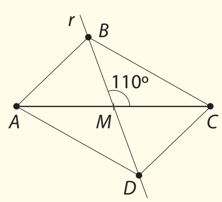
Portanto, o triângulo AMB é retângulo em M, ou seja, $\overline{AB}$ é a hipotenusa.

Para o **exercício 15**, segue uma possível resolução.

Usando uma régua, traçamos um segmento $\overline{AC}$ cuja medida é 5,6 cm e marcamos o seu ponto médio M.

Com um transferidor, construímos um ângulo de 110º, com vértice em M, e traçamos uma reta r. Nela, marcamos os pontos B e D, de modo que $BD = 4{,}2$ cm, com M seu ponto médio.

Os pontos A, B, C e D são os vértices do paralelogramo.



REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedade dos retângulos e propriedade dos losangos

Na sequência, apresentamos propriedades específicas de retângulos e de losangos:

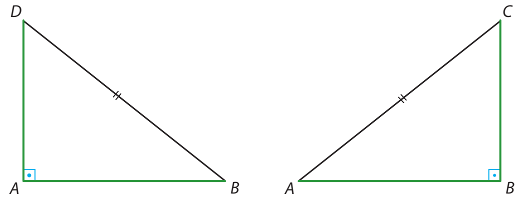
- As diagonais de um retângulo são congruentes.
- As diagonais de um losango são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

Ressalte que essas propriedades também são válidas para um quadrado, visto que todo quadrado pode ser classificado como retângulo e como losango.

As demonstrações dessas propriedades estão apresentadas de maneira compreensível e bem fundamentada. No entanto, os estudantes podem fazer verificações por meio de modelos desenhados em papel, recortados e convenientemente dobrados segundo suas diagonais, suas bissetrizes, suas mediatrizes; ou por superposição de seus elementos (lados e ângulos). Solicite aos estudantes que levem para a sala de aula vários paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados recortados em papel. Lembre-os de que devem usar tesouras de pontas arredondadas e manuseá-las com cuidado. Programando-se dessa maneira, é suficiente usar parte de uma aula para essas verificações. Convém observar aos estudantes que verificação não é o mesmo que demonstração.

- **Demonstração**

Traçando as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ no retângulo $ABCD$, ele pode ser decomposto nos triângulos ABD e BAC.



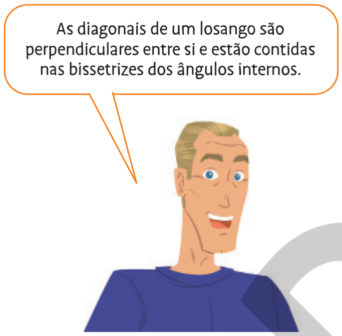
Comparando os elementos desses triângulos, temos:

- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (lados opostos de um paralelogramo);
- $\hat{A} \cong \hat{B}$ (ângulos retos);
- $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (lado comum).

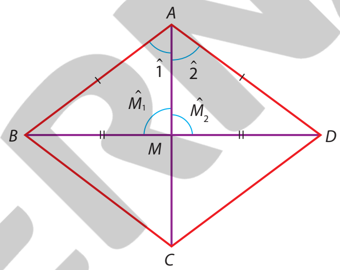
Logo, pelo caso LAL, os triângulos ABD e BAC são congruentes. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedade dos losangos



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



Hipótese $\{$ $ABCD$ é um losango

Tese $\begin{cases} \overline{AC} \perp \overline{BD} \\ \hat{1} \cong \hat{2} \end{cases}$

- **Demonstração**

Analisando os elementos dos triângulos AMB e AMD, obtidos ao traçarmos as diagonais no losango $ABCD$, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ (lados de um losango);
- $\overline{BM} \cong \overline{MD}$ (M é ponto médio de $\overline{BD}$);
- $\overline{AM} \cong \overline{AM}$ (lado comum).

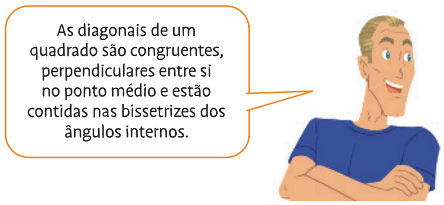
Logo, pelo caso LLL, os triângulos AMB e AMD são congruentes. Portanto:

- $\hat{1} \cong \hat{2}$, o que prova que $\overrightarrow{AC}$ é bissetriz do ângulo $\hat{A}$;
- $\hat{M}_1 \cong \hat{M}_2$, que, por serem suplementares, são retos, o que prova que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

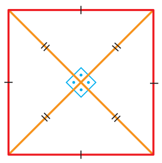
Por raciocínio análogo, prova-se que $\overrightarrow{CA}$ é bissetriz do ângulo $\hat{C}$, $\overrightarrow{BD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{B}$ e $\overrightarrow{DB}$ é bissetriz do ângulo $\hat{D}$.

Propriedades dos quadrados

O quadrado é, ao mesmo tempo, um retângulo e um losango, portanto apresenta as propriedades desses dois paralelogramos.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

Observação

- Um paralelogramo que não é retângulo tem diagonais não congruentes.

21. a) Falsa. Em **todos** os retângulos, as diagonais são congruentes.
21. c) Falsa. As diagonais de **alguns** retângulos são perpendiculares entre si.
21. d) Falsa. As diagonais de um quadrado **sempre** formam, entre si, ângulo de 90°.

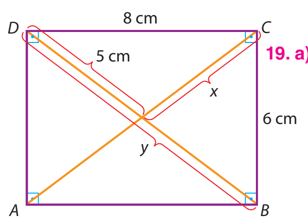
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

23. Aproximadamente 1 600 mm² (considerando que a medida aproximada do lado seja 40 mm).

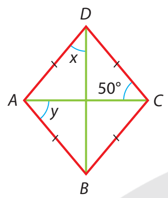
19 Nos quadriláteros a seguir, determine x e y.

a)



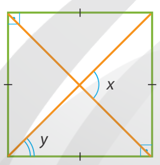
19. a) $x = 5$ cm
$y = 10$ cm

b)



19. b) $x = 40°$
$y = 50°$

c)



19. c) $x = 90°$;
$y = 45°$.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

20 As diagonais de um retângulo cortam-se formando um ângulo de 100°. Determine a medida do menor ângulo que uma dessas diagonais forma com um dos lados. **20.** 40°

21 Corrija no caderno as sentenças falsas.

a) Em apenas alguns retângulos, as diagonais são congruentes.

b) As diagonais de um losango são perpendiculares entre si. **21. b)** Verdadeira.

c) As diagonais dos retângulos são perpendiculares entre si.

d) As diagonais de um quadrado não formam, entre si, ângulo de 90°.

e) As diagonais de um quadrado formam com os lados ângulos de 45°. **21. e)** Verdadeira.

22 A diagonal de um losango forma, com um dos lados, um ângulo de medida igual a 35°. Calcule as medidas dos ângulos desse losango.
22. 70°, 70°, 110°, 110°.

23 Usando régua e compasso, construa um quadrado cujas diagonais meçam 5,6 cm. Com a régua, determine a medida do lado, em milímetro.

Calcule a medida da área desse quadrado, em milímetro quadrado.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

24 Cada diagonal de um retângulo mede 5 cm. Elas cortam-se formando um ângulo de medida igual a 60°. Usando régua, transferidor e compasso, construa esse retângulo, meça seus lados e determine a medida aproximada de sua área, em milímetro quadrado.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.) **24.** Aproximadamente 1 075 mm².

Propriedades dos quadrados

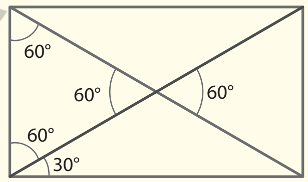
Para os quadrados, basta considerar todas as propriedades anteriores:

- As diagonais de um quadrado são congruentes, perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

Exercícios propostos

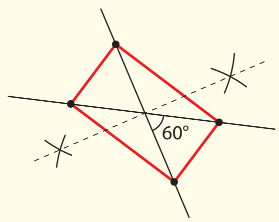
As resoluções dos **exercícios 19** a **23** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Para a resolução do **exercício 24**, oriente os estudantes a fazerem uma figura construída à mão livre que contenha as informações do enunciado. Assim, eles percebem, por exemplo, que as diagonais do retângulo formam, com os lados menores, triângulos equiláteros; logo, o lado menor mede 2,5 cm, metade da medida da diagonal.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Esse procedimento facilita e encaminha adequadamente a construção do retângulo com régua e compasso.



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Medindo com a régua o retângulo construído, o estudante encontrará 43 mm para a medida da base e 25 mm para a medida da altura (aproximadamente). Assim:

$A_{\text{retângulo}} \simeq 43 \cdot 25$

$A_{\text{retângulo}} \simeq 1075$

Portanto, a área desse retângulo mede aproximadamente 1075 mm².

Exercícios propostos

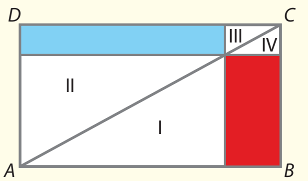
As resoluções dos **exercícios 25** a **29** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Os **exercícios 26** e **27** exigem reflexão e aplicação das propriedades do paralelogramo, do retângulo, do losango e do quadrado nas tentativas de construção das figuras pedidas com base nas instruções do enunciado.

O **exercício 28** propõe uma situação contrária à dos **exercícios 26** e **27**. Nele, é o estudante quem estabelece as condições. Essa é uma boa oportunidade para constatar possíveis dificuldades na aprendizagem dos conceitos estudados.

Pense mais um pouco...

Apresentamos uma possível justificativa para o fato de as medidas das áreas da região azul e da região vermelha serem iguais. Para isso, consideremos o seguinte esquema:



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

Pode-se afirmar que o triângulo *ABC* é equivalente ao triângulo *ADC*, com medidas de área igual a *m*. Além disso, as regiões indicadas como I e II são equivalentes e indicamos a medida da área delas como *n* e, ainda, as regiões III e IV também são equivalentes e indicamos a medida da área delas como *k*.

Sejam *x* a medida da área em azul e *y* a da área em vermelho. Obtemos que:

$x = m - n - k$ e $y = m - n - k$; logo, $x = y$.

Portanto, Alberto gastou quantidades iguais de tinta azul e de tinta vermelha para pintar o painel apresentado.

26. a) Respostas possíveis: retângulo ou quadrado.
26. b) Resposta possível: losango.

25 Em uma folha avulsa, com o auxílio de régua e de compasso, construa um losango cujas diagonais meçam 5,4 cm e 3,2 cm. Depois, recorte o contorno dele e corte-o segundo as diagonais. Com os quatro triângulos obtidos, monte um retângulo e determine a medida de sua área. A medida da área do losango inicial é igual à medida da área do retângulo obtido? Determine a medida da área desse losango.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca. Use tesoura com ponta arredondada e a manuseie com cuidado!)

25. Sim. A área do losango mede 8,64 cm².

26 Desenhe os quadriláteros descritos a seguir e, depois, responda às perguntas.

a) Um quadrilátero cujos ângulos opostos sejam congruentes, pelo menos um deles sendo reto. Como você classifica esse quadrilátero?

b) Um quadrilátero em que pelo menos um dos ângulos não seja reto, sendo os lados opostos paralelos e congruentes. Como você classifica esse quadrilátero?

c) Um quadrilátero em que somente dois lados sejam paralelos e somente um dos ângulos seja reto. **26. c)** Não é possível construir esse quadrilátero.

27 Com base nas respostas do exercício anterior, faça o que se pede.

a) Você conseguiu desenhar um quadrilátero em todos os itens? Em caso negativo, em que item não conseguiu? **27. a)** Item **c**.

b) Compare suas respostas com as dos colegas. Houve divergências? Se sim, em quais itens? Como você explicaria?

27. b) Respostas pessoais.

28 ***Hora de criar*** – No caderno, faça um desenho com quadriláteros e redija instruções de modo que um colega possa construir o mesmo desenho. Troque seu texto com o de um colega e tentem fazer o desenho descrito pelo outro. Depois, comparem os desenhos. Se houver divergências, analisem o caso e tentem descobrir o que poderia ter ocorrido.

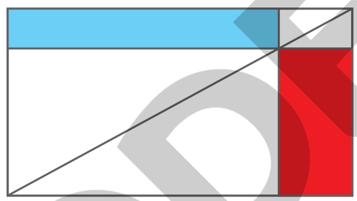
28. Resposta pessoal.

29 Considere um retângulo *ABCD*. Seja *P* um ponto de $\overline{AB}$. Trace por *P* uma reta paralela a $\overline{AD}$. Chame de *Q* o ponto em que essa reta intersecta $\overline{CD}$. Demonstre que $\overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$.

29. $\overline{PQ} /\!/ \overline{AD}$ e $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$; logo, $\overline{PQ} /\!/ \overline{BC}$.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Alberto pinta painéis como este. *Pense mais um pouco...*: Alberto gastou quantidades iguais de tinta azul e tinta vermelha. Demonstração.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Para pintar o painel apresentado, Alberto gastou mais tinta azul ou vermelha? Justifique sua resposta.

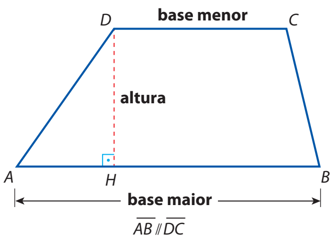
3 Trapézios

Agora, vamos falar dos quadriláteros que têm apenas dois de seus lados paralelos. Esses quadriláteros são chamados de **trapézios**.

SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Os lados paralelos são chamados de **bases** do trapézio. Todo segmento que tem extremidades em uma base e na reta suporte da outra, perpendicular a elas, chama-se **altura** do trapézio.

No trapézio *ABCD*, verificamos que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$, assim como os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são colaterais internos formados pelas bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ com os lados não paralelos.

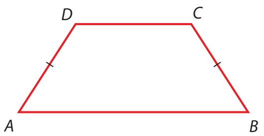


Logo:

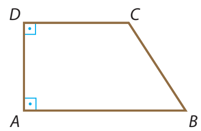
- $m(\hat{A}) + m(\hat{D}) = 180°$
- $m(\hat{B}) + m(\hat{C}) = 180°$

Destacamos três tipos de trapézio.

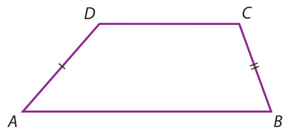
Trapézios isósceles: aqueles em que os lados opostos não paralelos são congruentes.



Trapézios retângulos: aqueles que têm dois ângulos internos retos.



Trapézios escalenos: aqueles que não têm ângulo reto e em que os lados opostos não paralelos não são congruentes.

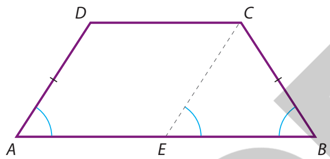


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedades dos trapézios isósceles

1ª propriedade

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



Hipótese $\begin{cases} ABCD \text{ é um trapézio isósceles} \\ \overline{AD} \cong \overline{BC} \end{cases}$

Tese $\{\hat{A} \cong \hat{B}$

- **Demonstração**

Traçando pelo ponto *C* um segmento paralelo a $\overline{AD}$, determinamos o ponto *E* em $\overline{AB}$.

Assim, temos:

- $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ (são lados opostos de um paralelogramo);
- $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (pela hipótese);
- $\overline{CE} \cong \overline{BC}$ ($\overline{CE} \cong \overline{AD} \cong \overline{BC}$).

Logo, *ECB* é um triângulo isósceles e, portanto, $\hat{B} \cong \hat{E}$.

Como $\hat{E} \cong \hat{A}$ (ângulos correspondentes), temos $\hat{A} \cong \hat{B}$ ($\hat{B} \cong \hat{E} \cong \hat{A}$).

Como $m(\hat{D}) = 180° - m(\hat{A})$, $m(\hat{C}) = 180° - m(\hat{B})$ e $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$, temos $m(\hat{D}) = m(\hat{C})$.

Logo, $\hat{D} \cong \hat{C}$.

3. Trapézios

Habilidade da BNCC: **EF08MA14**.

Neste tópico desenvolvemos um trabalho com a habilidade (EF08MA14) ao demonstrar propriedades de quadriláteros aplicando a congruência de triângulos.

Pergunte à turma em que os trapézios diferem dos paralelogramos. Assim, poderá verificar se os estudantes compreenderam a classificação dos quadriláteros discutida anteriormente. Desenhe na lousa quadriláteros diversos, dentre eles paralelogramos e trapézios de vários tipos. Em seguida, peça aos estudantes que identifiquem os trapézios, justificando suas escolhas.

Proponha a eles também que, entre os trapézios identificados, identifiquem as duas bases (maior e menor) e tracem uma altura de cada trapézio. Depois, podem classificá-los como trapézio isósceles, trapézio retângulo e trapézio escaleno.

Discuta com a turma a 1ª propriedade para trapézios isósceles: “Em um trapézio isósceles, os ângulos internos adjacentes à mesma base são congruentes”. Reproduza a demonstração na lousa e peça aos estudantes que justifiquem cada etapa.

Propriedades dos trapézios isósceles

Nesta página, tratamos da 2ª propriedade para trapézios isósceles: "Em um trapézio isósceles, as diagonais são congruentes".

Organize os estudantes em duplas e proponha a eles que demonstrem essa propriedade. Em seguida, peça-lhes que compartilhem o que fizeram com outra dupla e comparem as estratégias utilizadas.

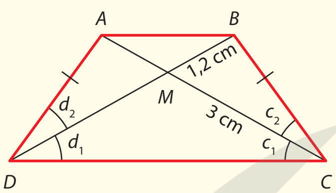
Exercícios propostos

Neste bloco de exercícios, além de aplicar as propriedades e a classificação de trapézios, os estudantes devem mobilizar seus conhecimentos sobre equações para determinar medidas desconhecidas.

As resoluções dos **exercícios 30** e **31** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

A seguir, apresentamos uma possível resolução do **exercício 32**. Como os lados não paralelos $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes, podemos concluir que se trata de um trapézio isósceles (**item a**). Acompanhe a seguir:

WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA



Os triângulos *ADC* e *BCD* são congruentes pelo caso LLL:

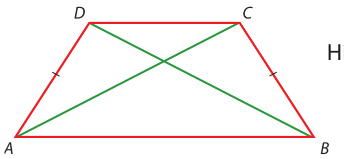
1. $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (hipótese do exercício)
2. $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ (lado comum)
3. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (diagonais em trapézio isósceles)

Então, os ângulos internos correspondentes desses dois triângulos são congruentes entre si. Desse modo, o ângulo de medida c_1 oposto ao lado $\overline{AD}$ no triângulo *ADC* é congruente ao ângulo de medida d_1 oposto ao lado $\overline{BC}$ no triângulo *BCD* (ângulos internos opostos a lados congruentes em triângulos congruentes). Assim: $c_1 = d_1$.

Logo, o triângulo *CDM* é isósceles de base $\overline{DC}$, pois tem os ângulos dessa base congruentes.

2ª propriedade

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

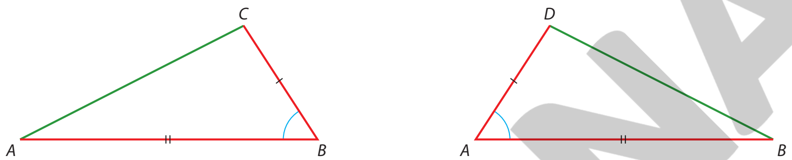


Hipótese $\begin{cases} ABCD \text{ é um trapézio isósceles} \\ \overline{AD} \cong \overline{BC} \end{cases}$

Tese $\{ \overline{AC} \cong \overline{BD}$

- **Demonstração**

Vamos destacar do trapézio *ABCD* os triângulos *ABC* e *BAD*.



Assim, temos:

- $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (pela hipótese);
- $\hat{B} \cong \hat{A}$ (ângulos adjacentes à base $\overline{AB}$ do trapézio isósceles);
- $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (lado comum).

Logo, pelo caso LAL, os triângulos *ABC* e *BAD* são congruentes. Portanto, $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.

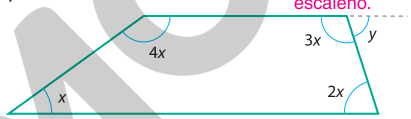
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

30 Calcule os valores de *x* e *y*, em grau, nos trapézios a seguir e classifique-os em escaleno, isósceles ou retângulo.

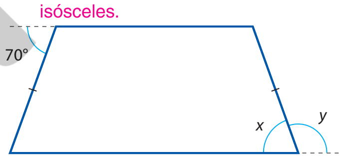
30. a) $x = 36°$; $y = 72°$; escaleno.

a)



30. b) $x = 70°$; $y = 110°$; isósceles.

b)



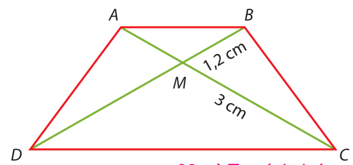
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

31 Em um trapézio retângulo, a medida do ângulo obtuso é igual ao triplo da medida do ângulo agudo. Determine:

a) a medida do ângulo obtuso; **31. a)** 135°

b) a medida do ângulo agudo. **31. b)** 45°

32 No trapézio a seguir, temos $\overline{AD} \cong \overline{BC}$.



32. a) Trapézio isósceles.

a) Como podemos classificar esse trapézio?

b) Como podemos classificar os triângulos *ABM* e *CDM*? **32. b)** Os triângulos são isósceles.

c) Calcule a medida de cada diagonal.
32. c) 4,2 cm

204

De maneira análoga, provamos que o triângulo *ABM* é isósceles de base $\overline{AB}$. Portanto, *ABM* e *CDM* são triângulos isósceles (**item b**).

Como os triângulos *ABM* e *CDM* são isósceles, temos $DM = MC = 3$ cm e $AM = MB = 1{,}2$ cm. Assim:

$CA = DB = DM + MB = 3 \text{ cm} + 1{,}2 \text{ cm}$

$CA = DB = 4{,}2 \text{ cm}$ (**item c**)

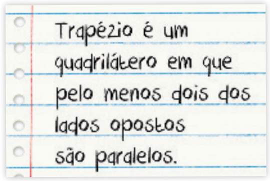
36. Não. Espera-se que os estudantes percebam que, ao dizer que **pelo menos** dois dos lados opostos são paralelos, Fabiana incluiu, além dos trapézios, os paralelogramos nessa definição.

33 As diagonais de um trapézio isósceles medem 6 cm. O ponto de encontro dessas diagonais fica a 2 cm dos vértices da base menor, e elas formam entre si um ângulo de medida igual a 60°. Faça um desenho desse trapézio. **33.** Construção de figura; há duas construções possíveis.

34 Considere a seguinte descrição de um trapézio isósceles: a base maior mede 4 cm, cada um dos lados não paralelos mede 2 cm e forma com a base maior um ângulo medindo 50°. Construa esse trapézio.
34. Construção de figura.

35 O maior ângulo interno de um trapézio retângulo tem o dobro da medida de seu menor ângulo interno. Calcule as medidas dos ângulos internos desse trapézio.
35. 60°, 90°, 90°, 120°.

36 Fabiana definiu trapézio da seguinte maneira:



JOSÉ LUÍS JUHAS/ ARQUIVO DA EDITORA

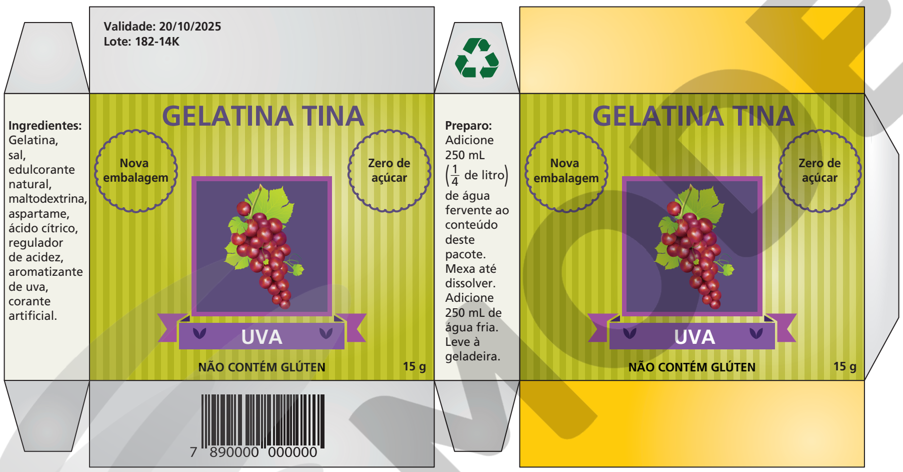
A definição de Fabiana está de acordo com a definição apresentada neste capítulo? Justifique sua resposta.

37 ***Hora de criar*** – Em dupla, cada um cria um problema sobre trapézio. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **37.** Resposta pessoal.

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Rotulando informações

Valentina desmontou uma caixinha de gelatina para descartá-la com o material reciclável. Observe como essa caixinha ficou.



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

Quantas informações importantes e necessárias o rótulo de uma embalagem traz!

Em um rótulo assim, podemos identificar o produto, seu código de barras, saber a data de validade, o lote, o tipo de embalagem, a medida da massa, os ingredientes, as orientações de uso etc.

Esse rótulo traz orientações de preparo e ainda contém o selo indicando que a embalagem é reciclável.

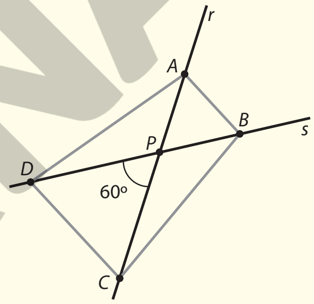
205

Exercícios propostos

No **exercício 33**, sugira aos estudantes que façam à mão livre um esboço da situação. Depois, iniciem a construção pelas diagonais do trapézio. Assim, traçamos duas retas concorrentes, *r* e *s*, formando um ângulo de 60°. Vamos chamar de *P* o ponto de intersecção dessas retas. Essas retas conterão as diagonais do trapézio em construção.

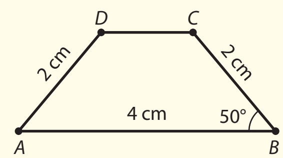
Na reta *r*, marcamos os pontos *A* e *C*, de modo que $AC = 6$ cm e $PA = 2$ cm. Da mesma maneira, na reta *s*, marcamos os pontos *B* e *D*, de modo que $BD = 6$ cm e $PB = 2$ cm.

Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* são os vértices do trapézio.



REINALDO VIGNATI/ ARQUIVO DA EDITORA

Segue uma possível figura para o **exercício 34**. Demarcamos em uma reta os pontos *A* e *B*, com $AB = 4$ cm. Com o transferidor, construímos um ângulo de 50° de vértice *B*, na base maior. Com a ponta-seca do compasso em *B* e abertura de 2 cm, determinamos o ponto *C*, distante 2 cm de *B*, e traçamos a reta paralela à base maior passando por *C*. Com a ponta-seca em *A* e abertura de 2 cm, traçamos um arco que cruza essa reta paralela em *D*. O quadrilátero *ABCD* obtido é o trapézio solicitado.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

Lembre os estudantes de que devem tomar muito cuidado para não se machucarem com a ponta-seca ao usar o compasso.

As resoluções dos **exercícios 35** a **37** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

No **exercício 37**, incentive os estudantes a representarem um trapézio antes de elaborar o problema. Depois, com base no trapézio representado, será mais prático elaborar uma situação-problema.

Trabalhando a informação

As resoluções das **atividades 1** a **10** do **Agora quem trabalha é você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Sobre a **atividade 7**, sugerimos que discuta com os estudantes quais seriam essas três dimensões, antes de fazerem as medições. Proponha a eles que imaginem a caixa montada ou leve para a sala de aula modelos dela para que as manuseiem. Espera-se que eles identifiquem a largura, a altura e o comprimento da caixa.

Explore figuras de uma dimensão, como o segmento de reta (lado de algum quadrilátero), e figuras de duas dimensões, como a superfície de regiões poligonais, estimulando os estudantes a perceberem as dimensões estudadas e solicitando a eles que façam comparações com as dimensões de figuras tridimensionais.

4. Propriedades da base média do triângulo e do trapézio

Habilidade da BNCC: **EF08MA14**.

Neste tópico desenvolvemos um trabalho com a habilidade (EF08MA14) ao demonstrar propriedades de quadriláteros aplicando a congruência de triângulos.

1. Resposta possível: sabor uva, não contém glúten, ingredientes, zero de açúcar, 15 g, código de barras, modo de preparo, validade, lote.

Agora quem trabalha é você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Que informações você pode destacar nessa imagem da embalagem?

2 Valentina tem intolerância a glúten. Ela pode comer essa gelatina? **2.** Sim.

3 Esse produto pode ser consumido na data de hoje? Por quê? **3.** A resposta depende da data em que a atividade é realizada.

4 Para fazer gelatina para a família, Valentina usa três caixinhas como essa. Quantos gramas de pó de gelatina Valentina usa? E de açúcar? **4.** Pó de gelatina: 45 g; açúcar: 0 g.

5 Quantos mL de água fervente Valentina deve adicionar ao pó para preparar três caixinhas de gelatina? E quantos litros de água ao todo?

6 Sem realizar medições, você identifica figuras que lembram quadrados na imagem da embalagem? Em caso afirmativo, onde?

7 Com uma régua, obtenha as medidas das três dimensões da caixinha de gelatina. **7.** Comprimento: 6,0 cm; altura: 5,0 cm; largura: 1,5 cm.

8 Quantos e quais tipos de quadrilátero compõem as faces e as abas dessa embalagem? **8.** 8 retângulos e 5 trapézios.

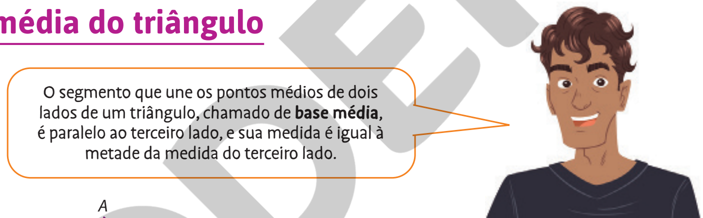
9 Após fazer a gelatina, o que Valentina deve fazer com as caixinhas?

10 Em papel de seda, faça um decalque do contorno da imagem da embalagem e cole-o em papel-cartão. Depois, recorte essa figura, vinque os lados comuns entre faces e entre faces e abas. Cole as abas, monte a caixinha e crie um rótulo do produto que quiser. **10.** Resposta pessoal.
(Use tesoura com ponta arredondada e a manuseie com cuidado!)

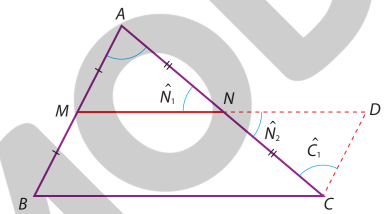
5. Volume de água fervente: 750 mL; volume total de água: 1,5 L ou $\frac{3}{2}$ L.
6. Espera-se que os estudantes respondam que sim, no contorno das imagens da uva.
9. Espera-se que os estudantes respondam que ela deve separar para reciclagem.

4 Propriedades da base média do triângulo e do trapézio

Base média do triângulo



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Hipótese $\begin{cases} \overline{AM} \cong \overline{MB} \\ \overline{AN} \cong \overline{NC} \end{cases}$

Tese $\begin{cases} \overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ MN = \dfrac{BC}{2} \end{cases}$

- **Demonstração**

Construção auxiliar: traçamos pelo vértice *C* uma reta paralela a $\overline{AB}$, que intersecta $\overrightarrow{MN}$ no ponto *D*. Assim, temos:

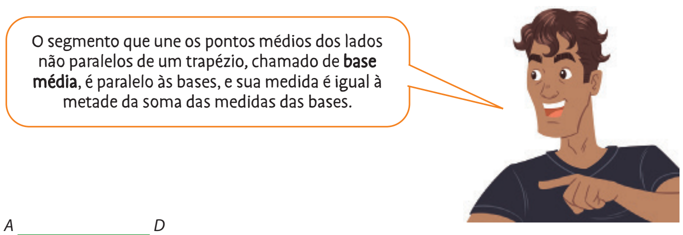
- $\hat{A} \cong \hat{C}_1$ (ângulos alternos internos formados por duas retas paralelas e uma transversal);
- $\overline{AN} \cong \overline{NC}$ (pela hipótese);
- $\hat{N}_1 \cong \hat{N}_2$ (ângulos opostos pelo vértice);
- $\triangle AMN \cong \triangle CDN$ (pelo caso ALA);

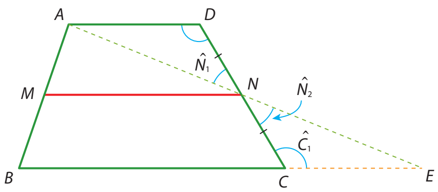
- $\overline{MN} \cong \overline{ND}$ (lados correspondentes de triângulos congruentes);
- $\overline{CD} \cong \overline{AM}$ (lados correspondentes de triângulos congruentes);
- $\overline{AM} \cong \overline{MB}$ (pela hipótese);
- $\overline{CD} \cong \overline{MB}$ ($\overline{CD} \cong \overline{AM} \cong \overline{MB}$);
- $BCDM$ é paralelogramo.

Logo, $\overline{MD} \parallel \overline{BC}$ ou $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ e $\overline{MD} \cong \overline{BC}$ ou, ainda, $MN + ND = BC$.

Como $\overline{ND} \cong \overline{MN}$, temos $2 \cdot MN = BC$; portanto, $MN = \dfrac{BC}{2}$.

Base média do trapézio





Hipótese $\begin{cases} ABCD \text{ é um trapézio} \\ \overline{AM} \cong \overline{BM} \\ \overline{CN} \cong \overline{DN} \end{cases}$

Tese $\begin{cases} \overline{MN} \parallel \overline{BC} \\ MN = \dfrac{BC + AD}{2} \end{cases}$

- **Demonstração**

Construção auxiliar: $\overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{BC}$, que se cruzam no ponto E.

Assim, temos:

- $\hat{D} \cong \hat{C}_1$ (ângulos alternos internos formados por duas retas paralelas e uma transversal);
- $\overline{CN} \cong \overline{DN}$ (pela hipótese);
- $\hat{N}_1 \cong \hat{N}_2$ (ângulos opostos pelo vértice).

Logo, pelo caso ALA, os triângulos ADN e ECN são congruentes.

Portanto, $\overline{AN} \cong \overline{NE}$ e $\overline{AD} \cong \overline{CE}$.

Sabemos que $MN = \dfrac{BE}{2}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ (propriedade da base média do triângulo).

Pela construção da figura, temos: $BE = BC + CE$

Sendo $\overline{CE} \cong \overline{AD}$, podemos escrever: $BE = BC + AD$

Substituindo BE por $BC + AD$ em $MN = \dfrac{BE}{2}$, obtemos: $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$

Base média do triângulo e base média do trapézio

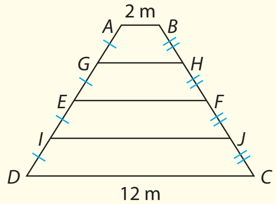
Discuta com a turma os conceitos de base média de um triângulo e de um trapézio.

Prepare antecipadamente, em folha separada, várias figuras de diferentes tipos de triângulos e de trapézios para que os estudantes identifiquem nelas a base média desses polígonos (determinando os pontos médios dos lados envolvidos) e façam medições para comprovar as propriedades apresentadas.

Transcreva as demonstrações na lousa e peça aos estudantes que justifiquem cada etapa.

Para saber mais

No **Agora é com você!**, sugira aos estudantes que façam um esboço da situação.



WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA

- $\overline{EF}$ é a base média do trapézio $ABCD$:
  $EF = (2 + 12) : 2 = 14 : 2 = 7$
- $\overline{GH}$ é a base média do trapézio $ABFE$:
  $GH = (2 + 7) : 2 = 9 : 2 = 4{,}5$
- $\overline{IJ}$ é a base média do trapézio $EFCD$:
  $IJ = (7 + 12) : 2 = 19 : 2 = 9{,}5$

Logo, as outras três vigas têm comprimentos de medidas: 4,5 m, 7 m, 9,5 m.

Exercícios propostos

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 38**.

a) Aplicando a propriedade da base média do triângulo, obtemos:

$$MN = \frac{BC}{2}$$

$$MN = \frac{14}{2} = 7$$

Logo, MN mede 7 cm.

b) Aplicando a propriedade da base média do triângulo, obtemos:

$$MN = \frac{BC}{2}$$

$$4{,}5 = \frac{BC}{2}$$

$$BC = 2 \cdot 4{,}5$$

Logo, BC mede 9 cm.

PARA SABER MAIS

O trapézio no telhado

Na edificação de casas, desde a fundação até o telhado, importantes conceitos matemáticos se expressam de maneira relativamente simples em procedimentos rotineiros de construtores, empreiteiros e pedreiros, como levantar paredes, instalar um sistema hidráulico e montar e cobrir um telhado.

Na construção do madeirame que suporta os telhados, são necessários cálculos matemáticos que possibilitam determinar com exatidão as medidas de todos os elementos que o compõem.

Nos telhados em formato de trapézio, por exemplo, os cálculos empregados para determinar as medidas das vigas (que são paralelas às bases do trapézio) baseiam-se na propriedade da **base média do trapézio**: se, pelo ponto médio de cada um dos lados não paralelos de um trapézio, traçarmos um segmento de reta, esse segmento será paralelo às bases, e a medida dele será a média aritmética das medidas dessas bases.

Por exemplo, em um trapézio cujas bases medem 6 m e 10 m, a medida da base média é dada por $\frac{6 + 10}{2}$ m, ou seja, 8 m.

Assim, se um telhado em formato de trapézio tiver somente 3 vigas paralelas, a maior medindo 10 m de comprimento e a menor medindo 6 m, a viga que for colocada entre elas, nos pontos médios dos lados não paralelos, deverá medir 8 m de comprimento.

SNAPPIXPRO/SHUTTERSTOCK

A vertente ou água frontal do telhado dessa imagem tem o formato de um trapézio isósceles.

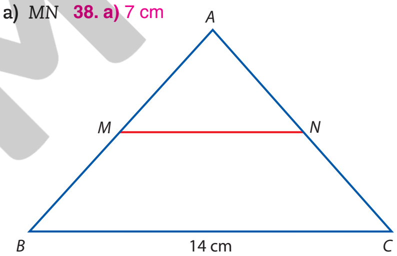
Agora é com você! FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Um telhado trapezoidal tem 5 vigas paralelas e igualmente espaçadas. A menor delas (a superior) mede 2 m de comprimento, e a maior (a inferior) mede 12 m de comprimento. Calcule no caderno a medida do comprimento das outras 3 vigas. *Para saber mais*: 7 m; 4,5 m; 9,5 m.

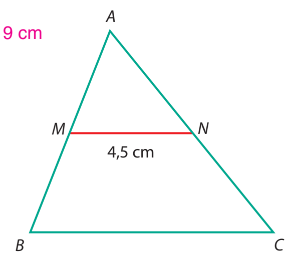
EXERCÍCIOS PROPOSTOS FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

38 Nas figuras, M e N são pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Determine:

a) MN **38. a)** 7 cm



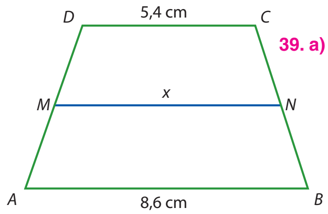
b) BC **38. b)** 9 cm



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

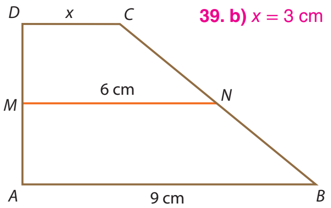
39 Nos trapézios a seguir, M e N são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. Calcule o valor de x.

a)



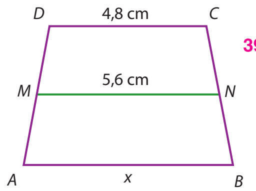
39. a) $x = 7$ cm

b)



39. b) $x = 3$ cm

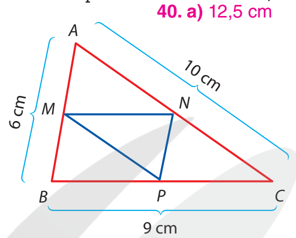
c)



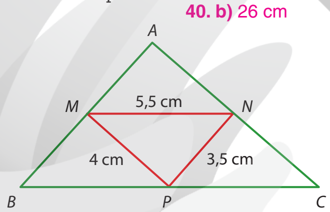
39. c) $x = 6,4$ cm

40 Nas figuras, M, N e P são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$. Determine:

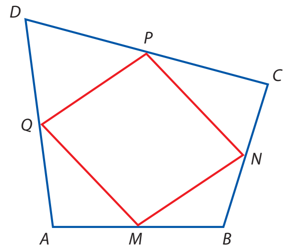
a) a medida do perímetro do $\triangle MNP$; **40. a)** 12,5 cm



b) a medida do perímetro do $\triangle ABC$. **40. b)** 26 cm



41 Na figura a seguir, M, N, P e Q são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.



a) Prove que $\overline{MN} \,/\!/\, \overline{PQ}$. **41. a)** Demonstração.

b) Prove que $\overline{QM} \,/\!/\, \overline{PN}$. **41. b)** Demonstração.

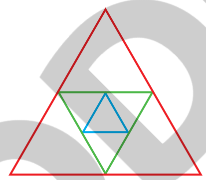
c) Como podemos classificar o quadrilátero $MNPQ$? **41. c)** Paralelogramo.

d) Se $AC = 12$ cm, quanto mede o segmento $\overline{MN}$? **41. d)** 6 cm

e) Se $BD = 16$ cm, quanto mede $\overline{QM}$? **41. e)** 8 cm

f) Se $PN = 20$ cm, quanto mede $\overline{BD}$? **41. f)** 40 cm

42 O lado do triângulo equilátero vermelho mede 6 cm. Desenhamos um segundo triângulo equilátero (verde) unindo os pontos médios dos lados do triângulo vermelho. Unindo os pontos médios dos lados do triângulo verde, desenhamos um terceiro triângulo equilátero (azul). Qual é a medida do perímetro do triângulo azul? **42.** 4,5 cm



43 Considere um trapézio cujas bases meçam 10 cm e 5 cm.

a) Quanto mede o segmento de reta que une os pontos médios dos lados não paralelos? **43. a)** 7,5 cm

b) Prolongando os lados não paralelos, obtêm-se dois triângulos equiláteros. Qual é a medida do perímetro desse trapézio? **43. b)** 25 cm

44 Em um trapézio isósceles, os lados não paralelos medem 12 cm, e a base média, 20 cm.

a) Calcule a medida do perímetro desse trapézio. **44. a)** 64 cm

b) Se a base menor mede 8 cm, quanto mede a base maior desse trapézio? **44. b)** 32 cm

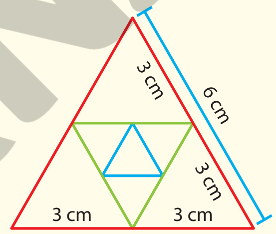
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Logo, podemos concluir que $BA = CD = 5$ cm. Portanto, a medida do perímetro desse trapézio é 25 cm ($5 + 10 + 5 + 5 = 25$).

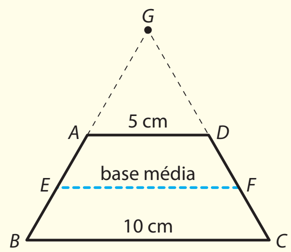
Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 39** a **41**, e dos **exercícios 44** e **46** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 42**. Cada lado do triângulo verde é a base média do triângulo vermelho relativo a um lado de 6 cm. Logo, a medida de cada lado do triângulo verde é 3 cm (metade da medida do lado de 6 cm). Cada lado do triângulo azul é a base média do triângulo verde relativo a um lado que mede 3 cm. Logo, a medida de cada lado do triângulo azul é 1,5 cm (metade da medida do lado de 3 cm). Portanto, a medida do perímetro do triângulo azul é 4,5 cm ($3 \cdot 1,5$ cm).



Apresentamos uma possível resolução para o **exercício 43**, com um esboço da situação:



a) A base média desse trapézio mede $[(10 + 5) : 2]$ cm, ou seja, 7,5 cm.

b) O triângulo GAD é equilátero (dado do enunciado). Logo, $AG = GD = 5$ cm.

O triângulo GEF é equilátero (dado do enunciado).

Logo, $EG = FG = 7,5$ cm.

Como $EG = EA + AG$, obtemos:

$7,5 \text{ cm} = EA + 5 \text{ cm}$

Ou seja: $EA = 2,5$ cm.

Analogamente, obtemos:

$FD = 2,5$ cm

Como E e F são pontos médios dos lados não paralelos desse trapézio, consideramos:

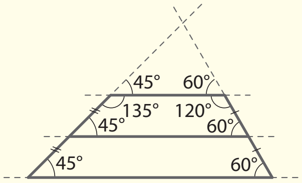
$BE = EA = 2,5$ cm

$CF = FD = 2,5$ cm

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

A seguir uma possível resolução para o **exercício 45**.



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ ARQUIVO DA EDITORA

Logo, os ângulos internos do trapézio são 45º, 60º, 120º e 135º.

No **exercício 46**, possibilite aos estudantes discutir situações em que eles observam estruturas que possam ser associadas a trapézios; incentive-os a considerarem um dos contextos apresentados para elaborar a situação-problema.

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios propicia aos estudantes revisitarem o trabalho com quadriláteros desenvolvido, ampliando e consolidando os conhecimentos que já construíram. Além disso, podem perceber possíveis dúvidas que ainda persistam e elucidá-las com o auxílio do professor e dos colegas.

As resoluções dos **exercícios 1** a **9** e dos **exercícios 11** e **12** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Apresentamos a seguir uma possível resolução para o **exercício 10**. Indicamos por B a medida da base maior, por b a medida da base menor e por x a medida dos lados não paralelos (uma vez que o trapézio é isósceles). Como a medida do perímetro do trapézio (P) é 66 cm, obtemos a seguinte expressão:

$P = 2x + B + b$

$66 = 2x + B + b$

$66 - 2x = B + b$

$\dfrac{66 - 2x}{2} = \dfrac{B + b}{2}$

Como a base média mede 20 cm, obtemos:

$\dfrac{66 - 2x}{2} = 20$

$\dfrac{66 - 2x}{2} \cdot 2 = 20 \cdot 2$

$66 - 2x = 40$

$-2x = -26$

$\dfrac{-2x}{-2} = \dfrac{-26}{-2}$

$x = 13$

Portanto, cada lado não paralelo desse trapézio mede 13 cm.

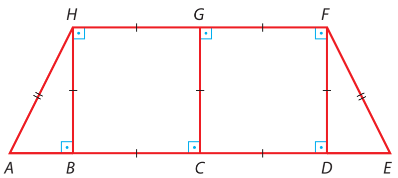
45 Em um trapézio, a base média forma, com um dos lados não paralelos, um ângulo medindo 45° e, com o outro lado, forma um ângulo de 60°. Calcule as medidas dos ângulos desse trapézio. **45.** 45°, 60°, 120°, 135°.

46 ***Hora de criar*** – Em dupla, cada um cria um problema sobre base média de um trapézio. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **46.** Resposta pessoal.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

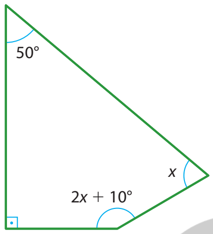
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Classifique os quadriláteros da figura.



a) $BDFH$ **1. a)** Retângulo.
b) $AEFH$ **1. b)** Trapézio isósceles.
c) $ACGH$ **1. c)** Trapézio retângulo.
d) $BCGH$ **1. d)** Quadrado.

2 Calcule o valor de x. **2.** $x = 70°$

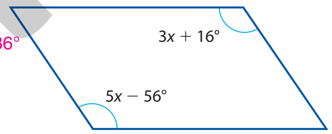


3 Desenhe dois segmentos, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, que se intersectem nos seus respectivos pontos médios. Que tipo de quadrilátero você obtém traçando os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DA}$? Justifique sua resposta. **3.** *ABCD* é um paralelogramo, porque suas diagonais se intersectam nos respectivos pontos médios.

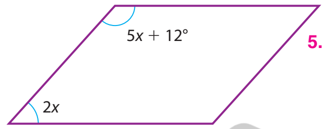
4 Desenhe dois segmentos não congruentes, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, perpendiculares entre si, que se cruzem nos respectivos pontos médios. Que tipo de paralelogramo você obtém traçando os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BD}$ e $\overline{DA}$? Justifique sua resposta. **4.** Losango, porque as diagonais são perpendiculares entre si e se intersectam nos respectivos pontos médios.

5 Calcule o valor de x em cada paralelogramo a seguir.

a) **5. a)** $x = 36°$



b) **5. b)** $x = 24°$



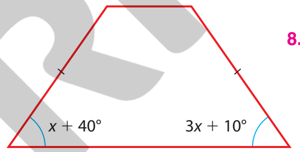
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

6 Uma altura de um paralelogramo forma, com um dos lados, um ângulo medindo 35°. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo. **6.** 55°, 55°, 125°, 125°.

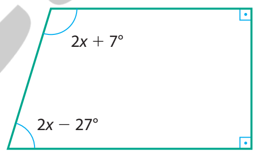
7 Uma das diagonais de um losango forma, com um dos lados, um ângulo medindo 28°. Calcule as medidas dos ângulos desse losango. **7.** 56°, 56°, 124°, 124°.

8 Calcule o valor de x em cada trapézio a seguir.

a) **8. a)** $x = 15°$



b) **8. b)** $x = 50°$



9 Um dos ângulos externos de um trapézio retângulo mede 118°. Calcule a medida do ângulo obtuso desse trapézio. **9.** 118°

10 A medida do perímetro de um trapézio isósceles é 66 cm. A base média mede 20 cm. Faça o cálculo e responda: quanto mede cada um dos lados não paralelos? **10.** 13 cm

11 A base média de um trapézio isósceles mede 30 cm. Cada um dos lados congruentes mede 10 cm. Calcule a medida do perímetro desse trapézio. **11.** 80 cm

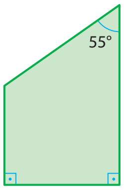
12 Construa um triângulo retângulo ABC, reto em B. Marque o ponto M médio, de $\overline{AC}$, e o ponto D, simétrico de B em relação a M. Prove que $ABCD$ é um paralelogramo. **12.** Construção de figura. Demonstração.

Para o **exercício 12**, por simetria de construção, os triângulos retângulos *ABC* e *CDA* são congruentes; então, o quadrilátero *ABCD* é um retângulo, que também é um paralelogramo.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

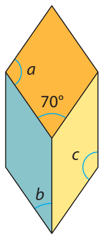
1 Este quadrilátero representa um dos vidros que Carlos precisou cortar para a janela de uma casa. Qual é a medida do maior ângulo interno do quadrilátero?



a) 100° c) 125°
b) 90° d) 135°

1. Alternativa c.

2 Para fazer um mosaico, uma artista usou dois tipos de paralelogramo. O ângulo agudo de um desses polígonos, o paralelogramo laranja, mede 70°, conforme indicação na figura.



As medidas a, b e c dos ângulos destacados nesses paralelogramos são, respectivamente:

a) 90°, 35° e 145°. c) 110°, 45° e 145°.
b) 110°, 35° e 145°. d) 140°, 70° e 290°.

2. Alternativa b.

3 Seja um paralelogramo $ABCD$ e M o ponto de intersecção de suas diagonais. Sabendo que $AM = 5$ cm e $BM = 7$ cm, qual é a soma das medidas das diagonais desse quadrilátero?

a) 10 cm c) 24 cm
b) 15 cm d) 30 cm

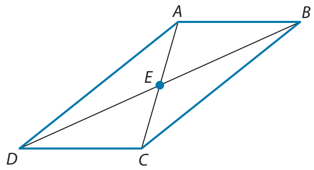
3. Alternativa c.

4 Ter diagonais congruentes é uma característica:

4. Alternativa b.

a) de todos os losangos.
b) de todos os retângulos.
c) de todos os trapézios.
d) de todos os paralelogramos.

5 No paralelogramo $ABCD$, a seguir, o ponto E é o ponto de intersecção das diagonais, $\overline{AB}$ mede 12 cm, $\overline{BC}$ mede 20 cm e $\overline{AE}$ mede 6,5 cm.



Qual é a medida do perímetro do triângulo ACD? **5. Alternativa c.**

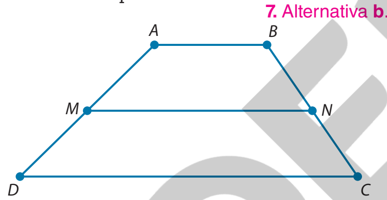
a) 37 cm c) 45 cm
b) 38,5 cm d) 46,5 cm

6 Todo trapézio isósceles tem: **6. Alternativa a.**

a) ângulos da base congruentes.
b) todos os ângulos congruentes.
c) lados paralelos congruentes.
d) todos os lados congruentes.

7 No trapézio $ABCD$, M e N são, respectivamente, os pontos médios de $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$. A base menor, $\overline{AB}$, mede 5 cm e a paralela $\overline{MN}$ mede 10 cm.

7. Alternativa b.



Qual é a medida da base maior $\overline{DC}$?

a) 10 cm b) 15 cm c) 20 cm d) 25 cm

8 A medida do perímetro de um trapézio isósceles é igual a 88 cm e a base média mede 24 cm. Quanto mede cada um dos lados não paralelos desse trapézio? **8. Alternativa b.**

a) 15 cm b) 20 cm c) 24 cm d) 32 cm

ILUSTRAÇÕES: ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Organizando: **b)** Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes, os ângulos opostos são congruentes e as diagonais se intersectam no ponto médio.
c) Retângulos: são congruentes; losangos: são perpendiculares entre si e estão contidas nas bissetrizes dos ângulos internos.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Qual é a definição de paralelogramo? **a)** Paralelogramo é todo quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.
b) Quais são as propriedades relacionadas a todos os paralelogramos?
c) Quais são as propriedades das diagonais dos retângulos e das diagonais dos losangos?
d) Defina trapézio isósceles e indique duas propriedades relacionadas a esse tipo de trapézio.
e) O que é a base média de um triângulo? Como se calcula sua medida?
f) O que é a base média de um trapézio? Como se calcula sua medida?

d) São trapézios em que os lados opostos não paralelos são congruentes. Propriedades: os ângulos adjacentes à base são congruentes e as diagonais são congruentes.

e) É o segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo. Sua medida é igual à metade da medida do terceiro lado.

f) É o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio. Sua medida é igual à metade da soma das medidas das bases.

Verificando

Nesta seção são propostos testes que abordam os conteúdos apresentados ao longo deste capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso eles apresentem dúvidas em relação a algum dos testes propostos, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

As resoluções dos **testes 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Organizando

No **item a**, espera-se que o estudante tenha percebido que as definições são pontos de partida para o desenvolvimento do estudo em questão. No caso, o próprio nome do polígono – paralelogramo – indica aquilo que o caracteriza: lados paralelos.

No **item b**, espera-se que o estudante descreva as três propriedades dos paralelogramos (lados opostos congruentes, ângulos opostos congruentes e diagonais se intersectam no ponto médio).

No **item c**, caso o estudante tenha dificuldade de lembrar as propriedades das diagonais de um retângulo e de um losango, oriente-o a esboçar esses quadriláteros e traçar as diagonais. Tal esboço, se bem-feito, lhe dará pistas das propriedades.

No **item d**, verifique se o estudante faz um analogia entre as classificações do triângulo isósceles e do trapézio isósceles.

Nos **itens e** e **f**, o estudante pode fazer uma analogia como um instrumento de aquisição mnemônica atentando para o significado das palavras média (para o cálculo numérico) e médio (para o ponto médio). Assim, também ficará mais fácil obter a resposta à segunda pergunta: as medidas da base média são a metade da medida da base do triângulo e a média aritmética das medidas das bases do trapézio.

Diversificando

Esta seção aborda triângulos, quadriláteros e prismas. Reproduza em cartolina a planificação apresentada, em tamanho maior, de modo que os estudantes possam trabalhar em grupos, montando e desmontando a caixa.

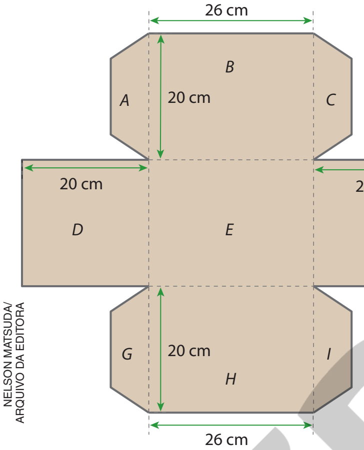
As resoluções e comentários das **atividades 1** a **4** do **Agora é com você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 9.

Providencie palitos de sorvete ou similar para que os estudantes realizem a **atividade 4**.

DIVERSIFICANDO

Quadriláteros na caixa

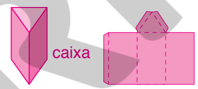
Gabriela guarda sua coleção de livros na estante da sala, mas uma das prateleiras quebrou. Como seu pai só poderá consertar a estante no fim de semana, pediu a ela que guardasse os livros em uma caixa. Então, Gabriela desenhou a planificação da superfície de uma caixa em uma folha de papelão. Depois, com cuidado, recortou e montou-a. Observe a planificação a seguir.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

(Lembre-se de sempre usar tesoura com ponta arredondada e de manuseá-la com cuidado!)

3. Resposta possível: Sim, basta imaginar um prisma de base triangular sem uma das bases. Uma possibilidade de desenho:



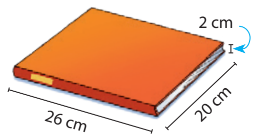
NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Quantos tipos de quadrilátero podemos identificar nessa planificação? Classifique os quadriláteros que você identificou. **1.** Três tipos: retângulo (*B*, *D*, *E*, *F* e *H*, , sendo *D* e *F* quadrados) e trapézio (*A*, *C*, *G* e *I*).

2 Os livros de Gabriela têm as medidas indicadas na figura.



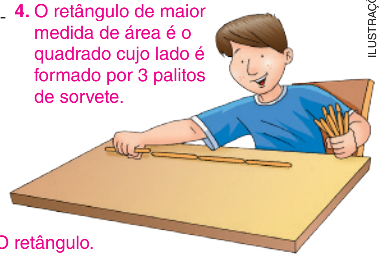
a) Determine quantos deles cabem na caixa se ela os guardar de modo que nenhuma parte deles fique fora da caixa e se ela os guardar de modo que uma das faces de área menor fique em contato com a base da caixa. **2. a)** 10 livros; 13 livros.

b) Calcule a medida do volume que ocupariam os livros que, no segundo modo do item anterior, ficariam fora da caixa. **2. b)** 3 120 cm^3

3 É possível ter uma caixa cuja planificação não seja composta apenas de quadriláteros? Explique por quê. Em caso afirmativo, desenhe uma dessas caixas.

4 Usando apenas 12 palitos de sorvete iguais, construa um retângulo de tal modo que ele tenha a maior medida de área possível. Depois, responda às questões.

4. O retângulo de maior medida de área é o quadrado cujo lado é formado por 3 palitos de sorvete.



ILUSTRAÇÕES: JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

a) Podemos construir um triângulo equilátero com esses 12 palitos? **4. a)** Sim, o triângulo terá cada lado composto de 4 palitos de sorvete.

b) Qual dessas figuras construídas com os 12 palitos tem maior medida de área: o retângulo ou o triângulo? **4. b)** O retângulo.

Capítulo

10 Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

MATT KING/GETTY IMAGES

Leia e responda no caderno. a) Resposta pessoal.

a) Pesquise, em dupla com um colega, a história do surfe. Depois, elaborem um painel com imagens e texto, organizando as informações obtidas com a pesquisa.

b) Representando por x o horário em Brasília e por y o horário em Honolulu, escreva uma equação que traduza a frase:
- A diferença de fuso horário entre Brasília e Honolulu é de 7 horas.
- A soma da hora x (Brasília) com a hora y (Honolulu) é igual a 24 horas.

c) Aplicando o método da substituição, estudado no ano anterior, resolva um sistema com as equações do item **b** e descubra o horário correspondente em Brasília e em Honolulu.

Surfista brasileiro Ítalo Ferreira desliza em uma onda na praia Ehukai, na costa norte da ilha de Oahu, Havaí (Estados Unidos da América). (Fotografia de 2019.)

b) Diferença: $x - y = 7$; soma: $x + y = 24$

c) Em Brasília: 15 h 30 min; em Honolulu: 08 h 30 min.

O Havaí é um estado americano composto de 137 ilhas e conhecido por suas belas praias, vulcões e competições internacionais de surfe. A cidade de Honolulu, situada na costa sul da ilha de Oahu, é a capital do estado e tem uma diferença de fuso horário de 7 horas em relação ao fuso horário de Brasília, que determina a hora oficial do Brasil.

Sabendo que a soma de determinado horário x em Brasília com determinado horário correspondente y em Honolulu é igual a 24 horas, como podemos determinar o horário nessas duas cidades? Conhecendo a diferença de fuso horário entre as cidades, é possível construir um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas para determinar o horário em Honolulu e o horário correspondente em Brasília nessa situação.

Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas podem ser utilizados para a resolução de problemas em diversas situações cotidianas como essa.

Capítulo 10 – Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Avançamos na Unidade Temática **Álgebra** retomando e ampliando o estudo dos sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Destacamos a representação gráfica e, com ela, classificamos e analisamos a existência e o número de soluções.

Ampliando o estudo de gráficos, trabalhamos a construção de um gráfico de colunas a partir de gráficos de setores.

Na abertura, a situação apresentada envolve sistemas de equações e fusos horários. A informação de que a soma da hora x (Brasília) com a hora y (Honolulu) é igual a 24 horas pode ser representada pela equação $x + y = 24$ (**item b**). E a informação de que a diferença de fuso horário entre Brasília e Honolulu é de 7 horas pode ser representada por $x - y = 7$ (**item b**).

Logo, o sistema obtido é:

$$\begin{cases} x + y = 24 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Da segunda equação, obtemos que $x = 7 + y$. Assim, tomando a primeira equação, temos:

$x + y = 24$

$7 + y + y = 24$

$2y = 24 - 7$

$2y = 17$

$y = 8{,}5$

Portanto o horário em Honolulu correspondente às 15 horas e 30 minutos e em Brasília são 8 horas e 30 minutos (**item c**).

1. Revisão e desenvolvimento da resolução de sistemas do 1º grau

Habilidades da BNCC: **EF08MA06** e **EF08MA08**.

Neste tópico, retomamos a resolução e elaboração de problemas que envolvem o cálculo numérico das expressões algébricas, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF08MA06), e a resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, possibilitando o desenvolvimento da habilidade (EF08MA08).

O contexto da história em quadrinhos tem como objetivo descontrair e diversificar a linguagem, auxiliando na contextualização dos conceitos apresentados.

Antes de desenvolver a situação resolvendo-a por meio de um sistema de equações do 1º grau, converse com os estudantes sobre o fato de a quantidade de peixes pescados e a massa total de peixes pescados serem grandezas não proporcionais.

Incentive-os a justificar esse fato, sendo válidas respostas como "Cada peixe tem uma massa diferente de outro."; solicite também que deem outros exemplos de grandezas que não sejam proporcionais, como a idade e a altura de uma pessoa, entre outros. Este trabalho favorece o desenvolvimento de aspectos das habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13).

Na retomada do conceito de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas, peça aos estudantes que identifiquem cada equação e as incógnitas que compõem o sistema. Proponha a eles que reescrevam o mesmo sistema apresentando as equações de forma diferente, o que mostrará a familiaridade deles com Álgebra. Uma possível resposta é:

$$\begin{cases} y - x = 3 \\ \dfrac{y}{x} = 1{,}5 \end{cases}$$

Verifique se os estudantes compreendem o que é uma solução para cada equação do sistema. Estimule-os a apresentar outras soluções possíveis para cada equação.

1 Revisão e desenvolvimento da resolução de sistemas do 1º grau

Pedro e Maria gostam de pescar. Analise o diálogo a seguir.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

- Analisando as grandezas, quantidade de peixes pescados e medida da massa total de peixes pescados, podemos dizer que elas são proporcionais? Por quê? Não, pois, por exemplo ao dobrar, triplicar ou quadruplicar a quantidade de peixes, a massa total não é duplicada, triplicada ou quadruplicada.

Considerando que Maria fez todos os cálculos corretamente, é possível determinar quantos quilogramas tem o peixe de Pedro.

Indicando por x a medida da massa, em quilograma, do peixe de Pedro, e por y a medida da massa total dos peixes de Maria, podemos escrever as seguintes equações:

$y = x + 3$ ← Maria pescou 3 kg a mais que Pedro.

$y = 1{,}5x$ ← Para cada 1 kg do que Pedro pescou, Maria pescou 1,5 kg.

Essas equações formam um **sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas**.

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 1{,}5x \end{cases}$$

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pode ter uma, nenhuma ou infinitas soluções. Se tiver solução, cada uma será um par ordenado (x, y), que é solução de cada uma das equações.

No sistema $\begin{cases} y = x + 3 \\ y = 1{,}5x \end{cases}$, a solução é o par ordenado (6, 9), pois, ao substituir x por 6 e y por 9 nas duas equações, obtemos sentenças verdadeiras:

- $9 = 6 + 3$ (sentença verdadeira)
- $9 = 1{,}5 \cdot 6$ (sentença verdadeira)

Observe que cada uma das equações do sistema tem mais de uma solução, mas o sistema formado por essas duas equações tem apenas uma solução. Por exemplo:

- (0, 3) é solução de $y = x + 3$, mas não é de $y = 1{,}5x$; logo, (0, 3) não é solução do sistema.
- (0, 0) é solução de $y = 1{,}5x$, mas não é de $y = x + 3$; logo, (0, 0) não é solução do sistema.

A seguir, vamos recordar o método da substituição de resolução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas e estudar o método da substituição e o método da adição.

Método da substituição

Em um escritório trabalham 33 pessoas. Sílvio percebeu que, se forem demitidos 3 homens e admitidas 4 mulheres, o número de homens e de mulheres passará a ser igual. Quantos homens e quantas mulheres trabalham nesse escritório?

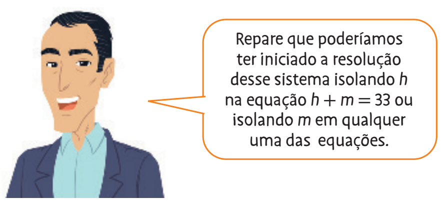

ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Indicando por h a quantidade de homens e por m a quantidade de mulheres, o sistema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} h + m = 33 \\ h - 3 = m + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h + m = 33 \\ h - m = 7 \end{cases}$$

Isolando a incógnita h na equação $h - m = 7$, temos:

$$h - m = 7$$
$$h - m + m = 7 + m$$
$$h = 7 + m$$



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Substituindo h por $(7 + m)$ na equação $h + m = 33$, determinamos o valor de m.

$$(7 + m) + m = 33$$
$$7 + 2m = 33$$
$$7 + 2m - 7 = 33 - 7$$
$$\frac{2m}{2} = \frac{26}{2}$$
$$m = 13$$

Substituindo m por 13 na equação $h = 7 + m$, determinamos o valor de h.

$$h = 7 + m$$
$$h = 7 + 13$$
$$h = 20$$

Logo, a solução do sistema é $h = 20$ e $m = 13$.

Portanto, nesse escritório trabalham 20 homens e 13 mulheres.

De maneira geral, podemos considerar que a resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pelo **método da substituição** consiste em:

- isolar uma das incógnitas de uma das equações;
- **substituir**, na outra equação, a expressão determinada, obtendo uma equação com uma única incógnita;
- resolver a equação de uma incógnita obtida e substituir o valor, em uma das equações do sistema, para obter o valor da outra incógnita.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Durante um mês, Júlia guardou em um cofre moedas de 25 e de 10 centavos. Ao abri-lo, constatou que tinha 210 moedas, em um total de R$ 35,70. Quantas moedas de cada tipo Júlia guardou?

Pense mais um pouco...: 98 moedas de 25 centavos e 112 de 10 centavos.


FOTOGRAFIAS: BANCO CENTRAL DO BRASIL

Método da substituição

Pergunte aos estudantes quais métodos conhecem para a resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas. Verifique se sabem dizer em que consiste o método da substituição.

Pergunte a eles também o que representa cada uma das equações que formam o sistema na situação apresentada.

Comente com os estudantes que convém fazer a verificação, substituindo no sistema original os valores encontrados para as incógnitas. Caso uma das igualdades não seja verdadeira, é preciso rever a resolução.

Pense mais um pouco...

Uma possível resolução é dada a seguir. Indicando por x a quantidade de moedas de 25 centavos e por y a quantidade de moedas de 10 centavos, concluímos que:

- $x + y = 210$ (quantidade total de moedas)
- $x \cdot 0{,}25 + y \cdot 0{,}10 = 35{,}70$ (quantia total de dinheiro)

Assim formamos o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 210 \\ 0{,}25x + 0{,}1y = 35{,}7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 210 - x \\ 0{,}25x + 0{,}1y = 35{,}7 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema pelo método da substituição, encontramos o valor de x substituindo y por $(210 - x)$ na equação $0{,}25x + 0{,}1y = 35{,}7$. Assim:

$$0{,}25x + 0{,}1 \cdot (210 - x) = 35{,}7$$
$$0{,}25x - 0{,}1x = 35{,}7 - 21$$
$$0{,}15x = 14{,}7$$
$$\frac{0{,}15x}{0{,}15} = \frac{14{,}7}{0{,}15}$$
$$x = 98$$

Então, substituímos x por 98 em $y = 210 - x$ e obtemos:

$$y = 210 - 98 = 112$$

Logo, Júlia guardou 98 moedas de 25 centavos e 112 moedas de 10 centavos.

Método da adição

Converse com os estudantes para avaliar se eles entenderam o que representa cada uma das equações que formam o sistema na situação apresentada.

Pergunte a eles em que consiste o método da adição para resolver sistemas de equações. Estimule-os a perceber que, neste caso e em muitos outros, precisamos determinar alguma equação equivalente a uma das apresentadas no sistema (ou a ambas) de modo que, ao adicionar membro a membro as duas equações do sistema, uma das incógnitas seja anulada. Para isso, eles devem se lembrar da seguinte propriedade de uma igualdade:

- A relação de igualdade existente entre dois termos (ou duas expressões) permanece quando se multiplica por um mesmo número não nulo cada um desses termos (ou cada uma dessas expressões).

Proponha à turma fazer a verificação das soluções encontradas.

Comente que, conforme o sistema, basta aplicar a propriedade citada em apenas uma das suas equações. Há sistemas, entretanto, nos quais é necessário aplicar a propriedade nas duas equações para conseguir anular uma das incógnitas.

Método da adição

ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Diego entrou em uma sorveteria para comprar picolés e água.

Nessa sorveteria, o preço de três picolés e uma garrafa de água é R$ 12,00.

Diego pagou R$ 15,00 por dois picolés e três garrafas de água.

Qual é o preço do picolé e da garrafa de água?

Indicando por p o preço do picolé e por g o preço da garrafa de água, o sistema a ser resolvido é:

$$\begin{cases} 3p + g = 12 \\ 2p + 3g = 15 \end{cases}$$

O método da adição consiste em adicionar membro a membro as duas equações visando obter uma nova equação que tenha apenas uma das incógnitas. Para isso, é necessário que o coeficiente de uma das incógnitas seja oposto ao coeficiente correspondente à mesma incógnita da outra equação, pois, assim, esses termos serão anulados quando adicionados.

Porém, no sistema do exemplo apresentado, as equações não satisfazem essa condição. Por isso, vamos obter um sistema equivalente a esse multiplicando por –3 ambos os membros da equação $3p + g = 12$.

$$\begin{cases} 3p + g = 12 \cdot (-3) \\ 2p + 3g = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9p - 3g = -36 \\ 2p + 3g = 15 \end{cases}$$

Adicionando membro a membro as equações, obtemos o valor de p:

$$\begin{cases} -9p - 3g = -36 \\ 2p + 3g = 15 \end{cases} \oplus$$

$$-7p = -21$$

$$\frac{-7p}{-7} = \frac{-21}{-7}$$

$$p = 3$$

Substituindo p por 3 em uma das equações, por exemplo, $3p + g = 12$, obtemos:

$$3p + g = 12$$

$$3 \cdot 3 + g = 12$$

$$9 + g = 12$$

$$9 + g - 9 = 12 - 9$$

$$g = 3$$

Logo, a solução do sistema é $p = 3$ e $g = 3$.

Portanto, o preço tanto do picolé quanto da garrafa de água é R$ 3,00.

Note que existem outros modos de começar a resolver esse sistema; um deles seria multiplicar ambos os membros da equação $3p + g = 12$ por 2 e ambos os membros da equação $2p + 3g = 15$ por –3.
Com isso, os coeficientes de p seriam opostos.

ANDRÉ VAZZIOS/ARQUIVO DA EDITORA

Observe:

$$\begin{cases} 3p + g = 12 \cdot (2) \\ 2p + 3g = 15 \cdot (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6p + 2g = 24 \\ -6p - 9g = -45 \end{cases}$$

A resolução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pelo **método da adição** consiste em:

- multiplicar, quando necessário, ambos os membros de uma (ou das duas) equações por um número conveniente, de modo que se obtenham coeficientes opostos em uma das incógnitas;
- adicionar membro a membro as duas equações, obtendo uma equação com uma única incógnita;
- resolver a equação de uma incógnita e substituir o valor obtido em uma das equações do sistema para determinar o valor da outra incógnita.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 (Saresp) Em um campeonato de futebol, os times ganham 3 pontos em cada vitória, 1 ponto por empate e 0 ponto por derrota. O time Cruzadão participou de 50 jogos e fez 54 pontos, tendo perdido 12 jogos. Chame de v o número de jogos que Cruzadão venceu; de d, o número de jogos em que foi derrotado e de e, os jogos em que houve empate.

Assinale a alternativa que mostra corretamente o sistema de equações que representa essa situação: **1.** Alternativa **b**.

a) $\begin{cases} v + e = 50 \\ 3v + 1e = 54 \end{cases}$

b) $\begin{cases} v + e + 12 = 50 \\ 3v + 1e = 54 \end{cases}$

c) $\begin{cases} v + e + d = 54 \\ 3v + e + 0d = 50 \end{cases}$

d) $\begin{cases} v + e + 0{,}12 = 50 \\ 3v + 1e = 54 \end{cases}$

2 Usando o método da substituição e da adição, resolva os sistemas a seguir e verifique a solução obtida.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 40 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$ **2. a)** (10, 5)

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 14 \\ 5x - 2y = 29 \end{cases}$ **2. b)** (5, –2)

3 Resolva mentalmente.

a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x = 2y + 1 \end{cases}$ **3. a)** (9, 4)

b) $\begin{cases} x + y = 9 \\ y = x - 5 \end{cases}$ **3. b)** (7, 2)

4 Um pai tem 20 anos a mais do que o filho. Calcule a idade de cada um, sabendo que daqui a 5 anos o pai terá o dobro da idade do filho. **4.** Pai: 35 anos; filho: 15 anos.

5 Um número tem dois algarismos. O algarismo das unidades tem 5 unidades a mais que o algarismo das dezenas. O número considerado é o triplo da soma do valor absoluto de seus algarismos. Determine esse número. **5.** O número é 27.

6 Resolva os sistemas a seguir pelo método que você julgar mais conveniente e verifique as soluções obtidas.

a) $\begin{cases} 2(x - 2) + 3y = -7 \\ 3x - 2(y - 4) = -3 \end{cases}$ **6. a)** (–3, 1)

b) $\begin{cases} 2{,}4x - 0{,}6y = 2{,}4 \\ 3{,}6x + y = 7{,}4 \end{cases}$ **6. b)** (1,5; 2)

7 Calcule a medida da área de um retângulo cujo perímetro mede 22 cm e a diferença entre a medida da base e a metade da medida da altura seja de 5 cm. **7.** 28 cm²

8 Um supermercado apresentou as seguintes ofertas:

CLÁUDIO CHIYO/ARQUIVO DA EDITORA

Nessa promoção, a quanto está sendo vendido cada bombom? **8.** R$ 2,54

9 Luís pagou uma dívida de R$ 89,00 com notas de R$ 5,00 e de R$ 2,00. Ao todo, ele usou 22 notas. Quantas notas eram de R$ 5,00 e quantas eram as notas de R$ 2,00?
9. 15 notas de R$ 5,00 e 7 notas de R$ 2,00.

10 ***Hora de criar*** – Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Cada um pensa em um par ordenado de números e escreve duas equações do 1º grau, com duas incógnitas que tenham o par imaginado como solução de cada uma das equações. Troquem entre si os sistemas formados pelas duas equações escritas para que o colega resolva o sistema por um dos métodos revistos. Desfaçam a troca para que cada um faça a verificação da resposta, resolvendo o sistema pelo outro método. **10.** Resposta pessoal.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 2** a **7** e do **exercício 9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Neste bloco de exercícios, os estudantes aplicarão as técnicas de resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas e resolverão problemas do cotidiano.

No **exercício 1**, aparentemente, a situação apresenta três incógnitas v, e e d. Porém, como é atribuído à derrota 0 ponto e é informada a quantidade de derrotas (12), a derrota d deixa de configurar uma incógnita. Assim, a adição do número de jogos que o time Cruzadão venceu (v) com o número de jogos em que houve empate (e) e o número de jogos que ele perdeu (12) resulta em 50 jogos ($v + e + 12 = 50$).

Como em cada vitória os times ganham 3 pontos e em cada empate eles ganham 1 ponto, a equação que relaciona o número de pontos obtidos pelo time Cruzadão (54) no campeonato com o número de jogos que ele venceu (v) e o número de jogos em que houve empate (e) é $3v + 1e = 54$.

Portanto a **alternativa b** mostra corretamente o sistema de equações que representa a situação descrita.

No **exercício 3**, peça aos estudantes que expliquem a um colega seu raciocínio para resolver mentalmente os sistemas.

Apresentamos uma possível resolução para o **exercício 8**. Representando o preço do chocolate por c e o do bombom por b, a leitura da imagem leva ao sistema de equações:

$$\begin{cases} 3c + 2b = 15{,}70 \\ 2c + 3b = 14{,}70 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por –2 e a 2ª por 3, obtemos:

$$\begin{cases} -6c - 4b = -31{,}40 \\ 6c + 9b = 44{,}10 \end{cases}$$

Adicionando, membro a membro, as equações, obtemos:

$5b = 12{,}70$ ou $b = 2{,}54$

Logo, cada bombom custa R$ 2,54.

Destacamos também o **exercício 10**, no qual os estudantes, em duplas, elaboram sistemas partindo da solução, trocam com o colega, resolvem e depois avaliam e corrigem a resolução do outro. Oriente-os para que os coeficientes das equações não sejam múltiplos uns dos outros.

Para saber mais

Essa atividade possibilita desenvolver as habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13), pois os estudantes podem analisar o gráfico de duas grandezas inversamente proporcionais. Para explorar o contexto, incentive-os a compor um quadro relacionando a velocidade e o tempo do percurso. Por exemplo:

Tempo (t) em hora	Velocidade (v) em km/h
1	200
2	100
4	50
8	25
16	12,5

Explore que, ao dobrar o tempo (de 1 h para 2 h ou de 8 h para 16 h, por exemplo) a velocidade cai à metade (de 200 km/h para 100 km/h ou de 25 km/h para 12,5 km/h, respectivamente).

Para facilitar, oriente-os a determinar a distância do percurso que será percorrido pelos personagens; como a uma velocidade média de 50 km/h são necessárias 4 h de percurso, então, a distância a ser percorrida é 200 km. Assim, se v é a velocidade média e t é o tempo, respectivamente, em km/h e em hora, então:

$$v = \frac{200}{t}$$

Pergunte aos estudantes se t pode assumir valores negativos ou nulo; espera-se que percebam que não, pois no contexto o tempo deve ser positivo e maior do que zero.

Incentive e oriente os estudantes a representar em um plano cartesiano os pontos obtidos. Sugerimos deixar que eles se expressem sobre o gráfico verificando, por exemplo, se compreendem que, neste caso, o gráfico não será uma reta. Para ampliar a compreensão, indicamos que seja feita uma atividade utilizando *softwares* de geometria dinâmica para obter o gráfico que representa a relação entre v e t; lembre os estudantes de limitar os valores de t ao usar o *software*, isto é, de que $t > 0$. No **Agora é com você!**, para o **item a**, espera-se que os estudantes criem problemas que possam ser expressos algebricamente por:

- $y = \frac{a}{x}$; com $x \neq 0$; a um número real.
- $h = a \cdot z$; com a um número real.

Para os **item b** e **c**, oriente-os a produzir gráficos como os apresentados nessa página. Espera-se que percebam que os gráficos envolvendo grandezas diretamente proporcionais apresentam retas que passam pela origem e, ainda, que os gráficos que envolvem grandezas inversamente proporcionais apresentam uma "curva". Para este tipo de gráfico, sugerimos trabalhar com softwares de geometria dinâmica ou representar alguns na lousa para os estudantes os analisarem.

PARA SABER MAIS

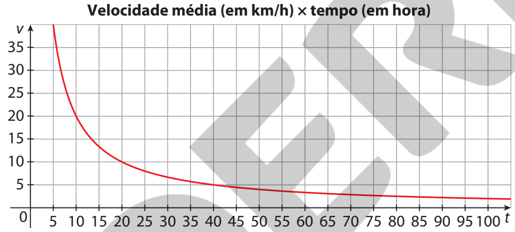
Grandezas proporcionais

Reúna-se com um colega e leiam o diálogo entre Ricardo e Cristina.

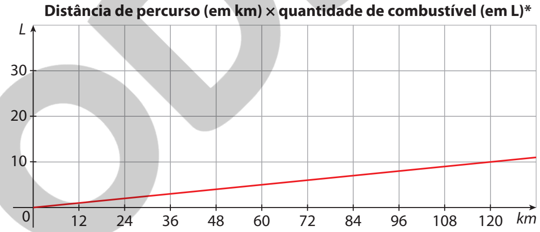
Quando duas grandezas estão relacionadas de maneira que a variação de uma implica na variação da outra na mesma razão, dizemos que elas são **grandezas diretamente proporcionais**. Se a variação de uma implicar na variação da outra a uma razão inversa, dizemos que elas são **grandezas inversamente proporcionais**.

Em relação à situação do diálogo entre Ricardo e Cristina, observem os gráficos construídos com ferramentas de um *software* de Geometria dinâmica.

Velocidade média (em km/h) × tempo (em hora)



Distância de percurso (em km) × quantidade de combustível (em L)*



*Considerando um consumo médio de 12 km/L.

Agora é com você! FAÇAM AS ATIVIDADES NO CADERNO

Veja as respostas neste *Manual*.

a) Elaborem dois problemas: um envolvendo grandezas diretamente proporcionais e outro envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

b) Em uma folha de papel quadriculado, façam um esboço do gráfico que representa a situação de cada problema elaborado.

c) Em um *software* de Geometria dinâmica, obtenham cada gráfico e os comparem com os apresentados nessa seção. O que os gráficos têm em comum e o que têm de diferente?

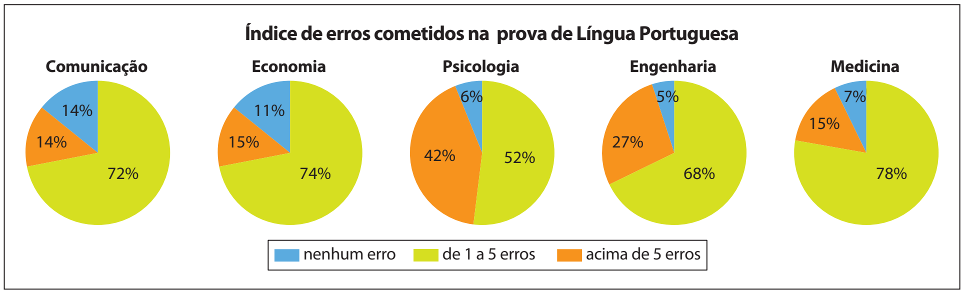
218

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Composição de um gráfico de colunas formadas a partir de outros gráficos

Estudantes dos cursos de Comunicação, Economia, Psicologia, Engenharia e Medicina fizeram uma prova de Língua Portuguesa para descobrir quais eram as principais dificuldades nessa área.

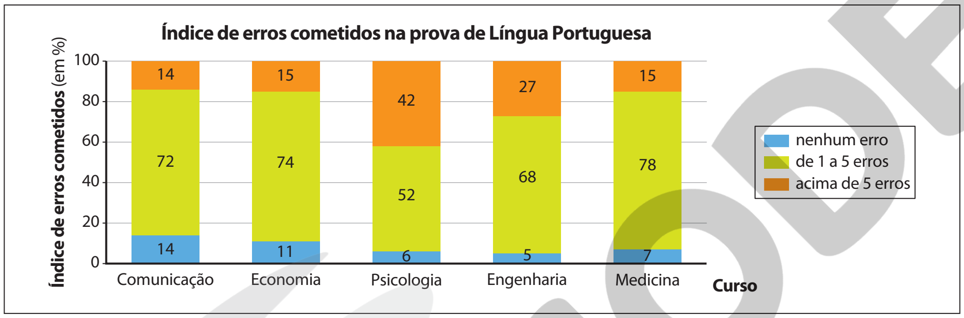
Após a correção da prova, foi feito um levantamento do índice de erros cometidos, que foram representados nos gráficos a seguir.



Dados obtidos pela faculdade.

Esses dados também podem ser organizados em um único gráfico de colunas compostas. Para isso, haverá uma coluna para cada curso no eixo horizontal; no eixo vertical, serão indicados os intervalos de erros em porcentagem e, por isso, em uma escala de 0 a 100.

Observe atentamente o gráfico e compare-o com os anteriores.



Dados obtidos pela faculdade.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. b) É possível usar tanto os gráficos de setores como o gráfico de colunas, porém o gráfico de colunas é mais sintético e possibilita uma comparação visual mais rápida.

1 Com base nos dados apresentados, responda:

a) Os estudantes de que curso tiveram maior quantidade de provas sem erros? E quais tiveram menor quantidade? **1. a)** Curso de Comunicação; curso de Engenharia.

b) Que gráfico você usou para responder ao item **a**? Justifique sua resposta.

2. Construção de gráfico.

2 Considerando que, em todos os cursos, o mesmo número de estudantes foi submetido a essa prova, faça um novo gráfico de setores, por meio das médias aritméticas de cada categoria indicada pela cor na legenda, que mostre de modo geral (não por curso) os índices de erros dessa prova.

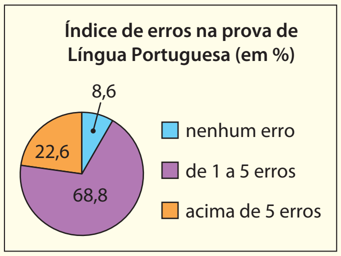
Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF08MA23**.

Ampliando a compreensão da leitura de gráficos, a seção apresenta a construção de um gráfico de colunas compostas de dados obtidos de outros gráficos, no caso, gráficos de setores, possibilitando, assim, o desenvolvimento da habilidade (EF08MA23).

Peça aos estudantes que pesquisem exemplos de gráficos utilizados em diferentes meios de comunicação para analisarem e comporem os mesmos dados em gráficos de colunas compostas.

Para resolver a **atividade 2** do **Agora quem trabalha é você!**, os estudantes devem primeiro calcular as médias de cada um dos índices de erros (nenhum erro, de 1 a 5 erros e acima de 5 erros) considerando os cinco cursos. Como em cada curso há o mesmo número de estudantes, é possível adicionar diretamente as porcentagens para cada um dos três índices de erros e dividir o total obtido por 5 (número de colunas ou número de cursos). Com as médias aritméticas dos valores de cada categoria descrita na legenda, é construído o gráfico de setores solicitado.



Dados obtidos pela faculdade.

2. Representações gráficas

Habilidades da BNCC:
EF08MA07 e **EF08MA08**.

Neste tópico, avançamos na representação de uma equação do 1º grau com duas incógnitas, agora utilizando o plano cartesiano e relacionando suas soluções a retas, ou seja, cada solução da equação (par ordenado) corresponde a um ponto da reta; os infinitos pares ordenados obtidos como solução correspondem aos infinitos pontos de uma mesma reta, o que favorece o desenvolvimento da habilidade (EF08MA07). A resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas também passa a ser gráfica e possibilita o desenvolvimento da habilidade (EF08MA08). Duas equações correspondem a duas retas do plano cartesiano que podem ser concorrentes, paralelas ou coincidentes.

Retome o trabalho inicial feito com os estudantes, quando foi proposto a eles buscar soluções a cada equação do sistema trabalhado. Faça o mesmo neste momento, de modo que eles percebam que uma equação com duas incógnitas tem infinitas soluções. Ressalte também que os pares ordenados que são soluções da equação $x + y = 3$, por exemplo, podem ser representados por $(x, 3 - x)$ ou $(3 - y, y)$.

Trabalhe a representação dos pares ordenados no plano cartesiano. É importante que os estudantes reconheçam e localizem pontos. Proponha a eles, por exemplo, uma brincadeira de batalha naval em grupo.

2 Representações gráficas

Soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas

Dada uma equação do 1º grau com duas incógnitas, existem infinitos pares de números que são soluções dessa equação.

Como exemplo, vamos considerar a equação $x + y = 3$. Como $x + y = 3$ e $y = 3 - x$ são equações equivalentes, os pares ordenados que satisfazem a equação considerada são da forma:

$$(x, \underbrace{3 - x}_{y})$$

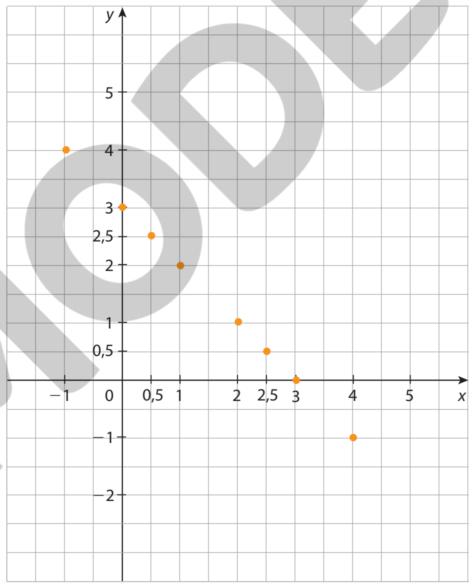
Para determinar alguns desses pares, **atribuímos a *x* qualquer valor e determinamos o valor correspondente de *y***. O quadro a seguir mostra alguns desses pares.

x	–1	0	0,5	1	2	2,5	3	4
$y = 3 - x$	4	3	2,5	2	1	0,5	0	–1
Par obtido	(–1, 4)	(0, 3)	(0,5; 2,5)	(1, 2)	(2, 1)	(2,5; 0,5)	(3, 0)	(4, –1)

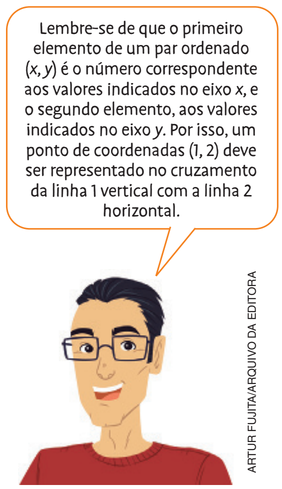
Os pares ordenados (–1, 4), (0, 3), (0,5; 2,5), (1, 2), (2, 1), (2,5; 0,5), (3, 0) e (4, –1) são algumas soluções da equação $x + y = 3$.

Vamos representar esses pares ordenados em um plano cartesiano.

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

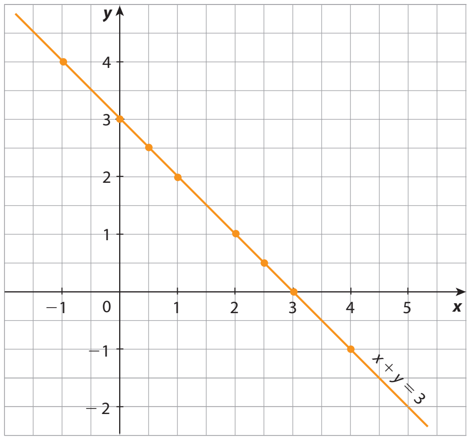


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

- A reta que contém esses pontos é a solução gráfica da equação $x + y = 3$.
- Qualquer ponto que pertença a essa reta será solução da equação $x + y = 3$.
- Nenhum ponto fora dessa reta é solução da equação $x + y = 3$.

Sabemos que por dois pontos passa uma única reta; então, para representar graficamente as soluções de uma equação do 1º grau com duas incógnitas, é suficiente:

- determinar dois pontos que sejam solução da equação;
- localizar esses pontos no plano cartesiano;
- traçar a reta determinada por esses pontos.

Espera-se que os estudantes indiquem que podem representar os pontos (0, 0) e (2, 6), por exemplo, e traçar a reta que liga esses dois pontos. Incentive-os a representar esse gráfico e discutirem sobre a proporcionalidade envolvida na situação.

- Considere que o salário de uma pessoa que planta feijão dependa diretamente da quantidade de feijões, em quilograma, que ela vende em um mês. Se ela ganha R$ 3,00 por quilograma de feijão vendido, como poderíamos representar essa situação em um gráfico?

Acompanhe outro exemplo de representação gráfica de uma equação:

Vamos representar graficamente soluções da equação $2x + y = 5$.

Para isso, determinamos dois pares ordenados que sejam solução dessa equação.

- Para $x = 1$, temos:

  $2 \cdot 1 + y = 5$

  $y = 3$

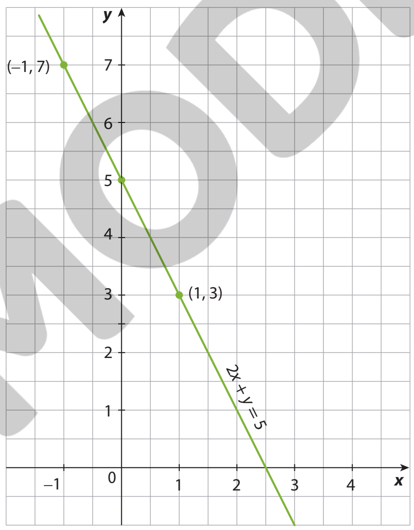
  Logo, obtemos o par (1, 3).

- Para $x = -1$, temos:

  $2 \cdot (-1) + y = 5$

  $y = 7$

  Logo, obtemos o par (–1, 7).



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, os pares (1, 3) e (–1, 7) são soluções da equação $2x + y = 5$. Em seguida, localizamos no plano cartesiano os pontos que representam esses pares ordenados e traçamos a reta que os contém.

A reta obtida representa graficamente as soluções da equação $2x + y = 5$.

Representações gráficas

Em concordância com a BNCC, o conjunto dos números reais é objeto de estudo contido no livro do 9º ano desta coleção; portanto, se julgar conveniente, sugerimos utilizar *softwares* de geometria dinâmica como ferramentas auxiliares para representar as equações sem a necessidade de justificar que, em princípio, a variável independente pode assumir qualquer valor real.

Explore os exemplos apresentados. Se julgar necessário, reproduza-os na lousa para ampliar a discussão com a turma. Retome o fato de que dois pontos determinam uma única reta, permitindo que eles se apropriem do fato de que é suficiente representar apenas dois pontos cujas coordenadas satisfazem a equação dada.

Mostre aos estudantes que outros pares ordenados podem ser escolhidos, pois, desde que satisfaçam a equação, eles pertencem à mesma reta e a determinam.

Para desenvolver as habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13), aborde o fato de que a situação proposta para ser discutida oralmente é um exemplo de variação diretamente proporcional e pode ser generalizada por $y = 3x$, em que y é o salário em reais e x é o total de feijão, em quilograma. Incentive os estudantes a darem outros exemplos de situações em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais e proponha que comparem os gráficos nessas situações, a fim de que percebam que são da forma $y = ax$, em que a é um número real diferente de 0. O gráfico será sempre uma reta que passa pela origem.

Solicite que escolham, cada um, outro valor para substituir x na equação $2x + y = 5$, obtenham o valor correspondente de y, localizem o ponto de coordenadas (x, y) no plano cartesiano e constatem que ele é um ponto da reta representada por essa equação.

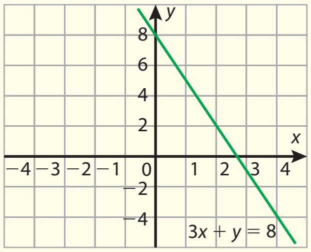
Em seguida, explore a resolução de sistemas de equações do 1º grau, conduzindo os estudantes a perceberem que a solução do sistema é dada pelas coordenadas do ponto de intersecção das retas que representam as equações do sistema.

Exercícios propostos

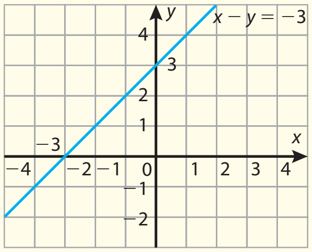
As resoluções dos **exercícios 13** e **14** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Para o **exercício 11**, temos as seguintes representações gráficas.

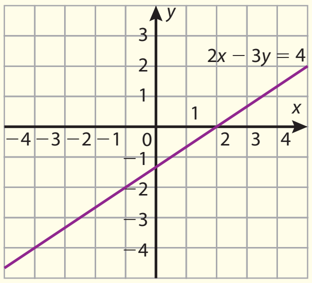
a)



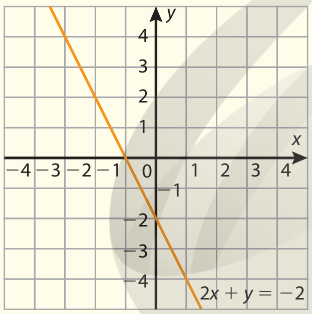
b)



c)

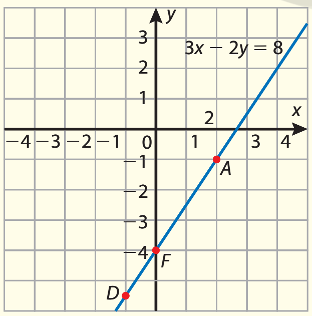


d)



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Para o **exercício 12**, a representação dos pontos e da reta no plano cartesiano é dada a seguir.



Solução de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas

Agora, vamos considerar o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ formado pelas equações $x + y = 3$ e $2x + y = 5$.

Resolvendo-o por qualquer um dos métodos estudados, obtemos como solução o par ordenado (2, 1). Podemos obter graficamente essa solução. Para isso, é necessário traçar em um mesmo plano cartesiano as duas retas que representam as soluções das equações que formam o sistema.

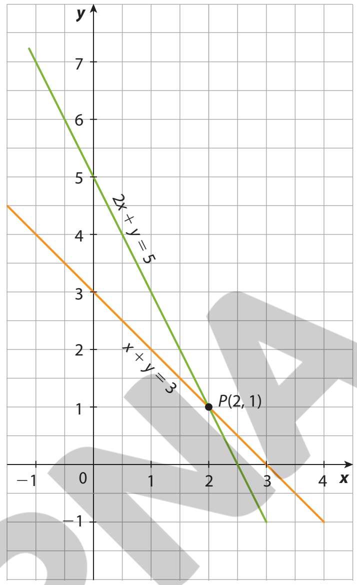
Como, para traçar uma reta, basta conhecer dois de seus pontos, atribuímos dois valores a uma das incógnitas e calculamos os valores correspondentes da outra. Assim, obtemos pares ordenados que são coordenadas de dois dos pontos da reta.

$x + y = 3$

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$2x + y = 5$

x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
2,5	0	(2,5; 0)



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que, nesse plano cartesiano, traçamos as retas que representam soluções das equações que formam o sistema. Como o ponto *P*, e só ele, pertence às duas retas, suas coordenadas satisfazem as duas equações; logo, o par ordenado (2, 1), intersecção das duas retas, é a solução do sistema.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11 Usando papel quadriculado, represente graficamente as soluções de cada equação a seguir.

a) $3x + y = 8$ b) $x - y = -3$ c) $2x - 3y = 4$ d) $2x + y = -2$

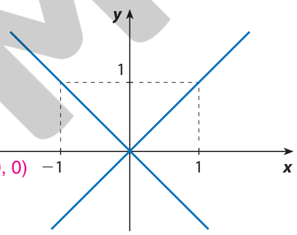
11. Construção de gráficos.

12 Dos pontos $A(2, -1)$, $B(-2, 1)$, $C\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$, $D\left(-1, -\frac{11}{2}\right)$, $E(0, 4)$ e $F(0, -4)$, quais pertencem à reta cuja equação é $3x - 2y = 8$? Localize esses pontos em um plano cartesiano e trace essa reta.

12. Pontos *A*, *D* e *F*. Construção de gráfico.

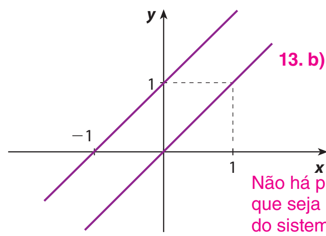
13 ***Hora de criar*** – Crie um sistema de equações correspondente a cada representação gráfica. Depois, discuta com um colega qual par ordenado seria solução de cada sistema.

a)



13. a) Resposta possível:
$\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$
Solução: (0, 0)

b)



13. b) Resposta possível:
$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$
Não há par ordenado que seja solução do sistema.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

14 Usando uma folha de papel quadriculado, resolva graficamente os sistemas a seguir.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}$ **14. a)** (3, 4)

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ **14. b)** (3, –1)

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ **14. c)** (–3, 2)

d) $\begin{cases} x + y = 0 \\ -3x + y = 4 \end{cases}$ **14. d)** (–1, 1)

PARA SABER MAIS

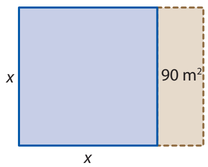
Raiz quadrada ou diferença de dois quadrados?

Até agora trabalhamos com a resolução de equações do 1º grau. Porém, aplicando o que já estudamos sobre o conceito de raiz quadrada, podemos resolver algumas equações do 2º grau.

Vamos ajudar Luís a resolver o seu problema.

Luís quer montar uma granja em seu terreno de 90 m². Mas a legislação do município exige uma medida de área mínima de 414 m² para essa atividade. Para ter exatamente essa medida de área mínima, o corretor de imóveis ofereceu a Luís um terreno quadrado, que faz divisa com o dele, cujo lado mede *x* metros. Luís quer saber qual é a metragem do terreno oferecido pelo corretor. Vamos calcular a medida *x*, em metro, do lado do terreno em formato quadrangular.

Considerando a figura a seguir como uma representação do novo terreno de Luís, temos:



$x^2 + 90 = 414$

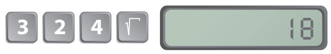
$x^2 = 414 - 90$

$x^2 = 324$

$x = \pm\sqrt{324}$

$x = \pm 18$

Usando a calculadora:



Como a medida do lado deve ser um número positivo, o lado do terreno mede 18 m.

Outra maneira de resolver a equação do problema de Luís é aplicando o produto notável "diferença de dois quadrados".

$x^2 + 90 = 414$

$x^2 + 90 - 414 = 0$

$x^2 - 324 = 0$

$x^2 - 18^2 = 0$

$(x - 18) \cdot (x + 18) = 0$ (Fatorando a diferença de dois quadrados)

Um produto é zero quando um de seus fatores for zero. Então:

$x - 18 = 0 \Rightarrow x = 18$ ou $x + 18 = 0 \Rightarrow x = -18$

Como a medida do lado deve ser um número positivo, o lado do terreno mede 18 m.

Agora é com você!

FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

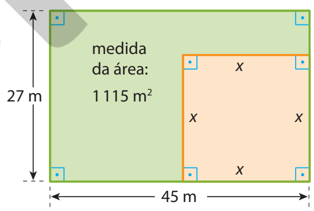
Para saber mais:
a) Resposta possível: $1\,115 = 45 \cdot 27 - x^2$

Considere a figura e faça o que se pede.

a) Escreva uma equação que relacione a medida da área da figura verde com a medida da área total.

b) Determine as raízes dessa equação. **b)** $x_1 = -10$ e $x_2 = 10$

c) Determine o valor de *x*, correspondente à medida do lado do quadrado. **c)** $x = 10$ m



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Para saber mais

A seção trabalha o tema "Raiz quadrada ou diferença de dois quadrados?" para resolver equações do 2º grau dos tipos $ax^2 = b$ e $x^2 - b^2 = 0$, que possibilitam utilizar a habilidade (EF08MA09).

Reproduza os exemplos na lousa para que os estudantes acompanhem cada etapa. Explore também a figura.

A seguir, apresentamos a resolução dos itens propostos no **Agora é com você!**.

a) A figura composta da região verde com a região quadrada é um retângulo de dimensões que medem 27 m por 45 m. Desse modo, a medida da área dessa figura pode ser dada pela soma das medidas das áreas das regiões que a compõem.

$A_{figura} = A_{figura\ verde} + A_{quadrado}$

$A_{figura\ verde} = A_{figura} - A_{quadrado}$

$A_{figura\ verde} = 27 \cdot 45 - x^2$

$1\,115 = 27 \cdot 45 - x^2$

$1\,115 = 1\,215 - x^2$

b) Podemos resolver desta maneira:

$1\,115 = 1\,215 - x^2$

$x^2 = 1\,215 - 1\,115$

$x^2 = 100$

$x = \pm\sqrt{100}$

$x = \pm 10$

Logo, as raízes da equação são 10 ou –10. No entanto, considerando a situação proposta, *x* é a medida do lado de um quadrado, ou seja, *x* não pode assumir valores negativos.

c) Pelo exposto no item anterior, o lado do quadrado é 10 m.

3. Classificação de um sistema de equações

Habilidades da BNCC: **EF08MA06**, **EF08MA07** e **EF08MA08**.

Dando continuidade ao desenvolvimento das habilidades (EF08MA06), (EF08MA07) e (EF08MA08), neste tópico amplia-se o trabalho com a representação gráfica das soluções de equações do 1º grau no plano cartesiano (retas) e de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, agora com a classificação dos sistemas vinculada à posição relativa entre as duas retas: concorrentes, paralelas ou coincidentes.

Para tratar da classificação de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas de acordo com o número de soluções desse sistema, ressalte que:

- Se o sistema tem uma única solução, ele é um **sistema possível e determinado**. Nesse caso, ele é associado a duas **retas concorrentes** cujas coordenadas do ponto de intersecção são a solução do sistema.
- Se o sistema não tem solução, o que significa que não há solução comum às duas equações do sistema, ele é um **sistema impossível**. Nesse caso, ele é associado a duas **retas paralelas** (que não têm pontos em comum).
- Se o sistema é possível, mas é indeterminado, ou seja, tem infinitas soluções, ele é um **sistema possível e indeterminado**. Nesse caso, o sistema é associado a duas **retas coincidentes** (que têm todos os pontos em comum).

Trabalhe o exemplo dado, que se refere a um sistema determinado. Peça aos estudantes que verifiquem que as coordenadas do ponto de intersecção $P(5, 2)$ das duas retas concorrentes satisfazem as duas equações do sistema.

3 Classificação de um sistema de equações

Um sistema de equações, conforme a quantidade de soluções, pode ser classificado em **determinado**, **impossível** ou **indeterminado**.

Pela resolução gráfica, fica mais simples entender a classificação dada a um sistema. No entanto, nem sempre é possível chegar à solução exata, quando existe, do sistema por esse método.

Sistema determinado

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **determinado** quando apresenta **uma única solução**. Acompanhe um exemplo.

Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

- **Resolução algébrica**

Pelo método da adição, temos:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \text{Adicionando}$$

$$2x + 0 = 10$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{10}{2}$$

$$x = 5$$

Substituindo x por 5 na equação $x + y = 7$, temos:

$$x + y = 7$$
$$5 + y = 7$$
$$y = 7 - 5$$
$$y = 2$$

Logo, o par (5, 2) é a solução desse sistema.

- **Resolução gráfica**

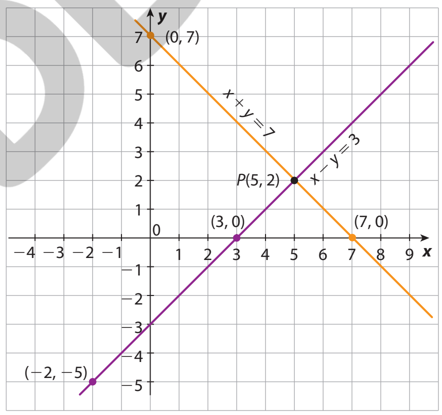
Vamos construir em um mesmo plano cartesiano as retas que representam as soluções gráficas de cada equação.

$x + y = 7$

x	*y*	*(x, y)*
7	0	(7, 0)
0	7	(0, 7)

$x - y = 3$

x	*y*	*(x, y)*
3	0	(3, 0)
–2	–5	(–2, –5)



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que:

- as retas são concorrentes no ponto P;
- as coordenadas do ponto P determinam o par ordenado (5, 2), que é a única solução do sistema.

Se um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **determinado**, então as retas que representam as soluções das duas equações no plano cartesiano são **retas concorrentes**.

Sistema impossível

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **impossível** quando **não existe par ordenado que seja solução** das duas equações simultaneamente. Acompanhe um exemplo.

Vamos resolver o sistema: $\begin{cases} 2x + 6y = 10 \\ x + 3y = -1 \end{cases}$

- **Resolução algébrica**

Vamos resolver o sistema pelo método da substituição. Isolando x em $x + 3y = -1$, temos:

$$x = -1 - 3y$$

Substituindo x por $-1 - 3y$ em $2x + 6y = 10$, temos:

$$2(-1 - 3y) + 6y = 10$$
$$-2 - 6y + 6y = 10$$
$$-6y + 6y = 10 + 2$$
$$0y = 12$$

Não existe valor de y de modo que $0y = 12$. Portanto, não existe um par (x, y) que satisfaça as duas equações. Dizemos, então, que o sistema é impossível.

- **Resolução gráfica**

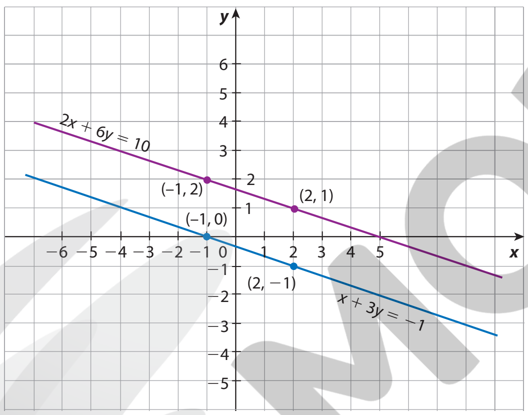
Vamos construir, em um mesmo plano cartesiano, as retas que representam as soluções gráficas de cada equação.

$2x + 6y = 10$

x	**y**	**(x, y)**
–1	2	(–1, 2)
2	1	(2, 1)

$x + 3y = -1$

x	**y**	**(x, y)**
–1	0	(–1, 0)
2	–1	(2, –1)



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que:

- as retas são distintas e paralelas;
- não existe par ordenado que seja solução do sistema.

Se um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **impossível**, então as retas que representam as soluções das duas equações no plano cartesiano são **retas paralelas**.

Sistema impossível

Nesta página, tratamos do sistema impossível. Isso significa que não há solução comum entre as duas equações que o compõem; portanto, não pode haver ponto comum às duas retas, ou seja, as retas que retratam essa situação são retas paralelas.

Ressalte à turma que, na resolução algébrica de um sistema que não tem solução, ocorrerá alguma igualdade falsa, como é o caso de $0y = 12$, o que gera $0 = 12$ (falso).

Para ampliar, proponha aos estudantes que, em duplas, criem sistemas impossíveis. Depois, cada dupla apresenta para a turma o seu sistema e sua resolução na lousa.

Peça aos estudantes que verifiquem, no sistema usado como exemplo, se há algum número multiplicando o 1º membro ($a_1x + b_1y$) de uma das equações que resulta no 1º membro ($a_2x + b_2y$) da outra equação. E, depois, se há um número que, multiplicado pelo 2º membro da 1ª equação (c_1), resulta no 2º membro da outra equação (c_2). Por fim, peça a eles que verifiquem se esses fatores obtidos são iguais. Espera-se que concluam que não, não são iguais. Destacamos que, para realizar essas comparações, é conveniente que as equações estejam na forma $ax + by = c$, com a, b e c números reais.

Sistema indeterminado

Algebricamente, ao resolver um sistema indeterminado, aparecerá uma igualdade sempre verdadeira, independentemente dos valores atribuídos à incógnita, como é o caso de $0y = 0$, o que gera $0 = 0$ (sempre verdadeira, qualquer que seja y).

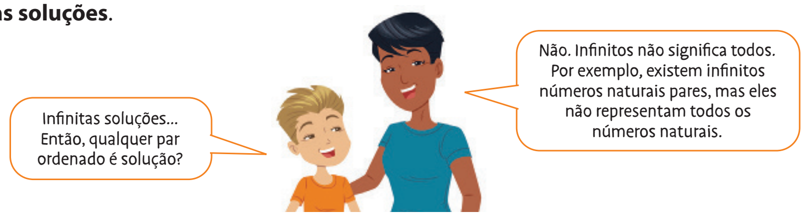
Nesses casos, a solução é dada de maneira genérica por um par ordenado que depende de uma das incógnitas, que será uma variável. Dependendo dos valores atribuídos a essa variável, obtemos soluções distintas para o sistema.

Comente com a turma que a representação gráfica de um sistema possibilita sua resolução graficamente, assim como a sua classificação em sistema determinado, sistema indeterminado ou sistema impossível.

Peça aos estudantes que verifiquem, no sistema usado como exemplo, se há um número que, multiplicado pelo 1º membro $(a_1x + b_1y)$ de uma das equações, resulta no 1º membro $(a_2x + b_2y)$ da outra equação. E, depois, se há um número que, multiplicado pelo 2º membro da 1ª equação (c_1), resulta no 2º membro da outra equação (c_2). Por fim, peça a eles que verifiquem se esses fatores obtidos são iguais. Espera-se que concluam que sim, são iguais.

Sistema indeterminado

Um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **indeterminado** quando tem **infinitas soluções**.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Como exemplo, vamos resolver o sistema: $\begin{cases} 2x + 6y = 8 \\ x + 3y = 4 \end{cases}$

- **Resolução algébrica**

Aplicando o método da substituição, isolamos x em $x + 3y = 4$. Assim: $x = 4 - 3y$

Substituindo x por $4 - 3y$ em $2x + 6y = 8$, temos:

$$2 \cdot (4 - 3y) + 6y = 8$$
$$8 - 6y + 6y = 8$$
$$-6y + 6y = 8 - 8$$
$$0y = 0$$

Como qualquer número multiplicado por zero é igual a zero, existem infinitos valores de y, de modo que $0y = 0$. O sistema apresenta infinitas soluções.

A seguir, são apresentados alguns dos infinitos pares (x, y) que verificam as duas equações do sistema dado.

Em $x = 4 - 3y$, atribuindo a y, por exemplo, 1, 2 e 3, temos, para x, os valores 1, –2 e –5.

a) (1, 1)

Na primeira equação, temos:
$2x + 6y = 8$
$2 \cdot (1) + 6 \cdot (1) = 8$
$2 + 6 = 8$
$8 = 8$ (verdadeiro)

Na segunda equação, temos:
$x + 3y = 4$
$1 + 3 \cdot (1) = 4$
$1 + 3 = 4$
$4 = 4$ (verdadeiro)

b) (–2, 2)

Na primeira equação, temos:
$2x + 6y = 8$
$2 \cdot (-2) + 6 \cdot (2) = 8$
$-4 + 12 = 8$
$8 = 8$ (verdadeiro)

Na segunda equação, temos:
$x + 3y = 4$
$(-2) + 3 \cdot (2) = 4$
$-2 + 6 = 4$
$4 = 4$ (verdadeiro)

c) (–5, 3)

Na primeira equação, temos:
$2x + 6y = 8$
$2 \cdot (-5) + 6 \cdot (3) = 8$
$-10 + 18 = 8$
$8 = 8$ (verdadeiro)

Na segunda equação, temos:
$x + 3y = 4$
$(-5) + 3 \cdot (3) = 4$
$-5 + 9 = 4$
$4 = 4$ (verdadeiro)

Os pares (1, 1), (–2, 2) e (–5, 3) são algumas das infinitas soluções do sistema.

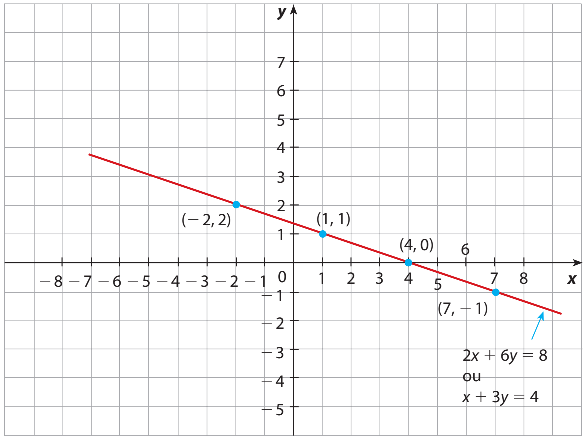
- **Resolução gráfica**

$2x + 6y = 8$

x	y	(x, y)
1	1	(1, 1)
4	0	(4, 0)

$x + 3y = 4$

x	y	(x, y)
–2	2	(–2, 2)
7	–1	(7, –1)



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe que:

- as retas são coincidentes;
- existem infinitos pontos cujas coordenadas são soluções do sistema.

Se um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é **indeterminado**, as retas que representam as soluções das duas equações no plano cartesiano são **retas coincidentes**.

Resumindo:

Sistema determinado: tem uma única solução e as retas que representam as soluções das equações do sistema são concorrentes.

Sistema impossível: não tem solução e as retas que representam as soluções das equações do sistema são paralelas.

Sistema indeterminado: tem infinitas soluções e as retas que representam as soluções das equações do sistema são coincidentes.

15. a) (4, 3); sistema determinado.
15. b) Sistema impossível.
15. c) (–2, 4); sistema determinado.
15. d) Sistema indeterminado.
15. e) Sistema impossível.
15. f) Sistema indeterminado.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

15 Resolva graficamente os sistemas a seguir, usando uma folha de papel quadriculado. Em seguida, classifique-os em determinado, indeterminado ou impossível.

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + y = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$

16 Acompanhe o diálogo entre João e Pedro.

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Quantas figurinhas tem cada um?

16. Pedro tem 300 figurinhas; João, 420.

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 15** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Para o **exercício 16**, apresentamos a seguir uma possível resolução.

Considerando a quantidade de figurinhas de Pedro x e a quantidade de figurinhas de João y, pela informação de João, temos:

$y + \frac{1}{5}x = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{5}x\right)$

Pela informação de Pedro, temos:

$y - 60 = x + 60$

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$\begin{cases} y + \frac{x}{5} = 2\left(\frac{4x}{5}\right) \\ y - 60 = x + 60 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 5y - 7x = 0 \\ y - x = 120 \end{cases}$

Multiplicando a equação $y - x = 120$ por –7, temos:

$\begin{cases} 5y - 7x = 0 \\ -7y + 7x = -840 \end{cases}$

Então:

$-2y = -840$

$\frac{-2y}{-2} = \frac{-840}{-2}$

$y = 420$

Substituindo y por 420 em $y - x = 120$, obtemos:

$420 - x = 120$

$420 - 120 = x$

$x = 300$

Portanto, Pedro tem 300 figurinhas e João tem 420 figurinhas.

Solicite aos estudantes que validem a solução do problema substituindo, nas falas de João e de Pedro, os valores obtidos e efetuando os cálculos descritos.

Trabalhando a informação

Habilidades da BNCC: **EF08MA23** e **EF08MA26**.

Esta seção apresenta o Censo Demográfico e discute sua importância, distinguindo pesquisas censitárias de pesquisas por amostragem.

Ao propor aos estudantes que pesquisem a diferença entre pesquisa censitária e pesquisa amostral, a **atividade 1** do **Agora quem trabalha é você!** favorece o desenvolvimento da habilidade (EF08MA26). Peça aos estudantes que citem situações em que as pesquisas amostrais são mais adequadas que as pesquisas censitárias.

Na **atividade 3**, ao organizar as informações coletadas em tabelas e gráficos, os estudantes devem avaliar a adequação dos diferentes tipos de gráfico que conhecem para representar o conjunto de dados de sua pesquisa, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF08MA23).

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Censo Demográfico

A primeira contagem da população brasileira foi realizada em 1872, ainda durante o Império, mas foi a partir de 1890, já sob a República, que os censos se tornaram decenais. O Brasil mantém um excelente retrospecto dos censos regulares e inovadores; foi, por exemplo, o primeiro país a incluir o tema fecundidade e o único da América Latina a colher informações sobre renda.

Os Censos Demográficos são a única forma de informação sobre a situação de vida da população em cada um dos municípios e localidades do País. As demais pesquisas domiciliares são levantamentos por amostragem, que não são representativas para todos esses níveis geográficos.

Fonte: INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. IBGE – População: censo demográfico. **Comitê de Estatísticas Sociais**. Rio de Janeiro: IBGE, [2021?]. Disponível em: https://ces.ibge.gov.br/home-ces?catid=0&id=1146#:~:text=A%20coleta%20do%20Censo%20Demogr%C3%A1fico,o%20m%C3%A1ximo%20de%20informa%C3%A7%C3%B5es%20%C3%BAteis. Acesso em: 13 jul. 2022.

Diferentes características da população são avaliadas no Censo Demográfico, por exemplo, questões relacionas a saúde, moradia, trabalho, educação e raça.

A cada Censo, novas características populacionais podem ser acrescentadas, por exemplo, até o Censo 2010, a população que se considera quilombola não era identificada, mas perguntas sobre isso passaram a ser foco das discussões e devem ser incluídas nos próximos censos. O Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) não tem uma estimativa dessa população, mas calcula que o Brasil tenha 5 972 localidades quilombolas, divididas em 1 672 municípios brasileiros.

CADU DE CASTRO/PULSAR IMAGENS

Vista de *drone* de casas da comunidade quilombola de Mangabeira, na margem do Rio Tocantins em Mocajuba, Pará. (Fotografia de 2022.)

2. Segundo a Secretaria Especial do Desenvolvimento Social, do governo federal, as comunidades quilombolas são grupos com identidade cultural própria e se formaram por meio de um processo histórico que começou nos tempos da escravidão no Brasil. Elas simbolizam a resistência a diferentes formas de dominação. Essas comunidades mantêm forte ligação com sua história e trajetória, preservando costumes e cultura trazidos por seus antepassados. Sobre as características atuais dessas comunidades, solicite aos estudantes que pesquisem em *sites* governamentais para obter as informações e compartilhar com os colegas.

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. a) Na pesquisa censitária, consideramos todos os elementos de uma população, já na amostral, consideramos uma parcela representativa da população.

1 Faça uma pesquisa sobre o Censo Demográfico realizado no Brasil pelo IBGE e responda às questões a seguir.

1. b) Identificar as características da população, produzindo informações para a definição de políticas públicas, em qualquer nível governamental, e de investimentos, pela iniciativa privada.

a) Qual é a diferença entre pesquisa censitária e pesquisa amostral?
b) Qual é a importância da realização de um Censo Demográfico para a população de um país?
c) Qual foi o último Censo realizado? Selecione alguns dos resultados dessa pesquisa e apresente aos colegas. **1. c)** A resposta depende do momento em que a atividade for realizada.

2 Qual é a origem das comunidades quilombolas? Qual é a característica atual da população dessas comunidades?

3 Forme um grupo com cinco ou mais colegas para fazer uma pesquisa. Escolham um tema a ser pesquisado. Essa pesquisa deverá ser realizada de forma censitária com os colegas de turma. Organizem as informações coletadas em tabelas e em gráficos. Façam uma análise dos resultados e arpesentem-nos à turma.

3. Resposta pessoal.

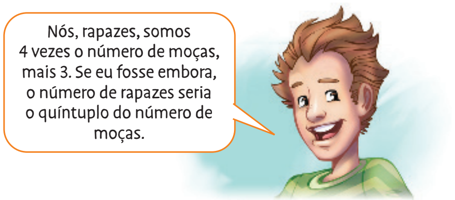
228

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

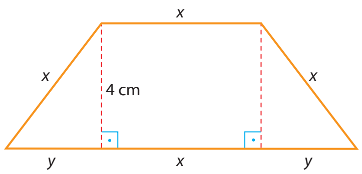
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Cristina retirou R$ 700,00 de um banco, em 10 notas, sendo algumas de R$ 100,00 e outras de R$ 50,00. Quantas notas de R$ 50,00 e de R$ 100,00 Cristina recebeu?
1. Seis notas de R$ 50,00 e quatro notas de R$ 100,00.

2 Leia o que Luís diz. Depois, descubra quantos jovens estavam reunidos. **2.** 13 jovens.



3 O perímetro do trapézio a seguir mede 39 cm. Sabe-se que y é igual a 60% de x.



Determine as medidas x e y, em cm.
3. $x = 7{,}5$ cm e $y = 4{,}5$ cm.

4 Faça o que se pede. **4. a)** Construção de gráficos.

a) Represente, no plano cartesiano, as soluções das seguintes equações:
- $x - 2y = 3$
- $3x - 6y = 9$
- $2x - 4y = 6$
- $4x - 8y = 12$

b) Qual é a posição relativa das retas que representam as soluções dessas equações?

c) Qual é a relação entre os coeficientes da segunda equação e os da primeira equação? E a relação entre os coeficientes da terceira equação e os da primeira equação? E a relação entre os coeficientes da quarta equação e os da primeira equação?

4. b) Coincidentes. **4. c)** Dobro; triplo; quádruplo.

5 Usando uma folha de papel quadriculado, resolva graficamente os sistemas e classifique-os como determinado, indeterminado ou impossível.

5. a) (7, 5); sistema determinado. **5. c)** Sistema impossível.

a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 17 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = -4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = -9 \\ x + 6y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ 6x - 3y = 6 \end{cases}$

5. b) (–5, 1); sistema determinado. **5. d)** Sistema indeterminado.

6 Sabendo que o par (x, y) é a solução do sistema a seguir, determine x : y. **6.** $x : y = 2$

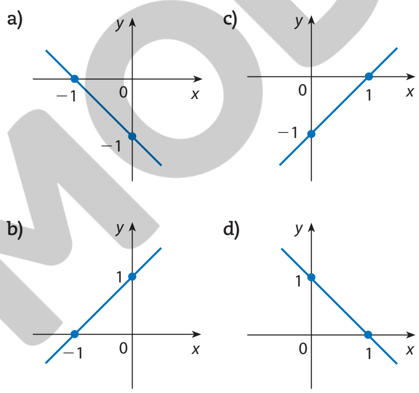
$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{2x - y}{3} - \dfrac{x + 3y}{5} = 0 \end{cases}$$

7 (Unirio-RJ) Em um escritório de advocacia, trabalham apenas dois advogados e uma secretária. Como dr. André e dr. Carlos sempre advogam em causas diferentes, a secretária Cláudia coloca 1 grampo em cada processo de dr. André e 2 grampos em cada processo de dr. Carlos, para diferenciá-los facilmente no arquivo. Sabendo-se que ao todo são 78 processos, nos quais foram usados 110 grampos, podemos concluir que o número de processos de dr. Carlos é igual a: **7.** Alternativa **d**.

a) 64.
b) 46.
c) 40.
d) 32.
e) 28.

8 Eduarda estava em uma das pontas de um viaduto, que mede 84 metros de comprimento. Na outra ponta estava seu irmão Carlos. Eles caminharam até se encontrar. A cada 3 metros percorridos por Eduarda, Carlos percorreu 4 metros. A quantos metros do centro do viaduto eles se encontraram? **8.** 6 m

9 Que representação gráfica apresenta as soluções da equação $x - y = 1$? **9.** Alternativa **c**.



Exercícios complementares

As resoluções dos **exercícios 1** e **2** e dos exercícios **4** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Neste bloco, os estudantes têm a oportunidade de revisitar os principais conceitos trabalhados no capítulo.

No **exercício 3**, eles revisitam também os conhecimentos que já construíram acerca de trapézios, articulando as Unidades Temáticas **Álgebra**, **Números**, **Geometria** e **Grandezas e medidas.** Uma possível resolução é apresentada a seguir.

A medida do perímetro é 39 cm.

y é igual a 60% de x, ou seja, $y = 0{,}6x$.

Da figura, temos:

$4x + 2y = 39$

Assim, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} y = 0{,}6x \\ 4x + 2y = 39 \end{cases}$$

Os estudantes podem resolver esse sistema pelo método que desejarem. Nesse caso, como já temos a incógnita y isolada na primeira equação, o método da substituição pode ser o mais conveniente.

Assim, vamos substituir y por $0{,}6x$ na segunda equação:

$4x + 2y = 39$

$4x + 2 \cdot 0{,}6x = 39$

$5{,}2x = 39$

$x = 7{,}5$

Voltando à equação $y = 0{,}6x$, obtemos:

$y = 0{,}6 \cdot 7{,}5 = 4{,}5$

Logo, $x = 7{,}5$ cm e $y = 4{,}5$ cm.

No **exercício 9**, espera-se que os estudantes percebam que um modo de resolver é tomar dois pontos de cada reta e verificar se suas coordenadas satisfazem a equação. Outro modo é construir a representação gráfica da equação $x - y = 1$ e comparar com as alternativas.

Quando $x = 0$, temos $-y = 1$ e, portanto, $y = -1$; logo, o ponto $(0, -1)$ pertence à reta.

Além disso, quando $y = 0$, temos que $x = 1$; logo, o ponto $(1, 0)$ pertence à reta.

Dessa maneira, a reta dada na **alternativa c** é a representação gráfica das soluções da equação.

Verificando

Nesta seção são propostos testes que abordam os conteúdos apresentados ao longo deste capítulo, sendo uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso eles apresentem dúvidas em relação a algum dos testes propostos, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo; assim, também desenvolverão a autonomia no estudo.

As resoluções dos **testes 1** a **6** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 10.

Organizando

No **item a**, dos métodos de resolução de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas, foram trabalhados o método da substituição e o método da adição.

No **item b**, a solução gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas é uma "reta" representada no plano cartesiano.

No **item c**, para encontrar a solução gráfica de uma equação do 1º grau com duas incógnitas basta obter as coordenadas de dois de seus pontos, localizá-los no plano cartesiano e traçar a reta que os contenha.

No **item d**, a solução gráfica de um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas é dada pelo par ordenado que é a intersecção das duas retas que são soluções das equações que o sistema contém.

No **item e**, um sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas pode ser: possível e determinado, a solução é constituída de um único ponto, que é a intersecção das retas soluções de cada equação; impossível, a solução não existe, pois as retas de cada equação são paralelas (não há pontos de intersecção entre elas); possível e indeterminado, a solução é o conjunto dos infinitos pontos das retas soluções de cada equação, que são coincidentes.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Resolva o sistema de equações a seguir pelo método de substituição. **1.** Alternativa **d**.

$$\begin{cases} x = y + 30 \\ x + 5 = 2 \cdot (y + 10) \end{cases}$$

Qual é a solução desse sistema de equações?

a) $x = 42, y = 12$
b) $x = 35, y = 10$
c) $x = 40, y = 10$
d) $x = 45, y = 15$

2 Para fazer um doce, Jorge comprou embalagens de 100 g de coco ralado, a R$ 4,00 cada uma, e caixas com 200 g de chocolate em pó, a R$ 5,00 cada. Ele gastou R$ 54,00 e comprou 1 800 g desses produtos. Quantas unidades Jorge comprou de cada produto? **2.** Alternativa **b**.

a) 2 embalagens de coco ralado e 10 caixas de chocolate em pó.
b) 6 embalagens de coco ralado e 6 caixas de chocolate em pó.
c) 5 embalagens de coco ralado e 7 caixas de chocolate em pó.
d) 10 embalagens de coco ralado e 2 caixas de chocolate em pó.

3 Joana recebeu uma premiação de R$ 9 450,00 em 120 cédulas de 50 e 100 reais. Quantas cédulas de cada valor Joana recebeu? **3.** Alternativa **c**.

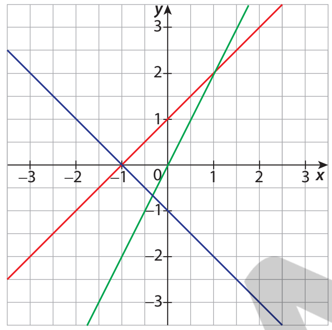
a) 59 cédulas de 50 reais e 65 de 100 reais.
b) 71 cédulas de 50 reais e 59 de 100 reais.
c) 51 cédulas de 50 reais e 69 de 100 reais.
d) 41 cédulas de 50 reais e 74 de 100 reais.

4 Entre as alternativas a seguir, qual não contém uma solução para o sistema apresentado? **4.** Alternativa **d**.

$$\begin{cases} 2x - 4y = 10 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

a) (7, 1) e (3, –1)
b) (5, 0) e (9, 2)
c) (0, –2,5) e (11, 3)
d) (–4, –3) e (–3, –1)

5 Os gráficos apresentados não representam a solução de qual equação? **5.** Alternativa **b**.

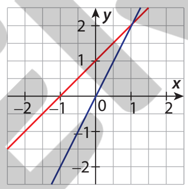


a) $y = x + 1$
b) $y = -2x - 2$
c) $y = -x - 1$
d) $y = 2x$

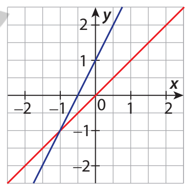
6 Determine qual dos gráficos a seguir representa a solução do sistema: **6.** Alternativa **a**.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x + 1 \end{cases}$$

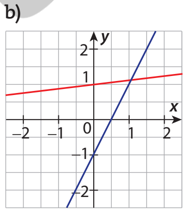
a)



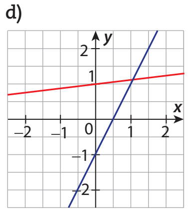
c)



b)



d)



ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIARISO/ARQUIVO DA EDITORA

Organizando

Organizando: **a)** Método da substituição e da adição.
d) O par ordenado que é a intersecção das duas retas que são soluções das equações que o sistema contém.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) Que métodos de resolução de sistemas de equações você aprendeu neste capítulo?
b) Qual é a solução gráfica obtida de uma equação de 1º grau? **b)** É uma reta.
c) Para obter a solução gráfica de uma equação de 1º grau, pelo menos quantos pares ordenados devem ser obtidos? **c)** 2 pares ordenados.
d) Qual é a solução gráfica obtida na resolução de um sistema de equações de 1º grau?
e) Quais são as classificações possíveis de um sistema e como são suas soluções?
e) Determinado: tem uma única solução; impossível: não existe par ordenado que seja solução; indeterminado: apresenta infinitas soluções.

DIVERSIFICANDO

Onde está o erro?

Rogério encontrou em um jornal antigo uma brincadeira matemática e ficou curioso para saber a resposta, mas o jornal estava rasgado justamente na parte da solução. Observe o recorte do jornal.

Encontre o erro

Incrível! Será que 2 é igual a 1?

Para mostrar que 2 é igual a 1, vamos considerar os números a e b e atribuir-lhes o valor 1, isto é:

$$a = 1 \text{ e } b = 1$$

Afirmamos que vale a seguinte igualdade:

$$a^2 - b^2 = a^2 - a \cdot b$$

Podemos verificar a validade substituindo a e b por 1:

$$1^2 - 1^2 = 1^2 - 1 \cdot 1$$

$$0 = 0$$

Portanto, a igualdade $a^2 - b^2 = a^2 - a \cdot b$ é verdadeira.

Fatorando ambos os membros dessa igualdade, temos:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot (a - b)$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade por $\frac{1}{(a - b)}$, obtemos:

$$(a + b) \cdot \cancel{(a - b)} \cdot \frac{1}{\cancel{(a - b)}} = a \cdot \cancel{(a - b)} \cdot \frac{1}{\cancel{(a - b)}}$$

$$a + b = a$$

Substituindo os valores de a e b por 1, temos:

$$1 + 1 = 1$$

$$2 = 1$$

Isso é possível?

Resposta:

1. Espera-se que os estudantes percebam dois erros: $a^2 - b^2 = a^2 - a \cdot b$ só vale se $b = 0$ ou se $a = b$; na multiplicação de ambos os membros por $\frac{1}{(a - b)}$, como $a = 1$ e $b = 1$, temos $a - b = 0$, e não é possível dividir por zero.

Agora é com você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Encontre o erro cometido no cálculo desenvolvido no recorte de jornal.

2 Fernanda descobriu o erro cometido no jornal e fez uma brincadeira parecida em uma folha de caderno, seguindo o mesmo raciocínio. Analise as operações de Fernanda e descubra onde está o erro.

$$0 = 0$$

$$3 - 3 = 4 - 4$$

$$3 \cdot \cancel{(1 - 1)} = 4 \cdot \cancel{(1 - 1)}$$

$$3 = 4$$

2. O erro cometido foi semelhante ao do jornal, pois, após colocar em evidência os números 3 e 4, ela cortou os membros comuns entre parênteses. Ao fazer esse corte, Fernanda dividiu por zero, o que não é possível.

Diversificando

Nesta seção, apresentamos técnicas algébricas usadas de maneira inadequada para mascarar e obter igualdades numéricas absurdas.

Incentive os estudantes a buscar o erro em cada situação. Essa atividade pode ser feita em duplas, o que enriquecerá as observações e a elaboração de hipóteses. Ao final, promova uma roda de conversa com a turma para que todos exponham o que concluíram e ampliem o repertório de estratégias, propiciando aos estudantes reavaliar e corrigir seus erros.

Capítulo 11 – Área de regiões poligonais

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, retomamos e ampliamos o trabalho com área de regiões poligonais. Além disso, ampliamos o trabalho com gráficos trabalhando com pictogramas.

A abertura do capítulo aborda a área do maior órgão do corpo humano: a pele. Se julgar conveniente, proponha um trabalho interdisciplinar com Ciências. É possível realizar debates sobre a importância do cuidado com a pele desenvolvendo o Tema Contemporâneo Transversal **saúde**. Os estudantes podem analisar as diferentes transformações que ocorrem na puberdade considerando a atuação dos hormônios sexuais e relacioná-los com alterações que ocorrem na pele principalmente nessa fase, como a acne.

Os **itens a** e **b** possibilitam discutir a importância dos bancos de pele, desenvolvendo a **competência geral 9**, no que se refere ao exercício da empatia.

Para resolver o **item c**, os estudantes podem apoiar a mão sobre uma folha de papel sulfite e desenhar o seu contorno. Depois, podem aproximar esse contorno por meio de regiões retangulares a fim de determinar a área aproximada da palma da mão.

Sugestão de leitura

Para ampliar a discussão, sugerimos:

PINHEIRO, C. As doenças de pele que mais abalam o bem-estar. **VEJA Saúde**, ago. 2014. Disponível em: https://saude.abril.com.br/medicina/doencas-de-pele-abalam-a-mente/. Acesso em: 20 jul. 2022.

A matéria apresenta as principais doenças de pele, seus impactos na qualidade de vida e algumas maneiras de preveni-las.

Capítulo

11 Área de regiões poligonais

a) Proteger o organismo de germes do ambiente exterior, controlar a perda de calor e de líquidos. Além disso, é essencial para o sentido do tato e para a percepção de sensações como a dor. Resposta possível: a doação de órgãos como a pele é importante para salvar vidas, pois possibilita o restabelecimento da saúde do paciente e o prolongamento da expectativa de vida.

VASARA/SHUTTERSTOCK

Observe, leia e responda no caderno.

a) No tratamento de pessoas com queimaduras graves, o transplante de pele pode salvar a vida do paciente. Em situações como essa, a pele funciona como um curativo biológico. No Brasil, atualmente, existem quatro bancos de pele, que captam, preparam, armazenam e disponibilizam a pele doada, mas esses bancos são capazes de suprir apenas 10% das necessidades. Qual é a importância da pele para nosso organismo? E qual é a importância da doação de órgãos como a pele?

b) Segundo o texto, em um adulto, a superfície da pele pode ter que medidas de área?

c) Com a ajuda de uma régua, estime a medida da área da palma de sua mão, em centímetro quadrado, incluindo os dedos. Considerando que a medida da área da palma da sua mão corresponde a 1% da medida da área total da sua superfície corporal, determine a medida aproximada dessa área, em metro quadrado.

b) Entre 1,5 m^2 e 2 m^2.
c) Resposta pessoal.

Órgão indispensável à vida, a pele protege o nosso organismo contra infecções, funcionando como uma barreira para germes do ambiente exterior, além de controlar a perda de calor e de líquidos. A pele é essencial para o controle da temperatura corporal, para o sentido do tato e para a percepção de sensações como a dor.

A pele, o maior e mais pesado órgão do corpo humano em um adulto, tem área medindo entre 1,5 m^2 e 2 m^2.

Para avaliar a extensão de uma queimadura, por exemplo, os médicos usam o tamanho da palma da mão (incluindo os dedos) do paciente, que é tido como o equivalente a 1% da medida da área da superfície corporal.

232

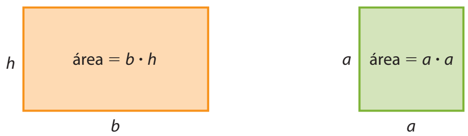
1 Área do paralelogramo

Para medir uma superfície, é preciso tomar outra superfície como unidade de medida e verificar quantas vezes a superfície escolhida cabe naquela que se deseja medir.

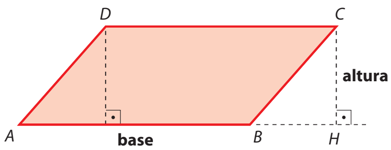
Neste capítulo, estudaremos as áreas das superfícies poligonais.

Para facilitar a compreensão e simplificar a linguagem, vamos nos referir à área da região poligonal simplesmente por área do polígono. Assim, a área de uma região retangular, por exemplo, poderá ser denominada área do retângulo.

Já estudamos como determinar a medida da área de superfícies retangulares, que têm base de medida b e altura de medida h, e, em particular, a medida da área de regiões quadradas com base e altura medindo a. Observe a expressão da área do retângulo e do quadrado:

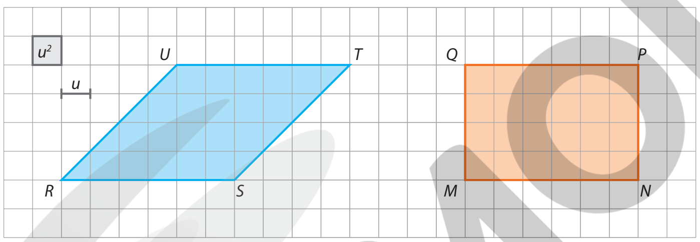


Vamos estudar como determinar a medida de área de um paralelogramo, considerando o paralelogramo *ABCD*.



Qualquer segmento perpendicular a uma base, com uma extremidade nela e outra extremidade na reta suporte da base oposta, é chamado de **altura do paralelogramo**. Vamos considerar os lados paralelos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ como **bases**. O segmento $\overline{CH}$, por exemplo, é uma altura do paralelogramo *ABCD*.

Agora, observe o paralelogramo *RSTU* e o retângulo *MNPQ* a seguir.



Considerando u a unidade de medida de comprimento e u^2 a unidade de medida de área, temos:

paralelogramo *RSTU*

- medida da base: 6 u
- medida da altura: 4 u
- medida da área: 24 u^2

retângulo *MNPQ*

- medida da base: 6 u
- medida da altura: 4 u
- medida da área: 24 u^2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

1. Área do paralelogramo

Habilidade da BNCC: **EF08MA19**.

Neste tópico, serão apresentadas expressões de cálculo de medida de área de paralelogramos, favorecendo o desenvolvimento da habilidade (EF08MA19), de maneira que os estudantes compreendam como determinar tais expressões e como utilizá-las na resolução de problemas.

Se julgar necessário, retome o cálculo da área do retângulo e o do quadrado, como caso particular de retângulo.

Propicie aos estudantes que experimentem as duas situações mostradas: a comparação da área de um paralelogramo com a de um retângulo em uma mesma malha quadriculada e a obtenção de um retângulo a partir de um paralelogramo. Para isso, forneça-lhes malhas quadriculadas com essas figuras e malhas em branco para eles desenharem um paralelogramo e um retângulo de mesma base e mesma altura. Forneça aos estudantes também paralelogramos de cartolina (previamente preparados) para que recortem e formem retângulos com as peças obtidas.

Se possível, desenvolva atividades utilizando os recursos de *software* de Geometria dinâmica em que é possível representar as figuras e comparar suas áreas de maneira automática, o que desenvolve a **competência específica 5** e favorece a compreensão da relação entre a expressão que determina a medida da área de paralelogramos, de modo geral, e a do retângulo e quadrado, como casos particulares.

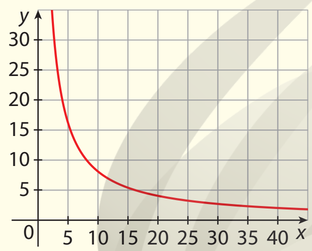
Área do paralelogramo

Para ampliar o trabalho com os exemplos, peça aos estudantes que desenhem em uma malha quadriculada de quadradinhos medindo 1 cm de lado os paralelogramos apresentados e estimem a quantidade de quadradinhos que compõem a superfície de cada paralelogramo. Sugira-lhes também que identifiquem a base e a altura de cada um dos paralelogramos.

Exercícios propostos

Se possível, podem-se utilizar as ferramentas de *softwares* de Geometria dinâmica para auxiliar na resolução dos problemas. No **exercício 1**, se essas ferramentas não estiverem disponíveis, faça um esboço do gráfico na lousa, propiciando aos estudantes perceberem o comportamento da curva representada no gráfico. Esse exercício possibilita trabalhar aspectos das habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13); espera-se que eles percebam que, como a área é dada por $x \cdot y$, então $x \cdot y = 80$ e, portanto, $y = \frac{80}{x}$ é uma representação algébrica da relação entre y e x. Explique que, neste caso, x e y são grandezas inversamente proporcionais.

Observe um exemplo de gráfico que representa essa relação:

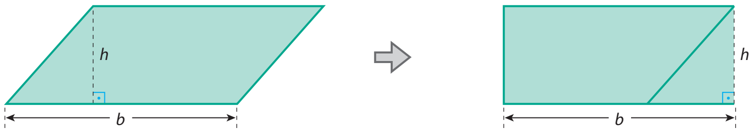


RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Para o **exercício 2**, os estudantes podem compor no *software* diferentes paralelogramos cuja medida de área seja 56 cm² e comparar o formato deles. Além disso, podem compor diferentes paralelogramos cuja base mede 8 cm e comparar suas áreas.

Outra possibilidade é compor um paralelogramo de base medindo 8 cm e variar a medida de sua altura para perceber como é alterada a medida de área. Destaque que, neste caso, a medida de área é diretamente proporcional à medida da altura do retângulo.

Dizemos que duas figuras são **equivalentes** se têm a mesma medida de área. Isso acontecerá sempre que um paralelogramo e um retângulo tiverem as medidas das bases iguais e as medidas das alturas iguais também, pois, nesse caso, sempre há a possibilidade de decompor o paralelogramo em figuras que, rearranjadas, compõem o retângulo. Observe.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

A medida da **área de um paralelogramo** de base medindo *b* e altura medindo *h* é igual à medida da área de um retângulo de base medindo *b* e altura medindo *h*.

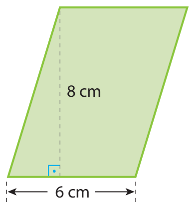
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Portanto, a medida da área do paralelogramo é indicada por:

$$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$$

Como exemplo, vamos determinar a medida da área dos paralelogramos a seguir.

a)



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

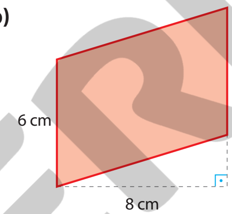
$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

$A_{\text{paralelogramo}} = 6 \cdot 8$

$A_{\text{paralelogramo}} = 48$

Logo, a área desse paralelogramo mede 48 cm².

b)



FERNANDO JOSÉ FERREIRA/ARQUIVO DA EDITORA

Considerando o lado vertical como base, temos:

$A_{\text{paralelogramo}} = 6 \cdot 8$

$A_{\text{paralelogramo}} = 48$

Assim, a área desse paralelogramo mede 48 cm².

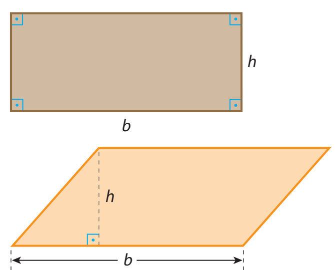
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 A medida da área de um retângulo cuja base mede x metros e cuja altura mede y metros é de 80 m². Qual é a medida da área de um paralelogramo cuja base mede y metros e a altura mede x metros? **1.** 80 m²

2 A área de um paralelogramo mede 56 cm². A base mede 8 cm. Determine a medida da altura. **2.** 7 cm

3 Considerando as figuras a seguir, determine a medida da área do paralelogramo pintado de laranja, sabendo que a medida da área do retângulo pintado de marrom é igual a 20 cm². **3.** 20 cm²



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

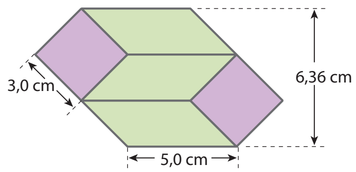
234

Esse trabalho de ampliação investigativo utilizando tecnologias digitais favorece o desenvolvimento da **competência geral 5**, pois os estudantes podem resolver problemas e produzir novos conhecimentos por meio dos recursos desse tipo de *software*.

A resolução do **exercício 2** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

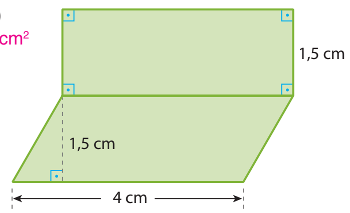
Para responder ao **exercício 3**, espera-se que os estudantes notem que, pelas figuras, os dois paralelogramos apresentam as mesmas medidas, *b* e *h*. Portanto, ambos têm a mesma medida de área, 20 cm².

4 No mosaico a seguir, os paralelogramos são equivalentes entre si. Os quadrados também são. Determine a medida da área da superfície do mosaico. **4.** 49,8 cm²

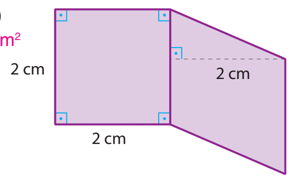


5 Determine a medida da área de cada figura a seguir.

a)
5. a) 12 cm²



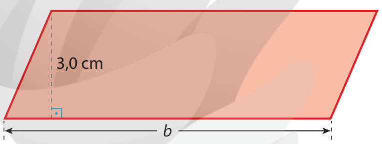
b)
5. b) 8 cm²



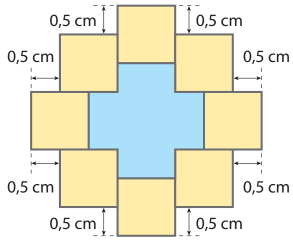
6 Obtenha o que se pede.

a) A medida da altura (h) deste paralelogramo cuja área mede 34,2 cm². **6. a)** $h = 4,5$ cm

b) A medida da base (b) deste paralelogramo cuja área mede 27,3 cm². **6. b)** $b = 9,1$ cm



7 Observe a figura.

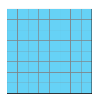
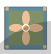
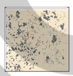


A região pintada de azul é circundada por quadrados de lados medindo 1 cm. Determine a medida da área, em centímetro quadrado, dessa região azul. **7.** 3 cm²

8 Mário quer revestir o piso de sua cozinha, que mede 2,40 m × 3,00 m.

Estes foram os revestimentos de que ele mais gostou.

Pesquisa de revestimento de piso

Revestimento	Medidas da peça (em cm)	Preço do metro quadrado (em R$)
 placa de pastilhas de porcelana	5 × 5 (cada pastilha)	150,00
 ladrilho hidráulico	20 × 20	350,00
 porcelanato	30 × 30	76,00

Dados obtidos por Mário.

Copie a tabela de Mário e acrescente duas colunas:

- uma com a quantidade de peças de cada revestimento necessária para cobrir todo o piso da cozinha;
- outra com o custo total correspondente a cada revestimento.

8. Veja a resposta neste *Manual*.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 4** a **7** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 7**, peça aos estudantes que expliquem como chegaram à resolução, pois as medidas dos lados que delimitam a região cuja área se quer saber não são dadas diretamente. Eles podem se reunir em duplas e comparar as resoluções.

O **exercício 8** pode ser feito utilizando-se uma calculadora. O importante é os estudantes compreenderem as etapas que devem desenvolver para obter as respostas.

A seguir, apresentamos uma possível resolução para esse exercício.

A área total da cozinha de Mário mede 7,2 m² ($2,40 \cdot 3 = 7,2$).

Placa de pastilhas de porcelana: Cada placa de pastilhas tem 25 cm² de área, que equivalem a 0,0025 m² (1 m² equivale a 10 000 cm²).

Logo, serão necessárias 2 880 peças para revestir a cozinha ($7,2 : 0,0025 = 2\,880$) com custo total de R$ 1 080,00 ($7,2 \cdot 150 = 1\,080$).

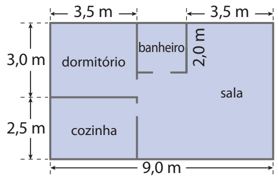
Ladrilho hidráulico: Cada ladrilho hidráulico tem 400 cm² de área, que equivalem a 0,04 m² (1 m² equivale a 10 000 cm²).

Logo, serão necessárias 180 peças para revestir a cozinha ($7,2 : 0,04 = 180$) com custo total de R$ 2 520,00 ($7,2 \cdot 350 = 2\,520,00$).

Porcelanato: Cada porcelanato tem 900 cm² de área, que equivalem a 0,09 m² (1 m² equivale a 10 000 cm²).

Logo, serão necessárias 80 peças para revestir a cozinha ($7,2 : 0,09 = 80$) com custo total de R$ 547,20 ($7,2 \cdot 350 = 547,20$).

9 A figura a seguir representa a planta de um apartamento cujo dono deseja colocar carpete na sala e no dormitório. Sabendo que o metro quadrado colocado do carpete escolhido custa R$ 48,00, quanto o dono do apartamento deverá gastar? **9.** R$ 1 764,00



NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

10 ***Hora de criar*** – Em duplas, elaborem um problema cada um para determinar a medida da área de um paralelogramo observado em alguma situação do dia a dia. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **10.** Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

1 De uma folha de papel quadriculado, recortem vários retângulos, de diferentes medidas de base e de altura. Em seguida, cortem cada retângulo por uma de suas diagonais, obtendo pares de triângulos.

(Usem tesouras com pontas arredondadas e as manuseiem com cuidado!)

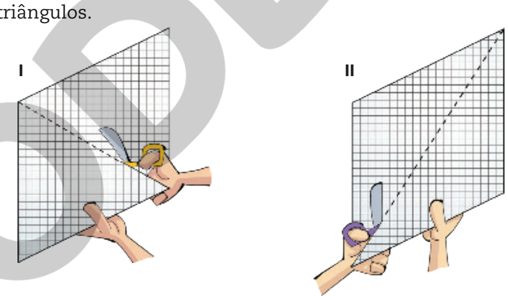
Agora, respondam. *Pense mais um pouco...*: **1. a)** Sim.

a) Para cada par de triângulos assim obtido, é possível sobrepor um triângulo ao outro?

b) Se a área de um desses retângulos medir 18 unidades de medida de área, qual será a medida da área de um dos triângulos obtidos a partir dele? **1. b)** 9 unidades de medida de área

c) Se x é a medida da área de um dos triângulos obtidos pelo corte de uma das diagonais de um retângulo, qual é a medida da área desse retângulo? **1. c)** $2x$

2 De outra folha de papel quadriculado, recortem dois paralelogramos não retângulos idênticos, que vamos chamar de I e II. Em seguida, cortem I pela diagonal menor e II pela diagonal maior, obtendo pares de triângulos.



ILUSTRAÇÕES: CLÁUDIO CHIYO/ ARQUIVO DA EDITORA

(Usem tesouras com pontas arredondadas e as manuseiem com cuidado!)

Respondam.

a) É possível sobrepor os dois triângulos de I? Eles são equivalentes? **2. a)** Sim; sim.

b) É possível sobrepor os dois triângulos de II? Eles são equivalentes? **2. b)** Sim; sim.

c) É possível sobrepor um triângulo de I a um triângulo de II? **2. c)** Não.

d) Se a medida da área do paralelogramo I é igual a x, qual é a medida da área do paralelogramo II? E a medida da área de um dos triângulos de I? E a medida da área de um dos triângulos de II? **2. d)** x; $\frac{x}{2}$; $\frac{x}{2}$.

e) Um triângulo de I é equivalente a um triângulo de II? **2. e)** Sim.

236

Exercícios propostos

A resolução do **exercício 9** está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Aborde o **exercício 9** propondo aos estudantes que levem para a sala de aula folhetos de propaganda de imóveis com desenho de suas plantas. Peça que calculem as medidas das áreas dos apartamentos de acordo com a planta. Eles também podem desenhar diferentes plantas de casas ou apartamentos, com base em uma medida de área dada.

No **exercício 10**, retome com eles o que são grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais, a fim de trabalhar as habilidades (EF08MA12) e (EF08MA13). Cada estudante pode considerar uma medida da base (**item a**) e de área (**item b**) para elaborar os problemas.

Assim, fixando a medida da base no **item a** como sendo 4 cm, expressamos algebricamente a relação entre a medida A da área (em cm²) e a medida h da altura (em cm) do retângulo da seguinte maneira:

$$A = 4h$$

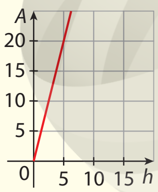
No **item b**, fixando a medida da área como sendo 50 cm², por exemplo, temos a seguinte relação entre a medida b da base (em cm) e a medida h da altura do retângulo (em cm):

$$b = \frac{50}{h}$$

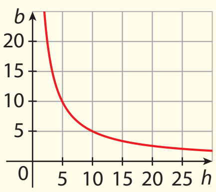
Destaque com os estudantes que no **item a** A e h são diretamente proporcionais e que, no **item b**, b e h são inversamente proporcionais.

A seguir, apresentamos o gráfico para cada uma dessas relações.

- Gráfico para o **item a**:



- Gráfico para o **item b**:



ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

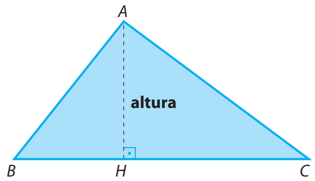
Incentive os estudantes a explicar o tipo de gráfico obtido em cada item; espera-se que percebam que, quando as grandezas são diretamente proporcionais, o gráfico é uma reta passando pela origem e quando as grandezas são inversamente proporcionais o gráfico é uma "curva". Nesse momento, não é objeto de estudo a construção de gráficos desse tipo, mas é interessante que os estudantes compreendam seu comportamento e o associem a grandezas inversamente proporcionais; para isso, podem observar algumas relações entre os pontos que possibilitam perceber mais facilmente que, quando uma variável dobra, a outra cai à metade, ou quando uma triplica, a outra cai à terça parte e assim por diante. No *software* de geometria dinâmica, explore outras grandezas inversamente proporcionais.

Pense mais um pouco...

As resoluções das **atividades 1** e **2** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

2 Área do triângulo

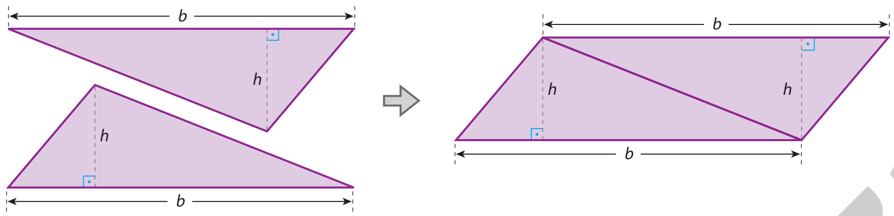
Ao traçar um segmento de reta com uma extremidade em um vértice do triângulo e a outra extremidade na reta suporte do lado oposto a esse vértice, formando ângulos retos com a reta suporte, ou seja, perpendicular a ela, obtemos um segmento cuja medida é igual à medida da **altura do triângulo** em relação ao lado considerado.



No triângulo *ABC*, vamos considerar o lado $\overline{BC}$ como **base**. Observe que *AH* é a medida da **altura** desse triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$.

Agora, observe dois triângulos com bases de medidas iguais (*b*) e alturas relativas a essas bases também de medidas iguais (*h*).

Com esses dois triângulos, é possível compor um paralelogramo com base medindo *b* e altura medindo *h*.



Então, a medida da área de cada triângulo é igual à metade da medida da área do paralelogramo.

A medida da **área de um triângulo** de base medindo *b* e altura relativa a essa base medindo *h* é igual à metade da medida da área de um paralelogramo de base medindo *b* e altura medindo *h*.

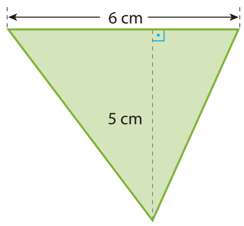
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, a medida da área do triângulo é indicada por:

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Acompanhe alguns exemplos.

a) Vamos determinar a medida da área de um triângulo cuja base mede 6 cm e cuja altura mede 5 cm, como mostra a figura.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{6 \cdot 5}{2} = \frac{30}{2}$$

$$A_{\text{triângulo}} = 15$$

Portanto, a medida da área desse triângulo é de 15 cm².

2. Área do triângulo

Habilidade da BNCC: **EF08MA19**.

Aborde o reconhecimento da base de um triângulo e da altura relativa a essa base apresentando aos estudantes variados tipos de triângulo. Deixe-os utilizar a expressão de cálculo da medida de área do triângulo para triângulos desenhados em folha de papel quadriculado, desenvolvendo a habilidade (EF08MA19).

Para cada triângulo, eles podem desenhar um paralelogramo cuja base e altura sejam coincidentes às do triângulo em questão e relacionar a expressão para o cálculo da medida de área de triângulos à do cálculo da medida de área de paralelogramos.

Outra possibilidade é, com pares de triângulos congruentes, confeccionados em cartolina, propor aos estudantes a montagem de paralelogramos de modo que possam constatar que a área de um triângulo é metade da área de um paralelogramo de mesma altura e mesma base.

Se possível, desenvolva atividades em *software* de Geometria dinâmica, em que os estudantes representam um triângulo com base e altura fixas, mas variando a posição de um dos vértices. Por exemplo, seja o triângulo *ABC* de altura relativa a $\overline{BC}$ de medida *h*, sendo *BC* e *h* fixados. Ao variar a posição do vértice *A*, no *software*, mantendo *h* e *BC* fixas, podem-se obter diferentes triângulos todos com mesma medida de área (pois as medidas da base e da altura são mantidas constantes).

Exercícios propostos

O **exercício 11** trabalha a relação entre a medida de área de paralelogramos e a de triângulos, de modo que basta os estudantes perceberem que cada triângulo amarelo tem mesma altura e mesma base que cada paralelogramo e determinarem, nesse caso, a metade da área do paralelogramo, que será a área do respectivo triângulo.

Apresentamos, a seguir, uma possível resolução para esse exercício.

a) Como as medidas da altura e da base das duas figuras são iguais, a área do triângulo representa a metade da área do paralelogramo.

Logo, a área do triângulo mede 40 m².

b) As medidas da altura e da base das duas figuras são iguais. Portanto, a área do triângulo representa a metade da área do paralelogramo.

Então, a área do triângulo mede 145 m².

Aproveite o **exercício 12** para enfatizar que a presença de um ângulo interno de 90° indica que o triângulo é retângulo e, nesse caso, os lados menores são chamados **catetos** e o lado maior, oposto ao ângulo reto, **hipotenusa**.

Em um triângulo retângulo, quando consideramos como base um dos catetos, o outro cateto será a altura relativa a essa base.

Ao fazer corretamente as medições do triângulo apresentado nesse exercício, o resultado obtido será de uma base medindo 2 cm e uma altura medindo 6 cm e, portanto, a área desse triângulo mede 6 cm².

b) Vamos calcular a medida da altura do triângulo relativa à medida da base, que é igual a 12,5 cm, sabendo que a área do triângulo mede 50 cm².

A medida da área desse triângulo é igual à metade da medida da área de um paralelogramo com a mesma medida de base e a mesma medida de altura. Como a área desse triângulo mede 50 cm², então a área do paralelogramo de mesma base e mesma altura mede 100 cm².

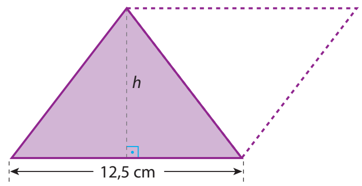
Assim, temos:

$A_{\text{paralelogramo}} = b \cdot h$

$100 = 12{,}5 \cdot h$

$\dfrac{100}{12{,}5} = \dfrac{12{,}5h}{12{,}5}$

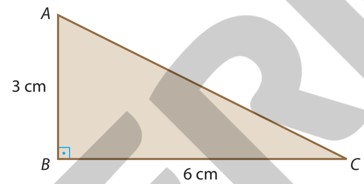
$h = 8$

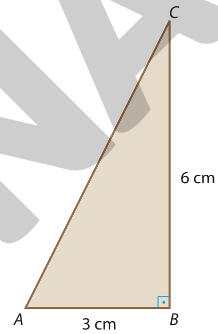


Portanto, a altura desse triângulo mede 8 cm.

c) No triângulo retângulo *ABC*, os lados perpendiculares entre si medem 3 cm e 6 cm de comprimento. Um desses lados pode ser considerado uma base desse triângulo, e o outro, a altura relativa a essa base.

- *AB* é a medida da altura relativa à base $\overline{BC}$.
- *BC* é a medida da altura relativa à base $\overline{AB}$.





Assim, a medida da área desse triângulo pode ser calculada desta forma:

$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{6 \cdot 3}{2} = 9$

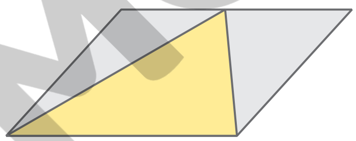
Portanto, a medida da área desse triângulo é 9 cm².

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

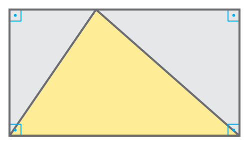
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

11 Determine a medida da área do triângulo pintado de amarelo em cada caso.

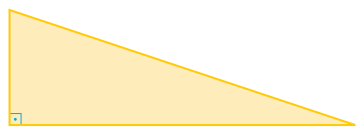
a) $A_{\text{paralelogramo}} = 80\ m^2$ **11. a)** 40 m²



b) $A_{\text{retângulo}} = 290\ m^2$ **11. b)** 145 m²

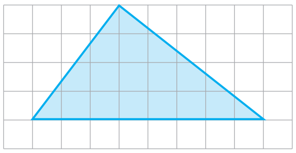


12 Com uma régua, meça uma base do triângulo e a altura relativa a essa base. Depois, determine a medida aproximada da área desse triângulo, em centímetro quadrado. **12.** 6 cm²

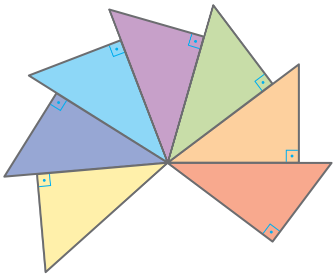


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

13 Determine a medida da área do triângulo, sabendo que a medida do comprimento dos lados dos quadradinhos do quadriculado é 0,5 cm. **13.** 4 cm²

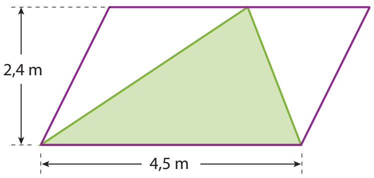


14 Na aula de Arte, Camila desenhou uma figura formada por sete triângulos retângulos.

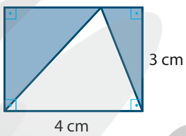


Sabendo que os lados perpendiculares de cada triângulo da figura de Camila medem 3 cm e 4 cm, qual é a medida da área dessa figura?
14. 42 cm²

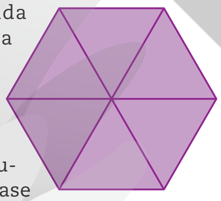
15 No paralelogramo a seguir, foi representado um triângulo. Determine a medida da área da região pintada de verde. **15.** 5,4 m²



16 Qual é a medida da área da parte pintada de azul desta figura? **16.** 6 cm²

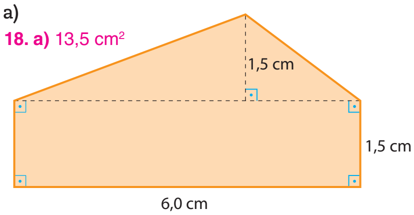


17 Determine a medida da área aproximada deste hexágono, sabendo que a base de cada triângulo que o compõe mede 2,0 cm e que a altura relativa a essa base mede, aproximadamente, 1,7 cm.
17. 10,2 cm²

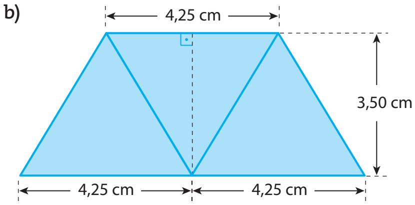


18 Determine a medida aproximada da área de cada figura.

a)
18. a) 13,5 cm²



b)



18. b) Aproximadamente 22,31 cm².

19 Uma base de um triângulo mede 6 cm. A altura relativa a essa base mede $\frac{2}{3}$ da medida dessa base. Determine a medida da área desse triângulo. **19.** 12 cm²

20 ***Hora de criar*** – Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

De um triângulo ABC, são conhecidas as medidas do lado $\overline{AB}$, que é igual a 9,0 cm, e do lado $\overline{AC}$, igual a 7,0 cm. A altura relativa ao lado $\overline{AC}$ mede 8,9 cm, e a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 6,2 cm. Calculem as medidas aproximadas do lado $\overline{BC}$ e da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

Sigam as etapas descritas a seguir para resolver esse problema. **20.** BC = 10,0 cm; h = 6,9 cm.

- Façam um esboço do triângulo ABC citado no problema. Nesse esboço, indiquem com números as medidas dadas e com letras as medidas pedidas.
- Verifiquem se já resolveram um problema parecido com esse ou com parte dele que possa ajudar na resolução.
- Tracem e executem um plano de resolução.
- Para conferir as respostas obtidas, convém calcular a área do triângulo ABC três vezes, usando em cada vez as medidas de um lado e da respectiva altura.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 15** a **18** e **20** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 13**, os estudantes devem contar quantos lados de quadradinhos da malha compõem a altura e a base do triângulo. Em seguida, devem multiplicar essas quantidades por 0,5 cm para obter as medidas da base e da altura do triângulo.

A altura do triângulo mede 2 cm $(4 \cdot 0{,}5 = 2)$ e a base mede 4 cm $(8 \cdot 0{,}5 = 4)$. Logo, a área do triângulo mede 4 cm² $\left(A = 2 \cdot \frac{4}{2} = 4\right)$.

No **exercício 14**, os estudantes devem obter a medida da área de cada triângulo retângulo calculando a medida da área de um deles, pois, como os catetos correspondentes de todos os triângulos têm mesma medida, todos esses triângulos têm mesma área.

A área de cada triângulo mede 6 cm², pois: $\frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$

Como há 7 triângulos, a área dessa figura é 42 cm².

No **exercício 19**, um passo essencial para a resolução é fazer um esboço com as medidas da base e da altura para depois obter a medida da área. Desse modo, os estudantes podem verificar que é possível obter a medida da altura calculando $\frac{2}{3}$ de 6 cm, que resultará em 4 cm. No entanto, pode ser que algum estudante utilize essa relação diretamente no cálculo da medida de área, dada em cm²:

$$A = \frac{6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6}{2} = 4 \cdot 3$$

$$A = 12$$

Compartilhe os diferentes procedimentos que aparecerem e valide-os com a turma.

Para saber mais

A seção apresenta a construção de um losango, conhecendo-se a medida de seus quatro lados e a medida de um dos ângulos internos.

Reproduza a construção na lousa e peça aos estudantes que, nesse momento, acompanhem e elucidem as dúvidas que surgirem. Depois, proponha a eles que façam a mesma construção no caderno, revendo cada passo feito na lousa.

Pergunte a eles se existe outra maneira de construir esse losango e se é possível descobrir mais elementos dele. Esses questionamentos podem ser discutidos em duplas. Espera-se que pensem nas propriedades de quadriláteros que estudaram e percebam que podem determinar as medidas dos demais ângulos internos desse losango, usando essas medidas na construção do losango.

- Como em um paralelogramo os ângulos internos opostos são congruentes, o ângulo interno de vértice *D* desse losango também mede 30°.
- Desse modo, os outros dois ângulos internos também são congruentes entre si. Indicando essa medida por *x*, obtemos:

  $x + x + 30° + 30° = 360°$

  $2x = 300°$

  $x = 150°$

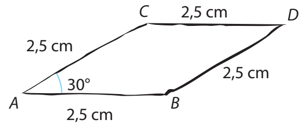
PARA SABER MAIS

Construindo e explorando um losango

Você já sabe que o losango é um quadrilátero que tem os quatro lados de mesma medida.

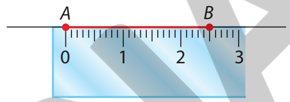
Vamos construir, como exemplo, um losango cujos lados meçam 2,5 cm e que tenha um ângulo interno medindo 30°.

Inicialmente, podemos desenhar, à mão, um esboço do losango. Nesse esboço, vamos indicar as medidas dadas.

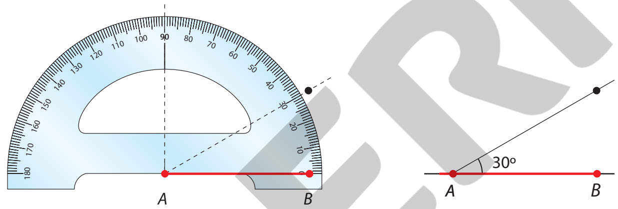


Observando o esboço e com o auxílio de régua, transferidor e compasso, vamos adotar os seguintes passos de construção:

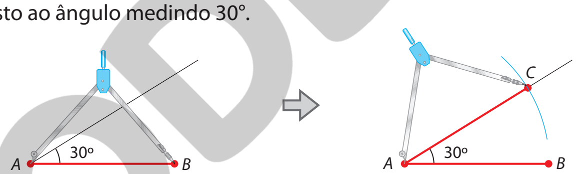
- Traçamos uma reta e nela um segmento de reta de 2,5 cm, que será o lado $\overline{AB}$.



- A partir do lado $\overline{AB}$, construímos um ângulo medindo 30° com vértice em *A*.

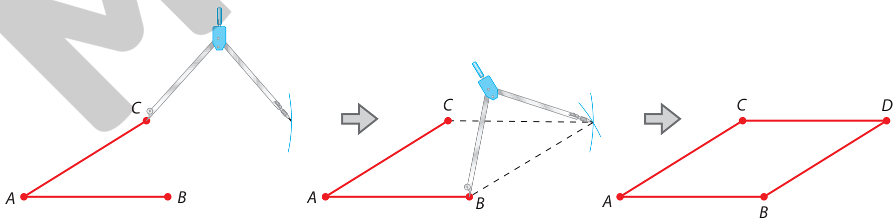


- Com a ponta-seca do compasso em *A* e abertura *AB*, traçamos um arco, indicando o ponto *C* no lado oposto ao ângulo medindo 30°.



(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

- Com a mesma abertura de 2,5 cm e a ponta-seca do compasso em *C*, depois em *B*, traçamos dois arcos que se cruzam, determinando o ponto *D* (que é o quarto vértice do losango). Assim, obtemos o losango *ABDC*.



(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

2. Resposta possível: o ângulo formado pelas diagonais é reto. Além disso, o losango fica dividido em quatro triângulos idênticos e, portanto, com as mesmas medidas de área.

Agora é com você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1. Escolha outra medida para o lado e para a abertura do ângulo e, repetindo o procedimento da página anterior, construa seu losango em uma folha de papel à parte. 1. Construção de figura.

2. Trace as diagonais do losango que você construiu. Em seguida, recorte-o, faça dobraduras pelas duas diagonais e observe o que obteve. Desdobre o losango e escreva o que você verificou a respeito dos quatro triângulos menores obtidos na dobradura.
(Use tesoura com ponta arredondada e a manuseie com cuidado!)

3. Com o transferidor, meça as aberturas dos ângulos formados pelas diagonais. Com a régua, meça as distâncias entre o ponto em que as diagonais se cruzam e cada um dos vértices. O que você verificou? 3. As aberturas de todos os ângulos medem 90°, ou seja, as diagonais do losango são perpendiculares e se cruzam no meio.

3 Área do losango

Vamos considerar o losango da figura 1. Indicamos por D a medida da diagonal maior do losango e por d a medida da diagonal menor.

Essas diagonais dividem o losango em quatro triângulos retângulos congruentes.

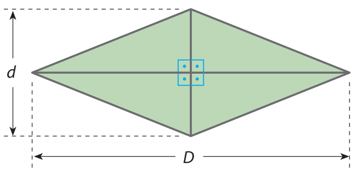


Figura 1

Com mais outros quatro triângulos congruentes a esses, é possível compor um retângulo que tem base de medida D e altura de medida d. Observe a figura 2.

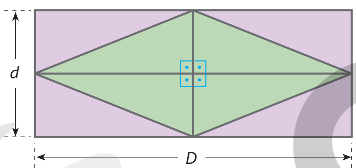


Figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Note que a medida da área do retângulo formado é dada por:

$$A_{\text{retângulo}} = D \cdot d$$

Perceba também que a medida da área do losango é metade da medida da área do retângulo.

Assim, a medida da área do losango é indicada por:

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

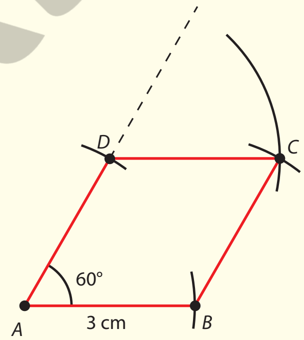
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Agora é com você!

Apresentamos a seguir uma possível figura para a **atividade 1**, considerando que o lado do losango mede 3 cm e um dos ângulos internos mede 60°.

Traçamos uma reta e demarcamos nela um segmento de reta de extremidades A e B cuja medida é 3 cm. No vértice A, construímos um ângulo de 60° e um de seus lados sendo a semirreta de origem em A e que passa por B. Com a ponta-seca do compasso em A e abertura AB (de 3 cm), traçamos um arco que cruza o outro lado do ângulo de 60° no ponto D, outro vértice do losango. Com a mesma abertura AB e a ponta-seca do compasso em D, depois em B, traçamos dois arcos que se cruzam, determinando C, o quarto vértice do losango.

Assim, traçamos os quatro lados obtendo o losango $ABCD$.



WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

3. Área do losango

Habilidade da BNCC: **EF08MA19**.

Antes de apresentar aos estudantes a expressão que determina a medida da área de um losango, dadas as medidas de suas diagonais, incentive-os a retomar os conhecimentos e a relacionar a área de losangos à expressão da área de paralelogramos que já estudaram. Esse trabalho investigativo pode ampliar o desenvolvimento da habilidade (EF08MA19).

Depois, os estudantes podem explicar aos colegas a expressão que obtiveram e o que pensaram, argumentando sobre a validade de tal expressão, assim desenvolvendo a **competência geral 7**.

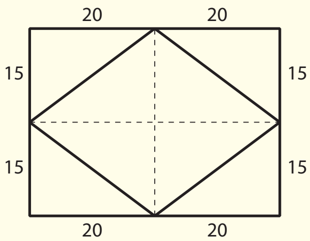
Por fim, oriente-os a fazer a leitura do conteúdo apresentado no *Livro do Estudante* e a comentar a relação entre a medida da área de um losango e a de um paralelogramo.

Exercícios propostos

As resoluções do **exercício 21** e **23** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

O **exercício 22** pode ser representado por meio do seguinte esquema:

WLAMIR MIASIRO/ ARQUIVO DA EDITORA



Nesse caso, o retângulo e o losango são não quadrados. A diagonal maior do losango tem a medida do maior lado do retângulo, 40 cm; e a sua diagonal menor tem a medida do menor lado do retângulo, 30 cm.

Desse modo, a área do losango mede 600 cm², e a área de cada triângulo retirado mede 150 cm² (triângulos retângulos de catetos medindo 15 cm e 20 cm).

Acompanhe alguns exemplos.

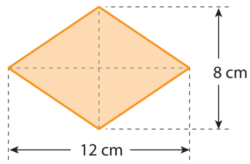
a) Vamos calcular a medida da área de um losango cujas diagonais medem 12 cm e 8 cm.

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{12 \cdot 8}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{96}{2}$$

$$A_{\text{losango}} = 48$$



Portanto, a área desse losango mede 48 cm².

b) A área do losango a seguir mede 8,64 cm². Vamos calcular a medida da diagonal menor d, sabendo que a diagonal maior mede 4,80 cm.

A medida da área desse losango é metade da medida da área de um retângulo cuja base mede 4,80 cm e cuja altura tem medida dada por d. Podemos dizer também que a medida da área desse losango é igual ao semiproduto das medidas de suas diagonais.

Assim, temos:

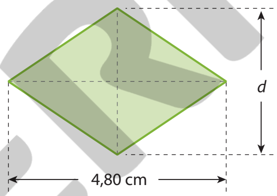
$$A_{\text{losango}} = \frac{D \cdot d}{2}$$

$$8{,}64 = \frac{4{,}80 \cdot d}{2}$$

$$4{,}80d = 17{,}28$$

$$\frac{4{,}80d}{4{,}80} = \frac{17{,}28}{4{,}80}$$

$$d = 3{,}60$$

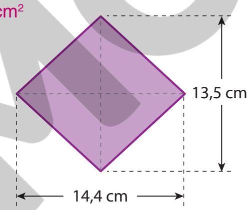


Portanto, a diagonal menor desse losango mede 3,60 cm.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

21 Conhecidas as medidas das diagonais deste losango, determine a medida de sua área. **21.** 97,2 cm²



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

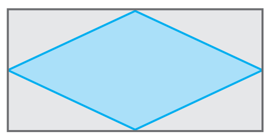
22 Para formar um losango, retira-se de cada canto de uma placa retangular não quadrada um triângulo retângulo cujos lados menores medem 15 cm e 20 cm.

a) Faça um desenho correspondente à situação descrita. **22. a)** Construção de figura.

b) Determine a medida da área de cada triângulo retirado da placa retangular e a medida da área do losango formado.

22. b) Medida da área do triângulo: 150 cm²; medida da área do losango: 600 cm².

23 Determine a medida da área do losango, sabendo que a base do retângulo mede 12,4 m e a altura mede 4,5 m. **23.** 27,9 m²

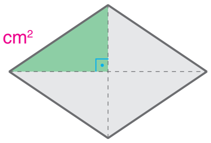


242

24 Determine a medida da área do losango, sabendo que a medida da área da parte pintada de verde é igual a 12 cm².

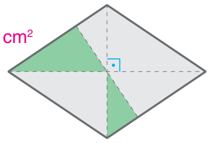
a)

24. a) 48 cm²



b)

24. b) 48 cm²



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

25 Com auxílio de régua, transferidor e compasso, construa dois losangos. Para o primeiro, você escolherá a medida do comprimento do lado e a medida da abertura de um ângulo interno. Para o segundo, a medida do comprimento do lado deve ser igual ao dobro da medida do comprimento do lado do primeiro losango, e um ângulo interno deve ser um ângulo suplementar do ângulo escolhido para o primeiro losango.
Quantas vezes o primeiro losango "cabe" no segundo? **25.** 4 vezes.

(Ao usar o compasso, atenção para não se machucar com a ponta-seca.)

26 A medida da área de um losango é igual a 48 cm², e as medidas de suas diagonais, dadas em centímetro, são expressas por números naturais. Que medidas podem ter essas diagonais?

27 Observe as figuras. Na figura 1, temos um quadrado *ABCD*, com lados de comprimento medindo 12 cm. E temos as seguintes congruências: $\overline{DH} \cong \overline{HC}$, $\overline{CG} \cong \overline{GB}$, $\overline{BF} \cong \overline{FA}$, $\overline{AE} \cong \overline{ED}$. A figura 2 foi obtida da figura 1, aumentando as medidas dos comprimentos dos lados $\overline{BA}$ e $\overline{DC}$, de 12 cm para 16 cm, e reduzindo as medidas dos comprimentos dos lados $\overline{AD}$ e $\overline{CB}$, de modo que o quadrado *ABCD* resultou no retângulo *A'B'C'D'* e a medida da área do losango rosa foi mantida. De quantos centímetros foi a redução da medida do comprimento do lado $\overline{AD}$?

26. 1 cm e 96 cm; 2 cm e 48 cm; 3 cm e 32 cm; 4 cm e 24 cm; 6 cm e 16 cm; 8 cm e 12 cm.

27. 3 cm

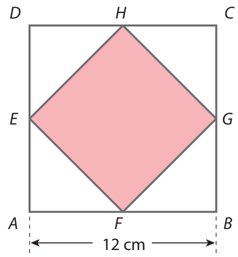


Figura 1

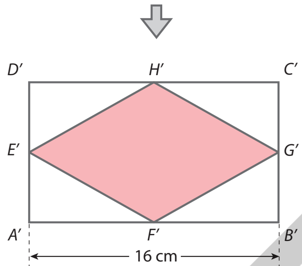


Figura 2

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

28 *Hora de criar* – Em duplas, elaborem um problema cada um para determinar a medida da diagonal menor de um losango com área medindo 8,8 cm². Troquem de caderno, resolvam o problema um do outro e desenhem o losango com as medidas obtidas. Depois, destroquem para corrigi-los. A medida da área dos losangos dos dois problemas é igual, mas e as medidas das diagonais dos dois losangos desenhados, elas são iguais? Os dois losangos são equivalentes?

28. Resposta pessoal.

Pense mais um pouco...

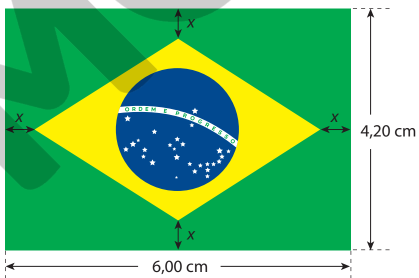
FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

Para construir a bandeira do Brasil, é necessário obedecer a algumas regras.

A bandeira apresentada é uma réplica que obedece às proporções indicadas nessas regras.

A medida *x* é igual a 0,51 cm.

Qual é a medida aproximada da área da parte verde? *Pense mais um pouco...*: Aproximadamente 17,28 cm².



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 24** a **28** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Pense mais um pouco...

Nesta seção, os estudantes têm de calcular a medida da área da parte em verde da bandeira do Brasil.

A resolução da atividade proposta está no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Comente que a bandeira é um dos Símbolos Nacionais e que toda bandeira do Brasil deve seguir proporções estabelecidas pela Lei nº 5 700, de 1º de setembro de 1971, que discorre sobre o formato e a apresentação dos Símbolos Nacionais:

[...]

I - Para cálculo das dimensões, tomar-se-á por base a largura desejada, dividindo-se esta em 14 (quatorze) partes iguais. Cada uma das partes será considerada uma medida ou módulo.

II - O comprimento será de vinte módulos (20M).

III - A distância dos vértices do losango amarelo ao quadro externo será de um módulo e sete décimos (1,7M).

IV - O círculo azul no meio do losango amarelo terá o raio de três módulos e meio (3,5M).

[...]

BRASIL. **Lei nº 5.700 de 1º de setembro de 1971**. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L5700.htm. Acesso em: 20 jul. 2022.

Aproveite os dados para propor aos estudantes atividades como:

- Mariana confeccionou uma bandeira do Brasil medindo 28 cm de largura. Quantos metros quadrados de tecido ela usou? (Resposta: Espera-se que os estudantes percebam que o módulo será correspondente a 28 cm : 14 = 2 cm; o comprimento medirá 20 · 2 cm = 40 cm, o que resulta na medida de área 1120 cm².)
- Se uma bandeira do Brasil mede 30 dm de comprimento, qual é a medida da largura dessa bandeira? Qual é a medida da área de tecido utilizada para sua confecção? (Resposta: Os 30 dm correspondem a 20 módulos, ou seja, cada módulo mede 1,5 dm, e a largura, em dm, medirá 14 · 1,5 dm = 21 dm; a área de tecido medirá 630 dm².)

4. Área do trapézio

Habilidade da BNCC:
EF08MA19.

Para abordar a área de um trapézio, providencie pares de trapézios idênticos produzidos em cartolina para os estudantes fazerem a montagem sugerida no *Livro do Estudante* e verificarem as dimensões do paralelogramo obtido. Se necessário, antes disso, relembre-os das expressões para o cálculo da medida de área de triângulos e de paralelogramos já estudadas.

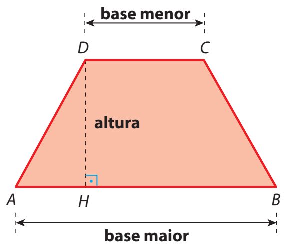
Em seguida, peça a eles que identifiquem as medidas das bases e da altura do trapézio em cada figura e comparem com as dimensões do paralelogramo obtido.

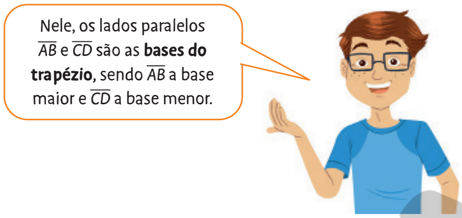
Converse com a turma e obtenha coletivamente a expressão do cálculo da medida da área do trapézio. Essa atividade de atribuir significado geométrico às expressões do cálculo de medida de área pode favorecer os estudantes a memorizar e compreender tais expressões e, assim, desenvolver a habilidade (EF08MA19).

Proponha a eles que desenhem paralelogramos (para facilitar, podem ser traçados em malhas quadriculadas), dividam cada paralelogramo em dois trapézios idênticos e recortem cada um deles. Desse modo, é possível compreenderem que a medida da área de cada trapézio desenhado é a metade da medida da área do paralelogramo que os originou.

4 Área do trapézio

Considere o trapézio *ABCD*.



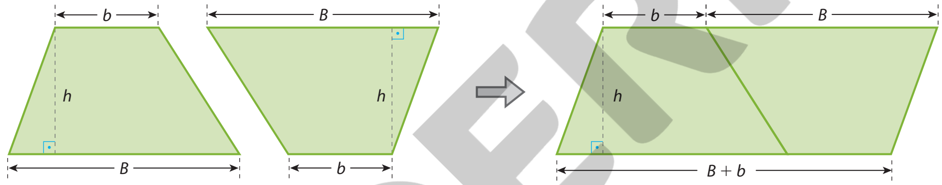


ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Ao traçar um segmento que tem extremidades em uma das bases e na reta suporte da outra, e é perpendicular a elas, a medida desse segmento será igual à medida da **altura do trapézio**.

Agora, vamos considerar dois trapézios congruentes cujas bases medem B e b e cuja altura mede h.

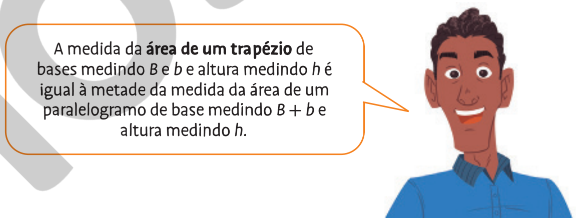
Com esses dois trapézios, podemos compor um paralelogramo com base medindo $(B + b)$ e altura medindo h. Acompanhe.



A medida da área do paralelogramo formado é dada por:

$$A_{\text{paralelogramo}} = (B + b) \cdot h$$

Observe que a medida da área do trapézio é igual à metade da medida da área do paralelogramo.



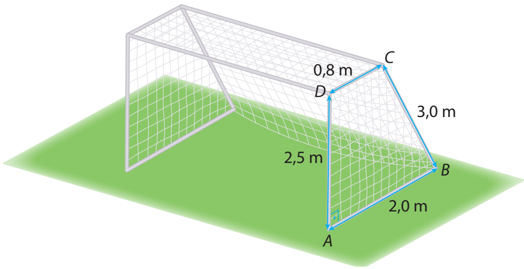
ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Assim, a medida da área do trapézio é indicada por:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Para exemplificar, vamos determinar a medida da área do trapézio *ABCD* da ilustração a seguir.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ ARQUIVO DA EDITORA

Cálculo da medida da área do trapézio *ABCD*:

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(2,0 + 0,8) \cdot 2,5}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{2,8 \cdot 2,5}{2}$$

$$A_{\text{trapézio}} = 3,5$$

Portanto, a área desse trapézio mede 3,5 m².

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

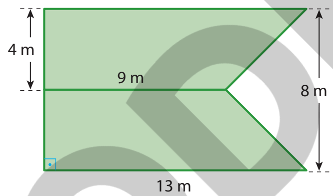
29 A medida da altura de um trapézio é igual a 12,4 cm.

a) Se a soma das medidas de suas bases é 15,5 cm, qual é a medida da área desse trapézio? **29. a)** 96,1 cm²

b) E se a medida da área do trapézio for igual a 155,0 cm², qual será a soma das medidas das bases? **29. b)** 25,0 cm

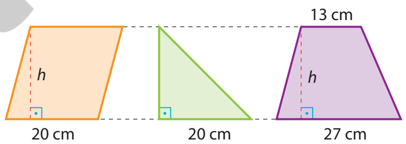
30 Com uma régua, meça as bases e a altura do trapézio a seguir. Depois, determine a medida aproximada da área dele, em centímetro quadrado. **30.** 8 cm²

31 Um jardineiro precisa gramar um terreno que tem o formato da figura a seguir. Quantos metros quadrados de grama serão necessários para cobrir esse terreno? **31.** 88 m²



32 Um trapézio cujos lados não paralelos têm medidas iguais é chamado de **trapézio isósceles**. Um trapézio isósceles de lados não paralelos medindo 5 cm e altura medindo 4 cm tem perímetro medindo 22 cm. Determine a medida da área desse trapézio.
32. 24 cm²

33 Sabendo que $h = 20$ cm, determine a medida da área de cada figura.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ ARQUIVO DA EDITORA

33. Paralelogramo: 400 cm²; triângulo: 200 cm²; trapézio: 400 cm².

Exercícios propostos

As resoluções do **exercício 29** ao **33** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 30**, discuta com os estudantes como medimos a altura do trapézio. Eles devem perceber que essa altura é a distância entre as bases, mas, como toda altura, deve ser tomada perpendicularmente. Eles podem decalcar a figura do *Livro do Estudante* e reproduzi-la no caderno para traçar um segmento que determine essa altura e depois medir seu comprimento.

Para utilizar conhecimentos já adquiridos em capítulos anteriores na Unidade Temática **Geometria**, solicite aos estudantes que construam esse segmento com régua e compasso. Eles podem tomar um vértice de uma das bases e determinar a perpendicular à outra base que passa por esse vértice.

Exercícios propostos

As resoluções dos **exercícios 34** ao **36** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

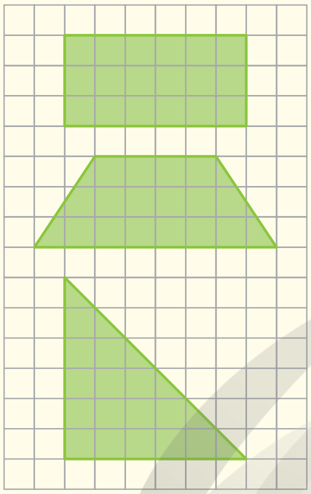
A seguir, apresentamos uma possível resolução para o **exercício 37**.

O gol é formado pelos trapézios *ABEF* e *DCHG* e pelos retângulos *ABCD* e *BCHE*. Os trapézios são congruentes, pois suas medidas são congruentes. Então, eles têm mesma medida de área. Desse modo, cada trapézio tem 3,172 m² de área $\left(\dfrac{(1{,}8 + 0{,}8) \cdot 2{,}44)}{2} = 3{,}172\right)$.

A área do retângulo *ABCD* mede 5,856 m² ($7{,}32 \cdot 0{,}80 = 5{,}856$), e a área do retângulo *BCHE* mede, aproximadamente, 19,398 m² ($7{,}32 \cdot 2{,}65 = 19{,}398$). Portanto, a área total mede, aproximadamente, 31,598 m² ($2 \cdot 3{,}172 + 5{,}856 + 19{,}398 = 31{,}598$).

Exemplo de figuras para o **item a** do **exercício 38**:

WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

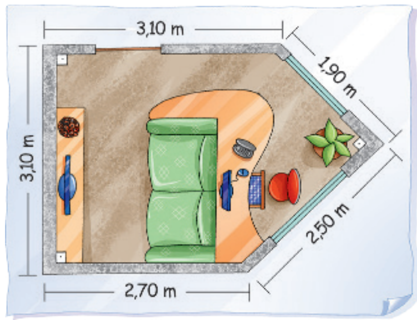


As áreas do retângulo, do trapézio e do triângulo desenhados nessa malha quadriculada medem 18 quadradinhos.

34 Determine a medida da base maior de um trapézio cuja área mede 260 cm², a altura mede 10 cm e a base menor mede 12 cm.
34. 40 cm

35 Dirceu fez um croqui para o projeto de seu escritório.

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



35. Medida estimada: 11,5 m²; medida calculada: 11,365 m².

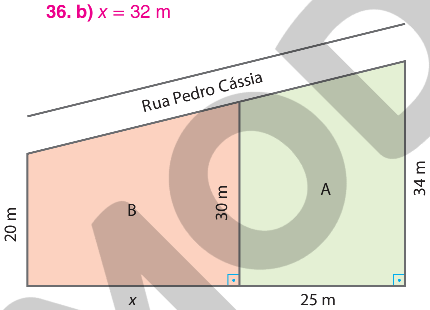
Faça uma estimativa da medida aproximada da área do escritório de Dirceu (incluindo as paredes). Depois, calcule a medida aproximada da área e apresente, em porcentagem, o erro cometido. O erro cometido depende da estimativa. Neste caso, o erro foi de aproximadamente 1,2%.

36 A figura a seguir representa dois terrenos na forma de trapézio. Sabendo que as medidas das áreas desses terrenos são iguais, determine:

a) a medida da área do terreno A; **36. a)** 800 m²

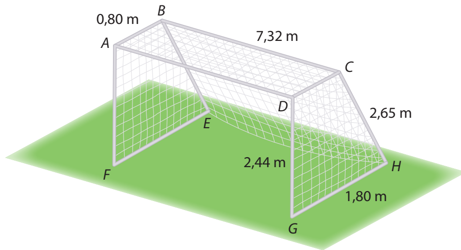
b) a medida do comprimento *x* no terreno B.
36. b) $x = 32$ m

NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



37 (Etec-SP) As redes são usadas nas traves de futebol para impedir a passagem da bola e, desta forma, facilitar a identificação do gol. Considerando a ilustração a seguir, quantos metros quadrados de rede são necessários para cobrir essa trave de futebol?

Dados: Retângulos *ABCD* e *BCHE*.
Os trapézios *ABEF* e *DCHG* são congruentes.
37. Alternativa **b**.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

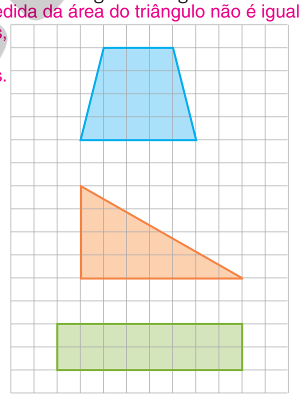
a) 28,426 m²
b) 31,598 m²
c) 31,598 m
d) 51,56 m²
e) 51,56 m

38 ***Hora de criar*** – Reúna-se com um colega e façam o que se pede. **38. a)** Construção de figuras.

a) Em uma folha de papel quadriculado, cada um desenha, sem que o outro veja, um trapézio, um triângulo e um retângulo que tenham áreas com as mesmas medidas, isto é, com a mesma quantidade de quadradinhos. Depois, informem um ao outro apenas a medida dessa área. Então, cada um deve construir, em seu papel quadriculado, os três polígonos com a área fornecida pelo colega.

b) Considere que um colega de outra dupla informou que a área de seus polígonos mede 16 quadradinhos e que o outro colega desenhou as seguintes figuras:

38. b) Não, a medida da área do triângulo não é igual a 16 quadradinhos, é igual a 14 quadradinhos.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

As figuras desenhadas pelo outro colega estão corretas?

c) Em outra folha de papel quadriculado, desenhem novamente os três polígonos do item **a**, mas agora considerem a medida da área igual a 32,5 quadradinhos. Depois de cada um terminar os seus desenhos, troquem de papel e corrijam os desenhos um do outro. Os desenhos feitos por vocês são congruentes?
38. c) Resposta pessoal.

246

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO

Pictograma

Segundo o relatório Perspectivas da Urbanização Mundial (*World Urbanization Prospects*, em inglês), da Organização das Nações Unidas (ONU), em 2018, de cada 100 pessoas da população mundial, 55 viviam em áreas urbanas.

Isso significa que, em 2018, de cada 100 pessoas no mundo:

- 55 viviam em áreas urbanas
- 45 viviam em áreas rurais

Além dos gráficos de setores e de barras que estudamos anteriormente, podemos utilizar pictogramas para representar essa situação. Os **pictogramas** são símbolos usados para transmitir informação. Observe a representação a seguir.

DANIEL ZEPPO/ ARQUIVO DA EDITORA

Nessa representação, os símbolos (verde) indicam o número de pessoas que vivem em áreas rurais, de cada 100 pessoas. Já os símbolos (azul) indicam o número de pessoas que vivem em áreas urbanas, de cada 100 pessoas.

Agora, acompanhe as situações a seguir.

Situação 1

O **autismo** é uma condição que pode comprometer o desenvolvimento da criança, pois pode afetar as áreas da sociabilidade, da comunicação e do comportamento.

Algumas das características que podem ser identificadas nas áreas citadas são:

UNITED ARTISTS/ ALBUM/FOTOARENA

Tom Cruise e Dustin Hoffman em cena do filme ***Rain man***, direção de Barry Levinson, 1988. O filme mostra a aproximação entre dois irmãos, um deles com autismo, que desconheciam a existência um do outro.

Sociabilidade	Comunicação	Comportamento
• Falta de interesse em se relacionar com as pessoas. • Não responde a chamados. • Evita olhar nos olhos. • Evita o contato físico.	• Tem a fala prejudicada. • Não consegue conversar. • Tem dificuldade para compreender a linguagem e as emoções.	• Apresenta gestos e movimentos repetitivos. • Não gosta de alterações na rotina. • Apega-se a objetos inusitados. • Comporta-se de forma agressiva quando contrariado.

A Organização Mundial da Saúde (OMS) estima que 1 em cada 160 crianças é autista. A razão entre o número de crianças que apresentam autismo e as demais crianças, no mundo, pode ser representada por pictogramas.

ADILSON SECCO/ ARQUIVO DA EDITORA

Dados obtidos em: OPAS. Organização Pan-Americana da Saúde. **Transtorno do espectro autista**. Disponível em: https://www.paho.org/pt/topicos/transtorno-do-espectro-autista. Acesso em: 20 mar. 2022.

247

Trabalhando a informação

Habilidade da BNCC: **EF08MA23**.

Explique aos estudantes que um gráfico pictórico (ou um pictograma) é um gráfico constituído por meio de desenhos relacionados ao tema tratado. Às vezes, as frequências são representadas pela mesma figura, feita em tamanhos proporcionais a elas; outras vezes, uma figura representa determinada frequência e é replicada quantas vezes for necessário para contemplar todas as frequências dos dados coletados. A prática proposta nessa seção favorece o desenvolvimento da habilidade (EF08MA23).

Se julgar conveniente, proponha aos estudantes que assistam ao filme citado na **situação 1** e promova um debate sobre o autismo, desenvolvendo-se, assim, os Temas Contemporâneos Transversais **saúde** e **educação em direitos humanos**. Eles podem pesquisar como promover a inclusão de pessoas com autismo, desenvolvendo a **competência geral 8**, quanto ao cuidado da saúde física, e a **competência geral 9**, quanto ao exercício da empatia e do respeito ao outro e aos direitos humanos para todos.

Sugestão de leitura

AUTISMO e Realidade. Disponível em: www.autismoerealidade.org.br/. Acesso em: 20 jul. 2022.

A página apresenta informações sobre autismo e cartilhas que visam à inclusão de pessoas com autismo.

Trabalhando a informação

O trabalho com gráficos pictóricos é importante, pois eles aparecem em meios de comunicação, empregando figuras sugestivas com o objetivo de chamar a atenção do leitor.

Peça aos estudantes que coletem diferentes pictogramas em jornais e revistas e os compartilhem na classe. Com base nesses gráficos, proponha atividades de leitura e de interpretação dos dados.

As resoluções das **atividades 1** a **4** do **Agora quem trabalha é você!** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

O gráfico pedido na **atividade 4** depende de cada turma. Os estudantes podem realizar essa atividade em duplas. Acompanhe cada dupla e intervenha quando julgar necessário, apresentando a eles dicas para contribuir com a discussão, a qual enriquecerá o processo e ampliará o repertório procedimental deles.

Ao final, proponha a cada dupla que apresente seu gráfico e os discuta com toda a turma.

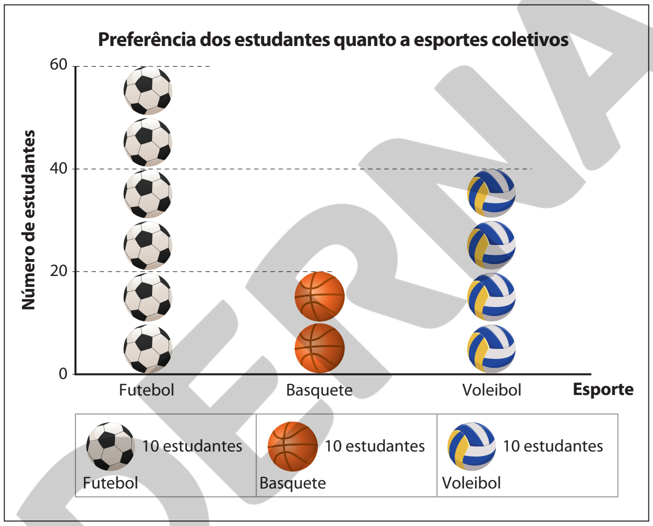
Situação 2

A professora Mara fez seu planejamento anual com base em uma pesquisa sobre a preferência dos estudantes quanto a esportes coletivos. Ela registrou o resultado da pesquisa na tabela a seguir.

Preferência dos estudantes quanto a esportes coletivos			
Esporte	Futebol	Basquete	Voleibol
Número de estudantes	60	20	40

Dados obtidos pela professora Mara.

No quadro de avisos, a professora fixou um gráfico pictórico, em que cada símbolo equivale a 10 estudantes, de acordo com a legenda.



Dados obtidos pela professora Mara.

ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Agora quem trabalha é você!

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Em 2018, a população mundial era de aproximadamente 7,6 bilhões. Quantas pessoas viviam no campo? **1.** Aproximadamente 3,4 bilhões.

2 Considerando a população mundial de crianças atual como 2 bilhões, aproximadamente quantas são autistas? **2.** 12,5 milhões.

3 Em relação ao total de estudantes da professora Mara, qual é o índice percentual dos estudantes que preferem voleibol? **3.** Cerca de 33,3%.

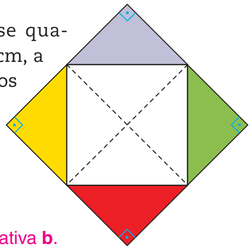
4 Escolha uma atividade qualquer do seu dia a dia e faça uma pesquisa com os colegas de turma para determinar quantos deles praticam essa mesma atividade. Depois de escolher o tema, defina o número de pessoas que farão parte da sua pesquisa e liste as perguntas que serão feitas a essas pessoas para que você obtenha os dados necessários. Após a coleta dos dados, construa um gráfico pictórico para representar o número de colegas de turma que praticam a atividade escolhida. Crie um símbolo para representar os colegas que praticam a atividade e outro para representar os que não praticam. Coloque uma legenda, um título e não se esqueça de incluir a fonte dos dados do seu gráfico. **4.** Construção de gráfico.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 (Saresp) As hipotenusas de quatro triângulos retângulos isósceles coincidem com os lados de um quadrado, de cor branca, como indica a figura a seguir.

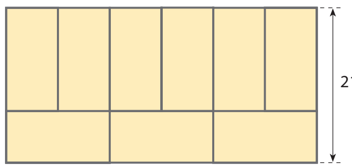
Se os lados desse quadrado medem 4 cm, a soma das áreas dos triângulos coloridos é igual a:



a) 32 cm².
b) 16 cm².
c) 8 cm².
d) 4 cm². **1.** Alternativa **b**.

ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

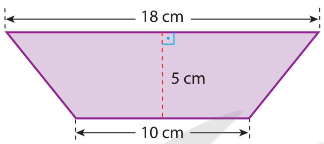
2 Mariana fez um mosaico com nove retângulos idênticos, como mostra a figura a seguir. Qual é a medida da área desse mosaico? **2.** 882 cm²



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

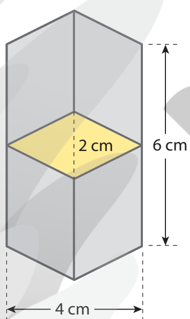
3 Um vitral é formado por 6 losangos com diagonais medindo 40 cm e 30 cm e por 8 triângulos medindo 30 cm de base por 20 cm de altura. Qual é a medida da área total desse vitral, em centímetro quadrado? **3.** 6 000 cm²

4 Determine a medida da área da figura a seguir.
4. 70 cm²



5 A figura representa uma lâmina de espessura desprezível, composta de ouro (losango amarelo) e prata (paralelogramos cinzas).

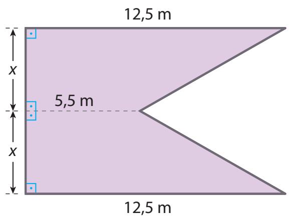
Admitindo que o preço da prata seja R$ 4,00 por centímetro quadrado e o do ouro seja R$ 90,00 por centímetro quadrado, qual seria o preço dessa placa? **5.** R$ 456,00



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

6 Um losango e um triângulo são equivalentes. As diagonais do losango medem 12,8 cm e 8,5 cm. A base do triângulo mede 13,6 cm. Quanto mede a altura relativa a essa base? **6.** 8,0 cm

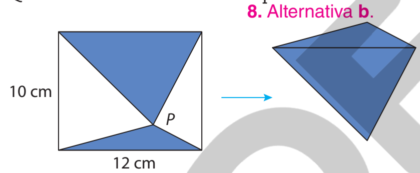
7 A figura a seguir mede 72 m² de área.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Determine a medida de x. **7.** $x = 4$ m

8 (Obmep) Juliana desenhou, em uma folha de papel, um retângulo de comprimento 12 cm e largura 10 cm. Ela escolheu um ponto P no interior do retângulo e recortou os triângulos sombreados como na figura. Com esses triângulos, ela montou o quadrilátero da direita. Qual é a medida da área do quadrilátero? **8.** Alternativa **b**.

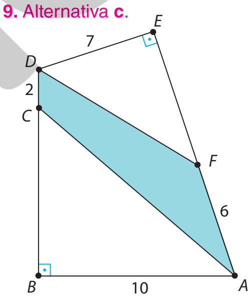


ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

a) 58 cm²
b) 60 cm²
c) 64 cm²
d) 66 cm²
e) 70 cm²

9 (Obmep) Na figura, os pontos C e F pertencem aos lados $\overline{BD}$ e $\overline{AE}$ do quadrilátero ABDE, respectivamente. Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{E}$ são retos e os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{FA}$ têm suas medidas indicadas na figura. Qual é a área do quadrilátero ACDF? **9.** Alternativa **c**.

a) 16
b) 21
c) 31
d) 33
e) 40



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios possibilita aos estudantes retomar os principais conceitos estudados neste capítulo, revisitando problemas envolvendo área de regiões poligonais.

As resoluções dos **exercícios 3** a **6** e dos **exercícios 8** e **9** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

No **exercício 1**, os estudantes devem notar que todos os triângulos da figura são congruentes, pois têm em comum a hipotenusa e são triângulos isósceles, cujas bases são congruentes, pois são os lados de um quadrado. O quadrado branco é composto de quatro desses triângulos. Desse modo, a área de um triângulo mede 4 cm², pois pode ser obtida através da quarta parte da área do quadrado que mede 16 cm². Portanto, a soma das medidas das áreas dos triângulos coloridos é igual a 16 cm². A alternativa que apresenta essa medida é a **b**.

No **exercício 2**, os estudantes devem perceber que a base do retângulo mede o dobro da medida do lado menor do mosaico e que a medida de 21 cm do lado do mosaico é composta da soma das medidas do lado menor e do lado maior do retângulo. Pode-se concluir isso porque, pelo mosaico, dois lados menores do retângulo correspondem ao lado maior do mesmo retângulo. Portanto, a área do mosaico mede 882 cm² ($42 \cdot 21 = 882$).

No **exercício 7**, os estudantes devem perceber que a figura dada é formada por dois trapézios congruentes, dispostos de maneira simétrica. Por isso, as medidas de área desses trapézios são iguais. Assim, obtemos:

$$A_{\text{figura}} = 2 \cdot A_{\text{trapézio}}$$

$$72 = 2 \cdot \frac{(12{,}5 + 5{,}5) \cdot x}{2}$$

$$72 = 18x$$

$$\frac{72}{18} = \frac{18x}{18}$$

$$4 = x$$

Logo, x corresponde a 4 m.

Verificando

Nesta seção, apresentamos exercícios que abrangem todo o capítulo, uma oportunidade para os estudantes validarem o entendimento do conteúdo estudado. Caso eles apresentem dúvidas em relação a algum dos exercícios propostos, oriente-os a rever os conceitos apresentados no capítulo.

Sugerimos, ainda, que os estudantes formem duplas para resolverem os exercícios e, depois de corrigidos, cada um resolva novamente aqueles que tiverem errado.

Acompanhe uma possível resolução para o **teste 1**.

Pela figura, são duas paredes em formato retangular com medidas 2,5 m por 6 m e outras duas paredes com medidas 4 m por 6 m. Então, a área total a ser pintada mede 50 m², pois:

$A = 2(2{,}5 \cdot 6) + 2(4 \cdot 2{,}5) =$
$= 30 + 20 = 50$

Portanto, o preço a ser pago será R$ 1 250,00 (50 · 25 = 1 250).

Pela figura do **teste 2**, pode-se notar que a altura do paralelogramo mede 22 cm. Assim, a área mede 1 100 cm², pois: (22 + 28) · 22 = 1 100.

A alternativa que apresenta essa medida é a **a**.

As resoluções e comentários dos **testes 3** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 11.

Organizando

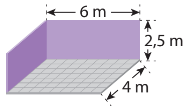
As questões apresentadas nessa seção possibilitam retomar com os estudantes os principais conceitos trabalhados no capítulo. Elas também podem orientar uma autoavaliação.

É interessante que cada estudante responda às questões individualmente e, depois, comentem com os colegas suas respostas, corrigindo-as ou ampliando-as.

VERIFICANDO

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Luciene contratou um pintor para pintar as paredes de seu quarto. O quarto tem dois pares de paredes iguais, com as medidas indicadas na figura.



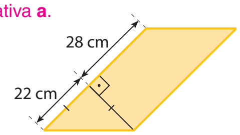
Se o pintor cobra R$ 25,00 por m² pintado, quanto custará a pintura de todas as paredes do quarto, desconsiderando janelas e portas?

a) R$ 625,00
b) R$ 1 250,00
c) R$ 1 000,00
d) R$ 1 500,00

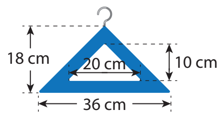
1. Alternativa **b**.

2 Qual é a medida da área do paralelogramo a seguir? **2.** Alternativa **a**.

a) 1 100 cm²
b) 616 cm²
c) 880 cm²
d) 484 cm²



3 Um cabide tem as medidas indicadas na figura a seguir. Qual é a medida da área dessa face do cabide, desconsiderando a alça? **3.** Alternativa **a**.



a) 224 cm²
b) 424 cm²
c) 324 cm²
d) 100 cm²

4 Qual é a medida da área de um triângulo retângulo de lados medindo 3 cm, 4 cm e 5 cm?

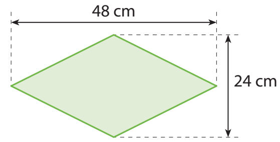
a) 10 cm²
b) 7,5 cm²
c) 6 cm²
d) 4 cm²

4. Alternativa **c**.

5 Determine a medida da diagonal maior de um losango cuja área mede 45,5 cm² e a diagonal menor mede 7,0 cm. **5.** Alternativa **b**.

a) 159,0 cm
b) 13,0 cm
c) 91,0 cm
d) 50,0 cm

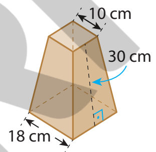
6 Para produzir suas obras, um artista plástico utiliza telas de formatos não convencionais. Uma das novas telas tem o formato de losango e as seguintes medidas.



Qual é a medida da área que essa tela ocupa em uma parede? **6.** Alternativa **a**.

a) 576 cm²
b) 1 152 cm²
c) 384 cm²
d) 96 cm²

7 Em uma escola, as turmas do 9º ano farão uma votação para decidir o local da viagem de formatura. Para isso, construirão uma urna de papelão de base quadrada e com as seguintes medidas.



Qual é a quantidade de papelão necessária, em centímetro quadrado, para a construção da urna? **7.** Alternativa **b**.

a) 844 cm²
b) 2 104 cm²
c) 1 680 cm²
d) 2 004 cm²

8 Uma figura composta de um quadrado de lado medindo 4 cm de comprimento e um triângulo retângulo isósceles de lados iguais medindo 4 cm de comprimento, com um dos lados iguais do triângulo adjacente a um dos lados do quadrado, gera um: **8.** Alternativa **b**.

a) paralelogramo, cuja área mede 32 cm².
b) trapézio, cuja área mede 24 cm².
c) trapézio, cuja área mede 32 cm².
d) triângulo, cuja área mede 16 cm².

ILUSTRAÇÕES: RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA

Organizando: **b)** Precisamos das medidas:
• da base e da altura do paralelogramo;
• da base e da alturado triângulo;
• da diagonal maior e da diagonal menor do losango;
• da base maior, da base menor e da altura do trapézio.

Organizando

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões.

a) O cálculo da medida da área de triângulos, losangos e trapézios pode ser demonstrado a partir de uma mesma figura específica. Que figura é essa? **a)** Paralelogramo.

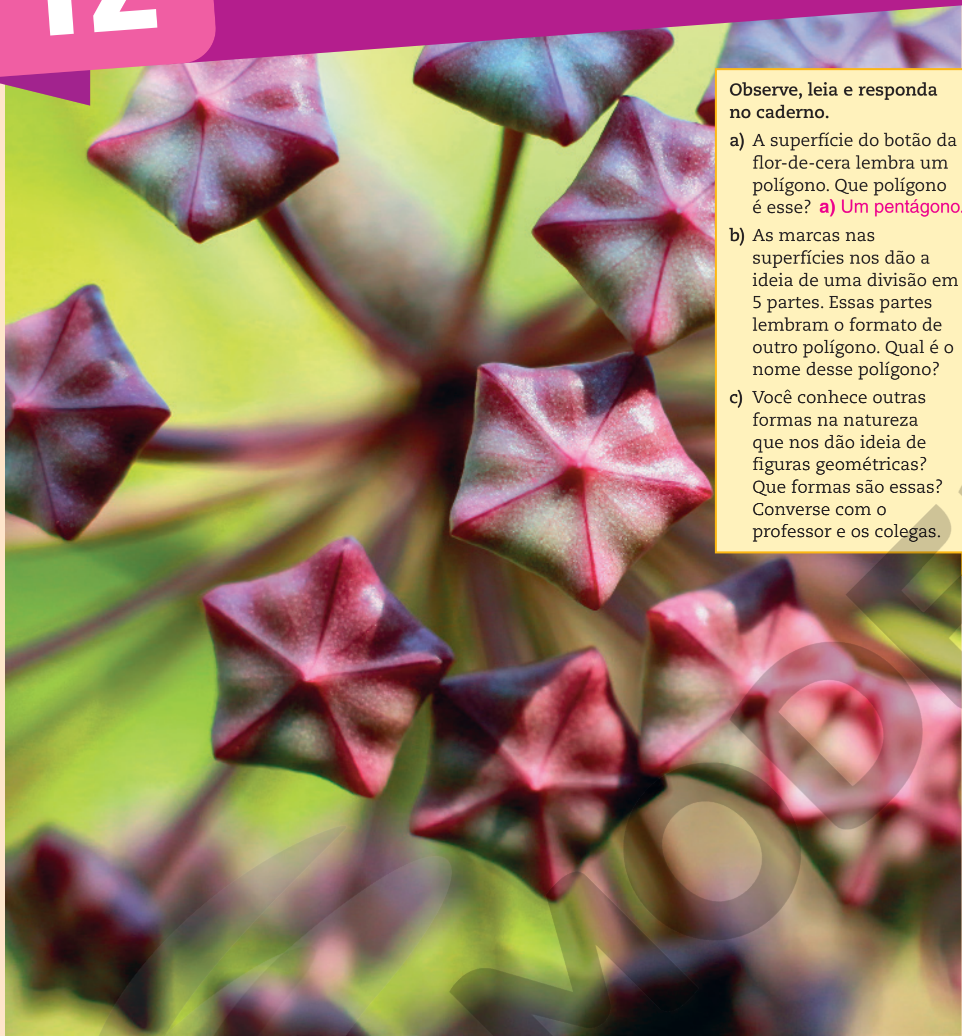
b) Indique as informações necessárias para determinarmos a medida da área de um:

• paralelogramo; • triângulo; • losango; • trapézio.

Capítulo

12 Geometria e grandezas

FARINPH/SHUTTERSTOCK



Observe, leia e responda no caderno.

a) A superfície do botão da flor-de-cera lembra um polígono. Que polígono é esse? **a)** Um pentágono.

b) As marcas nas superfícies nos dão a ideia de uma divisão em 5 partes. Essas partes lembram o formato de outro polígono. Qual é o nome desse polígono?

c) Você conhece outras formas na natureza que nos dão ideia de figuras geométricas? Que formas são essas? Converse com o professor e os colegas.

Botões da flor-de-cera (*Hoya imperialis*).

b) Triângulo. **c)** Resposta pessoal.

A natureza, produtora de espécimes exuberantes, é generosa em oferecer formas que encantam e que possibilitam desenvolver o sentido da estética nas pessoas.

Por meio da observação do objeto real, o ser humano apreende a beleza e projeta formas ideais, como as que estudaremos nos polígonos regulares.

251

Capítulo 12 – Geometria e grandezas

Os objetivos deste capítulo e suas justificativas, as indicações das habilidades e competências específicas da Matemática (BNCC), além de outras informações, estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas.

Neste capítulo, estudaremos os polígonos regulares, seus elementos e suas propriedades. Trataremos ainda da medida da área de um círculo e da medida do volume de um cilindro circular reto.

Ao iniciar o estudo deste capítulo, converse com os estudantes sobre os padrões geométricos observáveis na flora, na fauna e em diversos fenômenos naturais. São exemplos desses padrões: favos hexagonais de uma colmeia, espirais nas conchas de moluscos e na flor do girassol, formas regulares das teias de aranha e da casca do abacaxi, simetrias em borboletas, corujas e algumas plantas, como a flor-de-cera da fotografia de abertura.

Ao responder às questões propostas na abertura, é provável que os estudantes notem que os botões da flor-de-cera têm cinco lados, mas não se lembrem como nomear o polígono que a superfície dos botões faz lembrar. Incentive-os a associar os nomes dos polígonos ao número de lados para que concluam que a superfície em questão lembra um pentágono. De maneira análoga, os estudantes devem notar que cada uma das cinco partes que compõem a superfície de um botão da flor-de-cera tem três lados e lembra um triângulo.

Após a discussão com os estudantes sobre as outras formas na natureza que eles conhecem que dão ideia de figuras geométricas, proponha-lhes uma atividade para que relacionem padrões geométricos encontrados na natureza com padrões geométricos encontrados em obras de arte e arquitetônicas. Para isso, organize a turma em dois grupos e proponha a um deles que pesquise os padrões geométricos encontrados na natureza e ao outro que pesquise os padrões encontrados nas Artes plásticas e na Arquitetura. Organize uma exposição das imagens desses diferentes padrões em um mural construído pelos estudantes e converse com eles sobre as relações entre os padrões geométricos pesquisados pelos dois grupos, mostrando que muitas obras de arte e arquitetônicas são inspiradas na natureza.

Atividades como essa proporcionam uma ótima oportunidade para o desenvolvimento da **competência geral 9**.

Durante a pesquisa em grupo e a construção do mural, estimule a cooperação e o diálogo entre os estudantes e ajude-os a resolver possíveis conflitos que possam surgir, destacando a importância do respeito mútuo.

1. Polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência

Habilidade da BNCC: **EF08MA15**.

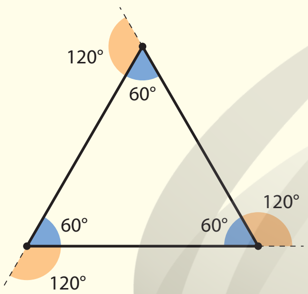
Este tópico possibilita ampliar a compreensão dos estudantes quanto à construção de polígonos regulares e de ângulos de 90°, 60°, 45° e 120°, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF08MA15).

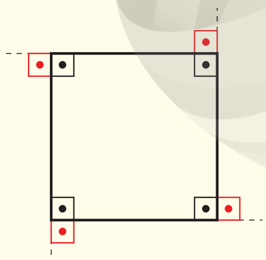
Pergunte a eles que formatos observados na natureza associam a polígonos regulares. Espera-se que identifiquem pelo menos os favos hexagonais de uma colmeia.

Aproveite esse momento para verificar os conhecimentos que os estudantes já têm sobre polígonos regulares. Peça-lhes exemplos desse tipo de polígono: quadrado, triângulo equilátero, hexágono regular etc.

Em seguida, retome com eles o conceito de polígono regular: “Todo polígono convexo que tem todos os lados de mesma medida e todos os ângulos internos congruentes entre si é um polígono regular”.

Se julgar conveniente, comente com os estudantes que os ângulos externos de um polígono regular também são congruentes entre si. Por exemplo:





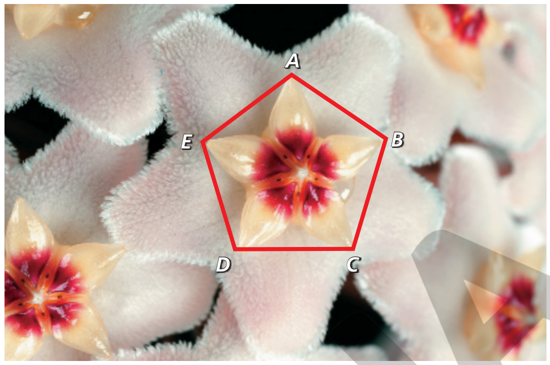
ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

1 Polígonos regulares inscritos e circunscritos em uma circunferência

Na abertura deste capítulo, lemos que a observação de objetos reais é assimilada pelo ser humano. A partir daí, ele imagina e elabora os correspondentes objetos ideais e, assim, promove novos conhecimentos.

No pentágono regular *ABCDE* destacado na fotografia da flor-de-cera (*Hoya carnosa*), temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EA}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E}$



FOTOGRAFIA: NORDRODEN/SHUTTERSTOCK / ILUSTRAÇÃO: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

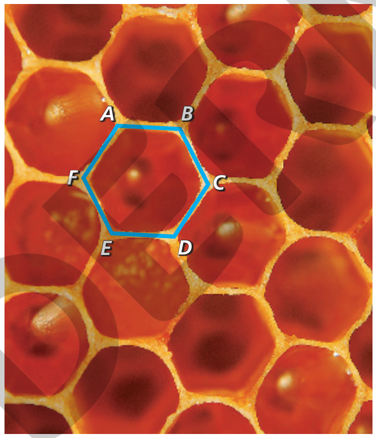
Flor-de-cera (*Hoya carnosa*).

Observe que o alvéolo de um favo de mel também nos faz lembrar um polígono, que é o hexágono regular.

No hexágono regular *ABCDEF* destacado na fotografia, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FA}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D} \cong \hat{E} \cong \hat{F}$

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)



FOTOGRAFIA: DARIOS/SHUTTERSTOCK/ ILUSTRAÇÃO: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

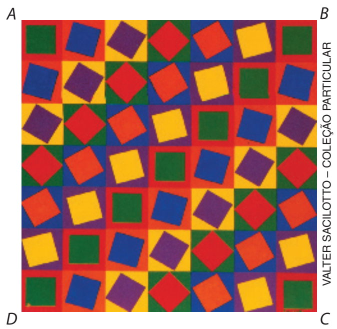
Alvéolos de favo de mel.

DANILLO SOUZA/ ARQUIVO DA EDITORA

Os polígonos regulares também são bastante usados nas artes plásticas, especialmente em algumas obras de tendências modernistas. Observe a reprodução de uma obra do pintor paulista Luiz Sacilotto (1924-2003), cujo formato lembra um quadrado.

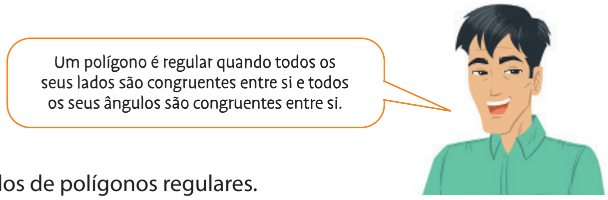
No quadrado *ABCD* indicado na reprodução da obra, temos:

- $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{DA}$
- $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C} \cong \hat{D}$



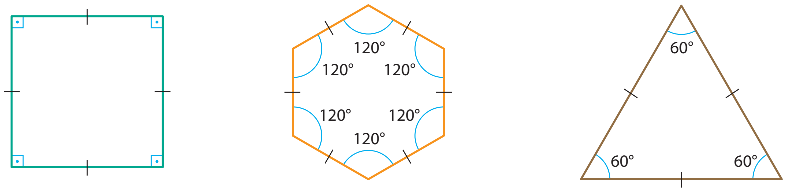
VALTER SACILOTTO – COLEÇÃO PARTICULAR

SACILOTTO, L. **Concreção 8457**. 1984. Têmpera rhodopás sobre tela fixada em duratex, 20 cm × 20 cm. Coleção particular.



ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

Observe alguns exemplos de polígonos regulares.



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

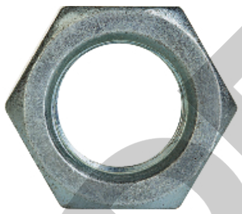
Propriedades dos polígonos regulares

Considere alguns objetos.

A moeda de 25 centavos cunhada no biênio 1994-1995 tem ao fundo o desenho que lembra um heptágono regular. Essa situação sugere um polígono cujos vértices estão sobre uma circunferência. Nesse caso, dizemos que o polígono está **inscrito na circunferência**.

BANCO CENTRAL DO BRASIL

A porca representada na imagem ao lado tem uma parte com o formato circular e a outra parte com o formato de um hexágono regular. Essa situação sugere um polígono cujos lados são tangentes a uma circunferência. Nesse caso, dizemos que o polígono está **circunscrito à circunferência**.



DAVYDENKO YULIIA/SHUTTERSTOCK

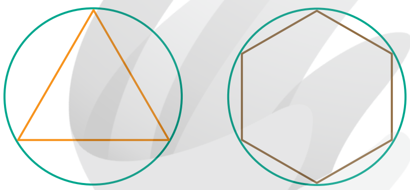
(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Podemos dizer que, se um polígono é regular, então existe uma circunferência que passa por todos os seus vértices e outra que tangencia todos os seus lados.

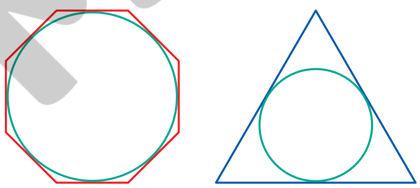
Enunciamos as propriedades a seguir.

Todo polígono regular é inscritível em uma circunferência.
Todo polígono regular é circunscritível a uma circunferência.

Observe os exemplos.



Polígonos regulares inscritos em uma circunferência

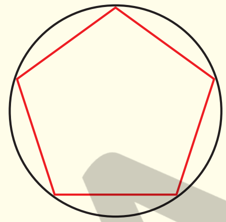


Polígonos regulares circunscritos em uma circunferência

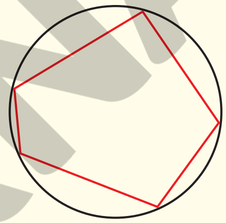
ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedades dos polígonos regulares

Destaque para os estudantes que um polígono é inscritível em uma circunferência quando todos os seus vértices pertencem a essa circunferência. Nesse caso, a circunferência se diz circunscrita ao polígono.

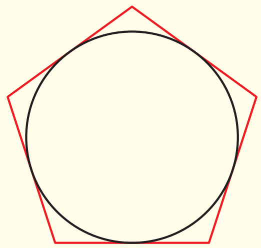


pentágono regular inscrito

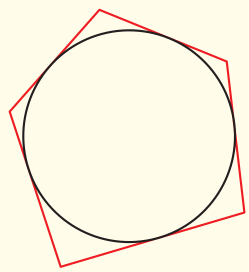


pentágono não regular inscrito

Comente também que um polígono é circunscritível a uma circunferência quando todos os seus lados são tangentes a ela. Nesse caso, a circunferência se diz inscrita no polígono.



pentágono regular circunscrito



pentágono não regular circunscrito

ILUSTRAÇÕES: WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

Propriedades dos polígonos regulares

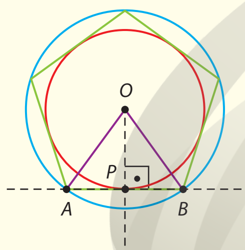
Se julgar necessário, retome os conceitos de corda, diâmetro e raio de uma mesma circunferência.

- **Corda:** todo segmento de reta cujas extremidades são pontos de uma mesma circunferência.
- **Diâmetro:** toda corda que passa pelo centro da circunferência (a maior das cordas).
- **Raio:** todo segmento de reta cujas extremidades são um ponto da circunferência e o seu centro (a medida do comprimento de um raio é a metade da medida do comprimento de um diâmetro).

Reproduza na lousa a construção dos quadrados inscrito e circunscrito para os estudantes acompanharem cada etapa. Então, seguindo passo a passo a descrição do fluxograma, mostre a eles como verificar qual dos quadrados é inscrito e qual é circunscrito à circunferência. Depois, pergunte como seriam os passos da construção de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência e de um triângulo equilátero circunscrito a uma circunferência. Espera-se que eles percebam que devem dividir a circunferência em três arcos congruentes de 120°.

Se julgar conveniente, demonstre para a turma a afirmação do boxe **Observação**.

REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

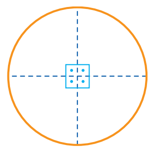


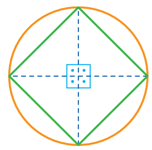
Os triângulos APO e BPO são triângulos retângulos. Como as hipotenusas $\overline{AO}$ e $\overline{BO}$ são congruentes (raios da circunferência maior) e $\overline{OP}$ (lado comum) é cateto dos dois triângulos, então os triângulos APO e BPO são congruentes. Portanto, $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são congruentes. Logo, P é o ponto médio de $\overline{AB}$ (lado do polígono).

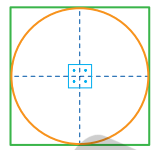
Acompanhe, a seguir, como inscrever e como circunscrever um quadrado.

- Nesta circunferência, vamos traçar um diâmetro qualquer e a sua mediatriz, obtendo o diâmetro perpendicular a ele. Observe que a circunferência ficou dividida em quatro arcos congruentes de 90°.
- As cordas determinadas pelos pontos consecutivos de divisão formam um quadrado inscrito na circunferência.
- As tangentes determinadas pelos pontos de divisão formam um quadrado circunscrito à circunferência.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA





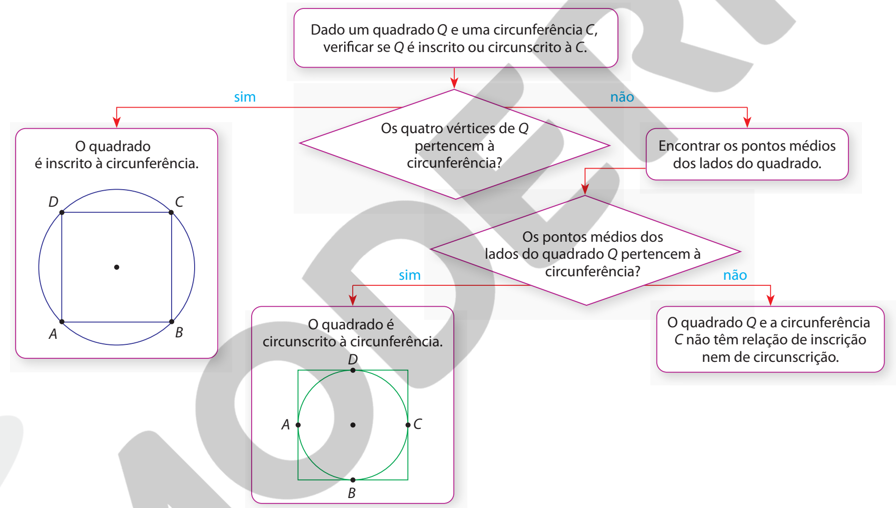


Generalizando, dizemos que:

- se uma circunferência é dividida em três ou mais arcos congruentes, então as cordas determinadas pelos pontos consecutivos de divisão formam um polígono regular **inscrito** na circunferência;
- se uma circunferência é dividida em três ou mais arcos congruentes, então as tangentes aos pontos consecutivos de divisão formam um polígono regular **circunscrito** à circunferência.

Com base no que estudamos, podemos construir o fluxograma a seguir, que verifica se um quadrado é inscrito ou circunscrito a uma circunferência.

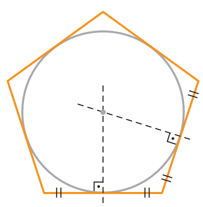
WLAMIR MASIRO/ARQUIVO DA EDITORA



Observação

- A circunferência inscrita em um polígono regular tangencia os lados desse polígono nos seus respectivos pontos médios.

REINALDO VIGNATI/ARQUIVO DA EDITORA

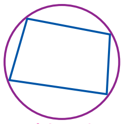


EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

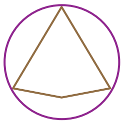
1 Indique se o polígono é inscrito na circunferência, circunscrito a ela ou se nenhum dos casos se aplica ao item.

a)



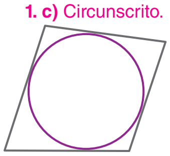
1. a) Inscrito.

b)



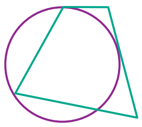
1. b) Nenhum dos casos.

c)



1. c) Circunscrito.

d)



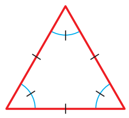
1. d) Nenhum dos casos.

2 Considere um quadrado circunscrito e suas diagonais. A tangência entre essas figuras e as intersecções das diagonais do quadrado com a circunferência determinam 8 pontos. Ao unir esses pontos com segmentos de reta, obtemos um polígono. Faça um esboço dessa construção e indique se o polígono será inscrito ou circunscrito à circunferência.

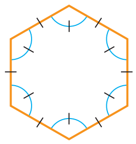
2. Construção de figura. O polígono (octógono) será inscrito na circunferência.

3 Indique os itens que não apresentam polígonos regulares. Em seguida, justifique.

a)

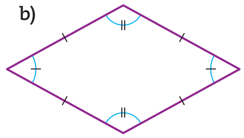


c)

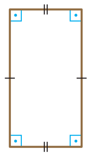


3. b) Não é polígono regular, pois não tem todos os ângulos congruentes.

b)



d)



3. d) Não é polígono regular, pois não tem todos os lados congruentes.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

4 Para a construção de um hexágono regular inscrito, usando compasso, régua e transferidor, quais são os passos a serem seguidos? Construa um fluxograma com esses passos e compartilhe com o professor e os colegas.

4. Construção de fluxograma.

PARA SABER MAIS

Determinando aproximações do número *pi*

Muitos matemáticos gregos da Antiguidade preocuparam-se com medidas de comprimento e de área, sobretudo Eudoxo de Cnido (408-355 ? a.C.) e, depois, Arquimedes de Siracusa (287-212 ? a.C.).

Arquimedes foi um dos maiores matemáticos da Antiguidade, embora o centro da Matemática no período em que viveu, chamado de Idade Helenística, estivesse em Alexandria (no Egito).

Esse sábio — que era matemático, físico e inventor — nasceu no início do século III a.C., em Siracusa (cidade localizada na atual ilha da Sicília, na Itália), e morreu em 212 a.C., durante um ataque dos romanos à cidade.

Sempre muito engenhoso, mesmo durante o cerco à cidade pelas tropas romanas, Arquimedes inventou catapultas para lançar pedras, assim como polias e ganchos para espatifar navios romanos. Com essas e outras invenções, ele conseguiu manter o inimigo distante por, pelo menos, três anos. Contudo, durante o massacre que sucedeu a tomada de Siracusa, Arquimedes foi assassinado por um soldado romano, apesar das ordens expressas do general Marcelo para que preservassem a vida do grande sábio.

CHRIS HELLIER/GETTY IMAGES

Catapulta.

Proponha aos estudantes que determinem experimentalmente aproximações de π para 3,14 usando diferentes latas cilíndricas, barbante, fita métrica e calculadora. Eles podem calcular a razão entre a medida do comprimento da circunferência que delimita o cilindro pela medida de seu diâmetro.

Exercícios propostos

No **exercício 1**, peça aos estudantes que justifiquem suas respostas. No **item b**, espera-se que eles percebam que um dos vértices do quadrilátero não pertence à circunferência. Aproveite o **item d** para questionar se é possível um polígono ser inscrito ou circunscrito tendo um vértice na parte interna e outro na parte externa da circunferência.

As resoluções dos **exercícios 1** a **4** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Para saber mais

O intuito desta seção é apresentar o número π como um exemplo de número irracional, descrevendo uma de suas aproximações, obtida por Arquimedes.

Comente com os estudantes que todo número racional pode ser expresso por uma fração cujos termos são dois números inteiros (com denominador não nulo). Desse modo, os números racionais ou são inteiros (dados por frações aparentes), ou têm forma decimal exata $\left(\text{como } \frac{2}{5}, \text{ que é igual a } 0{,}4\right)$, ou têm forma decimal infinita e periódica $\left(\text{dízimas periódicas, como } 0{,}33333\ldots, \text{ cuja fração geratriz é } \frac{1}{3}\right)$.

No entanto, há números cuja forma decimal é infinita e não periódica, como 0,023002300023...; tais números não são racionais.

Desse modo, os estudantes podem perceber que há outros tipos de número. Os **números irracionais** são números que têm a notação decimal infinita e não periódica (como as raízes quadradas não exatas; por exemplo, $\sqrt{2}$).

O número π é outro exemplo de número irracional; ele é definido pela razão entre a medida do comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro.

No livro do 9º ano, trataremos desses dois tipos de número (números racionais e números irracionais), ao abordar o conjunto dos números reais.

Elementos de um polígono regular

Chame a atenção dos estudantes para o fato de que o apótema do polígono é o raio da circunferência nele inscrita.

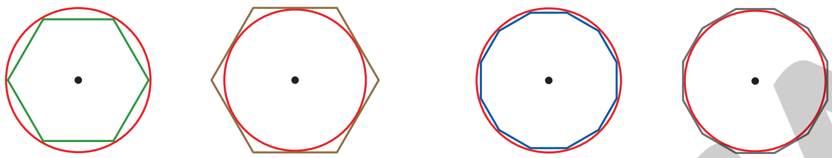
Prepare antecipadamente folhas de papel sulfite com desenhos de vários tipos de polígono regular e entregue uma a cada estudante. Peça a eles que destaquem os elementos desses polígonos regulares.

Depois, em duplas, solicite aos estudantes que comparem os elementos destacados, fazendo os acertos que julgarem necessários.

Ao final, faça a análise de cada uma das figuras com toda a turma, verificando se eles indicaram os elementos dos polígonos corretamente. Certifique-se de que os estudantes compreenderam o conceito de apótema e de ângulo central de um polígono regular.

Entre as obras escritas por esse matemático grego, aproximadamente dez tratados foram preservados até hoje. No que diz respeito à medida de comprimentos e de áreas, destacamos um tratado de Geometria plana denominado *A medida do círculo*. Nele, Arquimedes faz uma aproximação para a medida do comprimento da circunferência, estabelecendo, pela primeira vez, um método para o cálculo de valores aproximados de um número não racional, o **número irracional** hoje denominado π, que é a razão entre as medidas do comprimento e do diâmetro da circunferência.

O comprimento da circunferência fica entre o perímetro de qualquer polígono regular inscrito e qualquer polígono regular circunscrito, como sugerem as figuras a seguir.



Hexágono regular inscrito (6 lados) — **Hexágono regular circunscrito** (6 lados) — **Dodecágono regular inscrito** (12 lados) — **Dodecágono regular circunscrito** (12 lados)

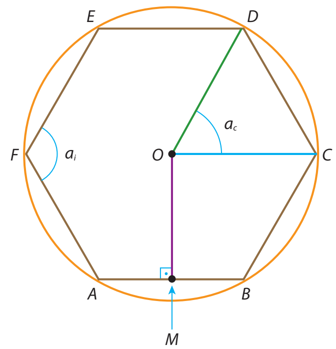
Para calcular a medida do comprimento da circunferência de raio de medida 1, em unidade de comprimento, Arquimedes considerou, inicialmente, a medida do perímetro dos hexágonos regulares inscrito e circunscrito à circunferência. Depois, ele comparou o comprimento dela com o perímetro de outros polígonos regulares inscritos e circunscritos, dobrando o número de lados a cada comparação. Ao calcular a medida do perímetro dos polígonos inscrito e circunscrito de 12, 24, 48 e 96 lados, Arquimedes obteve resultados que se aproximavam cada vez mais de 2π.

Foi assim que Arquimedes obteve a primeira aproximação historicamente conhecida para a medida do comprimento da circunferência, bem como para o número π. Ele chegou à conclusão de que π era um número entre $\frac{223}{71}$ e $\frac{22}{7}$, ou seja, 3,140... e 3,142... Assim, Arquimedes obteve uma aproximação para π com duas casas decimais. Esse método é conhecido como **método clássico** para o cálculo de π.

Elementos de um polígono regular

Em um polígono regular, temos:

- **centro do polígono**: centro da circunferência circunscrita a ele (na figura, o ponto O);
- **raio do polígono**: raio da circunferência circunscrita a ele (na figura, $\overline{OC}$ e $\overline{OD}$);
- **apótema do polígono**: segmento que une o centro do polígono ao ponto médio de um de seus lados (na figura, $\overline{OM}$);
- **ângulo central**: aquele cujo vértice é o centro do polígono e cujos lados são semirretas que contêm dois vértices consecutivos do polígono (na figura, $C\hat{O}D$).

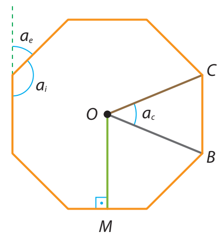


ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

Representando por a_c a medida do ângulo central de um polígono regular de n lados, por a_i a medida do ângulo interno e por S_i a soma das medidas dos ângulos internos, temos:

$$a_i = \frac{S_i}{n} \qquad S_i = (n-2) \cdot 180° \qquad a_c = \frac{360°}{n}$$

Como exemplo, vamos considerar este octógono regular.



- O ponto O é o centro do octógono.
- Os segmentos $\overline{OC}$ e $\overline{OB}$ são raios.
- O segmento $\overline{OM}$ é um dos apótemas.
- O ângulo $C\hat{O}B$ é um ângulo central.

A medida a_c de um ângulo central desse polígono é dada por:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

Assim, como $n = 8$, temos: $a_c = \frac{360°}{8} = 45°$

A medida a_i de um ângulo interno desse polígono é dada por:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$$

Assim, como $n = 8$, temos: $a_i = \frac{(8-2) \cdot 180°}{8} = 135°$

Uma maneira de obter a medida a_e de um ângulo externo desse polígono é utilizando a fórmula $a_i + a_e = 180°$. Assim, $135° + a_e = 180°$, ou seja, $a_e = 45°$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

5 Calcule a medida do ângulo central de um triângulo equilátero. **5.** 120°

6 Qual é o polígono regular em que as medidas do ângulo central, do ângulo interno e do ângulo externo são todas iguais? Qual é o valor delas?
6. Quadrado; $a_c = 90°$; $a_i = 90°$; $a_e = 90°$.

7 Um polígono regular tem 20 lados.

a) Quanto mede seu ângulo central? **7. a)** 18°

b) Quanto mede seu ângulo interno? E seu ângulo externo? **7. b)** 162°; 18°.

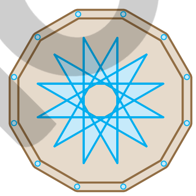
8 Quantos lados tem um polígono regular em que:

a) o ângulo interno mede 144°? **8. a)** 10 lados.

b) o ângulo externo mede 30°? **8. b)** 12 lados.

c) o ângulo central mede 10°? **8. c)** 36 lados.

9 A figura central do tampo de uma mesa foi formada a partir de um dodecágono regular, como indicado na figura a seguir. Determine a medida do ângulo central desse dodecágono.
9. 30°



ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

10 A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 3 240°.

Determine:

a) a medida do ângulo central desse polígono;

b) a medida do ângulo externo desse polígono.

10. a) $a_c = 18°$ **10. b)** $a_e = 18°$

Exercícios propostos

No **exercício 9**, chame a atenção dos estudantes para observarem que, quanto maior for o número de lados de um polígono regular, menor será a medida de seu ângulo central. Nesse caso, há um polígono regular de 12 lados; logo, para obter a medida de seu ângulo central, podemos efetuar:

$$a_c = \frac{360°}{12}$$

$$a_c = 30°$$

Para a resolução do **item a** do **exercício 10**, lembre os estudantes de que a medida de um ângulo central (a_c) de um polígono regular é dada por $a_c = \frac{360°}{n}$; portanto, é necessário determinar o número de lados (n) desse polígono.

Como a soma das medidas dos ângulos internos (S_i) desse polígono regular é conhecida, é possível determinar o número de lados (n) do polígono pela relação $S_i = (n-2) \cdot 180°$ e, assim, obtemos:

$$S_i = 3\,240° = (n-2) \cdot 180°$$
$$3\,240° = 180° \cdot n - 360°$$
$$3\,240° + 360° = 180° \cdot n$$
$$3\,600° = 180° \cdot n$$
$$\frac{3\,600°}{180°} = \frac{180°}{180°}n$$
$$n = 20$$
$$a_c = \frac{360°}{20} = 18°$$

Assim, o ângulo central desse polígono mede 18°.

Para a resolução do **item b** do **exercício 10**, lembre os estudantes de que a medida de um ângulo externo (a_e) de um polígono regular é dada pela relação $a_i + a_e = 180°$ e que a medida de um ângulo interno (a_i) de um polígono regular é dada por $a_i = \frac{S_i}{n}$. Assim:

$$a_i = \frac{3\,240°}{20} = 162°$$
$$162° + a_e = 180°$$
$$a_e = 180° - 162° = 18°$$

Portanto, o ângulo externo desse polígono mede 18°.

As resoluções dos **exercícios 5** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Exercícios propostos

O **exercício 12** é uma atividade procedimental na qual os estudantes, com base nos conceitos aprendidos, resolvem itens cuidadosamente dirigidos para ajudá-los na construção de um novo conhecimento.

Para a resolução do **item a**, é importante observar que $OA = OB = OC$ (medidas de raios dessa circunferência), o que comprova que os triângulos OAB e OBC são isósceles.

No **item b**, o ângulo $O\hat{B}A$ é um dos ângulos da base do triângulo OAB, e o outro ângulo dessa mesma base é o de medida x. Assim: $m(O\hat{B}A) = x$. Portanto, a medida a_c do ângulo central é dada por:

$a_c + 2x = 180°$

$a_c = 180° - 2x$

No **item c**, o triângulo isósceles OBC também tem ângulos da base medindo x cada um, pois o ângulo do vértice desse triângulo também é o ângulo central de medida $a_c = 180° - 2x$ do polígono regular considerado. Como o ângulo $A\hat{B}C$ é obtido pela soma de um ângulo da base de cada triângulo isósceles (OAB e OBC), sua medida é dada por:

$m(A\hat{B}C) = x + x = 2x$

Como a soma do ângulo $A\hat{B}C$ com o ângulo externo de medida a_e é um ângulo raso, obtemos:

$m(A\hat{B}C) + a_e = 180°$

$2x + a_e = 180°$

$a_e = 180° - 2x$

Então, no **item d**, as medidas do ângulo central e do ângulo externo são iguais: $a_c = a_e$.

O **exercício 13** é uma boa oportunidade de conversar com a turma sobre o uso de diferentes estratégias para a resolução de problemas.

As resoluções dos **exercícios 11** e **13** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

11 A figura a seguir é um selo comemorativo dos 50 anos de fundação de um colégio.

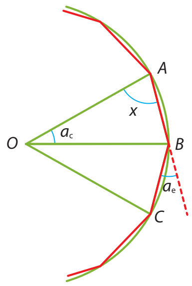
Sabendo que o hexágono desenhado nesse selo é regular, determine as medidas do ângulo central, do ângulo externo e do ângulo interno desse hexágono. **11.** 60°, 60°, 120°.

12 Reúna-se com um colega e façam o que se pede.

Copiem no caderno a figura a seguir. Nela, temos parte de um polígono regular de n lados e de uma circunferência de centro O circunscrita a esse polígono.

Indicamos por a_c, a_e e x as medidas dos ângulos central, externo e $O\hat{A}B$, respectivamente.

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA



12. b) x; $180° - 2x$. **12. c)** $2x$; $180° - 2x$.

a) Classifiquem, quanto às medidas dos lados, os triângulos OAB e OBC. Esses triângulos são congruentes? **12. a)** Isósceles, isósceles; sim.

b) Representem, em função de x, as medidas do ângulo $O\hat{B}A$ e do ângulo central.

c) Representem, em função de x, as medidas do ângulo $A\hat{B}C$ e do ângulo externo.

d) Qual é a relação entre as medidas do ângulo central e do ângulo externo?

12. d) São iguais.

13 *Hora de criar* – Ainda em dupla, façam o que se pede.

Cada um deve traçar duas circunferências de raio medindo 4 cm e escolher um polígono regular com n lados, $n \geqslant 6$, para ser construído pelo outro de duas maneiras.

I. Traçam-se n ângulos centrais adjacentes de medida $\frac{360°}{n}$ cujos lados determinam, na circunferência, os n vértices do polígono. Em seguida, traçam-se os lados do polígono.

II. Traça-se um só ângulo central de medida $\frac{360°}{n}$, determinando, na circunferência, os vértices A e B. Usando um compasso com abertura igual a AB, marcam-se na circunferência, a partir de B, os demais vértices. Em seguida, traçam-se os lados do polígono.

Depois de cada um construir o polígono das duas maneiras, discutam e escolham qual delas é a melhor. Justifiquem a escolha.

(Ao usarem o compasso, atenção para não se machucarem com a ponta-seca!)

13. Construção de figura. Respostas pessoais.

2 Cálculo intuitivo da medida da área do círculo

Em Matemática, a tentativa de resolução de problemas, sendo ou não insolúveis, como o da quadratura do círculo com régua e compasso, em geral, leva à criação de novos conceitos e ideias. Para os gregos, obter a medida do comprimento do lado do quadrado de mesma área que um círculo significava calcular a medida da área de um círculo.

O método clássico ou método de exaustão criado por Eudoxo e Arquimedes também foi aplicado para calcular a medida da área do círculo.

De maneira simples, podemos dizer que eles pensaram assim: sabiam que todo polígono pode ser decomposto em triângulos e sabiam calcular a medida da área de um triângulo; logo, podiam calcular a medida da área de qualquer polígono regular, inscrito ou circunscrito em um círculo, com um número n de lados cada vez maior, aproximando-se cada vez mais da medida da área do círculo.

Arquimedes começou por calcular a medida do perímetro (e, consequentemente, da área) de um hexágono regular inscrito, depois foi dobrando o número de lados até chegar ao polígono de 96 lados. Aqui, vamos simplificar iniciando com um quadrado inscrito e dobrando o número de lados por duas vezes, apenas para ilustrar a ideia.

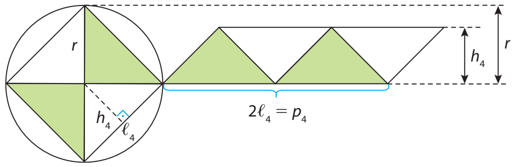
Agora, observe na figura 1 que a medida da área do quadrado de lado ℓ_4 é igual à medida da área S_{P_4} do paralelogramo de base medindo $2\ell_4$ e altura medindo h_4, que é menor do que a medida da área S_C do círculo.

Note que $2\ell_4$ é a medida do semiperímetro p_4 do quadrado e que podemos escrever:

$$S_{i_4} = p_4 \cdot h_4 < S_C,$$

em que S_{i_4} é a medida da área do polígono regular inscrito de 4 lados, p_4 é a medida do semiperímetro do quadrado e h_4 é a medida da altura de cada triângulo da divisão.

Figura 1



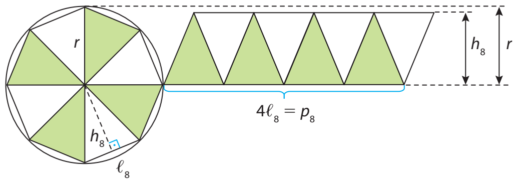
Na figura 2, a medida da área do octógono de lado medindo ℓ_8 é igual à medida da área S_{P_8} do paralelogramo de base medindo $4\ell_8$ e altura medindo h_8, que é menor do que a medida da área S_C do círculo.

Note que $4\ell_8$ é a medida do semiperímetro p_8 do octógono e que podemos escrever:

$$S_{i_8} = p_8 \cdot h_8 < S_C,$$

em que S_{i_8} é a medida da área do polígono regular inscrito de 8 lados, p_8 é a medida do semiperímetro do octógono e h_8 é a medida da altura de cada triângulo da divisão.

Figura 2



Na figura 3, a medida da área do **hexadecágono** de lado medindo ℓ_{16} é igual à medida da área $S_{P_{16}}$ do paralelogramo de base medindo $8\ell_{16}$ e altura medindo h_{16}, que é menor do que a medida da área S_C do círculo.

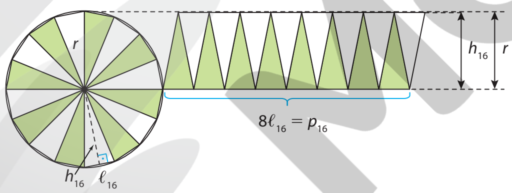
Hexádecagono: polígono de 16 lados.

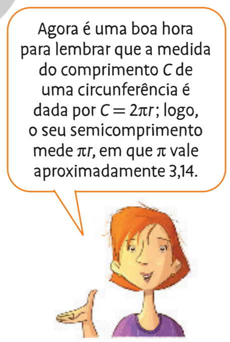
Note que $8\ell_{16}$ é a medida do semiperímetro p_{16} do hexadecágono e que podemos escrever:

$$S_{i_{16}} = p_{16} \cdot h_{16} < S_C,$$

em que $S_{i_{16}}$ é a medida da área do polígono regular inscrito de 16 lados, p_{16} é a medida do semiperímetro do hexadecágono e h_{16} é a medida da altura de cada triângulo da divisão.

Figura 3





SIDNEY MEIRELES/ARQUIVO DA EDITORA

Temos uma sequência de medidas de áreas crescentes $S_{i_n} = p_n \cdot h_n$, isto é, cada vez maiores, mas que têm um limite, que é a medida da área S_C do círculo. Os valores da sequência se aproximam da medida da área do círculo sem nunca alcançá-la.

$$S_{i_4} < S_{i_8} < S_{i_{16}} < ... < S_C$$

ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

2. Cálculo intuitivo da medida da área do círculo

Habilidade da BNCC: **EF08MA19**.

Este tópico possibilita ampliar a compreensão dos estudantes quanto à resolução de problemas que envolvam cálculos de medidas de área de triângulos e de círculos, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF08MA19).

Reproduza na lousa as figuras de cada etapa apresentada e discuta com os estudantes o procedimento para a obtenção da medida da área de um círculo por aproximações das áreas de polígonos regulares inscritos no círculo, de modo que eles compreendam todas as etapas.

Ressalte que a medida do semiperímetro é a metade da medida do perímetro. Por exemplo, a medida do perímetro de um quadrado de lado ℓ é 4ℓ. Por isso, a medida do seu semiperímetro é 2ℓ.

Ao discutir os exemplos apresentados com os estudantes, comente que, em geral, usamos $\pi = 3{,}14$ como aproximação nos cálculos.

Exercícios propostos

No **exercício 16**, lembre aos estudantes que a medida do comprimento C de uma circunferência é dada por $C = 2\pi r$ e que a medida do raio de uma circunferência é igual à metade da medida do seu diâmetro.

Assim, considerando que a medida do diâmetro das rodas de uma bicicleta é 70 cm, com $\pi = 3{,}14$, a medida do comprimento da circunferência das rodas é 219,8 cm.

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 35$

$C = 219{,}8$

Então, após 100 voltas das rodas, a bicicleta percorreu 21 980 cm.

$219{,}8 \cdot 100 = 21\,980$

Lembre aos estudantes que 1 metro equivale a 100 centímetros; portanto, após 100 voltas das rodas, a bicicleta percorreu 219,8 m.

$\dfrac{21\,980}{100} = 219{,}8$

Alternativa **b**.

Apresentamos a seguir uma resolução possível para o **exercício 17**.

Considerando que o diâmetro do ralo mede 10 cm, o diâmetro de 6 buracos mede 2 cm e os dos outros 6 buracos medem 1 cm, obtemos, em cm²:

- $S_{\text{ralo sem buracos}} = \pi \cdot \left(\dfrac{10}{2}\right)^2$

  $S_{\text{ralo sem buracos}} = 25\pi$
- $S_{\text{buraco maior}} = \pi \cdot \left(\dfrac{2}{2}\right)^2$

  $S_{\text{buraco maior}} = \pi$
- $S_{\text{buraco menor}} = \pi \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

  $S_{\text{buraco menor}} = \dfrac{\pi}{4}$

Então, a medida da área do ralo com os buracos, em cm², é dada por:

$S_{\text{ralo com buracos}} = 25\pi - 6 \cdot \pi - 6 \cdot \dfrac{\pi}{4}$

$S_{\text{ralo com buracos}} = 25\pi - 6\pi - 1{,}5\pi$

$S_{\text{ralo com buracos}} = 25\pi - 7{,}5\pi$

$S_{\text{ralo com buracos}} = 17{,}5\pi$

Alternativa **d**.

As resoluções dos **exercícios 14**, **15** e **18** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Como, ao aumentar o número n de lados dos polígonos, as medidas dos semiperímetros p_n se aproximam da medida do semicomprimento πr da circunferência do círculo e as medidas das alturas h_n se aproximam de r, medida do raio do círculo, obtemos a medida da área S_C do círculo substituindo h_n por r e p_n por πr na igualdade $S_{i_n} = p_n \cdot h_n$:

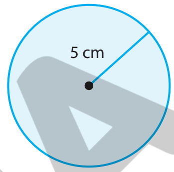
$$S_{i_n} = p_n \cdot h_n = (\pi r) \cdot r = \pi r^2$$

Assim, temos:

$$\boxed{S_C = \pi r^2}$$

Acompanhe alguns exemplos.

a) Os valores aproximados da medida do comprimento C da circunferência e da medida da área S do círculo de raio medindo 5 cm são dados por:



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

$C \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot 5 = 31{,}4$

$S \simeq 3{,}14 \cdot 5^2 = 3{,}14 \cdot 25 = 78{,}5$

A circunferência de raio medindo 5 cm tem comprimento medindo aproximadamente 31,4 cm e o seu círculo tem medida de área aproximadamente igual a 78,5 cm².

b) A lona lateral do picadeiro (em vermelho) de um circo foi montada sobre uma circunferência de comprimento medindo 78,5 m.

IZAAC BRITO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a medida do raio desse picadeiro?

$C = 2\pi r$

$78{,}5 \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot r$

$r \simeq \dfrac{78{,}5}{2 \cdot 3{,}14} = \dfrac{78{,}5}{6{,}28} = 12{,}5$

O picadeiro do circo tem raio medindo aproximadamente 12,5 metros.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

14 Sabendo que o hexágono inscrito na circunferência é regular e tem lado medindo 9 cm, calcule a medida: **14. b)** Aproximadamente 56,52 cm.

a) do raio da circunferência; **14. a)** 9 cm

b) do comprimento da circunferência;

c) da área do círculo delimitado pela circunferência. **14. c)** Aproximadamente 254,47 cm².

15 (Saresp) O desenho representa um brinco formado por duas circunferências tangentes. A medida do diâmetro da maior é o dobro da medida do diâmetro da menor. Se a medida do comprimento da circunferência menor é igual a C, então a medida do comprimento da maior é:

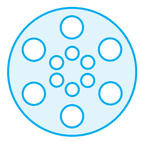
a) $2\pi C$. b) πC. c) $2C$. d) C.

15. Alternativa **c**.

16 (Saresp) As rodas de uma bicicleta têm 70 cm de medida do diâmetro. Assinale a alternativa que mostra a medida da distância, em metro, percorrida pela bicicleta após 100 voltas das rodas. (Considere $\pi = 3{,}14$.) **16.** Alternativa **b**.

a) 109,9 b) 219,8 c) 3 846,5 d) 15 386

17 Um ralo circular de chão de medida de 10 cm de diâmetro, feito em alumínio, foi projetado com 12 buracos circulares, sendo 6 buracos com 2 cm de medida de diâmetro e 6 com 1 cm de medida de diâmetro. Qual é a medida aproximada da área, em cm², ocupada pelo alumínio?



17. Alternativa **d**.

a) 25π b) 19π c) $7{,}5\pi$ d) $17{,}5\pi$

18 *Hora de criar* – Em dupla, cada um cria um problema sobre área de círculo. Troquem de caderno e, depois de cada um resolver o problema elaborado pelo outro, destroquem para corrigi-los. **18.** Resposta pessoal.

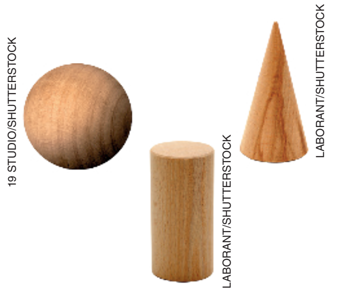
ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

3 Relação entre volume e capacidade

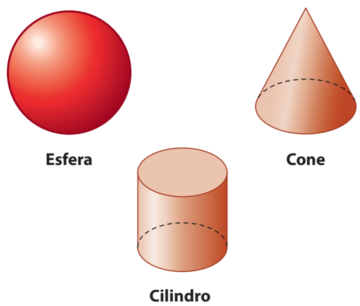
Volume do cilindro circular reto

No 6º ano, você deve ter estudado os corpos redondos, aqueles que têm pelo menos uma parte da superfície com forma arredondada.

Observe algumas fotografias de objetos e os respectivos corpos redondos que eles lembram.

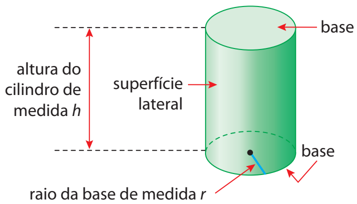


Objetos de madeira.



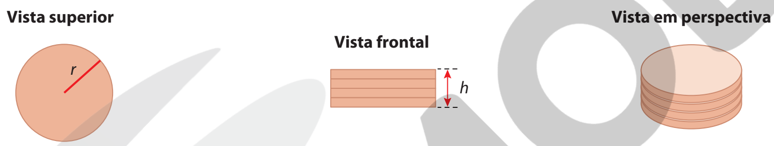
ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

Por ora, vamos voltar a atenção para o cilindro reto, destacando alguns de seus elementos.



A maneira como observamos os objetos pode nos fornecer ou omitir informações sobre eles.

Observe como poderiam ser representadas algumas vistas de uma pilha de bolachas com o formato cilíndrico, cujas medidas r e h são dadas em centímetro.



ILUSTRAÇÕES: ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

Na vista superior, notamos apenas uma superfície circular e podemos calcular a medida da área dessa superfície, em cm², que é uma base do cilindro: $S_b = \pi r^2$

Na vista frontal, percebemos apenas a altura de medida h da pilha de bolachas.

Se $h = 1$, a medida do volume do cilindro é $V_c = \pi r^2$; se $h = 2$, a medida do volume do cilindro é $V_c = \pi r^2 \cdot 2$; se $h = 3$, a medida do volume do cilindro é $V_c = \pi r^2 \cdot 3$, e assim por diante, com as medidas de volume sempre dadas em cm³.

A medida do volume dessa pilha cilíndrica de bolachas é dada pelo produto entre as medidas da área da base e da altura.

$$V_c = \pi r^2 h$$

3. Relação entre volume e capacidade

Discuta com os estudantes o procedimento realizado para o cálculo da medida do volume de um cilindro circular reto.

Se julgar adequado, aproveite esse momento para apresentar a eles o cálculo das medidas das áreas lateral e total desse cilindro. Para isso, providencie vários modelos desse tipo de cilindro para que os estudantes possam manipulá-los.

Ao observar a planificação da superfície desse sólido, eles poderão calcular as medidas da área lateral e da área de cada base do cilindro.

261

Exercícios propostos

Para a resolução do **exercício 19**, lembre aos estudantes que a medida do volume de um cilindro reto é dada por $V_c = \pi r^2 h$. Assim, para o cilindro C_1, de raio medindo 3 cm e altura medindo 5 cm, obtemos:

$V_{C_1} = \pi \cdot 3^2 \cdot 5$

$V_{C_1} = \pi \cdot 9 \cdot 5$

$V_{C_1} = 45\pi$

Para o cilindro C_2, de raio medindo 5 cm e altura medindo 3 cm, obtemos:

$V_{C_2} = \pi \cdot 5^2 \cdot 3$

$V_{C_2} = \pi \cdot 25 \cdot 3$

$V_{C_2} = 75\pi$

Portanto, o cilindro C_2 é o cilindro reto de maior medida de volume.

A resolução e comentários do **exercício 20** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

No **exercício 21**, a figura pode auxiliar a compreensão do texto do enunciado. Ressalte esse fato para os estudantes e, se necessário, analise com eles as características da figura.

Eles devem perceber que 8 m³ é a medida do volume correspondente a um cilindro de altura de medida $(h - 2)$ e diâmetro da base medindo 1 m, resultando em um raio que mede 0,5 m. Assim:

$V_{cilindro}$ = (medida da área da base) · (medida da altura do cilindro)

$8 = \pi \cdot (0{,}5)^2 \cdot (h - 2)$

$8 = \frac{\pi}{4} \cdot (h - 2)$

$8 \cdot \frac{4}{\pi} = \frac{\pi}{4} \cdot (h - 2) \cdot \frac{4}{\pi}$

$\frac{32}{\pi} = h - 2$

$\frac{32}{\pi} + 2 = h - 2 + 2$

$h = \frac{32}{\pi} + 2 \simeq 10 + 2$

$h \simeq 12$

Portanto, deve-se cavar um poço de aproximadamente 12 m de profundidade.

Acompanhe um exemplo.

Vamos calcular a medida aproximada do volume de um pacote de bolachas recheadas que tem 25 bolachas circulares com 4 cm de medida de diâmetro e altura medindo 8 mm cada uma.

A medida do raio, em cm, é metade da medida do diâmetro; logo, $r = 4 : 2 = 2$.

A medida da área, em cm², da base é aproximadamente igual a $S_b \simeq 3{,}14 \cdot 2^2 = 12{,}56$.

Devemos escrever a medida da altura com a mesma unidade de medida dos outros elementos. A altura de cada bolacha mede 8 mm, ou seja, 0,8 cm.

Logo, a altura do pacote de bolachas, em cm, é dada por: $h = 25 \cdot 0{,}8 = 20$.

Agora, podemos calcular a medida do volume do pacote de bolachas, em cm³:

$V_b \simeq 12{,}56 \cdot 20 = 251{,}2$

O pacote de bolachas tem aproximadamente 251,2 centímetros cúbicos de volume.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

19 Dadas as medidas do raio e da altura, qual é o cilindro reto de volume com maior medida, C_1 ou C_2? **19.** C_2, pois $V_1 = 45\pi$ e $V_2 = 75\pi$.

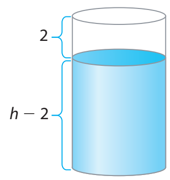
C_1: raio r_1 medindo 3 cm e altura h_1 medindo 5 cm

C_2: raio r_2 medindo 5 cm e altura h_2 medindo 3 cm

20 Pesquise três embalagens cilíndricas de tamanhos diferentes, obtendo, com uma régua, as medidas aproximadas do raio e da altura. Depois, calcule as medidas aproximadas dos volumes dessas embalagens. **20.** Resposta pessoal.

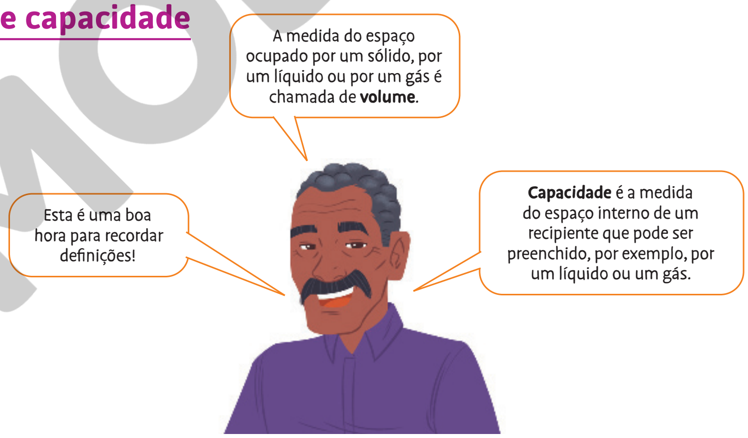
Sugestão: lata de óleo comestível, lata de milho/ervilha, lata de atum, galão de tinta etc.

21 Bruno é poceiro e costuma utilizar uma máquina para fazer poços com diâmetro medindo 1 m. Ele sabe que em um terreno a água começa a aflorar com 2 m de medida de profundidade e quer um poço que, depois de pronto, tenha cerca de 8 m³ de água. Ao todo, Bruno terá de cavar um poço de aproximadamente quantos metros de medida de profundidade? **21.** 12 m



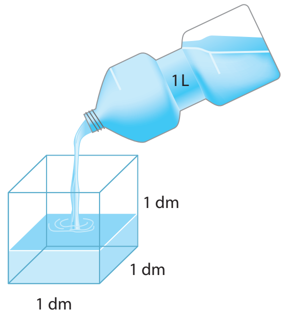
ALEX ARGOZINO/ ARQUIVO DA EDITORA

Volume e capacidade



ARTUR FUJITA/ ARQUIVO DA EDITORA

Já estudamos que o litro corresponde à medida da capacidade de um recipiente cúbico com 1 dm de medida de aresta, ou seja, a medida do volume ocupado por 1 L de líquido é 1 dm^3.



NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$

ARTUR FUJITA/ARQUIVO DA EDITORA

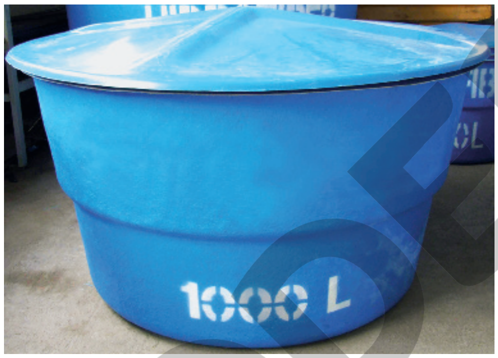
Então, podemos escrever as seguintes relações:

- $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$
  $1\,000 \text{ mL} = 1\,000 \text{ cm}^3$
  $1 \text{ mL} = 1 \text{ cm}^3$
- $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$
  $1\,000 \text{ L} = 1\,000 \text{ dm}^3$
  $1\,000 \text{ L} = 1 \text{ m}^3$

STUDIO BM/SHUTTERSTOCK

Pequenas quantidades de líquido podem ser medidas em um copo graduado.

JULIO COSTA/FUTURA PRESS



Nesta caixa-d'água cabe 1 m^3 de líquido.

(As imagens não respeitam as proporções reais entre os objetos.)

Acompanhe dois exemplos de conversão de unidades de medida de volume em unidades de medida de capacidade.

a) 1,2 m^3 em litro.
Como $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$, temos:
$1{,}2 \text{ m}^3 = 1\,200 \text{ L}$

b) 3 200 cm^3 em centilitro.
Inicialmente, transformamos 3 200 cm^3 em dm^3:
$3\,200 \text{ cm}^3 = 3{,}2 \text{ dm}^3$
Como $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$, temos:
$3\,200 \text{ cm}^3 = 3{,}2 \text{ L} = 320 \text{ cL}$

Volume e capacidade

Promova uma discussão sobre os conceitos de capacidade e volume, comparando os dois conceitos. Assim, os estudantes expõem o que sabem acerca deles. Trabalhe com eles algumas relações entre as unidades de medida de capacidade e de volume, promovendo o desenvolvimento da habilidade (EF08MA20).

Se julgar conveniente, faça a experiência de utilizar uma caixa cúbica de 1 dm^3 de capacidade para preenchê-la com a areia contida em uma garrafa de 1 litro, o que evidenciará a relação $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$.

O cálculo da medida do volume da caixa cúbica promove o desenvolvimento da habilidade (EF08MA21).

Partindo da relação linear 1 dm = 10 cm, é interessante mostrar aos estudantes como obter esta outra relação:

$1\,000 \text{ mL} = 1\,000 \text{ cm}^3$

Exercícios propostos

O **exercício 24** pode ser feito em duplas. Caso julgue necessário, analise o texto com os estudantes. Ao final, peça a cada dupla que crie outras questões sobre esse texto e troquem-nas com outra dupla: cada uma responde às questões elaboradas pela outra. Compartilhe todas as questões e as respostas, fazendo uma correção coletiva com a turma. Essa é mais uma oportunidade para o desenvolvimento da **competência geral 9**. O trabalho em grupo valoriza a diversidade de ideias e propicia o exercício da empatia, do diálogo e da cooperação, com o objetivo de chegar a um resultado em comum.

Ao apresentar aos estudantes dados sobre as demandas de água no Brasil, converse com eles sobre o impacto dessas demandas no meio ambiente e a necessidade de ações de planejamento para que ocorra o consumo consciente e para evitar crises hídricas, cada vez mais comuns no Brasil nos últimos anos. Esse exercício possibilita o trabalho com o Tema Contemporâneo Transversal **meio ambiente**. Converse com os estudantes sobre a demanda de água na cidade ou região onde residem. Pergunte a eles se já ouviram falar em crise hídrica em sua região e se sabem quais são os possíveis impactos dessa crise em seu dia a dia e no meio ambiente. Converse também sobre as atitudes que podem ser tomadas para evitar o aumento na demanda de água e evitar uma crise hídrica (**item e**).

Para o **item a**, temos:

$965\ m^3/s - 640\ m^3/s = 325\ m^3/s$

Logo, o aumento no uso consuntivo de água foi de $325\ m^3/s$.

No **item b**, temos:

$2\,770\ m^3/s - 1\,947\ m^3/s = 823\ m^3/s$

E $823\ m^3/s$ corresponde a um aumento de 26 trilhões de litros de água extraídos de mananciais ao ano. Se esse aumento fosse de $100\ m^3/s$, obteríamos:

$$\frac{26\,000\,000\,000\,000 \cdot 100}{823} \simeq$$

$\simeq 3\,159\,173\,754\,556$

Portanto aproximadamente 3,16 trilhões de litros de água seriam extraídos de mananciais em um ano, que equivale a 3,16 bilhões de m^3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

22. d) 30 mL **22. b)** 5 400 L **22. c)** 0,030 L

22 Escreva a conversão de:

a) $12\ dm^3$ em L;
b) $5{,}4\ m^3$ em L;
c) $30\ cm^3$ em L;
d) $30\ cm^3$ em mL;
e) $500\ mm^3$ em mL;
f) $0{,}25\ m^3$ em L.

22. a) 12 L **22. e)** 0,5 mL **22. f)** 250 L

23 Qual é a medida da capacidade, em litro, de uma caixa cúbica com 0,80 m de aresta? **23.** 512 L

24 Leia o texto e responda às questões.

Evolução das demandas de água no Brasil

A demanda de água no Brasil vem crescendo continuamente ao longo dos anos, com destaque para o abastecimento das cidades, a indústria e a agricultura irrigada. A retirada para irrigação aumentou de 640 para 965 m^3/s nas últimas duas décadas e representa aproximadamente 50% da retirada total pelos **usos consuntivos** setoriais de água em 2020 — esse setor tem grande potencial de expansão e continuará liderando o crescimento das retiradas.

Estima-se um aumento de 42% das retiradas de água nos próximos 20 anos (até 2040), passando de 1 947 m^3/s para 2 770 m^3/s, um incremento de 26 trilhões de litros ao ano extraídos de mananciais. Esses dados reforçam a necessidade de ações de planejamento para que os usos se desenvolvam com segurança hídrica, evitando crises hídricas e proporcionando os usos múltiplos da água, principalmente quando considerados os efeitos das mudanças climáticas no ciclo da água.

[...] As mudanças climáticas tendem a acelerar alguns usos, especialmente na agropecuária e na agroindústria. A demanda para a irrigação, por exemplo, pode ter um acréscimo de 15% em 2040 em relação à demanda tendencial (com base no clima médio atual). Nas regiões de irrigação mecanizada (excluindo o arroz sob inundação), a demanda pode ter um acréscimo de 20% em um cenário mais crítico de mudança do clima.

Fonte: AGÊNCIA Nacional de Águas e Saneamento Básico (ANA). **Conjuntura dos Recursos Hídricos no Brasil 2021**: Relatório Pleno. Disponível em: https://relatorio-conjuntura-ana-2021.webflow.io/capitulos/usos-da-agua. Acesso em: 20 mar. 2022.

Usos consuntivos: usos que consomem água.

a) De anos anteriores para 2020, de quantos m^3/s foi o aumento no uso consuntivo de água? **24. a)** 325 m^3/s

b) Segundo o texto, ao passar de 1 947 m^3/s para 2 770 m^3/s, há um aumento de 26 trilhões de litros de água extraídos de mananciais ao ano. Se esse aumento fosse de 100 m^3/s, aproximadamente, quantos litros de água seriam extraídos de mananciais em um ano? Essa quantidade equivale a quantos metros cúbicos de água?

c) Sabendo que, em 2020, a irrigação foi responsável por uma retirada de 942 m^3/s de água, se a previsão de acréscimo para 2040 for entre 15% e 20%, como o estimado, de quanto será a retirada de água pela irrigação neste ano? **24. c)** De 1 083,3 m^3/s a 1 130,4 m^3/s.

d) O que pode causar o aumento desenfreado do consumo da água? **24. d)** Mudanças climáticas.

e) Converse com o professor e os colegas sobre ações que podem ser planejadas para evitar o aumento no uso de água e não gerar uma crise hídrica no país. **24. e)** Resposta pessoal.

25 Em determinado mês, um hidrômetro registrou o consumo mensal de água de uma casa de 22 m^3. Quantos litros de água foram gastos nessa residência? **25.** 22 000 L

26 Reúna-se com um colega e pesquisem o número estimado de habitantes do município em que vocês vivem. Depois, façam uma estimativa da quantidade de domicílios que existem nele. Para fazerem a estimativa, utilizem 2,9 como o número médio de moradores em uma residência. Em seguida, resolvam a questão.

Supondo que, em média, os domicílios tenham uma caixa-d'água com capacidade de 500 L, calculem quanto tempo um sistema com vazão de 56 m^3/s levaria para encher todas as caixas-d'água. **26.** A resposta depende da população da cidade.

27 Junte-se a um colega e façam o que se pede.

Leiam com atenção as informações a seguir.

Aquífero Guarani

O Aquífero Guarani encontra-se sob área de quatro países: Brasil, Uruguai, Argentina e

24. b) 3,16 trilhões de litros de água ou 3,16 bilhões de metros cúbicos de água.

264

A resolução do **item c** possibilita o desenvolvimento da habilidade (EF08MA04). Para essa resolução é preciso determinar 15% de 942 m^3/s e 20% de 942 m^3/s.

$$\frac{15}{100} \cdot 942 = \frac{14\,130}{100} = 141{,}3$$

$$\frac{20}{100} \cdot 942 = \frac{18\,840}{100} = 188{,}4$$

Assim, a retirada de água pela irrigação em 2040 será entre 1 083,3 m^3/s ($942 + 141{,}3 = 1\,083{,}3$) e 1 130,4 m^3/s ($942 + 188{,}4 = 1\,130{,}4$).

No **item d**, de acordo com o texto, o aumento desenfreado do consumo da água pode ser causado por mudanças climáticas.

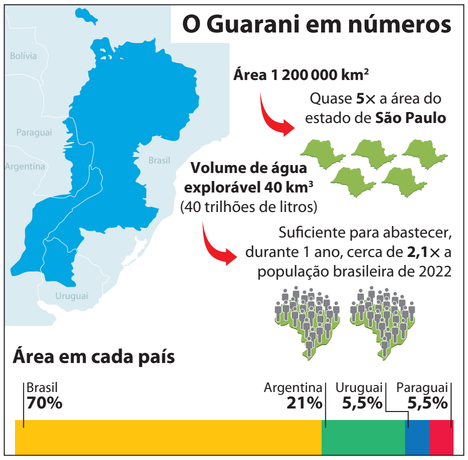
As resoluções e comentários dos **exercícios 22**, **23**, **25** e **26** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Paraguai. [...] Com uma extensão calculada em mais de 1 milhão de km², somente no estado de São Paulo abastece total ou parcialmente [...] cerca de 200 cidades. Só a área de recarga tem 46 211 km² que equivale a 4,6 milhões de hectares. É considerado um dos maiores reservatórios de água subterrânea do planeta, com 37 000 km³ de água de capacidade e um volume anual de 163 km³ de fluxo de recarga. [...]

[...] Desde 2009 o Aquífero Guarani entrou no estado que se chama "rebaixando", ou seja, seu volume de recarga é inferior ao volume de água retirado. Em Ribeirão Preto, por exemplo, a taxa de retirada já foi 30 vezes o volume de recarga. [...]

Fonte: GIGANTE Guarani. Aquífero Guarani. *Site* **Gigante Guarani**. Botucatu, [2015?]. Disponível em: https://giganteguarani.org.br/aquifero-guarani/. Acesso em: 14 jul. 2022.

RENAN ORACIC/ARQUIVO DA EDITORA



Dados obtidos em: COMPANHIA Ambiental do Estado de São Paulo. **Águas Subterrâneas**. São Paulo: CETESB, [c. 2010]. Disponível em: https://cetesb.sp.gov.br/aguas-subterraneas/programa-de-monitoramento/consulta-por-aquiferos-monitorados/aquifero-guarani/. Acesso em: 14 jul. 2022.

INSTITUTO Brasileiro de Geografia e Estatística. **Projeção da população do Brasil e das Unidades da Federação**. Rio de Janeiro: IBGE, 2022. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/apps/populacao/projecao/. Acesso em 14 jul. 2022.

27. a) 40 bilhões de metros cúbicos.

Agora, respondam às questões.

a) Quantos metros cúbicos de água são exploráveis no Aquífero Guarani?

b) Considerando o infográfico qual seria a medida de área aproximada do estado de São Paulo? **27. b)** 240 000 km²

c) Segundo o texto, o município de Ribeirão Preto já chegou a retirar um volume de água 30 vezes maior que o volume reposto no sistema. Para uma reposição de 10 000 litros de água, quantos metros cúbicos teriam sido retirados? **27. c)** 300 m³

28 Uma piscina tem 8 m de medida de comprimento, 4 m de medida de largura e 1,60 m de medida de profundidade. Ela está com água ao nível de 1,50 m.

Se 10 pessoas mergulhassem nessa piscina e o nível da água subisse 2 cm, qual seria a medida do volume médio do corpo de cada uma dessas pessoas em decímetro cúbico? **28.** 64 dm³

29 Durante uma pesquisa, um cientista precisou realizar várias etapas. Foram três etapas diárias durante 10 dias. Em cada etapa, eram acrescentados 3 mL de um fármaco em uma solução. Quantos centímetros cúbicos desse fármaco foram acrescentados na solução durante a pesquisa? **29.** 90 cm³

30 Os médicos recomendam que uma pessoa beba pelo menos 2 litros de água por dia. Uma única goteira pode desperdiçar 150 litros de água por dia. Determine o tempo, em dia, que essa quantidade de água seria suficiente para uma pessoa beber, atendendo à recomendação médica mínima. **30.** 75 dias.

31 Leia o texto a seguir e responda às questões.

> O etanol ou álcool etílico pode ser produzido a partir de matérias-primas, como milho, beterraba ou cana-de-açúcar. No Brasil, o modelo mais utilizado é o da cana. Essa opção tem algumas vantagens, pois é mais produtiva do que o combustível extraído do milho e causa um impacto menor ao meio ambiente. Se um hectare de milho rende 3 mil litros de etanol, a mesma área equivale a 7,5 mil litros no caso da cana. [...]

JOSÉ LUÍS JUHAS/ARQUIVO DA EDITORA

Fonte: ESTADÃO. Como ocorre a produção de etanol a partir da cana-de-açúcar? **Estadão**. São Paulo, 8 jun. 2021. Canal Agro. Disponível em: https://summitagro.estadao.com.br/noticias-do-campo/como-ocorre-a-producao-de-etanol-a-partir-da-cana-de-acucar/. Acesso em: 20 mar. 2022.

a) Quantas vezes mais etanol rende a cana-de-açúcar em relação ao milho? **31. a)** 2,5 vezes.

b) Em 2020/2021, o estado de São Paulo colheu cerca de 4,3 milhões de hectares de cana-de-açúcar, sendo o maior produtor nacional. Se toda essa cana fosse destinada à produção de etanol, quantos litros seriam obtidos? **31. b)** 32 250 000 000 L

265

Exercícios propostos

O **exercício 27** possibilita ampliar a compreensão dos estudantes quanto à relação entre litro e metro cúbico e sua aplicação na resolução de problemas que envolvem o cálculo de medidas de capacidade e de volume, desenvolvendo, assim, a habilidade (EF08MA20).

Para responder às questões, os estudantes devem buscar informações nos textos apresentados e no infográfico. Por isso, caso eles ainda tenham dificuldades em interpretação de texto, é importante fazer a leitura com a turma, apontando os dados mais importantes do texto e perguntando aos estudantes sobre seus significados.

No **item a**, o infográfico mostra que o volume de água explorável no Aquífero Guarani mede 40 trilhões de litros, que equivale a 40 bilhões de metros cúbicos. Lembre aos estudantes que 1 m³ = 1000 L ou $1\ \text{L} = \frac{1}{1000}\ \text{m}^3$, assim:

$$40\,000\,000\,000\,000\ \text{L} =$$
$$= \frac{40\,000\,000\,000\,000}{1\,000}\ \text{m}^3 =$$
$$= 40\,000\,000\,000\ \text{m}^3$$

No **item b**, de acordo com o infográfico, 1 200 000 km² correspondem a cinco vezes a medida da área do estado de São Paulo; portanto, essa área deve medir 240 000 km² (1 200 000 : 5 = 240 000).

No **item c**, como o volume de água retirado é 30 vezes maior que o volume reposto no sistema, para uma reposição de 10 000 litros de água, obtemos:

$$10\,000 \cdot 30 = 300\,000$$

Como 1 m³ = 1 000 L, 300 000 : 1 000 = 300; portanto, 300 metros cúbicos de água teriam sido retirados.

As resoluções dos **exercícios 28** a **31** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Pense mais um pouco...

Verifique se os estudantes percebem a regularidade apresentada no quadro: a cada minuto, o volume de água despejada dobra, originando a sequência:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

Espera-se que eles percebam que essa é a sequência das potências de base 2 com expoente natural.

$2^0 \rightarrow$ 1º termo
$2^1 \rightarrow$ 2º termo
$2^2 \rightarrow$ 3º termo
$2^3 \rightarrow$ 4º termo
$2^4 \rightarrow$ 5º termo
$2^5 \rightarrow$ 6º termo
$2^6 \rightarrow$ 7º termo
$2^7 \rightarrow$ 8º termo
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Desse modo, eles podem identificar que o enésimo termo dessa sequência é dado por 2^{n-1}, em que n é a posição do termo na sequência, ou seja, n é um número natural maior que zero; dessa maneira, mobilizam a habilidade (EF08MA10).

Considerando que essa sequência continue indefinidamente, pergunte a eles qual é a medida do volume de água despejada no 12º minuto. Eles devem perceber que o valor procurado corresponde ao 12º termo da sequência, ou seja, é dado por

2^{n-1}, para $n = 12$.

Assim: $2^{12-1} = 2^{11} = 2\,048$, ou seja, no 12º minuto foram despejados 2 048 litros de água.

No **item b**, os estudantes devem perceber que precisam adicionar as medidas dos volumes despejados do 1º ao 8º minuto.

As resoluções das atividades estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Exercícios complementares

Este bloco de exercícios trabalha os principais conceitos estudados no capítulo. Espera-se que os estudantes utilizem os conhecimentos construídos, percebendo se ainda têm alguma dificuldade.

No **exercício 7**, peça a eles que justifiquem a resposta dada. Ao expor suas ideias, os estudantes podem detectar possíveis equívocos no procedimento que utilizaram ou auxiliar colegas que não entenderam o enunciado.

Pense mais um pouco... FAÇA A ATIVIDADE NO CADERNO

O cano de alimentação de um tanque despeja água no ritmo que mostra o quadro.

Considerando que, inicialmente, o tanque está vazio, responda às questões.

Tempo	Medida do volume de água despejada
1º minuto	1 L
2º minuto	2 L
3º minuto	4 L
4º minuto	8 L

a) Quantos litros de água o cano de alimentação despeja no tanque no 5º minuto? E no 6º? E no 7º? E no 8º? *Pense mais um pouco...*: **a)** 16 L; 32 L; 64 L; 128 L.
b) Após 8 minutos, esse tanque fica com água até a metade. Quantos litros de água ele contém nesse momento? **b)** 255 L
c) Após 8 minutos, aproximadamente quantos minutos ainda serão necessários para o tanque ficar cheio? **c)** 1 minuto.

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES

FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

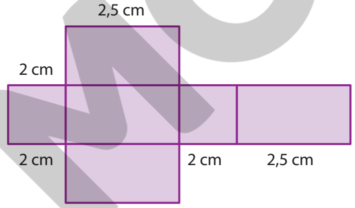
3. 60°. Não é possível determinar a maior medida do ângulo interno de um polígono regular.

1 Um polígono regular tem a soma das medidas dos seus ângulos internos igual a 2 520°. Determine a medida do ângulo:
a) central desse polígono; **1. a)** 22,5°
b) interno desse polígono; **1. b)** 157,5°
c) externo desse polígono. **1. c)** 22,5°

2 Quantos lados tem, se existir, um polígono regular em que o ângulo:
a) central mede 9°? **2. a)** 40 lados.
b) interno mede 30°? **2. b)** Não existe.
c) externo mede 10°? **2. c)** 36 lados.

3 Qual é a menor medida do ângulo interno de um polígono regular? E a maior?

4 A figura a seguir é a planificação da superfície de um paralelepípedo retângulo. Calcule a medida do volume, em milímetro cúbico, desse paralelepípedo. **4.** 6 500 mm³

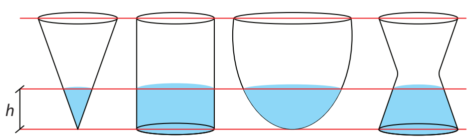


NELSON MATSUDA/ARQUIVO DA EDITORA

5 Qual é a medida do volume de argila necessária para fabricar 1 000 tijolos com as seguintes medidas: 22 cm de comprimento, 10 cm de largura e 5 cm de altura? **5.** 1 100 dm³

6 Uma caixa cilíndrica tem 25 cm de medida de raio, 100 cm de medida de altura e está cheia de água. Considere $\pi = 3{,}14$.
a) Calcule a medida da capacidade dessa caixa em litro. **6. a)** 196,25 L
b) Calcule a medida da massa da água contida nessa caixa. (Considere que a massa de 1 cm³ equivale a 1 g.) **6. b)** 196 250 g

7 (Saresp) Se dobrarmos o volume de água contida em cada um dos recipientes indicados na figura, a altura h da água dobrará apenas no(s) recipiente(s): **7.** Alternativa **c**.



ALEX ARGOZINO/ARQUIVO DA EDITORA

a) 4. b) 3. c) 2. d) 1.

8 (Saresp) Na casa de Mariana o gasto diário de água com descargas correspondia a $\frac{2}{5}$ da capacidade da caixa-d'água. Com a troca por descargas mais econômicas, esse consumo passou a ser de $\frac{1}{4}$ da capacidade da mesma caixa-d'água. Logo, a fração da caixa-d'água economizada com essa troca foi de: **8.** Alternativa **b**.

a) $\frac{1}{20}$
b) $\frac{3}{20}$
c) $\frac{2}{4}$
d) $\frac{1}{5}$

No **exercício 8**, espera-se que eles percebam que devem comparar as frações dadas (pois são referentes à mesma capacidade) e determinar a diferença entre elas.

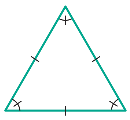
As resoluções dos **exercícios 1** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

VERIFICANDO

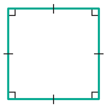
FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

1 Qual dos polígonos a seguir não é regular? **1. Alternativa d.**

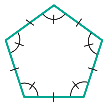
a)



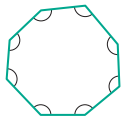
c)



b)



d)



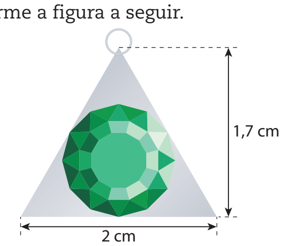
WLAMIR MIASIRO/ARQUIVO DA EDITORA

2 Um hexágono circunscrito terá quantos pontos em comum com a circunferência?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

2. Alternativa c.

3 Um pingente de colar tem uma estrutura de prata triangular e uma pedra circular de quartzo verde, de diâmetro medindo 1,1 cm, conforme a figura a seguir.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

Qual é a medida aproximada da área da superfície da estrutura triangular que fica visível nesse pingente?

a) 2,8 cm² b) 1,7 cm² c) 0,95 cm² d) 0,75 cm²

3. Alternativa d.

4 Qual é a medida do ângulo interno de um polígono regular de 20 lados? **4. Alternativa b.**

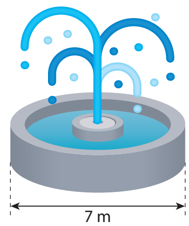
a) 180° b) 162° c) 150° d) 130°

5 Um polígono regular tem 8 lados. Qual é a soma das medidas de seus ângulos internos?

a) 1 080° c) 1 440°
b) 1 260° d) 1 800°

5. Alternativa a.

6 A prefeitura de um município irá instalar uma fonte circular em uma praça pública. O diâmetro da fonte mede 7 m, conforme indica a figura a seguir.



ERICSON GUILHERME LUCIANO/ARQUIVO DA EDITORA

As medidas aproximadas da área que a fonte ocupará na praça e do comprimento da circunferência da fonte são, respectivamente:

a) 38,5 m² e 22 m. c) 76,9 m² e 22 m.
b) 38,5 m² e 11 m. d) 153,9 m² e 43 m.

6. Alternativa a.

7 Um copo cilíndrico tem altura de medida igual a 12 cm e raio da base medindo 3 cm. Ele está com água até a metade de sua capacidade. Quantos mililitros de água há no copo?

a) 113,04 mL c) 339,12 mL
b) 169,56 mL d) 678,64 mL

7. Alternativa b.

8 Uma garrafa de 2 L de suco teve seu conteúdo inteiramente distribuído em copos de 400 cm³. A quantidade de copos totalmente preenchidos de suco foi: **8. Alternativa c.**

a) 3 copos. c) 5 copos.
b) 4 copos. d) 8 copos.

Organizando

Organizando: As respostas para estas questões estão no *Manual*.

Vamos organizar o que você aprendeu neste capítulo? Para isso, responda às questões a seguir.

a) O que caracteriza um polígono como regular?
b) Considere uma circunferência inscrita em um polígono regular. Qual é a relação entre os lados desses polígonos e os pontos de tangência?
c) Qual é a relação entre a medida do ângulo central de um polígono regular e a quantidade de lados desse polígono?
d) Escreva a fórmula que relaciona a medida do ângulo interno de um polígono regular e a soma das medidas de seus ângulos internos.
e) Qual é a medida da área de um círculo de raio de medida r?
f) Qual é a medida do volume de um cilindro circular reto com raio de medida r e altura de medida h?
g) Como você explicaria para um colega a diferença entre volume e capacidade?

267

Organizando

Incentive os estudantes a organizar seus aprendizados no caderno, fazendo resumos, mapas conceituais, fluxogramas ou aplicando destaques em conceitos importantes.

As questões propostas têm como objetivo fazer com que eles retomem os conteúdos estudados no capítulo e reflitam sobre algumas temáticas. Após sua correção é importante pedir aos estudantes que compartilhem suas respostas. Essa estratégia permitirá o compartilhamento de dúvidas e percepções sobre o conteúdo, contribuindo para o aprendizado de todos.

As resoluções das questões estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

Verificando

Esses testes são mais uma oportunidade para o estudante validar o entendimento do conteúdo estudado neste capítulo. Instrua-os a retornar às páginas anteriores caso alguma dúvida persista.

No **teste 1**, lembre-os das características dos polígonos regulares. Dos polígonos apresentados, o único que não tem todos os seus lados congruentes entre si e todos os seus ângulos congruentes entre si é o octógono da alternativa **d**.

No **teste 2**, lembre aos estudantes que um polígono circunscrito tem todos os seus vértices pertencentes à circunferência. Um hexágono tem 6 vértices; logo, tem 6 pontos em comum com a circunferência; portanto, a alternativa **c** é a correta.

Para a resolução do **teste 3**, lembre os estudantes do cálculo da medida da área de uma superfície triangular $\left(S_T = \dfrac{b \cdot h}{2}\right)$ e do cálculo da medida da área de uma superfície circular ($S_C = \pi r^2$).

A medida da área do triângulo é $1{,}7 \text{ cm}^2 \left(\dfrac{2 \cdot 1{,}7}{2} = 1{,}7\right)$.

A medida da área circular da pedra de raio medindo $r = 0{,}55$ cm é aproximadamente $0{,}95 \text{ cm}^2$ ($\pi \cdot 0{,}55^2 = 0{,}9485 \simeq 0{,}95$).

Portanto, a área da superfície da estrutura triangular do pingente mede aproximadamente $0{,}75 \text{ cm}^2$ ($1{,}7 - 0{,}95 = 0{,}75$), e a alternativa **d** é a correta.

Para a resolução do **teste 4**, lembre os estudantes do cálculo da medida do ângulo interno de um polígono regular:

$$\left(a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}\right)$$

Assim, para $n = 20$, obtemos:

$$a_i = \frac{(20-2) \cdot 180°}{20} = 162°$$

Logo, a alternativa **b** é a correta.

As resoluções dos **exercícios 5** a **8** estão no início deste *Manual*, nas orientações específicas do capítulo 12.

LISTA DE SIGLAS

Enem — Exame Nacional do Ensino Médio
Etec-SP — Escola Técnica Estadual de São Paulo
FCC — Fundação Carlos Chagas
FESPSP — Fundação Escola de Sociologia e Política de São Paulo
FGV-SP — Fundação Getulio Vargas
OBM — Olimpíada Brasileira de Matemática
Obmep — Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Saresp — Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
Ufac — Universidade Federal do Acre
UFMG — Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS — Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFSE — Universidade Federal de Sergipe
UFSM-RS — Universidade Federal de Santa Maria
Ulbra-RS — Universidade Luterana do Brasil
Uneb-BA — Universidade do Estado da Bahia
Unifor-CE — Universidade de Fortaleza
Unirio-RJ — Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Univali-SC — Universidade do Vale do Itajaí
UPF-RS — Universidade de Passo Fundo
Vunesp — Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

SUGESTÕES DE LEITURA PARA O ESTUDANTE

A seguir, indicamos alguns livros para você. Faça uma boa leitura!

91 truques matemáticos legais: para fazer você suspirar!

Anna Claybourne. Editora Pé da Letra, 2021.

Nesse livro você encontrará fatos, atividades e truques matemáticos. Poderá usá-los para criar códigos e explorar diferentes padrões numéricos, enquanto surpreende amigos e familiares.

A face oculta – uma história de *bullying* e *cyberbullying*

Maria Tereza Maldonado. Editora Saraiva, 2009.

Humilhação, hostilidade, ataque, difamação e covardia é uma fórmula que tem nome: *bullying* ou *cyberbullying*. Luciana sabe bem o que é isso. Ela fica até altas horas em seu computador, trocando mensagens com muitos amigos de sua rede de relacionamentos e interagindo com outros usuários de jogos *on-line*. Acha a realidade virtual muito mais interessante do que o "mundo real". No entanto, quando Marcelo a escolhe como alvo e começa a bombardeá-la com mensagens ofensivas pelo celular e pelo computador, Luciana fica transtornada, sem saber como agir com esse inimigo desconhecido. A situação se agrava no colégio quando Leonardo envolve Marcelo na prática do *cyberbullying* para difamar Henry, outra vítima desse tipo de afronta. Luciana e Henry são as vítimas. Leonardo e Marcelo, os agressores. Quem vai tomar uma atitude para coibir essa guerra?

Educação financeira: um guia de valor

Flávia Aidar, Januária Cristina Alves (coordenação). Editora Moderna, 2016.

Para que serve o dinheiro? Qual é a sua importância em nossa vida? O que o modo como lidamos com ele tem a ver com as escolhas que fazemos? Essas e outras questões norteiam esse livro, que pretende ser um guia para que a educação financeira saia da teoria e entre, de verdade, no nosso cotidiano.

O código polinômio

Luzia Faraco Ramos, Editora Ática, 2007. (Coleção A Descoberta da Matemática.)

O relógio antigo do pai de Leo desaparece, e o ladrão deixa como pista desafios matemáticos. Leo pede a ajuda da professora Paula para desvendar os códigos, o que acaba por despertar o ciúme da namorada Kika. Será que a Matemática vai conseguir solucionar esse problema também?

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

AABOE, A. **Episódios da história antiga da Matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

Essa obra está dividida em 4 capítulos. O primeiro é sobre o sistema numérico e a aritmética na Babilônia. O segundo é sobre a matemática desenvolvida na Grécia em dois momentos: a matemática antes e depois de Euclides, com as suas contribuições para a construção do pentágono regular. O penúltimo é sobre o trabalho de Arquimedes, como as construções de polígonos regulares, a trissecção do ângulo e a construção do heptágono regular. No último, conhecemos a tabela trigonométrica de Ptolomeu.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo padrões em mosaicos**. 3. ed. São Paulo: Atual, 2001.

A obra convida a descobrir e criar padrões, particularmente no campo da Geometria euclidiana, relativos à pavimentação de superfícies planas.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de Matemática. 5. ed. São Paulo: CAEM/IME - USP, 2004.

A autora disserta sobre a importância de trabalhar com jogos nas aulas de Matemática. Apresenta ainda alguns exemplos de jogos e como fazer a avaliação dos estudantes.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

Edição dividida em 24 capítulos que contemplam desde os vestígios matemáticos encontrados nas culturas primitivas até as tendências recentes e perspectivas futuras para a matemática. Apresenta uma cobertura atualizada de tópicos como o último teorema de Fermat e a conjectura de Poincaré, além de avanços recentes em áreas como a teoria dos grupos finitos e demonstrações com o auxílio do computador.

BRACKMANN, C. P. **Desenvolvimento do Pensamento Computacional Através de Atividades Desplugadas na Educação Básica**. 2017. Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, RS, Brasil, 2017. (Tese de doutorado no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação do Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação). Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 25 abr. 2022.

Essa pesquisa teve como objetivo verificar a possibilidade de desenvolver o pensamento computacional na Educação Básica utilizando exclusivamente atividades desplugadas (sem o uso de computadores).

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. 2018. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

Documento oficial do Ministério da Educação que apresenta as competências e habilidades a serem desenvolvidas em cada área do conhecimento na Educação Infantil, no Ensino Fundamental e no Ensino Médio de todo o país.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/julho-2013-pdf/13677-diretrizes-educacao-basica-2013-pdf/file. Acesso em: 25 abr. 2022.

Documento do Ministério da Educação que define as diretrizes curriculares da Educação Básica no país.

269

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: proposta de práticas de implementação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Elaborado pelo Ministério da Educação, guia prático com explicações e orientações a respeito dos temas contemporâneos transversais.

CASTRUCCI, B. **Fundamentos da Geometria**: estudo axiomático do plano euclidiano. Rio de Janeiro: LTC, 1978.

Apresenta um estudo axiomático da Geometria inspirado nas ideias de David Hilbert e em cursos ministrados em universidades.

CENTURION, M. **Conteúdo e metodologia da Matemática**: números e operações. 2. ed. São Paulo: Scipione, 1995.

A obra baseia-se na ideia de que o estudante constrói seu próprio conhecimento por meio de suas ações e problematizações. Aborda as principais dúvidas tanto do estudante de pedagogia quanto do professor das séries iniciais do Ensino Fundamental.

COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1994.

Essa obra apresenta uma coleção de artigos relacionados a diferentes temáticas relacionadas com o ensino de Álgebra, como equações, expressões, resolução de problemas e uso da calculadora.

CRESPO, A. A. **Estatística fácil**. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

Com uma linguagem objetiva, esse livro traz uma abordagem introdutória de Estatística.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. 12. ed. São Paulo: Ática, 1999.

Abordando a resolução de problemas matemáticos e sua importância no ensino, esse livro representa uma valiosa contribuição para a melhoria da prática de educação matemática. Propõe uma discussão dos fatores que atuam de forma negativa no aprendizado, por meio da classificação dos tipos de problemas e das etapas envolvidas na resolução.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética**. 3. ed. São Carlos: Edufsc, 2021.

Esse livro é uma introdução à teoria dos números. Apresenta um estudo da divisibilidade relacionada aos números naturais e, depois, ampliada para os números inteiros. Apresenta, também, o desenvolvimento de algumas partes da análise matemática como pré-requisito para o estudo da teoria da representação decimal dos números reais.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. 5. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

Apresentado de forma cronológica, o livro inicia com uma abordagem sobre a história dos números, passando por diferentes sistemas de numeração e relatando diferentes temáticas da história da Matemática até o século XX.

HOUAISS, A. **Minidicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. 3. ed. Rio de Janeiro: Objetiva, 2008.

Dicionário da Língua Portuguesa.

IFRAH, G. **História universal dos algarismos**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. Tomo 1.

Livro sobre a história dos sistemas de numeração de diferentes civilizações desde a pré-história, passando por civilizações como a dos egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, hebreus, maias, chineses, hindus e árabes.

KRULIK, S.; REYS, R. E. **A resolução de problemas na Matemática escolar**. São Paulo: Atual, 1994.

Essa obra apresenta uma coleção de 22 artigos de especialistas em educação matemática que poderá ajudar os professores de Matemática a lidar com a resolução de problemas. Os 19 primeiros artigos abordam a resolução de problemas por variados ângulos, sempre com a preocupação de não fugir da realidade da sala de aula. O vigésimo e o vigésimo primeiro artigos se ocupam de medições. O último é uma bibliografia comentada, muito útil para orientar o leitor na busca de mais material sobre o assunto.

LIMA, A. C. P.; MAGALHÃES, M. N. **Noções de Probabilidade e Estatística**. 3. ed. São Paulo: IME-USP, 2001.

Voltado a estudantes de cursos superiores, esse livro apresenta uma introdução à Probabilidade e à Estatística.

LIMA, E. L. **Medida e forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2011. (Coleção do professor de Matemática).

Nesse livro o autor selecionou curiosidades históricas que revelam que a determinação de áreas e volumes está entre as primeiras noções geométricas que despertaram o interesse do homem. Sua opção por introduzir a Geometria situando-a no contexto histórico do seu surgimento torna o livro mais fascinante e facilita o estudo da noção de medida em geometria sob aspectos uni, bi e tridimensional, ou seja, a medida de segmentos de reta (comprimento), de figuras planas (área) e de figuras sólidas (volume).

LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. (org.). **Aprendendo e ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 2005.

Uma das maiores contribuições desse livro é mostrar a importância da Geometria no ensino e na aprendizagem de Matemática. Merece destaque o capítulo que trata do desenvolvimento do pensar geométrico sob a perspectiva das pesquisas do casal Van Hiele, segundo a qual se pode compreender que um trabalho planejado e consistente em aulas especialmente definidas para o estudo de Geometria, baseadas na problematização, é essencial para que os estudantes desenvolvam o pensar geométrico.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

Esse livro considera a Álgebra e a Aritmética como duas faces da mesma atividade, lidando com relações quantitativas e explorando a inter-relação da aprendizagem de uma e de outra. Diante disso, busca identificar de que modo isso sugere mudanças na educação matemática escolar.

271

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

Nesse livro, são apresentados passos para a resolução de problemas. No final, alguns problemas são propostos ao leitor, seguidos por suas respectivas soluções.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

Nessa obra são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Apresenta um olhar crítico de como a história da Matemática tem sido contada ao longo do tempo.

RUSSELL, M. K.; AIRASIAN, P. W. **Avaliação em sala de aula**: conceitos e aplicações. Porto Alegre: Penso, 2014.

Esse livro apresenta a avaliação como um componente-chave para o processo de ensino e aprendizagem. Apresenta ferramentas e abordagens de avaliação que decorrem da introdução das tecnologias computacionais nas escolas.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. **Álgebra**: das variáveis às equações e funções. São Paulo: CAEM/IME - USP, 1996.

Apresenta uma reflexão sobre ensino de Álgebra com propostas de atividades.

SOUZA, E. R. *et al*. **A Matemática das sete peças do tangram**. São Paulo: CAEM/IME - USP, 1997.

Apresenta diferentes atividades que trabalham com a construção do *tangram* com régua e compasso, semelhança dos triângulos do *tangram*, entre outros temas.

TINOCO, L. A. A. *et.al.* **Álgebra**: pensar, calcular, comunicar... 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ/Projeto Fundão, 2011.

Nesse livro são apresentadas atividades que exploram os papéis da Álgebra na Escola Básica e suas possíveis abordagens, para propiciar uma aprendizagem significativa do tema e a construção do sentido do símbolo pelos estudantes.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M. **Didática de Matemática**: como dois e dois – a construção da Matemática. São Paulo: FTD, 1997.

Esse livro traz atividades que possibilitam despertar a intuição matemática, relacionando-as à teoria formal da Matemática.

272

ISBN 978-85-16-13572-0